Tours de magie mathématiques

Par Mickaël Launay (GéoMI17)

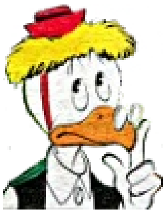
www.openclassrooms.com

Dernière mise à jour le 27/07/2012

Sommaire

Sommaire ... 2
Partager ... 1
Tours de magie mathématiques ... 3
Organisation du cours ... 3
Partie 1 : Tours de combinatoire ... 4
Ces talents de roi ★★ ... 4
Le tour ... 4
Comment ça marche ? ... 8
Graphes bipartis ... 10
Le voyage de Neptune ★★ ... 14
Le tour ... 14
Comment ça marche ? ... 17
Variantes ... 22
Les permutations ... 22
Partie 2 : Tours de probabilité ... 24
La course automobile ★★★ ... 25
Le tour ... 25
Comment ça marche ? ... 27
Variantes ... 28
Couplage de processus aléatoires ... 29

Tours de magie mathématiques

Par  Mickaël Launay (GéoMl17)

Mise à jour : 27/07/2012
Difficulté : Facile

Les maths, c'est magique !

À moins que ce ne soit la magie qui soit mathématique. Vous ne me croyez pas ? Il y a pourtant un point commun entre les mathématiques et la magie, c'est que l'on utilise souvent des trucs, des petites astuces toutes simples qui font s'écrier « Ah mais oui, bien sûr ! » une fois qu'on nous les a expliquées mais qui ne sont pas si faciles à comprendre tout seul.

Il existe ainsi une multitudes de tours de magie, dont le « truc » fait appel à un stratagème mathématique. Ces tours sont souvent systématiques, c'est-à-dire qu'ils ne nécessitent pas d'être doué d'une grande dextérité, de savoir cacher des cartes dans ses manches ou autres manipulations techniques. Il suffit de comprendre le fonctionnement logique pour pouvoir le mettre en œuvre. Ce sont ces tours que vous allez pouvoir apprendre dans ce tutoriel.

Ce tutoriel s'adresse à tous, quel que soit votre âge, votre niveau en maths ou vos *a priori* sur la matière. Il peut en particulier être utilisé par les profs de maths qui souhaitent mettre un peu de sel dans leurs cours pour intéresser leurs élèves, ou les animateurs qui cherchent des idées d'animations éducative à faire avec des enfants

Alors c'est parti. Sortez vos jeux de cartes, vos dés et vos neurones, vous allez pouvoir épater vos amis !

Organisation du cours

Les tours sont classés par thème mathématique. Pour l'instant seules les parties ***Tours de combinatoire*** et ***Tours de probabilités*** sont présentes, elles seront complétées au fur et à mesure de l'écriture de nouveaux tours.

À chaque tour est associé un nombre d'étoiles indiquant son niveau mathématique. Le barème est approximativement le suivant :

★ - Facile
★★ - Moyen
★★★ - Expert

Bien sûr un tel barème est relatif et subjectif. Cela dépend aussi de votre niveau et de vos goût. Par ailleurs, ce barème concerne uniquement le niveau des explications mathématiques qui suivent chaque tour, mais leur exécution est accessible à tous.

Chaque tour se compose de trois parties :

- la première décrit le déroulement du tour, les manipulations à effectuer ainsi que le « baratin » (en *marron italique*), c'est-à-dire la petite histoire qui accompagne l'exécution du tour ;
- la deuxième explique fonctionnement du tour et les mécanismes logiques et mathématiques qui interviennent pour que ça marche ;
- la troisième, plus théorique, constitue une introduction un peu plus large aux notions et aux théories mathématiques mises en œuvre.

Partie 1 : Tours de combinatoire

Retrouvez dans cette partie differents tours de magie faisant intervenir des notions logiques et combinatoires tels que les graphes, les permutations ou les dénombrements.

Ces talents de roi ★★

Voici un tour de cartes facile à réaliser qui exploite une jolie propriété des pliages. Le tout enrobé d'une histoire de roi puissant et d'une bande d'audacieux voleurs d'œuvres d'art.

Effet. Les seize cartes sont disposées en carré 4×4 sur la table. Les spectateurs plient ce carré dans l'ordre qu'ils veulent pour n'obtenir qu'un paquet de seize cartes. Et pourtant à la fin seuls les quatre rois se retrouvent dans le même sens dans le paquet ainsi formé.

Matériel
• 16 cartes à jouer, dont les 4 rois et 12 autres cartes (plutôt des valeurs que des figures pour éviter les confusions avec les rois).

Le tour

Il y a bien longtemps, vivait en Angleterre un roi riche et puissant. C'était un grand amateur de peinture, au point qu'il n'y avait pas une salle de son palais qui ne fût richement ornée d'oeuvres des plus grands maîtres de son époque. Pour tout dire, la plupart de ces tableaux représentaient le roi lui-même, car son amour de la peinture n'avait d'égal que sa mégalomanie. Ici, c'était le roi à la chasse, et là le roi en armure, un peu plus loin le roi sur son trône ou encore le couronnement du roi... Bref, il était impossible de se trouver dans le palais sans être en permanence entouré de trois ou quatre représentations du souverain.

