Les maths pour tous !

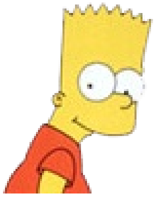
Par Mathieu Nebra (Mateo21)

www.openclassrooms.com

Dernière mise à jour le 7/07/2011

Sommaire

Les maths pour tous !

Par  Mathieu Nebra (Mateo21)

Mise à jour : 07/07/2011
Difficulté : Facile

"Les maths c'est nul, et puis de toute façon je n'y arriverai jamais, c'est pas fait pour moi"
(Vous n'imaginez pas le nombre de gens qui se disent ça !)

Ah bon, c'est votre cas aussi ? Ooops.

De toutes les matières que l'on étudie à l'école, c'est vrai qu'il y en a une que l'on met toujours un peu à part : les maths. Pardon, il paraît qu'on dit *les mathématiques*.

Pourquoi les maths sont une matière à part ?
Peut-être parce que pour beaucoup c'est la matière la plus théorique et la plus scientifique. Elle est considérée comme la matière "reine" des sciences. Du coup, à force d'en parler et de dire que "*décidément c'est une matière importante*", ça met la pression.

En maths, vous êtes en général dans l'une de ces 2 catégories :

- **Soit vous êtes le crack de la classe** : vous avez tout suivi depuis le début, et donc vous êtes parmi les premiers de votre classe (et peut-être même que vous aimez les maths et que vous faites des exercices supplémentaires en cachette, mais n'allez pas le dire trop fort !).
- **Soit vous n'êtes pas le crack de la classe** : vous avez peut-être loupé quelques notions à un moment, et cela vous handicape tout le temps. Vous avez toujours l'impression d'avoir un train de retard à rattraper.

Et c'est là que ce cours intervient. C'est un cours pour débutants en maths : il a pour mission d'aller de la classe de 6ème jusqu'à la Terminale. Les mots et les schémas choisis pour expliquer les cours seront très différents de votre manuel scolaire : j'ai choisi de présenter les choses simplement, avec beaucoup d'exemples, et en répondant aux questions que vous vous posez vraiment.

Je suis convaincu que beaucoup d'élèves se sentent dépassés par les maths alors qu'il ne faudrait souvent pas grand chose pour qu'ils reprennent confiance en eux.
Ce cours est là pour ça : *courage, vous allez y arriver* !

Partie 1 : Niveau 6°

Equivalences des niveaux

France	6^e
Belgique	6^e primaire
Québec	6^e primaire

La classe de 6ème, c'est le début des années du collège.

Cette année-là, vous n'allez pas découvrir beaucoup de nouvelles choses par rapport au primaire : ce sont principalement des rappels.
Profitez-en ! C'est l'occasion de vérifier que vous avez bien tout compris. Ne commencez pas à vous laisser distancer. Les choses difficiles risquent plutôt d'arriver ensuite, à partir de la 5ème, et surtout de la 4ème. Mettez-vous bien à niveau cette année, pour attaquer la suite du collège sereinement.

Qu'est-ce qu'un nombre ?

Pour commencer ce cours de maths, je vous propose de démarrer doucement. De faire simple. Nous allons partir de la base : **les nombres**. Après tout, sans les nombres, on ne ferait pas grand-chose en maths, je pense que vous êtes d'accord avec moi.

Le titre du chapitre est un peu provocateur : bien sûr, vous savez certainement ce qu'est un nombre. Mais, puisque ce cours part de zéro (eh, on n'est pas sur le Site du Zéro pour rien !), je pense que c'est une bonne chose de commencer par là.

Même si vous pensez bien connaître les nombres, lisez ce premier chapitre. Ce ne sera pas long, pas douloureux (promis !) et au moins il n'y aura pas de malentendu. Par la suite, nous allons tout le temps manipuler des nombres, il faut donc absolument que l'on soit d'accord sur ce que sont les nombres !

Les chiffres et les nombres

Quand vous étiez plus jeunes, on vous a appris à compter. On vous a fait répéter et répéter de nombreuses fois la même chose : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14… Vous annonciez fièrement à vos parents que vous saviez compter jusqu'à 100, puis à 1000, etc. (ne vous cachez pas, je suis sûr que vous avez déjà dit « Moi je sais compter jusqu'à 100 » une fois dans votre vie !).

Heureusement que ce petit jeu du « qui-sait-compter-le-plus-loin » ne dure qu'un temps, parce que vous le savez sûrement maintenant, il existe une quantité infinie de nombres ! Ainsi :

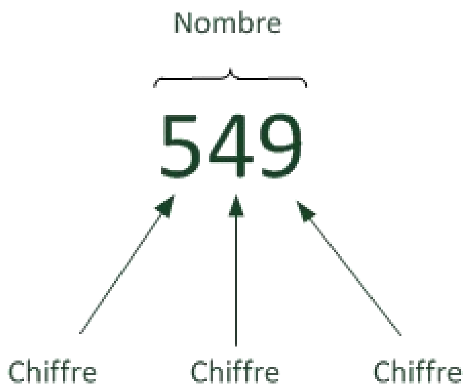
173801927892061036551852549017258292029

… est un nombre comme un autre. Forcément, au bout d'un moment, on arrête de compter si on ne veut pas trop se fatiguer.

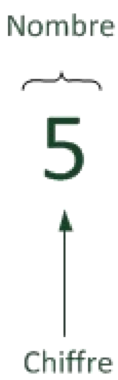
Mais savez-vous faire la **différence entre un chiffre et un nombre** ? Contrairement à ce que beaucoup de gens croient, ce n'est pas du tout la même chose. Vous pouvez ouvrir un dictionnaire pour vérifier.

Tous les nombres sont constitués de symboles, que l'on appelle les chiffres. Il y en a 10 :
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (oui, en comptant le 0 ça fait 10 !)

Avec ces 10 chiffres, vous pouvez former tous les nombres que vous voulez. Par exemple, le nombre 549 est constitué de trois chiffres : 5, 4 et 9. C'est compris jusque-là ?



Maintenant, une petite embrouille pour voir si vous suivez bien : 5 est un chiffre... mais c'est aussi un nombre ! C'est un nombre constitué d'un seul chiffre ! D'ailleurs, lorsque vous comptez (« 1, 2, 3, 4, 5 ») ce sont bien des nombres.



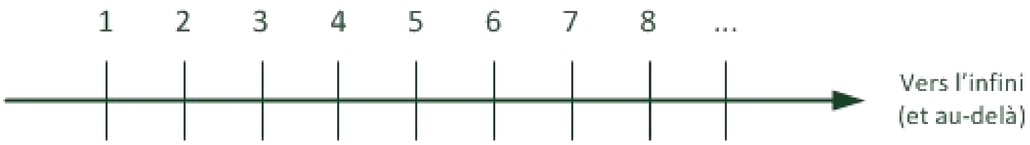
Tous les nombres du monde sont donc formés à l'aide de ces symboles que l'on appelle chiffres :

- Les premiers nombres (de 0 à 9) sont constitués d'un seul chiffre
- Les nombres qui suivent (de 10 à 99) sont constitués de 2 chiffres.
- Les nombres qui suivent (de 100 à 999) sont constitués de 3 chiffres.
- etc.

Vous avez sûrement vu d'autres types de chiffres. En histoire par exemple, vous avez certainement étudié les chiffres romains : I, V, X, C… Ceux-ci, combinés entre eux, constituaient des nombres. Ainsi, XVII correspond au nombre 17. Les romains avaient un système qui nécessitait d'ailleurs beaucoup de chiffres (comme vous le voyez, pour le même nombre il fallait 4 chiffres au lieu de 2). Ce sont les arabes qui ont rapporté les chiffres que vous connaissez (de 0 à 9), à l'origine inventés en Inde, et désormais utilisés partout sur la planète Terre.

Positionner les nombres sur une droite

Pour bien visualiser les nombres, j'aime bien les représenter sur une droite. Cela ressemble à quelque chose comme ça :

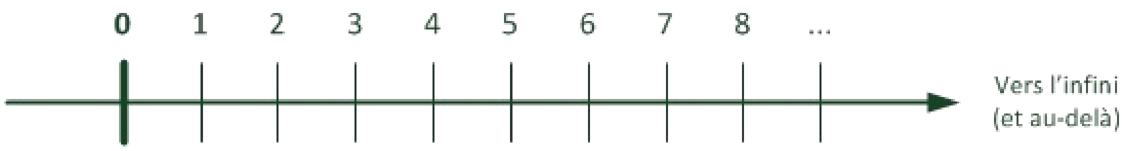


Les nombres, rangés dans l'ordre sur une droite

Cela permet de visualiser que les nombres se suivent. Dans ma tête, j'imagine souvent cette droite pour « positionner » les nombres les uns par rapport aux autres.

Mais… On dirait qu'il manque un nombre important à gauche de cette droite, vous ne trouvez pas ? Le 0 ! Un tel oubli sur le Site du Zéro est impardonnable !

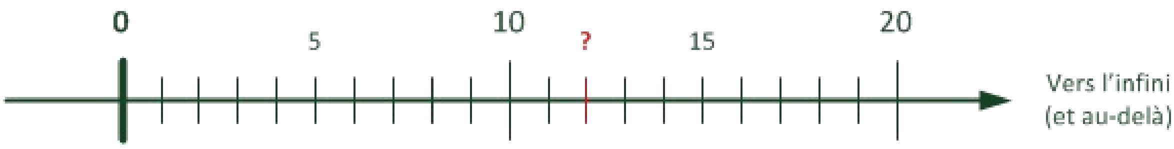
Rajoutons le nombre 0 (qui est aussi un chiffre, c'est bien, vous suivez) :



Les nombres avec le 0

Voilà, ouf, l'affront est réparé.

Bien sûr, je ne peux pas mettre tous les nombres qui existent sur une droite : comme il y en a une infinité, on ne pourrait pas tous les afficher sur votre écran !
On peut par contre essayer d'agrandir la droite pour afficher un peu plus de nombres. Regardez cette droite :



J'y ai mis plus de nombres (jusqu'à 20) mais je ne les ai pas tous affichés. J'ai seulement indiqué 5, 10, 15 et 20 pour que ce soit plus facile à repérer.
Chaque trait représente un nombre. J'en ai dessiné un en rouge : pouvez-vous me dire quel nombre c'est ?

Pour le trouver, c'est assez facile : il suffit de compter à partir du nombre le plus proche, ici 10. Alors, qu'est-ce que ça donne ?

La réponse est ci-dessous :

Secret **(cliquez pour afficher)**

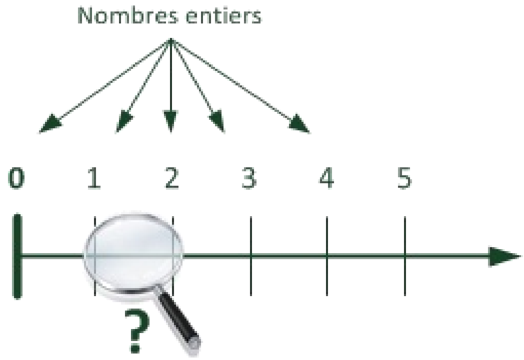
Le nombre écrit en rouge est **12** !

Essayez maintenant, pour vous entraîner, de trouver où se place le nombre 4 sur cette droite, puis le nombre 16.

Il faut absolument que vous soyez à l'aise avec les nombres : vous devez savoir les placer sur une droite comme on vient d'apprendre à le faire !

Les nombres décimaux : avec une virgule !

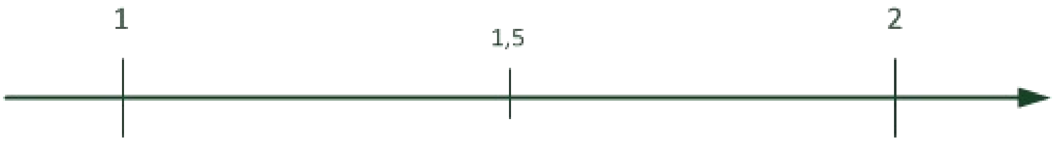
On vous a sûrement appris qu'il n'y a pas que les nombres que nous venons de voir. En effet, les nombres dont nous venons de parler sont tous des **nombres entiers** : 0, 1, 2, 3, 4… Mais est-ce que vous saviez qu'il existait aussi des nombres *entre* ces nombres entiers ? On les appelle les **nombres décimaux**.



Qu’y a-t-il entre les nombres entiers ?

Zoomons entre les nombres

Ces nombres décimaux possèdent une virgule (on parle aussi des fois de « nombres à virgule »). Les nombres décimaux sont situés *entre* les nombres entiers. Par exemple, le nombre 1,5 est placé à mi-chemin entre 1 et 2 :

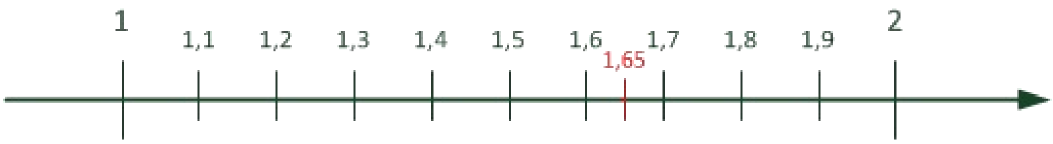


1,5 est à mi-chemin entre 1 et 2

1,5 n’est pas le seul nombre entre 1 et 2 ! Il y a aussi 1,1, 1,2, 1,3, etc.

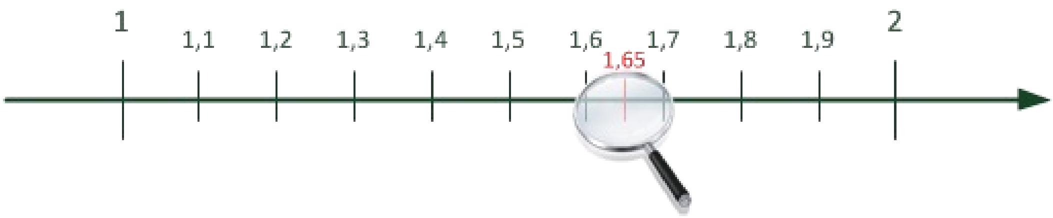
D’autres nombres décimaux entre 1 et 2

Tous ces nombres que vous voyez entre 1 et 2 sont des nombres décimaux. Et vous savez quoi ? Ce ne sont pas les seuls qui existent ! En effet, on peut aussi « découper » à l’intérieur des nombres décimaux pour y trouver d’autres nombres. Par exemple, qu’y a-t-il entre 1,6 et 1,7 ? Pile au milieu entre les deux, il y a 1,65 !



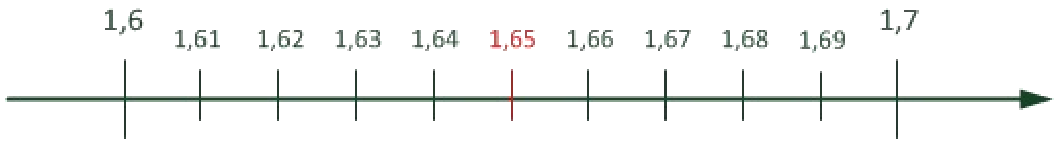
1,65 est à mi-chemin entre 1,6 et 1,7

Et 1,65 n’est pas le seul nombre entre 1,6 et 1,7 ! Si on zoomait là encore, pour voir ?



Encore un p’tit zoom ?

Entre 1,6 et 1,7, on trouve des « sous-nombres » : 1,61, 1,62, 1,63, etc.



Des nombres entre 1,6 et 1,7

Je vais m'arrêter là avec les schémas, je pense que vous avez compris.

On pourrait continuer à zoomer à l'infini comme ça. Ainsi, 1,625 est à mi-chemin entre 1,62 et 1,63. Essayez de le dessiner sur une droite comme je viens de le faire.

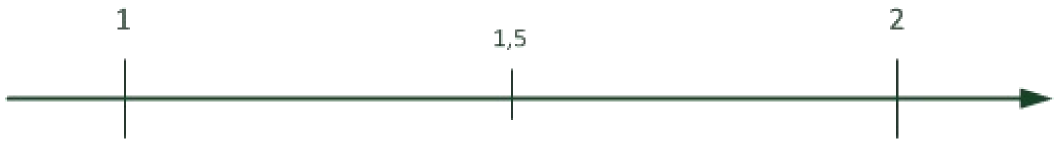
Souvenez-vous que les nombres les plus petits sont à gauche et que les plus grands sont à droite. Qui est le plus grand entre 1,64 et 1,7 ? C'est 1,7 !

Ne vous laissez pas piéger par les nombres décimaux et imaginez-les toujours bien sur une droite. On pourrait croire que 1,64 est plus grand que 1,7 « parce que 64 est plus grand que 7 » mais ça ne marche pas comme ça avec les nombres décimaux. Regardez bien mon schéma précédent : 1,64 est à gauche de 1,7, or les nombres les plus petits sont à gauche, donc 1,64 est plus petit !

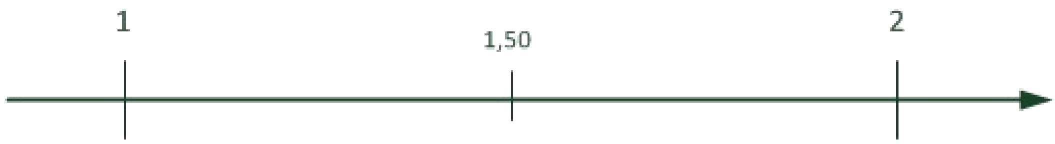
Des 0 de partout !

Il y a une particularité avec les nombres décimaux : on peut rajouter des 0 à la fin (« à leur droite ») sans que cela change le nombre. Je m'explique.

Que l'on écrive 1,5 ou 1,50, c'est le même nombre !



On peut aussi écrire (c'est pareil) :

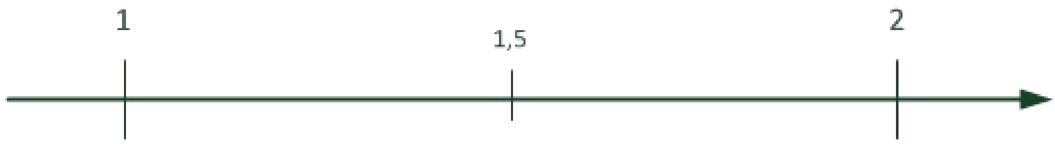


En fait, on peut rajouter autant de 0 qu'on le souhaite :

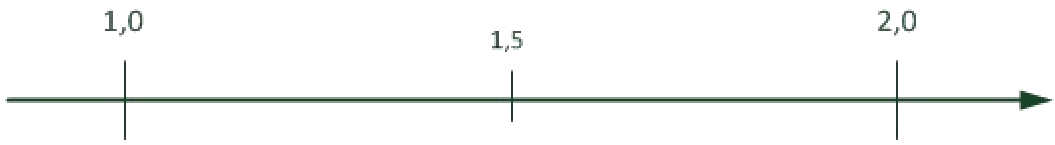
- 1,5
- 1,50
- 1,500
- 1,5000

A chaque fois, c'est le même nombre, ne l'oubliez pas !

Oh, autre chose : est-ce que vous saviez que 1 et 1,0 c'était la même chose ? En fait, on peut rajouter une virgule et des 0 aux nombres entiers :



On peut aussi écrire (c'est pareil) :



Voilà : que l'on écrive 1 ou 1,0 : c'est pareil ! On peut aussi écrire 1,0000 : c'est toujours le nombre 1 !

Si vous retenez ça, vous avez tout compris… et ça va vous être très utile pour la suite.
Vous êtes toujours là ? Bravo ! Vous avez réussi à survivre au premier chapitre, c'est bien.

Le but de ce chapitre était de vous rappeler comment sont organisés les nombres. J'imagine toujours que les nombres sont placés sur une droite, comme je vous l'ai montré dans les schémas de ce chapitre. Quand vous avez un doute, que vous vous demandez si un nombre est plus grand qu'un autre, dessinez une droite et placez les nombres : vous verrez, ça vous aidera beaucoup !

Les opérations

Après ce petit rappel sur les nombres que nous venons de faire, je vous propose... un autre rappel ! Eh oui, la sixième c'est beaucoup de rappels, il faudra vous y faire.
Mais rassurez-vous, vous allez quand même découvrir de nouvelles choses au milieu de tous ces rappels !

Sujet de ce chapitre : les opérations. Souvenez-vous, à l'école primaire, vous avez découvert 4 types d'opérations :

- L'addition
- La soustraction
- La multiplication
- La division

Nous allons faire le point sur ces opérations et découvrir quelques particularités bien pratiques, notamment avec la multiplication et la division. C'est parti !!!

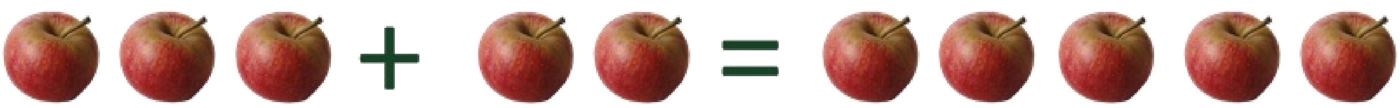
Rappels sur les opérations

Voyons voir rapidement en quoi consistent ces 4 opérations. Pour beaucoup, ce sont des choses que vous savez déjà, mais ces rappels ne pourront pas vous faire de mal ! Lisez-les attentivement, car au milieu il est possible que vous découvriez de nouvelles choses !

L'addition

L'addition est la plus simple des opérations, c'est certainement la première que vous avez découverte.

