Topik ke 4

Himpunan

Konsep himpunan memegang peranan penting dalam matematika. Hal ini dikarenakan hampir semua formula yang dikembangkan selalu berhubungan dengan obyek-obyek dengan sifat tertentu. Obyek dengan sifat tertentu inilah yang nantinya membangun suatu himpunan. Pembahasan dimulai dengan pengertian himpunan, beberapa terminology dasar, operasi dasar, hingga dalil-dalil mengenai himpunan.

4.1 Himpunan

Istilah himpunan seringkali dikenal juga dengan **Gugus** atau **Set.** Penerapan konsep himpunan sangat luas sekali, bahkan tidak berlebihan jika dikatakana bahwa hampir semua konsep matematika selalu bersinggungan dengan masalah himpunan. Hal ini dikarenakan proses-proses atau manipulasi dalam konsep tersebut diimplementasikan pada obyek-obyek dengan sifat tertentu. Obyek-obyek dengan sifat tertentu inilah yang nantinya membentuk himpunan.

Definisi :

Himpunan adalah kumpulan obyek-obyek yang terdefinisi dengan jelas.

Arti dari terdefinisi dengan jelas adalah bahwa terhadap suatu obyek **dapat dipastikan** apakah obyek tersebut **termasuk** atau **tidak termasuk** dalam himpunan.

Contoh :

Manakah dari pernyataan yang merupakan himpunan ?

a. Kumpulan huruf vokal dalam abjad bahasa Indonesia
b. Kumpulan bilangan bulat dari –5 sampai dengan 7
c. Kumpulan bilangan cacah
d. Kumpulan rambut yang ada di kepala manusia
e. Kumpulan ikan di waduk Jatiluhur
f. Kumpulan nilai x yang memenuhi persamaan $x^2-6x-16=0$

Notasi Himpunan

Ada dua cara menyatakan suatu himpunan, yaitu :

a. dengan mensenaraikan semua anggoatanya

b. dengan menuliskan syarat keanggotaannya

Dengan metode senarai, maka semua elemen himpunan dituliskan dalam suatu kurung kurawal. Sebagai contoh adalah :

a. A : himpunan vokal dalam abjad bahasa Indonesia.

   Ditulis A={a, e, i, o, u}

b. B : himpunan bilangan cacah.

   Ditulis B={0, 1, 2, …}, tanda "…" artinya dan seterusnya.

Sedangkan dengan metode pencatatan syarat keanggotaan, himpunan A dan B dapat dituliskan sebagai :

A=Himpunan huruf vokal dalam abjad bahasa Indonesia

B=Himpunan bilangan cacah

={x|x adalah bilangan cacah}

Keanggotaan Suatu Himpunan

Anggota suatu himpunan disebut **elemen** atau **unsur** himpunan. Keanggotaan suatu himpunan disimbolkan dengan "$\in$". Sedangkan untuk menyatakan bukan anggota digunakan simbol "$\notin$". Sebagai contoh perhatikan himpunan A berikut :

A={1, (0), a, {b}}

Dari himpunan A ini dapat dikatakan beberapa hal berikut :

$1\in A$, $(0)\in A$, $a\in A$, $\{b\}\in A$, juga $2\notin A$, $0\notin A$, $b\notin A$

Banyaknya anggota suatu himpunan, misal himpunan A, disebut sebagai **ukuran** atau **bilangan kardinal** dari himpunan A tersebut, dan ditulis sebagai n(A) atau |A|. Untuk himpunan A di atas, maka n(A) adalah 4, sebab himpunan A mempunyai anggota sebanyak 4. Perlu dicatat bahwa penulisan berulang suatu keanggotaan dalam himpunan itu diabaikan, misalkana adalah :

A={0, 1, 4, 1, 1, 0}

Maka anggota himpunan A adalah 3, n(A)=3. Selain itu urutan penulian juga diabaikan. Contohnya :

A={0,1,2} artinya sama saja dengan A={2,1,0}

Kesamaan Antara Dua Himpunan

Dua buah himpunan dikatakan sama kalau :

