

共形変換と光錐の幾何学

adhara_mathphys

2020 年 12 月 25 日

概要

本ノートでは Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ における共形変換と Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{4,2}$ 中の光錐 $N^{4,2}$ 上の幾何学の関係を解説する.

目次

1	導入	2
1.1	二つの時空	2
1.2	光錐	2
1.3	直交群	2
1.4	特殊直交群の回転行列表現	3
1.5	直交リー代数 $\mathfrak{so}(p, q)$ の導入	3
1.6	直交代数 $\mathfrak{so}(p, q)$ の微分演算子表現	4
1.7	共形変換リー代数 $\mathfrak{c}(3, 1)$	5
2	局所的な対応関係	6
3	空間の対応関係	7
4	大域的な対応関係	10
	付録	12
	参考文献	12

1 導入

1.1 二つの時空

本ノートにおいては二つの平坦時空が扱われる．空間成分を 3 つ，時間成分を 1 つ持つ Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ と空間成分を 4 つ，時間成分を 2 つ持つ Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{4,2}$ である．両時空における計量テンソルを $\eta^{(3,1)}, \eta^{(4,2)}$ とする．すなわち，

$$\begin{aligned}\eta^{(3,1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \text{diag}(1, 1, 1, -1)\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\eta^{(4,2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \text{diag}(1, 1, 1, 1, -1, -1)\end{aligned}\tag{2}$$

と定義する．また，両時空において $|x|^2$ は

$$x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

を表す^{*1}ものとし，これを x の Minkowski ノルムあるいは単にノルムという．

1.2 光錐

二つの Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{p,q}$ 中で光錐 (light cone あるいは null cone) というものを定義する．すなわち，

$$N^{p,q} = \{x \in \mathbb{R}^{p,q} \mid |x|^2 = 0\}\tag{3}$$

を $\mathbb{R}^{p,q}$ 中の光錐と呼ぶ．

1.3 直交群

Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{p,q}$, ($pq \neq 0$) におけるノルムを保存する一次変換は群をなす．これを直交群 $O(p, q)$ という．すなわち，

$$O(p, q) = \{R \in GL(p+q, \mathbb{R}) \mid R^T \eta^{(p,q)} R = \eta^{(p,q)}\}\tag{4}$$

^{*1} このノートでは Einstein の縮約表記をしばしば用いる．

である。

また、 $O(p, q)$ のうち行列式が 1 になるもの全体は部分群をなす。これを特殊直交群 $SO(p, q)$ という。すなわち、

$$SO(p, q) = \{R \in O(p, q) | \det(R) = 1\} \quad (5)$$

である。

Euclid 空間 \mathbb{R}^n において同様に定義される特殊直交群 $SO(n)$ 特殊直交群が連結群であるのに対して、 $SO(p, q)$ は連結群ではない。恒等変換を含む連結成分を考えると、これは部分群をなし、狭義特殊直交群 $SO^+(p, q)$ と呼ばれる。

1.4 特殊直交群の回転行列表現

Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{p, q}$ 上のベクトルに対する回転操作は計量テンソル $\eta^{(p, q)}$ に関するノルムを保つ。すなわち、ベクトル x とその回転操作後のベクトル x' に対して、

$$|x|^2 = |x'|^2$$

が成立する必要がある。

Minkowski 空間のある正規直交基底 $\{e_1, e_2, \dots, e_{p+q}\}$ を用いて、ベクトル x を $x = e_\nu x^\nu$ で表す。まず、 $1 \leq i, j \leq p, i \neq j$ あるいは $p+1 \leq i, j \leq p+q, i \neq j$ とすれば、

$$\begin{aligned} R_{ij}(\theta)(x) &= x + e_i \{x^i(\cos \theta - 1) - x^j \sin \theta\} + e_j \{x^i \sin \theta + x^j(\cos \theta - 1)\} \\ &= x + e_i \{x_i(\cos \theta - 1) - x_j \sin \theta\} + e_j \{x_i \sin \theta + x_j(\cos \theta - 1)\} \end{aligned} \quad (6)$$