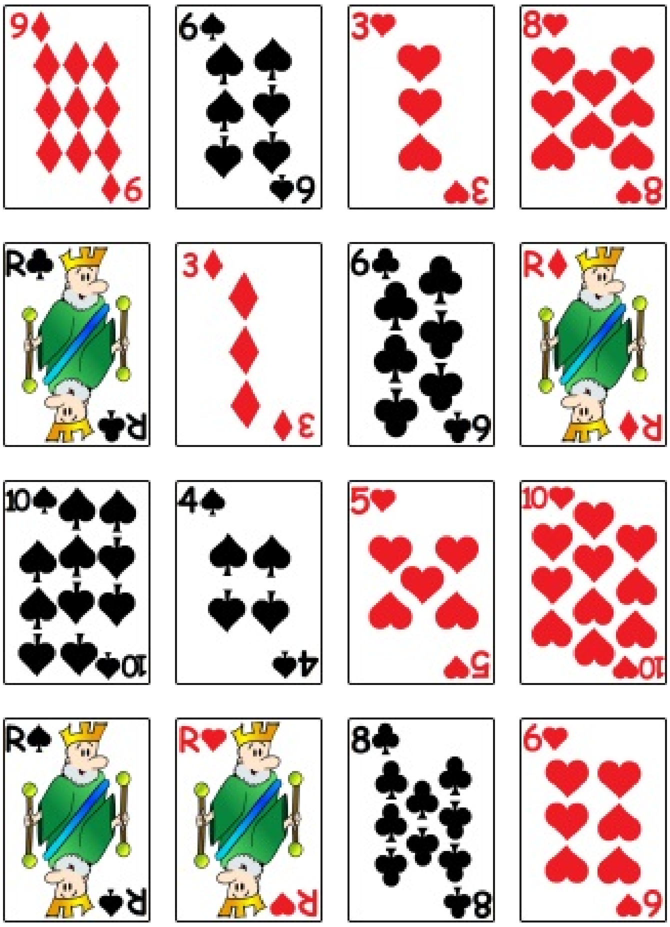
Tout en racontant cette histoire, prenez un jeu de cartes et sortez-en seize cartes, dont les quatre rois. Pour les douzes autres cartes, je vous conseille de choisir des numéros plutôt que des figures pour éviter les confusions.

Un jour, comme à son habitude, le roi arpentait son palais en se demandant ce qu'il pouvait bien faire pour impressionner les autres monarques du monde. Il lui vint une idée : faire réaliser la plus grande toile de tous les temps !

Prenez alors l'une de vos seize cartes, montrez la à votre public, puis expliquez leur qu'à cette époque, la taille standard des tableaux était celle-ci. (Bien sûr ce n'est que symbolique les vrais tableaux étaient plus grands, à moins que vous n'ayez un jeu de cartes géantes.)

Le souverain fit alors venir du monde entier et à prix d'or les plus grands peintres de l'époque pour leur demander de lui réaliser un tableau quatre fois plus grand que la taille standard ! Aussitôt, les artistes se mirent au travail. Le roi avait cependant une dernière exigence : puisque ce tableau allait être quatre fois plus grand qu'un tableau classique, le roi devrait y être représenté quatre fois ! Les peintres s'étonnèrent de ce caprice, mais comme ils étaient grassement payés, ils s'exécutèrent sans rien dire. Les voilà donc en train de réaliser leur œuvre gigantesques. Sur ce tableau la figure du roi est représentée quatre fois.

En racontant cela, construisez le tableau en disposant vos seize cartes de la façon suivante :

