共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1) \simeq \mathfrak{so}(4,2)$ の構成

adhara_mathphys

2020 年 9 月 27 日

目次

1　概要

Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{1,3}$ における Maxwell 方程式は Lorentz 対称性に加えて共形対称性（conformal symmetry）をもつ．本記事では共形対称性に対応するリー代数である共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ の構成方法を紹介し，これが $\mathfrak{so}(4,2)$ と同型であることを示す．本ノートでは，時空に関する対称性である狭義 Lorentz 変換代数 $\mathfrak{so}(3,1)$ を導入し，その他必要な演算子を次々と付け加えていくことで共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ を構成する，という方針をとる．

1.1　表記について

以下の議論では Einstein の縮約が使われる．テンソルの上付き添え字は反変成分に，下付き添え字は共変成分に対応する．ここで計量テンソル η を導入したが，これを行列として表示した場合に

$$
\begin{aligned}
\eta &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{diag}(-1,1,1,1)
\end{aligned} \tag{1}
$$

となるように定義している．時間成分のことを第 0 成分，空間成分のことを第 1,2,3 成分と呼ぶ．x^2 は $x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ を表すものとする．

2　狭義 Lorentz 変換代数 $\mathfrak{so}(3,1)$ の構成

2.1　ミンコフスキー距離を保つ微小な線形座標変換

微小な線形座標変換

$$
dx'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu dx^\mu = (\delta^\nu{}_\mu + L^\nu{}_\mu)dx^\mu \tag{2}
$$

について考える．微小座標変換がミンコフスキー距離 $\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ を保つとは，

$$
\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma dx^\rho dx^\sigma \tag{3}
$$

が $O(L)$ の範囲で成立することを言う．このとき，右辺において $O(L^2)$ となる項を無視すると，

$$
\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma dx^\rho dx^\sigma \\
&= (\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\rho\nu}L^\nu{}_\sigma + \eta_{\mu\sigma}L^\mu{}_\rho)dx^\rho dx^\sigma
\end{aligned} \tag{4}
$$

が成立する．すなわち，

$$
= (L_{\rho\sigma} + L_{\sigma\rho})dx^\rho dx^\sigma = 0 \tag{5}
$$

が成立し，L が反対称テンソルであることすなわち，

$$L_{\rho\sigma} + L_{\sigma\rho} = 0 \tag{6}$$

を要請する．ミンコフスキー距離を保つ微小な線形変換は，Minkowski 空間における狭義回転すなわち狭義 Lorentz 変換に対応する．

2.2　狭義 Lorentz 変換とリー代数 $\mathfrak{so}(3,1)$

$\mathfrak{so}(3,1) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 狭義回転演算子を L としたとき，これに期待される役割は $O(L)$ の範囲で反対称テンソル $L^{\rho}{}_{\mu}$ を用いて

$$e^{-\mathrm{i}L} x^{\rho} e^{\mathrm{i}L} = (\delta^{\rho}{}_{\mu} + L^{\rho}{}_{\mu}) x^{\mu} \tag{7}$$

と書けること，すなわち反対称テンソル $L^{\rho}{}_{\mu}$ を用いて

$$[L, x^{\rho}] = \mathrm{i} L^{\rho}{}_{\mu} x^{\mu} \tag{8}$$

と書けることである．このとき，L は，

$$\begin{aligned} L &= \mathrm{i} x^{\mu} L^{\nu}{}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \\ &= \mathrm{i} x_{\mu} L^{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \\ &= -\mathrm{i} x_{\mu} L^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \end{aligned} \tag{9}$$

と書ける．ここで，狭義回転演算子

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= -\mathrm{i}\eta_{\mu\alpha} x^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} + \mathrm{i}\eta_{\nu\alpha} x^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \\ &= -\mathrm{i} x_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} + \mathrm{i} x_{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \end{aligned} \tag{10}$$

を導入すると，

$$\begin{aligned} L &= -\mathrm{i} x_{\mu} L^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \\ &= \frac{1}{2} L^{\mu\nu} \left(-\mathrm{i} x_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} + \mathrm{i} x_{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right) \\ &= \frac{1}{2} L^{\mu\nu} M_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{11}$$

が成立する．ここで，$M_{\mu\nu}$ 同士の交換関係をリーブラケットと解釈すると，これらの演算子はリー代数 $\mathfrak{so}(3,1) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ をなすことがわかる．すなわち，

$$M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma} = \mathrm{i}\eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \mathrm{i}\eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \mathrm{i}\eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + \mathrm{i}\eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} \tag{12}$$

が成立する．また $M_{\mu\nu} (\mu < \nu)$ はリー代数の基底をなし，リー代数の次元は 6 であることもわかる．

3　Poincaré 代数 $\mathfrak{iso}(3,1)$ の構成

3.1　並進演算子

Minkowski 空間は並進対称性をもつ．並進演算子を P としたとき，これに期待される役割は $O(\epsilon)$ の範囲で

$$e^{-\mathrm{i}P}x^\rho e^{\mathrm{i}P} = x^\rho + \epsilon^\rho \tag{13}$$

と書けること，すなわち

$$[P, x^\rho] = \mathrm{i}\epsilon^\rho \tag{14}$$

と書けることである．このとき，P は，

$$P = \mathrm{i}\epsilon^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{15}$$

