UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Electrónica y Circuitos
Comunicaciones II
(EC-3423)

Práctica 4. Codificación del canal

Prelaboratorio

Elaborador por:

José Morán - 1410714

Adrián González – 1410433

1. **Construya la matriz G de un código Hamming con m=3 (es decir, (7,4)). Genere las palabras de código correspondientes a todas las posibles combinaciones de datos de entrada y numérelas desde 0 hasta 15. Llame c a la palabra de código k-ésima, donde k representa la suma de los últimos dígitos de los números de carnet de los miembros del grupo (módulo 16). Encuentre de la distancia Hamming entre c y todas las demás**

Una forma de la matriz de Hamming es:

$$G = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Número del bloque	Mensaje	Bits de paridad	Distancia de Hamming
0	0000	000	4
1	0001	011	3
2	0010	110	3
3	0011	101	4
4	0100	111	4
5	0101	100	3
6	0110	001	3
7 (c)	0111	010	0
8	1000	101	7
9	1001	110	4
10	1010	011	4
11	1011	000	3
12	1100	010	3
13	1101	001	4
14	1110	100	4
15	1111	111	3

2. **Tome la palabra código c de la pregunta 1, inserte un error en la posición 2, y encuentre la distancia Hamming entre la palabra errada y todas las palabras del código. Decodifique el bloque eligiendo la palabra código de menor distancia a la recibida. Repita insertando errores en las posiciones 2 y 4. Explique y concluya sobre estos resultados con el mayor detalle posible.**

C = 0011010

Número del bloque	Mensaje	Bits de paridad	Distancia de Hamming
0	0000	000	3

1	0001	011	2
2	0010	110	2
3	0011	101	3
4	0100	111	5
5	0101	100	4
6	0110	001	4
7	0111	010	1
8	1000	101	6
9	1001	110	3
10	1010	011	3
11	1011	000	2
12	1100	010	4
13	1101	001	5
14	1110	100	5
15	1111	111	4

La menor distancia de Hamming ocurre para la palabra 7 por lo tanto, al decodificar, se corrige el error y se obtiene la palabra esperada.

Con dos errores, C = 0010010

Número del bloque	Mensaje	Bits de paridad	Distancia de Hamming
0	0000	000	2
1	0001	011	3
2	0010	110	1
3	0011	101	4
4	0100	111	4
5	0101	100	5
6	0110	001	3
7	0111	010	2
8	1000	101	5
9	1001	110	4
10	1010	011	2
11	1011	000	3
12	1100	010	3
13	1101	001	6
14	1110	100	4
15	1111	111	5

En este caso, la palabra con menor distancia de Hamming es la 2 y se decodifica erróneamente la palabra.

3. **Matlab tiene funciones que le permiten encontrar la matriz G de un código Hamming, generar las palabras códigos y decodificarlas. Encuentre usando la función correspondiente la matriz G de un código Hamming (7,4), genere las palabras códigos y diseñe un ejemplo para verificar que la decodificación es correcta (para este último punto debe insertar un error de 1 bit en alguna de las palabras recibidas y decodificar, repita para un error de 2 bits).**

La función es [H,G,n,k] = hammgen(m), donde

- H: la matriz verificadora de paridad
- G: la matriz generadora del código
- n: la longitud final de la palabra codificada
- k: la longitud de la palabra original (sin codificar)
- m: el número de bits de paridad

Según las definiciones de Matlab, G = [P | I] y $H^T = \left[\frac{I}{P}\right]$, por lo que hay que hacer modificaciones para tenerlas expresadas como en las formas conocidas, G = [I | P] y $H^T = \left[\frac{P}{I}\right]$,

Para el código Hamming (7,4) se ejecuta hammgen(3) y se obtiene

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{n} = 7, \mathrm{k} = 4$$

Nota: la matriz G es diferente a la de la parte 1, por lo tanto, la codificación anterior no es válida para esta G.

Como ejemplo se selecciona el mensaje M = 1010, los bits de paridad son

$$C = M * P = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

Luego, X = [1 0 1 0 0 0 1]

Se verifica que el síndrome para el mensaje sin errores es cero:

$$S = X * H^T = [1010001] * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = [000]$$

Si el segundo bit esta errado, Y = [1 1 0 1 0 0 1], el síndrome resulta

$$S = Y * H^T = [1110001] * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = [011]$$

El síndrome corresponde a la segunda columna de H, indicando que el segundo bit es el errado y se procede a su correcta decodificación.

