Spheroconical 座標から始まる Lamé の微分方程式

adhara*

2018 年 8 月 14 日

概要

本ノートでは Laplace 方程式を spheroconical（円錐）座標で変数分離することで Lamé の微分方程式を導入する。[*1] この導出については例えば George Dassios の "Ellipsoidal harmonics: theory and applications." という本[*2]に載っている。

1 spheroconical 座標の導入

デカルト座標 (x, y, z) と spheroconical 座標 (r, ρ_1, ρ_2) の間の変換を

$$x = \pm r\sqrt{\frac{(\rho_1-\alpha)(\rho_2-\alpha)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}}, \quad y = \pm r\sqrt{\frac{(\beta-\rho_1)(\beta-\rho_2)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}}, \quad z = \pm r\sqrt{\frac{(\rho_1-\gamma)(\gamma-\rho_2)}{(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)}} \tag{1}$$

で与える。ただし、

$$\alpha \le \rho_2 \le \gamma \le \rho_1 \le \beta, \quad r \ge 0, \quad \alpha < \gamma < \beta \tag{2}$$

とする。ここで α, β, γ はパラメータであり、これを定めるごとに座標系が定まる。

これら r, ρ_1, ρ_2 を指定した時に定まる 8 つの点（各象限に一つ存在）はデカルト座標系の表示で三つの図形

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{3}$$

$$\frac{x^2}{\rho_1-\alpha} + \frac{y^2}{\rho_1-\beta} + \frac{z^2}{\rho_1-\gamma} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{x^2}{\rho_2-\alpha} + \frac{y^2}{\rho_2-\beta} + \frac{z^2}{\rho_2-\gamma} = 0 \tag{5}$$

---

* Twitter @adhara_mathphys

*1 歴史的には Gabriel Lamé が Laplace 方程式を ellipsoidal（楕円体）座標で変数分離したことで Lamé の微分方程式が導入された。Lamé の微分方程式は Gabriel Lamé, "Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température.", Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 147-183. で発表された。

*2 Dassios, George. Ellipsoidal harmonics: theory and applications. Vol. 146. Cambridge University Press, 2012. この本は spheroconical 座標いうよりは ellipsoidal 座標の方を主に扱う本であるが、spheroconical 座標についてもかなり詳しい。

の交点である。一つ目の図形は球、二つ目の図形は y 軸方向に伸びる楕円錐、三つ目の図形は x 軸方向に伸びる楕円錐である。楕円錐と言っているのは例えば二つ目の図形について $y = Y \neq 0$ の断面を見ると

$$\frac{x^2}{\rho_1 - \alpha} + \frac{z^2}{\rho_1 - \gamma} = \frac{Y^2}{\beta - \rho_1} > 0 \tag{6}$$

のように楕円になっていることによる。三つ目の図形については $x = X \neq 0$ で断面を見ると

$$\frac{y^2}{\beta - \rho_2} + \frac{z^2}{\gamma - \rho_2} = \frac{X^2}{\rho_2 - \alpha} > 0 \tag{7}$$

のように楕円となる。

2 Laplace 方程式の spheroconical 座標による変数分離

2.1 Laplacian の spheroconical 座標表示

三次元 Laplacian$\nabla^2_{\mathbb{R}^3}$ を spheroconical 座標で表示する。このとき曲線直交座標系における Laplacian を求める公式によれば、

$$h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} \tag{8}$$

$$h_{\rho_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_1}\right)^2} \tag{9}$$

$$h_{\rho_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_2}\right)^2} \tag{10}$$

を用いて

$$\nabla^2_{\mathbb{R}^3} = \frac{1}{h_r h_{\rho_2} h_{\rho_2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{h_{\rho_1} h_{\rho_2}}{h_r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{h_{\rho_2} h_r}{h_{\rho_1}}\frac{\partial}{\partial \rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\frac{h_{\rho_1} h_r}{h_{\rho_2}}\frac{\partial}{\partial \rho_2}\right) \right\} \tag{11}$$

となる。ここで、

$$h_r = 1 \tag{12}$$

$$h_{\rho_1} = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_2}{(\rho_1 - \alpha)(\beta - \rho_1)(\rho_1 - \gamma)}} \tag{13}$$

$$h_{\rho_2} = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_2}{(\rho_2 - \alpha)(\beta - \rho_2)(\gamma - \rho_2)}} \tag{14}$$