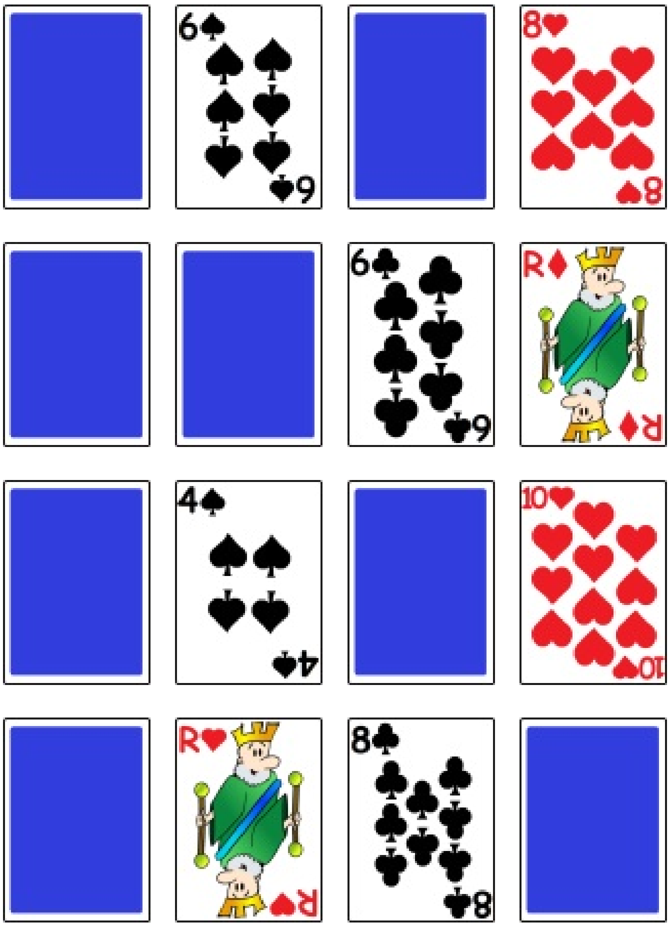


Attention : ceci représente ce que voit le public, vous devez donc vous entrainer à réaliser cette figure à l'envers si vous êtes en face d'eux. L'emplacement des quatre rois est primordial pour la suite du tour ! Le placement des autres cartes n'a pas d'importance.

Une fois l'ouvrage terminé, le roi très satisfait l'installa en bonne place dans la salle du trône où il faisait l'admiration de tous les hôtes du palais. Le roi de plus en plus fier, y faisait d'ailleurs régulièrement venir les invités les plus presitgieux. Mais au bout de quelque mois à admirer, admirer et admirer encore son tableau, il lui vint une lassitude, et emporté par son incroyable folie des grandeurs, le roi décida alors de faire incruster à l'intérieur du tableau en pierres précieuses la première lettre du mot "roi", c'est à dire K (n'oubliez pas que nous sommes en Angleterre et que le mot "Roi", en anglais se dit "King").

À cet endroit vous pouvez jouer avec votre public en leur demandant quelle est la première lettre du mot roi. Ils vont vous répondre R et vous pourrez les reprendre malicieusement en leur rappelant que s'ils suivaient ils se rappelleraient que l'histoire se déroule en Angleterre.

Retournez alors sur le tableau les huit cartes indiquées sur la figure pour former la lettre K (les dos de cartes symbolisent les pierres précieuses) :



Voilà ! Le souverain était maintenant absolument satisfait du résultat. Mais ce qu'il ne savait pas, c'est que l'œuvre d'art attirait les convoitises de tous les brigands d'Angleterre pour qui l'objet était devenu un véritable défi et que déjà bon nombre d'entre eux s'organisaient et préparaient le cambriolage du palais royal, pourtant réputé imprenable. Si bien qu'une nuit, un groupe de voleurs réussit à pénétrer jusque dans la salle du trône et à s'emparer de la toile. Ils avaient parfaitement préparé leur plan mais n'avaient pas pensé à une chose : le tableau était si grand qu'il ne passait pas par la porte !

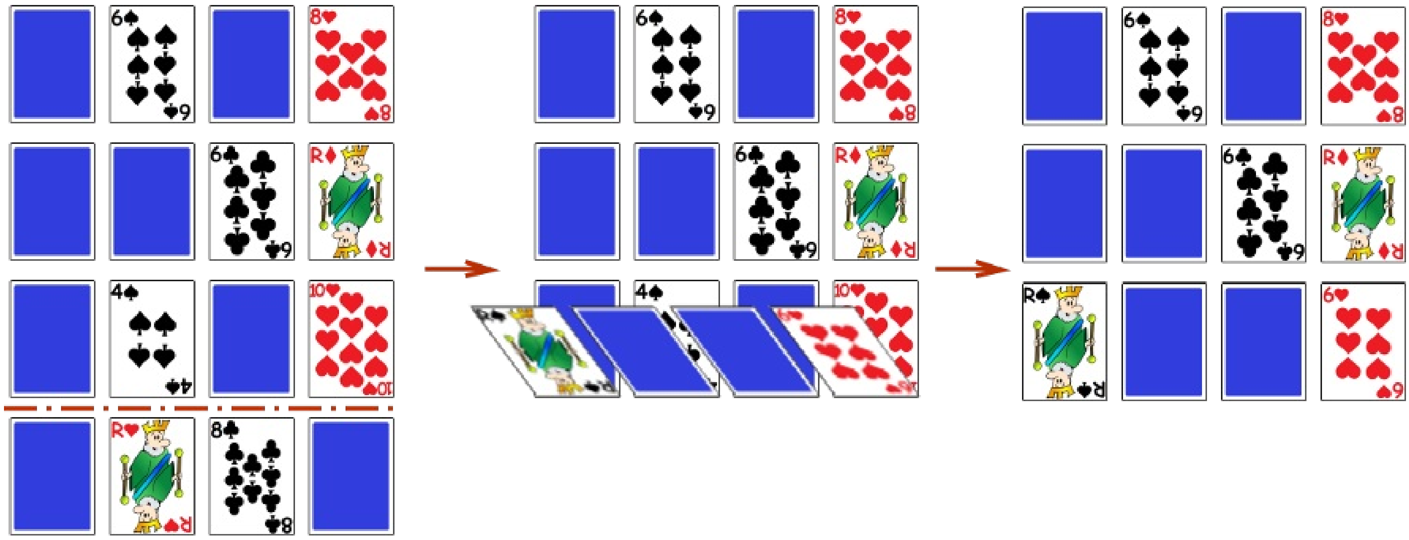
Montrez alors à votre public une carte (qui est restée dans le paquet), ou alors la boîte de votre paquet de cartes, en leur expliquant que la porte était de cette taille là.

