Cursul2

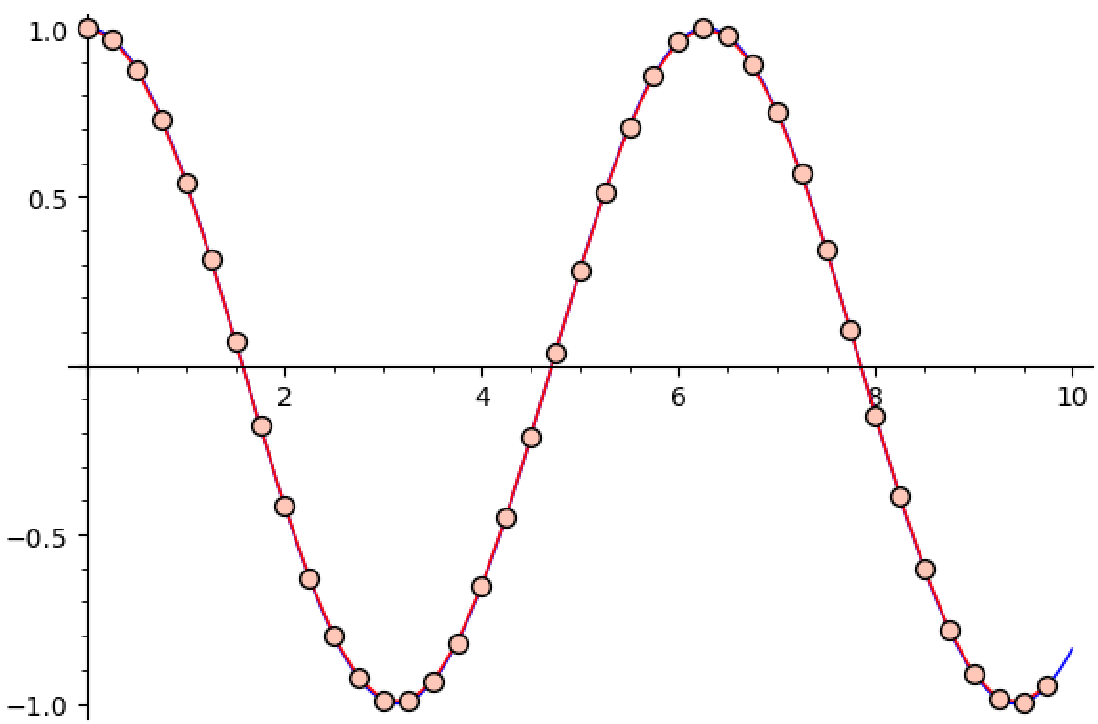
October 12, 2023

1 Derivate și Integrale

1.1 Definiția derivatei

Am văzut că atunci cînd aplicăm metoda lui Euler, momentul următor este $t + \Delta t$ și noua valoare a variabilei de stare este $X(t + \Delta t)$, aveam $X(t + \Delta t) = X(t) + \Delta t \cdot X'$. O ilustrare este mai jos:

[5]:
```
t=var('t')
f(t)=cos(t)
vec=[[0.25*k,f(0.25*k)] for k in range(40)]
p1=plot(f,(0,10))
p2=line(vec,color='red')
p3=scatter_plot(vec)
(p1+p2+p3).show()
```



De fapt $X(t+\Delta t) \approx X(t) + \Delta t \cdot X'$ pentru că nu avem egalitate ci doar aproximare. Prin urmare

$$X' \approx \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}.$$

În cuvinte variația variabilei este aproximată de diferența între valorile acesteia la două momente apropiate raportat la intervalul de timp. Putem să ne gîndim la următoarea analogie:

Dacă ne deplasăm din punctul A în punctul B și parcurgem o distanță de 10 km în 30 de minute (1/2 ore) atunci viteze medie va fi

$$\frac{10}{0.5} = 20 \text{ km/h}.$$

Să notăm acum cu $x(t)$ distanța pe care am parcurs-o în timpul t. Atunci viteza medie pe intervalul (t_1, t_2) este

$$\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} =: \frac{\Delta X}{\Delta t},$$

dacă alegem un interval mai mic (t_1, t_3) atît Δt cît și Δx vor fi mai mici. Viteza medie este evident că poate fi calculată pe un interval oricît de mic.