を式 11 に代入すると、

$$
\begin{aligned}
\nabla^2_{\mathbb{R}^3} =& \left(\frac{2}{r}\right)^2 \frac{\sqrt{(\rho_1-\alpha)(\beta-\rho_1)(\rho_1-\gamma)(\rho_2-\alpha)(\beta-\rho_2)(\gamma-\rho_2)}}{\rho_1-\rho_2} \\
&\times \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho_1-\rho_2}{\sqrt{(\rho_1-\alpha)(\beta-\rho_1)(\rho_1-\gamma)(\rho_2-\alpha)(\beta-\rho_2)(\gamma-\rho_2)}}\left(\frac{r}{2}\right)^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\right. \\
&+ \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\sqrt{\frac{(\rho_1-\alpha)(\beta-\rho_1)(\rho_1-\gamma)}{(\rho_2-\alpha)(\beta-\rho_2)(\gamma-\rho_2)}}\frac{\partial}{\partial \rho_1}\right) \\
&+ \left.\frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\sqrt{\frac{(\rho_2-\alpha)(\beta-\rho_2)(\gamma-\rho_2)}{(\rho_1-\alpha)(\beta-\rho_1)(\rho_1-\gamma)}}\frac{\partial}{\partial \rho_2}\right)\right] \\
=& \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \left(\frac{2}{r}\right)^2\frac{1}{\rho_1-\rho_2} \\
&\times \left\{\sqrt{(\rho_1-\alpha)(\beta-\rho_1)(\rho_1-\gamma)}\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\sqrt{(\rho_1-\alpha)(\beta-\rho_1)(\rho_1-\gamma)}\frac{\partial}{\partial \rho_1}\right)\right. \\
&+ \left.\sqrt{(\rho_2-\alpha)(\beta-\rho_2)(\gamma-\rho_2)}\frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\sqrt{(\rho_2-\alpha)(\beta-\rho_2)(\gamma-\rho_2)}\frac{\partial}{\partial \rho_2}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{15}
$$

となる。

さて、spheroconical 座標は球面座標である、すなわち r 一定の曲面が球面を定めることから、第二項は Laplacian の球面成分、すなわち S^2 上の Laplace-Beltrami 作用素（を r^2 で割ったもの）

$$
\frac{1}{r^2}\nabla^2_{S^2}
$$

となる。したがって、

$$
\nabla^2_{\mathbb{R}^3} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\nabla^2_{S^2} \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2_{S^2} =& \frac{4}{\rho_1-\rho_2} \\
&\times \left\{\sqrt{(\rho_1-\alpha)(\beta-\rho_1)(\rho_1-\gamma)}\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\sqrt{(\rho_1-\alpha)(\beta-\rho_1)(\rho_1-\gamma)}\frac{\partial}{\partial \rho_1}\right)\right. \\
&+ \left.\sqrt{(\rho_2-\alpha)(\beta-\rho_2)(\gamma-\rho_2)}\frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\sqrt{(\rho_2-\alpha)(\beta-\rho_2)(\gamma-\rho_2)}\frac{\partial}{\partial \rho_2}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{17}
$$

となり、

$$
\begin{aligned}
\frac{\rho_1-\rho_2}{4}\nabla^2_{S^2} =& -(\rho_1-\alpha)(\rho_1-\beta)(\rho_1-\gamma)\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\rho_1-\alpha}+\frac{1}{\rho_1-\beta}+\frac{1}{\rho_1-\gamma}\right\}\frac{\partial}{\partial \rho_1}\right] \\
&+ (\rho_2-\alpha)(\rho_2-\beta)(\rho_2-\gamma)\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho_2^2} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\rho_2-\alpha}+\frac{1}{\rho_2-\beta}+\frac{1}{\rho_2-\gamma}\right\}\frac{\partial}{\partial \rho_2}\right]
\end{aligned} \tag{18}
$$

が導かれる。

2.2 Laplace 方程式の動径部分と球面部分への変数分離

Laplace 方程式

$$\nabla^2_{\mathbb{R}^3} f = 0 \tag{19}$$

を r 依存の動径成分と ρ_1, ρ_2 依存の球面成分に変数分離することを考える。

まず、Laplace 方程式 19 の解 f が

$$f(r, \rho_1, \rho_2) = R(r)Y(\rho_1, \rho_2) \tag{20}$$

のように r 部分と ρ_1, ρ_2 部分で変数分離できることを仮定する。すると Laplace 方程式 19 は

$$Y(\rho_1, \rho_2)\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + R(r)\frac{1}{r^2}\nabla^2_{S^2}Y(\rho_1, \rho_2) = 0 \tag{21}$$

となり、

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{1}{Y(\rho_1, \rho_2)}\nabla^2_{S^2}Y(\rho_1, \rho_2) \tag{22}$$

のように完全に変数分離される。上式左辺は r のみに依存、右辺は ρ_1, ρ_2 のみに依存するから、これを定数と置くことができる。この定数を $l(l+1)$ とする。これにより、

