古典非等方調和振動子における $\mathfrak{so}(4)$ 対称性

adhara_mathphys

2024 年 8 月 18 日

1　はじめに

Kepler 系の保存量である角運動量ベクトル及び Laplace–Runge–Lenz（LRL）ベクトルの成分は，エネルギーが負のある値をとるという条件の下で，ポアソン括弧をリー括弧と見做したときにリー代数 $\mathfrak{so}(4)$ を成すことが知られている [1]．この性質は Kepler 系の量子版である（非相対論的）水素原子模型にも引き継がれ，「偶然縮退」とも呼ばれる高度なエネルギー縮退を説明するのに使われる [2]．

一方で，$\mathfrak{so}(4)$ 代数を成すような保存量が存在する，ということ自体は Kepler 系以外でも 3 次元の任意の古典一体問題で成立する，ということが知られている [3]．しかしながら，上記の対称性代数の存在は位相空間[*1]がシンプレクティック多様体であることに由来するもので，局所的な関係式に過ぎず，群の作用によって説明されるグローバルな対称性の存在を意味しない [4]．また，これらの保存量が必ずしも量子系に移行できないことから，任意の 3 次元量子系一体問題で高度なエネルギー縮退が起きる，ということもない [5]．

しかしながら，最近になって Bouarroudj–Konstein が，古典非等方調和振動子系では $\mathfrak{so}(4)$ 代数を成すような保存量は存在しない，ということを主張し，Mukunda の主張への反論を行っている [6]．本ノートでは，古典非等方調和振動子系で $\mathfrak{so}(4)$ 代数を成す保存量を，Mukunda[3] が示した方法によって構成可能であることを示し，Mukunda[3] の主張と Bouarroudj–Konstein[6] の主張の差について説明する．

[*1] phase space の意味での

2　エネルギー保存系におけるハミルトン形式の力学

ハミルトン形式の解析力学において，物理量 $A = A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ の時間発展は，時間に陽に依存しないハミルトニアン $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ を用いて，

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \sum_{i=1,2,3} \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right] + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \sum_i \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right] + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \sum_i \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{dp_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{dq_i} \right] + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned} \tag{1}$$

のように与えられる．ただし，ポアソン括弧

$$\{A, B\} = \sum_i \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right] \tag{2}$$

を導入した．

物理量 A が陽に時間に依らないときは，

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} \tag{3}$$

であり，このときに A が運動の積分，すなわち保存量となるためには，

$$\{A, H\} = 0 \tag{4}$$

が必要十分条件である．

3　三次元古典非等方調和振動子系とその保存量

本ノートでは，非等方とは「等方とは限らない」の意味とする．三次元古典非等方調和振動子系のハミルトニアンは，

$$H = H_1 + H_2 + H_3,\ H_i = \frac{\omega_i^2 q_i^2}{2} + \frac{p_i^2}{2} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{5}$$

の形をとる．

この系の最も簡単な保存量としては，H, H_i $(i = 1, 2, 3)$ がある．この中で関数独立な組としては例えば H, H_2, H_3 がある．

他の保存量として実際に運動方程式を解くことで見つかるものがある．運動方程式を解くとこの系における q_i, p_i の時間発展は，

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{\sqrt{2H_i}}{\omega_i}\cos(\omega_i t + \theta_i) \\ p_i &= -\sqrt{2H_i}\sin(\omega_i t + \theta_i) \end{aligned} \tag{6}$$

となる．ただし，θ_i $(i = 1, 2, 3)$ は，初期値と

$$q_i(0) = \frac{\sqrt{2H_i}}{\omega_i}\cos(\theta_i) \tag{7}$$

$$p_i(0) = -\frac{\sqrt{2H_i}}{\omega_i}\sin(\theta_i) \tag{8}$$

のように結びつく．この θ_i たちは時間発展の間で運動の間変化しない量である．保存量を見出すために，θ_i $(i = 1, 2, 3)$ を p, q, t の関数として表す．式 6 より，多価関数 $\tan^{-1}$ を用いて

$$\theta_i = -\tan^{-1}\left(\frac{p_i}{\omega_i q_i}\right) - \omega_i t \tag{9}$$

という関係式が出る．従って，改めて

$$\Theta_i(p, q, t) := -\tan^{-1}\left(\frac{p_i}{\omega_i q_i}\right) - \omega_i t \tag{10}$$

