Vectori şi valori propri

1. Calculaţi valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători pentru matricea A, unde

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculaţi valorile proprii şi vectorii proprii peste $\mathbb{R}$ şi peste $\mathbb{C}$ pentru A, unde

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Fie polinomul $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. Construiţi o matrice A al cărei polinom caracteristic este $P(\lambda)$.

4. Fie V un spaţiu vectorial, L_1, L_2 subspaţii astfel încît $V = L_1 \oplus L_2$ şi p operatorul de proiecţie pe L_1. Arătaţi că $\mathrm{Rk}(p) = \mathrm{Tr}(p)$.

5. Să se determine toate endomorfismele $f : V \to V$ cu proprietatea că $fg = gf$ pentru orice alt operator liniar $g : V \to V$.

6. Calculaţi valorile proprii şi vectorii proprii pentru operatorii

$$\begin{array}{rc} \text{a)} & D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P(X) \mapsto P'(X); \\ \text{b)} & S_1 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P(X) \mapsto X \cdot P(X); \\ \text{c*)} & S_2 : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C}), \{x_0, x_1, \dots\} \mapsto \{0, x_0, x_1, \dots\}\,; \\ & S_3 : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C}), \{x_0, x_1, \dots\} \mapsto \{x_1, x_2, \dots\}\,. \end{array}$$