超幾何微分方程式における intertwiner と因数分解）

adhara*

2022 年 1 月 9 日

本ノートは Dereziński & Majewski [*1] を参考にしている．

超幾何微分方程式の基本形は

$$\left(w(1-w)\partial_w^2+(c-(a+b+1)w)\partial_w-ab\right)F(w)=0 \tag{1}$$

であるが，以下のパラメータ

$$\alpha:=c-1,\quad \beta:=a+b-c,\quad \mu:=b-a \tag{2}$$

を導入し，微分作用素

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\mu}(w,\partial_w)=w(1-w)\partial_w^2+((1+\alpha)(1-w)-(1+\beta)w)\partial_w\\+\frac{1}{4}\mu^2-\frac{1}{4}(\alpha+\beta+1)^2\end{aligned} \tag{3}$$

を定義すると超幾何微分方程式は

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\mu}(w,\partial_w)F(w)=0 \tag{4}$$

となる．ここで $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\mu}(w,\partial_w)$ を標準超幾何作用素（standard hypergeometric operator）と呼ぶことにする．一方，

$$\mathcal{F}^{\mathrm{bal}}_{\alpha,\beta,\mu}(w,\partial_w):=w^{\frac{\alpha}{2}}(1-w)^{\frac{\beta}{2}}\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\mu}(w,\partial_w)(1-w)^{-\frac{\beta}{2}}w^{-\frac{\alpha}{2}} \tag{5}$$

---

* Twitter @adhara_mathphys

*1 Dereziński, J., & Majewski, P. (2016). From conformal group to symmetries of hypergeometric type equations. SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 12, 108.

で定義される微分作用素を対称化超幾何作用素（balanced hypergeometric operator）と呼ぶことにすると，超幾何微分方程式は

$$\mathcal{F}^{\mathrm{bal}}_{\alpha,\beta,\mu}(w,\partial_w)\,F(w)=0 \tag{6}$$

と書くこともできる．ここで，

$$\mathcal{F}^{\mathrm{bal}}_{\alpha,\beta,\mu}(w,\partial_w)=\partial_w w(1-w)\partial_w-\frac{\alpha^2}{4w}-\frac{\beta^2}{4(1-w)}+\frac{\mu^2-1}{4} \tag{7}$$

であるから $\mathcal{F}^{\mathrm{bal}}_{\alpha,\beta,\mu}$ は α,β,μ の符号反転に関して対称である．

次に微分作用素

$$a^{(-1)^\sigma,(-1)^\rho}_{\alpha,\beta}:=\sqrt{w(1-w)}\left(\partial_w-(-1)^\sigma\frac{\alpha}{2w}+(-1)^\rho\frac{\beta}{2(1-w)}\right) \tag{8}$$

を定義する．微分作用素 $a^{(-1)^\sigma,(-1)^\rho}_{\alpha,\beta}$ は対称化超幾何作用素に関する intertwiner relation

$$a^{(-1)^\sigma,(-1)^\rho}_{\alpha,\beta}\mathcal{F}^{\mathrm{bal}}_{\alpha,\beta,\mu}(w,\partial_w)=\mathcal{F}^{\mathrm{bal}}_{\alpha+(-1)^\sigma,\beta+(-1)^\rho,\mu}(w,\partial_w)a^{(-1)^\sigma,(-1)^\rho}_{\alpha,\beta} \tag{9}$$

を満たすために、intertwiner と呼ぶことにする．

次に intertwiner を組み合わせることで対称化超幾何作用素を因数分解できることを示す．式 9 において添字をシフトすると次の intertwiner relation

$$a^{-(-1)^\sigma,-(-1)^\rho}_{\alpha+(-1)^\sigma,\beta+(-1)^\rho}\mathcal{F}^{\mathrm{bal}}_{\alpha+(-1)^\sigma,\beta+(-1)^\rho,\mu}(w,\partial_w)=\mathcal{F}^{\mathrm{bal}}_{\alpha,\beta,\mu}(w,\partial_w)a^{(-1)^\sigma,(-1)^\rho}_{\alpha,\beta} \tag{10}$$

が成立する．式 9 と式 10 を組み合わせると，次の交換関係

$$\left[a^{-(-1)^\sigma,-(-1)^\rho}_{\alpha+(-1)^\sigma,\beta+(-1)^\rho}a^{(-1)^\sigma,(-1)^\rho}_{\alpha,\beta},\mathcal{F}^{\mathrm{bal}}_{\alpha,\beta,\mu}(w,\partial_w)\right]=0 \tag{11}$$

が成立する．微分作用素 ∂^2 の係数比較から $\mathcal{F}^{\mathrm{bal}}_{\alpha,\beta,\mu}(w,\partial_w)$ と $a^{-(-1)^\sigma,-(-1)^\rho}_{\alpha+(-1)^\sigma,\beta+(-1)^\rho}a^{(-1)^\sigma,(-1)^\rho}_{\alpha,\beta}$

は函数分だけ異なることがわかる．実際，

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{w(1-w)}\left(\partial_w + (-1)^\sigma \frac{\alpha + (-1)^\sigma}{2w} - (-1)^\rho \frac{\beta + (-1)^\rho}{2(1-w)}\right) \\
&\times \sqrt{w(1-w)}\left(\partial_w - (-1)^\sigma \frac{\alpha}{2w} + (-1)^\rho \frac{\beta}{2(1-w)}\right) \\
&= \left(\partial_w + (-1)^\sigma \frac{\alpha}{2w} - (-1)^\rho \frac{\beta}{2(1-w)}\right) \\
&\times w(1-w)\left(\partial_w - (-1)^\sigma \frac{\alpha}{2w} + (-1)^\rho \frac{\beta}{2(1-w)}\right) \\
&= \partial_w w(1-w)\partial_w - \left(-\frac{(-1)^\sigma \alpha}{2w} + \frac{(-1)^\rho \beta}{2(1-w)}\right)^2 w(1-w) + \frac{(-1)^\sigma \alpha + (-1)^\rho \beta}{2} \\
&= \mathcal{F}^{\mathrm{bal}}_{\alpha,\beta,\mu}(w,\partial_w) - \frac{\mu^2}{4} + \left(\frac{(-1)^\sigma \alpha + (-1)^\rho \beta + 1}{2}\right)^2
\end{aligned} \tag{12}
$$

となる．即ち，

$$
\mathcal{F}^{\mathrm{bal}}_{\alpha,\beta,\mu}(w,\partial_w) = a^{-(-1)^\sigma,-(-1)^\rho}_{\alpha+(-1)^\sigma,\beta+(-1)^\rho} a^{(-1)^\sigma,(-1)^\rho}_{\alpha,\beta} + \frac{\mu^2}{4} - \left(\frac{(-1)^\sigma \alpha + (-1)^\rho \beta + 1}{2}\right)^2 \tag{13}
$$

である．[*2]

[*2] Dereziński & MajewskiDereziński, J., & Majewski, P. (2016). From conformal group to symmetries of hypergeometric type equations. SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 12, 108. の p.11 の Factorization の第一式に相当するのだが，間違っているように思う．