Sphero-elliptic Harmonics（その１）
〜一般化 Lamé 微分方程式の導出〜

adhara_mathphys

2024 年 12 月 8 日

概要

以前のノートでは三次元空間における sphero-elliptic 座標[*1]を用いた Laplace 方程式の変数分離によって出てくる Lamé の微分方程式の導出を行なっていた．本ノートでは，n 次元版の sphero-elliptic 座標表示を用いた Laplace 方程式の変数分離によって出てくる一般化 Lamé 微分方程式の導出について説明する．

目次

[*1] そのときは Spheroconical 座標と呼んでいたが同じものである

1　Laplace 方程式

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ における Laplace 方程式を考える：

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} G = 0. \tag{1}$$

この解 G がカーテシアン座標 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ を変数とする実係数多項式で表せるとき，これは調和多項式と呼ばれる（野村 [2] 第 6 章を参照）．

Laplace 方程式を動径部分 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2 +^2 \cdots + x_{n+1}^2}$ と角度部分に変数分離して解くことを考える：

$$G(r, \Omega_n) = R(r)F(\Omega_n). \tag{2}$$

このとき，変数分離により Laplace 方程式の動径部分は

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{n}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+n-1)}{r^2}\right] R(r) = 0, \tag{3}$$

角度部分は

$$\left(\Delta_{S^n} + l(l+n-1)\right) F(\Omega_n) = 0, \tag{4}$$

のような微分方程式に帰着する．ここで，Δ_{S^n} は単位超球面 S^n における Laplace-Beltrami 演算子[*2] である．この解が一価関数となるような l は非負整数に限られ，一価関数となるときの解 F は S^n 上超球面調和関数と呼ばれる（野村 [2] 第 7 章を参照）．

2　Sphero-elliptic 座標系

単位超球面 S^n において Sphero-elliptic 座標系 [1] と呼ばれる直交曲線座標系 $(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n)$ を導入する[*3]．Sphero-elliptic 座標表示 $(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n)$ とカーテシアン座標表示 $(u_1, u_2, \cdots, u_{n+1}), (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_{n+1}^2 = 1)$ は次のように結びついている:

$$u_i = \pm\sqrt{\frac{\prod_{j=1}^{n}(\rho_j - e_i)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n+1}(e_j - e_i)}} \quad (1 \leq i \leq n+1). \tag{5}$$

ただし、$(e_1, e_2, \cdots, e_{n+1})$ は

$$e_1 > e_2 > \cdots > e_{n+1} \tag{6}$$

---

*2 Laplace 演算子と Laplace-Beltrami 演算子の関係は以下のようになっている：

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} = \frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\Delta_{S^n}}{r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\Delta_{S^n}}{r^2}.$$

*3 ただし [1] では sphero-conal 座標系と呼んでいる．

を満たす定数であり、

$$e_1 \geq \rho_1 \geq e_2 \geq \rho_2 \geq \cdots \geq e_n \geq \rho_n \geq e_{n+1} \tag{7}$$

である．各 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ を定めるごとに異なる sphero-elliptic 座標系を得ることができる．

Sphero-elliptic 座標系の幾何学的な意味は

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{u_i^2}{\rho_j - e_i} = 0 \quad (1 \leq j \leq n) \tag{8}$$

が成立することからわかる．これは原点で交差する楕円錐を表す式である[*4]．すなわち、ユークリッド空間において単位超球面 S^n と n 個の交点と象限を定めることにより指定できることを意味している．このことから sphero-elliptic 座標を sphero-conical 座標あるいは spheroconal 座標と呼ぶことがある．

3 sphero-ellipitc 座標系における変数分離

Laplace 演算子の曲線直交座標表示の公式[*5] を用いると，Sphero-elliptidc 座標表示の Laplace-Beltrami 演算子は，

$$\Delta_{S^n} = -4 \sum_{i=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{n+1}(\rho_i - e_j)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n}(\rho_i - \rho_j)} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho_i^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\rho_i - e_j} \frac{\partial}{\partial \rho_i} \right] \tag{9}$$

