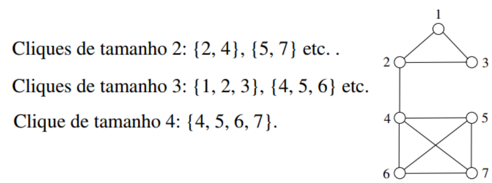
PROBLEMA DO CLIQUE

Adhonay Júnior Silva
adhonay.silva@sga.pucminas.br
Projeto e Análise de Algoritmos
PUC Belo Horizonte-MG 2018

O PROBLEMA K-CLIQUE

Clique de um grafo G = (V, A) é constituído do subconjunto $V' \subseteq V$, tal que v, w $\in V' \Rightarrow (v, w) \in A$. Ou seja o problema do clique refere-se a qualquer problema que possui como objetivo encontrar subgrafos(”cliques”) em um grafo não orientado.



Como podemos observar na figura acima e ilustrado um grafo com diversos cliques, neste relatório será retratado o problema de decisão de testar se um grafo contém um clique maior que um tamanho k determinado, responder 1 (“sim”) caso G tenha um clique de tamanho maior igual a k e 0 (“não”), caso contrário.

COMPLEXIDADE

Para testar se um grafo G contém um clique com k-vertices e achar qualquer clique que ele contém é examinar cada subgrafo com pelo menos k verticies checando se ele forma um clique. Tem uma complexidade de O(nk k2): sendo que existem O(nk) subgrafos para checar, cada um dos quais tem O(k2) arestas cuja presença em G precisa ser checada. Portanto, o problema pode ser resolvido em tempo polinomial quando k é uma constante fixa. Mas quando k é uma entrada para o problema o tempo é exponencial que no caso e esse o problema em questão.

NP-COMPLETO PROVA

O problema do clique é NP-Completo, a partir da prova desse problema e de uma redução do problema do clique ao problema do conjunto de vértices independentes temos também a prova que o conjunto de vértices independentes e NP-completo também.

Dado um grafo não orientado G = (V,E) e um valor inteiro $k \in 1,...,n$, onde n = V, pergunta-se: G possui uma clique com k vértices?

Teorema: CLIQUE $\in$ NP-Completo.

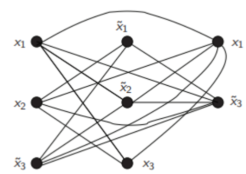
1. CLIQUE está em NP.
2. SAT $\propto$ CLIQUE
   (a) Definição: um grafo G = (V,E) e t-partido se o conjunto de vértices pode ser particionado em t subconjuntos V1,V2,...,Vt tal que não existam arestas em E ligando dois vértices em um mesmo subconjunto Vi, i $\in$ (1,...,t).
   (b) Trasformação de uma instancia SAT em uma intancia clique: Seja F = C1,C2,...Cc uma formula booleana nas variáveis x1,...xv. Construa o grafo c-partido G = ((V1,V2,...Vc);E) tal que:
      i. Em um subconjunto Vi existe um vértice associado a cada variável que aparece na clausula Ci de F.

ii. A aresta (a,b) estão em E se e somente se a e b estão em subconjuntos distintos e , além disso, a e b não representam simultaneamente uma variável e a sua negação.

3. O numero de vértices de G é O(c.v) enquanto o numero de arestas e O(c^2v^2). Fazendo-se k = c , teremos construído uma instancia clique em tempo polinomial no tamanho da entrada de SAT.
4. E fácil mostrar que a formula F e satisfeita por alguma atribuição de variáveis se e somente se o grafo c-partido G tem um clique de tamanho c.
5. Seja o exemplo da redução:

$$\mathcal{F} = (x_1 + x_2 + \overline{x}_3).(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3).(x_1 + \overline{x}_3).$$

O grafo correspondente à instância de CLIQUE é dado por:



HEURÍSTICAS

Existe diversas heurísticas ou algoritmos de aproximação para solução do clique sendo uma delas de Uriel Feige descreve um algoritmo de tempo polinomial que acha um clique de tamanho Omega((log n/log log n)2) em qualquer grafo que tenho um número de clique Omega(n/logkn) para qualquer constante k ou um algoritmo de aproximação para o problema do conjunto máximo independente, melhorando a garantia de melhor desempenho conhecida por O(n / (log n) 2) a partir de estrutura de algoritmos excluindo subgráficos dado por Boppana e Halldórsson.

Tambem são apresentadas modificações do Branch And Bound, mas para o problema de decisão em questões heurísticas particulares não foram encontradas, mas o problema de achar um clique máximo é NP-difícil: Se o mesmo for resolvido, também é possível resolver o problema da decisão, comparando o tamanho do clique máximo com o tamanho do parâmetro dado com entrada do problema da decisão, ou seja, heurísticas para o clique máximo estão relacionadas com o de k-clique.

CONCLUSÃO

Problemas pertencente a classe NP-Completos possui um alto custo para solução e geralmente e dada uma heurística ou aproximação que encontra a resposta muito mais rápida se comparado ao tempo exponencial mas não garantindo necessariamente a solução ótima , como podemos notar o clique decisivo foi provado através do conjunto independe de vértices que pertente a NP-Completo e caso seja resolvido algum problema dessa classe em tempo polinomial será possível resolver os demais, assim resolvendo uns dos maiores dilemas da computação.

REFERÊNCIAS

Feige, U. (2004), "Approximating maximum clique by removing subgraphs", SIAM Journal on Discrete Mathematics, 18.

Garey, M. and D. Johnson, Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness, 1979.

Richard M. Karp (1972). "Reducibility Among Combinatorial Problems" (PDF). In R. E. Miller and J. W. Thatcher (editors). Complexity of Computer Computations. New York: Plenum. pp. 85–103.