共形変換と光錐の幾何学

adhara_mathphys

2020 年 12 月 25 日

概要

本ノートでは Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ における共形変換と Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{4,2}$ 中の光錐 $N^{4,2}$ 上の幾何学の関係を解説する.

目次

1　導入

1.1　二つの時空

本ノートにおいては二つの平坦時空が扱われる．空間成分を 3 つ，時間成分を 1 つ持つ Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ と空間成分を 4 つ，時間成分を 2 つ持つ Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{4,2}$ である．両時空における計量テンソルを $\eta^{(3,1)}, \eta^{(4,2)}$ とする．すなわち，

$$\begin{aligned}\eta^{(3,1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{diag}(1,1,1,-1) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\eta^{(4,2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{diag}(1,1,1,1,-1,-1) \end{aligned} \tag{2}$$

と定義する．また，両時空において $|x|^2$ は

$$x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

を表す[*1]ものとし，これを x の Minkowski ノルムあるいは単にノルムという．

1.2　光錐

二つの Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{p,q}$ 中で光錐（light cone あるいは null cone）というものを定義する．すなわち，

$$N^{p,q} = \{x \in \mathbb{R}^{p,q} | |x|^2 = 0\} \tag{3}$$

を $\mathbb{R}^{p,q}$ 中の光錐と呼ぶ.

1.3　直交群

Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{p,q}, (pq \neq 0)$ におけるノルムを保存する一次変換は群をなす．これを直交群 $O(p,q)$ という．すなわち，

$$O(p,q) = \{R \in GL(p+q, \mathbb{R}) | R^T \eta^{(p,q)} R = \eta^{(p,q)}\} \tag{4}$$

[*1] このノートでは Einstein の縮約表記をしばしば用いる．

である．

また、$O(p,q)$ のうち行列式が 1 になるもの全体は部分群をなす．これを特殊直交群 $SO(p,q)$ という．すなわち，

$$SO(p,q) = \{R \in O(p,q) | \det(R) = 1\} \tag{5}$$

である．

Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ において同様に定義される特殊直交群 $SO(n)$ 特殊直交群が連結群であるのに対して，$SO(p,q)$ は連結群ではない．恒等変換を含む連結成分を考えると，これは部分群をなし，狭義特殊直交群 $SO^+(p,q)$ と呼ばれる．

1.4 特殊直交群の回転行列表現

Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{p,q}$ 上のベクトルに対する回転操作は計量テンソル $\eta^{(p,q)}$ に関するノルムを保つ．すなわち、ベクトル x とその回転操作後のベクトル x' に対して，

$$|x|^2 = |x'|^2$$

が成立する必要がある．

Minkowski 空間のある正規直交基底 $\{e_1, e_2, \cdots, e_{p+q}\}$ を用いて，ベクトル x を $x = e_\nu x^\nu$ で表す．まず，$1 \leq i,j \leq p, i \neq j$ あるいは $p+1 \leq i,j \leq p+q, i \neq j$ とすれば，

$$\begin{aligned} R_{ij}(\theta)(x) &= x + e_i \left\{x^i(\cos\theta - 1) - x^j \sin\theta\right\} + e_j \left\{x^i \sin\theta + x^j(\cos\theta - 1)\right\} \\ &= x + e_i \left\{x_i(\cos\theta - 1) - x_j \sin\theta\right\} + e_j \left\{x_i \sin\theta + x_j(\cos\theta - 1)\right\} \end{aligned} \tag{6}$$

のように $x^i x^j$ 平面上の回転操作を定義できる．

計量の符号が異なる成分が関わる平面に関する回転は Lorentz boost（擬回転）と呼ばれる．$1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq q$ として，$x^i x^j$ 平面上の Lorentz boost は

$$\begin{aligned} R_{ij}(\theta)(x) &= x + e_i \left\{x^i(\cosh\theta - 1) + x^j \sinh\theta\right\} + e_j \left\{x^i \sinh\theta + x^j(\cosh\theta - 1)\right\} \\ &= x + e_i \left\{x_i(\cosh\theta - 1) - x_j \sinh\theta\right\} + e_j \left\{x_i \sinh\theta - x_j(\cosh\theta - 1)\right\} \end{aligned} \tag{7}$$