Prenons un cas très simple que j'aime bien : les pommes (j'espère que vous aimez les pommes, parce qu'avec moi vous allez en bouffer !). Si j'ai 3 pommes à ma gauche et 2 pommes à ma droite, cela signifie que j'ai 5 pommes en tout.



(C'est super simple mais ne rigolez pas trop, les choses peuvent se compliquer vite et il faut rester vigilant)
Donc comme vous l'avez vu, on ajoute les pommes entre elles pour savoir combien on en a en tout. Cela revient à écrire :

$$3 + 2 = 5$$

"3 plus 2 égale 5".

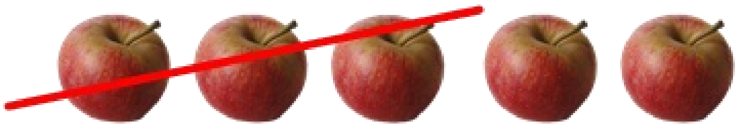
C'est comme ça qu'on écrit l'addition en maths. Ca fait un peu plus sérieux que de travailler avec des pommes quand même.

Il faut savoir que l'addition s'appelle aussi **la somme**. C'est un mot de vocabulaire à connaître. Si on vous demande un jour de faire la somme de 2 nombres, cela signifie que vous devez les additionner.

La soustraction

La soustraction, c'est un peu l'inverse de l'addition : au lieu d'ajouter des pommes, on va en retirer. On dit qu'on fait la **différence** entre deux nombres.

Ainsi, si j'ai 5 pommes et que j'en enlève 3, il en reste... 2, bravo !



En maths, on écrira la soustraction comme ceci :

$5 - 3 = 2$

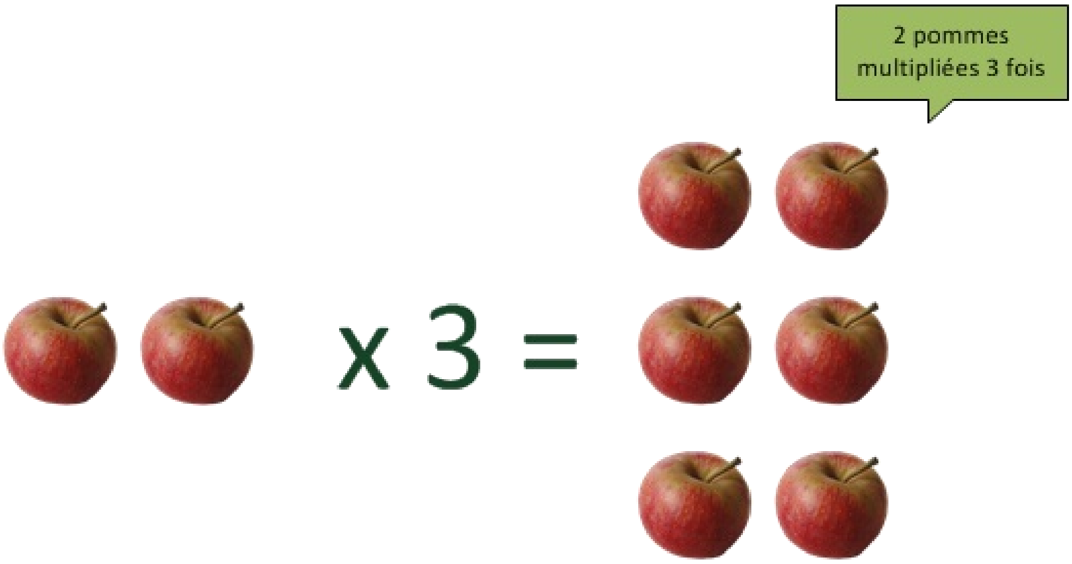
"5 moins 3 égale 2".

La soustraction est aussi appelée **la différence**.

La multiplication

L'addition et la soustraction se ressemblent beaucoup. Par contre, la multiplication est assez différente.

Le principe de la multiplication est de répéter un nombre plusieurs fois, comme si on faisait plusieurs additions. Je reprends mes pommes : si j'ai 2 pommes et que je les multiplie 3 fois, j'obtiens 6 pommes.



$2 \times 3 = 6$

"2 fois 3 égale 6"

On dit qu'on fait un **produit** (c'est un synonyme de "multiplication").

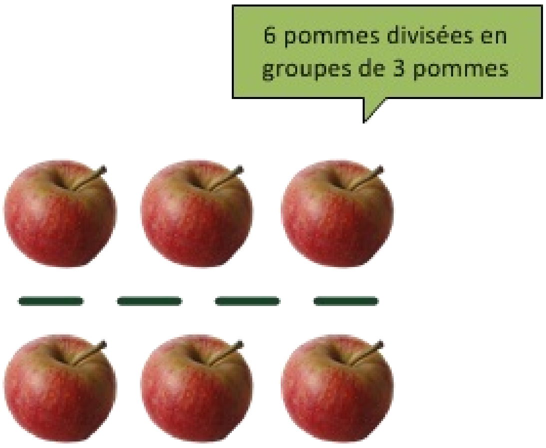
Cela revient à additionner les 2 pommes 3 fois : $2 + 2 + 2 = 6$

La division

La division est l'inverse de la multiplication.

Division sans reste

Reprenons nos 6 pommes : si je veux les découper en groupes de 3 pommes, je dois créer 2 groupes :



On dit qu'on fait la division de 6 par 3.

$6 \div 3 = 2$

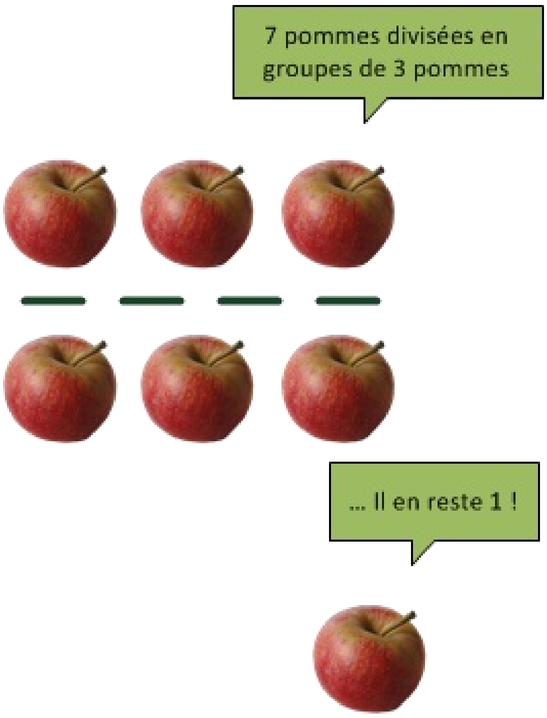
"6 divisé par 3 égale 2". Cela veut dire que, quand on a 6 pommes et qu'on veut en faire des groupes de 3, on doit faire 2 groupes.

Division avec reste

Parfois, il est impossible de découper le nombre en plusieurs parts égales. Par exemple, si on a 7 pommes et qu'on souhaite les découper en groupes de 3, comment fait-on ?

$7 \div 3 = ?$

On ne peut faire que 2 groupes de 3 pommes, mais il va en rester 1 !



Avec 7 pommes, on peut faire 2 groupes de 3, mais il en reste 1.
$7 \div 3 = 2 \text{ (reste } 1)$

Essayez maintenant pour vous entraîner de calculer $10 \div 4$. Vous avez 10 pommes, vous voulez faire des groupes de 4 pommes, combien ça vous fait de groupes et combien il vous reste ?

Secret (cliquez pour afficher)

On peut faire 2 groupes de 4 pommes et il en reste 2.
$10 \div 4 = 2 \text{ (reste } 2)$

Multiplier et diviser par 10, 100, 1000

L'addition et la soustraction sont assez simples en fait. Par contre, on peut faire beaucoup de choses intéressantes avec la multiplication et la division.

Prenons la multiplication. Les calculs sont peut-être un peu difficiles à faire de tête des fois : vous ne pouvez pas calculer de tête 47×217 en moins d'une seconde !
Ou alors si vous y arrivez chapeau, moi j'peux pas

Par contre, certains calculs sont plus simples que d'autres. Il y a des astuces qu'il faut absolument connaître. Tenez, par exemple, vous saviez que multiplier par 10 était vraiment très facile ?

Multiplier par 10 (et par 100, 1000...)

Il n'y a rien de plus simple que de multiplier par 10 : il suffit d'ajouter un zéro à droite du nombre !

Avec des nombres entiers

Prenons le nombre 42 :

42

Si on le multiplie par 10, il suffit d'ajouter un zéro :

420

Ca fait 420 ! On peut donc écrire :

$42 \times 10 = 420$

Et multiplier par 100 ou 1000 est tout aussi facile ! Par exemple, pour calculer 42×1000 : il suffit d'ajouter autant de zéros qu'il y en a dans 1000. Il faut donc ajouter trois zéros !

42000

Ca fait 42000 !

Avec des nombres décimaux

Faire une multiplication par 10 sur un nombre décimal est à peine plus compliqué. Prenons le nombre 13,25 :

13,25

Pour le multiplier par 10, il suffit de déplacer la virgule d'un cran vers la droite !

132,5

Ca fait 132,5 ! On peut donc écrire :

$13,25 \times 10 = 132,5$

Maintenant, arriveriez-vous à calculer 13,25 multiplié par 100 ? Il suffit de décaler la virgule de 2 crans vers la droite (car il y a 2 zéros dans "100"). Ca nous donne :

$13,25 \times 100 = 1325$

Et 13,25 multiplié par 1000 ? Combien ça fait à votre avis ?

On peut pas ! Il n'y a pas assez de chiffres pour décaler la virgule !
... Non, j'ai dit une bêtise ?

Eh oui vous avez dit une bêtise.
On peut *toujours* multiplier un nombre.

Je vous ai dit dans le chapitre précédent qu'il y a en fait une infinité de zéros après la virgule. On ne les écrit pas car ils sont inutiles, mais même si on ne les voit pas ils sont bien là. Ainsi, 13,25 peut aussi bien s'écrire :

13,2500

On peut rajouter encore plus de zéros si vous voulez, peu importe c'est toujours le même nombre :

13,2500000

Pourquoi est-ce qu'on n'écrivait pas les zéros jusqu'ici s'ils étaient là ?

On ne les écrit pas car ils sont inutiles. Ils sont toujours là, mais on ne s'embête pas à les faire apparaître (sauf si on en a besoin, comme là).

Maintenant que vous "voyez" tous les zéros qu'il y a après la virgule, vous n'aurez aucune difficulté à faire 13,25 multiplié par 1000 !

13250,0000

Ca fait 13250,0000
... Et comme tous ces zéros après la virgule sont inutiles, on peut écrire tout simplement 13250.

$13,25 \times 1000 = 13250$

On pourrait multiplier par de plus gros nombres. Essayez par exemple de faire 13,25 multiplié par 100000. C'est facile : comptez le nombre de zéros qu'il y a dans 100000 pour savoir de combien de crans vous devez décaler la virgule vers la droite.

Allons plus loin : tout à l'heure, quand nous avons fait 42×10, je vous avais dit de rajouter un zéro à droite. En fait, 42 pourrait aussi s'écrire 42,00000 (souvenez-vous, tous ces zéros tout à droite de la virgule comptent pour du beurre). 42 et 42,00000 sont équivalents, c'est le même nombre.
Du coup, ça revient à décaler la virgule d'un cran vers la droite. Il suffit d'imaginer que 42 peut aussi s'écrire avec plein de zéros après la virgule.

Diviser par 10 (et par 100, 1000...)

Essayons maintenant la division par 10, 100, 1000 (et plus si affinités). Vous allez voir, ça va aller très vite et ce sera très simple si vous avez bien compris ce qu'on vient de faire avec la multiplication.

En effet, la division c'est... l'inverse ! Il suffit de décaler la virgule vers la gauche.

Avec un nombre décimal

Prenons le nombre 13,4 :

13,4

Si on le divise par 10, on déplace la virgule d'un cran vers la gauche, ce qui nous fait :

1,34

$13,4 \div 10 = 1,34$

... Et si on divisait par 100 maintenant ? Pour cela, il faut savoir qu'il y a en fait aussi... plein de zéros invisibles à gauche de tous les nombres. 13,4 pourrait donc aussi s'écrire :

00013,4

Eh oui, 13,4 et 00013,4 c'est exactement pareil, c'est le même nombre ! En général, on n'écrit pas les zéros à gauche (parce que ça sert à rien) mais ils sont bien toujours là, masqués, tapis dans l'ombre !

On peut donc maintenant facilement faire une division par 100 et décaler la virgule de 2 crans vers la gauche :

000,134

$13,4 \div 100 = 0,134$

Et par 1000 :

00,0134

$13,4 \div 100 = 0,0134$

Avec un nombre entier

Reprenons le nombre 42 que nous avons vu tout à l'heure :

42

Si on essayait de le diviser par 10, 100 ou 1000 ?

On peut pas ! Il n'y a pas de virgule à décaler dans 42 !

Rahlala vous commencez à m'embêter à dire que c'est pas possible !

Qu'est-ce que je vous ai dit ? Il y a toujours des zéros à gauche et à droite du nombre. Même la virgule est là, à droite du nombre entier, mais d'habitude on ne l'écrit pas car elle ne sert à rien. 42 pourrait donc aussi s'écrire :

000042,0000

Maintenant que vous voyez la virgule et tous ces zéros, vous n'aurez aucune difficulté à faire ces opérations :

$42 \div 10 = 4,2$
$42 \div 100 = 0,42$
$42 \div 1000 = 0,042$

Multiplier par 0,1 revient à diviser par 10 !

Il y a un "truc" à savoir : on peut facilement faire une multiplication par 0,1 (et par 0,01 ; 0,001 ; 0,0001...).
En fait, multiplier par 0,1 revient... à faire une division par 10 ! Vous avez seulement besoin de savoir que ces opérations sont équivalentes.

Pourquoi est-ce que c'est la même chose ? Je ne vois pas comment ça se fait : quand on multiplie un nombre par un autre, on obtient toujours un nombre plus grand !

C'est vrai qu'en général, avec la multiplication, vous avez eu l'habitude de faire "grossir" les nombres. Ainsi, 829×21 donne un nombre beaucoup plus grand (17409 pour être précis).

Mais une multiplication par un nombre compris entre 0 et 1 revient à faire réduire le nombre, c'est équivalent à une division. Par exemple, multiplier par 0,5 permet d'obtenir la moitié. $42 \times 0,5 = 21$! C'est exactement comme une division par 2 :

$42 \div 2 = 21$.

Oulahlah c'est compliqué, j'ai besoin de comprendre tout ça moi ?

Non rassurez-vous, vous aurez le temps de bien comprendre comment tout ça fonctionne plus tard, notamment lorsque vous serez à l'aise avec les fractions. Pour le moment, je vous demande juste de retenir que :

- Multiplier par 0,1 revient à diviser par 10
- Multiplier par 0,01 revient à diviser par 100
- Multiplier par 0,001 revient à diviser par 1000
- Multiplier par 0,0001 revient à diviser par 10000
- etc.

Petite astuce : pour savoir par combien il faut diviser, il suffit de lire le nombre à l'envers, de droite à gauche, sans faire attention à la virgule. Par exemple, 0,01, si vous le lisez de droite à gauche sans prendre en compte la virgule, cela fait le nombre 100 ! Donc multiplier par 0,01 revient à diviser par 100 !

On peut donc facilement faire les calculs suivants :

$792 \times 0,1 = 79,2$
$91 \times 0,001 = 0,091$
$4,8 \times 0,01 = 0,048$

Retenez bien comment fonctionnent ces multiplications, vous en aurez besoin ! Il suffit simplement de faire la division correspondante.

Les multiples et diviseurs

Petits rappels sur les multiples

Si je vous dis "multiple", vous vous souvenez ce que c'est ? Vous avez dû apprendre ça plus tôt à l'école.

Par exemple, 12 est un multiple de 4, car on peut multiplier 4 par un nombre pour retrouver 12 ($4 \times 3 = 12$). Prenons quelques autres exemples :

- 15 est un multiple de 5 (car $5 \times 3 = 15$)
- 18 est un multiple de 3 (car $3 \times 6 = 18$)
- 16 est un multiple de 4 (car $4 \times 4 = 16$)

J'espère que vous connaissez bien vos tables de multiplication car maintenant ça devient indispensable.

Bien sûr, il y a plein de cas où ce n'est pas vrai, où le nombre n'est pas un multiple. Par exemple :

- 14 n'est pas un multiple de 5
  $5 \times 2 = 10$ et $5 \times 3 = 15$, mais aucune multiplication de 5 par un autre nombre ne permet de tomber sur 14 !
- 10 n'est pas un multiple de 3
  $3 \times 3 = 9$ et $3 \times 4 = 12$, mais vous pouvez toujours courir pour trouver un autre nombre qui fasse 10 si on le multiplie par 3 !
- 5 n'est pas un multiple de 2
  $2 \times 2 = 4$ et $2 \times 3 = 6$, mais ça ne fait jamais 5

Les diviseurs

Les diviseurs sont un peu l'inverse des multiples. Un diviseur est un nombre qui peut en diviser un autre.

3 est un diviseur de 6, car on peut découper 6 en parts de 3 (ça fait 2 parts de 3). $6 \div 3 = 2$.

Essayons avec d'autres nombres :

- 4 est un diviseur de 20, car $20 \div 4 = 5$
- 6 est un diviseur de 24, car $24 \div 6 = 4$
- Par contre, 2 n'est pas diviseur de 5. Vous ne pouvez pas découper 5 en parts de 2, car il y a un reste (il reste 1).

Reconnaître les diviseurs nécessite là aussi de bien connaître ses tables de multiplications. En effet, quand on me demande "Est-ce que 4 est un diviseur de 20 ?", j'essaie de faire les multiplications dans ma tête :

$4 \times 3 = 12$
$4 \times 4 = 16$
$4 \times 5 = 20$
Bingo !

Par contre si on me demande si 2 est un diviseur de 5 :

$2 \times 1 = 2$
$2 \times 2 = 4$
$2 \times 3 = 6$

... Ah ben zut, j'ai dépassé 5. Ca veut dire que 2 n'est pas un diviseur de 5.

Il y a plusieurs astuces à connaître pour savoir si un nombre est divisible par un autre. Par exemple, je peux vous annoncer là comme ça sans réfléchir que 133 n'est pas divisible par 5 !

Ouah ! Comment tu fais ?

Hé hé, vous croyez que je vais vous le dire...

... bon d'accord, mais c'est bien parce que c'est vous.

Divisibilités "faciles" : par 2, 5 et 10

On peut facilement reconnaître si un nombre est divisible par 2, par 5 ou par 10. Il faut juste connaître quelques "trucs", et ces trucs vous seront vraiment utiles par la suite donc retenez-les bien !

Divisibilité par 2

Il est très facile de savoir si un nombre est divisible par 2 : il faut qu'il soit pair. En effet, quand on fait des multiplications par 2, le nombre qui en ressort est toujours pair.

Allez, je vous fais une petite série de multiplications par 2 pour vous convaincre :

$2 \times 1 = 2$
$2 \times 2 = 4$
$2 \times 3 = 6$
$2 \times 4 = 8$
$2 \times 5 = 10$
$2 \times 6 = 12$
$2 \times 7 = 14$

Observez les nombres qui ressortent de la multiplication : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14... Ce sont tous des nombres pairs ! Le dernier chiffre, tout à droite, est soit 0, soit 2, soit 4, soit 6, soit 8.

Grâce à ça, vous pouvez facilement dire en une fraction de seconde si n'importe quel nombre est divisible par 2 ! Par exemple, prenez le nombre 2849108 : il est divisible par 2 car il est pair (son dernier chiffre est 8) !

Quelques exemples :

- 41894 est divisible par 2 (car il est pair, il finit par le chiffre 4)
- 9923 n'est pas divisible par 2 (il est impair, il finit par le chiffre 3)
- 90197 n'est pas divisible par 2 (il est impair, il finit par le chiffre 7)
- 21332 est divisible par 2 (il est pair, il finit par le chiffre 2)

Facile, non ?

Divisibilité par 5

La divisibilité par 5 est très facile à reconnaître : le nombre doit se terminer par le chiffre 5 ou le chiffre 0 !

Regardez la table de multiplication de 5 :

$$\begin{array}{l} 5 \times 1 = 5 \\ 5 \times 2 = 10 \\ 5 \times 3 = 15 \\ 5 \times 4 = 20 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 5 \times 6 = 30 \\ 5 \times 7 = 35 \end{array}$$

Comme vous pouvez le voir, ces nombres (5, 10, 15, 20...) qui sont des multiples de 5 se terminent tous par 5 ou 0. Pour savoir si un nombre est divisible par 5, il suffit donc de vérifier si son dernier chiffre est un 5 ou un 0 !

- 175 est divisible par 5, car son dernier chiffre est un 5
- 2780 est divisible par 5, car son dernier chiffre est un 0
- 67 n'est pas divisible par 5, car son dernier chiffre n'est ni 0 ni 5
- 715 est divisible par 5, car son dernier chiffre est un 5

Divisibilité par 10

Il n'y a rien de plus facile que de savoir si un nombre est divisible par 10 ! Il suffit tout simplement que ce nombre se termine par un 0.

En effet, tous les multiples de 10 finissent par un 0 :

$$\begin{array}{l} 10 \times 1 = 10 \\ 10 \times 2 = 20 \\ 10 \times 3 = 30 \\ 10 \times 4 = 40 \\ 10 \times 5 = 50 \\ 10 \times 6 = 60 \\ 10 \times 7 = 70 \end{array}$$

Donc le nombre 40 est divisible par 10 car il se termine par un 0.