のように $x^i x^j$ 平面上の回転操作を定義できる。

計量の符号が異なる成分が関わる平面に関する回転は Lorentz boost (擬回転) と呼ばれる。 $1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq q$ として、 $x^i x^j$ 平面上の Lorentz boost は

$$\begin{aligned} R_{ij}(\theta)(x) &= x + e_i \{x^i(\cosh \theta - 1) + x^j \sinh \theta\} + e_j \{x^i \sinh \theta + x^j(\cosh \theta - 1)\} \\ &= x + e_i \{x_i(\cosh \theta - 1) - x_j \sinh \theta\} + e_j \{x_i \sinh \theta - x_j(\cosh \theta - 1)\} \end{aligned} \quad (7)$$

によって、 $x^j x^i$ 平面上の Lorentz boost は

$$\begin{aligned} R_{ji}(\theta)(x) &= x + e_j \{x^j(\cosh \theta - 1) - x^i \sinh \theta\} + e_i \{-x^j \sinh \theta + x^i(\cosh \theta - 1)\} \\ &= x + e_j \{-x_j(\cosh \theta - 1) - x_i \sinh \theta\} + e_i \{x_j \sinh \theta + x_i(\cosh \theta - 1)\} \end{aligned} \quad (8)$$

によって、それぞれ定義される。

1.5 直交リ一代数 $\mathfrak{so}(p, q)$ の導入

次に $i \neq j, 1 \leq i, j \leq p+q$ として、演算子 L_{ij} を

$$L_{ij}x := \left. \frac{\partial R_{ij}(\theta)(x)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = -x_j e_i + x_i e_j = -\eta_{jk} x^k e_i + \eta_{ik} x^k e_j \quad (9)$$

で定義する．特に L_{ij} は線形演算子となっている．このとき，

$$R_{ij}(\theta) = \exp(\theta L_{ij}) \quad (10)$$

となっている．基底 $\{e_i\}$ に関して行列表示すると，

$$L_{ij} = \eta_{ik}(E^k_j)^T - \eta_{jk}(E^k_i)^T \quad (11)$$

と書ける．但し， E^i_j は (i, j) 成分が 1 でそれ以外が 0 となっている $p + q$ 次元行列で， T は転置を表す．

ここで交換子の計算

$$[(E^i_j)^T, (E^k_l)^T] = -\delta_j^k(E^i_l)^T + \delta_l^i(E^k_j)^T \quad (12)$$

を用いると，

$$\begin{aligned} [L_{ij}, L_{kl}] &= [(\eta_{i\mu}(E^\mu_j)^T - \eta_{j\mu}(E^\mu_i)^T), (\eta_{k\nu}(E^\nu_l)^T - \eta_{l\nu}(E^\nu_k)^T)] \\ &= \{\eta_{i\mu}\eta_{k\nu}(-\delta_j^\nu(E^\mu_l)^T + \delta_l^\mu(E^\nu_j)^T) + \eta_{i\mu}\eta_{l\nu}(-\delta_k^\mu(E^\nu_j)^T + \delta_j^\nu(E^\mu_k)^T) \\ &\quad + \eta_{j\mu}\eta_{k\nu}(-\delta_l^\mu(E^\nu_i)^T + \delta_i^\nu(E^\mu_l)^T) + \eta_{j\mu}\eta_{l\nu}(-\delta_i^\nu(E^\mu_k)^T + \delta_k^\mu(E^\nu_i)^T)\} \\ &= \{-\eta_{kj}\eta_{i\mu}(E^\mu_l)^T + \eta_{il}\eta_{k\nu}(E^\nu_j)^T - \eta_{ik}\eta_{l\nu}(E^\nu_j)^T + \eta_{lj}\eta_{i\mu}(E^\mu_k)^T \\ &\quad - \eta_{jl}\eta_{k\nu}(E^\nu_i)^T + \eta_{ki}\eta_{j\mu}(E^\mu_l)^T - \eta_{li}\eta_{j\mu}(E^\mu_k)^T + \eta_{jk}\eta_{l\nu}(E^\nu_i)^T\} \\ &= \eta_{ik}L_{jl} - \eta_{jk}L_{il} - \eta_{il}L_{jk} + \eta_{jl}L_{ik} \end{aligned} \quad (13)$$