Pour sortir le tableau, les brigands n'avaient qu'une solution, la plier afin qu'elle puisse passer par la porte.

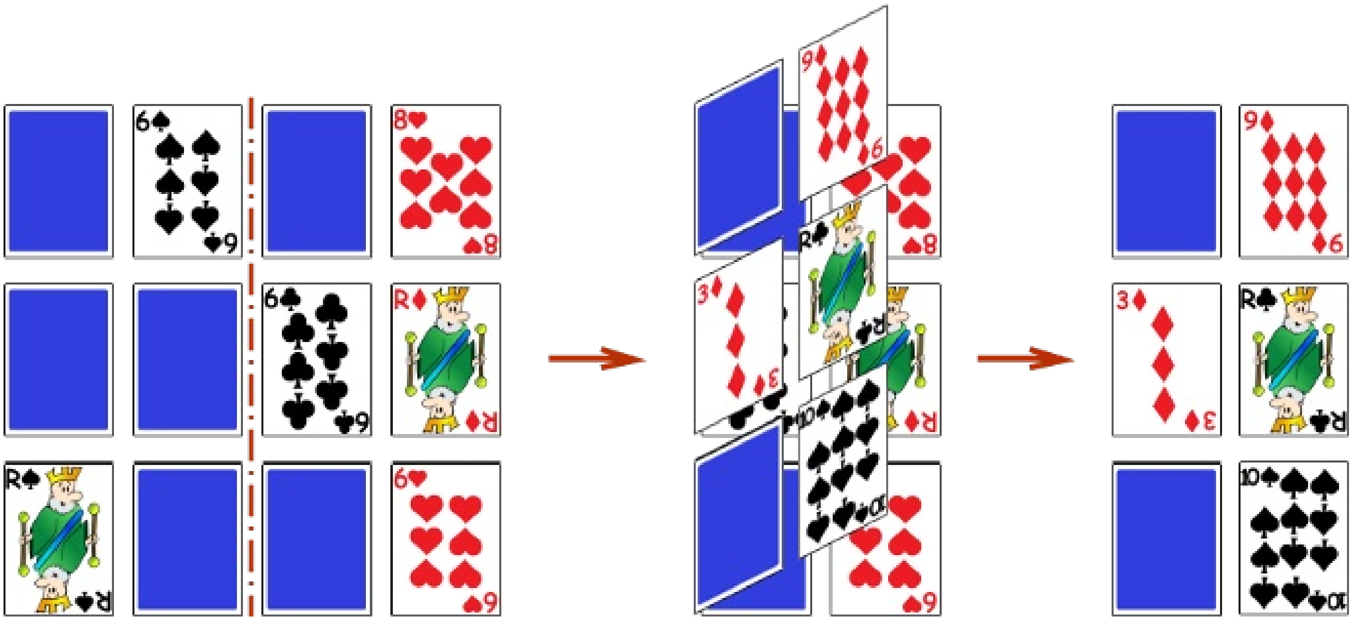
Expliquez alors à vos spectateurs que ce sont eux les voleurs, et qu'ils vont devoir plier la toile qui se trouve devant eux pour pouvoir s'échapper avant que l'alerte ne soit donnée. Désignez dans le public un premier voleur (ou demandez un voleur volontaire), et demandez lui de quelle façon, il veut plier le tableau : il peut le plier horizontalement ou verticalement, vers le haut, vers le bas, vers la gauche ou vers la droite, d'une, de deux ou de trois cartes.

Dans la suite du tour, faîtes attention à ce que les plis soient "bien faits" : les cartes déplacées sont retournées et placées au bon endroit selon la façon dont le voleur a décidé de faire son pli. Un pli mal fait peut faire rater le tour. Je vous conseille de demander à votre spectateur/voleur la façon dont il veut faire son pli, puis de le faire vous-même (en lui demandant de bien vérifier que vous ne trichez pas); au moins pour le premier pli afin que les spectateurs comprennent bien le principe (ce n'est pas que je prend vos spectateurs pour des imbéciles mais partez du principe que le public est sournois et que leur objectif est de faire rater votre tour !)

