共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1) \simeq \mathfrak{so}(4,2)$ の構成

adhara_mathphys

2020 年 10 月 17 日

目次

1　概要

Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ における Maxwell 方程式は Lorentz 対称性に加えて共形対称性（conformal symmetry）をもつ．本ノートでは共形対称性に対応するリー代数である共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ の構成方法を紹介し，これが $\mathfrak{so}(4,2)$ と同型であることを示す．時空に関する対称性である Lorentz 代数 $\mathfrak{so}(3,1)$ を $\mathbb{R}^{3,1}$ 上の滑らかな関数に作用する微分演算子を用いて表現し，その他に必要な微分演算子を次々と付け加えていくことで共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ を構成する，という方針をとる．

1.1　表記について

本ノートでは Einstein の縮約がしばしば使われる．テンソルの上付き添え字は反変成分に，下付き添え字は共変成分に対応する．

また，$\mathbb{R}^{3,1}$ における計量テンソル η を導入するが，その行列表示は

$$\begin{aligned} \eta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{diag}(1,1,1,-1) \end{aligned} \tag{1}$$

であるとする．空間成分のことを第 1,2,3 成分，時間成分のことを第 4 成分と呼ぶことにする．x のノルム $|x|^2$ を

$$|x|^2 := x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \tag{2}$$

によって定義する．各成分に対応する正規直交基底ベクトルを e_1, e_2, e_3, e_4 とする．

2　Lorentz 代数 $\mathfrak{so}(3,1)$ の構成

2.1　狭義 Lorentz 変換群 $SO^+(3,1)$

Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ 上のベクトルに対する回転操作は計量テンソル η に関するノルムを保つ．すなわち、ベクトル x とその回転操作後のベクトル x' に対して，

$$|x|^2 = |x'|^2$$

が成立する必要がある．

まず，$x^1 x^2$ 平面上において θ 回転操作を，$x = e_\nu x^\nu$ として，

$$R_{12}(\theta)(x) = x + e_1 \left\{ x^1(\cos\theta - 1) - x^2 \sin\theta \right\} + e_2 \left\{ x^1 \sin\theta + x^2(\cos\theta - 1) \right\} \tag{3}$$

によって定義する．行列で同じ回転操作を表現すると，

$$R_{12}(\theta)(x) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} \tag{4}$$

となる．

同様にして $1 \le i, j \le 1, i \ne j$ として，

$$\begin{aligned} R_{ij}(\theta)(x) &= x + e_i \left\{x^i(\cos\theta - 1) - x^j \sin\theta\right\} + e_j \left\{x^i \sin\theta + x^j(\cos\theta - 1)\right\} \\ &= x + e_i \{x_i(\cos\theta - 1) - x_j \sin\theta\} + e_j \{x_i \sin\theta + x_j(\cos\theta - 1)\} \end{aligned} \tag{5}$$

のように $x^i x^j$ 平面上の回転操作を定義できる．

計量の符号が異なる成分が関わる平面に関する回転は Lorentz boost（擬回転）と呼ばれる．$1 \le i \le 3$ として，$x^i x^4$ 平面上の Lorentz boost は

$$\begin{aligned} R_{i4}(\theta)(x) &= x + e_i \left\{x^i(\cosh\theta - 1) + x^4 \sinh\theta\right\} + e_4 \left\{x^i \sinh\theta + x^4(\cosh\theta - 1)\right\} \\ &= x + e_i \{x_i(\cosh\theta - 1) - x_4 \sinh\theta\} + e_4 \{x_i \sinh\theta - x_4(\cosh\theta - 1)\} \end{aligned} \tag{6}$$

によって，$x^4 x^i$ 平面上の Lorentz boost は

$$\begin{aligned} R_{4i}(\theta)(x) &= x + e_4 \left\{x^4(\cosh\theta - 1) - x^i \sinh\theta\right\} + e_i \left\{-x^4 \sinh\theta + x^i(\cosh\theta - 1)\right\} \\ &= x + e_4 \{-x_4(\cosh\theta - 1) - x_i \sinh\theta\} + e_i \{x_4 \sinh\theta + x_i(\cosh\theta - 1)\} \end{aligned} \tag{7}$$

によって，それぞれ定義される．

回転操作と Lorentz boost からなる変換を総称して狭義 Lorentz 変換と呼ぶ．狭義 Lorentz 変換の全体は群をなし狭義 Lorentz 変換群と呼ばれ，$SO^+(3,1)$ と書かれる．*1

