

Topik ke 6

Relasi Rekursif



Telah kita ketahui bersama bahwa keunggulan komputer adalah dalam melakukan komputasi. Dalam hal ini seringkali kita jumpai nilai suatu fungsi dengan domain bilangan bulat dihitung secara iterative. Hal ini dikarenakan suatu fungsi dinyatakan sebagai fungsi dari dirinya sendiri. Permasalahan akan muncul untuk n yang cukup besar. Untuk kasus ini penghitungan secara iterative akan tidak efisien. Oleh karena itu perlu ditemukan suatu rumus dalam n untuk fungsi tersebut, sehingga penghitungan suatu fungsi tidak perlu dimulai dari n terkecil, tetapi dapat langsung dilakukan. Hal ini akan menjadi bahasan utama topik ini.

6.1 Pengertian

Relasi rekursif merupakan barisan unsur-unsur, dimana nilai suatu unsur merupakan fungsi dari unsur-unsur sebelumnya. Unsur ke n biasanya dituliskan sebagai a_n . Sebagai ilustrasi perhatikan contoh berikut :

- a. $3a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$
- b. $3a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$, untuk $n \geq 1$, $a_0 = 7$, dan $a_1 = 3$.

Pada contoh di atas terdapat dua perbedaan antara (a) dengan (b), yaitu :

- Pada bagian (a) kita belum dapat menentukan secara khusus relasi rekursif yang dimaksud. Ada banyak sekali relasi rekursi yang memenuhi (a) di atas. Di antaranya adalah :
 1. $11, 3, 5 \frac{6}{9}, 4 \frac{21}{27}, \dots$
 2. $7, 3, 4 \frac{1}{3}, 3 \frac{8}{9}, 4 \frac{1}{27}, \dots$
 3. dsb.
- Pada bagian (b), relasi rekursif yang dimaksud sudah khusus, dan hanya ada satu buah yang memenuhi, yaitu :

$$7, 3, 4 \frac{1}{3}, 3 \frac{8}{9}, 4 \frac{1}{27}, \dots$$

Relasi rekursif untuk contoh (a) disebut sebagai **bentuk umum**. Sedangkan untuk bagian (b) disebut **bentuk khusus**. Terlihat bahwa bentuk khusus adalah bentuk umum yang sudah diberi **nilai awal** (**nilai inisial**). Nilai inisial ini juga disebut sebagai nilai atau kondisi pembatas (**boundary condition**).

6.2 Solusi Suatu Relasi Rekursif

Yang dimaksud solusi dari suatu relasi rekursif adalah perumusan suku ke- n sebagai fungsi dari n , bukan dalam bentuk fungsi dari suku-suku sebelumnya.

Suatu relasi rekursif dapat dicari solusinya kalau dia sudah dalam bentuk khusus, yaitu sudah diberi nilai inisial. Sebagai contoh perhatikan tabel di bawah ini :

No.	Relasi rekursif	Inisial	Solusi
1	$a_{n+1}=3a_n$	$n \geq 0$, dan $a_0=5$	$a_n=5 \times 3^n$
2	$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$	$n \geq 0$, $a_0=0$, dan $a_1=1$	$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$
3	$2a_{n+3}=a_{n+2}+2a_{n+1}-a_n$	$n \geq 0$, $a_0=0$, $a_1=1$ dan $a_2=2$	$a_n = 5/2 + 1/6(-1)^n - 8/3(1/2)^n$
4	$a_n - 3a_{n-1} = 5 (7^n)$	$n \geq 1$, dan $a_0=2$	$a_n = (5/4) (7^{n+1}) - (1/4) (3^{n+3})$

6.3 Klasifikasi Relasi Rekursif

Ada beberapa hal yang mencirikan suatu relasi rekursif, yaitu :

- Seberapa jauh keterkaitan dengan unsur sebelumnya
- Perpangkatan dari suku-suku dalam persamaan relasi rekursif
- Bentuk fungsi $f(n)$ dalam relasi rekursif tersebut.

Sebagai ilustrasi perhatikan relasi rekursi berikut :

$$a_n - 3a_{n-1} = 5 (7^n)$$

Terlihat bahwa :

- Suatu unsur terkait dengan satu level unsur sebelumnya
- Suku-suku dalam persamaan adalah berpangkat satu
- Fungsi $f(n)$ adalah : $f(n) = 5 (7^n)$

Berdasarkan tiga ciri tersebut, relasi rekursif dapat dikelompokkan menjadi :

1. Relasi rekursif homogen linear (*linear homogeneous recurens relation*)

- Relasi rekursif homogen linear orde satu (*first-order linear homogeneous recurens relation*)

Contoh : $a_n - 3a_{n-1} = 0$

- Relasi rekursif homogen linear orde dua (*second-order linear homogeneous recurens relation*)

Contoh : $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$

- Relasi rekursif homogen linear orde k (*k-order linear homogeneous recurens relation*)