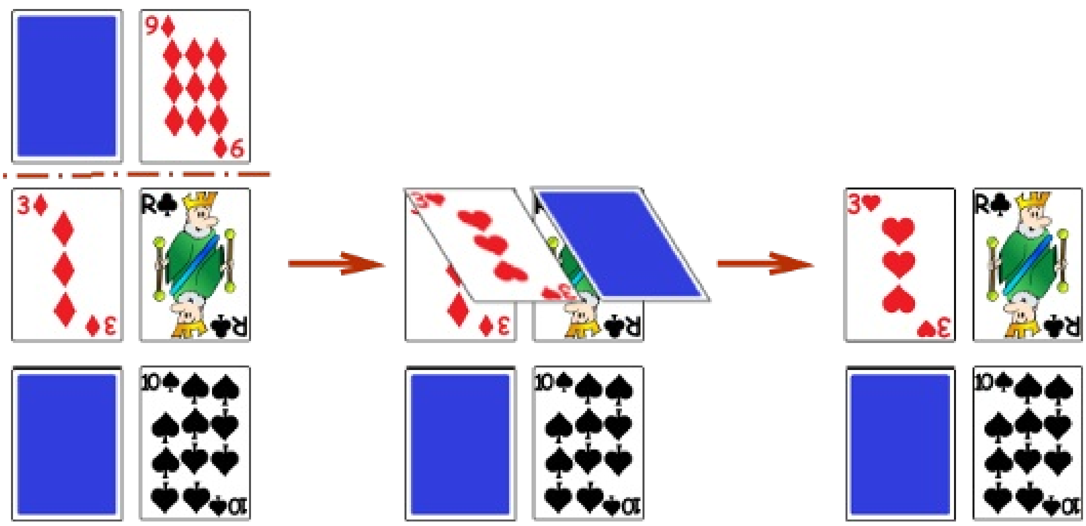
Disons donc que le premier voleur a décidé de plier le tableau de cette façon :



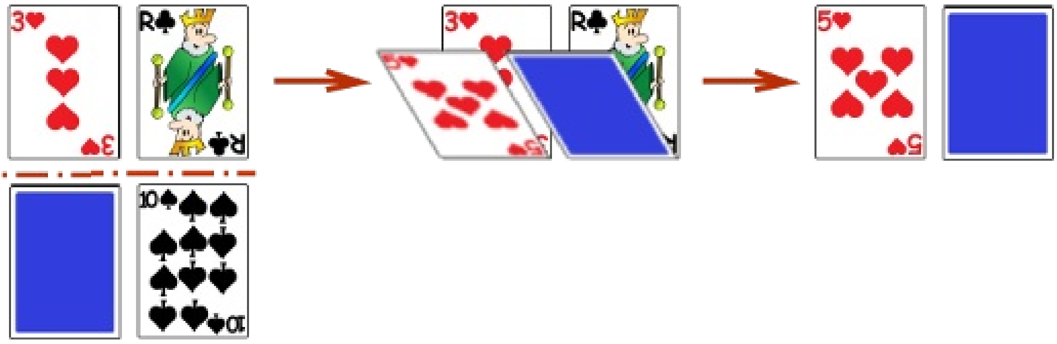
Le tableau ne passe toujours pas par la porte. Faîtes donc intervenir un deuxième voleur pour plier le tableau une deuxième fois. Par exemple :



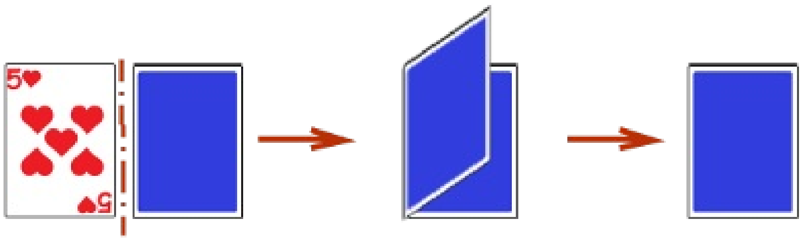
Puis continuez toujours de la même façon : les voleurs un à un plient le tableau, jusqu'à celui-ci puisse passer par la porte, c'est à dire jusqu'à ce que toutes les cartes soient réunis en un seul paquet. Les différents pliages peuvent par exemple être :



Quatrième voleur, quatrième pli :



Enfin, un dernier voleur fait le dernier pli pour que le tableau passe par la porte :



Ca y est ! Le tableau est plié, les voleurs s'en emparent et s'apprêtent à sortir du palais, mais trop tard. L'alerte a été donnée, la garde du roi les capture in extremis, récupère le tableau et envoit les voleurs téméraires croupir aux oubliettes du palais. En attendant, le roi a été réveillé en urgence et a été mis au courant de l'audacieuse tentative de cambriolage dont il vient d'être victime. Furieux, il convoque la garde royale et leur demandent de lui présenter le tableau récupéré pour vérifier que celui-ci n'a pas été endomagé. Les gardes s'éxécutent et déplient le tableau devant le roi.