Ce facem însă pentru a calcula viteza instantanee la un moment dat? Dacă vrem să folosim viteza medie atunci am avea că

$$v = \frac{0}{0}$$

ceea ce este imposibil. Rezolvarea este să ne uităm la toate vitezele medii pentru intervale de tipul $t_0 + \Delta t$ cînd Δt este din ce în ce mai mic, adică să facem $\Delta t \to 0$. Dacă în felul acesta obținem un număr, atunci acesta este viteza instantanee.

$$v_{t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

Putem acum să definim rata de variație a lui x în t ca "viteza instantanee" a lui x în t:

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

numită **derivata** lui x în t.

Galileo a descoperit legea căderii corpurilor: Dacă notăm cu $H(t)$ distanța corpului pînă la sol, atunci

$$H(t) = H(0) - 4,9t^2.$$

Să calculăm viteza de cădere la momentul $t = 1,5$s după ce a fost aruncat de la 100 m. Calculăm mai întîi vitezele medii pentru valori ale lui Δt din ce în ce mai mici:

[10]:
```
t=var('t')
H0=100
H(t)=H0-4.9*t^2
dt=0.1
v1=(H(1.6)-H(1.5))/0.1
print(v1)
v2 = (H(1.51)-H(1.5))/0.01
print(v2)
```

```
v3 = (H(1.501)-H(1.5))/0.001
print(v3)
print(H(1.5))
4.9*(1.5^2)
```

```
-15.1900000000001
-14.7489999999991
-14.7048999999981
88.9750000000000
```

[10]: `11.0250000000000`

Se pare că ne apropiem de $-14,7$, dar să vedem acest lucru riguros. Mai întîi calculăm $H(1,5) = 88.975$, apoi $H(1,5+\Delta t) = 100 - 4,9(1,5+\Delta t)^2 = 100 - (11,025 + 14,7\Delta t + (\Delta t^2)) = 88,975 - 14,7\Delta t - \Delta t^2$. Derivata este

$$H'(1,5) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{88,975 - 14,7\Delta t - \Delta t^2 - 88,975}{\Delta t} = -14,7.$$

Pentru fiecare valoare a lui t procedăm similar și avem

$$H'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{H(t+\Delta t) - H(t)}{\Delta t} = \frac{100 - 4,9(t^2 + 2t\Delta t + \Delta^2) - 100 + 4,9t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}(-9,8t - \Delta t) = -9,8t.$$

Notație: Derivata lui x în t_0 se va nota $x'(t_0)$ sau

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0}.$$

Notația a doua provine din definiția echivalentă a derivatei:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

[12]:
```
4.9*3
```

[12]: `14.7000000000000`

1.2 Interpretarea geometrică

Putem studia derivata și într-o manieră geometrică. Să luăm o funcție $Y(X)$. Atunci rata medie de schimbare este

$$\left.\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right|_{X_0} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}.$$

Dacă ne uităm la graficul funcției atunci ΔY este modificarea verticală, iar ΔX este modificarea orizontală. Dacă desenăm secanta între punctele (Y_1, X_1) și (Y_2, X_2), panta acestei drepte este chiar $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$. Deci rata medie de schimbare este totuna cu panta secantei. Cînd X_2 se tot apropie de X_1 atunci secanta se apropie din ce în ce mai mult de curbă, astfel că la final va atinge curba doar într-un punct. Această dreaptă se numește **tangenta** la curbă. Deci **panta tangentei** în X_1 este **derivata** $\frac{dY}{dX}\Big|_{X_1}$.

Ecuația generală a unei drepte este $Y = mX + b$. Vrem să aflăm m și b pentru tangenta în X_1. Pentru b, ținem cont că $Y_1 = mX_1 + b$, deci $b = Y_1 - mX_1$. Întroducem înapoi în ecuație și obținem că $Y - Y_1 = m(X - X_1)$. Ne aducem aminte cine este m și obținem în final

$$Y - Y_1 = \frac{dY}{dX}\Big|_{X_1} (X - X_1),$$

adică $Y - Y_1$ depinde liniar de $X - X_1$.