On peut voir quelques exemples si vous voulez :

- 270 est divisible par 10 car il se termine par un 0
- 800 est divisible par 10 car il se termine par un 0
- 641 n'est pas divisible par 10 car il ne se termine pas par un 0
- 890 est divisible par 10 car il se termine par un 0

Divisibilité plus complexes : par 3, 4 et 9

Pour savoir si un nombre est divisible par 3, 4 ou 9, il faut un peu plus réfléchir... Mais ce n'est pas très compliqué non plus !

Divisibilité par 3

Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Quoi ???

Je m'explique avec un exemple. Prenez le nombre 642. Comme vous le savez, il est composé de trois chiffres : 6, 4 et 2. Faites l'addition de ces chiffres :

$$6 + 4 + 2 = 12$$

Est-ce que 12 est divisible par 3 ? Oui ! Car $12 \div 3 = 4$

Cette technique est surprenante mais elle marche à tous les coups ! Essayons sur quelques exemples :

- 3636 est divisible par 3, car la somme de ses chiffres ($3 + 6 + 3 + 6 = 18$) est divisible par 3. En effet, 18 est divisible par 3.
- 47 n'est pas divisible par 3, car la somme de ses chiffres ($4 + 7 = 11$) n'est pas divisible par 3. En effet, 11 n'est pas divisible par 3.
- 223 n'est pas divisible par 3, car la somme de ses chiffres ($2 + 2 + 3 = 7$) n'est pas divisible par 3. En effet, 7 n'est pas divisible par 3.
- 444 est divisible par 3, car la somme de ses chiffres ($4 + 4 + 4 = 12$) est divisible par 3. En effet, 12 est divisible par 3.

Divisibilité par 4

Pour savoir si un nombre est divisible par 4, il y a une autre astuce. Il faut prendre ses deux derniers chiffres (à droite) et voir si ce nombre est divisible par 4.
Prenons par exemple le nombre 7312 :

7312

Si on analyse ses deux derniers chiffres (en rouge), on voit que ça donne le nombre 12. Est-ce que 12 est divisible par 4 ? Oui, car $12 \div 4 = 3$! Donc 7312 est divisible par 4 !

- 420 est divisible par 4, car ses deux deniers chiffres (20) forment un nombre divisible par 4. En effet, 20 est divisible par 4, donc 420 est divisible par 4.
- 4702 n'est pas divisible par 4, car ses deux deniers chiffres (02) forment un nombre qui n'est pas divisible par 4. En effet, 2 n'est pas divisible par 4.
- 325 n'est pas divisible par 4, car ses deux deniers chiffres (25) forment un nombre qui n'est pas divisible par 4. En effet, 25 n'est pas divisible par 4.
- 340 est divisible par 4, car ses deux deniers chiffres (40) forment un nombre divisible par 4. En effet, 40 est divisible par 4,

donc 340 est divisible par 4.

Divisibilité par 9

Enfin, la divisibilité par 9 fonctionne comme la divisibilité par 3 : il suffit d'additionner tous les chiffres pour vérifier si leur somme est divisible par 9 !

- 333 est divisible par 9, car la somme de ses chiffres ($3+3+3=9$) est divisible par 9. En effet, 9 est divisible par 9.
- 879 n'est pas divisible par 9, car la somme de ses chiffres ($8+7+9=24$) n'est pas divisible par 9. En effet, 24 n'est pas divisible par 9.
- 5547 n'est pas divisible par 9, car la somme de ses chiffres ($5+5+4+7=21$) n'est pas divisible par 9. En effet, 21 n'est pas divisible par 9.
- 1980 est divisible par 9, car la somme de ses chiffres ($1+9+8+0=18$) est divisible par 9. En effet, 18 est divisible par 9.

Pfiou ! Nous avons fait un bon rappel sur les opérations et appris quelques "trucs" pour savoir multiplier et divisier par 10, 100, 1000...
Nous avons aussi découvert comment savoir si un nombre était divisible par un autre. Retenez bien tous ces trucs, ça n'a l'air de servir de rien mais ça vous permettra d'être beaucoup plus efficaces dans vos calculs après !

Les fractions (introduction)

Ah, les fractions !
Si on m'avait dit dès le début à quel point elles étaient importantes pour la suite, j'aurais peut-être été plus attentif lorsqu'on me les a expliquées la première fois en cours.

Une fraction ressemble à ceci :

$$\frac{5}{2}$$

Deux nombres empilés les uns sur les autres.
Si vous n'avez jamais vu de fraction et que vous ne savez pas ce que c'est, pas de panique : ici, nous allons vraiment découvrir toutes les bases des fractions !

Introduction : fractions et parts de gâteaux

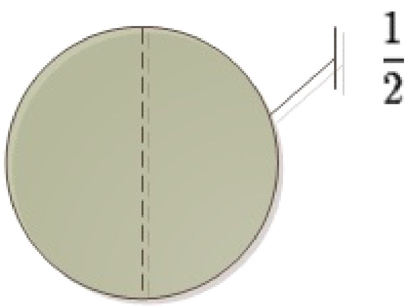
Vous savez peut-être déjà que les fractions représentent des *parts* de quelque chose. On a tendance à utiliser comme exemple un gâteau (miam !) que l'on découpe en plusieurs parts :

Parce que je ne suis pas très bon en dessin (et c'est rien de le dire), je vous propose à partir d'ici de représenter le gâteau avec ce schéma :

La totalité du gâteau correspond au nombre 1. On a donc 1 gâteau sous les yeux.

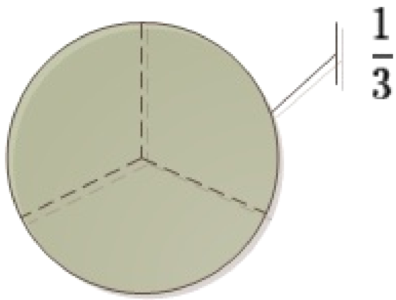
Découpons le gâteau

Si on découpe le gâteau en 2 :



Chaque part du gâteau représente $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire une moitié. On dit aussi "un demi".

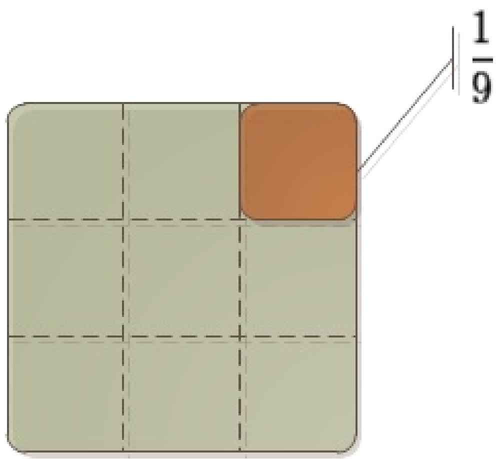
Si je le découpe en 3 :



Chaque part représente $\frac{1}{3}$ ("un tiers") du gâteau.

Et ainsi de suite. Les fractions nous permettent ainsi de représenter des parts.

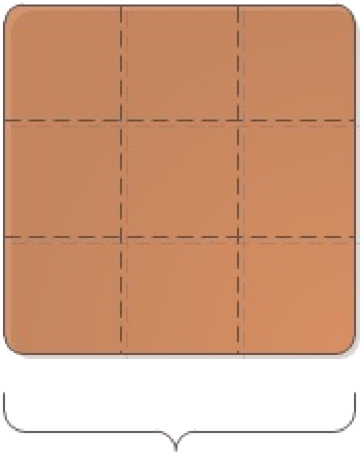
Bien entendu, le gâteau peut très bien être carré.



Ici, vous avez un gâteau coupé en 9. La part coloriée représente... $\frac{1}{9}$ du gâteau, bravo !

Plus de parts, je veux plus de parts !

Si vous prenez toutes les parts du gâteau, qu'est-ce que ça donne ?

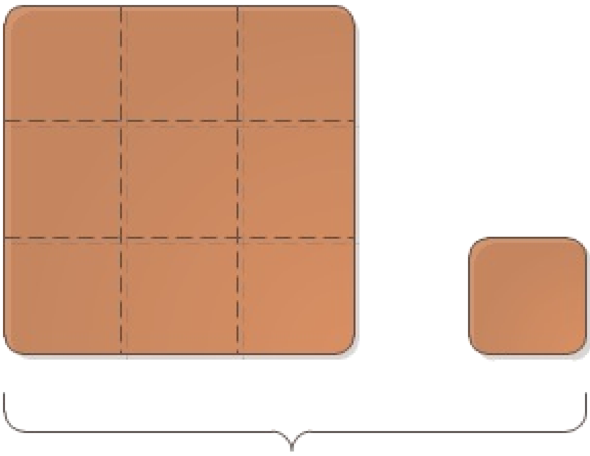


$$\frac{9}{9}$$

Vous avez $\frac{9}{9}$ du gâteau ! Cela correspond à la totalité du gâteau.

D'ailleurs $\frac{9}{9}$ correspond au nombre 1. On peut écrire $\frac{9}{9} = 1$

Imaginons qu'il y ait un second gâteau à côté. En plus de manger le premier gâteau en entier, vous prenez une petite part ($\frac{1}{9}$) d'un second gâteau. Combien de parts avez-vous mangé ?



$$\frac{10}{9}$$

... Vous avez mangé $\frac{10}{9}$ ("dix neuvièmes") de gâteau ! Vous avez $\frac{9}{9}$ d'un côté et une petite part ($\frac{1}{9}$) de l'autre, ce qui fait en tout $\frac{10}{9}$!

Allez, assez mangé de gâteau, l'heure du goûter est terminée, passons maintenant aux choses sérieuses.
Nous allons décortiquer des fractions et comprendre à quoi elle correspondent vraiment.

Les fractions sont des nombres

Qu'est-ce que c'est, une fraction ? Il y a plein de façons de vous présenter les fractions, car elles sont beaucoup utilisées en maths. Moi, je vous propose tout simplement de commencer par en regarder une :

$$\frac{5}{2}$$

Voilà votre première fraction.
On peut la lire "5 demis" ou bien "5 sur 2".

Une fraction est un nombre. Oui oui, ce que vous voyez là représente un nombre.

Quoi ? Moi je vois *deux* nombres : 5 et 2 !

Oui, mais vous avez remarqué qu'ils sont écrits d'une façon un peu bizarre non ? Le 5 est au-dessus du 2, séparé par une barre.

Vocabulaire : numérateur et dénominateur

Pour construire une fraction, on a besoin de deux éléments :

- Le numérateur, que l'on place au-dessus de la barre
- Le dénominateur, que l'on place en-dessous de la barre

$$\frac{\text{numerateur}}{\text{denominateur}}$$

Petite astuce pour s'en souvenir : le **numérateur** est en haut car il commence comme le mot **nuage**... et les nuages sont en haut, forcément.
Alors n'oubliez pas : numérateur = nuage = en haut ! Le dénominateur est donc en bas.

Dans le cas de $\frac{5}{2}$:

- 5 est le **numérateur**
- 2 est le **dénominateur**

Je vous conseille de bien retenir ces mots de vocabulaire, vous allez en avoir besoin ! N'hésitez pas à relire ce passage au besoin si vous avez oublié lequel est le numérateur et lequel est le dénominateur.

Mais au fait, qu'est-ce qu'elle veut dire, cette barre ?

Une fraction est une division

La barre que vous voyez au milieu est en fait une sorte de signe "divisé par". $\frac{5}{2}$, c'est en fait "5 divisé par 2". C'est comme si on écrivait $5 \div 2$.

Alors, une fraction c'est une opération en fait ?

Oui, on peut le voir comme ça. Mais surtout, comme je vous le disais un peu plus tôt : **une fraction, c'est un nombre**. $\frac{5}{2}$ représente un **nombre**.

Ce nombre, c'est le résultat de la division. $\frac{5}{2}$ est le résultat de 5 divisé par 2.

Donc, si je calcule $5 \div 2$ à la calculatrice... Attends je calcule... Ca fait 2,5 ! Donc, $\frac{5}{2}$ c'est en fait le nombre 2,5 non ?

Oui, tout à fait, vous avez compris !
Si vous calculez la fraction (il suffit de faire la division à la calculatrice par exemple), vous obtenez le nombre que la fraction représente.

On peut donc écrire :

$$\frac{5}{2} = 2,5$$

Comme une fraction est une division, le dénominateur (nombre en bas) ne peut pas être 0 ! En effet, comme vous le savez peut-être, *il est impossible de diviser par 0*.
Vous ne verrez jamais de fraction comme $\frac{5}{0}$!

Un autre exemple

Essayons avec une autre fraction :

$$\frac{10}{5}$$

Cette fraction se lit "10 cinquièmes" ou bien "10 sur 5" (le plus simple en général, c'est de dire "10 sur 5").

Cette fraction représente un nombre elle aussi. Pouvez-vous deviner lequel ?
...
Non, ne sortez pas la calculatrice pour une division aussi simple voyons ! Vous devriez savoir que $10 \div 5 = 2$.

On peut donc écrire :

$$\frac{10}{5} = 2$$

Pourquoi les fractions sont utiles : valeur exacte et valeur approchée

A quoi ça sert ? Je ne vois pas l'intérêt des fractions ! Pourquoi s'embêter à écrire $\frac{10}{5}$ au lieu de 2 tout simplement ?

Dans des cas comme $\frac{10}{5}$ il est plus simple d'écrire 2, c'est vrai.
En général, quand la fraction correspond à un nombre entier (sans virgule) on ne s'embête pas avec la fraction : on la remplace par le nombre (ici 2).

Par contre, il y a d'autres fractions plus délicates. Tenez, par exemple, $\frac{5}{3}$. Pourriez-vous me dire quel nombre ça représente ?

Prenez la calculatrice, et allez-y, calculez ! Vous allez voir que c'est un nombre décimal avec beauuuuucoup de chiffres après la virgule. La calculatrice devrait vous donner quelque chose comme $1,66666666666666$... En fait, elle est obligée de "couper" au bout d'un certain nombre de chiffres après la virgule car ce serait trop long de tous les écrire : il y en a une infinité.

Il existe des nombres qu'on ne peut pas écrire à la main car ils sont trop longs, trop compliqués. C'est le cas justement de $\frac{5}{3}$, et c'est pour ça qu'on préfère les écrire sous forme de fractions ! Avouez qu'il est plus simple d'écrire $\frac{5}{3}$ plutôt que $1,66666666666666$!

- $\frac{5}{3}$ est une **valeur exacte** : cette fraction représente parfaitement le nombre $1,66666666666666$ qu'on a vu, sans qu'il soit nécessaire d'écrire une infinité de "6".
- $1,66666666666666$, en revanche, est une **valeur approchée** parce que ce n'est pas *exactement* le nombre. Pour être exact, il faudrait écrire une *infinité de 6* ! On préfère utiliser la fraction qui représente ce nombre de façon plus... courte à écrire.

En mathématiques, on utilise le signe $\approx$ (qui signifie "*est approximativement égal à*") pour écrire :

$$\frac{5}{3} \approx 1,66666666666666$$

Placer une fraction sur une droite

Il y a plusieurs façons de situer un nombre sur une droite. J'ai l'habitude de leur donner des noms pour les reconnaître :

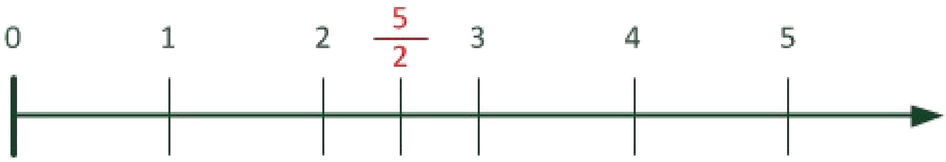
- Le **calcul exact** de la division
- Le **découpage** par le dénominateur
- La **séparation** des éléments de la fraction

On vous demandera souvent de savoir placer une fraction sur une droite. Je vais donc vous présenter toutes ces techniques à connaître pour savoir placer une fraction ! Elles sont toutes valables, mais certaines seront plus faciles que d'autres à utiliser selon les cas.

Le calcul exact de la division

C'est la technique la plus facile, mais elle ne fonctionne bien que lorsque la division tombe juste. Si la fraction correspond à un nombre avec une infinité de chiffres après la virgules (comme $1,66666666666666$), il vaudra mieux utiliser une des deux autres techniques que je vous expliquerai plus loin.

Prenons une fraction simple comme $\frac{5}{2}$. On sait que $\frac{5}{2} = 5 \div 2 = 2,5$. On peut donc placer la fraction $\frac{5}{2}$ à l'endroit où se trouve le nombre $2,5$:



Facile, non ?

Comme on a calculé la valeur exacte de la fraction, il a été facile de trouver où placer $\frac{5}{2}$. Le nombre 2,5 se trouve en effet à mi-chemin entre 2 et 3.

Le découpage par le dénominateur

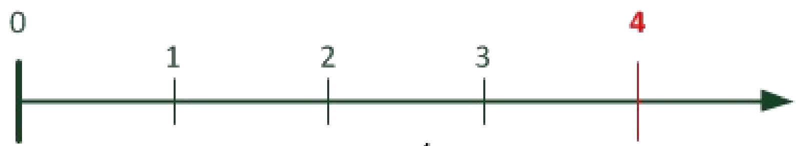
La technique du calcul de la division qu'on vient de voir est probablement la plus facile. Mais parfois, la division ne tombe pas juste et il est préférable d'utiliser une autre technique.

Celle que j'appelle du "découpage" n'est pas bien compliquée. Prenons une fraction qui ne correspond pas à un nombre exact : $\frac{4}{3}$ (qui correspond en fait au nombre 1,333333333333333 avec une infinité de 3 !). Voici les étapes que je vous propose de suivre pour trouver où placer la fraction :

1. On repère le nombre du numérateur sur la droite (ici 4).
2. On le découpe en autant de parties que le dénominateur (ici 3).
3. On place la fraction au niveau de la première découpe (la plus à gauche sur la fraction).

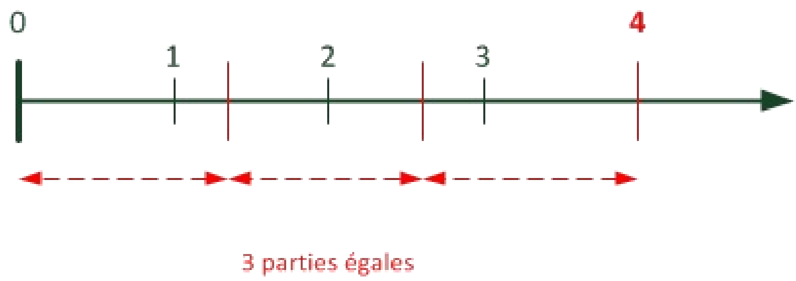
Essayons d'appliquer cette technique pour placer la fraction $\frac{4}{3}$.

Etape 1 : placer le numérateur



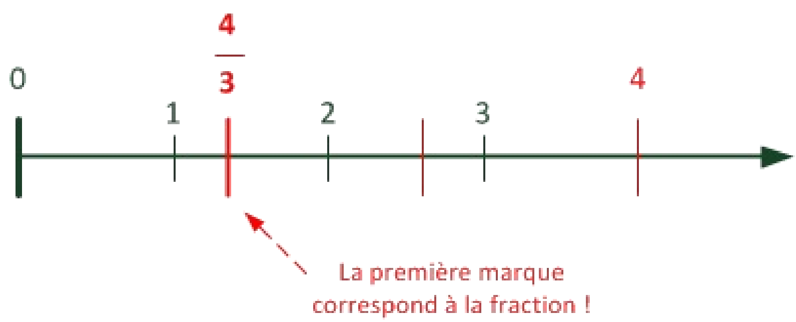
On place le numérateur de $\frac{4}{3}$ (c'est 4) sur une droite

Etape 2 : découper en plusieurs parties



On découpe en autant de parties que le dénominateur de $\frac{4}{3}$ (ici 3) et on place des marqueurs

Etape 3 : on place la fraction sur la première marque de découpe !



La fraction $\frac{4}{3}$ se trouve au niveau du premier marqueur !

La séparation des éléments de la fraction

Il existe une autre technique pour savoir où placer une fraction sur une droite. Reprenons notre fraction $\frac{4}{3}$ (que l'on peut prononcer "4 tiers") : c'est "4 fois un tiers".

Notre fraction peut donc se découper comme ceci :

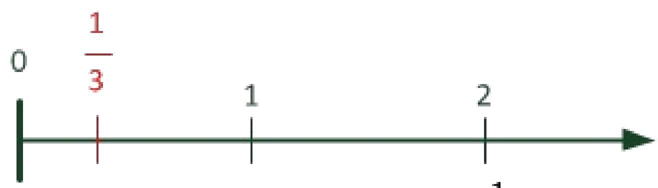
$$\frac{4}{3} = 4 \times \frac{1}{3}$$

On a deux éléments : une fraction plus simple ($\frac{1}{3}$) et un facteur multiplicateur (4).