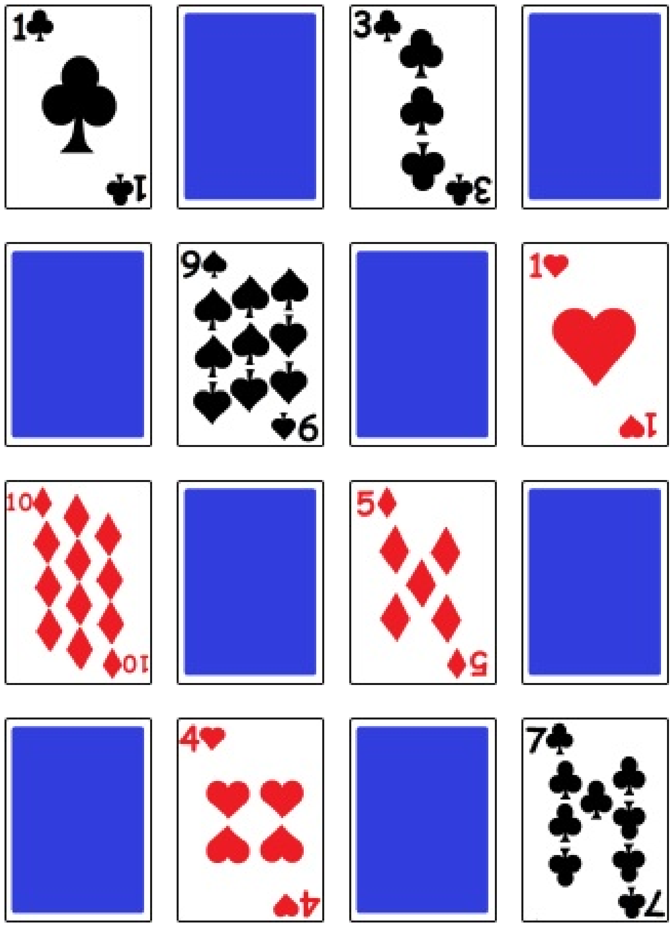
Etalez alors le paquet de carte en éventail devant vos spectateurs :

Le roi satisfait, pousse un soupir de soulagement en voyant ses quatres portraits, intacts.

Comment ça marche ?

Épatant, non ?  Vous pouvez refaire le tour autant de fois que vous voulez, faire des pliages différents, vous arriverez toujours au même résultat : seuls le quatre rois sont retournés face vers le haut. Alors comment comprendre ça ?

Pour y voir plus clair, je vous propose de faire une autre petite expérience. Prenez seize cartes (cette fois, prenez les cartes que vous voulez pas besoin de rois) et mettez les en carré comme précédemment. Seulement, au lieu de les mettre toutes face en haut, disposez les en damier en alternant une face vers le haut et une face vers le bas :

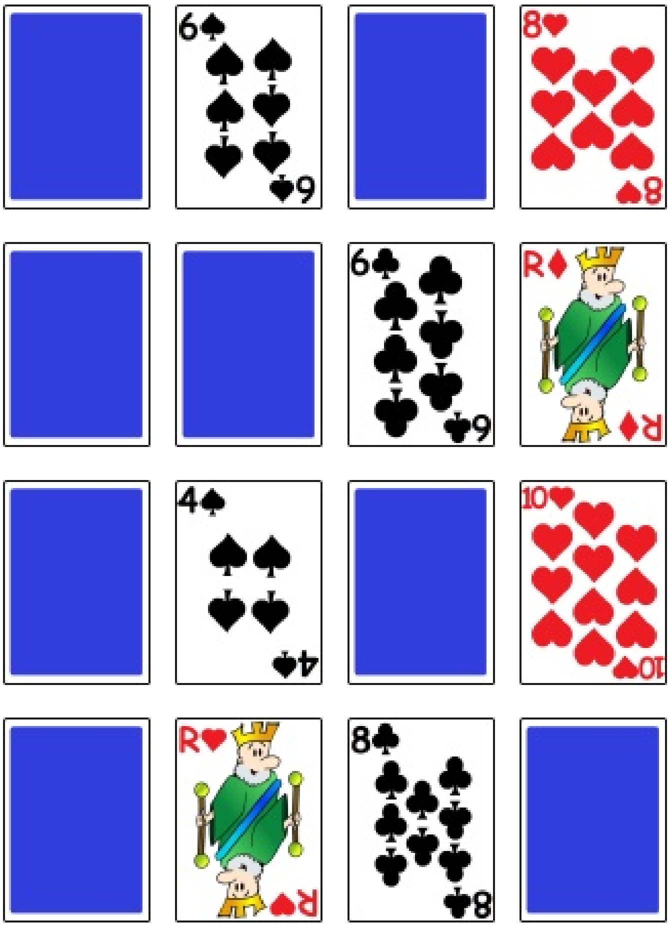


Que se passe-t-il si on essaye de plier ce tableau comme précédemment dans le tour ?

Essayez vraiment de le faire et vous allez voir que vous allez comprendre tout seul ce qui se passe.

Les cartes de dos en se retournant se retrouvent sur des cartes de face et inversement. De cette façon, vous aurez beau plier le tableau de toutes les manières imaginables, les cartes regroupées se retrouveront toujours dans le même sens. Et par conséquent, vous arriverez systématiquement à la fin avec un paquet dans lequel toutes les cartes sont dans le même sens. Pas une seule ne sera retournée par rapport aux autres !