によって，$x^j x^i$ 平面上の Lorentz boost は

$$\begin{aligned} R_{ji}(\theta)(x) &= x + e_j \left\{x^j(\cosh\theta - 1) - x^i \sinh\theta\right\} + e_i \left\{-x^j \sinh\theta + x^i(\cosh\theta - 1)\right\} \\ &= x + e_j \left\{-x_j(\cosh\theta - 1) - x_i \sinh\theta\right\} + e_i \left\{x_j \sinh\theta + x_i(\cosh\theta - 1)\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

によって，それぞれ定義される．

1.5 直交リー代数 $\mathfrak{so}(p,q)$ の導入

次に $i \neq j, 1 \leq i,j \leq p+q$ として，演算子 L_{ij} を

$$L_{ij}x := \left.\frac{\partial R_{ij}(\theta)(x)}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} = -x_j e_i + x_i e_j = -\eta_{jk}x^k e_i + \eta_{ik}x^k e_j \tag{9}$$

で定義する．特に L_{ij} は線形演算子となっている．このとき，

$$R_{ij}(\theta) = \exp(\theta L_{ij}) \tag{10}$$

となっている．基底 $\{e_i\}$ に関して行列表示すると，

$$L_{ij} = \eta_{ik}(E^k{}_j)^T - \eta_{jk}(E^k{}_i)^T \tag{11}$$

と書ける．但し，$E^i{}_j$ は (i,j) 成分が 1 でそれ以外が 0 となっている $p+q$ 次元行列で，T は転置を表す．

ここで交換子の計算

$$\left[(E^i{}_j)^T, (E^k{}_l)^T\right] = -\delta^k_j(E^i{}_l)^T + \delta^i_l(E^k{}_j)^T \tag{12}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}
[L_{ij}, L_{kl}] &= \left[(\eta_{i\mu}(E^\mu{}_j)^T - \eta_{j\mu}(E^\mu{}_i)^T), (\eta_{k\nu}(E^\nu{}_l)^T - \eta_{l\nu}(E^\nu{}_k)^T)\right] \\
&= \{\eta_{i\mu}\eta_{k\nu}\left(-\delta^\nu_j(E^\mu{}_l)^T + \delta^\mu_l(E^\nu{}_j)^T\right) + \eta_{i\mu}\eta_{l\nu}\left(-\delta^\mu_k(E^\nu{}_j)^T + \delta^\nu_j(E^\mu{}_k)^T\right) \\
&+ \eta_{j\mu}\eta_{k\nu}\left(-\delta^\mu_l(E^\nu{}_i)^T + \delta^\nu_i(E^\mu{}_l)^T\right) + \eta_{j\mu}\eta_{l\nu}\left(-\delta^\nu_i(E^\mu{}_k)^T + \delta^\mu_k(E^\nu{}_i)^T\right)\} \\
&= \{-\eta_{kj}\eta_{i\mu}(E^\mu{}_l)^T + \eta_{il}\eta_{k\nu}(E^\nu{}_j)^T - \eta_{ik}\eta_{l\nu}(E^\nu{}_j)^T + \eta_{lj}\eta_{i\mu}(E^\mu{}_k)^T \\
&- \eta_{jl}\eta_{k\nu}(E^\nu{}_i)^T + \eta_{ki}\eta_{j\mu}(E^\mu{}_l)^T - \eta_{li}\eta_{j\mu}(E^\mu{}_k)^T + \eta_{jk}\eta_{l\nu}(E^\nu{}_i)^T\} \\
&= \eta_{ik}L_{jl} - \eta_{jk}L_{il} - \eta_{il}L_{jk} + \eta_{jl}L_{ik}
\end{aligned} \tag{13}$$

となる．一方，L_{ij} の線形結合で形成される行列の集合は線形空間であること，交換子はヤコビ律を満たすことから，L_{ij} の線形結合で形成される行の集合は交換子をリー括弧とするリー代数である．これを $\mathfrak{so}(p,q)$ と書き，直交リー代数と呼ぶ．