となる．

両辺を $F(\Omega)$ に作用させ、式 4 を用いると、

$$l(l+n-1)F(\Omega_n) = 4 \sum_{i=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{n+1}(\rho_i - e_j)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n}(\rho_i - \rho_j)} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho_i^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\rho_i - e_j} \frac{\partial}{\partial \rho_i} \right] F(\Omega_n) \tag{10}$$

を得る．

以下ではこの解を変数分離によって求める．すなわち，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を一変数の実関数として，

$$F(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} X_i(\rho_i) \tag{11}$$

---

*4 $\rho_j - e_i$ がすべて正あるいはすべて負となることはない．

*5 カーテシアン座標 $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ および曲線直交座標 $(\xi_1, \cdots, \xi_{n+1})$ に対して，

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} = \frac{1}{\prod_{j=1}^{n+1} h_j} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{\prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} h_j}{h_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right), \quad h_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} \right)^2}$$

を微分方程式に代入し，両辺を $\prod_{i=1}^{n} X_i(\rho_i)$ で割ると，

$$
\begin{aligned}
l(l+n-1) &= 4\sum_{i=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{n+1}(\rho_i - e_j)}{X_i(\rho_i)\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(\rho_i-\rho_j)} \left[\frac{d^2}{d\rho_i^2} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{\rho_i - e_j}\frac{d}{d\rho_i}\right] X_i(\rho_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(\rho_i-\rho_j)} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，

$$
M_i := 4\frac{\prod_{j=1}^{n+1}(\rho_i - e_j)}{X_i(\rho_i)} \left[\frac{d^2}{d\rho_i^2} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{\rho_i - e_j}\frac{d}{d\rho_i}\right] X_i(\rho_i) \qquad (13)
$$

とした．

ここで，$1 \leq N \leq n$，$I_1 \neq I_2 \neq \cdots \neq I_N$，$\{I_1, I_2, \cdots, I_N\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して，

$$
M_{I_1, I_2, \cdots, I_N} := \sum_{i=1}^{N} \frac{M_{I_i}}{\prod_{j=1,j\neq i}^{N}(\rho_{I_i} - \rho_{I_j})} \qquad (14)
$$

とする．添字の入れ替えに関する対称性から $M_{I_1,I_2,\cdots,I_N}$ は $\rho_{I_1}, \cdots, \rho_{I_N}$ の対称関数であることがわかる．この記号を用いて，$\beta_0 = l(l+n-1)$ とすると，

$$
\beta_0 = M_{1,2,\cdots,n} \qquad (15)
$$

という式に帰着する．これを変数分離することを考える．

結論から言うと以下の定理やその系が成立する：

定理 1. ある $\beta_1, \cdots, \beta_{n-1} \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $1 \leq N \leq n$，$I_1 \neq I_2 \neq \cdots \neq I_N$，$\{I_1, I_2, \cdots, I_N\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して，

$$
M_{I_1, I_2 \cdots, I_N} = \sum_{k=1}^{n-N+1} \beta_{k-1} h_{n-N+1-k}(\rho_{I_1}, \rho_{I_2}, \cdots, \rho_{I_N}) \qquad (16)
$$

となる．ただし，h_m は m 次の完全斉次対称多項式である．ここで n 変数の m 次の完全斉次対称多項式とは，$h_m(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{1\leq I_1 \leq \cdots \leq I_m \leq n} x_{I_1} \cdots x_{I_m}$ であり，$h_0 = 1$ である．

系 2. ある $\beta_1, \cdots, \beta_{n-1} \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $1 \leq i \leq n$ に対して，

$$
M_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{k-1} \rho_i^{n-k}, \qquad (17)
$$