となる．一方， L_{ij} の線形結合で形成される行列の集合は線形空間であること，交換子はヤコビ律を満たすことから， L_{ij} の線形結合で形成される行の集合は交換子をリー括弧とするリー代数である．これを $\mathfrak{so}(p, q)$ と書き，直交リー代数と呼ぶ．

1.6 直交代数 $\mathfrak{so}(p, q)$ の微分演算子表現

直交代数 $\mathfrak{so}(p, q)$ の $\mathbb{R}^{p, q}$ 上関数空間上の微分演算子表現を得るためには，

$$L_{ij}x = -x_j e_i + x_i e_j$$

の右辺において，

$$e_i \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}$$

の置き換えを行う．すなわち，

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \eta_{i\mu}x^\mu \frac{\partial}{\partial x^j} - \eta_{j\mu}x^\mu \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= x_i \frac{\partial}{\partial x^j} - x_j \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (14)$$

を導入すると，

$$\begin{aligned} [\exp(\theta M_{ij})f](x) &= f(R_{ij}(\theta)(x)) \\ &= f(\exp(\theta L_{ij})(x)) \end{aligned} \quad (15)$$

となる。

交換子をリーブラケットとして M_{ij} たちの線形結合からなる線形空間はリー代数 $\mathfrak{so}(p, q)$ をなす。ここで、

$$[M_{ij}, M_{kl}] = -\eta_{ik}M_{jl} + \eta_{jk}M_{il} + \eta_{il}M_{jk} - \eta_{jl}M_{ik} \quad (16)$$

となっている。行列表現と微分演算子表現のリー代数同型は $(L_{ij})^T$ と M_{ij} を同一視することによって確認できる。^{*2}すなわち、

$$(L_{ij})^T = \eta_{ik}E^k{}_j - \eta_{jk}E^k{}_i = E_{ij} - E_{ji} \quad (17)$$

$$[E^i{}_j, E^k{}_l] = \delta^k_j E^i{}_l - \delta^i_l E^k{}_j \quad (18)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} [(L_{ij})^T, (L_{kl})^T] &= [(\eta_{i\mu}E^\mu{}_j - \eta_{j\mu}E^\mu{}_i), (\eta_{k\nu}E^\nu{}_l - \eta_{l\nu}E^\nu{}_k)] \\ &= \{\eta_{i\mu}\eta_{k\nu}(\delta^\nu_j E^\mu{}_l - \delta^\mu_l E^\nu{}_j) + \eta_{i\mu}\eta_{l\nu}(\delta^\mu_k E^\nu{}_j - \delta^\nu_j E^\mu{}_k) \\ &\quad + \eta_{j\mu}\eta_{k\nu}(\delta^\mu_l E^\nu{}_i - \delta^\nu_i E^\mu{}_l) + \eta_{j\mu}\eta_{l\nu}(\delta^\nu_i E^\mu{}_k - \delta^\mu_k E^\nu{}_i)\} \\ &= \{\eta_{kj}E_{il} - \eta_{il}E_{kj} + \eta_{ik}E_{lj} - \eta_{lj}E_{ik} + \eta_{jl}E_{ki} - \eta_{ki}E_{jl} + \eta_{li}E_{jk} - \eta_{jk}E_{li}\} \\ &= -\eta_{ik}(L_{jl})^T + \eta_{jk}(L_{il})^T + \eta_{il}(L_{jk})^T - \eta_{jl}(L_{ik})^T \end{aligned} \quad (19)$$

となっており、同型であることがわかる。

また、

$$[M_{\mu\nu}, x_\rho] = \left[x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, x^i \eta_{i\rho} \right] = -\eta_{\mu\rho}x_\nu + \eta_{\nu\rho}x_\mu \quad (20)$$

が成立することがわかる。

1.7 共形変換リー代数 $\mathfrak{c}(3, 1)$

$\mathbb{R}^{3,1}$ における回転演算子、並進演算子、伸長演算子および特殊共形演算子はリー代数をなすが、これは共形変換リー代数 $\mathfrak{c}(3, 1)$ と呼ばれる。すなわち、回転演算子 M 、並進演算子 P 、伸長演算子 D および特殊共形演算子 K の微分表現をそれぞれ

$$M_{\mu\nu} = x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (21)$$

$$P = \epsilon^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (22)$$

$$D = x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (23)$$

$$K_\mu = (x^2 \delta^\nu{}_\mu - 2x^\nu x_\mu) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (24)$$