O functie f pentru care

$$\begin{aligned} f(X_1 + X_2) = &\quad f(X_1) + f(X_2) \\ f(aX) = &\qquad\qquad af(X) \end{aligned}$$

se numește **liniară**. Rescriind $Y = f(X)$ vedem că derivata produce aproximarea funcției cu o funcție liniară.

Atenție: No orice funcție este derivabilă.

1.3 Derivata unei funcții

Am văzut că dacă o funcție f este derivabilă într-un punct, atunci îi putem atașa un număr, derivata sa în acel punct.Variind punctul obținem o nouă funcție pe care o vom nota

$$\frac{df}{dx}.$$

Explicit derivata funcției este definită astfel:

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Dacă de exemplu $f(x) = x^2 - x$, atunci

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - x^2 + x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 - \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x - 1 = 2x - 1.$$

Cum derivata este o funcție putem repeta construcția și obținem derivatele de ordin superior. Notațiile sînt:

$$\frac{d^n f}{dx^n}$$

sau f'', f''', etc. De exemplu dacă $H(t)$ este înălțimea, atunci $H'(t)$ este viteza, $H''(t)$ este accelerația, $H'''(t)$ este supraaceleratia (jerk).

Pentru cele mai uzuale funcții derivatele sînt:

- $\frac{d}{dx}c = 0$, unde c este o constantă;
- $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$, unde n poate fi orice număr real;
- $\frac{d}{dx}e^{kx} = ke^{kx}$, unde e este baza logaritmilor naturali și k este orice număr;
- $\frac{d}{dx}ln(x) = \frac{1}{x}$;
- $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$;

- $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$.

Funcțiile pe care le întîlnim în practică sînt obținute din cele uzuale folosind cîteva operații. Este important să vedem cum se comportă derivata referitor la aceste operații:

- $\frac{d(c\cdot f)}{dx} = c\cdot\frac{df}{dx}$;
- $\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$;
- $\frac{d(f\cdot g)}{dx} = \frac{df}{dx}\cdot g + f\cdot\frac{dg}{dx}$;
- $\frac{d\frac{f}{g}}{dx} = \frac{1}{g^2}\left(\frac{df}{dx}\cdot g - f\cdot\frac{dg}{dx}\right)$;
- $\frac{d(f\circ g)}{dx} = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$.

La ultima relație $\frac{df}{dg}$ semnifică faptul că ne referim la f ca o funcție doar de g, altfel spus punem $y = g(x)$ și considerăm $f(y)$.

În sagemath funcția derivată este `derivative` sau `diff()`. De exemplu:

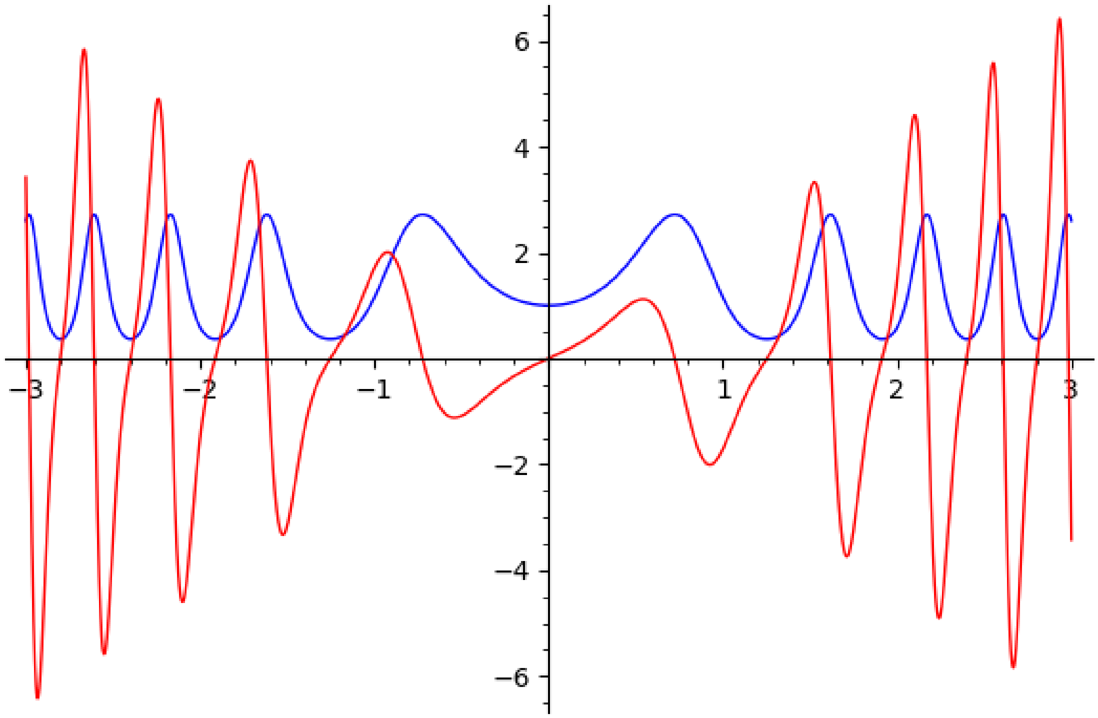
[14]:
```
x=var('x')
f(x)=exp(sin(3*x^2))
print(derivative(f,x))
h=f.diff()
```

```
x |--> 6*x*cos(3*x^2)*e^(sin(3*x^2))
```