Sachant cela, on peut utiliser cette technique pour placer la fraction sur une droite :

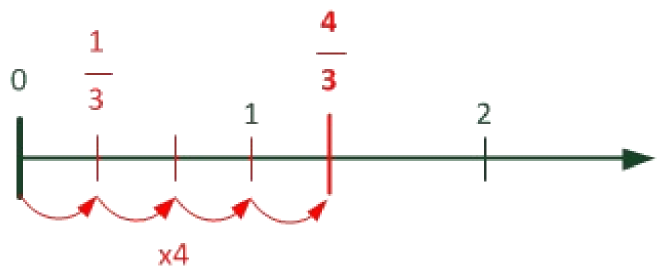
1. Placer la fraction ($\frac{1}{3}$) sur la droite
2. Multiplier par 4 (faire "4 sauts de 1 tiers") pour trouver la position de $\frac{4}{3}$

Etape 1 : placer la fraction



On place la fraction "simple" $\frac{1}{3}$

Etape 2 : multiplier la fraction



On la multiplie par 4 pour trouver $\frac{4}{3}$

Fractions et multiplications

On peut faire toutes sortes d'opérations avec les fractions. Ici, nous allons découvrir comment multiplier une fraction avec un autre nombre.

Multiplier une fraction avec un nombre

Si on essayait de multiplier une fraction avec un nombre ? Après tout, une fraction est un nombre comme je vous l'ai dit, donc ça revient à multiplier deux nombres entre eux !

Essayons de multiplier $\frac{5}{2}$ par 3 :

$\frac{5}{2} \times 3$

Comment calculeriez-vous cela ?

Ce n'est pas difficile en fait : il faut multiplier avec le numérateur (le nombre en haut de la fraction !). On peut faire "monter" le 3 sur la fraction, comme ceci :

$\frac{5 \times 3}{2}$

Il est facile ensuite de calculer $5 \times 3 = 15$ et d'obtenir le résultat. Voici donc les étapes du calcul à retenir :

$$\frac{5}{2} \times 3 = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2}$$

Pour multiplier la fraction par un nombre, on peut faire "monter" ce nombre sur la fraction et calculer l'opération

Cela fait donc $\frac{15}{2}$!

Attention : l'astuce que je viens de vous montrer, qui consiste à faire "monter" le nombre sur la fraction, ne fonctionne qu'avec la multiplication. Vous ne pouvez pas faire cela avec l'addition ou la soustraction !

Si vous voyez $\frac{5}{2} + 3$, n'essayez pas de faire monter le nombre 3 sur la fraction, car c'est une addition !

Multiplier une fraction par un nombre égal au dénominateur

C'est un cas un peu particulier. Nous venons de faire le calcul $\frac{5}{2} \times 3$, mais imaginons qu'au lieu de multiplier par 3 on multiplie par 2... Eh bien je peux écrire *sans même réfléchir ni calculer*, que :

$\frac{5}{2} \times 2 = 5$

En effet, si on multiplie une fraction par un nombre égal au dénominateur (le nombre en bas), alors le résultat correspond au numérateur, le nombre en haut de la fraction !

C'est une astuce qui permet de calculer super rapidement la multiplication. Voici d'autres exemples sur le même principe :

$\frac{7}{3} \times 3 = 7$

$\frac{17}{5} \times 5 = 17$

$\frac{3}{10} \times 10 = 3$

Vous voyez, le calcul est super rapide à faire ! Si on multiplie la fraction par le dénominateur, on trouve très vite le résultat !

Secret (cliquez pour afficher)

Et ça marche même si les nombres ont l'air très grands !

$$\frac{73641}{2378} \times 2378 = 73641$$

... Et ça vous pouvez le calculer sans avoir besoin de calculatrice grâce à cette astuce.

Bien entendu, cela ne fonctionne pas si c'est un autre nombre. Dans ce cas, il faut effectuer la multiplication comme je vous l'ai montré plus tôt :

$$\frac{7}{3} \times 8 = \frac{7 \times 8}{3} = \frac{56}{3}$$

Des fractions "différentes" peuvent être égales !

Regardez bien ces deux fractions :

$$\frac{6}{4} \text{ et } \frac{12}{8}$$

A priori, tout les oppose, ce ne sont pas les mêmes fractions. En effet, leurs numérateurs et dénominateurs sont différents.

... Et pourtant, si je vous disais que *ces fractions correspondent au même nombre* ? Que ces fractions sont en fait égales ?

Deux fractions différentes... égales ?

Quoi ? Ces deux fractions sont égales ? On dirait pas !
Prouve-le moi.

Ok ok. Comment je pourrais vous prouver que c'est le même nombre... Ah je sais !
Comme je vous l'ai dit, on peut voir les fractions comme des divisions. Si on essayait de calculer le nombre qui se cache derrière ces deux fractions ?

$$\frac{6}{4} = 6 \div 4 = 1,5$$

$$\frac{12}{8} = 12 \div 8 = 1,5$$

Ces deux fractions valent toutes les deux 1,5 ! Donc ces fractions sont égales, et on peut écrire :

$$\frac{6}{4} = \frac{12}{8}$$

D'accord d'accord, c'est le même nombre qui se cache derrière ces deux fractions. Mais comment tu fais pour savoir aussi facilement que les fractions sont égales ? Je ne vais quand même pas calculer la division à chaque fois !

Oh, c'est en fait assez facile à voir, pas besoin de baguette magique.

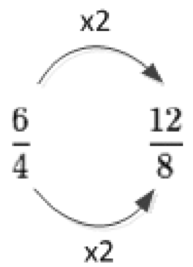
Comparez les numérateurs et les dénominateurs entre eux :

- 6 et 12
- 4 et 8

Vous ne voyez rien de spécial ? Eh oui :

- 12 est un multiple de 6
- 8 est un multiple de 4

Il suffit de multiplier par 2 !



Comme les numérateurs et dénominateurs sont tous les deux des multiples, on peut dire que les fractions sont égales !

Retenez donc : si vous multipliez le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre, vous obtenez une fraction égale !

Vous devez pouvoir multiplier par le même nombre. Si vous devez multiplier les numérateurs (en haut) par 2 et les dénominateurs (en bas) par 3, cela ne marche pas, les fractions ne sont pas égales.
Il faut vraiment utiliser le même nombre pour multiplier les numérateurs et dénominateurs.
Exemple : $\frac{4}{10}$ et $\frac{8}{30}$. En haut, il suffit de multiplier par 2 ($4 \times 2 = 8$)... mais en bas, il faut multiplier par 3 ($10 \times 3 = 30$) ! Dans un cas comme ça, ça ne marche pas, les fractions ne sont pas égales : $\frac{4}{10} \neq \frac{8}{30}$ ("4 dixièmes est différent de 8 trentièmes"). Il faut pouvoir faire la *même multiplication* en haut et en bas, sinon les fractions ne sont pas égales.

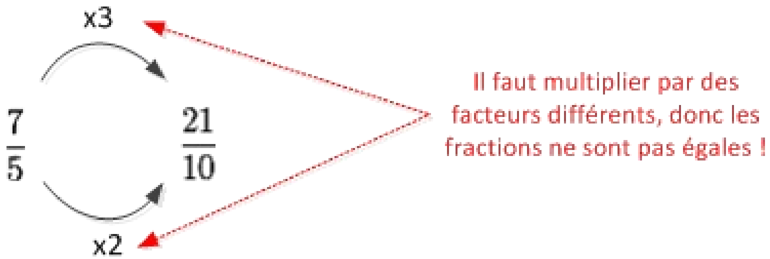
D'autres exemples

Maintenant, essayons de regarder ensemble quelques autres exemples pour être sûr que vous avez bien compris le principe.

- $\frac{8}{3}$ et $\frac{16}{6}$: **oui, ces fractions sont égales**. Là encore, c'est facile : vous pouvez multiplier le numérateur et le dénominateur par 2 pour retrouver la seconde fraction. $8 \times 2 = 16$ et $3 \times 2 = 6$. On a donc $\frac{8}{3} = \frac{16}{6}$
- $\frac{8}{3}$ et $\frac{32}{12}$: **oui, ces fractions sont égales**. Au lieu de multiplier les numérateurs et dénominateurs par 2, il faut cette fois les multiplier par 4 pour retrouver l'autre fraction. $8 \times 4 = 32$ et $3 \times 4 = 12$. On a donc $\frac{8}{3} = \frac{32}{12}$. Comme quoi ça sert de connaître ses tables de multiplication !
- $\frac{7}{5}$ et $\frac{3}{11}$: **non, ces fractions ne sont pas égales**. Il est impossible de trouver un même nombre pour multiplier le numérateur et le dénominateur de ces deux fractions. 7 n'est pas un multiple de 3, et 11 n'est pas un multiple de 5. Inutile de chercher plus loin, les fractions ne sont pas égales. $\frac{7}{5} \neq \frac{3}{11}$

- $\frac{7}{5}$ et $\frac{21}{10}$: **non, ces fractions ne sont pas égales**. Pourquoi ? Regardez les numérateurs : 7 et 21. Pour trouver 21 à partir de 7, il faut multiplier par 3 ($7 \times 3 = 21$). Il y a donc une multiplication par 3 entre les numérateurs... oui mais ce n'est pas suffisant ! Il faut aussi qu'il y ait une multiplication par 3 entre les dénominateurs ! Or, $5 \times 3 = 15$, et non 10. Comme on ne peut pas multiplier le dénominateur par le même facteur de 3, les fractions ne sont pas égales. $\frac{7}{5} \neq \frac{21}{10}$

Le dernier exemple était piégeur, ne vous laissez pas avoir ! Il faut pouvoir multiplier par le même nombre (on dit aussi *le même facteur*) en haut et en bas. Si le facteur est différent, alors les fractions ne sont pas égales. Point barre.



Alors, vous commencez à vous faire aux fractions ?
Tant mieux ! Parce que vous avez pas fini d'en voir !

Cette année, nous ne ferons pas beaucoup plus de choses avec les fractions, mais vous apprendrez à les manipuler plus en détail plus tard dans votre scolarité. Vous n'imaginez pas tout ce qu'on peut faire avec des fractions, c'est fou !

Interro surprise : décimaux, fractions et ordres

"Rangez les cahiers, sortez les stylos, je ne veux voir que votre trousse sur votre table !"

Ah ah ! La pression monte, coup de stress, l'heure fatidique arrive : **c'est l'heure de l'interro surprise** !

Bon, ici sur le Site du Zéro ce n'est pas vraiment une surprise, il n'y a pas de prof pour vérifier que vous ne trichez pas en relisant les chapitres précédents, et en plus vous avez tout le temps que vous voulez pour réaliser cette interro.
Cerise sur le gâteau, je serai là pour vous guider et vous expliquer pas à pas comment résoudre le devoir que je vais vous donner.

Comme ça, quand vous aurez vraiment une interro en salle, vous serez parés et vous pourrez dire : "Même pas peur d'une petite interro de rien du tout, à nous deux !"

Pour cette interro de niveau sixième, nous allons utiliser des connaissances que vous avez découvertes dans les chapitres précédents :

- Les nombres décimaux
- Les fractions
- L'ordre des nombres

Bien sûr, on voit d'autres choses en sixième : les multiples, la géométrie, etc. Je compléterai cette interro par la suite, mais pour le moment ça nous fait déjà du travail !

Pour information, cette interro est basée sur de véritables devoirs que des sixièmes m'ont transmis et qu'ils ont donc eu à faire (exemple). Je reprends directement les exercices de ce type de devoir, en les adaptant parfois légèrement au besoin.
Si vous avez d'autres devoirs de sixième avec d'autres notions à traiter, n'hésitez pas à me les envoyer par MP, je verrai si je peux les utiliser pour compléter ce chapitre.

Transformation en décimal

Avant de voir la correction ensemble, je vous invite bien sûr à essayer de résoudre ces exercices. Ils ne sont pas *très* difficiles, et même si vous ne parvenez pas tous à les résoudre, ce sera déjà une bonne chose que vous arriviez à en faire quelques-uns !

Je vais vous expliquer comment il faut les lire, comment il faut les comprendre et comment je m'y prends pour trouver la réponse.
Suivez-moi !

Enoncé

Ecrire sous forme d'un nombre décimal :

A. $7+\frac{4}{10}+\frac{9}{100}$

B. $\frac{3}{10}+\frac{69}{100}+\frac{28}{1000}$

C. $17+\frac{4}{100}+\frac{8}{1000}$

Solution

Cet exercice nous demande de transformer une opération en nombre décimal. Comme vous le voyez, il y a des fractions. On va commencer par transformer ces fractions en nombre décimaux, c'est assez simple. Ensuite, on calculera l'addition pour trouver le nombre décimal qu'on nous demande !

Question A

$$7+\frac{4}{10}+\frac{9}{100}$$

Commençons par la fraction $\frac{4}{10}$: c'est en fait $4 \div 10$. On a appris a diviser par 10 dans un des chapitres précédents : il faut décaler la virgule vers la gauche !

Oui mais il n'y a pas de virgule dans 4 !?

Si si, rappelez-vous : la virgule est là, invisible, de même que des zéros se cachent à droite et à gauche du nombre.

0000**4,**0000

Pour diviser par 10 on décale d'un cran vers la gauche, ce qui nous donne :

000**0,4**0000

On peut donc écrire $\frac{4}{10}=0,4$

Faisons de même avec $\frac{9}{100}$. On décale la virgule de 2 crans vers la gauche, ça nous donne 0,09 !

Remplaçons maintenant les fractions dans la question par les nombres décimaux qu'on a trouvés :

$$7+\frac{4}{10}+\frac{9}{100}=7+0,4+0,09$$

Il n'y a plus qu'à calculer l'opération !

$$7+0,4+0,09=7,49$$

Et voilà le travail ! Le résultat est **7,49** !

Question B

$$\frac{3}{10}+\frac{69}{100}+\frac{28}{1000}$$

On peut aller plus vite maintenant que vous avez compris le principe.
On transforme les fractions en nombres décimaux en effectuant la division qui correspond :

$$\frac{3}{10}=0,3$$

$$\frac{69}{100}=0,69$$

$$\frac{28}{1000} = 0,028$$

On remplace les nombres dans l'opération :

$$\frac{3}{10} + \frac{69}{100} + \frac{28}{1000} = 0,3 + 0,69 + 0,028 = 1,018$$

La réponse est **1,018** !

Question C

$$17 + \frac{4}{100} + \frac{8}{1000}$$

Même chose, on remplace les fractions par les nombres décimaux :

$$\frac{4}{100} = 0,04$$

$$\frac{8}{1000} = 0,008$$

On remplace les fractions par les décimaux qu'on a trouvés :

$$17 + \frac{4}{100} + \frac{8}{1000} = 17 + 0,04 + 0,008 = 17,048$$

La bonne réponse est **17,048** !

L'intrus n'est pas égal

Enoncé

Trouver dans la liste le nombre qui n'est pas égal aux autres et dire pourquoi.

- $1 + \frac{17}{100}$
- $1,3 + 1,4$
- $1 + \frac{17}{10}$
- $2,700$

Solution

On nous donne 4 nombres (parfois sous forme d'addition) et l'un d'entre eux n'est pas égal aux autres. Lequel ?

Ce n'est pas facile de le voir comme ça, à cause des fractions et des additions. Ce qu'il faut faire, c'est exactement comme pour la question précédente : transformer ces opérations et fractions en nombres décimaux et les comparer !

Calcul du nombre 1

Commençons par $1+\frac{17}{100}$. Comme on l'a vu à l'exercice précédent, on peut remplacer la fraction par un nombre décimal en décalant la virgule (ici de 2 crans vers la gauche car on divise par 100) :

$$1+\frac{17}{100}=1+0,17$$

Ensuite, il est facile de calculer la somme : $1+0,17=1,17$

Le premier nombre est donc **1,17**. Bien, passons au suivant !

Calcul du nombre 2

$$1,3+1,4$$

Là, c'est très simple, il n'y a pas de fraction. On doit juste calculer la somme :

$$1,3+1,4=2,7$$

Ca nous fait **2,7**. Nombre suivant !

Calcul du nombre 3

$$1+\frac{17}{10}$$

On remplace la fraction par le nombre décimal qui correspond en décalant la virgule, ce qui donne :

$$1+\frac{17}{10}=1+1,7=2,7$$

2,7 à nouveau ! Nombre suivant !

Calcul du nombre 4

$$2,700$$

Ah ! Ce ne sera pas très compliqué pour celui-là. Vous vous souvenez que les zéros à droite d'un nombre décimal ne servent à rien ? Comme je vous l'ai expliqué, on peut les écrire mais ils sont facultatifs. $2,700$ peut donc très bien s'écrire **2,7** !

On récapitule

On a trouvé que ces opérations correspondaient en fait à des nombres très simples. Dans l'ordre :

- $1+\frac{17}{100}=1,17$
- $1,3+1,4=2,7$
- $1+\frac{17}{10}=2,7$
- $2,700=2,7$

Que nous demande l'énoncé ? **"Trouver dans la liste le nombre qui n'est pas égal aux autres et dire pourquoi."**

Il ne faut jamais oublier ce que demande l'énoncé pour bien y répondre.

On va donc dire :

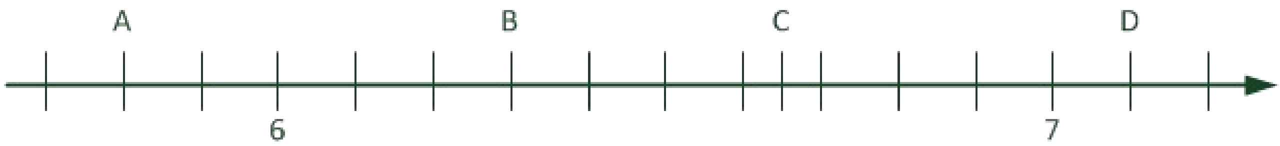
Citation

> "*Le nombre qui n'est pas égal aux autres est* $1 + \frac{17}{100}$ *car il vaut 1,17 alors que tous les autres nombres valent 2,7. Les calculs que l'on vient de faire le démontrent.*"

Et paf ! On a répondu à l'énoncé !
On a indiqué quel nombre était différent des autres et on a justifié pourquoi : on a fait les calculs pour connaître leurs valeurs.

La droite mystère

Enoncé



Donner les abscisses respectives des points A ; B ; C et D.
Placer les points E ; F ; G d'abscisses respectives : 6,1 ; 6,55 ; 5,95

Solution

Ah, un exercice avec une droite, ça change un peu des calculs !

Oh, mais cette droite a l'air un peu spéciale, vous ne trouvez pas ? On ne voit que deux nombres : 6 et 7. On ne voit ni le 0 ni les autres nombres ! Cela veut dire qu'on nous a donné une petite portion de la droite (aux alentours de 6 et 7), et on veut vérifier si on arrive à se repérer sur une droite comme celle-là !

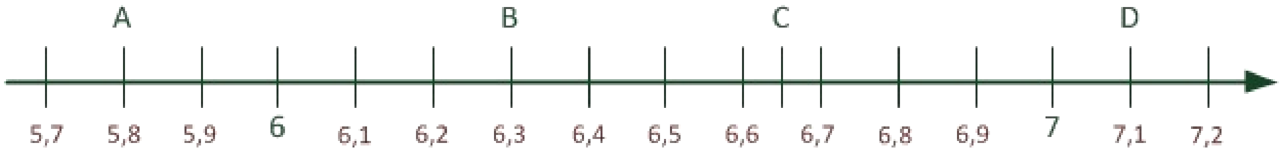
Imaginez la droite que vous avez l'habitude de dessiner, et dites-vous que la droite qu'on vous donne est une portion comprise autour de 6 et 7 :

Sur la droite qu'on nous donne, il y a beaucoup de points. A quoi correspondent-ils ?
Actuellement, on ne voit que les nombres 6 et 7, mais ce serait quand même bien de savoir à quoi correspondent les autres nombres !

Qu'y a-t-il entre 6 et 7... ? Des nombres décimaux !
Si vous regardez bien, il y a 10 "cases" qui séparent le 6 et le 7 sur la droite (si on ne compte pas le "C" qui se situe au milieu d'une case). La droite est donc numérotée de 0,1 en 0,1.

Les 10 points entre 6 et 7 correspondent donc aux nombres décimaux suivants : 6,1 ; 6,2 ; 6,3 ; 6,4 ; 6,5 ; 6,6 ; 6,7 ; 6,8 ; 6,9.

On peut donc numéroter la droite de 0,1 en 0,1 pour y voir plus clair :



Trouver les abscisses des points A ; B ; C ; D

Qu'est-ce qu'on nous demande ? Les abscisses des points A ; B ; C et D.
Bon, maintenant qu'on a numéroté plus finement notre droite, ça va être du gâteau ! Il suffit de lire sur la droite :

- A = 5,8
- B = 6,3
- C = ?
- D = 7,1

... en fait, ça a été du gâteau pour les points A ; B et D, mais pas pour le C. En effet, le point C est situé entre 6,6 et 6,7. Il va falloir réfléchir un peu plus... Qu'est-ce que je vous avais dit à propos des nombres décimaux ? On peut toujours zoomer pour en découvrir de nouveaux !

Entre 6,6 et 6,7, il y a donc les nombres : 6,61 ; 6,62 ; 6,63 ; 6,64...
Le nombre qui nous intéresse est situé à *mi-distance* entre 6,6 et 6,7. C'est donc 6,65 !

- **A = 5,8**
- **B = 6,3**
- **C = 6,65**
- **D = 7,1**

On a répondu à la première question !