Si se produce un error tanto en la segunda como en la cuarta posición, se tiene Z = [1 1 1 1 0 0 1] y el síndrome resulta en

$$S = Z * H^T = [1111001] * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = [110]$$

El resultado obtenido indica que el error ocurrió en el primer bit y, por lo tanto, la palabra se decodifica erróneamente.

4. **Suponga que la probabilidad de error de bit sobre el canal es p. Calcule la probabilidad de que en un bloque del código Hamming (7,4) haya 1 error de canal. Repita para 2 errores. Usando estos resultados, obtenga una expresión teórica para la efectividad de corrección de bloques en función de p (suponiendo que la probabilidad de tener más de 2 errores por bloque es despreciable).**

$$Pe = \binom{n}{errores} p^{\#errores} (1-p)^{n-\#errores}$$

Donde:
n : numero de bits de canal de cada bloque de salida.
#errores : número de bits errados.

Entonces si hay un error de canal, se toma:

$$n = 7$$
$$\#errores = 1$$

$$Pe = \binom{7}{1} p^1(1-p)^6$$

$$\binom{7}{1} = \frac{7!}{1!\,(7-1)!} = \frac{7!}{6!} = 7$$

Finalmente:

$$\boldsymbol{Pe1 = 7p^1(1-p)^6}$$

Ahora se realiza el mismo procedimiento para dos errores de canal:

$$n = 7$$
$$\#errores = 2$$

$$Pe2 = \binom{7}{2} p^2(1-p)^5$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,(7-2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2! \cdot 5!} = 21$$

Para obtener:

$$\boldsymbol{Pe2 = 21p^2(1-p)^5}$$

Luego,

$$\boldsymbol{Pe = Pe1 + Pe2 = 7p(1-p)^6 + 21p^2(1-p)^5}$$

Entonces se puede obtener la efectividad de corrección de bloques en función de p suponiendo despreciable la probabilidad de tener más de 2 errores.

$$E = \frac{Pe1}{(Pe1 + Pe2)}$$

$$E = \frac{7p^1(1-p)^6}{7p^1(1-p)^6 + 21\,p^2(1-p)^5}$$

$$E = \frac{7p^1(1-p)^6}{7p^1(1-p)^5\,[(1-p)+3p]}$$

$$\boldsymbol{E = \frac{1-p}{1+2p}}$$

5. **Usando de la expresión hallada en la parte anterior, calcule la tasa teórica de efectividad de corrección de bloques para el código Hamming (7,4) y para valores de Eb/No entre 4 y 8 dB (señalización ortogonal). Recuerde que el Eb/No de los bits codificados de canal es una fracción k/n del Eb/No de los bits "crudos" sin codificar.**

$$P = Q\left(\sqrt{\frac{Eb}{No}\frac{k}{n}}\right)$$

$$E = \frac{1 - Q\left(\sqrt{\frac{Eb}{No}\frac{k}{n}}\right)}{1 + 2Q\left(\sqrt{\frac{Eb}{No}\frac{k}{n}}\right)}$$

Luego:

$\left(\frac{E_b}{N_o}\right)_{dB}$	$\frac{E_b}{N_o}$	$\sqrt{\frac{Eb}{No}\frac{4}{7}}$	Pe	E
4.0000	2.5119	1.1981	0.5386	0.7201
5.0000	3.1623	1.3443	0.4620	0.7720
6.0000	3.9811	1.5083	0.3706	0.8272
7.0000	5.0119	1.6923	0.2743	0.8764
8.0000	6.3096	1.8988	0.1842	0.9175

6. **Escriba versiones de las matrices P para los códigos Hamming con m=4 y m=5, use la función correspondiente de Matlab para agilizar el trabajo, tenga en cuenta que deberá hacer ajustes para que G tenga la forma dada en (2). Calcule en cada caso la tasa del código y el incremento porcentual en la velocidad de transmisión de bits que implica el uso del código.**

- Caso m = 4:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

- Caso m = 5:

$$
\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

7. **Investigue el concepto de ganancia de codificación.**

La ganancia de codificación se define como el aumento en la energía media por bit que hay que introducir en la modulación posterior sin codificación de canal para obtener la misma probabilidad de error que se obtiene con esta codificación