2.2 Lorentz リー代数 $\mathfrak{so}(3,1)$ の導入

次に $i \ne j, 1 \le i, j \le 4$ として，演算子 L_{ij} を

$$L_{ij} x := \left.\frac{\partial R_{ij}(\theta)(x)}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} = -x_j e_i + x_i e_j = -\eta_{jk} x^k e_i + \eta_{ik} x^k e_j \tag{8}$$

で定義する．特に L_{ij} は線形演算子となっている．このとき，

$$R_{ij}(\theta) = \exp(\theta L_{ij}) \tag{9}$$

となっている．基底 $\{e_i\}$ に関して行列表示すると，

$$L_{ij} = \eta_{ik}({E^k}_j)^T - \eta_{jk}({E^k}_i)^T \tag{10}$$

*1 計量テンソル η に関するノルムを保つ全ての変換からなる群 $O(3,1)$ を直交群という．直交群のうち行列式が 1 となる部分群が特殊直交群 $SO(3,1)$ である．$SO(3,1)$ をその中心群 $\{I, -I\}$（I は恒等行列）で割った商群が $SO^+(3,1)$ でありそれ自身が $SO(3,1)$ の部分群として埋め込まれる．元の群 $O(3,1)$ の恒等元の連結成分が $SO^+(3,1)$ であり，$SO^+(3,1) \simeq O(3,1)/(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ の関係にある．

と書ける．但し，${E^i}_j$ は (i,j) 成分が 1 でそれ以外が 0 となっている 4 次元行列で，T は転置を表す．

ここで交換子の計算

$$\left[({E^i}_j)^T, ({E^k}_l)^T\right] = -\delta^k_j ({E^i}_l)^T + \delta^i_l ({E^k}_j)^T \tag{11}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}
[L_{ij}, L_{kl}] &= \left[(\eta_{i\mu}({E^\mu}_j)^T - \eta_{j\mu}({E^\mu}_i)^T), (\eta_{k\nu}({E^\nu}_l)^T - \eta_{l\nu}({E^\nu}_k)^T)\right] \\
&= \{\eta_{i\mu}\eta_{k\nu}\left(-\delta^\nu_j({E^\mu}_l)^T + \delta^\mu_l({E^\nu}_j)^T\right) + \eta_{i\mu}\eta_{l\nu}\left(-\delta^\mu_k({E^\nu}_j)^T + \delta^\nu_j({E^\mu}_k)^T\right) \\
&+ \eta_{j\mu}\eta_{k\nu}\left(-\delta^\mu_l({E^\nu}_i)^T + \delta^\nu_i({E^\mu}_l)^T\right) + \eta_{j\mu}\eta_{l\nu}\left(-\delta^\nu_i({E^\mu}_k)^T + \delta^\mu_k({E^\nu}_i)^T\right)\} \\
&= \{-\eta_{kj}\eta_{i\mu}({E^\mu}_l)^T + \eta_{il}\eta_{k\nu}({E^\nu}_j)^T - \eta_{ik}\eta_{l\nu}({E^\nu}_j)^T + \eta_{lj}\eta_{i\mu}({E^\mu}_k)^T \\
&- \eta_{jl}\eta_{k\nu}({E^\nu}_i)^T + \eta_{ki}\eta_{j\mu}({E^\mu}_l)^T - \eta_{li}\eta_{j\mu}({E^\mu}_k)^T + \eta_{jk}\eta_{l\nu}({E^\nu}_i)^T\} \\
&= \eta_{ik}L_{jl} - \eta_{jk}L_{il} - \eta_{il}L_{jk} + \eta_{jl}L_{ik}
\end{aligned} \tag{12}$$

となる．一方，L_{ij} の線形結合で形成される行列の集合は線形空間であること，交換子はヤコビ律を満たすことから，L_{ij} の線形結合で形成される行の集合は交換子をリー括弧とするリー代数である．これを $\mathfrak{so}(3,1)$ と書き，Lorentz リー代数と呼ぶ．

2.3 Lorentz 代数 $\mathfrak{so}(3,1)$ の微分演算子表現

Lorentz 代数 $\mathfrak{so}(3,1)$ の $\mathbb{R}^{3,1}$ 上関数空間上の微分演算子表現を得るためには，

$$L_{ij}x = -x_j e_i + x_i e_j$$

の右辺において，

$$e_i \to \frac{\partial}{\partial x_i}$$

の置き換えを行う．すなわち，

$$\begin{aligned}
M_{ij} &= \eta_{i\mu}x^\mu \frac{\partial}{\partial x^j} - \eta_{j\mu}x^\mu \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= x_i \frac{\partial}{\partial x^j} - x_j \frac{\partial}{\partial x^i}
\end{aligned} \tag{13}$$

