

Vectori și valori proprii

1. Calculați valorile proprii și vectorii proprii corespunzători pentru matricea A , unde

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \text{b) } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{c) } A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} & \text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Calculați valorile proprii și vectorii proprii peste \mathbb{R} și peste \mathbb{C} pentru A , unde

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Fie polinomul $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$. Construiți o matrice A al cărei polinom caracteristic este $P(\lambda)$.
4. Fie V un spațiu vectorial, L_1, L_2 subspații astfel încât $V = L_1 \oplus L_2$ și p operatorul de proiecție pe L_1 . Arătați că $\text{Rk}(p) = \text{Tr}(p)$.
5. Să se determine toate endomorfismele $f : V \rightarrow V$ cu proprietatea că $fg = gf$ pentru orice alt operator liniar $g : V \rightarrow V$.
6. Calculați valorile proprii și vectorii proprii pentru operatorii

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & D : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P(X) \mapsto P'(X); \\ \text{b)} & S_1 : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P(X) \mapsto X \cdot P(X); \\ \text{c*)} & S_2 : \ell^2(\mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{C}), \{x_0, x_1, \dots\} \mapsto \{0, x_0, x_1, \dots\}; \\ & S_3 : \ell^2(\mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{C}), \{x_0, x_1, \dots\} \mapsto \{x_1, x_2, \dots\}. \end{array}$$