となる．

以上の定理と系より，元の方程式が変数分離可能であり，しかも同一の未定乗数を含む微分方程式

$$
\left[\frac{d^2}{d\rho_i^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\rho_i - e_k}\frac{d}{d\rho_i} - \frac{\sum_{k=1}^{n}\beta_{k-1}\rho_i^{n-k}}{4\prod_{k=1}^{n+1}(\rho_i - e_k)}\right] X_i(\rho_i) = 0 \qquad (18)
$$

に帰着することが示された．これらの微分方程式は一般化 Lamé 微分方程式と呼ばれる．これらは不確定特異点を持たず、$n+2$ 個の確定特異点 $e_1, \cdots, e_{n+1}, \infty$ を持つので、線形常微分方程式のクラスである Fuchs 型微分方程式に分類される．β_i $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ はアクセサリパラメータと呼ばれる．低次元のとき，例えば $n = 1$ の時は確定特異点が 3 個であり超幾何型微分方程式に属し、アクセサリパラメータは 0 個，$n = 2$ の時は確定特異点が 4 個であり Heun 型微分方程式に属し、アクセサリパラメータは 1 個となる．特に $n = 2$ の場合は Lamé が導入した Lamé 微分方程式となっている．一般の n に対して，上記の一般化 Lamé 微分方程式の多項式解は Heine-Stieltjes 多項式と呼ばれ，sphero-elliptic 座標表示の球面調和関数を構成するために必要なものとなる．それについては続きのノートで説明する．

4　変数分離に関する定理の証明

定理の証明には以下の補題を用いる：

補題 3. 任意の $0 \le N \le n-2$，$I_1 \ne I_2 \ne \cdots \ne I_N$，$\{I_1, I_2, \cdots, I_N\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}$，$k, l \notin \{I_1, I_2, \cdots, I_N\}$，$1 \le k \ne l \le n$ に対して，

$$\frac{M_{I_1,I_2,\cdots,I_N,k} - M_{I_1,I_2,\cdots,I_N,l}}{\rho_k - \rho_l} = M_{I_1,I_2,\cdots,I_N,k,l} \tag{19}$$

が成立する．

Proof. 定義より，

$$M_{I_1,I_2,\cdots,I_N,k} = \sum_{i=1}^{N} \frac{M_{I_i}}{(\rho_{I_i} - \rho_k) \prod_{i \ne j}^{N} (\rho_{I_i} - \rho_{I_j})} + \frac{M_k}{\prod_{j=1}^{N} (\rho_k - \rho_{I_j})}$$
$$M_{I_1,I_2,\cdots,I_N,l} = \sum_{i=1}^{N} \frac{M_{I_i}}{(\rho_{I_i} - \rho_l) \prod_{i \ne j}^{N} (\rho_{I_i} - \rho_{I_j})} + \frac{M_l}{\prod_{j=1}^{N} (\rho_l - \rho_{I_j})}$$

である．従って，

$$\begin{aligned}\frac{M_{I_1,I_2,\cdots,I_N,k} - M_{I_1,I_2,\cdots,I_N,l}}{\rho_k - \rho_l} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{M_{I_i}}{(\rho_{I_i} - \rho_k)(\rho_{I_i} - \rho_l) \prod_{i \ne j}^{N} (\rho_{I_i} - \rho_{I_j})} \\ &\quad + \frac{M_k}{(\rho_k - \rho_l) \prod_{j=1}^{N} (\rho_k - \rho_{I_j})} + \frac{M_l}{(\rho_l - \rho_k) \prod_{j=1}^{N} (\rho_l - \rho_{I_j})} \\ &= M_{I_1,I_2,\cdots,I_N,k,l}\end{aligned}$$

となる．□

以下に定理 1 の証明を記す．

Proof. ここでは N に関する帰納法を用いる．

まず，$N = n$ については，

$$M_{1,2,\cdots,n} = \beta_0 \tag{20}$$

であるから定理の主張は成立する．

次に，$0 \leq M \leq n-2$ として，$N = n, n-1, \cdots, M+2$ まで定理の主張が成立しているとする．すなわち，ある $\beta_0, \cdots, \beta_{n-M-2} \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $M+2 \leq N \leq n$，$I_1 \neq I_2 \neq \cdots \neq I_N$，$\{I_1, I_2, \cdots, I_N\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して，

$$M_{I_1, I_2 \cdots, I_N} = \sum_{k=1}^{n-N+1} \beta_{k-1} h_{n-N+1-k}(\rho_{I_1}, \rho_{I_2}, \cdots, \rho_{I_N}) \tag{21}$$