1.6 直交代数 $\mathfrak{so}(p,q)$ の微分演算子表現

直交代数 $\mathfrak{so}(p,q)$ の $\mathbb{R}^{p,q}$ 上関数空間上の微分演算子表現を得るためには，

$$L_{ij}x = -x_j e_i + x_i e_j$$

の右辺において，

$$e_i \to \frac{\partial}{\partial x_i}$$

の置き換えを行う．すなわち，

$$\begin{aligned}
M_{ij} &= \eta_{i\mu}x^\mu\frac{\partial}{\partial x^j} - \eta_{j\mu}x^\mu\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= x_i\frac{\partial}{\partial x^j} - x_j\frac{\partial}{\partial x^i}
\end{aligned} \tag{14}$$

を導入すると，

$$\begin{aligned}
\left[\exp(\theta M_{ij})f\right](x) &= f\left(R_{ij}(\theta)(x)\right) \\
&= f\left(\exp(\theta L_{ij})(x)\right)
\end{aligned} \tag{15}$$

となる．

交換子をリーブラケットとして M_{ij} たちの線形結合からなる線形空間はリー代数 $\mathfrak{so}(p,q)$ をなす．ここで，

$$[M_{ij}, M_{kl}] = -\eta_{ik}M_{jl} + \eta_{jk}M_{il} + \eta_{il}M_{jk} - \eta_{jl}M_{ik} \tag{16}$$

となっている．行列表現と微分演算子表現のリー代数同型は $(L_{ij})^T$ と M_{ij} を同一視することによって確認できる．[*2]すなわち，

$$(L_{ij})^T = \eta_{ik}E^k{}_j - \eta_{jk}E^k{}_i = E_{ij} - E_{ji} \tag{17}$$

$$\left[E^i{}_j, E^k{}_l\right] = \delta^k_j E^i{}_l - \delta^i_l E^k{}_j \tag{18}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}
[(L_{ij})^T, (L_{kl})^T] &= [(\eta_{i\mu}E^\mu{}_j - \eta_{j\mu}E^\mu{}_i), (\eta_{k\nu}E^\nu{}_l - \eta_{l\nu}E^\nu{}_k)] \\
&= \{\eta_{i\mu}\eta_{k\nu}\left(\delta^\nu_j E^\mu{}_l - \delta^\mu_l E^\nu{}_j\right) + \eta_{i\mu}\eta_{l\nu}\left(\delta^\mu_k E^\nu{}_j - \delta^\nu_j E^\mu{}_k\right) \\
&+ \eta_{j\mu}\eta_{k\nu}\left(\delta^\mu_l E^\nu{}_i - \delta^\nu_i E^\mu{}_l\right) + \eta_{j\mu}\eta_{l\nu}\left(\delta^\nu_i E^\mu{}_k - \delta^\mu_k E^\nu{}_i\right)\} \\
&= \{\eta_{kj}E_{il} - \eta_{il}E_{kj} + \eta_{ik}E_{lj} - \eta_{lj}E_{ik} + \eta_{jl}E_{ki} - \eta_{ki}E_{jl} + \eta_{li}E_{jk} - \eta_{jk}E_{li}\} \\
&= -\eta_{ik}(L_{jl})^T + \eta_{jk}(L_{il})^T + \eta_{il}(L_{jk})^T - \eta_{jl}(L_{ik})^T
\end{aligned} \tag{19}$$

となっており，同型であることがわかる．

また，

$$[M_{\mu\nu}, x_\rho] = \left[x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, x^i\eta_{i\rho}\right] = -\eta_{\mu\rho}x_\nu + \eta_{\nu\rho}x_\mu \tag{20}$$

