臨界減衰とジョルダン標準形

adhara*

2017 年 8 月 5 日

■問題

二階微分方程式

$$\ddot{x}(t) = a\dot{x}(t) + bx(t) \tag{1}$$

の臨界減衰解を求める。ここで $a, b < 0$ の時減衰力と復元力を含む物理的な方程式に相当するので、そういうものだとする。

■連立線形微分方程式への書き換えと形式解

連立線形微分方程式に書き換えることができる。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\dot{x}\\x\end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix}a & b\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\x\end{pmatrix}(t) = A\begin{pmatrix}\dot{x}\\x\end{pmatrix}(t) \tag{2}$$

ここで

$$A = \begin{pmatrix}a & b\\1 & 0\end{pmatrix}$$

とした。

したがって、形式解は

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\x\end{pmatrix}(t) = e^{At}\begin{pmatrix}\dot{x}\\x\end{pmatrix}(0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!}\begin{pmatrix}\dot{x}\\x\end{pmatrix}(0) \tag{3}$$

で与えられる。A^n などが計算できれば良いが、このためには固有値問題を解いて A を対角化することが一般的である。

* Twitter @adhara_mathphys

■臨界減衰の条件

A の固有方程式

$$|\lambda I - A| = 0 \tag{4}$$

が重解を持つ時に臨界減衰となる。（I は単位行列）重解を持つ条件は

$$a^2 = 4b \tag{5}$$

であり、この時に臨界減衰となる。臨界減衰の時の唯一の固有値は $\lambda = \frac{a}{2}$ である。ここで

$$\mathrm{rank}(A - \lambda I) = 1 \tag{6}$$

であるから、固有値 λ に対する固有空間の次元は $2-1=1$ である。固有空間は $\mathrm{Im}(A)$ よりも小さく、これは対角化不可能であることを意味する。この場合はジョルダン標準形を用いるのが便利である。

■行列 A のジョルダン標準形

ここでは

$$A(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix}\lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \tag{7}$$

の形にすることを考える。（$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{C}^2$）すなわち、$P = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ として相似変換によって

$$A = P\begin{pmatrix}\lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}P^{-1} \tag{8}$$

の形に書き換えることを考える。このような正則行列 P が存在する時、$\begin{pmatrix}\lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ は A のジョルダン標準形である。

このような P を求めるのだが、

$$A\boldsymbol{v}_1 = \lambda\boldsymbol{v}_1 \tag{9}$$

$$A\boldsymbol{v}_2 = \lambda\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1 \tag{10}$$

なる $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を探せば良い。（ただし線形独立になるように）これの解は

$$\boldsymbol{v}_1 = C\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = C\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad (C \in \boldsymbol{C} \text{ は 0 以外の任意定数}) \tag{11}$$

である。したがって、特に

$$P = \begin{pmatrix}\frac{a}{2} & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \tag{12}$$

として

$$A = P\begin{pmatrix}\lambda & 1\\0 & \lambda\end{pmatrix}P^{-1} \tag{13}$$

と書き換えられることがわかった。この P の逆行列は

$$P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -\frac{a}{2}\end{pmatrix} \tag{14}$$

である。

■臨界減衰の時の解　ジョルダン標準形とそれへの相似変換方法がわかれば e^{At} を求めることは容易である。すなわち、

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n A^n}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left(P\begin{pmatrix}\lambda & 1\\0 & \lambda\end{pmatrix}P^{-1}\right)^n\\
&= P\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\begin{pmatrix}\lambda & 1\\0 & \lambda\end{pmatrix}^n P^{-1}\\
&= P\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\0 & \lambda^n\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\lambda^n & t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\lambda^n\\0 & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\lambda^n\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix}e^{t\lambda} & te^{t\lambda}\\0 & e^{t\lambda}\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{a}{2} & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{t\frac{a}{2}} & te^{t\frac{a}{2}}\\0 & e^{t\frac{a}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -\frac{a}{2}\end{pmatrix}\\
&= e^{\frac{a}{2}t}\begin{pmatrix}\frac{a}{2}t+1 & -\frac{a^2}{4}t\\t & 1-\frac{a}{2}t\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である。

したがって初期条件を

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0 \tag{15}$$

とすると、

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = e^{\frac{a}{2}t} \begin{pmatrix} \frac{a}{2}t + 1 & -\frac{a^2}{4}t \\ t & 1 - \frac{a}{2}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = e^{\frac{a}{2}t} \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{2}v_0 - \frac{a^2}{4}x_0\right) t + v_0 \\ \left(v_0 - \frac{a}{2}x_0\right) t + x_0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

となる。