を導入すると，

$$\begin{aligned}
\left[\exp(\theta M_{ij})f\right](x) &= f\left(R_{ij}(\theta)(x)\right) \\
&= f\left(\exp(\theta L_{ij})(x)\right)
\end{aligned} \tag{14}$$

となる．

交換子をリーブラケットとして M_{ij} たちの線形結合からなる線形空間はリー代数 $\mathfrak{so}(3,1)$ をなす．ここで，

$$[M_{ij}, M_{kl}] = -\eta_{ik}M_{jl} + \eta_{jk}M_{il} + \eta_{il}M_{jk} - \eta_{jl}M_{ik} \tag{15}$$

となっている．行列表現と微分演算子表現のリー代数同型は $(L_{ij})^T$ と M_{ij} を同一視することによって確認できる．[*2]すなわち，

$$(L_{ij})^T = \eta_{ik}E^k{}_j - \eta_{jk}E^k{}_i = E_{ij} - E_{ji} \tag{16}$$

$$\left[E^i{}_j, E^k{}_l\right] = \delta^k_j E^i{}_l - \delta^i_l E^k{}_j \tag{17}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}
[(L_{ij})^T, (L_{kl})^T] &= [(\eta_{i\mu}E^\mu{}_j - \eta_{j\mu}E^\mu{}_i), (\eta_{k\nu}E^\nu{}_l - \eta_{l\nu}E^\nu{}_k)] \\
&= \{\eta_{i\mu}\eta_{k\nu}\left(\delta^\nu_j E^\mu{}_l - \delta^\mu_l E^\nu{}_j\right) + \eta_{i\mu}\eta_{l\nu}\left(\delta^\mu_k E^\nu{}_j - \delta^\nu_j E^\mu{}_k\right) \\
&+ \eta_{j\mu}\eta_{k\nu}\left(\delta^\mu_l E^\nu{}_i - \delta^\nu_i E^\mu{}_l\right) + \eta_{j\mu}\eta_{l\nu}\left(\delta^\nu_i E^\mu{}_k - \delta^\mu_k E^\nu{}_i\right)\} \\
&= \{\eta_{kj}E_{il} - \eta_{il}E_{kj} + \eta_{ik}E_{lj} - \eta_{lj}E_{ik} + \eta_{jl}E_{ki} - \eta_{ki}E_{jl} + \eta_{li}E_{jk} - \eta_{jk}E_{li}\} \\
&= -\eta_{ik}(L_{jl})^T + \eta_{jk}(L_{il})^T + \eta_{il}(L_{jk})^T - \eta_{jl}(L_{ik})^T
\end{aligned} \tag{18}$$

となっており，同型であることがわかる．

また，

$$[M_{\mu\nu}, x_\rho] = \left[x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, x^i \eta_{i\rho}\right] = -\eta_{\mu\rho}x_\nu + \eta_{\nu\rho}x_\mu \tag{19}$$

が成立することがわかる．

3 Poincaré 代数 $\mathfrak{iso}(3,1)$ の構成

3.1 並進操作

Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ は並進対称性をもつ．ベクトルに対する並進操作は定ベクトルを加える操作である．定ベクトル s を足す並進操作 $P(s)$ を

$$P(s)(x) = x + s \tag{20}$$

によって定義する．ここで

$$P(s)P(t)(x) = P(s+t)(x) = P(t+s)(x) = P(t)P(s)x \tag{21}$$

より，並進操作は可換であることがわかる．

3.2 並進の微分演算子表現

Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ 上関数空間上で並進の微分演算子表現を得たい．すなわち，

$$\begin{aligned}
\left[\exp(t^\mu P_\mu)f\right](x) &= f\left(P(t)x\right) \\
&= f(x+t)
\end{aligned} \tag{22}$$

[*2] 但し，添字 T は行列の転置を表す．転置が出てくる理由は双対表現（反傾表現とも）というものを考えるとわかる．別のノートに記す予定．

を満たす微分演算子 P_μ を求めたい．

これは

$$\left.\frac{\partial P(t)(x)}{\partial t^\nu}\right|_{t=0} = e_\nu \tag{23}$$

より，

$$P_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{24}$$

とすることにより実現される．

並進演算子たちは可換，すなわち

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{25}$$

である．

3.3 Poincaré 対称性とリー代数 $\mathfrak{iso}(3,1)$

並進演算子と狭義 Lorentz 変換演算子がなす代数は Poincaré 代数と呼ばれ，Minkowski 空間の対称性である Poincaré 対称性を記述する．両演算子の間では交換関係

