Calcul Numeric – Temele 1 şi 2

Ex.1 Folosind metoda bisecţiei pentru $k = 2$ să se aproximeze manual soluţia ecuaţiei $8x^3+4x-1 = 0$ din intervalul $[0, 1]$. Să se evalueze eroarea de aproximare.

Ex.2 Fie ecuaţia $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$

a. Să se construiască în Matlab graficul funcţiei $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$ pe intervalul $[0, 4]$;

b. Să se scrie un program în Matlab prin care se va calcula soluţia aproximativă c_{100} prin metoda bisecţiei pentru fiecare interval în parte: 1. $[0, 1]$; 2. $[1; 3, 2]$; 3. $[3, 2; 4]$;

c. Să se construiască punctele $(c_{100}, f(c_{100}))$ calculate la b. în acelaşi grafic cu graficul funcţiei.

Ex.3

a. Să se construiască în Matlab graficele funcţiilor $y = e^x - 2$ şi $y = cos(e^x - 2)$;

b. Să se implementeze în Matlab metoda bisecţiei pentru a calcula o aproximare a soluţiei ecuaţiei $e^x - 2 = cos(e^x - 2)$ cu eroarea $\varepsilon = 10^{-5}$ pe intervalul $x \in [0, 5; 1, 5]$.

Ex.4 Să se găsească o aproximare a valorii $\sqrt{3}$ cu eroarea $\varepsilon = 10^{-5}$.

Ex.5 * Fie $f \in C^2([a, b])$. Presupunem că $f(x^*) = f'(x^*) = 0$ (f are o soluţie dublă) şi $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b] \setminus \{x^*\}$. De asemenea, $f''(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$, atunci $\exists m, M > 0$ astfel încât $m \leq |f''(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$. Presupunem în plus că M este astfel încât $M < 2m$. Să se arate că dacă x_0 este astfel încât $|x^* - x_0| \leq h = min\{b - a, \frac{m}{M}\}$ atunci şirul $(x_k)_{k\geq 0}$ construit cu metoda Newton-Raphson rămâne în $[a, b]$, este convergent la x^* şi convergenţa este liniară.

Indicaţie: Se urmăreşte demonstraţia teoremei de convergenţă şi se va dezvolta în serie Taylor funcţia f' în vecinătatea punctului x_k iar dezvoltarea se va scrie în x^*.

Ex. 6 Fie ecuaţia $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$. Se ştie că ecuaţia are soluţie unică pe intervalul $[0; 2, 5]$. Justificaţi de ce şirul generat de metoda Newton - Raphson nu converge la soluţia din intervalul dat, dacă valoarea de pornire este $x_0 = 2$. Alegeţi o valoare pentru $x_0 \in [0; 2, 5]$, astfel încât şirul construit de metoda N-R să conveargă la soluţia din intervalul dat.

Ex. 7 Să se rezolve Ex. 3 prin metodele Newton-Raphson în aceleaşi condiţii alegând o valoare x_0 din intervalul dat. Să se calculeze prin ambele metode numărul de iteraţii necesar pentru obţinerea erorii impuse. Criteriul de oprire este $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$.

Ex. 8 Să se rezolve Ex. 3 prin metoda secantei dacă $x_0 = 0, 5; x_1 = 1, 5$ cu aceeaşi eroare şi folosind criteriul de oprire $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$. Să se calculeze numărul de iteraţii necesar pentru obţinerea erorii impuse.

Ex. 9 Să se rezolve Ex. 3 prin metoda falsei poziţii cu aceeaşi eroare şi folosind criteriul de oprire $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$. Să se calculeze numărul de iteraţii necesar pentru obţinerea erorii impuse.

Ex. 10 Să se rezolve Ex. 1 prin metodele Newton-Raphson, secantei şi falsei poziţii.

Obs.: Exerciţiile cu * sunt de complexitate ridicată şi studenţii care rezolvă aceste tipuri de exemple primesc 10 puncte bonus la examen.