が成立することがわかる．

1.7 共形変換リー代数 $\mathfrak{c}(3,1)$

$\mathbb{R}^{3,1}$ における回転演算子，並進演算子，伸長演算子および特殊共形演算子はリー代数をなすが，これは共形変換リー代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ と呼ばれる．すなわち，回転演算子 M，並進演算子 P，伸長演算子 D および特殊共形演算子 K の微分表現をそれぞれ

$$M_{\mu\nu} = x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{21}$$

$$P = \epsilon^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{22}$$

$$D = x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{23}$$

$$K_\mu = \left(x^2\delta^\nu_\mu - 2x^\nu x_\mu\right)\frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{24}$$

[*2] 但し，添字 T は行列の転置を表す．転置が出てくる理由は双対表現（反傾表現とも）というものを考えるとわかる．別のノートに記す予定．

とすると，

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} \tag{25}$$
$$[D, M_{\mu\nu}] = 0 \tag{26}$$
$$[D, P_\mu] = -P_\mu \tag{27}$$
$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = -\eta_{\mu\rho}P_\nu + \eta_{\nu\rho}P_\mu \tag{28}$$
$$[D, K_\mu] = K_\mu \tag{29}$$
$$[K_\mu, K_\nu] = 0 \tag{30}$$
$$[K_\mu, P_\nu] = 2M_{\mu\nu} + 2\eta_{\mu\nu}D \tag{31}$$
$$[M_{\mu\nu}, K_\rho] = -\eta_{\mu\rho}K_\nu + \eta_{\nu\rho}K_\mu \tag{32}$$

となっている．

2　局所的な対応関係

本節では $\mathbb{R}^{3,1}$ における共形変換リー代数に対応する $\mathbb{R}^{4,2}$ で定義されるリー代数が存在することを示す．

共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ はリー代数としては $\mathfrak{so}(4,2)$ と同型であるが，それを見通しよくするために，$1 \leq \mu, \nu \leq 4$ として，

$$M_{05} := -D \tag{33}$$
$$M_{\mu 5} := \frac{1}{2}(aK_\mu + a^{-1}P_\mu) \tag{34}$$
$$M_{\mu 0} := \frac{1}{2}(aK_\mu - a^{-1}P_\mu) \tag{35}$$

を導入する．但し $a \neq 0$ を定数とする．これを用いると，

$$M_{ij} \quad (0 \leq i, j \leq 5, i \neq j)$$

は共形変換代数の基底をなすことがわかる．この代数の次元は 15 であることがわかる．そして，元の計量テンソルを拡張した新たな 6 次元の計量テンソル η を導入する．

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{36}$$
$$= \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1, -1, -1) \tag{37}$$

正の符号をもつ第 0 成分と負の符号をもつ第 5 成分が新たに加わったことになる．この計量テンソルを用いると，交換関係は

$$[M_{ij}, M_{kl}] = -\eta_{ik}M_{jl} + \eta_{jk}M_{il} + \eta_{il}M_{jk} - \eta_{jl}M_{ik} \tag{38}$$

のように統一的に書かれることがわかる．すなわち共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ がリー代数としては $\mathfrak{so}(4,2)$ と同型であることが明確となった．つまり群としては局所同型の関係にある．

3　空間の対応関係

本節では Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ と Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{4,2}$ 中の光錐 $N^{4,2}$ の対応関係について説明する．

ここで $N_0^{4,2}$ を $N^{4,2}$ の中で

$$\begin{pmatrix} -t \\ x \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^{3,1}$$

の形のものを除いた集合であるとする．

$N^{4,2}$ に属するが $N_0^{4,2}$ には属さない点

$$\begin{pmatrix} -t \\ x \\ t \end{pmatrix} \tag{39}$$

に対して，$|x|^2 = 0$ である必要がある．

$N_0^{4,2}$ の要素は

$$\begin{pmatrix} \lambda \frac{1-|x|^2}{2} \\ \lambda x \\ \lambda \frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^{3,1}$$

と書ける．但し $\lambda \neq 0$ である．

ここで

$$\pi : N_0^{4,2} \to \mathbb{R}^{3,1} : \begin{pmatrix} \lambda \frac{1-|x|^2}{2} \\ \lambda x \\ \lambda \frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix} \mapsto x \tag{40}$$

という全射 π を考える．

x を固定したときに

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda \frac{1-|x|^2}{2} \\ \lambda x \\ \lambda \frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