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = -\eta_{\mu\rho}P_\nu + \eta_{\nu\rho}P_\mu \tag{26}$$

が成立する．Poincaré 代数はリー代数としては $\mathfrak{iso}(3,1)$ と同型である．

4 伸長演算子とスケール変換代数の構成

4.1 スケール変換操作

全座標を正数倍する変換をスケール変換あるいは伸長変換（dilation あるいは dilatation）という．特に伸長変換は光錐（null cone，ノルムが 0 となる点の集合，$\{x \in \mathbb{R}^{3,1} | |x|^2 = 0\}$）に作用し不変に保つ．全座標を $\exp(t)$ 倍する操作 $D(t)$ を

$$D(t)(x) = \exp(t)x \tag{27}$$

によって定義する．

4.2 dilation の微分表現

Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ 上関数空間上で dilation の微分演算子表現を得たい．すなわち，

$$\begin{aligned}[\exp(tD)f](x) &= f(D(t)(x)) \\ &= f\left(e^t x\right)\end{aligned}$$

を満たす微分演算子 D を求めたい．

これは，

$$\left.\frac{\partial \exp(tD)}{\partial t}\right|_{t=0} = x = x^\mu e_\mu \tag{28}$$

より，$e_\mu \to \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ の置き換えにより

$$D = x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{29}$$

とすれば良い．

dilation と Poincaré 代数を合わせたリー代数においては，次の交換関係が成立する．

$$[D, M_{\mu\nu}] = 0 \tag{30}$$

$$[D, P_\mu] = -P_\mu \tag{31}$$

このリー代数はスケール不変性を保つ理論について議論する際に必要となり，スケール変換代数とも呼ばれる．

5 共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ の導入

5.1 反転変換

反転変換（inversion）あるいは反転演算子という概念を導入する．共形対称性を保つ理論を考える際に重要な離散的な変換である．$|x|^2 \neq 0$ となる点[*3] x に対する離散的な変換

$$I : x \mapsto \frac{x}{|x|^2} \tag{32}$$

を反転変換と呼び，対応する演算子を反転演算子と呼ぶ．反転演算子は

$$I^2 = 1$$

となる性質を持つ．反転変換によりノルムは

$$|I(x)|^2 = \left|\frac{x}{|x|^2}\right|^2 = \frac{|x|^2}{(|x|^2)^2} = \frac{1}{|x|^2} \tag{33}$$

のようになる．

[*3] 実は $|x|^2 = 0$ の点に対しても定義を拡張できるが，そのことについては別ノートに記す．このように定義を拡張することは共形変換群の大域的な構造を考えるときに重要になってくる．

5.2 伸長演算子と反転演算子の関係

伸長操作と反転操作は可換ではない．これは，

$$\begin{aligned} ID(t)I(x) &= ID(t)\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \\ &= I\left(e^t\frac{x}{|x|^2}\right) \\ &= e^{-t}|x|^2\frac{x}{|x|^2} \\ &= e^{-t}x \\ &= D(-t)x \end{aligned} \tag{34}$$

より，

$$ID(t) = D(-t)I \tag{35}$$

となることから言える．

5.3 特殊共形変換演算子

反転操作 I は微分演算子としては表現できない．ところが $K(t) = IP(t)I$ で定義される演算子 $K(t)$ を考えると，微分演算子を用いて表現することができる．この演算子を特殊共形変換演算子と呼ぶ．この演算子を求めよう．$|x|^2 \neq 0$ の点[*4]に対して，

$$P(t)I(x) = P(t)I(x^\nu e_\nu) = t^\mu e_\mu + \frac{x^\nu e_\nu}{|x|^2} = \frac{x+|x|^2t}{|x|^2} \tag{36}$$

である．さらに，$|x+|x|^2t|^2 = |x|^2(1+2t^\mu x_\mu + |t|^2|x|^2) \neq 0$ の時，

$$\begin{aligned} K(t)(x) &= IP(t)I(x) \\ &= |x|^2\frac{x+|x|^2t}{|x+|x|^2t|^2} \\ &= \frac{x+|x|^2t}{1+2t^\mu x_\mu+|t|^2|x|^2} \end{aligned} \tag{37}$$