Bentuk umum : $c_k a_{n+k} + c_{k-1} a_{n+k-1} + \dots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0$

2. Relasi rekursif homogen nonlinear (*nonlinear homogeneous recurens relation*)

Contoh :

Relasi rekursif homogen nonlinear orde 2 : $\sqrt{a_n} + 2\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_{n-2}} = 0$

3. Relasi rekursif nonhomogen linear (*linear non homogeneous recurrence relation*)

Contoh :

Relasi rekursif nonhomogen linear orde 2 : $a_n + 2a_{n-1} - a_{n-2} = 5(n!)$

4. Relasi rekursif nonhomogen nonlinear (*nonlinear nonhomogeneous recurrence relation*)

Contoh :

Relasi rekursif nonhomogen nonlinear orde 2 : $\sqrt{a_n} + 2\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_{n-2}} = 5(n!)$

Di dalam kuliah ini hanya akan dibahas relasi rekursif linear homogen (jenis 1).

6.4 Beberapa Cara Mencari Solusi Relasi Rekursif

Untuk memberikan gambaran mengenai metode mencari solusi relasi rekursif ini akan digunakan contoh untuk : relasi rekursif linear homogen orde 2. Bentuk umum relasi ini adalah :

$$C_2 a_{n+2} + C_1 a_{n+1} + C_0 a_n = 0$$

Misalkan solusinya adalah berbentuk :

$$a_n = cr^n$$

maka dengan mensubstitusikannya ke dalam persamaan relasi rekursif tersebut akan diperoleh bentuk :

$$C_2 cr^{n+2} + C_1 cr^{n+1} + C_0 cr^n = 0$$

Atau bisa ditulis juga :

$$A_2 r^{n+2} + A_1 r^{n+1} + A_0 r^n = 0$$

Dengan membagi masing-masing ruas dengan r^n , maka akan diperoleh :

$$A_2 r^2 + A_1 r + A_0 = 0$$

Persamaan ini disebut sebagai persamaan ciri (*characteristic equation*), dan akar-akar persamaan tersebut disebut sebagai akar ciri (*characteristic root*).

Jika akar-akar persamaan tersebut adalah r_1 dan r_2 , maka solusi relasi rekursif tersebut adalah :

a. Jika $r_1 \neq r_2$, maka solusinya adalah :

$$a_n = c_1 (r_1)^n + c_2 (r_2)^n$$

b. Jika $r_1 = r_2$, maka solusinya adalah :

$$a_n = c_1 (r_1)^n + c_2 n(r_2)^n$$

Contoh :

1. Carilah solusi untuk : $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$, dengan $n \geq 2$, $a_0 = 1$ dan $a_1 = 2$.

Persamaan ciri dari relasi tersebut adalah :

$$r^2 + r - 6 = 0$$

$$(r-2)(r+3)=0,$$

maka $r_1 = 2$ dan $r_2 = -3$. Oleh karena itu solusinya adalah :

$$a_n = c_1 (2)^n + c_2 (-3)^n$$

Tahap berikutnya adalah mencari nilai c_1 dan c_2 .

$$a_0=1, \text{ maka : } 1 = c_1 (2)^0 + c_2 (-3)^0$$

$$1 = c_1 + c_2$$

$$a_1=2, \text{ maka : } 2 = c_1 (2)^1 + c_2 (-3)^1$$

$$2 = 2c_1 - 3c_2$$

Akhirnya diperoleh : $c_1 = 1$ dan $c_2 = 0$. Oleh karena itu, solusi relasi rekursif tersebut adalah :

$$a_n = 2^n$$

2. Carilah solusi untuk relasi rekursif berikut :

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, \text{ dengan } n \geq 0, a_0=1, \text{ dan } a_1=3.$$

Jawab :

Relasi tersebut dapat ditulis sebagai :

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$$

sehingga persamaan cirinya adalah :

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$(r - 2)(r - 2) = 0$$

$$r_1 = r_2 = 2$$

maka solusinya adalah :

$$a_n = c_1 (2)^n + c_2 n(2)^n$$

Untuk menghitung c_1 dan c_2 digunakan nilai inisial, yaitu :

$$a_0=1, \text{ maka :}$$

$$1 = c_1 (2)^0 + c_2 n(2)^0$$

$$1 = c_1$$

$$a_1=3, \text{ maka :}$$

$$3 = c_1 (2)^1 + c_2 n(2)^1$$

$$3 = 2 + 2c_2$$

$$c_2 = \frac{1}{2}$$

Maka solusi relasi tersebut adalah :

$$a_n = 2^n + \frac{1}{2} n (2^n)$$

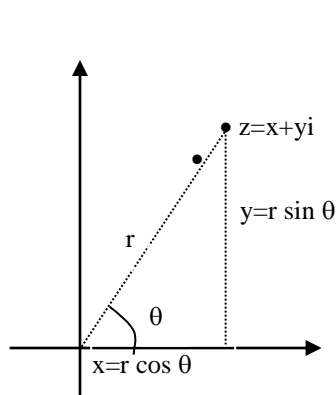
$$= 2^n + n (2^{n-1})$$

3. Contoh yang ketiga ini adalah jika akar-akar persamaan ciri adalah bilangan kompleks. Untuk itu, maka sebelumnya akan kita bahas dahulu bagaimana merumuskan bilangan kompleks tersebut.

