

## Ortogonalitate

1. Fie  $V$  un spațiu euclidian,  $L \subset V$  și  $x \in V$ . Definim

$$d(x, L) := \inf_{y \in L} \|x - y\|.$$

Să se arate:

- (a)  $d(x, L)$  este egală cu lungimea perpendicularei din  $x$  pe  $L$ ;
  - (b) Vectorul din  $L$  cel mai apropiat de  $x$  este proiecția lui  $x$  pe  $L$ ;
  - (c) Pentru orice  $y \in L$ ,  $d(x + y, L) = d(x, L)$ .
2. Determinați câte o bază ortonormată în următoarele spații:
- (a)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y + 3z = 0\}$ ;
  - (b)  $\langle \{(0, 2, 1), (1, -2, -1)\} \rangle$ ;
  - (c)  $(1, -1, 2)^\perp$ .
3. Determinați o bază ortonormată a lui  $\mathbb{R}^3$  pornind de la baza  $\{(1, 2, 3), (4, 5, 0), (2, 3, -1)\}$ .
4. Determinați forma canonică prin izometrii
- (a)  $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ ;
  - (b)  $-3x_1^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 4x_2x_3$ ;
  - (c)  $2x_1x_4 + 6x_2x_3$ .
5. Fie  $V$  spațiul vectorial  $\{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ este de clasă } C^\infty\}$ , împreună cu produsul scalar  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ . Determinați o bază ortonormată în subspațiul  $W = \langle \{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\} \rangle$ .
6. Fie  $a \in \mathbb{R}^3$  și  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x) = a \times x$ . Determinați valorile proprii și vectorii proprii corespunzători.
7. Fie rotația de unghi  $\pi/3$  în jurul vectorului  $(1, 2, 1)$ . Determinați matricea sa în raport cu baza canonică.