Forme biliniare şi forme pătratice

1. Fie K un corp cu $charK \neq 2$, V un $K-$spaţiu vectorial şi $B(\cdot,\cdot) : V \times V \to K$ o formă bilineară. Arătaţi că B se poate descompune în suma dintre o formă simetrică şi una anti-simetrică.

2. Fie $B(\cdot,\cdot) : V \times V \to K$ o formă biliniară simetrică. Arătaţi că B este nedegenerată (adică $B(x,y) = 0$ pentru orice $y \in V$ implică $x = 0$) dacă şi numai dacă $x \mapsto B(x,\cdot) : V \to V^*$ este un izomorfism.

3. Fie B o formă biliniară nedegenerată pe spaţiul vectorial V şi $W \subset V$. Notăm cu $W^\perp = \left\{x \in V | B(x,y) = 0, \forall y \in W\right\}$. Arătaţi că

   (a) $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$;

   (b) $(W^\perp)^\perp = W$.

4. Fie V un spaţiu vectorial şi B o formă biliniară simetrică. Notăm cu $rad_B(V) = V^\perp$. Determinaţi $rad_B(V)$ pentru $V = \mathbb{R}^4$ şi $B(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1$.

   Calculaţi $rad_B(V)$ pentru o formă bilineară peste un spaţiu V de dimensiune n.

5. Fie $V = \mathbb{R}^4$ şi forma biliniară $B(x,y) = x_1y_1 - 2x_2y_1 + 3x_3y_1 + 2x_3y_2 - x_3y_3$. Determinaţi $dimV_1$ şi $dimV_2$, unde $V_1 = \left\{x \in V | B(x,y) = 0\right\}$ şi $V_2 = \left\{y \in V | B(x,y) = 0\right\}$.

6. Fie K un corp de caracteristică 2, V un K-spaţiu vectorial şi $Q : V \to K$ of formă pătratică. Arătaţi că forma biliniară asociată este anti-simetrică. Arătaţi că forma pătratică $Q : \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2$