Bilangan kompleks z dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$z = x + yi, \text{ dengan } i = \sqrt{-1}$$

Setiap koordinat (x, y) dapat dinyatakan dengan menggunakan persamaan berikut :



$$x = r \cos \theta, \text{ dan } y = r \sin \theta$$

dengan :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Oleh karena itu, bilangan kompleks tersebut dapat dinyatakan sebagai :

$$z = r \cos \theta + r \sin \theta \cdot i$$

$$= r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Dengan menggunakan dalil DeMoivre berikut :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta), \text{ untuk } n \geq 0.$$

Akan diperoleh :

$$z^n = [r (\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Sebagai ilustrasi perhatikan contoh berikut :

$$Z = (1 + \sqrt{3}i)^{10}$$

Dalam hal ini :

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\text{tg } \theta = y/x = \sqrt{3} / 1, \text{ sehingga } \theta = \pi/3$$

Oleh karena itu :

$$\begin{aligned} Z &= (1 + \sqrt{3}i)^{10} = \{2(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3)\}^{10} \\ &= 2^{10}(\cos 10\pi/3 + i \sin 10\pi/3) \\ &= 1024 (\cos 4\pi/3 + i \sin 4\pi/3) \\ &= 1024 (-1/2 - i 1/2 \sqrt{3}) \\ &= -512(1 + i \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Berikut ini diberikan contoh relasi rekursi orde dua dengan akar dari persamaan cirinya adalah bilangan kompleks.

Tentukan solusi dari :

$$a_n = 2(a_{n-1} - a_{n-2}), \text{ dengan } n \geq 2, a_0 = 1, \text{ dan } a_1 = 2.$$

Persamaan ciri dari relasi rekursif tersebut adalah :

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

Dan diperoleh :

$$r_1 = 1 + i \text{ serta } r_2 = 1 - i$$

sehingga solusinya adalah :

$$a_n = c_1(1+i)^n + c_2(1-i)^n$$

Dengan dalil DeMoivre diperoleh :

$$(1+i)^n = \sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$$

$$(1-i)^n = \sqrt{2}(\cos (-\pi/4) + i \sin (-\pi/4)) = \sqrt{2}(\cos \pi/4 - i \sin \pi/4)$$

Maka solusi tersebut dapat dituliskan sebagai :

$$\begin{aligned} a_n &= c_1(\sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4))^n + c_2(\sqrt{2}(\cos \pi/4 - i \sin \pi/4))^n \\ &= (\sqrt{2})^n (k_1 \cos n\pi/4 + k_2 \sin n\pi/4) \end{aligned}$$

Dalam hal ini :

$$k_1 = c_1 + c_2 \text{ dan } k_2 = (c_1 - c_2)i$$

Berikutnya adalah menghitung k_1 dan k_2 dengan menggunakan nilai inisial.

$$a_0 = 1, \text{ maka : } 1 = (\sqrt{2})^0 (k_1 \cos 0 - k_2 \sin 0) = k_1$$

$$a_1 = 2, \text{ maka : } 2 = (\sqrt{2})^1 (k_1 \cos \pi/4 - k_2 \sin \pi/4) = 1 + k_2, \text{ jadi } k_2 = 1$$

Oleh karena itu solusi dari relasi rekursif tersebut adalah :

$$a_n = (\sqrt{2})^n (\cos n\pi/4 + \sin n\pi/4)$$

6.5 Latihan Pertemuan 10

1. Rumuskan hubungan rekursif untuk barisan berikut :

- 2, 10, 50, 250, ...
- 6, -18, 54, -162, ...
- 1, 1/3, 1/9, 1/27, ...
- 7, 14/5, 28/25, 56/125, ...

2. Carilah solusi dari hubungan rekursif berikut :

- $a_{n+1} - 1.5 a_n = 0$, $n \geq 0$ dan $a_0 = 10$
- $2a_n - 3a_{n-1} = 0$, $n \geq 1$ dan $a_4 = 81$

3. Carilah solusi untuk relasi rekursif berikut :

- $a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}$, untuk $n \geq 2$, $a_0 = 1$, dan $a_1 = 3$.
- $3a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$, untuk $n \geq 1$, $a_0 = 7$, dan $a_1 = 3$.
- $a_{n+2} + 4a_n = 0$, untuk $n \geq 0$, $a_0 = a_1 = 1$.
- $a_n + 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$ untuk $n \geq 2$, $a_0 = 1$, dan $a_1 = 3$.