1.banyaknya anggota sama

2.anggotanya sama persis

Contoh :

a. $\{0, ,1, 2\} \neq \{2, 1, 3\}$

b. $\{0, 1, 2\} \neq \{0, 1, 2, 3\}$

c. $\{0, 1, 2\} \neq \{0, 1\}$

d. $\{0, 1, 2\} = \{1, 0, 1, 1, 0, 2\}$

Himpunan Kosong

Konsep himpunan kosong dikembangkan berkaitan dengan himpunan-himpunan yang tidak mempunyai anggota. Himpunan kosong disimbolkan dengan "{}" atau "∅".

Definisi :

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota.

Contoh :

a. A adalah himpunan bilangan cacah yang kurang dari –2

b. $B=\{x|x^2+x+10=0, x\in Real\}$

Dsb.

Himpunan Bagian

Istilah himpunan bagian sering dikenal juga dengan nama subset atau subhimpunan. Himpunan bagian ini berhubungan dengan anggota suatu himpunan dikaitkan dengan anggota himpunan lainnya.

Definisi :

Himpunan A dikatakan sebagai himpunan bagian dari himpunan B kalau semua anggota A adalah juga anggota B (tetapi kalau anggota B belum tentu merupakan anggota himpunan A), dan ditulis sebagai :

$A\subseteq B$ atau boleh juga $B\supseteq A$

Kadang-kadang juga ditulis sebagai $A\subset B$ atau $B\supset A$. Perbedaannya dalam hal ini adalah untuk yang pertama diartikan sebagai adanya kemungkinan A sama dengan B. Sedangkan yang kedua bahwa tidak ada kemungkinan A=B, atau dengan kata lain A adalah himpunan bagian murni dari B. Dalam kuliah ini dua simbol tersebut akan diperlakukan sama saja, yaitu sesuai dengan definisi di atas.

Contoh :

a. $\{0, 1, 2\} \subset \{0, 1, 2\}$

b. $\{0, 1, 2\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$

c. $\{a\} \not\subset \{b, \{a\}, c\}$

d. $\{\} \subset \{a, b, c\}$

e. {} $\subset$ {a, b}

Jika banyaknya anggota dari himpunan A adalah n(A), maka banyaknya himpunan bagian dari A adalah $2^{n(A)}$. Sedangkan banyaknya himpunan bagian dari A yang beranggota sebanyak r adalah C_r^n.

Contoh :

A={a,b,c}, maka banyaknya himpunan bagian dari A adalah sebanyak 2^3=8. Sedangkan banyaknya himpunan bagian dari A yang beranggota sebanyak 2 adalah $C_2^3 = 3$.

Himpunan Universal

Istilah himpunan universal dikenal juga dengan nama himpunan semesta. Himpunan semesta atau himpunan universal disimbolkan dengan “U” atau dengan “S”.

Definisi :

Himpunan semesta adalah himpunan yang beranggotakan semua obyek yang menjadi perhatian.

Contoh :

a. Jika kita sedang membahas mengenai kenaikan tingkat mahasiswa D3 Ilmu Komputer, maka sebagai himpunan semesta adalah :

   S=himpunan semua mahasiswa D3 Jurusan Ilmu Komputer

b. Jika kita sedang membahas masalah kenaikan gaji staf di IPB, maka sebagai himpunan semesta adalah :

   S=himpunan dari semua pegawai maupun dosen di IPB

Himpunan Kuasa

Himpunan kuasa sering dikenal juga dengan istilah power set. Himpunan kuasa dari suatu himpunan A disimbolkan dengan P(A).

Definisi : Himpunan kuasa dari suatu himpunan A adalah himpunan yang beranggotakan semua himpunan bagian dari A.

Contoh :

A={a,b,c}, maka himpunan kuasa dari A adalah P(A)={∅,{a},{b},{c},{a,b},{a,c},b,c},a,b,c}}

Jika banyaknya anggota himpunan A adalah n(A), maka banyaknya anggota himpunan kuasa dari A adalah $2^{n(A)}$.