が成立すると仮定する．

ここで任意に $I_1 \neq I_2 \neq \cdots \neq I_M$，$\{I_1, I_2, \cdots, I_N\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ および $1 \leq j \neq l \leq n$，$j, l \notin \{I_1, I_2, \cdots, I_N\}$ を選んで固定する．ただし，$M = 0$ のときは $\{I_1, I_2, \cdots, I_N\} = \emptyset$ として進めれば良い．

補題 3 より

$$\begin{aligned}
&M_{I_1, \cdots, I_M, j} - M_{I_1, \cdots, I_M, l} \\
&= (\rho_j - \rho_l) M_{I_1, \cdots, I_M, j, l} \\
&= (\rho_j - \rho_l) \sum_{k=1}^{n-M-1} \beta_{k-1} h_{n-M-1-k}(\rho_{I_1}, \cdots, \rho_{I_M}, \rho_j, \rho_l) \\
&= (\rho_j - \rho_l) \sum_{k=1}^{n-M-1} \beta_{k-1} \sum_{m=0}^{n-M-1-k} h_m(\rho_{I_1}, \cdots, \rho_{I_M}) h_{n-M-1-k-m}(\rho_j, \rho_l) \\
&= \sum_{k=1}^{n-M-1} \beta_{k-1} \sum_{m=0}^{n-M-1-k} h_m(\rho_{I_1}, \cdots, \rho_{I_M}) (\rho_j^{n-M-k-m} - \rho_l^{n-M-k-m}) \\
&= \sum_{k=1}^{n-M-1} \beta_{k-1} \sum_{m=0}^{n-M-1-k} h_m(\rho_{I_1}, \cdots, \rho_{I_M}) \left[h_{n-M-k-m}(\rho_j) - h_{n-M-k-m}(\rho_l) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n-M-1} \beta_{k-1} \left[h_{N-M-k}(\rho_{I_1}, \cdots, \rho_{I_M}, \rho_j) - h_{n-M-k}(\rho_{I_1}, \cdots, \rho_{I_M}) \right] \\
&- \sum_{k=1}^{n-M-1} \beta_{k-1} \left[h_{N-M-k}(\rho_{I_1}, \cdots, \rho_{I_M}, \rho_l) - h_{n-M-k}(\rho_{I_1}, \cdots, \rho_{I_M}) \right] && (22) \\
&= \sum_{k=1}^{n-M-1} \beta_{k-1} \left[h_{N-M-k}(\rho_{I_1}, \cdots, \rho_{I_M}, \rho_j) - h_{N-M-k}(\rho_{I_1}, \cdots, \rho_{I_M}, \rho_l) \right] && (23)
\end{aligned}$$

となる．途中の式変形では，

$$h_n(\rho_1, \cdots, \rho_i, \rho_{i+1}, \cdots, \rho_{i+k}) = \sum_{k=0}^{n} h_k(\rho_1, \cdots, \rho_i) h_{n-k}(\rho_{i+1}, \cdots, \rho_{i+k}) \tag{24}$$

や

$$h_n(\rho_1, \rho_2)(\rho_1 - \rho_2) = \rho_1^{n+1} - \rho_2^{n+1} \tag{25}$$

を用いた．以上より，

$$\begin{aligned}
&M_{I_1,\cdots,I_M,j} - \sum_{k=1}^{n-M-1} \beta_{k-1} h_{N-M-k}(\rho_{I_1},\cdots,\rho_{I_M},\rho_j) \\
&= M_{I_1,\cdots,I_M,l} - \sum_{k=1}^{n-M-1} \beta_{k-1} h_{N-M-k}(\rho_{I_1},\cdots,\rho_{I_M},\rho_l)
\end{aligned} \tag{26}$$