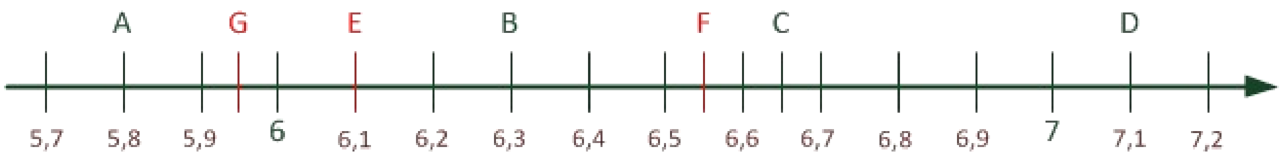
Placer les points E ; F ; G

Seconde question maintenant : *"Placer les points E ; F ; G d'abscisses respectives : 6,1 ; 6,55 ; 5,95"*

Le mot "respectives" est souvent employé en maths. Cela veut dire qu'il faut lire les éléments dans le même ordre.
Si on vous dit "E ; F ; G d'abscisses respectives 6,1 ; 6,55 ; 5,95", il faut comprendre que le premier point (E) est placé au point 6,1, que le second point (F) est placé au point 6,55, etc.
Quand vous voyez le mot "respectif", lisez bien les éléments dans l'ordre pour savoir à quoi ils correspondent.

Maintenant que la droite est numérotée, c'est là encore du gâteau. N'oubliez pas que 6,55 est situé à mi-chemin entre 6,5 et 6,6, et que 5,95 est situé à mi-chemin entre 5,9 et 6 !

On peut donc placer les points E ; F ; G :



Mission accomplie mon commandant !

Un peu de rangement !
Enoncé

Ranger par ordre décroissant les nombres suivants :

- 6,1
- 6,02
- 6,15
- 6,033
- 6,336
- 6,003
- 6,33

Solution

Il faut ranger ces nombres dans l'ordre **décroissant**, c'est-à-dire du plus grand au plus petit. Ce sont uniquement des nombres décimaux compris entre 6 et 7. Comme vous le savez, il faut être prudent avec les nombres décimaux pour savoir lequel est le plus grand et lequel est le plus petit.

Ici, ce sont tous des nombres décimaux dont la partie entière est 6. Pour trouver l'ordre de ces nombres, il va falloir les analyser chiffre par chiffre, de gauche à droite, à partir de la virgule.

On va donc les différencier en prenant le premier chiffre des décimaux, le chiffre des dixièmes :

- 6,**1**
- 6,**0**2
- 6,**1**5
- 6,**0**33
- 6,**3**36
- 6,**0**03
- 6,**3**3

Ah ! Cette fois on peut commencer un peu à ranger les nombres. On va mettre ceux qui ont le plus gros chiffre des dixièmes en premier, et ceux qui ont le plus petit en dernier (rappelez-vous, on doit trier par ordre décroissant !).

- 6,**3**36
- 6,**3**3

- 6,**1**
- 6,**1**5

- 6,**0**2
- 6,**0**33
- 6,**0**03

Comment on fait pour départager les nombres ? Il y en a plusieurs qui ont le même chiffre des dixièmes !

Patience, patience, leur heure va venir. Pour l'instant on a rassemblé les nombres les plus gros en premier, mais il faut effectivement aller plus loin pour départager les nombres qui ont les mêmes chiffres des dixièmes (il y a plusieurs 3, plusieurs 1 et plusieurs 0). Analysons le second chiffre après la virgule, le chiffre des centièmes :

- 6,3**3**6
- 6,3**3**

- 6,1**0**
- 6,1**5**

- 6,0**2**
- 6,0**3**3
- 6,0**0**3

Comme le troisième nombre n'avait pas de chiffre des centièmes, je l'ai rajouté moi-même. Eh oui, comme je vous le répète depuis le début, on peut mettre des zéros à droite et à gauche des nombres ! On ne les affiche pas en temps normal mais ils sont bien là, et on peut les faire apparaître si on en a besoin.

Là encore, on peut trier les nombres. Attention ! Il faut garder ceux qui avaient le plus gros chiffre des dixièmes en premier !

- 6,3**3**6
- 6,3**3**

- 6,1**5**
- 6,1**0**

- 6,0**3**3
- 6,0**2**
- 6,0**0**3

Et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait pu départager tous les nombres. Là, il y a deux nombres qu'on n'a pas pu départager parce qu'ils ont le même chiffre des centièmes : 0,336 et 0,33. On peut continuer la même manipulation en comparant les chiffres des millièmes, mais vous pouvez aussi le faire de tête ce n'est pas compliqué. $6,336 > 6,33$, car le chiffre des millièmes du premier est 6, et le chiffre des millièmes du second est 0 (oui, encore un 0 caché). Notre ordre est donc le bon !

On peut répondre en donnant les nombres dans l'ordre décroissant :

$$6,336 > 6,33 > 6,15 > 6,1 > 6,033 > 6,02 > 6,003$$

Comparaisons

Enoncé

Comparer les nombres suivants en utilisant < ou >, etc.

- 14,024 et 14,24
- 139,48 et 139,480

Solution

14,024 et 14,24

Le principe est le même que pour l'exercice précédent (en plus simple en fait !). Commençons par comparer 14,024 et 14,24. Ces nombres sont tous des décimaux supérieurs à 14. On doit donc les comparer à l'aide des dixièmes, centièmes, millièmes...

On suit la même méthode que tout à l'heure : on compare les chiffres des dixièmes :

- 14,**0**24
- 14,**2**4

0 est plus petit que 2, donc 14,024 est plus petit que 14,24 ! Pas la peine d'aller chercher plus loin !

On va donc répondre :

$$14,024 < 14,24$$

Allez, question suivante !

139,48 et 139,480

Là encore, avant la virgule on a le même nombre : 139. Il va falloir les comparer à l'aide des chiffres après la virgule. On commence, dans l'ordre :

- 139,**4**8
- 139,**4**80

Les chiffres des dixièmes sont identiques, on ne peut pas savoir lequel est le plus grand. On passe aux centièmes :

- 139,4**8**
- 139,4**8**0

Les centièmes sont identiques eux aussi ! Bon, on passe aux millièmes...
Ah mais il n'y a pas de chiffre des millièmes pour le premier nombre. Vous savez ce que ça signifie ? Que les millièmes correspondent à 0.

- 139,480
- 139,48**0**

Et là, c'est le drame.
On se rend compte qu'on ne peut pas savoir lequel de ces deux nombres est le plus grand : ils ont aussi le même chiffre des millièmes !
... A moins que... Si ces deux nombres ne sont pas différents, cela veut dire qu'ils sont... identiques.

Eh oui ! D'ailleurs, si vous regardez bien les nombres : "139,48 et 139,480", vous voyez que le second possède un 0 inutile à sa droite, que l'on peut enlever comme je vous l'ai dit. Il s'agit donc deux fois du même nombre, il faut mettre un symbole "=" entre les deux !

$$139,48 = 139,480$$

Mais... l'énoncé ne disait pas de mettre un symbole < ou > ?

Non, relisez bien l'énoncé : *"Comparer les nombres suivants en utilisant < ou >, etc."*. Il y a un "etc." à la fin !

Parfois, les profs sont un peu vicieux et veulent voir, sur des exercices comme ça, si vous savez prendre du recul et vous dire : "Bon sang mais c'est bien sûr !". L'exercice était tourné de telle sorte que vous vous attendiez à trouver un nombre plus grand qu'un autre... Mais les nombres étaient égaux.

D'autres fois comme ici, il faudra savoir prendre du recul, *bien* relire l'énoncé et ne pas hésiter à dire ce qui vous semble évident. Ne vous obstinez pas à dire qu'un nombre est plus grand qu'un autre si, de toute évidence, ils sont égaux !

Trouvez les nombres !

Enoncé

A. On sait que a est un nombre entier tel que $3 < a \leq 8$. Trouver toutes les valeurs possibles pour a.
B. On sait que y est un nombre décimal tel que $3,6 < y < 3,7$. Trouver deux valeurs possibles pour y.

Solution

Question A

On nous dit que a est un nombre entier situé comme ceci : $3 < a \leq 8$
On veut trouver toutes les valeurs de a. Heureusement c'est facile car il n'y en a pas une infinité.

a représente un nombre. En mathématique, on utilise souvent des lettres pour représenter des nombres que l'on ne connaît pas et qu'il faut trouver.

Vous pouvez dessiner une droite pour trouver les nombres situés entre 3 et 8, mais vous savez compter quand même, ça ne devrait pas être trop difficile.

Le seul piège, c'est qu'il ne faut pas confondre le signe $<$ ("strictement inférieur à") et le signe $\leq$ ("inférieur ou égal à").
a ne peut pas être égal à 3, car 3 est plus petit que a. a est donc plus grand que 3. La première valeur possible pour a est 4.
Les valeurs suivantes sont : 5, 6, 7... et 8 ? Oui, 8 est possible, car le symbole $\leq$ nous dit que a peut être égal à 8.

La réponse est donc :

Citation

> a peut prendre les valeurs suivantes : 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8
> a ne peut pas être égal à 3 à cause du signe $<$, mais il peut être égal à 8 comme l'indique le signe $\leq$

Question B

Cette fois, on nous parle d'un autre nombre y qui est un nombre *décimal*.
$3,6 < y < 3,7$ donc y est compris entre 3,6 et 3,7.

... Ne me dites pas qu'il n'y a pas de nombres décimaux entre 3,6 et 3,7, je risquerais de me fâcher tout rouge.

On peut zoomer entre 3,6 et 3,7 comme je vous l'avais dit, et découvrir de nouveaux nombres décimaux : 3,61 ; 3,62 ; 3,63 ; 3,64...

Ah tiens ! On vient déjà de répondre à la question, on nous demandait deux valeurs possibles.

Citation

> 3,61 et 3,62 sont deux valeurs possibles pour y, qui est compris entre 3,6 et 3,7.

Bien entendu, vous pouvez répondre ce que vous voulez. 3,68 marche aussi, de même que 3,645124. Ce sont toutes des réponses valables que vous pouvez donner.

Partie 2 : Niveau 5°

Equivalences des niveaux

France	5^e
Belgique	$1^{ère}$ secondaire
Québec	$1^{ère}$ secondaire

Cette année, les choses commencent à se préciser. Vous irez plus loin dans votre découverte des fractions et commencerez à découvrir des mécanismes de calcul de base, notamment avec les nombres relatifs, qui vous seront indispensables tout le temps par la suite (oui, jusqu'à la fin de vos études !).
Soyez vigilants et ne manquez rien, parce que l'année prochaine on passe vraiment à la vitesse supérieure !

Priorités, développements et factorisations

Vous savez déjà faire des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions... Oui mais tout ça à la fois ?
Si vous deviez faire de nombreux calculs différents d'un seul coup, sauriez-vous comment vous y prendre ? Si vous ne suivez pas les bonnes règles, vous risquez de trouver un faux résultat ! Pour faire des calculs en Maths, il existe des règles précises que l'on doit suivre.

Dans ce chapitre, nous allons découvrir ensemble ces règles. Je vous demanderai de bien les retenir, car vous en aurez besoin toute votre vie !
En respectant les techniques que nous allons voir, vous allez devenir de véritables ninjas des Maths.

... Bon d'accord j'exagère, vous allez plutôt devenir des apprentis ninjas, mais c'est un début !

Les priorités de calcul

Les additions, soustractions, multiplications... Tout ça vous connaissez. "Facile !" même, vous allez me dire.

En effet, quand il n'y a qu'une opération à calculer, c'est facile :

$$3 + 2 = 5$$
$$6 \times 4 = 24$$

Mais maintenant, imaginons que vous tombiez sur un calcul comme ceci :

$$2 + 4 \times 3 = ?$$

En mathématique, on appelle ce calcul **une expression**. Une expression mathématique est en fait un ensemble de calculs qui mélange des additions, multiplications, etc.

Alors, $2 + 4 \times 3$, combien ça fait d'après vous ?
18 ?...
Perdu ! Ca fait 14 !

Hein quoi ?
Pourtant je suis sûr d'avoir bien calculé : $2 + 4$ ça fait 6, et 6×3 ça fait 18

Eh bien non !
Quand on doit calculer une expression qui mélange des additions et des multiplications (comme ici), on doit respecter **un ordre de calcul**.

La priorité des opérateurs

Récapitulons. Vous connaissez 4 opérations :

- L'addition
- La soustraction
- La multiplication
- La division

Si vous devez faire un calcul qui mélange ces opérations, il faut d'abord calculer les multiplications et les divisions ! Ces opérations sont prioritaires : elles doivent être faites en premier.
Une fois que vous avez fait toutes les multiplications et divisions, vous pouvez calculer les additions et soustractions.

On doit donc calculer dans l'ordre :

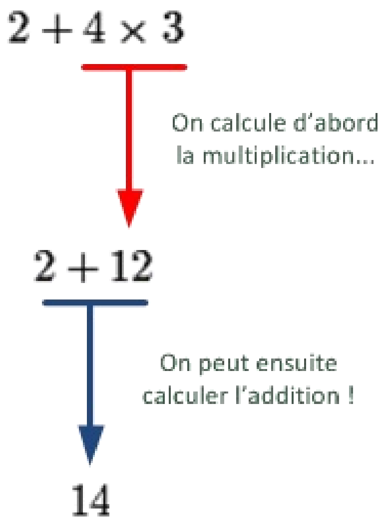
1. Les multiplications et divisions...
2. ... puis les additions et soustractions

Premier exemple

Reprenons mon calcul "piège" de tout à l'heure :

$2 + 4 \times 3 = ?$

On a 2 opérations : une addition et une multiplication. On doit d'abord calculer la multiplication, puis ensuite l'addition.



Le bon calcul à faire est donc :

$2 + 4 \times 3 = 2 + 12 = 14$

Quand les opérateurs ont la même priorité

Et si on a une multiplication et une division, dans quel ordre doit-on calculer ? Par exemple dans ce cas :
$2 \times 6 \div 3$

Il faut calculer les éléments de gauche à droite : calculez d'abord 2×6, puis divisez le résultat par 3.

$2 \times 6 \div 3 = 12 \div 3 = 4$

Quelques exercices pour s'entraîner

Pour vérifier si vous avez bien compris, essayez de faire ces quelques petits exercices puis regardez ma correction.

A. $5 \times 3 + 1$

B. $10 - 8 \div 4$

C. $5 - 1 + 3 \times 2 + 1$

D. $2 \times 2 - 1 + 9 \div 3 + 4$

Secret **(cliquez pour afficher)**

Question A

$5 \times 3 + 1$

On a une multiplication et une addition. On commence par la multiplication : $5 \times 3 = 15$ (il faut connaître ses tables de multiplication !).
Il ne nous reste plus qu'à ajouter 1 : $15 + 1 = 16$

Résumé du calcul : $5 \times 3 + 1 = 15 + 1 = 16$

Question B

$10 - 8 \div 4$

Une soustraction et une division. On commence par la division : $8 \div 4 = 2$. Il ne nous reste plus qu'à calculer $10 - 2 = 8$.

Résumé : $10 - 8 \div 4 = 10 - 2 = 8$

Question C

$5 - 1 + 3 \times 2 + 1$

Oulah, il y a plus d'opérations cette fois !

Pas de panique, on commence par les multiplications et les divisions... Ici il y a juste une multiplication : $3 \times 2 = 6$. On place ce 6 dans l'opération, ce qui nous donne : $5 - 1 + 6 + 1$.

Cette fois, il ne nous reste plus que des additions et soustractions. Comme ces opérateurs ont la même priorité, on va les calculer dans l'ordre de gauche à droite en commençant d'abord par $5 - 1$.

J'écris le résumé des calculs sur plusieurs lignes pour que ce soit plus facile à lire.
En rouge vous pouvez voir la multiplication que j'ai dû effectuer en premier parce qu'elle est prioritaire :

$$\begin{aligned} 5 - 1 + 3 \times 2 + 1 &= 5 - 1 + 6 + 1 \\ &= 4 + 6 + 1 \\ &= 10 + 1 \\ &= 11 \end{aligned}$$

Question D

$2 \times 2 - 1 + 9 \div 3 + 4$

Voilà à nouveau beaucoup d'opérations sur une seule ligne ! Toujours la même méthode : on repère les multiplications et divisions. On doit calculer 2×2 et $9 \div 3$:
$2 \times 2 = 4$
$9 \div 3 = 3$

On remplace ces opérations par leurs résultats dans le calcul :

$$\begin{aligned} 2 \times 2 - 1 + 9 \div 3 + 4 = &\quad 4 - 1 + 3 + 4 \\ = &\quad 3 + 3 + 4 \\ = &\quad 6 + 4 \\ = &\quad 10 \end{aligned}$$

La priorité des parenthèses

Les parenthèses sont prioritaires !

Parfois, on trouve des parenthèses dans les calculs :

$$2 \times 3 \div (1 + 2) + 6$$

Ces parenthèses sont très importantes : les parenthèses sont prioritaires sur tout !

Dans ce calcul, vous vous dites qu'il faut d'abord calculer 2×3 ? Eh bien non ! S'il y a des parenthèses, on doit d'abord calculer ce qui se trouve entre parenthèses puis le reste.

Ici, on doit donc d'abord calculer $1 + 2$ et mettre le résultat dans l'opération complète.

$$\begin{aligned} 2 \times 3 \div (1 + 2) + 6 = &\quad 2 \times 3 \div 3 + 6 \\ = &\quad 6 \div 3 + 6 \\ = &\quad 2 + 6 \\ = &\quad 8 \end{aligned}$$

Les priorités sont donc les suivantes :

1. On calcule d'abord les parenthèses
2. Puis les multiplications et divisions
3. Puis les additions et soustractions

Retenez bien cet ordre ! Pour faire correctement vos calculs, il faut d'abord résoudre les parenthèses avant de faire le reste !

Quelques exercices

Essayons de faire ces quelques petits calculs pour nous entraîner :

A. $4 \times 4 - 3 + 2 \times (6 - 3)$

B. $2 + 8 \div (10 - 2) \times 2 + 4$

Secret (cliquez pour afficher)

Question A

$4 \times 4 - 3 + 2 \times (6 - 3)$

Comme il y a une parenthèse, on commence d'abord par calculer ce qui se trouve à l'intérieur de la parenthèse : $6 - 3 = 3$

On remplace le résultat de la parenthèse (3) dans notre expression :
$4 \times 4 - 3 + 2 \times 3$

On peut ensuite calculer comme on a appris à le faire avant ! D'abord les multiplications et divisions, puis les additions et soustractions !

$$\begin{aligned} 4 \times 4 - 3 + 2 \times 3 &= 16 - 3 + 6 \\ &= 13 + 6 \\ &= 19 \end{aligned}$$

Question B

$2 + 8 \div (10 - 2) \times 2 + 4$

Oh ! Encore une parenthèse ! Quelle surprise !

On commence par calculer le contenu de la parenthèse, puis les multiplications et divisions, puis les additions et soustractions. Vous commencez à avoir l'habitude maintenant ! Allez je fais tout d'un coup.

$$\begin{aligned} 2 + 8 \div (10 - 2) \times 2 + 4 &= 2 + 8 \div 8 \times 2 + 4 \\ &= 2 + 1 \times 2 + 4 \\ &= 2 + 2 + 4 \\ &= 4 + 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Développer une expression

On va maintenant découvrir une autre règle de calcul : **le développement** d'une expression. C'est une technique extrêmement utile, alors écoutez bien.

Qu'est-ce que le développement ?

Développement avec une addition

Prenons cette expression :

$2 \times (4 + 3)$

Vous savez maintenant la calculer : d'abord la parenthèse, puis la multiplication. Ca fait : $2 \times (4 + 3) = 2 \times 7 = 14$

Bon alors, quoi de neuf là-dedans ?

Il y a une autre façon de calculer le résultat qu'il faut absolument connaître ! Ca s'appelle... le développement ! Quand vous voulez multiplier un nombre (ici 2) par une parenthèse (ici 4 + 3), vous pouvez *développer* le calcul comme ceci :

$$2 \times (4 + 3) = 2 \times 4 + 2 \times 3$$

Qu'est-ce... qu'est-ce que... qu'est-ce qui s'est passé ?

Ne faites pas des têtes d'ahuris, ce n'est pas bien compliqué en fait.
On a multiplié 2 par chacun des nombres de la parenthèse :

$$2 \times (4 + 3) = \underline{2 \times 4} + \underline{2 \times 3}$$

Regardons un autre exemple ensemble car il est très important que vous sachiez le faire tous seuls :

$$3 \times (2 + 6) = 3 \times 2 + 3 \times 6$$

Maintenant, il ne vous reste plus qu'à calculer le résultat (en commençant par les multiplications bien sûr !). Vous pouvez calculer 3×2 et 3×6 comme vous l'avez appris. Le développement est simplement une autre façon d'arriver au résultat.

Essayons de finir le calcul comme nous l'avons appris :

$$\begin{aligned} 3 \times (2 + 6) &= 3 \times 2 + 3 \times 6 \\ &= 6 + 18 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Développement avec une soustraction

Jusqu'ici, les parenthèses contenaient une addition. Imaginons maintenant qu'il y ait une soustraction :

$$5 \times (3 - 2)$$

Le développement se fait de la même façon, mais <u>on doit conserver le signe de la soustraction</u> !

$$5 \times (3 - 2) = 5 \times 3 - 5 \times 2$$

Comme vous le voyez, le signe "moins" a été conservé lorsqu'on a fait le développement. Pensez-y c'est très important !

Quelques exercices pour s'entraîner

Voici quelques expressions mathématiques. Développez-les comme on vient d'apprendre, puis calculez le résultat.