Latihan Pertemuan Keenam Bagian I

1. Jika A={0,∅,{},{{}}}, tentukan :

a. n(A)
b. Banyaknya himpunan bagian dari A yang beranggota sebanyak 2
c. Berapa banyak himpunan bagian dari A
d. Tentukan himpunan kuasa dari A, yaitu P(A)
e. Tentukan n(P(A)) dan n[P(P(A))]
f. Ada berapa banyak himpunan bagian dari P{P[P(A)]}
g. Tentukan mana yang benar dan yang salah dari yang berikut :
   (i) $0 \in A$ (ii) $0 \subset A$ (iii) $\{0\} \in A$ (iv) $\{0\} \subset A$ (v) $\emptyset \in A$
   (vi) $\emptyset \subset A$ (vii) $\{\emptyset\} \in A$ (viii) $\{\emptyset\} \subset A$ (ix) $\{\} \in A$ (x) $\{\} \subset A$
   (xi) $\{\{\}\} \in A$ (xii) $\{\{\}\} \subset A$ (xiii) $\{\{\{\}\}\} \in A$ (xiv) $\{\{\{\}\}\} \subset A$

2. Tentukan apakah kalimat berikut benar atau salah:

   a. $\emptyset \subseteq \emptyset$ e. $\{\emptyset\} \in \emptyset$ i. $\{a,\emptyset\} \subseteq \{a,\{a,\emptyset\}\}$ m. $\{a,b\} \subseteq \{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

   b. $\emptyset \in \emptyset$ f. $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$ j. $\{a,\emptyset\} \in \{a,\{a,\emptyset\}\}$ n. $\{a,b\} \in \{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

   c. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ g. $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$ k. $\{a,b\} \subseteq \{a,b,c,\{a,b,\}\}$

   d. $\emptyset \in \{\emptyset\}$ h. $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$ l. $\{a,b\} \in \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$

3. Tentukan himpunan-himpunan berikut :

   a. $\emptyset \cup \{\emptyset\}$ c. $\{\emptyset\} \cup \{a,\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e. $\emptyset \oplus \{a,\emptyset, \{\emptyset\}\}$

   b. $\emptyset \cap \{\emptyset\}$ d. $\{\emptyset\} \cap \{a,\emptyset, \{\emptyset\}\}$ f. $\{\emptyset\} \oplus \{a,\emptyset, \{\emptyset\}\}$

4. Berikan contoh himpunan A, B, dan C sedemikian rupa sehingga $A \in B$, $B \in C$, dan $A \notin C$.

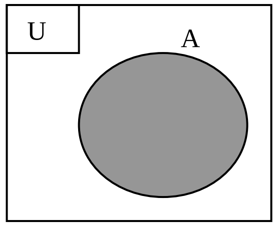
4.2 Operasi Himpunan

Dari satu antar beberapa himpunan dapat dilakukan berbagai operasi. Beberapa operasi yang dikenal adalah : komplemen, isisan, gabungan selisih serta beda setangkup. Sebelum kita membahas berbagai operasi diatas, akan kita lihat dahulu satu metode untuk penggambaran visual himpunan, yaitu yang dikenal dengan istilah Diagram Venn.

Diagram Venn

Diagram Venn merupakan cara untuk menggambarkan himpunan secara visual. Dalam hal ini kita mengarsir daerah yang melingkupi keanggotaan suatu himpunan.

Contoh :



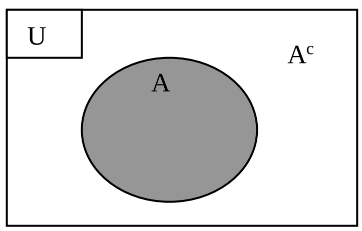
Daerah yang diarsir menunjukkan daaerah A

Komplemen

Komplemen suatu himpunan A disimbolkan dengan A' atau A^C atau $\neg$A, atau boleh juga $\overline{A}$.