を一点とみなすことで $N_0^{4,2}$ の射影空間 $PN_0^{4,2}$ を考えることができる．すると，全単射

$$\pi_0 : PN_0^{4,2} \to \mathbb{R}^{3,1} : \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \frac{1-|x|^2}{2} \\ \lambda x \\ \lambda \frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \mapsto x \tag{41}$$

が誘導される．

π_0 の定義域を

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} -t \\ x \\ t \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \tag{42}$$

の形の点を含むように，すなわち $PN^{4,2}$ 全体に拡張したい．拡張した写像を $\tilde{\pi}_0$ と書くことにする．

反転変換

反転変換はノルムが 0 ではない領域，$\mathbb{R}^{3,1} \backslash N^{3,1}$ においては全単射写像として定義されている．すなわち，

$$I : \mathbb{R}^{3,1} \backslash N^{3,1} \to \mathbb{R}^{3,1} \backslash N^{3,1} : x \mapsto \frac{x}{|x|^2} \tag{43}$$

である．しかも，$I^2 = 1$ という性質を持つ．

“inverted cone”$\tilde{N}^{3,1}$ [*3]というものを導入する．各 $x \in N^{3,1}$ に対して，I の行き先を用意するのである．

反転変換により $\mathbb{R}^{3,1} \backslash N^{3,1}$ の場合は

$$|I(x)|^2 = \left| \frac{x}{|x|^2} \right|^2 = \frac{|x|^2}{(|x|^2)^2} = \frac{1}{|x|^2} \tag{44}$$

のようになっているが，$N^{3,1}$ の場合は $|I(x)|^2 = \infty$ と解釈する．すなわち，$x \in \tilde{N}^{3,1}$ の時，$|x|^2 = \infty$ と解釈する．

伸長演算子と反転演算子の関係

$x \in \tilde{N}^{3,1}$ を加えるだけで十分であろうか．Cordani[2] の p.114 には，“... Thus, a transformation of $\mathcal{K}$[*4] always blow up at some point of M_0[*5]. It is possible to regularize this action by adding a null cone to M_0 (since this is the topology of the submanifold, where the action $\mathcal{K}$ blows up) at infinity. ” とあるので，$x \in \tilde{N}^{3,1}$ を加えるだけで十分であると解釈できる．

しかしながら，実はそれでは不十分である．ここからはそのことについて示す．

特殊共形変換演算子

特殊共形変換演算子は $K(t) = IP(t)I$ で定義される演算子である．

$|x|^2 \neq 0$ かつ $1 + 2t^\mu x_\mu + |t|^2|x|^2 \neq 0$ であれば，

$$\begin{aligned} K(t)(x) &= IP(t)I(x) \\ &= \frac{x + |x|^2 t}{1 + 2t^\mu x_\mu + |t|^2|x|^2} \end{aligned} \tag{45}$$

*3 著者 adhara_mathphys の造語

*4 adhara 注：特殊共形変換のこと

*5 adhara 注：Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ のこと

となっている．

$\lambda \neq 0, |x|^2 = 0$ の時，

$$\pi : \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda x \\ \lambda \end{pmatrix} \mapsto I(x) \tag{46}$$

と定義する．

あとは

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{47}$$

をどう解釈するか．

4　大域的な対応関係

本節では $\mathbb{R}^{3,1}$ における共形変換が対応する $\mathbb{R}^{4,2}$ の光錐 $N^{4,2}$ 上における回転操作に対応することを示す．