A. $4 \times (1 + 3)$
B. $2 \times (6 - 1)$
C. $6 \times (6 - 3)$

Secret **(cliquez pour afficher)**

Question A

$$4 \times (1 + 3)$$

Pour développer, on fait la multiplication avec chacun des éléments de la parenthèse. Ca nous donne :

$$4 \times (1 + 3) = 4 \times 1 + 4 \times 3$$

Voilà, le développement est fait, il ne nous reste plus qu'à calculer le résultat.

$$\begin{aligned} 4 \times (1 + 3) = & \quad 4 \times 1 + 4 \times 3 \\ = & \quad 4 + 12 \\ = & \quad 16 \end{aligned}$$

Question B

$$2 \times (6 - 1)$$

Comme vous le voyez, il y a une soustraction à l'intérieur de la parenthèse. Il faut bien penser à conserver le signe "moins" lors du développement.
Ca nous donne :

$$\begin{aligned} 2 \times (6 - 1) = & \quad 2 \times 6 - 2 \times 1 \\ = & \quad 12 - 2 \\ = & \quad 10 \end{aligned}$$

Question C

$$6 \times (6 - 3)$$

Toujours aucune difficulté, à part qu'il ne faut pas oublier de conserver le signe "moins" quand vous faites le développement.

$$\begin{aligned} 6 \times (6 - 3) = & \quad 6 \times 6 - 6 \times 3 \\ = & \quad 36 - 18 \\ = & \quad 18 \end{aligned}$$

Les formules avec des lettres

On pourrait se contenter de retenir la règle du développement avec un exemple comme celui-ci :

$$2 \times (4 + 3) = 2 \times 4 + 2 \times 3$$

... Mais en maths on préfère écrire une formule. Les formules servent de base aux calculs.

Dans les formules, les nombres sont remplacés par des lettres. Chaque lettre représente un nombre.
Ici, la formule du développement serait :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

Mais... où sont passés les nombres ?

Je vous l'ai dit : on utilise des lettres qui servent de modèle. Chaque lettre correspond à un nombre différent.
Ne vous laissez pas impressionner par ces lettres. Elles servent juste à vous montrer comment calculer une expression dans le cas général.

S'il y a une soustraction entre les parenthèses, la formule change pour bien prendre en compte le signe "moins" :
$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$

Maintenant que l'on a appris à faire un développement, si je vous faisais découvrir son inverse : la factorisation !?
Allez, vous allez voir, ça va être amusant ça aussi !

Factoriser une expression

Comme je viens de vous dire, la factorisation c'est en fait l'inverse du développement.

- Avec le **développement**, on "éclatait" le contenu d'une parenthèse : $2 \times (4 + 3) = 2 \times 4 + 2 \times 3$
- Avec la **factorisation**, on fait le chemin en sens inverse : $2 \times 4 + 2 \times 3 = 2 \times (4 + 3)$

Il faut savoir manipuler les nombres dans les deux sens, vous en aurez souvent besoin. Vous devez donc être aussi bien à l'aise avec les développements qu'avec les factorisations.

Comment factoriser ?

Cas d'une addition

Prenons un exemple, avec l'expression suivante :

$$3 \times 4 + 3 \times 2$$

On veut arriver à *reconstruire* les parenthèses, c'est-à-dire à *factoriser l'expression*. Pour y arriver, il faut repérer un **facteur commun**, c'est-à-dire un nombre présent dans chaque multiplication qui va servir à faire la factorisation.

Dans l'expression précédente, est-ce que vous voyez un facteur commun (un nombre identique dans chaque multiplication ?). Regardez bien :

$$3 \times 4 + 3 \times 2$$

Eh oui, on a trouvé un nombre identique dans chacune des multiplications, c'est notre **facteur commun** !

On peut déjà écrire le début de la factorisation :

$$3 \times (? + ?)$$

A l'intérieur de la parenthèse, il suffit de placer les autres nombres de l'expression (4 et 2). Ca nous donne :

$$3 \times (4 + 2)$$

Cas d'une soustraction

Essayons maintenant de factoriser cette expression :

$$6 \times 2 - 2 \times 5$$

Cette fois, il y a le signe "-" de la soustraction, il faudra donc penser à le conserver lorsqu'on reconstruira la parenthèse en factorisant.

Quelle est la première étape déjà ? Ah oui, le facteur commun. Le voyez-vous ? C'est le nombre 2 !

$$6 \times 2 - 2 \times 5$$

On peut l'utiliser pour factoriser :

$2 \times (6 - 5)$

Maintenant qu'on a factorisé, on peut s'arrêter là... Ou calculer le résultat de l'expression. Tout dépend de ce que demande l'exercice, lisez bien les **consignes**. Si on vous dit juste de factoriser, arrêtez-vous après avoir reconstruit la parenthèse. Si on vous demande de factoriser puis de calculer, il faudra chercher le résultat de l'opération.

Il n'y a pas toujours de facteur commun. Si vous ne pouvez pas trouver de facteur commun, c'est qu'il est impossible de factoriser l'expression.
Par exemple, $7 \times 3 + 4 \times 11$ ne peut pas être factorisé : il n'y a pas de facteur commun ! Impossible de trouver un nombre identique dans chacune des multiplications.

Quelques exercices

Factorisez puis calculez ces expressions :

A. $5 \times 3 + 4 \times 5$
B. $2 \times 7 + 7 \times 4$
C. $9 \times 5 - 9 \times 3$

Secret (cliquez pour afficher)

Question A

$5 \times 3 + 4 \times 5$

Le facteur commun est 5. On peut factoriser l'expression en : $5 \times (3 + 4)$. Voici la factorisation et le calcul du résultat :

$$\begin{aligned} 5 \times 3 + 4 \times 5 &= 5 \times (3 + 4) \\ &= 5 \times 7 \\ &= 35 \end{aligned}$$

Question B

$2 \times 7 + 7 \times 4$

Le facteur commun est 7 :

$$\begin{aligned} 2 \times 7 + 7 \times 4 &= 7 \times (2 + 4) \\ &= 7 \times 6 \\ &= 42 \end{aligned}$$

Question C

$9 \times 5 - 9 \times 3$

Le facteur commun est 9. Attention au signe "-" qu'il faut bien conserver :

$$\begin{aligned} 9 \times 5 - 9 \times 3 = &\ 9 \times (5 - 3) \\ = &\ 9 \times 2 \\ = &\ 18 \end{aligned}$$

Les formules avec des lettres

Les mathématiciens tiennent à écrire des formules, alors prenons l'habitude d'en voir ensemble.

Pour la factorisation, on a 2 formules (selon le signe) :

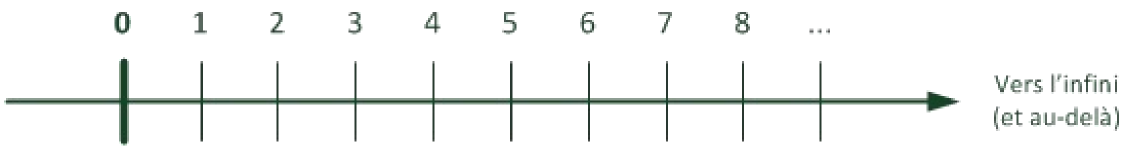
- $k \times a + k \times b = k \times (a + b)$
- $k \times a - k \times b = k \times (a - b)$

k, a et b sont, là encore, des nombres. Les mathématiciens écrivent d'ailleurs *"Soient k, a et b des nombres"* pour bien indiquer à quoi correspondent les lettres.

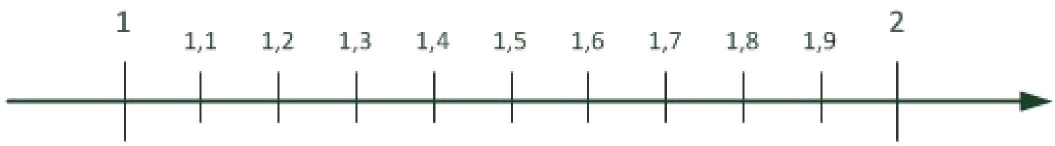
Ces formules permettent de bien visualiser comment faire les calculs. Elles indiquent ce qui se passe dans le cas général sans avoir à passer par des exemples.
Plus vous allez avancer en mathématiques, plus vous allez voir des formules comme celles-ci !
Vous avez découvert dans ce chapitre plusieurs notions très importantes dont vous allez vous servir pendant toute la suite de vos études !
Prenez le temps de bien les comprendre et surtout n'hésitez pas à relire ce chapitre jusqu'à ce que vous soyez complètement à l'aise avec la priorité des opérateurs, le développement et la factorisation !

Les nombres relatifs

Les nombres n'ont pas fini de nous étonner : on a déjà vu qu'il existait une infinité de nombres (et donc qu'il était impossible de compter jusqu'à l'infini)



... et qu'entre deux nombres entiers il y avait des nombres décimaux.



Il existe encore d'autres nombres que nous n'avons pas découvert jusqu'ici : les nombres relatifs. Nous allons faire la connaissance de nombres inférieurs à 0 (si si, c'est possible !). Comment fonctionnent-ils et à quoi servent-ils ? Comment faire des calculs avec des nombres relatifs ?
Nous allons voir tout cela ensemble !

Pourquoi utiliser des nombres négatifs ?

Saviez-vous qu'il existe des nombres inférieurs à 0 ? Ce sont les nombres négatifs.

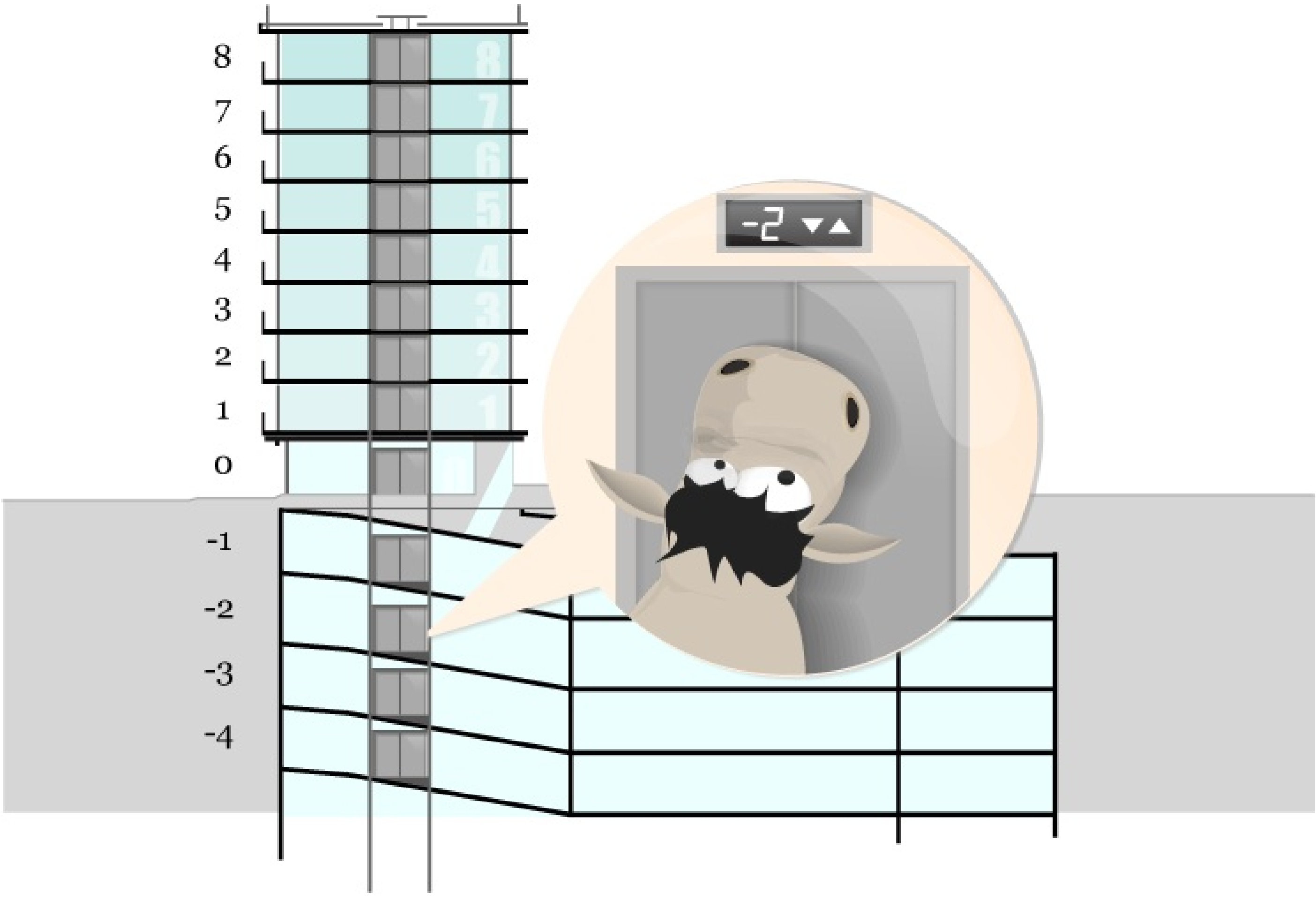
A quoi ça sert d'avoir des nombres négatifs ?

Après tout, jusqu'ici les choses étaient simples pour compter : 1, 2, 3, 4, 5, 6... On peut avoir 2 pommes dans les mains... mais pas -2 pommes ("moins deux pommes"). Ca n'a pas de sens bien sûr.

Pourtant, il y a plein de situations où les nombres inférieurs à 0 sont utiles. Prenez par exemple un ascenseur. Notre petit âne Zozor (la mascotte du Site du Zéro !) se trouve ici à l'étage -2 !

Qu'est-ce que ça veut dire l'étage "-2" ?

Un étage négatif, c'est un étage qui se trouve généralement sous le sol. L'étage 0 correspond au niveau du sol, et tous les étages en-dessous ont un signe "-" (moins) devant.
Regardez ce schéma pour comprendre où se trouve Zozor :



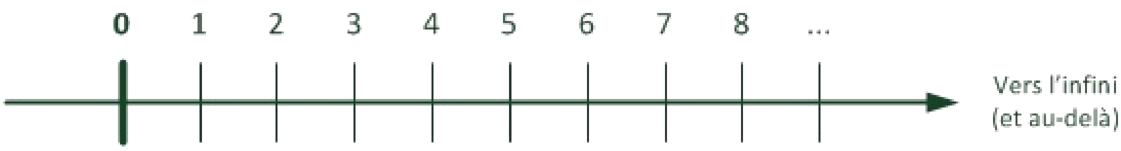
Comme vous le voyez, Zozor se trouve au sous-sol, à l'étage -2. Les étages qui ont un signe "-" sont situés sous le sol. Ce sont des étages en-dessous de 0 !

Voilà donc un exemple dans la vie courante où on utilise des nombres négatifs. Ils nous permettent d'aller en-dessous de 0 car il y a des situations comme celle-ci où on a besoin d'utiliser des nombres plus petits que 0.

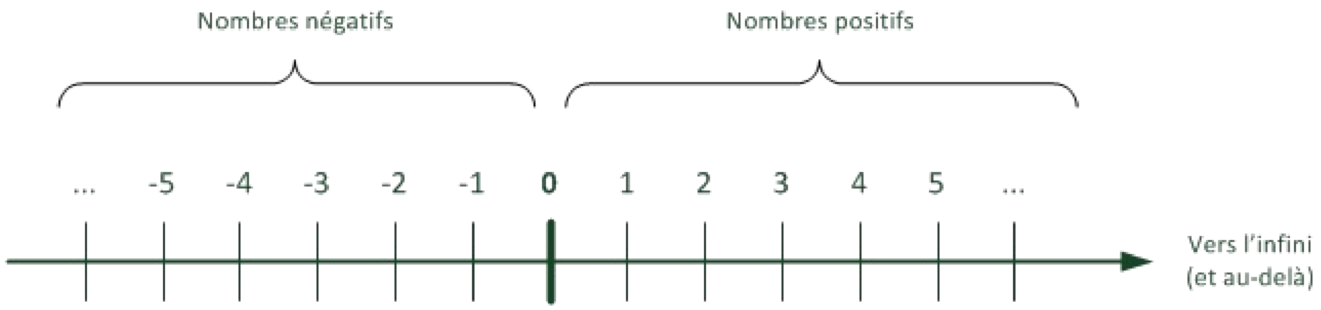
Vous voulez un autre exemple où on utilise des nombres négatifs ? Pensez aux thermomètres ! Il peut faire 0°C, mais il peut faire plus froid encore ! Parfois, le thermomètre descend à -5°C, -10°C voire même -30°C dans certaines régions ! Gla gla gla...

Placer les nombres négatifs sur une droite

Essayons de placer ces nouveaux nombres sur une droite pour nous repérer. On va partir de cette droite avec des nombres que vous connaissez déjà :



Comme je vous l'ai dit, il y a des nombres plus petits que 0. Où sont placés les nombres les plus petits ? A gauche ! On va donc écrire les nombres négatifs à l'envers, vers la gauche en partant du 0 :

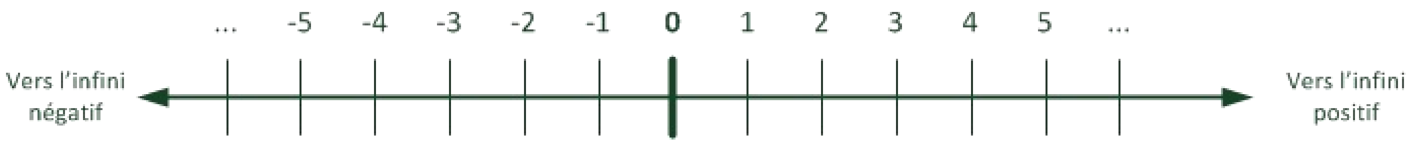


Les nombres négatifs sont avant le 0

Habituellement, on ne met pas de signe devant les nombres positifs : 1, 2, 3, 4… Cependant, il est possible de les faire précéder d'un + si on le souhaite pour *bien* indiquer que ce sont des nombres positifs. On pourrait donc écrire : +1, +2, +3, +4… On le fait rarement. Pourquoi ? Parce que c'est plus long à écrire, pardi !

En fait, il existe aussi une infinité de nombres négatifs. C'est exactement la même chose que pour les nombres positifs, mais en sens inverse. On pourrait donc compter sans jamais s'arrêter dans les nombres négatifs.

On dit qu'il y a deux infinis : un infini positif et un infini négatif. L'un à droite, l'autre à gauche :



Une infinité de nombres positifs et négatifs ! Ca commence à faire beaucoup…

Si vous visualisez bien tous ces nombres sur une droite, c'est parfait, je ne vous demande pas plus.

Retenez donc bien qu'on dit que les nombres sont positifs après le 0, et négatifs avant le 0.

Alors, les nombres 2 et -2 sont des nombres différents ?

Oui, comme vous le voyez sur la droite, ce ne sont pas du tout les mêmes nombres : ils ne sont pas placés au même endroit ! -2 est en fait l'opposé de 2 et se trouve de l'autre côté du 0 !

Vous pouvez voir que -2 et 2 sont chacun à la même distance du nombre 0 :

Et le nombre 0 lui ? Il est positif ou il est négatif ?

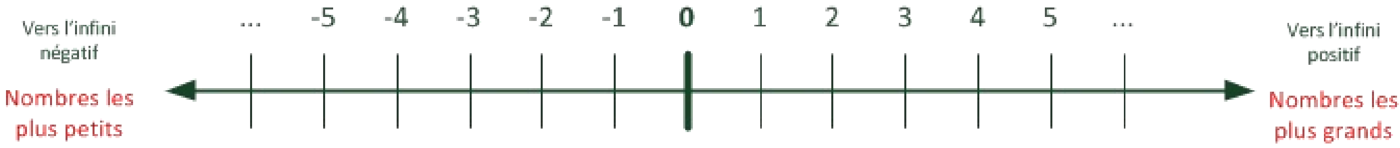
Bonne question, il est pile au milieu justement. Euh… joker !

En fait, 0 est un nombre un peu spécial : il est positif ET négatif. Les deux à la fois quoi ! C'est pour cela qu'écrire -0, 0 (ou +0) revient au même. -0 et +0 représentent le même nombre. En revanche, -1 et +1 sont deux nombres différents (regardez sur la droite, -1 et 1 ne sont pas au même endroit !).

Comparer deux nombres relatifs

Avec les nombres relatifs, savoir *quel nombre est le plus grand* (ou le plus petit) devient un petit peu plus délicat.

Regardons ensemble cette droite avec des nombres relatifs :



Comme vous le savez, les nombres les plus petits sont à gauche et les nombres les plus grands sont à droite. Mais dans ce cas, regardez bien, ça veut dire que...

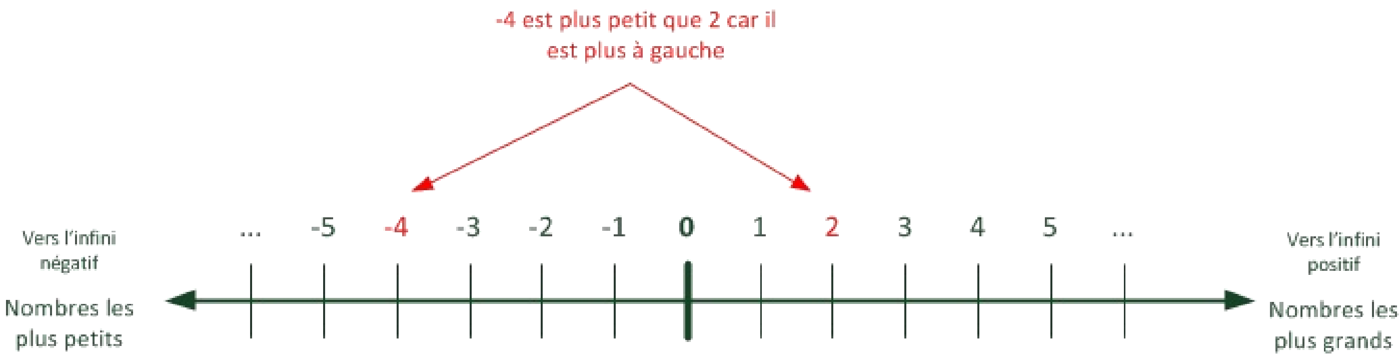
Ca veut dire que -4 est plus petit que 2 ?