となるが，左辺は $\rho_{I_1},\cdots,\rho_{I_M},\rho_j$ の関数，右辺は $\rho_{I_1},\cdots,\rho_{I_M},\rho_l$ の関数，であるから両辺ともに $\rho_{I_1},\cdots,\rho_{I_M}$ の関数であり，ρ_j,ρ_l には依存しない．さらに $M_{I_1,\cdots,I_M,j}$ が $\rho_{I_1},\cdots,\rho_{I_M},\rho_j$ の関数であることも考慮すると，ある $\beta_{N-M-1}(I_1,\cdots,I_M)$ が存在し，任意の $j \notin \{I_1,\cdots,I_M\}$, $1 \le j \le n$ に対して，

$$M_{I_1,\cdots,I_M,j} = \beta_{N-M-1}(I_1,\cdots,I_M) + \sum_{k=1}^{n-M-1} \beta_{k-1} h_{N-M-k}(\rho_{I_1},\cdots,\rho_{I_M},\rho_j) \tag{27}$$

となることがわかる．

ここまでで，任意の $I_1,\cdots,I_M$ に対して，ある $\beta_{N-M-1}(I_1,\cdots,I_M) \in \mathbb{R}$ が存在し，任意の $j \notin \{I_1,\cdots,I_M\}$, $1 \le j \le n$ に対して，

$$M_{I_1,\cdots,I_M,j} = \beta_{N-M-1}(I_1,\cdots,I_M) + \sum_{k=1}^{n-M-1} \beta_{k-1} h_{N-M-k}(\rho_{I_1},\cdots,\rho_{I_M},\rho_j) \tag{28}$$

となることが示されたが，$\beta_{N-M-1}(I_1,\cdots,I_M)$ は実は $I_1,\cdots,I_M$ によらないことが示される．例えば，

$$\begin{aligned}
M_{1,2,\cdots,M-1,M,M+1} &= \beta_{N-M-1}(1,2,\cdots,M-1,M) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-M-1} \beta_{k-1} h_{N-M-k}(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_{M-1},\rho_M,\rho_{M+1}) \\
M_{1,2,\cdots,M-1,M+1,M} &= \beta_{N-M-1}(1,2,\cdots,M-1,M+1) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-M-1} \beta_{k-1} h_{N-M-k}(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_{M-1},\rho_M,\rho_{M+1})
\end{aligned}$$

であるが，$M_{1,2,\cdots,M-1,M,M+1} = M_{1,2,\cdots,M-1,M+1,M}$ かつ h_n が対称多項式であることから，

$$\beta_{N-M-1}(1,2,\cdots,M-1,M) = \beta_{N-M-1}(1,2,\cdots,M-1,M+1)$$

となる必要があることがわかる．このようにして，一つずつ数字を入れ替えることで同様の等式を得られ，$\beta_{N-M-1}(I_1,\cdots,I_M)$ が $I_1,\cdots,I_M$ によらず共通である必要があることがわかる．

以上より，帰納法の仮定のもとで，ある $\beta_1,\cdots,\beta_{n-M-1} \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $M+1 \le N \le n$, $I_1 \ne I_2 \ne \cdots \ne I_N$, $\{I_1,I_2,\cdots,I_N\}$ に対して，

$$M_{I_1,I_2\cdots,I_N} = \sum_{k=1}^{n-N+1} \beta_{k-1} h_{n-N+1-k}(\rho_{I_1},\rho_{I_2},\cdots,\rho_{I_N}) \tag{29}$$

が成立する． □

参考文献

[1] H. Volkmer, "Generalized ellipsoidal and sphero-conal harmonics." SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications 2 (2006): 071.

[2] 野村隆昭, 『球面調和函数と群の表現』, 日本評論社, 2018.