Sisteme de generatori şi sisteme liniar-independente

1. Determinaţi dimensiunea spaţiului generat de următorii vectori

   (a)
   $$x_1 = (1, 2, 3)\,; x_2 = (4, 5, 6)\,; x_3 = (7, 8, 9)\,; x_4 = (10, 11, 12)\,.$$

   (b)
   $$x_1 = (1, -1, 0, 0)\,; \quad x_2 = (0, 1, -1, 0)\,; \quad x_3 = (0, 0, 1, -1)\,;$$
   $$x_4 = (0, 0, 0, 1)\,; \quad x_5 = (7, -3, -4, 5)\,.$$

2. Extrageţi cîte o bază din sistemele de vectori următoare:

   (a)
   $$x_1 = (-1, 4, -3, -2)\,; x_2 = (3, -7, 5, 3)\,; x_3 = (3, -2, 1, 0)\,; x_4 = (-4, 1, 0, 1)\,.$$

   (b)
   $$x_1 = (3 - i, 1 - 2i, -7 + 5i, 4 + 3i)\,; \quad x_2 = (1 + 3i, 1 + i, -6 - 7i, 4i)\,;$$
   $$x_3 = (0, 1, 1, -3)\,.$$

3. Determinaţi toate bazele (de cardinal maxim) care se pot extrage dintre vectorii
   $$x_1 = (1 + i, 1 - i, 2 + 3i)\,; \quad x_2 = (i, 1, 2)\,; \quad x_3 = (1 - i, -1 - i, 3 - 2i)\,;$$
   $$x_4 = (4, -4i, 10 + 2i)\,.$$

4. Verificaţi că vectorii $e_1, \ldots, e_n$ formează o bază şi scrieţi descompunerea vectorului x în raport cu această bază:

   (a)
   $$e_1 = (2, 2, -1)\,, e_2 = (2, -1, 2)\,, e_3 = (-1, 2, 2)\,; x = (1, 1, 1)\,.$$

   (b)
   $$e_1 = (1, 2, 1, 1)\,, \quad e_2 = (2, 3, 1, 0)\,, \quad e_3 = (1, 2, 1, 4)\,,$$
   $$e_4 = (4, 2, -1, -6)\,; \quad x = (0, 0, 2, 7)\,.$$

5. Descompuneţi polinomul $X^5 - X^4 + X^3 - X^2 - X + 1$ în raport cu bazele

(a) $\{1, X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$;

(b) $\{1, X+1, X^2+1, X^3+1, X^4+1, X^5+1\}$;

(c) $\{1+X^3, X+X^3, X^2+X^3, X^3, X^4+X^3, X^5+X^3\}$

6. Determinaţi dimensiunea şi cîte o bază în subspaţiul generat de vectorii

$$x_1 = (1, 2, 2, -1); \quad x_2 = (2, 3, 2, 5); \quad x_3 = (-1, 4, 3, -1);$$
$$x_4 = (2, 9, 3, 5).$$

7. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ o matrice de rang r. Fie $c_1, \dots, c_n \in bR^m$ coloanele lui A. Arătaţi că $\dim \mathrm{Sp}\{c_1, \dots, c_m\} = r$. Formulaţi un rezultat analog pentru liniile lui A.