Eh oui ! -4 est un nombre négatif, il est plus petit que 0, qui est plus petit que 2. -4 est donc plus petit que 2 !

$$-4 < 0 < 2$$

donc

$$-4 < 2$$



Les nombres relatifs peuvent vous piéger, car on pourrait penser que "4" est plus grand que "2". Cependant, il faut bien repérer le signe "moins" : -4 est un nombre négatif, plus petit que 0 ("à gauche du 0"), donc il est bel et bien plus petit que 2.

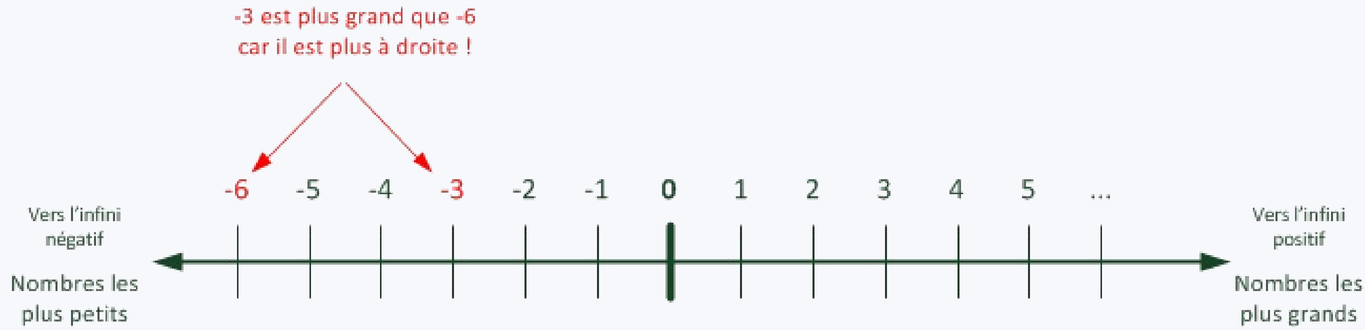
Si vous devez déterminer si un nombre est plus petit ou plus grand qu'un autre et que vous avez un doute, essayez de les imaginer sur une droite. N'oubliez jamais que les nombres les plus petits sont à gauche, et les plus grands à droite !

Un autre exemple pour voir si vous avez bien compris. Lequel de ces deux nombres est le plus grand : -3 ou -6 ?

Réfléchissez un peu, puis regardez la réponse ci-dessous :

Secret (cliquez pour afficher)

Le nombre le plus grand est -3 ! Eh oui, placez les nombres -3 et -6 sur une droite, puis regardez lequel est le plus à droite : c'est -3 !



On peut donc écrire :

$-3 > -6$

Visualisez les nombres sur une droite pour savoir lequel est le plus grand, ça marche à tous les coups.

Avec l'habitude, on n'a plus besoin de dessiner une droite à chaque fois. Quand on doit comparer deux nombres négatifs, on sait que le nombre le plus grand est celui qui *a l'air le plus le petit* (si on enlève le symbole "moins"). Sans dessiner de droite, je peux donc vous dire qu'entre -412 et -27, le plus grand est -27 (car ce sont deux nombres négatifs et 27 a l'air d'être le plus petit des deux).

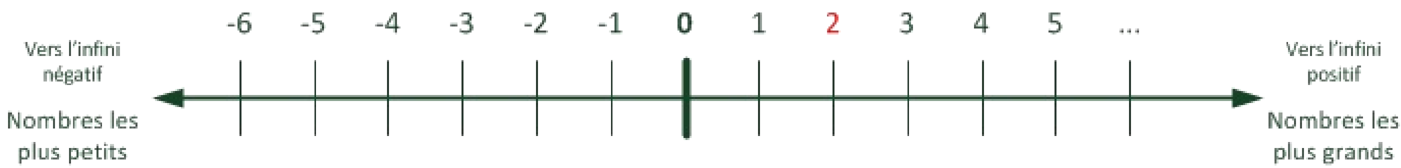
La soustraction "impossible" devient possible !

Les nombres relatifs vont vraiment nous aider ! Grâce à eux, on va pouvoir calculer des soustractions que l'on croyait impossibles jusqu'à présent. Tenez par exemple :

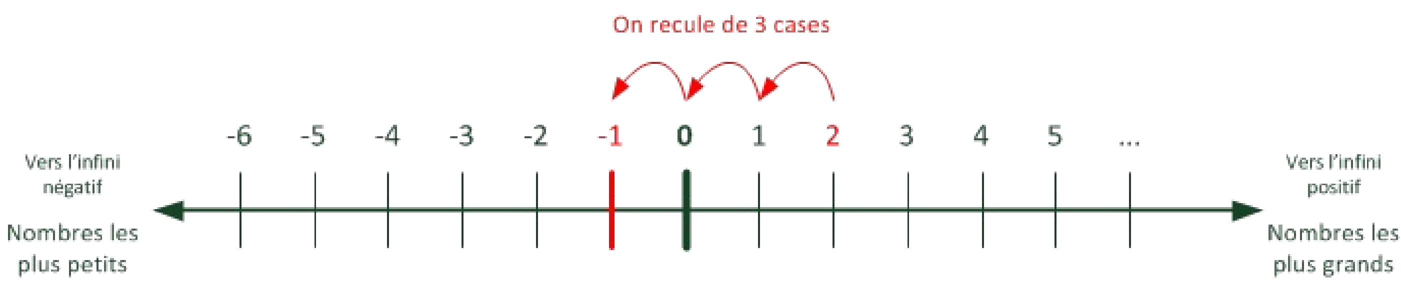
$$2 - 3 = ?$$

On disait jusqu'ici que cette soustraction était impossible. Or, si vous imaginez la soustraction sur une droite, vous allez vous rendre compte qu'il est *possible* de résoudre cette soustraction !

Commençons par repérer le premier nombre de notre soustraction (2) sur la droite, ici en rouge :



Pour calculer $2 - 3$, il faut lui enlever 3. Il suffit de "reculer" de 3 cases sur la droite pour trouver le résultat :



Le résultat est -1 ! Comme vous le voyez, quand on peut aller en-dessous de 0, on peut calculer des soustractions que l'on croyait impossibles ! Ces soustractions donnent en fait des nombres négatifs.

On peut donc écrire :

$$2 - 3 = -1$$

Essayez de calculer d'autres opérations du même genre (en vous aidant de la droite au besoin) :

$$3 - 5 = ?$$

$1 - 4 = ?$

$2 - 6 = ?$

Secret (cliquez pour afficher)

Réponses :

$3 - 5 = -2$

$1 - 4 = -3$

$2 - 6 = -4$

Additionner et soustraire des nombres relatifs

Maintenant, je vous propose de compliquer un peu les choses.

Imaginons qu'il y ait des nombres négatifs dans les opérations... Ben oui : on vient de faire des opérations avec des nombres positifs uniquement : $2 - 1$, c'est le nombre 2 *moins* le nombre 1. Ce sont deux nombres positifs. D'ailleurs, on pourrait mettre un "+" devant pour bien montrer qu'ils sont positifs :

$$(+2) - (+1)$$

Pour éviter de mélanger les signes des nombres et le signe de l'opération, on met des parenthèses autour des nombres. D'autre part, le "+" est facultatif dans les opérations. Quand on ne met pas de signe devant un nombre, cela veut dire que c'est un nombre positif.

Bon, et alors, où veux-tu en venir ?

Au lieu de travailler avec des nombres positifs, imaginez qu'il y ait des nombres négatifs... Ca devient un peu plus compliqué à calculer ! Heureusement, tonton M@teo est là pour vous expliquer comment faire les calculs.

Des parenthèses bien énervantes...

On va travailler avec des nombres relatifs. Pour bien repérer leur signe, on les entoure de parenthèses comme je viens de vous l'expliquer.

Voici une addition avec un nombre positif + un nombre négatif :

$$(+5) + (-3) = ?$$

Ouah, mais ça fait beaucoup de signes tout ça !
Je suis un peu perdu là

Non rassurez-vous, ce n'est pas si difficile que ça. Quels nombres voyez-vous dans l'opération ? Il y a +5 et -3. On veut additionner +5 et -3. Pour éviter de "mélanger les signes", on écrit +5 et -3 entre parenthèses. Mais ces parenthèses nous embêtent. Elles compliquent les choses et on a du mal à voir comment calculer cette opération.

Votre mission, si vous l'acceptez, sera de supprimer ces parenthèses. Comme ça, on pourra faire le calcul plus facilement. Oui, mais supprimer des parenthèses ne se fait pas n'importe comment, il y a des règles à respecter.

Retirer les parenthèses du premier nombre : facile !

Première chose à savoir : on peut retirer les parenthèses du nombre tout à gauche du calcul sans aucun problème. On peut écrire

:

$+5+(-3)=?$

Mais pourquoi on écrit +5 ? Je croyais qu'on pouvait juste écrire 5, sans le signe + ?

Vous avez raison, je viens de vous le dire : on peut enlever le signe +, il n'est pas utile. Quand il n'y a aucun signe devant, on sait que c'est un nombre positif. On peut donc "simplifier" l'écriture en écrivant :

$5+(-3)=?$

Il reste quand même des parenthèses autour du -3 qui nous embêtent. **On ne peut pas les enlever comme ça par magie**. Ca ferait deux signes côte à côte (le + et le -).

Heureusement, il y a des règles très simples à suivre quand on a deux signes côte à côte comme ça ! Lisez bien ce tableau pour savoir comment combiner deux signes :

Signe 1	Signe 2	Résultat	Exemple
+	+	+	$3+(+5)=3+5$
+	-	-	$3+(-5)=3-5$
-	+	-	$3-(+5)=3-5$
-	-	+	$3-(-5)=3+5$

Comment combiner 2 signes qui se suivent

Comment lire ce tableau ? C'est simple : si vous avez un + et un - qui se suivent, vous pouvez les remplacer tous les deux par un - et retirer les parenthèses !

$5+(-3)=5-3$

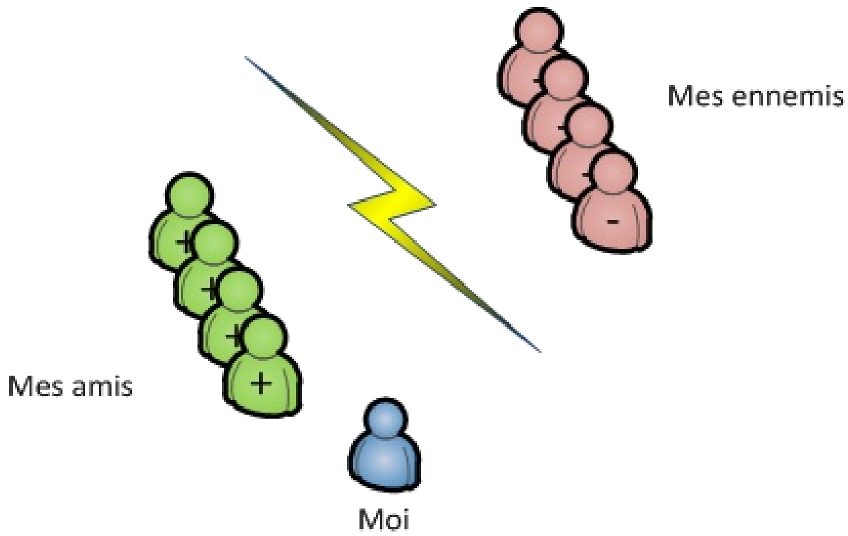
C'est super facile ensuite de trouver le résultat.

$5+(-3)=5-3=2$

Je vais jamais pouvoir retenir ce tableau par coeur ! Je m'emmêle les pinceaux avec tous ces signes, aide-moi !

Bon ça tombe bien, il existe une astuce de super-héros pour retenir facilement ce tableau. Le temps que j'enfile mon costume de Zorro...
...
...
... Voilà.

Donc voici l'astuce qui permet de retenir comment combiner deux signes. Imaginez un monde dans lequel il y a 2 camps : vos amis et vos ennemis. Vos amis sont les nombres positifs et vos ennemis sont les nombres négatifs (je sais c'est un gros délire, mais faites semblant de me suivre) :

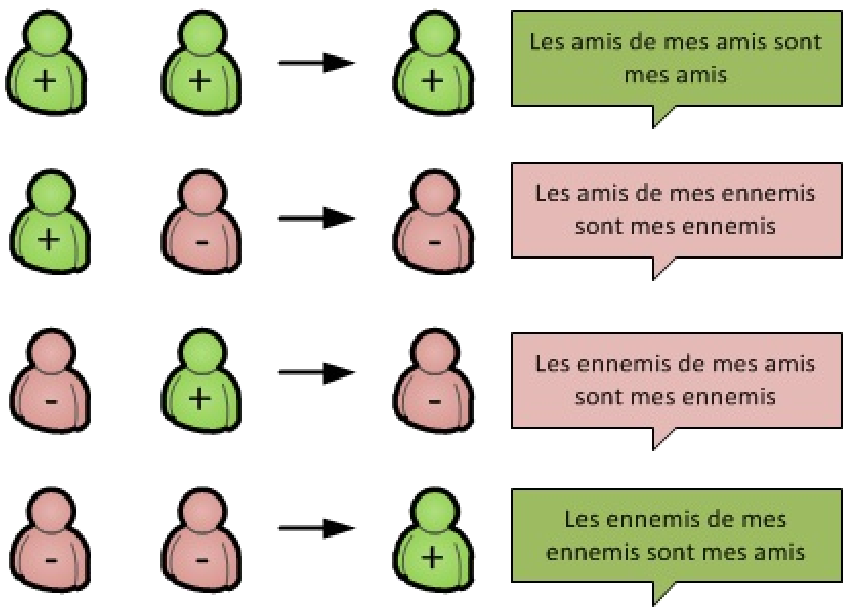


Si vos amis ont des amis, ce sont eux aussi vos amis on est d'accord ?
Si vos amis ont des ennemis, ce sont vos ennemis.

Maintenant, remplacez dans ces phrases "amis" par "+" et "ennemis" par "-". Ca donne :

"Mes amis ont des amis, ce sont donc mes amis" => "+ et + donnent un +"
"Mes amis ont des ennemis, ce sont donc mes ennemis" => "+ et - donnent un -".

Voici un schéma pour vous aider à retenir :



C'est une astuce dont je me suis longtemps servi ! Quand je dois combiner deux signes, je repense à ces deux camps, les amis et les ennemis, et j'imagine : "Je dois combiner - et -, ça veut dire les ennemis de mes ennemis... ce sont mes amis ! Donc - et - donnent un +."

Un peu d'entraînement

Allez je fais un autre exemple avec vous :

$(+4) - (-7) = ?$

On peut enlever la première parenthèse et le signe + :

$$4 - (-7) = ?$$

Deux signes "-" qui se suivent... Vous avez oublié ce que ça donne ? Repensez à la phrase : "Les ennemis de mes ennemis sont mes amis". Donc ça correspond à... un signe "+" ! On peut calculer :

$$4 - (-7) = 4 + 7 = 11$$

Vous avez compris le principe ? Parfait, alors prouvez-le moi et calculez :

$$(+1) - (+8) = ?$$

$$(-3) + (+2) = ?$$

$$(+5) - (-2) = ?$$

Secret **(cliquez pour afficher)**

Réponses :

$$(+1) - (+8) = 1 - 8 = -7$$

$$(-3) + (+2) = -3 + 2 = -1$$

$$(+5) - (-2) = 5 + 2 = 7$$

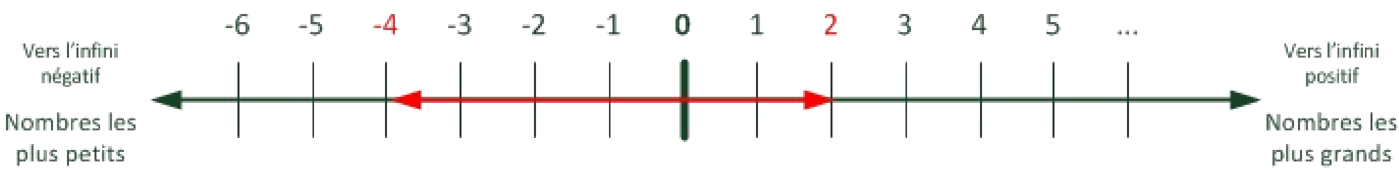
Il faut bien connaître la règle des signes pour enlever les signes en trop... et ne pas hésiter ensuite à faire le calcul à l'aide d'une droite comme on l'a vu un peu plus tôt.

Calculer la distance entre deux nombres

Ouf, rassurez-vous vous avez fait le plus dur juste à l'instant.

Maintenant que vous êtes devenus des pros du calcul avec les nombres relatifs, il me reste juste une dernière chose à vous montrer. Nous allons apprendre à calculer la distance entre deux points sur une droite.

Prenons les nombres -4 et 2 :



On veut savoir quelle est la distance entre ces deux nombres, c'est-à-dire combien de cases les séparent.

Bien sûr, il est facile de dessiner une droite comme je viens de le faire et de compter le nombre de cases entre les deux : 1, 2, 3, 4, 5, 6 ! Il y a 6 cases, donc la distance entre -4 et 2 est 6 !

Cependant, ce serait bien de calculer la distance sans avoir à dessiner une droite non ? Pour calculer la distance, c'est très simple : **faites la soustraction entre le plus grand nombre et le plus petit !**

Quel est le plus grand nombre ici ? -4 ou 2 ?
Vous devriez le savoir maintenant : c'est 2 !

Il faut faire la soustraction, donc on doit calculer $2 - (-4)$ (on met le nombre le plus grand en premier dans la soustraction).

Et c'est parti pour un calcul !

$$2 - (-4) = 2 + 4 = 6$$

Et voilà, on a trouvé la distance entre les deux nombres !

A vous de jouer, trouvez la distance entre :

- -2 et 6
- 3 et -5
- -4 et -1

Secret **(cliquez pour afficher)**

Réponses :

Distance entre -2 et 6 : le nombre le plus grand est 6. On place donc 6 en premier dans la soustraction et on calcule :
$6-(-2)=6+2=8$

Distance entre 3 et -5 : le nombre le plus grand est 3. On place donc 3 en premier dans la soustraction et on calcule :
$3-(-5)=3+5=8$

Distance entre -4 et -1 : le nombre le plus grand est -1. On place donc -1 en premier dans la soustraction et on calcule :
$-1-(-4)=-1+4=3$

Vous voilà maintenant entrés dans le monde merveilleux des nombres relatifs.

Et pour ce qui est du merveilleux, vous n'avez pas fini de découvrir des choses, croyez-moi !
Mais pour aujourd'hui, on va s'arrêter là, ce sera déjà bien.

Les fractions (calculs et comparaisons)

Et... si on reparlait un peu des fractions ? Nous les avons découvertes dans la partie précédente, en guise d'introduction, mais nous n'avons pas fini de les utiliser !

Les fractions vont vous poursuivre jusqu'à... euh... tout le temps en fait.
Raison de plus pour en faire vos amies dès maintenant, vu le temps que vous allez passer avec elles.

Dans ce chapitre, nous allons apprendre à faire des calculs et des comparaisons entre fractions. Au programme : addition, soustraction et multiplication de fractions ! Suivez le guide et ce ne sera pas bien compliqué, vous verrez !

Rappels sur les fractions

Avant de commencer, je voudrais faire quelques rappels rapides avec vous sur les fractions.

Numérateur et dénominateur

Prenons la fraction "cinq sur deux" (que l'on peut prononcer "cinq demis") :

$$\frac{5}{2}$$

Une fraction est composée de deux nombres séparés par une barre. Vous vous souvenez comment on les appelle ? S'il y a bien un vocabulaire à retenir c'est celui-là !

- **Le numérateur** : c'est le nombre au-dessus de la barre. Pour $\frac{5}{2}$ le numérateur est 5.
- **Le dénominateur** : c'est le nombre en-dessous de la barre. Pour $\frac{5}{2}$ le dénominateur est 2.

$$\frac{\text{numerateur}}{\text{denominateur}}$$

Il existe une astuce mnémotechnique pour retenir que le numérateur correspond au nombre du haut : **nu**mérateur commence comme le mot **nu**age, et les nuages sont toujours en haut.
Le dénominateur est donc en bas.

Une fraction est un nombre

Souvenez-vous qu'une fraction correspond à un nombre : le résultat de la division du numérateur par le dénominateur. Pour $\frac{5}{2}$, le nombre qui se "cache" derrière cette fraction est en fait $5 \div 2 = 2,5$. Les fractions nous permettent d'éviter d'avoir à écrire des nombres décimaux, notamment lorsqu'il y a beaucoup de chiffres après la virgule.

Fraction inférieure, égale ou supérieure à 1 ?