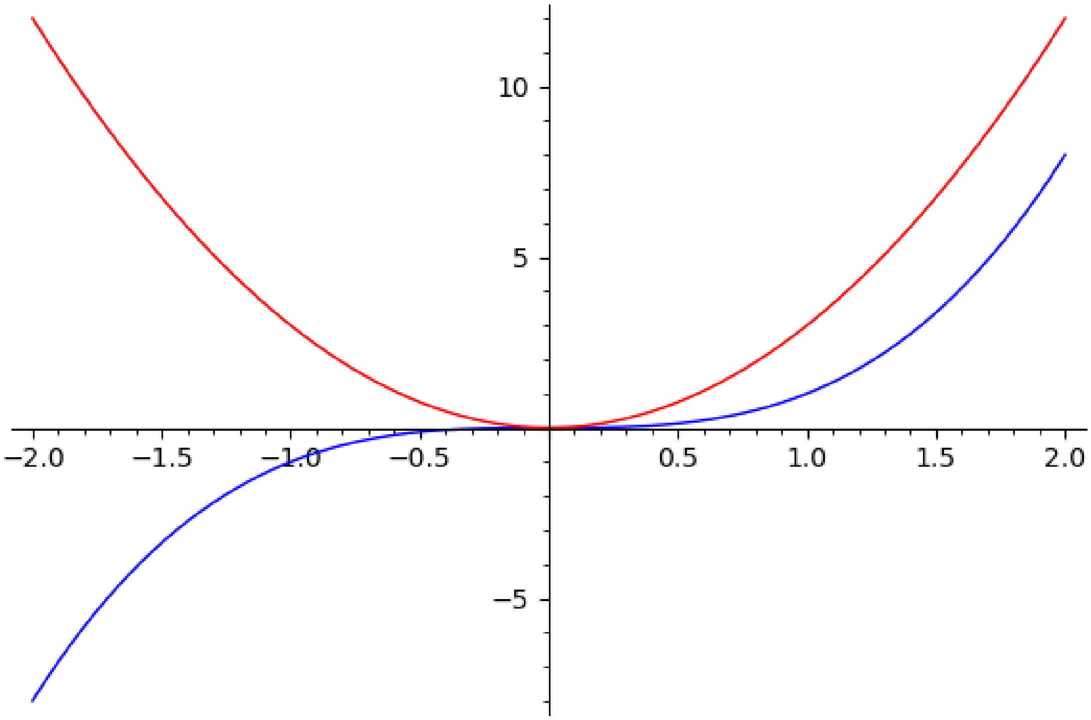
[8]:
```
numerical_approx(f.diff()(2))
```

[8]: 5.92131112239604

[18]:
```
p1=plot(f,-3,3)
p2=plot(h/4,-3,3,color='red')
(p1+p2).show()
```



[20]:
```
g(x)=x^3
g1=3*x^2
p3=plot(g,-2,2)
p4=plot(g1,-2,2, color='red')
(p3+p4).show()
```


10
5
−5
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.5
1.0
1.5
2.0