

Topik ke 3

Induksi Matematika



Pembuktian suatu teorema memegang peranan penting dalam matematika. Di dalam matematika, secara umum ada dua cara untuk membuktikan suatu teorema, yaitu secara induktif dan secara deduktif. Secara deduktif pembuktian didasarkan pada aksioma, definisi, ataupun dalil-dalil yang telah ada. Pembuktian secara induktif dapat dipergunakan untuk dalil-dalil yang berlaku dalam domain bilangan cacah. Pembuktian ini didasarkan pada prinsip induksi, yaitu dimulai dengan beberapa kasus, diasumsikan berlaku untuk kasus tertentu, $n=k$, dan dari asumsi ini dibuktikan juga berlaku untuk $n=k+1$.

3.1 Notasi Sigma

Notasi sigma merupakan operator untuk menyatakan operasi penjumlahan. Notasi ini disimbolkan dengan “ Σ ”, dibaca “**sigma**”. Dalam hal ini ada tiga bagian dalam menggunakan notasi sigma ini, yaitu :

1. Notasi sigma itu sendiri
2. bilangan bulat yang menyatakan indeks penjumlahan
3. komponen yang dijumlahkan

Sebagai contoh adalah :

$$\sum_{j=3}^6 a[j] \text{ yang dibaca : jumlah } a[j], j \text{ berjalan dari 3 sampai dengan 6.}$$

Notasi ini berarti :

Melakukan penjumlahan untuk nilai-nilai dalam **array a**, dengan : **j** sebagai indeks penjumlahan. Dalam hal ini penjumlahan dilakukan mulai dari $a[3]$, $a[4]$, s/d $a[6]$, atau dengan kata lain, arti simbol tersebut adalah :

$$a[3]+a[4]+a[5]+a[6]$$

Indeks dari penjumlahan tersebut dapat saja dibalik tanpa merubah arti, sehingga simbol tersebut artinya sama dengan :

$$\sum_{j=6}^3 a[j]$$

Beberapa hal yang perlu diperhatikan dalam memakai notasi sigma adalah sebagai berikut :

1. $\sum_{j=m}^n k = (|n - m| + 1)k$, dalam hal ini k adalah konstanta.
2. $\sum_{j=m}^n a[j] = a[m+1] + a[m+2] + a[m+3] + \dots + a[n]$
3. $\sum_{j=m}^n j^2 = m^2 + (m+1)^2 + (m+2)^2 + \dots + n^2$
4. $\sum_{\forall a \in A} a$, simbol ini untuk menyatakan penjumlahan seluruh anggota himpunan A.
5. $\sum_{1 < i < j} a[i, j]$, simbol ini menjumlahkan unsur-unsur a[i,j] dengan catatan bahwa $1 < i$,
dan $i < j$.
6. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a[i, j] = a[1,1] + \dots + a[1,m] + a[2,1] + \dots + a[2,m] + a[n,1] + \dots + a[n,m]$

Latihan Pertemuan Kelima Bagian I

1. Hitung penjumlahan berikut :

a. $\sum_{j=2}^6 8$

b. Misalkan kita mempunyai array $a=[1,3,-2,10,5]$, hitung : $\sum_{j=1}^3 a[j]$

c. $\sum_{j=-2}^3 (j^2 + j)$

d. Misalkan kita mempunyai himpunan $A=\{1,0,6,-3\}$, hitung: $\sum_{\forall a \in A} a$

e. Misalkan kita mempunyai data seperti dalam matriks A[i,j] berikut :

	j=1	j=2	j=3	j=4
i=1	-1	3	-4	5
i=2	2	1	2	0
i=3	3	0	1	-1
i=4	1	10	5	-3
i=5	5	2	5	2

Hitung : 1. $\sum_{1 \leq i < j} a[i, j]$ 2. $\sum_{j=1}^4 \sum_{i=j}^5 a[i, j]$

f. $\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^4 2$

2. Tulis penjumlahan berikut dalam notasi sigma :

- $1 + 2 + 3 + \dots + n$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{20}$
- $1 + 4 + 9 + \dots + 64$
- $1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 8$
- $1 + (1 \times 2) + (1 \times 2 \times 3) + \dots + (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 10)$
- $1 + (2 \times 3) + (3 \times 4) + \dots + (10 \times 11)$
- $1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+10)$
- $1 + \frac{2 \times 3}{1+2} + \frac{3 \times 4}{1+2+3} + \dots + \frac{10 \times 11}{1+2+3+\dots+10}$