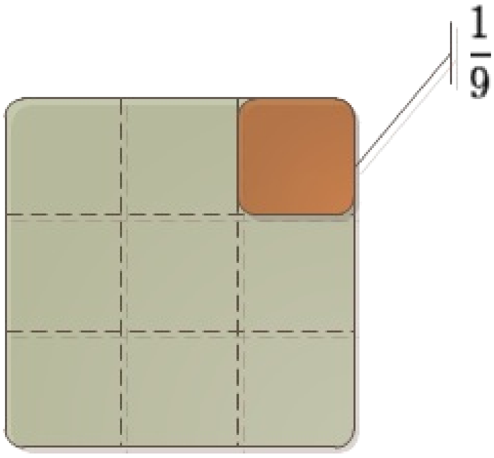
Une fraction est donc un **nombre**.
Saviez-vous qu'il est possible de déterminer *d'un seul coup d'oeil* si une fraction vaut un nombre inférieur, égal ou supérieur à 1 ?

Comment ? Regardez bien les schémas qui vont suivre (et que vous connaissez déjà).

Découpage d'un gâteau

Si on mange un bout d'un gâteau...

Imaginons qu'on ait un gâteau découpé en 9 parts et qu'on en mange 1 part :

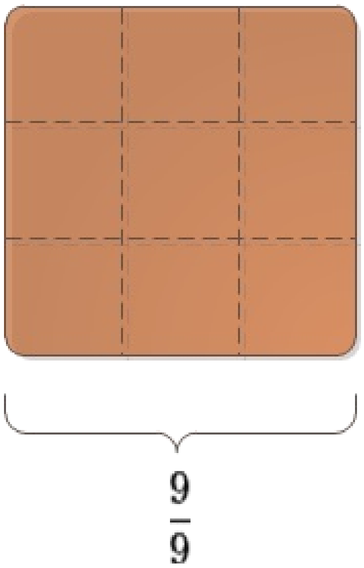


Si on prend comme ici 1 part d'un gâteau découpé en 9 parts, on a $\frac{1}{9}$ morceau de gâteau. Dans ce cas, on a entre les mains *moins* d'1 gâteau (ben oui, puisqu'on n'en a qu'un bout). On peut le vérifier en calculant le nombre correspondant à la fraction : $1 \div 9 = 0,1111111$.

La fraction $\frac{1}{9}$ (qui est égale à $0,1111111$) est donc inférieure à 1.

Si on mange le gâteau entier...

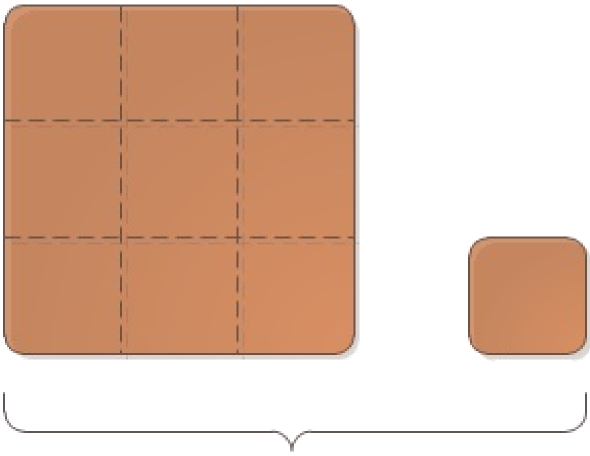
Maintenant, imaginons qu'on mange toutes les parts du gâteau :



Alors on a mangé très exactement <u>1 gâteau</u> ! Calculez et vous verrez d'ailleurs que $\frac{9}{9} = 9 \div 9 = 1$.

Si on mange le gâteau entier ET des parts d'un autre gâteau (mode super gourmand)

Supposons qu'on prenne une part de plus encore (parce qu'il y a un deuxième gâteau à côté), on mange alors $\frac{10}{9}$ parts de gâteau.



$$\frac{10}{9}$$

On a donc mangé plus d'1 gâteau ! Ca se vérifie facilement en calculant la fraction : $\frac{10}{9} = 10 \div 9 = 1,111111$

A retenir

Comment savoir facilement si une fraction est inférieure, égale ou supérieure à 1 ?

Pas besoin de calculer le résultat de la division ! Il suffit de comparer le numérateur est le dénominateur ! Retenez bien ceci :

- Quand le numérateur est **inférieur** au dénominateur (ex : $\frac{1}{9}$), alors **la fraction est inférieure à 1**.
- Quand le numérateur est **égal** au dénominateur (ex : $\frac{9}{9}$), alors **la fraction est égale à 1**.
- Quand le numérateur est **supérieur** au dénominateur (ex : $\frac{10}{9}$), alors **la fraction est supérieure à 1**.

A vous de jouer !

Sans calculer la division, juste en regardant le numérateur et le dénominateur, dites-moi pour chacune de ces fractions si elle est inférieure, égale ou supérieure à 1 :

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{7}{2}$

C. $\frac{8}{8}$

D. $\frac{3}{6}$

Secret (cliquez pour afficher)

A. $\frac{3}{4}$ est **inférieur** à 1, car le numérateur (3) est plus petit que le dénominateur (4).

B. $\frac{7}{2}$ est **supérieur** à 1, car le numérateur (7) est plus grand que le dénominateur (2).

C. $\frac{8}{8}$ est **égal** à 1, car le numérateur est le dénominateur sont identiques (8) !

D. $\frac{3}{6}$ est **inférieur** à 1 car le numérateur (3) est plus petit que le dénominateur (6).

Additionner et soustraire des fractions

On peut faire tous types de calculs avec les fractions. Après tout, ce sont des nombres, alors pourquoi ne pourrait-on pas les additionner ou les soustraire entre elles ?

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{2} = ?$$

Il y a quand même des règles à respecter pour pouvoir faire une addition (ou une soustraction) entre deux fractions. Il va falloir être attentif au dénominateur (le nombre en bas !) des deux fractions, car celui-ci doit être identique pour qu'on puisse effectuer le calcul !

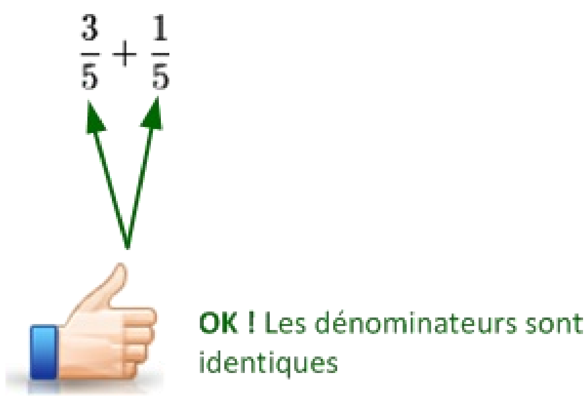
Quand le dénominateur des deux fractions est identique

Exemple d'addition

Quand vous devez additionner (ou soustraire) deux fractions qui ont **le même dénominateur**, c'est le cas le plus simple. Par exemple :

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$$

Regardez bien les dénominateurs de l'opération. Ils sont identiques ? Oui, c'est le nombre 5 pour les deux fractions. Parfait, on peut continuer.



Dans ce cas, vous rassemblez les deux fractions en conservant le même dénominateur, et additionnez les numérateurs :

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{5}=\frac{4}{5}$$

Le résultat est donc $\frac{4}{5}$.

Comme vous le voyez, le dénominateur reste le même. On fait juste une addition entre les numérateurs.

Exemple de soustraction

Pour soustraire deux fractions, c'est le même principe. Si le dénominateur est identique (et uniquement dans ce cas !), vous pouvez soustraire les numérateurs.

Par exemple, si on veut calculer :

$$\frac{6}{9}-\frac{2}{9}$$

On garde le même dénominateur, et on soustrait les numérateurs entre eux :

$$\frac{6}{9}-\frac{2}{9}=\frac{6-2}{9}=\frac{4}{9}$$

Quand le dénominateur des deux fractions est différent

Quand le dénominateur est différent, par contre, aïe aïe aïe ! Vous ne pourrez pas calculer immédiatement l'addition (ou la soustraction).

$$\frac{6}{4}+\frac{3}{8}=?$$

Dans ce cas, les dénominateurs sont différents : il y a un 4 et un 8 !

Pas le choix : il faut trouver un moyen de rendre les dénominateurs égaux, sinon on ne pourra pas faire le calcul !

Comment on fait pour rendre les dénominateurs identiques ? C'est de la magie ?

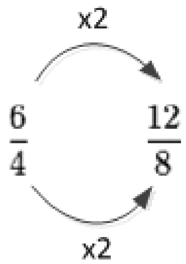
Mais non mais non. En maths, il n'y a jamais de magie.

Mettre les fractions au même dénominateur...

Pour faire le calcul, on doit donc mettre les fractions au même dénominateur. Et c'est tout à fait possible !

Prenez nos deux fractions : $\frac{6}{4}$ et $\frac{3}{8}$. Vous vous souvenez qu'on peut multiplier le numérateur et le dénominateur d'une fraction sans changer sa valeur ?

Je vous avais présenté le principe dans l'introduction aux fractions :



Si on multiplie par 2 le numérateur et le dénominateur de $\frac{6}{4}$, on obtient la fraction $\frac{12}{8}$. **Cette fraction est identique**, car on a multiplié le numérateur et le dénominateur par le même nombre !

Puisque $\frac{6}{4} = \frac{12}{8}$, on peut remplacer $\frac{6}{4}$ par $\frac{12}{8}$ dans notre opération !

$$\frac{6}{4} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} + \frac{3}{8}$$

... et calculer !

Maintenant qu'on a réussi à obtenir deux fractions avec le même dénominateur, on peut calculer le résultat comme on a appris à le faire un peu plus tôt :

$$\frac{12}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12+3}{8} = \frac{15}{8}$$

Méthode pour mettre les fractions au même dénominateur

Vous n'avez pas compris comment j'ai fait pour mettre les fractions au même dénominateur ? Ok, prenons un autre exemple : $\frac{5}{2} - \frac{1}{6}$. Comment devez-vous vous y prendre pour mettre ces fractions au même dénominateur ?

1. Regardez la fraction qui a le plus petit dénominateur. Ici, c'est $\frac{5}{2}$ (car 2 est plus petit que 6).
2. Essayez de multiplier ce nombre pour obtenir le plus grand dénominateur :
   $\frac{5}{2} - \frac{1}{6}$
   x ?
   Ici, on veut passer de 2 à 6. Pour faire ça, il faut multiplier par **3**, car $2 \times 3 = 6$
3. Maintenant que vous savez cela, prenez la fraction qui a le plus petit dénominateur ($\frac{5}{2}$) et multipliez son numérateur *et* son dénominateur par ce nombre : $\frac{5 \times 3}{2 \times 3} = \frac{15}{6}$.

Et voilà ! On a transformé notre fraction $\frac{5}{2}$ en $\frac{15}{6}$, on peut maintenant calculer facilement l'opération :

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}-\frac{1}{6} &= \frac{15}{6}-\frac{1}{6}\\ &= \frac{15-1}{6}\\ &= \frac{14}{6}\end{aligned}$$

A vous de jouer !

Calculez les opérations suivantes. La première est facile, car le dénominateur est le même, et les deux suivantes sont un peu plus difficiles car il faut mettre les fractions au même dénominateur :

A. $\frac{6}{4}+\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{4}+\frac{2}{8}$

C. $\frac{9}{10}-\frac{3}{5}$

Secret **(cliquez pour afficher)**

Question A

$$\frac{6}{4}+\frac{1}{4}$$

Les deux dénominateurs sont identiques (4). C'est très facile, il suffit d'additionner les numérateurs :

$$\frac{6}{4}+\frac{1}{4}=\frac{6+1}{4}=\frac{7}{4}$$

Question B

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{8}$$

Les dénominateurs sont différents ! Pas de panique ! On suit la méthode que je vous ai présentée :

1. On repère la fraction qui a le plus petit dénominateur. C'est $\frac{3}{4}$ (car 4 est plus petit que 8).
2. On cherche un nombre qui permet de passer de 4 à 8 à l'aide d'une multiplication. C'est 2, car $4\times 2=8$
3. On multiplie donc le numérateur et le dénominateur de la fraction par 2 : $\frac{3\times 2}{4\times 2}=\frac{6}{8}$

On a transformé $\frac{3}{4}$ en $\frac{6}{8}$, on peut maintenant effectuer le calcul !

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}+\frac{2}{8} &= \frac{6}{8}+\frac{2}{8}\\ &= \frac{6+2}{8}\\ &= \frac{8}{8}\end{aligned}$$

Ce qui fait d'ailleurs 1, comme nous l'avons appris, car le numérateur et le dénominateur sont identiques (8).

Question C

$$\frac{9}{10}-\frac{3}{5}$$

Encore une fois, les dénominateurs sont différents. Pas de chichis, mettez-moi tout ça au même niveau soldat !

1. La fraction qui a le plus petit dénominateur est $\frac{3}{5}$ (car 5 est plus petit que 10).
2. On cherche un nombre qui permet de passer de 5 à 10 à l'aide d'une multiplication. C'est 2, car $5 \times 2 = 10$.
3. On multiplie le numérateur et le dénominateur par 2 : $\frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10}$

Bingo ! Il ne reste plus qu'à remplacer la fraction et calculer :

$$\begin{aligned}\frac{9}{10}-\frac{3}{5} &= \frac{9}{10}-\frac{6}{10}\\ &= \frac{9-6}{10}\\ &= \frac{3}{10}\end{aligned}$$

Multiplier des fractions
La multiplication ? Rien de plus simple !

Les additions et les soustraction sont simples mais demandent un peu de réflexion quand le dénominateur des fractions est différent. Vous vous dites sûrement : "*Aïe aïe aïe, qu'est-ce qui m'attend pour la multiplication*" ?

Eh bien non rassurez-vous, multiplier des fractions entre elles, c'est super simple en fait ! Prenons l'exemple suivant :

$$\frac{5}{3} \times \frac{2}{4}$$

Comment faire le calcul ? **Il suffit de multiplier les numérateurs et dénominateurs entre eux !**

$$\frac{5}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{5 \times 2}{3 \times 4} = \frac{10}{12}$$

Trop facile !

On a tendance à confondre la multiplication avec l'addition et la soustraction de fractions ! Retenez bien :

- Pour **additionner ou soustraire des fractions** : on doit mettre les dénominateurs au même niveau, puis calculer l'addition (ou la soustraction) entre les numérateurs. On ne doit pas additionner ou soustraire les dénominateurs !
- Pour **multiplier des fractions** : on doit multiplier les numérateurs *et* les dénominateurs entre eux.

Astuce : simplifier les fractions que l'on multiplie

Lorsque vous multipliez des fractions entre elles, vous pouvez les simplifier pour obtenir des nombres moins grands et donc une fraction plus simple.

Prenons cet exemple :

$$\frac{3}{8} \times \frac{2}{5}$$

On pourrait le calculer comme on vient d'apprendre à le faire :

Secret (cliquez pour afficher)

$$\frac{3}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{8 \times 5} = \frac{6}{40}$$

Ce résultat est correct, mais il est possible de trouver une fraction plus simple avec des nombres moins grands. Pour cela, il faut repérer des nombres qui sont identiques entre le numérateur et le dénominateur.

A priori, dans $\frac{3 \times 2}{8 \times 5}$, il n'y a pas de nombre identique en haut et en bas... Mais regardez, le 8 peut aussi s'écrire 2×4 :

$$\frac{3 \times 2}{8 \times 5} = \frac{3 \times 2}{2 \times 4 \times 5}$$

On obtient du coup un nombre identique dans le numérateur et le dénominateur. Dans un cas comme ça, on peut **supprimer** le nombre qu'on retrouve en haut et en bas ! Oui oui ! Ca nous donne :

$$\frac{3 \times 2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{3 \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times 4 \times 5} = \frac{3}{4 \times 5} = \frac{3}{20}$$

Les calculs sont plus simples à faire si on simplifie la fraction avant.

A vous de jouer !

Calculez :

A. $\frac{3}{7} \times \frac{5}{2}$

B. $\frac{11}{3} \times \frac{3}{5}$ (et essayez de simplifier avant de calculer)

C. $\frac{9}{4} \times \frac{2}{5}$ (et essayez de simplifier avant de calculer)

Secret (cliquez pour afficher)

Question A

$\frac{3}{7} \times \frac{5}{2}$

On multiplie les numérateurs et dénominateurs entre eux :

$\frac{3}{7} \times \frac{5}{2} = \frac{3 \times 5}{7 \times 2} = \frac{15}{14}$

Question B

$\frac{11}{3} \times \frac{3}{5}$

On se prépare à multiplier les fractions :

$\frac{11}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{11 \times 3}{3 \times 5}$

... Et on voit qu'on peut simplifier car il y a un 3 en haut et en bas de la fraction.

$\frac{11 \times 3}{3 \times 5}$

On peut donc retirer ce 3 en haut et en bas, et on obtient :

$\frac{11}{5}$

Question C

$\frac{9}{4} \times \frac{2}{5}$

Même principe, on va multiplier les numérateurs et dénominateurs entre eux :

$\frac{9}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{9 \times 2}{4 \times 5}$

... mais avant d'aller plus loin, on voit qu'on peut simplifier. En effet, 4 peut aussi s'écrire 2×2 :

$\frac{9 \times 2}{2 \times 2 \times 5}$

Comme on retrouve le même nombre en haut et en bas de la fraction, on peut le retirer pour simplifier :

$\frac{9}{2 \times 5}$

On peut maintenant finir de calculer l'opération :

$\frac{9}{2 \times 5} = \frac{9}{10}$

Comparer des fractions

Comparer des fractions entre elles est vraiment simple, mais il faut connaître la règle de base (qui est la même que pour l'addition) : les dénominateurs doivent être égaux. Si les dénominateurs sont égaux, alors il suffit de comparer les numérateurs entre eux pour savoir quelle fraction est la plus grande.

Quand les dénominateurs sont égaux

Essayons de comparer $\frac{3}{7}$ et $\frac{5}{7}$.

Les dénominateurs sont égaux, on peut comparer les numérateurs entre eux : $3 < 5$. Cela veut donc dire que $\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$. C'est aussi simple que ça !

Quand les dénominateurs sont différents

On ne peut pas comparer des fractions dont le dénominateur est différent. Il faut ramener les fractions au même dénominateur, comme on a appris à le faire pour l'addition et la soustraction.

Essayons de comparer $\frac{5}{12}$ et $\frac{2}{3}$.

Ces fractions ont un dénominateur différent, changeons cela :

1. La fraction qui a le plus petit dénominateur est $\frac{2}{3}$
2. Pour transformer 3 en 12, on doit multiplier par 4 ($3 \times 4 = 12$)
3. On multiplie donc le numérateur et le dénominateur par 4 : $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$

Parfait ! On peut comparer $\frac{5}{12}$ et $\frac{8}{12}$: il suffit de comparer les numérateurs. $5 < 8$, donc $\frac{5}{12} < \frac{8}{12}$

Pour bien répondre à la question, on va remplacer $\frac{8}{12}$ par sa fraction équivalente dans l'énoncé ($\frac{2}{3}$). La réponse est donc :

$\frac{5}{12} < \frac{2}{3}$

A vous de jouer !

Comparez ces fractions entre elles :

A. $\frac{6}{5}$ et $\frac{4}{5}$

B. $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{9}$

C. $\frac{7}{2}$ et $\frac{10}{4}$

Secret (cliquez pour afficher)

Question A

$$\frac{6}{5} > \frac{4}{5}$$

Il suffisait de comparer les numérateurs entre eux.

Question B

Comparer : $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{9}$

Pour comparer ces fractions dont le dénominateur est différent, il faut les mettre au même dénominateur. $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{6}{9}$

$$\frac{6}{9} > \frac{5}{9}$$

Donc, $\frac{2}{3} > \frac{5}{9}$

Question C

Comparer : $\frac{7}{2}$ et $\frac{10}{4}$

On met les fractions au même dénominateur : $\frac{7}{2} = \frac{7 \times 2}{2 \times 2} = \frac{14}{4}$

$$\frac{14}{4} > \frac{10}{4}$$

Donc :

$$\frac{7}{2} > \frac{10}{4}$$

Vous savez maintenant faire de nombreux calculs avec les fractions, bravo !
Retenez bien ce que vous avez appris dans ce chapitre, vous en aurez besoin pendant très très longtemps.

Ce cours n'en est qu'à ses débuts ! Son ambition est de couvrir les mathématiques du niveau 6ème au niveau Terminale.
Je projette de donner la priorité à l'algèbre (nombres, calculs...) et l'analyse (fonctions...) dans un premier temps. Je laisserai de côté la géométrie pour commencer, mais je compte bien compléter le cours par la suite dans ce domaine.

Ce cours est **ouvert à toutes les remarques constructives**. Je ne prétends pas avoir trouvé la meilleure méthode, je suis bel et bien ouvert aux idées.
Si vous êtes élève ou professeur, des retours d'expérience me seraient très utiles. N'hésitez pas à commenter le cours et à raconter vos anecdotes :

- **Elèves** : ce cours vous a-t-il aidé à réussir un devoir ? Votre moyenne a-t-elle augmenté ? Comprenez-vous mieux ici que sur votre manuel ? Y a-t-il de grosses différences par rapport au cours de votre professeur ?
- **Professeurs** : le cours est-il bien en adéquation avec le niveau des élèves ? Utilisez-vous parfois des méthodes différentes pour expliquer certains concepts ? Avez-vous utilisé des morceaux de ce cours pour construire vos propres

cours (allez-y, vous avez le droit) ? Quels sont les retours des élèves ?

Pour en parler, je vous invite à discuter dans ce sujet des forums que j'ai créé. Merci !