^{*2} 但し、添字 T は行列の転置を表す。転置が出てくる理由は双対表現（反傾表現とも）というものを考えるとわかる。別のノートに記す予定。

とすると,

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} \quad (25)$$

$$[D, M_{\mu\nu}] = 0 \quad (26)$$

$$[D, P_\mu] = -P_\mu \quad (27)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = -\eta_{\mu\rho}P_\nu + \eta_{\nu\rho}P_\mu \quad (28)$$

$$[D, K_\mu] = K_\mu \quad (29)$$

$$[K_\mu, K_\nu] = 0 \quad (30)$$

$$[K_\mu, P_\nu] = 2M_{\mu\nu} + 2\eta_{\mu\nu}D \quad (31)$$

$$[M_{\mu\nu}, K_\rho] = -\eta_{\mu\rho}K_\nu + \eta_{\nu\rho}K_\mu \quad (32)$$

となっている.

2 局所的な対応関係

本節では $\mathbb{R}^{3,1}$ における共形変換リー代数に対応する $\mathbb{R}^{4,2}$ で定義されるリー代数が存在することを示す.

共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ はリー代数としては $\mathfrak{so}(4,2)$ と同型であるが, それを見通しよくするために, $1 \leq \mu, \nu \leq 4$ として,

$$M_{05} := -D \quad (33)$$

$$M_{\mu 5} := \frac{1}{2}(aK_\mu + a^{-1}P_\mu) \quad (34)$$

$$M_{\mu 0} := \frac{1}{2}(aK_\mu - a^{-1}P_\mu) \quad (35)$$

を導入する. 但し $a \neq 0$ を定数とする. これを用いると,

$$M_{ij} \quad (0 \leq i, j \leq 5, i \neq j)$$

は共形変換代数の基底をなすことがわかる. この代数の次元は 15 であることがわかる. そして, 元の計量テンソルを拡張した新たな 6 次元の計量テンソル η を導入する.

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$= \text{diag}(1, 1, 1, 1, -1, -1) \quad (37)$$

正の符号をもつ第 0 成分と負の符号をもつ第 5 成分が新たに加わったことになる. この計量テンソルを用いると, 交換関係は

$$[M_{ij}, M_{kl}] = -\eta_{ik}M_{jl} + \eta_{jk}M_{il} + \eta_{il}M_{jk} - \eta_{jl}M_{ik} \quad (38)$$

のように統一的に書かれることがわかる．すなわち共形変換代数 $\mathfrak{c}(3, 1)$ がリー代数としては $\mathfrak{so}(4, 2)$ と同型であることが明確となった．つまり群としては局所同型の関係にある．

3 空間の対応関係

本節では Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ と Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{4,2}$ 中の光錐 $N^{4,2}$ の対応関係について説明する．ここで $N_0^{4,2}$ を $N^{4,2}$ の中で

$$\begin{pmatrix} -t \\ x \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^{3,1}$$

の形のものを除いた集合であるとする．

$N^{4,2}$ に属するが $N_0^{4,2}$ には属さない点

$$\begin{pmatrix} -t \\ x \\ t \end{pmatrix} \quad (39)$$

に対して、 $|x|^2 = 0$ すなわち $x \in N^{3,1}$ である必要がある．

$N_0^{4,2}$ の要素は

$$\begin{pmatrix} \lambda \frac{1-|x|^2}{2} \\ \lambda x \\ \lambda \frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^{3,1}$$

と書ける．但し $\lambda \neq 0$ である．

ここで

$$\pi : N_0^{4,2} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1} : \begin{pmatrix} \lambda \frac{1-|x|^2}{2} \\ \lambda x \\ \lambda \frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix} \mapsto x \quad (40)$$

という全射 π を考える．

x を固定したときに

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda \frac{1-|x|^2}{2} \\ \lambda x \\ \lambda \frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

を一点とみなすことで $N_0^{4,2}$ の射影空間 $PN_0^{4,2}$ を考えることができる．すると、全単射

$$\pi_0 : PN_0^{4,2} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1} : \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \frac{1-|x|^2}{2} \\ \lambda x \\ \lambda \frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \mapsto x \quad (41)$$

が誘導される．

π_0 の定義域を

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda x \\ \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad (42)$$

の形の点, あるいは

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}, x \neq 0 \quad (43)$$

の形の点を含むように, すなわち $PN^{4,2}$ ^{*3} 全体に拡張したい. 拡張した写像を $\tilde{\pi}_0$ と書くことにする.