3.2 Prinsip Induksi Matematika

Prinsip dasar :

Misalkan $S(n)$ adalah suatu teorema yang akan dibuktikan. $S(n)$ adalah suatu teorema yang berlaku untuk n bilangan asli. Untuk membuktikan $S(n)$ ini secara induktif maka tahapannya adalah :

- Buktikan $S(n)$ benar untuk n terkecil (misal $n=1$)**
- Anggap $S(n)$ benar untuk $n=k$. Dari anggapan ini buktikan $S(n)$ juga benar untuk $n=k+1$.**

Jika telah melalui dua langkah tersebut maka bisa disimpulkan bahwa $S(n)$ benar untuk semua n bilangan asli.

Contoh :

- Buktikan bahwa $S(n) : 1+2+3+\dots+n=n(n+1)/2$, untuk n bilangan asli

Bukti :

$n=1$:

ruas kiri = 1

ruas kanan = $1(1+1)/2 = 2/2 = 1$

jadi benar untuk $n=1$

anggap benar untuk $n=k$:

$1+2+3+\dots+k=k(k+1)/2$

berdasar anggapan ini, akan dibuktikan benar untuk $n=k+1$

Untuk $n=k+1$:

$$\begin{aligned}
 1+2+3+\dots+k+(k+1) &= k(k+1)/2 + (k+1) \\
 &= k(k+1)/2 + 2(k+1)/2 \\
 &= (k^2+k+2k+2)/2 \\
 &= (k+1)(k+2)/2 \\
 &= (k+1)((k+1)+1)/2 \quad \dots \text{ (Terbukti)}
 \end{aligned}$$

2. Buktikan bahwa : $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

Latihan Pertemuan Kelima Bagian II

1. Buktikan dengan prinsip induksi pernyataan berikut :

- $1^3+2^3+\dots+n^3=[n(n+1)/2]^2$
- $1^4+2^4+\dots+n^4=[n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)]/30$
- $a+ar+ar^2+\dots+ar^{n-1}=a(1-r^n)/(1-r)$
- $3^2+5^2+\dots+(2n+1)^2=(1/3)(n+1)(2n+1)(2n+3)-1$
- $1+2x0.5+3(0.5)^2+\dots+n(0.5)^{(n-1)}=4-(n+2)(0.5)^{(n-1)}$
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
- $\frac{3}{1^2 \times 2^2} + \frac{5}{2^2 \times 3^2} + \frac{7}{3^2 \times 4^2} + \dots + \frac{(2n+1)}{n^2(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$
- $3+3^3+3^5+\dots+3^{2n-1}=(3/8)(9^n-1)$

- Jika x dan y bilangan bulat, tunjukkan bahwa (x^n-y^n) habis dibagi $(x-y)$ untuk n bilangan bulat positif
- Dengan induksi tunjukkan bahwa $(2n+1)^2-1$ habis bagi 8 untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$.
- Jika k adalah bilangan bulat positif, buktikan bahwa $k(k+1)$ adalah bilangan genap.
- Tunjukkan bahwa (13^n-5^n) habis dibagi 8 untuk n bilangan asli.
- Buktikan bahwa $(a+1)^n \geq a^n+a$, untuk $a>1$ dan $n \geq 2$, n bilangan asli.
- Buktikan bahwa $(a+2+3+\dots+n)^2 \geq 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$ untuk n bilangan asli
- Buktikan bahwa $2^n < n!$ untuk bilangan bulat yang lebih besar dari 3.
- Buktikan bahwa $(1+a)^n > 1+na$, untuk $a>1$, dan n bilangan bulat yang lebih dari satu.