まず，$SO(4,2)$ はノルムを保つので $M^{4,2}$ に作用できることを指摘しておく．

$a = 1$ すなわち，

$$M_{05} := -D \tag{48}$$

$$M_{\mu 5} := \frac{1}{2}(K_\mu + P_\mu) \tag{49}$$

$$M_{\mu 0} := \frac{1}{2}(K_\mu - P_\mu) \tag{50}$$

とする．

$M_{ij} \to L_{ij}$ の置き換えをする．

$$L_{ij} = \eta_{ik}({E^k}_j)^T - \eta_{jk}({E^k}_i)^T \tag{51}$$

$$L_{05} = ({E^0}_5)^T + ({E^5}_0)^T \tag{52}$$

$$L_{15} = ({E^1}_5)^T + ({E^5}_1)^T \tag{53}$$

$$L_{10} = ({E^1}_0)^T - ({E^0}_1)^T \tag{54}$$

$$L_{12} = ({E^1}_2)^T - ({E^2}_1)^T \tag{55}$$

$$D = -M_{05} \to -L_{05} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{56}$$

$$D(t)=\exp(t(-L_{05}))=\begin{pmatrix}\cosh(-t)&0&0&0&0&\sinh(-t)\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\\sinh(-t)&0&0&0&0&\cosh(-t)\end{pmatrix}\tag{57}$$

$$D(t)\begin{pmatrix}\frac{1-|x|^2}{2}\\x\\\frac{1+|x|^2}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{e^{-t}-|x|^2e^t}{2}\\x\\\frac{e^{-t}+|x|^2e^t}{2}\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}\frac{1-|e^tx|^2}{2}\\e^tx\\\frac{1+|e^tx|^2}{2}\end{pmatrix}\tag{58}$$

より，確かに $D(t)(x)=e^tx$ となっている．

並進

$$P_1=M_{15}-M_{10}\to L_{15}-L_{10}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}\tag{59}$$

$$P(te_1)=\exp(t(L_{15}-L_{10}))=\begin{pmatrix}1-\frac{t^2}{2}&-t&0&0&0&-\frac{t^2}{2}\\t&1&0&0&0&t\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\\frac{t^2}{2}&t&0&0&0&1+\frac{t^2}{2}\end{pmatrix}\tag{60}$$

$$P(te_1)\begin{pmatrix}\frac{1-|x|^2}{2}\\x\\\frac{1+|x|^2}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1-|x+te_1|^2}{2}\\x+te_1\\\frac{1+|x+te_1|^2}{2}\end{pmatrix}\tag{61}$$

より，$P(te_1)x=x+te_1$ となっている．

$$K_1=M_{15}+M_{10}\to L_{15}+L_{10}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\-1&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}\tag{62}$$

$$K(te_1)=\exp(t(L_{15}+L_{10}))=\begin{pmatrix}1-\frac{t^2}{2}&t&0&0&0&\frac{t^2}{2}\\-t&1&0&0&0&t\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\-\frac{t^2}{2}&t&0&0&0&1+\frac{t^2}{2}\end{pmatrix}\tag{63}$$

$$K(te_1)\begin{pmatrix}\frac{1-|x|^2}{2}\\ x\\ \frac{1+|x|^2}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1-|x|^2+2tx^1+t^2|x|^2}{2}\\ x+t|x|^2e_1\\ \frac{1+|x|^2+2tx^1+t^2|x|^2}{2}\end{pmatrix}=(1+2tx^1+t^2|x|^2)\begin{pmatrix}\frac{1-\left|\frac{x+t|x|^2e_1}{1+2tx^1+t^2|x|^2}\right|^2}{2}\\ \frac{x+t|x|^2e_1}{1+2tx^1+t^2|x|^2}\\ \frac{1+\left|\frac{x+t|x|^2e_1}{1+2tx^1+t^2|x|^2}\right|^2}{2}\end{pmatrix} \tag{64}$$

より，$K(te_1)x=\frac{x+t|x|^2e_1}{1+2tx^1+t^2|x|^2}$ となっている．

$$M_{12}\to L_{12}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \tag{65}$$

$$R_{12}(t)=\exp(tL_{12})=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&\cos t&-\sin t&0&0&0\\0&\sin t&\cos t&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix} \tag{66}$$

付録

参考文献

[1] Ronald Mirman. (2005). “Quantum Field Theory Conformal Group Theory Conformal Field Theory.” iUniverse.

[2] Bruno Cordani. (2012). “The Kepler problem: group theoretical aspects, regularization and quantization, with application to the study of perturbations (Vol. 29).” Birkhäuser.