となる．

5.4 特殊共形変換の微分演算子表現

Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ 上関数空間上で特殊共形変換の微分演算子表現を得たい．

$$\begin{aligned} \left[\exp(t^\mu K_\mu)f\right](x) &= f\left(K(t^\mu e_\mu)(x)\right) \\ &= f\left(K(t)(x)\right) \end{aligned} \tag{38}$$

[*4] 反転操作と同様に $|x|^2 = 0$ の点に対しても定義を拡張できるが，別ノートに記す．

を満たす微分演算子 K_μ を求めたい．

これは，

$$\left.\frac{\partial \exp(t^\mu K_\mu)x}{\partial t^\nu}\right|_{t=0} = |x|^2 e_\nu - 2x_\nu x^\mu e_\mu$$
$$= (|x|^2\delta^\mu_\nu - 2x_\nu x^\mu)e_\mu \tag{39}$$

より，$e_\mu \to \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ の置き換えにより

$$K_\nu = (|x|^2\delta^\mu_\nu - 2x_\nu x^\mu)\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{40}$$

とすれば良い．

5.5 共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ の構成

Poincaré 代数の各演算子と伸長演算子と特殊共形変換演算子がなす代数を共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ という．次の交換関係が成立する．

$$[D, K_\mu] = K_\mu \tag{41}$$
$$[K_\mu, K_\nu] = 0 \tag{42}$$
$$[K_\mu, P_\nu] = 2M_{\mu\nu} + 2\eta_{\mu\nu}D \tag{43}$$
$$[M_{\mu\nu}, K_\rho] = -\eta_{\mu\rho}K_\nu + \eta_{\nu\rho}K_\mu \tag{44}$$

5.6 共形変換（等角変換）

ここでは示さないが，共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ は各位置において計量テンソルを正の数倍する変換（場所によって異なっても良い）となっている．すなわちある滑らかな関数 $w(x)$ が存在し，

$$\eta'(x) = w^2(x)\eta(x)$$

となる．計量テンソルを等倍するということは，局所的に角度が保たれる，すなわち共形変換（等角変換）であるということである．またここでは示さないが，共形変換代数と鏡映操作を用いてが全ての等角変換を表すことができる．示さなかったことについては，

$$\eta'(x) = w^2(x)\eta(x)$$

から出てくる Killing 方程式を考えることで示すことができる．[*5]

[*5] 別ノートにて示す予定．

5.7 リー代数同型 $\mathfrak{c}(3,1) \simeq \mathfrak{so}(4,2)$

共形変換代数はリー代数としては $\mathfrak{so}(4,2)$ と同型であるが，それを見通しよくするために，$1 \leq \mu, \nu \leq 4$ として，

$$M_{05} := -D \tag{45}$$
$$M_{\mu 5} := \frac{1}{2}(aK_\mu + a^{-1}P_\mu) \tag{46}$$
$$M_{\mu 0} := \frac{1}{2}(aK_\mu - a^{-1}P_\mu) \tag{47}$$

を導入する．但し $a \neq 0$ を定数とする．これを用いると，

$$M_{\mu\nu} \quad (0 \leq \mu, \nu \leq 5)$$

は共形変換代数の基底をなすことがわかる．この代数の次元は 15 であることがわかる．そして，元の計量テンソルを拡張した新たな 6 次元の計量テンソル η を導入する．

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{48}$$
$$= \mathrm{diag}(1,1,1,1,-1,-1) \tag{49}$$

正の符号をもつ第 0 成分と負の符号をもつ第 5 成分が新たに加わったことになる．この計量テンソルを用いると，交換関係は

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} \tag{50}$$

のように統一的に書かれることがわかる．すなわち，共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ がリー代数としては $\mathfrak{so}(4,2)$ と同型であることが明確となった．

6 まとめとコメント

Lorentz 変換を記述するリー代数 $\mathfrak{so}(3,1)$ に対して，並進演算子・伸長演算子・特殊共形変換演算子を加えることで共形変換代数を構成できる方法を示した．また，共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ と $\mathfrak{so}(4,2)$ がリー代数として同型であることを示した．

共形変換代数は任意の次元の Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ や Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{p,q}$ に一般化できる．すなわち，今回紹介した Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ と同様の手法で共形変換代数を構成できる．但し無限次元の代数となる $n=2, p=q=1$ の時は除く．Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の場合は共形変換代数は，$\mathfrak{so}(n+1,1)$ となり，Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{p,q}$ の場合は共形変換代数は，$\mathfrak{so}(p+1,q+1)$ となる．

参考文献

[1] Ronald Mirman. (2005). “Quantum Field Theory Conformal Group Theory Conformal Field Theory.” iUniverse.