Maintenant que nous avons constaté ceci, revenons à notre K :



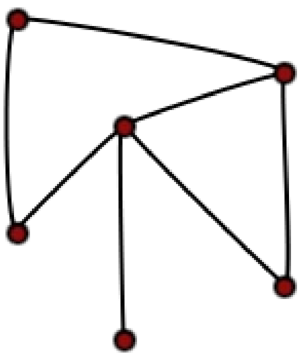
Ceci n'est pas un damier bien sûr. Mais si vous observez bien vous remarquerez que c'en est presque un. En réalité seule quatre cartes ne sont pas dans le bon sens pour former un damier. Et comme par hasard, ces quatre emplacements sont ceux où nous avons mis les rois au début de notre tour ! Retournez les quatre rois sur cette figure et vous verrez que vous retomberez sur le damier.

C'est aussi simple que ça ! Les rois sont les seuls à ne pas être dans le même sens que le damier, il est donc normal qu'ils soient les seuls à ne pas se retrouver dans le même sens que les autres une fois le pliage effectué. Aucune crainte à avoir : ça marche à tout les coups. C'est logique !

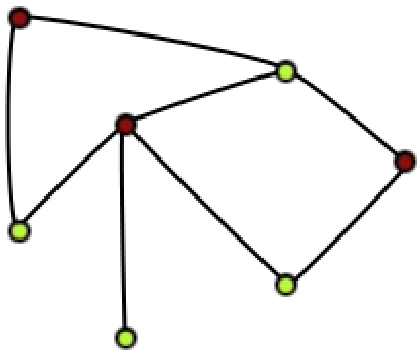
Une fois que vous avez compris le principe, vous pouvez inventer une multitude de variantes. Pour cela, il suffit de placer les cartes selon un rectangle de votre choix, puis d'en retourner certaines de façon à ce que toutes les cartes forment un damier sauf quelques unes. Ce sont ces cartes qui ne sont pas dans le même sens que le damier que vous allez retrouver dans le sens contraire après pliage. À vous ensuite de trouver une figure intéressante pour retourner les cartes et d'imaginer l'histoire qui va avec.

Graphes bipartis

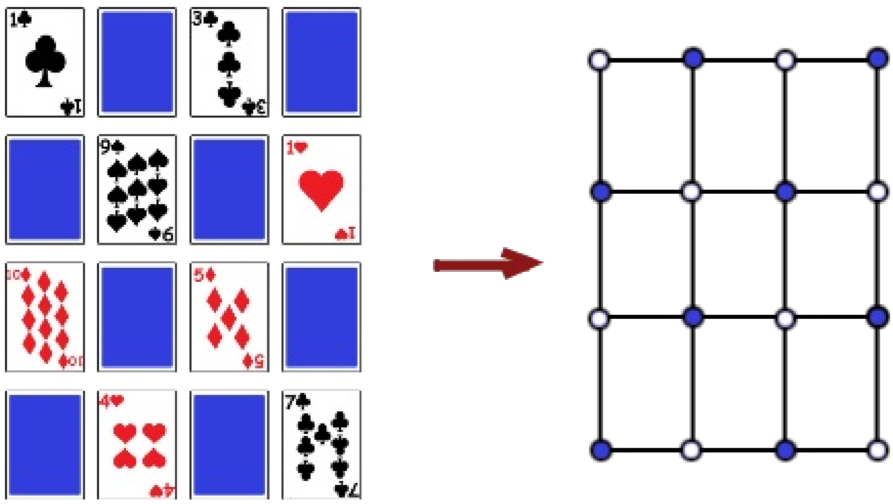
En mathématique, un **graphe** est un objet composé de sommets, qui peuvent être représentés par des points, et d'arêtes, qui sont représentées par des lignes reliant les sommets. Voici un exemple de graphe à 6 sommets et 7 arêtes :



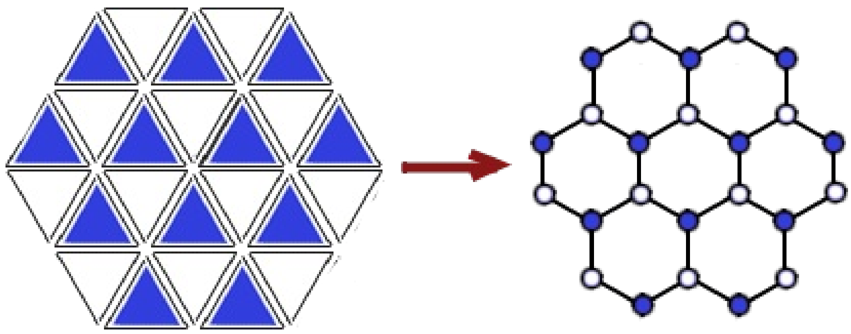
Un **graphe biparti**, est un graphe dont les sommets peuvent être coloriés de deux couleurs différentes de façon à ce que deux sommets reliés par une arête ne soient jamais de la même couleur. Voici un exemple de graphe biparti :



Si le tour que nous venons de voir est possible, c'est dû au fait que des cartes rectangulaires peuvent être disposées en damier, c'est à dire qu'elles correspondent à un graphe biparti : chaque carte est représentée par un sommet colorié selon qu'elle est de dos ou de face.