Definisi : Komplemen dari himpunan A adalah suatu himpunan yang beranggota semua anggota semesta, tetapi bukan anggota A.

Oleh karena itu, diagram Venn untuk komplemen suatu himpunan adalah sebagai berikut :



Daerah yang diarsir menunjukkan daaerah A, sedangkan diluar yang diarsir adalah daerah A^c

Contoh :

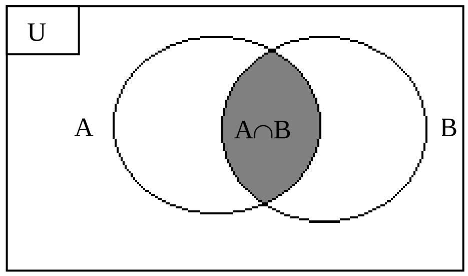
Kita membahas mengenai huruf vokal dalam abjad. Himpunan A adalah {i, e}, oleh karena itu komplemen dari A adalah A'={a, u, o}.

Irisan Dua Himpunan

Irisan dua himpunan disimbolkan dengan $\cap$. Istilah irisan sering dikenal juga dengan nama interseksi.

Definisi : Irisan dua himpunan A dengan B adalah himpunan yang beranggotakan semua anggota yang sekaligus menjadi anggota A dan juga menjadi anggota B.

Simbol untuk irisan himpunan A dengan himpunan B adalah $A \cap B$, yang dibaca sebagai "**A irisan B**", atau boleh juga "**A dan B**", atau boleh juga "**A interseksi B**".. Penggambarannya dalam diagram Venn adalah :



Daerah yang diarsir menunjukkan daaerah A∩B

Contoh :

A={1,2,3,4} dan B={2,5,6,7,8}, maka A∩B={2}.

Jika irisan dua buah himpunan adalah himpunan kosong, ∅, maka dikatakan bahwa himpunan A dan B saling lepas.

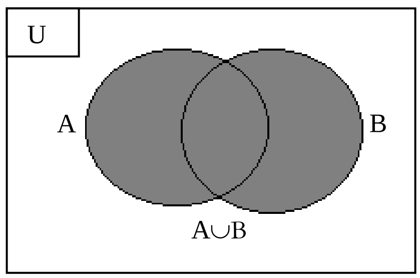
Gabungan Dua Himpunan

Bagungan dua himpunan disimbolkan dengan ∪. Istilah gabungan sering dikenal juga dengan nama union.

Definisi : Gabungan dua himpunan A dengan B adalah himpunan yang beranggotakan semua anggota A atau semua anggota B.

Artinya yang menjadi anggota A saja, B saja atau A dan B.

Simbol untuk gabungan himpunan A dengan himpunan B adalah A∪B, yang dibaca sebagai "**A gabungan B**", atau boleh juga "**A atau B**", atau boleh juga "**A union B**". Penggambaran dalam diagram Venn adalah :



Daerah yang diarsir menunjukkan daaerah A∪B

Contoh :

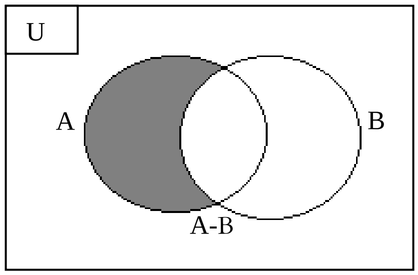
A={1,2,3,4} dan B={2,5,6,7,8}, maka A∪B={1,2,3,4,5,6,7,8}.

Selisih Dua Himpunan

Selisih dua himpunan memakai symbol "**-**". Istilah yang juga sering dipakai adalah "**beda**" antar dua himpunan.

Definisi : Selisih antar himpunan A dengan himpunan B yang ditulis sebagai A-B adalah suatu himpunan yang berisi semua anggota A, tetapi bukan anggota B.