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r) = 0 \tag{23}$$

$$\left[\nabla_{S^2} + l(l+1)\right]Y(\rho_1, \rho_2) = 0 \tag{24}$$

という二つの微分方程式に分解される。変数分離の際に出てきた未定乗数 l は境界条件によって定められるべき量である。

ここで式 24 は $\nabla^2_{S^2}$ の固有値問題に他ならない。すなわち、$Y(\rho_1, \rho_2)$ は $\nabla^2_{S^2}$ の固有関数であり球面調和関数となる。座標系によって球面調和関数を区別して呼ぶことがある。例えば、通常の球極座標によって変数分離したものについては spherical polar harmonics、球面調和関数を spheroconical 座標で変数分離したものを sherical elliptic harmonics と呼んで区別することがある。[*3]

次節では、球面調和関数の spheroconical 座標による変数分離、すなわち式 24 を ρ_1 部分と ρ_2 部分に変数分離することを考える。

2.3 球面調和関数の spheroconical 座標による変数分離

ここでは、球面調和関数 $Y(\rho_1, \rho_2)$ が

$$Y(\rho_1, \rho_2) = \Theta(\rho_1)\Phi(\rho_2) \tag{25}$$

[*3] Tolstikhin, Oleg I., and Michio Matsuzawa. "Hyperspherical elliptic harmonics and their relation to the Heun equation." Physical Review A 63.3 (2001): 032510.

のように ρ_1 部分と ρ_2 部分に変数分離されることを仮定する。

$\nabla^2_{S^2}$ の固有方程式 24 の両辺に $\rho_1 - \rho_2$ を掛けると、

$$\left[(\rho_1 - \rho_2)\,\nabla_{S^2} + l(l+1)\,(\rho_1 - \rho_2)\right]\Theta(\rho_1)\Phi(\rho_2) = 0 \tag{26}$$

となる。さらに Laplace-Beltrami 作用素の spheroconical 座標による表式 18 を用いて変形すると

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{\Theta(\rho_1)}(\rho_1-\alpha)(\rho_1-\beta)(\rho_1-\gamma)\\
&\times\left[\frac{d^2}{d\rho_1^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\rho_1-\alpha}+\frac{1}{\rho_1-\beta}+\frac{1}{\rho_1-\gamma}\right\}\frac{d}{d\rho_1}-\frac{l(l+1)\rho_1}{4(\rho_1-\alpha)(\rho_1-\beta)(\rho_1-\gamma)}\right]\Theta(\rho_1)\\
&=\frac{4}{\Phi(\rho_2)}(\rho_2-\alpha)(\rho_2-\beta)(\rho_2-\gamma)\\
&\times\left[\frac{d^2}{d\rho_1^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\rho_2-\alpha}+\frac{1}{\rho_2-\beta}+\frac{1}{\rho_2-\gamma}\right\}\frac{d}{d\rho_2}-\frac{l(l+1)\rho_2}{4(\rho_2-\alpha)(\rho_2-\beta)(\rho_2-\gamma)}\right]\Phi(\rho_2)
\end{aligned}\tag{27}$$

完全変数分離された式を得る。左辺は ρ_1 のみに依存、右辺は ρ_2 のみに依存することから、定数 λ と置ける。この結果、次の二式を得る。

$$\left[\frac{d^2}{d\rho_1^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\rho_1-\alpha}+\frac{1}{\rho_1-\beta}+\frac{1}{\rho_1-\gamma}\right\}\frac{d}{d\rho_1}-\frac{l(l+1)\rho_1+\lambda}{4(\rho_1-\alpha)(\rho_1-\beta)(\rho_1-\gamma)}\right]\Theta(\rho_1)=0 \tag{28}$$

$$\left[\frac{d^2}{d\rho_2^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\rho_2-\alpha}+\frac{1}{\rho_2-\beta}+\frac{1}{\rho_2-\gamma}\right\}\frac{d}{d\rho_2}-\frac{l(l+1)\rho_2+\lambda}{4(\rho_2-\alpha)(\rho_2-\beta)(\rho_2-\gamma)}\right]\Phi(\rho_2)=0 \tag{29}$$

注目すべき点は ρ_1, ρ_2 に関する微分方程式が同一となる点である。ただし、変数の動くの範囲が異なる。これらの微分方程式は Lamé の微分方程式と呼ばれる。

参考文献

[1] Gabriel Lamé, "Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température.", Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 147-183.

[2] Dassios, George. Ellipsoidal harmonics: theory and applications. Vol. 146. Cambridge University Press, 2012.

[3] Tolstikhin, Oleg I., and Michio Matsuzawa. "Hyperspherical elliptic harmonics and their relation to the Heun equation." Physical Review A 63.3 (2001): 032510.