Lamé の微分方程式の Weierstrass の楕円函数を用いた表示

adhara*

2021 年 4 月 3 日

概要

本ノートでは Lamé の微分方程式をある Wierstrass の楕円函数を用いて書き直す．

1 Lamé の微分方程式

Lamé の微分方程式の微分方程式は

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}\right\}\frac{d}{dx}-\frac{l(l+1)x+\lambda}{4(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}\right]f(x)=0 \tag{1}$$

で表される，二階の常微分方程式である．[1] [2] 但し，α,β,γ を相異なる実数とする．この微分方程式は確定特異点を 4 つ持つ Fuchs 型の微分方程式である．4 つの 確定特異点は $\alpha,\beta,\gamma,\infty$ である．

上記微分方程式は, Helmholtz 方程式を Spheroconical 座標によって変数分離したときや, Ellipsoidal 座標によって変数分離したときに登場する．

以下では $\alpha+\beta+\gamma=0$ とする．*1

2 Weierstrass の楕円函数

このセクションは梅村の『楕円関数論』[3] を参考に書かれている．

$\mathbb{R}$ 上線型独立な二つの複素数 ω_1,ω_2 を定めると，ω_1,ω_2 の二つの複素数を周期として持つ楕円函数が

$$\wp(z;\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{z^2}+\sum_{n^2+m^2\neq 0}\left\{\frac{1}{(z+m\omega_1+n\omega_2)^2}-\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2}\right\} \tag{2}$$

のように定義される．これは $z=0$ に二位の極を持ち，Weierstrass の楕円函数と呼ばれる．

* Twitter @adhara_mathphys

*1 変数変換をすることでそのような形にするのが常に可能である．

ここで，

$$g_2(\omega_1,\omega_2) = 60 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m\omega_1 + n\omega_2)^{-4} \tag{3}$$

$$g_3(\omega_1,\omega_2) = 140 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m\omega_1 + n\omega_2)^{-6} \tag{4}$$

とすると，微分方程式

$$[\wp'(z;\omega_1,\omega_2)]^2 = 4[\wp(z;\omega_1,\omega_2)]^3 - g_2(\omega_1,\omega_2)\wp(z;\omega_1,\omega_2) - g_3(\omega_1,\omega_2) \tag{5}$$

が成立する．*2

ここで三次方程式

$$4x^3 - g_2(\omega_1,\omega_2)x - g_3(\omega_1,\omega_2) = 0 \tag{6}$$

を考えると

$$\Delta = [g_2(\omega_1,\omega_2)]^3 - 27[g_3(\omega_1,\omega_2)]^2 \neq 0 \tag{7}$$

が成立するので重解を持たない．したがって，三次方程式の解を e_1, e_2, e_3 とするとそれらは相異なる．解と係数の関係より

$$0 = e_1 + e_2 + e_3 \tag{8}$$

$$g_2(\omega_1,\omega_2) = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \tag{9}$$

$$g_3(\omega_1,\omega_2) = 4e_1e_2e_3 \tag{10}$$

であり，微分方程式も

$$[\wp'(z;\omega_1,\omega_2)]^2 = 4[\wp(z;\omega_1,\omega_2) - e_1][\wp(z;\omega_1,\omega_2) - e_2][\wp(z;\omega_1,\omega_2) - e_3] \tag{11}$$

と書き換えられる．

また，

$$\wp(\omega_1/2;\omega_1,\omega_2) = e_1, \quad \wp(\omega_2/2;\omega_1,\omega_2) = e_2, \quad \wp(\omega_3/2;\omega_1,\omega_2) = e_3, \tag{12}$$

が成立する．但し，$\omega_3 := -(\omega_1 + \omega_2)$ である．

逆に，解を e_1, e_2, e_3 とする重解を持たない三次方程式

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) = 0 \tag{13}$$

を与えたときに，

$$g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) = 60 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m\omega_1 + n\omega_2)^{-4} \tag{14}$$

$$g_3 = 4e_1e_2e_3 = 140 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m\omega_1 + n\omega_2)^{-6} \tag{15}$$

を満たす，$\mathbb{R}$ 上線型独立な 2 つの複素数 ω_1, ω_2 は存在する．*3

---

*2 z による微分

*3 梅村 [3] の第 2 章，11 節を参照．

3 Lamé の微分方程式の Weierstrass の楕円函数を用いた表示

このセクションでは本題の Lamé の微分方程式 (1) をある Weierstrass の楕円函数を用いて書き換えるということを行う．このセクションは [2] を参考に書かれている．