反転変換と inverted cone $\tilde{N}^{3,1}$

反転変換はノルムが 0 ではない領域, $\mathbb{R}^{3,1} \setminus N^{3,1}$ においては全単射写像として定義されている. すなわち,

$$I : \mathbb{R}^{3,1} \setminus N^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1} \setminus N^{3,1} : x \mapsto \frac{x}{|x|^2} \quad (44)$$

である. しかも, $I^2 = 1$ という性質を持つ.

“inverted cone” $\tilde{N}^{3,1}$ ^{*4} というものを導入する. 各 $x \in N^{3,1}$ に対して, I の行き先を用意するのである.

反転変換により $\mathbb{R}^{3,1} \setminus N^{3,1}$ の場合は

$$|I(x)|^2 = \left| \frac{x}{|x|^2} \right|^2 = \frac{|x|^2}{(|x|^2)^2} = \frac{1}{|x|^2} \quad (45)$$

のようになっているが, $N^{3,1}$ の場合は $|I(x)|^2 = \infty$ と解釈する. すなわち, $x \in \tilde{N}^{3,1}$ の時, $|x|^2 = \infty$ と解釈する.

$\lambda \neq 0, |x|^2 = 0$ の時,

$$\tilde{\pi}_0 : \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda x \\ \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \mapsto I(x) \quad (46)$$

と定義する.

特殊共形変換演算子と射影空間 $PN^{3,1}$

特殊共形変換演算子は $K(t) = IP(t)I$ で定義される演算子である. $P(t)$ は並進演算子である.

^{*3} $N^{4,2}$ の射影空間を $PN^{4,2}$ と書いている.

^{*4} 著者 adhara_mathphys の造語

$|x|^2 \neq 0$ かつ $1 + 2t^\mu x_\mu + |t|^2 |x|^2 \neq 0$ であれば,

$$\begin{aligned}
K(t)(x) &= IP(t)I(x) \\
&= |x|^2 \frac{x + |x|^2 t}{|x + |x|^2 t|^2} \\
&= \frac{x + |x|^2 t}{1 + 2t^\mu x_\mu + |t|^2 |x|^2} \\
&\in R^{3,1} \setminus N^{3,1}
\end{aligned} \tag{47}$$

となっている.

実は $|x|^2 = 0$ であっても, $1 + 2t^\mu x_\mu + |t|^2 |x|^2 \neq 0$ であれば $K(t)$ を作用させることは可能である. すなわち,

$$\begin{aligned}
K(t)(x) &= IP(t)I(x) \\
&= \frac{x + |x|^2 t}{1 + 2t^\mu x_\mu + |t|^2 |x|^2} \\
&= \frac{x}{1 + 2t^\mu x_\mu} \\
&\in N^{3,1}
\end{aligned} \tag{48}$$

となっている.

また, $|x|^2 \neq 0$ かつ $1 + 2t^\mu x_\mu + |t|^2 |x|^2 = 0$ のときの $K(t)$ の作用は

$$K(t)(x) = I \left(\frac{x + |x|^2 t}{|x|^2} \right) \tag{49}$$

と書ける. ここで

$$|x + |x|^2 t|^2 = |x|^2 (1 + 2t^\mu x_\mu + |t|^2 |x|^2) = 0$$

より

$$\frac{x + |x|^2 t}{|x|^2} \in N^{3,1}$$

であるから,

$$K(t)(x) \in \tilde{N}^{3,1}$$

になっていると解釈することが可能である.

問題は $|x|^2 = 0$ かつ $1 + 2t^\mu x_\mu + |t|^2 |x|^2 = 0$ のときの $K(t)$ の作用についてである.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{50}$$

4 大域的な対応関係

本節では $\mathbb{R}^{3,1}$ における共形変換が対応する $\mathbb{R}^{4,2}$ の光錐 $N^{4,2}$ 上における回転操作に対応することを示す.