Diagram Venn dari operasi ini adalah :



Daerah yang diarsir menunjukkan daaerah A-B

Contoh :

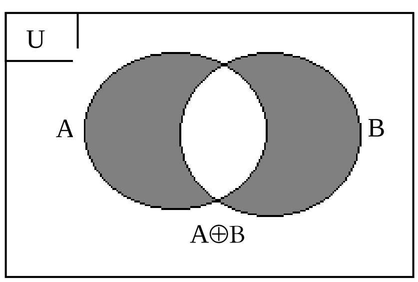
A={1,2,3,4} dan B={2,5,6,7,8}, maka A-B={1,3,4}.

Beda Setangkup Dua Himpunan

Beda setangkup antara dua himpunan memakai symbol “⊕” atau kadang-kadang “Δ “.

Definisi : Beda setangkup antar himpunan A dengan himpunan B yang ditulis sebagai A⊕B atau **AΔB adalah suatu himpunan yang berisi semua anggota A saja, atau semua anggota B saja, tidak boleh merupakan sekaligus anggota A dan anggota B.**

Diagram Venn dari operasi ini adalah :



Daerah yang diarsir menunjukkan daaerah A⊕B

Contoh :

A={1,2,3,4} dan B={2,5,6,7,8}, maka A⊕B={1,3,4,5,6,7,8}.

Dalil-Dalil Dalam Himpunan

Ada analogi antara dalil dalam logika matematika dengan dalam dalam himpunan. Oleh karena itu, setelah kita memahami dalil-dalil dalam logika, diharapkan kita tidak terlalu mendapat masalah untuk memahami dalil-dalil berikut.

1. Komplemen Ganda

   $(A^c)^c \equiv A$

2. Dalil De Morgan

   $(A \cap B)^c \equiv A^c \cup B^c$

   $(A \cup B)^c \equiv A^c \cap B^c$

3. Komutatif

   $A \cap B \equiv B \cap A$

   $A \cup B \equiv B \cup A$

4. Asosiatif

   $A \cup (B \cup C) \equiv (A \cup B) \cup C$

   $A \cap (B \cap C) \equiv (A \cap B) \cap C$

5. Distributif

   $A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   $A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C)$

6. Idempotent

   $A \cup A \equiv A$

   $A \cap A \equiv A$

7. Identitas

   $A \cup \varnothing \equiv A$

   $A \cap U \equiv A$

8. Invers

   $A \cup A^c \equiv U$

   $A \cap A^c \equiv \varnothing$

9. Dominasi

   $A \cup U \equiv U$

   $A \cap \varnothing \equiv \varnothing$

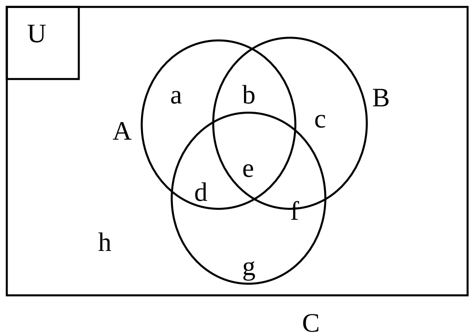
10. Penyerapan

    $A \cup (A \cap B) \equiv A$

$A \cap (A \cup B) \equiv A$

Latihan Pertemuan Keenam Bagian II.

1. Perhatikan diagram venn (huruf kecil di dalam diagram tersebut menunjukan banyaknya anggota) berikut:



Tentukan banyaknya anggota himpunan berikut :

a. $\neg A \cap B$ b. $\neg A \oplus B$ c. $A \oplus B \oplus C$ d. $(A \oplus B) \cap C$

e. $(A \cup B) \oplus (A \cup C)$ f. $\neg(A \oplus B) \cap C$

2. Buat diagram venn dari :
   a. $A \oplus B \oplus C$
   b. $(A \oplus B) \cup C$
   c. $(A \oplus B) \cap C$
   d. $(A \cup B) \oplus (A \cup C)$
   e. $\neg(A \oplus B) \cap C$
   f. $[A-(B \cup C)] \cup (B \cap C)$
   g. $\neg(A \cap B \cap C) \cap [(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)]$

3. Gambarkan diagram venn untuk yang himpunan yang memenuhi berikut ini :
   a. misalkan A dan B adalah himpunan sedemikian rupa sehingga :

      "$(A \cup B) \subseteq B$ namun tidak benar bahwa $B \subseteq A$."

   b. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan sedemikian rupa sehingga :

      "$(A \cap B \cap C) = \emptyset$, $(A \cap B) \neq \emptyset$, $(A \cap C) \neq \emptyset$, dan $(B \cap C) \neq \emptyset$."