と書ける．ここで，並進演算子

$$P_\mu = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{16}$$

を導入すると，

$$P = \epsilon^\mu P_\mu \tag{17}$$

と書ける．明らかに

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{18}$$

である．

3.2　Poincaré 対称性とリー代数 $\mathfrak{iso}(3,1)$

並進演算子と狭義 Lorentz 変換演算子がなす代数は Poincaré 代数と呼ばれ，Minkowski 空間の対称性である Poincaré 対称性を記述する．両演算子の間では交換関係

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = \mathrm{i}\eta_{\mu\rho}P_\nu - \mathrm{i}\eta_{\nu\rho}P_\mu \tag{19}$$

が成立する．Poincaré 代数はリー代数としては $\mathfrak{iso}(3,1)$ と同型である．

4　スケール変換代数の構成

4.1　Minkowski 距離が 0 の場合にこれを保つ微小線形変換

再び微小な線形座標変換

$$\begin{aligned} dx'^\nu &= \Lambda^\nu{}_\mu dx^\mu \\ &= (\delta^\nu{}_\mu + L^\nu{}_\mu)dx^\mu \end{aligned} \tag{20}$$

について考える．微小座標変換がミンコフスキー距離 $\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$ を保つとは，

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= \eta_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma dx^\rho dx^\sigma \\ &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

が $O(L)$ の範囲で成立することを言う．このとき，狭義 Lorentz 変換に対応する微小線形変換に限らず，

$$L_{\rho\sigma} \propto \eta_{\rho\sigma}$$

のときも成立する．これは計量を定数倍する変換であり，スケール変換あるいは伸長変換（dilation）に対応するものである．

4.2　伸長演算子

座標を $(1+\epsilon)$ 倍する伸長演算子を $D(1+\epsilon)$ としたとき，これに期待される役割は $O(\epsilon)$ の範囲で

$$e^{-\mathrm{i}D(1+\epsilon)}x^\rho e^{\mathrm{i}D(1+\epsilon)} = (1+\epsilon)x^\rho \tag{22}$$

と書けること，すなわち

$$[D(1+\epsilon), x^\rho] = \mathrm{i}\epsilon x^\rho \tag{23}$$

と書けることである．すなわち，伸長演算子

$$D = \mathrm{i}x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{24}$$

を導入して，

$$D(1+\epsilon) = \epsilon D \tag{25}$$

と書ける．伸長演算子と Poincaré 代数を合わせたリー代数においては，次の交換関係が成立する．

$$[D, M_{\mu\nu}] = 0 \tag{26}$$

$$[D, P_\mu] = -\mathrm{i}P_\mu \tag{27}$$

このリー代数はスケール不変性を保つ理論について議論する際に必要となり，スケール変換代数とも呼ばれる．

5　共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ の導入

5.1　反転演算子

反転変換（inversion）あるいは反転演算子という概念を導入する．共形対称性を保つ理論を考える際に重要な離散的な演算子である．離散変換 $I : x^\nu \mapsto \frac{x^\nu}{x^2}$ を反転変換と呼び，対応する演算子を反転演算

子と呼ぶ．反転演算子は

$$I^2 = 1$$

となる性質を持つ．また，$y = Ix$ とした時に座標変換の Jacobian は

$$\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{1}{x^2}\left(\delta^\nu_\mu - \frac{2x^\nu x_\mu}{x^2}\right) \tag{28}$$

である．

5.2 伸長演算子と反転演算子の関係

次の式が成立する．

$$IDI = -D \tag{29}$$

この式は $y = Ix$ とした時に，

$$\begin{aligned} DIf(x) &= \mathrm{i}x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} f(y) \\ &= \mathrm{i}x^\mu \frac{\partial f}{\partial y^\nu}(y) \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \\ &= \mathrm{i}x^\mu \frac{\partial f}{\partial y^\nu}(y) \frac{1}{x^2}\left(\delta^\nu_\mu - \frac{2x^\nu x_\mu}{x^2}\right) \\ &= -\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y^\nu}() \frac{x^\nu}{x^2} \\ &= -\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y^\nu}(y) y^\nu \end{aligned} \tag{30}$$

が成立し，

$$\begin{aligned} IDIf(x) &= -\mathrm{i}I(y^\nu \frac{\partial f}{\partial y^\nu}(y)) \\ &= -\mathrm{i}x^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu}(x) \\ &= -Df(x) \end{aligned} \tag{31}$$

となる．二つ目の等号では $Iy = x$ を用いている．

5.3 特殊共形変換演算子

反転演算子 I は原点の変換について特異的な性質を持っており，扱いやすいものではない．ところが $K_\mu = IP_\mu I$ のような演算子を考えると，これは特異性を持たない．この演算子を特殊共形変換演算子