今回用いる Weirstrass 楕円函数は，

$$-4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = 60 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m\omega_1+n\omega_2)^{-4} \tag{16}$$

$$4\alpha\beta\gamma = 140 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m\omega_1+n\omega_2)^{-6} \tag{17}$$

を満たす，$\mathbb{R}$ 上線型独立な 2 つの複素数 ω_1, ω_2 を周期とする Weierstrass 楕円函数 $\wp(z;\omega_1,\omega_2)$ である．以下では，$\wp(z;\omega_1,\omega_2)$ を $\wp(z)$ と略記する．微分方程式

$$[\wp'(z)]^2 = 4(\wp(z)-\alpha)(\wp(z)-\beta)(\wp(z)-\gamma) \tag{18}$$

が成立する．さらに上記微分方程式 (18) を z 微分すると，

$$2\wp'(z)\wp''(z) = 4\wp'(z)\{(\wp(z)-\alpha)(\wp(z)-\beta)+(\wp(z)-\beta)(\wp(z)-\gamma)+(\wp(z)-\gamma)(\wp(z)-\alpha)\} \tag{19}$$

$$\wp''(z) = 2\{(\wp(z)-\alpha)(\wp(z)-\beta)+(\wp(z)-\beta)(\wp(z)-\gamma)+(\wp(z)-\gamma)(\wp(z)-\alpha)\} \tag{20}$$

が成立する．

Lamé の微分方程式 (1) において

$$x = \wp(z) \tag{21}$$

という変数変換を行う．このとき，

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dz} = \frac{df}{dx}\wp'(z) \tag{22}$$

や

$$\frac{d^2f}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dx}\right)\wp'(z) + \frac{df}{dx}\wp''(z) = \frac{d^2f}{dx^2}[\wp'(z)]^2 + \frac{df}{dx}\wp''(z) \tag{23}$$

が成立する．ここで，(18) と (20) を用いると，

$$\begin{aligned}\frac{d^2f}{dz^2} &= 4\frac{d^2f}{dx^2}(\wp(z)-\alpha)(\wp(z)-\beta)(\wp(z)-\gamma) \\ &\quad + 2\frac{df}{dx}\{(\wp(z)-\alpha)(\wp(z)-\beta)+(\wp(z)-\beta)(\wp(z)-\gamma)+(\wp(z)-\gamma)(\wp(z)-\alpha)\} \\ &= 4(\wp(z)-\alpha)(\wp(z)-\beta)(\wp(z)-\gamma)\left\{\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{1}{2}\frac{df}{dx}\left(\frac{1}{\wp(z)-\alpha}+\frac{1}{\wp(z)-\beta}+\frac{1}{\wp(z)-\gamma}\right)\right\}\end{aligned} \tag{24}$$

となり，

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{1}{2}\frac{df}{dx}\left(\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}\right) = \frac{1}{4(\wp(z)-\alpha)(\wp(z)-\beta)(\wp(z)-\gamma)}\frac{d^2f}{dz^2} \tag{25}$$

となることがわかる．この結果を用いると，Lamé の微分方程式 (1) は

$$\frac{1}{4(\wp(z)-\alpha)(\wp(z)-\beta)(\wp(z)-\gamma)}\frac{d^2 f}{dz^2}-\frac{l(l+1)\wp(z)+\lambda}{4(\wp(z)-\alpha)(\wp(z)-\beta)(\wp(z)-\gamma)}f=0 \tag{26}$$

，すなわち，

$$\frac{d^2 f}{dz^2}-(l(l+1)\wp(z)+\lambda)f=0 \tag{27}$$

となる．

4 Lamé の微分方程式の Weierstrass の楕円函数を用いた表示の物理的解釈

Lamé の微分方程式の Weierstrass の楕円函数を用いた表示 (27) を書き換えると，

$$\frac{d^2 f}{dz^2}-l(l+1)\wp(z)f=\lambda f \tag{28}$$

となる．例えば，楕円函数をポテンシャルとする一次元量子力学の方程式と見做すことが可能である．

参考文献

[1] Gabriel Lamé, “Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température.”, Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 147-183.

[2] Dassios, George. Ellipsoidal harmonics: theory and applications. Vol. 146. Cambridge University Press, 2012.

[3] 梅村 浩『楕円関数論 増補新装版 楕円曲線の解析学』 東京大学出版会 (2020).