という物理量を導入すると，Θ_i $(i = 1, 2, 3)$ は保存量の可能性がある．実際に時間発展を計算すると，

$$\begin{aligned} \{\Theta_i, H\} &= \{\Theta_i, H_i\} \\ &= \frac{\partial \Theta_i}{\partial q_i}\frac{\partial H_i}{\partial p_i} - \frac{\partial \Theta_i}{\partial p_i}\frac{\partial H_i}{\partial q_i} \\ &= \frac{p_i}{\omega_i q_i^2}\frac{1}{1 + \left(\frac{p_i}{\omega_i q_i}\right)^2}p_i + \frac{1}{\omega_i q_i}\frac{1}{1 + \left(\frac{p_i}{\omega_i q_i}\right)^2}\omega_i^2 q_i \\ &= \frac{p_i^2\omega_i + q_i^2\omega_i^3}{p_i^2 + (\omega_i q_i)^2} \\ &= \omega_i \end{aligned} \tag{11}$$

より，

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_i}{dt} &= \{\Theta_i, H\} + \frac{\partial \Theta_i}{\partial t} \\ &= \omega_i - \omega_i \\ &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

となり，Θ_i は多価関数ではあるが，保存量である．また，$\frac{\Theta_i}{\omega_i} - \frac{\Theta_j}{\omega_j}$ $(i \neq j)$ は t に陽に依存しない保存量である．

4 三次元古典非等方調和振動子系に潜む $\mathfrak{so}(4)$ 代数

Mukunda[3] によれば，ハミルトニアン自体と 4 つのハミルトニアン以外の保存量が正準変数となるように正準変換を行うことで，$\mathfrak{so}(4)$ 代数を成す保存量を構成できる．まず，以下の変換

$$Q_1 := H \tag{13}$$
$$Q_2 := H_2 \tag{14}$$
$$Q_3 := H_3 \tag{15}$$
$$P_1 := -\frac{\Theta_1}{\omega_1} - t \tag{16}$$
$$P_2 := \frac{\Theta_1}{\omega_1} - \frac{\Theta_2}{\omega_2} \tag{17}$$
$$P_3 := \frac{\Theta_1}{\omega_1} - \frac{\Theta_3}{\omega_3} \tag{18}$$
$$\tag{19}$$

において

$$\{P_i, P_j\} = \{Q_i, Q_j\} = 0,\ \{Q_i, P_j\} = \delta_{i,j} \tag{20}$$

が成立することから，これはハミルトニアン自体と 4 つのハミルトニアン以外の保存量（Q_2, Q_3, P_2, P_3）が正準変数となる正準変換である．[*2]

これを用いると $\mathfrak{so}(4)$ 代数を成す保存量は以下で与えられる：

$$A_1 = Q_2 \tag{21}$$
$$A_2 = \sqrt{j_A^2 - Q_2^2}\cos P_2 \tag{22}$$
$$A_3 = \sqrt{j_A^2 - Q_2^2}\sin P_2 \tag{23}$$
$$B_1 = Q_3 \tag{24}$$
$$B_2 = \sqrt{j_B^2 - Q_3^2}\cos P_3 \tag{25}$$
$$B_3 = \sqrt{j_B^2 - Q_3^2}\sin P_3. \tag{26}$$

ただし，$|j_A| > Q_2, |j_B| > Q_3$ は定数．これらの間のポアソン括弧を計算すると，

$$\{A_i, B_j\} = 0,\ \{A_i, A_j\} = -\epsilon_{ijk}A_k,\ \{B_i, B_j\} = -\epsilon_{ijk}B_k \tag{27}$$

となる．これは $\mathfrak{so}(4)$ 代数の元の間のリー括弧演算に他ならない．

5 Mukunda[3] と Bouarroudj–Konstein[6] の主張の差

Bouarroudj–Konstein[6] を見ると保存量として多価関数を暗黙に許さないと見られる記述をしている．一方で，Mukunda[3] では保存量として多価関数を許していると考えられる．

[*2] P_i, Q_i $(i = 1, 2, 3)$ はいずれも t に陽に依存しない．

参考文献

[1] Hall, Brian C., 2013. “Quantum Theory for Mathematicians”, Graduate Texts in Mathematics, vol. 267, Springer, Section 18.4.2.

[2] Hall, Brian C., 2013. “Quantum Theory for Mathematicians”, Graduate Texts in Mathematics, vol. 267, Springer, Section 18.4.3-18.4.4.

[3] Mukunda, N., 1967. “Dynamical Symmetries and Classical Mechanics”, Phys. Rev. 155, 1383-1386. link

[4] Amiet, J.-P., Weigert, S., 2002. “Commensurate harmonic oscillators: Classical symmetries”, J. Math. Phys. 43, 4110-4126. link

[5] 池田峰夫, 1970.「力学系の対称性」, 日本物理學會誌 25(1), 9-13. link

[6] Bouarroudj, S., Konstein, S.E., 2019. “SO(4)-symmetry of mechanical systems with 3 degrees of freedom”, J. Nonlinear Math. Phys. 27, 162. link