と呼ぶ．この演算子を求めよう．まず，

$$
\begin{aligned}
P_\mu I f(x) &= \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^\mu} f(y) \\
&= \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y^\nu}(y)\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \\
&= \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y^\nu}(y)\frac{1}{x^2}\left(\delta^\nu_\mu - \frac{2x^\nu x_\mu}{x^2}\right) \\
&= \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y^\nu}(y)\frac{1}{x^2}\left(\delta^\nu_\mu - 2y^\nu x_\mu\right)
\end{aligned} \tag{32}
$$

となる．ここで $Ix^2 = \frac{1}{x^2}$ [*1]を用いると，

$$
\begin{aligned}
IP_\mu I f(x) &= \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial x^\nu}(x) x^2 \left(\delta^\nu_\mu - 2x^\nu y_\mu\right) \\
&= \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial x^\nu}(x)\left(x^2\delta^\nu_\mu - 2x^\nu x_\mu\right)
\end{aligned} \tag{33}
$$

となる．すなわち，

$$
K_\mu = \mathrm{i}\left(x^2\delta^\nu_\mu - 2x^\nu x_\mu\right)\frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{34}
$$

となる．

5.4 共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ の構成

Poincaré 代数の各演算子と伸長演算子と特殊共形変換演算子がなす代数を共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ という．次の交換関係が成立する．

$$
[D, K_\mu] = \mathrm{i}K_\mu \tag{35}
$$

$$
[K_\mu, K_\nu] = 0 \tag{36}
$$

$$
[P_\mu, K_\nu] = -2\mathrm{i}M_{\mu\nu} - 2\mathrm{i}\eta_{\mu\nu}D \tag{37}
$$

$$
[M_{\mu\nu}, K_\rho] = \mathrm{i}\eta_{\mu\rho}K_\nu - \mathrm{i}\eta_{\nu\rho}K_\mu \tag{38}
$$

5.5 等角変換

ここでは示さないが，共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ は各位置において計量テンソルを正の数倍する変換（場所によって異なっても良い）となっている．すなわちある滑らかな関数 $w(x)$ が存在し，

$$
\eta'(x) = w^2(x)\eta(x)
$$

となる．計量テンソルを等倍するということは，局所的に角度が保たれる，すなわち等角変換だということである．またここでは示さないが，共形変換代数と鏡映操作を用いてが全ての等角変換を表すことができる．示さなかったことについては，

$$
\eta'(x) = w^2(x)\eta(x)
$$

[*1] $x^2 = 0$ のときにこの値は有限値に定まらず，特異的であることわかる．

から出てくる Killing 方程式を考えることで示すことができる．

5.6 リー代数同型 $\mathfrak{c}(3,1) \simeq \mathfrak{so}(4,2)$

共形変換代数はリー代数としては $\mathfrak{so}(4,2)$ と同型であるが，それを見通しよくするために，$0 \leq \mu, \nu \leq 3$ として，

$$M_{4\ -1} := D \tag{39}$$
$$M_{\mu\ -1} := \frac{1}{2}(K_\mu + P_\mu) \tag{40}$$
$$M_{\mu\ 4} := \frac{1}{2}(K_\mu - P_\mu) \tag{41}$$

を導入する．これを用いると，

$$M_{\mu\nu} \quad (-1 \leq \mu, \nu \leq 4)$$

は共形変換代数の基底をなすことがわかる．この代数の次元は 15 であることがわかる．そして，元の計量テンソルを拡張した新たな 6 次元の計量テンソル η を導入する．

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{42}$$
$$\mathrm{diag}(-1,-1,1,1,1,1) \tag{43}$$

負の符号をもつ第（－ 1）成分と，正の符号をもつ第 4 成分が加わったことになる．この計量テンソルを用いると，交換関係は

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \mathrm{i}\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \mathrm{i}\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \mathrm{i}\eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + \mathrm{i}\eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} \tag{44}$$

のように統一的に書かれることがわかる．すなわち共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ がリー代数としては $\mathfrak{so}(4,2)$ と同型であることが明確となった．

6 まとめとコメント

Lorentz 変換を記述するリー代数 $\mathfrak{so}(3,1)$ に対して，並進演算子・伸長演算子・特殊共形変換演算子を加えることで共形変換代数を構成できる方法を示した．また，共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ と $\mathfrak{so}(4,2)$ がリー代数として同型であることを示した．

共形変換代数は任意の次元の Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ や Lorentz 空間 $\mathbb{R}^{p,q}$ に一般化できる．すなわち，今回紹介した Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{1,3}$ と同様の手法で共形変換代数を構成できる．但し無限次元の代数となる $n=2, p=q=1$ の時は除く．Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の場合は共形変換代数は，$\mathfrak{so}(n+1,1)$ となり，Lorentz 空間 $\mathbb{R}^{p,q}$ の場合は共形変換代数は，$\mathfrak{so}(p+1,q+1)$ となる．