spheroconical 座標

adhara*

2018 年 8 月 4 日

概要

本ノートでは spheroconical 座標について紹介する。

目次

* Twitter @adhara_mathphys

1　spheroconical 座標の導入といくつかのヴァリエーション

■spheroconical 座標の導入

デカルト座標 (x, y, z) と spheroconical 座標 (r, ρ_1, ρ_2) の間の変換を

$$x = \pm r\sqrt{\frac{(\rho_1-\alpha)(\rho_2-\alpha)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}}, \quad y = \pm r\sqrt{\frac{(\beta-\rho_1)(\beta-\rho_2)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}}, \quad z = \pm r\sqrt{\frac{(\rho_1-\gamma)(\gamma-\rho_2)}{(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)}} \tag{1}$$

で与える。ただし、

$$\alpha \le \rho_2 \le \gamma \le \rho_1 \le \beta, \quad r \ge 0, \quad \alpha < \gamma < \beta \tag{2}$$

とする。ここで α, β, γ はパラメータであり、これを定めるごとに座標系が定まる。

これら r, ρ_1, ρ_2 を指定した時に定まる 8 つの点（各象限に一つ存在）はデカルト座標系の表示で三つの図形

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{3}$$

$$\frac{x^2}{\rho_1-\alpha} + \frac{y^2}{\rho_1-\beta} + \frac{z^2}{\rho_1-\gamma} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{x^2}{\rho_2-\alpha} + \frac{y^2}{\rho_2-\beta} + \frac{z^2}{\rho_2-\gamma} = 0 \tag{5}$$

の交点である。一つ目の図形は球、二つ目の図形は y 軸方向に伸びる楕円錐、三つ目の図形は x 軸方向に伸びる楕円錐である。楕円錐と言っているのは例えば二つ目の図形について $y = Y \neq 0$ の断面を見ると

$$\frac{x^2}{\rho_1-\alpha} + \frac{z^2}{\rho_1-\gamma} = \frac{Y^2}{\beta-\rho_1} > 0 \tag{6}$$

のように楕円になっていることによる。三つ目の図形については $x = X \neq 0$ で断面を見ると

$$\frac{y^2}{\beta-\rho_2} + \frac{z^2}{\gamma-\rho_2} = \frac{X^2}{\rho_2-\alpha} > 0 \tag{7}$$

のように楕円となる。

■表記のヴァリエーション 1

ルート内部で出てくるパラメータや座標を正数の自乗の形で書く流儀がある。座標変換を

$$x = \pm r\sqrt{\frac{(\mu^2-a^2)(\nu^2-a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}}, \quad y = \pm r\sqrt{\frac{(b^2-\mu^2)(b^2-\nu^2)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}}, \quad z = \pm r\sqrt{\frac{(\mu^2-c^2)(c^2-\nu^2)}{(c^2-a^2)(b^2-c^2)}} \tag{8}$$

で与える。ただし、

$$|a| \le \nu \le |c| \le \mu \le |b|, \quad r \ge 0, \quad |a| < |c| < |b| \tag{9}$$

とする。

■表記のヴァリエーション 2

座標系を定めるにあたって重要な量は実は α, β, γ というよりは $\beta - \gamma, \gamma - \alpha$ である。すなわち、差が同じであればパラメータの一斉移動によって実質的には同じ振る舞いをする座標系である。したがって、$\alpha = 0$ と置いてしまっても構わず、実際にそのように表記することは多い。すなわち、座標変換は

$$x = \pm r\sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{\beta\gamma}}, \quad y = \pm r\sqrt{\frac{(\beta - \rho_1)(\beta - \rho_2)}{\beta(\beta - \gamma)}}, \quad z = \pm r\sqrt{\frac{(\rho_1 - \gamma)(\gamma - \rho_2)}{(\beta - \gamma)\gamma}} \tag{10}$$

$$0 \le \rho_2 \le \gamma \le \rho_1 \le \beta, \quad r \ge 0, \quad 0 < \gamma < \beta \tag{11}$$

で与えられる。

また、パラメータの一斉移動を $\alpha + \beta + \gamma = 0$ になるように行うこともあり、これは Laplace 方程式を spheroconical 座標で変数分離した時に出てくる Lame 微分方程式を Weierstrass の楕円関数を用いて表記する時に用いられる。パラメータ α, β, γ は Weirstrass の楕円関数で出てくる三次多項式の解に相当する。

■表記のヴァリエーション 3

表記のヴァリエーション 2 において $\rho'_i = \rho_i\gamma$ の変数変換を行い、パラメータ $\beta' = \frac{\gamma}{\beta}$ を定義し、β' が同じものを実質的に同じ振る舞いをする座標系と見なす流儀がある。すなわち座標変換を

$$x = \pm r\sqrt{\rho'_1\rho'_2\beta'}, \quad y = \pm r\sqrt{\frac{(1 - \beta'\rho_1)(1 - \beta'\rho_2)}{1 - \beta'}}, \quad z = \pm r\sqrt{\frac{\beta'(\rho'_1 - 1)(1 - \rho'_2)}{1 - \beta'}} \tag{12}$$

$$0 \le \rho'_2 \le 1 \le \rho'_1 \le \beta'^{-1}, \quad r \ge 0, \quad 0 < \beta' < 1 \tag{13}$$

で与える。

この表記は Laplace 方程式を spheroconical 座標で変数分離した時に出てくる Lame 微分方程式を Jacobi の楕円関数を用いて表記する時に用いられる。パラメータ β' は Jacobi の楕円関数における母数に関係する量である。