4. Dari 75 anak bermain jenis A, B, dan C, diperoleh data sebagai berikut : 20 anak bermain ketiganya, 55 anak bermain sekurang-kurangnya dua macam permainan. Ongkos untuk sekali permainan adalah Rp. 1000. Jika ongkos total yang harus dibayar adalah Rp. 140.000, maka berapa anak yang tidak bermain sama sekali?

5. Suatu kelas ada 50 mahasiswa. Dari dua kali ujian diperoleh data sebagai berikut : 26 anak mendapat nilai A pada ujian I. 21 anak mendapat A pada ujian II, dan 17 anak tidak pernah mendapat A sama sekali. Berapa orang yang mendapat nilai A baik pada ujian I maupun ujian II.

6. Dari hasil survey terhadap 500 orang mengenai tiga calon presiden : A, B, dan C, diperoleh data sebagai berikut :
   Ada 420 orang yang memberikan tanggapan dengan menunjukan pilihan terhadap tiga calon tersebut, yaitu : 300 orang suka A, 140 orang suka B, 90 suka C, 60 orang suka A dan B, 50 orang suka A dan C, serta 20 orang suka B dan C.
   a. Berapa yang suka A dan B saja.
   b. Berapa yang suka A saja dan suka B saja?
   c. Berapa orang tidak suka A
   d. Berapa orang memberikan pilihan pada satu orang saja.

7. Dari suatu angket tentang hobby 150 orang, diperoleh keterangan : 50 orang suka olah raga, 105 orang suka mendaki gunung atau kesenian, 100 orang suka olah raga atau kesenian, 95 orang suka olah raga saja atau kesenian saja atau mendaki gunung saja, 25 orang suka olah raga dan kesenian atau olah raga dan mendagi gunung, 19 orang suka olah raga dan kesenian atau kesenian dan mendagki gunung, 21 orang suka olah raga dan mendaki gunung, dan 10 orang suka kesenian dan mendaki gunung tetapi tidak suka olah raga.
   a. Berapa orang yang suka kesenian?
   b. Berapa orang yang : jika suka kesenian maka suka olah raga
   c. berapa orang yang : suka kesenian jika dan hanya jika suka olah raga

8. Dalam suatu kelas terdiri dari 185 mahasiswa diketahui bahwa : 50 anak mendapat A pada ujian I, 55 anak mendapat A pada ujian II, 60 anak mendapat A pada ujian III, 90 anak mendapat A pada ujian I atau pada ujian II, 95 anak mendapat A pada ujian II atau ujian III, 10 anak mendapat A pada ketiga ujian, dan 70 anak tidak pernah mendapat A. Tentukan banyaknya:
   a. Mahasiswa yang sedikitnya mendapat A dua kali
   b. Mahasiswa yang mendapat A sekali

9. Buktikan
   a. $\neg[(A\cap B)\cup C] = \neg(A\cup B)\cup\neg(B\cup C)$
   b. $A-(A-B) = A\cap B$
   c. $A\cap(B-A) = \varnothing$
   d. $(A\cup B)-C = (A-C)\cup(B-C)$
   e. $\neg[\neg A\cap(A\cup B)] = A\cup\neg B$
   f. $A\cap(B\oplus C) = (A\cap B)\oplus(A\cap C)$

10. Buktikan untuk sembarang himpunan berlaku :
   a. $n(A\cup b) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$
   b. $n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)$