まず, $SO(4,2)$ はノルムを保つので $M^{4,2}$ に作用できることを指摘しておく.

$a = 1$ すなわち,

$$M_{05} := -D \quad (51)$$

$$M_{\mu 5} := \frac{1}{2}(K_\mu + P_\mu) \quad (52)$$

$$M_{\mu 0} := \frac{1}{2}(K_\mu - P_\mu) \quad (53)$$

とする.

$M_{ij} \rightarrow L_{ij}$ の置き換えをする.

$$L_{ij} = \eta_{ik}(E^k{}_j)^T - \eta_{jk}(E^k{}_i)^T \quad (54)$$

$$L_{05} = (E^0{}_5)^T + (E^5{}_0)^T \quad (55)$$

$$L_{15} = (E^1{}_5)^T + (E^5{}_1)^T \quad (56)$$

$$L_{10} = (E^1{}_0)^T - (E^0{}_1)^T \quad (57)$$

$$L_{12} = (E^1{}_2)^T - (E^2{}_1)^T \quad (58)$$

$$D = -M_{05} \rightarrow -L_{05} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (59)$$

$$D(t) = \exp(t(-L_{05})) = \begin{pmatrix} \cosh(-t) & 0 & 0 & 0 & 0 & \sinh(-t) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh(-t) & 0 & 0 & 0 & 0 & \cosh(-t) \end{pmatrix} \quad (60)$$

$$D(t) \begin{pmatrix} \frac{1-|x|^2}{2} \\ x \\ \frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-t}-|x|^2 e^t}{2} \\ x \\ \frac{e^{-t}+|x|^2 e^t}{2} \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \frac{1-|e^t x|^2}{2} \\ e^t x \\ \frac{1+|e^t x|^2}{2} \end{pmatrix} \quad (61)$$

より, 確かに $D(t)(x) = e^t x$ となっている.

並進

$$P_1 = M_{15} - M_{10} \rightarrow L_{15} - L_{10} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (62)$$

$$P(te_1) = \exp(t(L_{15} - L_{10})) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} & -t & 0 & 0 & 0 & -\frac{t^2}{2} \\ t & 1 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$P(te_1) \begin{pmatrix} \frac{1-|x|^2}{2} \\ x \\ \frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-|x+te_1|^2}{2} \\ x + te_1 \\ \frac{1+|x+te_1|^2}{2} \end{pmatrix} \quad (64)$$

より, $P(te_1)x = x + te_1$ となっている.

$$K_1 = M_{15} + M_{10} \rightarrow L_{15} + L_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (65)$$

$$K(te_1) = \exp(t(L_{15} + L_{10})) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} & t & 0 & 0 & 0 & \frac{t^2}{2} \\ -t & 1 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{t^2}{2} & t & 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \quad (66)$$

$$K(te_1) \begin{pmatrix} \frac{1-|x|^2}{2} \\ x \\ \frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-|x|^2+2tx^1+t^2|x|^2}{2} \\ x + t|x|^2 e_1 \\ \frac{1+|x|^2+2tx^1+t^2|x|^2}{2} \end{pmatrix} = (1 + 2tx^1 + t^2|x|^2) \begin{pmatrix} \frac{1 - \left| \frac{x+t|x|^2 e_1}{1+2tx^1+t^2|x|^2} \right|^2}{2} \\ \frac{x+t|x|^2 e_1}{1+2tx^1+t^2|x|^2} \\ \frac{1 + \left| \frac{x+t|x|^2 e_1}{1+2tx^1+t^2|x|^2} \right|^2}{2} \end{pmatrix} \quad (67)$$

より, $K(te_1)x = \frac{x+t|x|^2 e_1}{1+2tx^1+t^2|x|^2}$ となっている.

$$M_{12} \rightarrow L_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (68)$$

$$R_{12}(t) = \exp(tL_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (69)$$

付録

参考文献

- [1] Ronald Mirman. (2005). “Quantum Field Theory Conformal Group Theory Conformal Field Theory.” iUniverse.
- [2] Bruno Cordani. (2012). “The Kepler problem: group theoretical aspects, regularization and quantization, with application to the study of perturbations (Vol. 29).” Birkhäuser.