■表記のヴァリエーション 4

ヴァリエーション 1,2 の考えを取り入れたものとして、座標変換を

$$x = \pm r\frac{\mu\nu}{bc}, \quad y = \pm\frac{r}{b}\sqrt{\frac{(b^2 - \mu^2)(b^2 - \nu^2)}{b^2 - c^2}}, \quad z = \pm\frac{r}{b}\sqrt{\frac{(\mu^2 - c^2)(c^2 - \nu^2)}{b^2 - c^2}} \tag{14}$$

$$0 \le \nu \le c \le \mu \le b, \quad r \ge 0, \quad 0 < c < b \tag{15}$$

で与える流儀がある。

2　球極座標の極限としての spheroconical 座標

■spheroconical 座標の角度表示

spheroconical 座標はある極限では球極座標に一致する。それを見るために spheroconical 座標を「角度」を用いて表す。

表記ヴァリエーション 4 を変形することを考える。パラメータ $k = \frac{c}{b}$ を導入すると

$$0 < k < 1 \tag{16}$$

である。さらに $\tilde{\mu}_1 = \mu_1/b, \quad \tilde{\nu} = \nu/c$ を導入すると、

$$0 \leq \tilde{\nu} \leq 1, \quad k \leq \tilde{\mu} \leq 1 \tag{17}$$

である。これは spheroconical 座標系の新たな表記ヴァリエーション 5 を与える。すなわち、デカルト座標系からの座標変換を

$$x = \pm r\tilde{\mu}\tilde{\nu}, \quad y = \pm r\sqrt{\frac{(1-\tilde{\mu}^2)(1-k^2\tilde{\nu}^2)}{1-k^2}}, \quad z = \pm r\sqrt{\frac{(\tilde{\mu}^2-k^2)(1-\tilde{\nu}^2)}{1-k^2}} \tag{18}$$

で与えるものを表記ヴァリエーション 5 とする。

ここで

$$\cos\varphi' = \tilde{\nu}, \quad \cos\theta' = \sqrt{\frac{1-\tilde{\mu}^2}{1-k^2}} \tag{19}$$

となる θ', φ' を導入する。この時それぞれの変数が動く範囲は

$$0 \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi' \leq \frac{\pi}{2} \tag{20}$$

となる。すると

$$\sin\varphi' = \sqrt{1-\tilde{\nu}^2}, \quad \sin\theta' = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}^2-k^2}{1-k^2}}, \quad \tilde{\mu} = \sqrt{1-(1-k^2)\cos^2\theta'} \tag{21}$$

が成立する。これら θ, φ を用いると第一象限の点は

$$x = r\sqrt{1-(1-k^2)\cos^2\theta'}\cos\varphi' \tag{22}$$

$$y = r\cos\theta'\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi'} \tag{23}$$

$$z = r\sin\theta'\sin\varphi' \tag{24}$$

で表すことができる。また、変数の動く範囲を拡張して

$$0 \leq \theta' \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi' \leq 2\pi \tag{25}$$

あるいは

$$0 \leq \theta' \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi' \leq \pi \tag{26}$$

とすれば全象限を尽くすことが可能である。

■角度の意味

表記ヴァリエーション 5 において、$r, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}$ を指定した時に定まる 8 つの点（各象限に一つ存在）は、デカルト座標系の表示で三つの図形

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{27}$$

$$\frac{x^2}{\tilde{\mu}^2} + \frac{z^2}{\tilde{\mu}^2 - k^2} = \frac{y^2}{1 - \tilde{\mu}^2} \tag{28}$$

$$\frac{x^2}{\tilde{\nu}^2} = \frac{y^2}{k^{-2} - \tilde{\nu}^2} + \frac{z^2}{1 - \tilde{\nu}^2} \tag{29}$$

の交点である。第二の図形を $x = 0$ で切った断面は

$$z = \pm\sqrt{\frac{\tilde{\mu}^2 - k^2}{1 - \tilde{\mu}^2}}\, y = (\tan\theta')y \tag{30}$$

という直線となる。すなわち、θ' は断面中の直線の傾きを定める。第三の図形を $y = 0$ で切った断面は

$$z = \pm\frac{\sqrt{1 - \tilde{\nu}^2}}{\tilde{\nu}}\, x = (\tan\varphi')x \tag{31}$$

という直線となる。すなわち、φ' も断面中の直線の傾きを定める。

■球極座標と spheroconical 座標の関係

spheroconical 座標の角度表示で出てくる k の動く範囲は本来 $0 < k < 1$ であるが、これを $k = 0$ とすると (x, y, z) と (r, θ', φ') の間の変数変換は

$$x = r\sin\theta'\cos\varphi', \quad y = r\cos\theta', \quad z = r\sin\theta'\sin\varphi' \tag{32}$$

となる。ただしこの場合は $0 \le \theta' \le \pi, \quad 0 \le \varphi' \le 2\pi$ とする。これは y 軸を極方向とする球極座標に他ならない。一方で $k = 1$ とすると上記変数変換は

$$x = r\cos\varphi', \quad y = r\cos\theta'\sin\varphi', \quad z = r\sin\theta'\sin\varphi' \tag{33}$$

となる。ただしこの場合は $0 \le \theta' \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi' \le \pi$ とする。これは x 軸を極方向とする球極座標に他ならない。