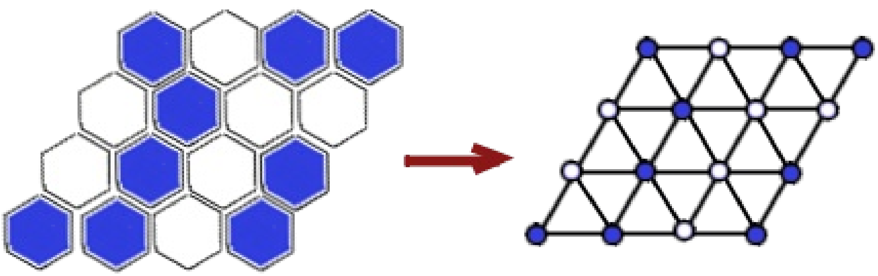


Regardons ce qui se passe si on essaye des formes de cartes différentes. Par exemple des cartes triangulaires :



Ici aussi, le placement des cartes correspond à un graphe biparti. Par conséquent, il est possible d'imaginer un tour de magie basé sur le même principe et utilisant des cartes en forme de triangles.

En revanche, si on regarde des cartes hexagonales :



La disposition ci-dessus ne fonctionne pas puisqu'il y a des cartes côte à côte qui sont de la même couleur. Et en réfléchissant un peu on se rend compte qu'il n'est pas possible de trouver un coloriage qui convient. En effet, le graphe associé contient des triangles or dans un triangle, il y a forcément deux sommets coloriés de la même couleur. En d'autre termes, ce graphe n'est pas biparti !

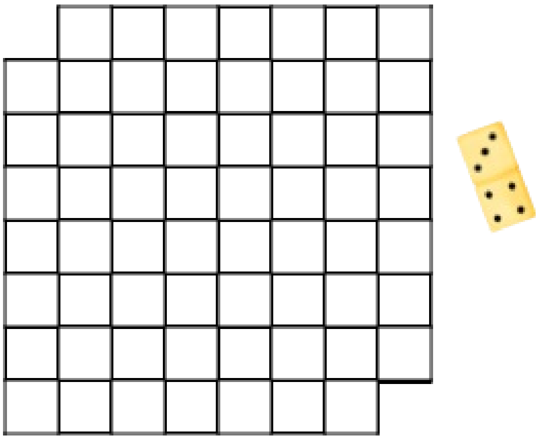
En fait, pour qu'un graphe soit biparti, il faut que tous les cycles qu'il contient soient de longueur paire pour pouvoir alterner les deux couleurs sans que deux couleurs identiques se côtoient. On a le théorème suivant.

Théorème. Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

Vu que le graphe des cartes hexagonales contient des triangles, qui sont des cycles de longueur 3, cela explique que le coloriage par deux couleur ne soit pas possible.

J'ai envie de vous mettre à l'épreuve pour voir si vous avez bien suivi. Voici une petite énigme pour mettre en application ces connaissances sur les graphes bipartis.

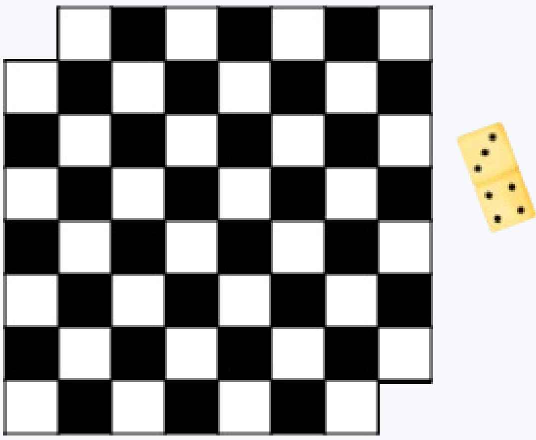
On dispose d'une grille de 8×8 à laquelle on a enlevé deux coins opposés. Pouvez-vous recouvrir ses 62 cases avec 31 dominos couvrant 2 cases chacun ?



Si vous séchez, voici la réponse :

Secret (cliquez pour afficher)

Si vous cherchez encore avec vos dominos, vous pouvez arrêter car la réponse est non : ce n'est pas possible ! Et l'explication se trouve dans les graphes bipartis. Comme pour les cartes, il est possible de colorier les cases en damier :



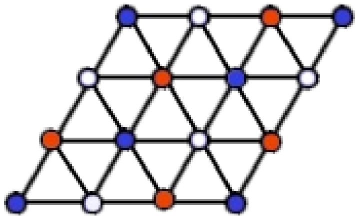
On remarque alors qu'il y a 32 cases blanches et 30 cases noire. Oui mais voilà, un domino recouvre toujours deux cases qui se touchent, donc une noire et une blanche. Pour pouvoir recouvrir la grille avec les 31 dominos, il faudrait qu'il y ait autant de cases noires que de cases blanches. C'est donc perdu : impossible de recouvrir notre grille.

Nombre chromatique d'un graphe

D'une manière générale, on appelle le **nombre chromatique** d'un graphe le nombre de couleurs nécessaires pour pouvoir colorier ses sommets sans que deux sommets voisins ne soient de la même couleur.

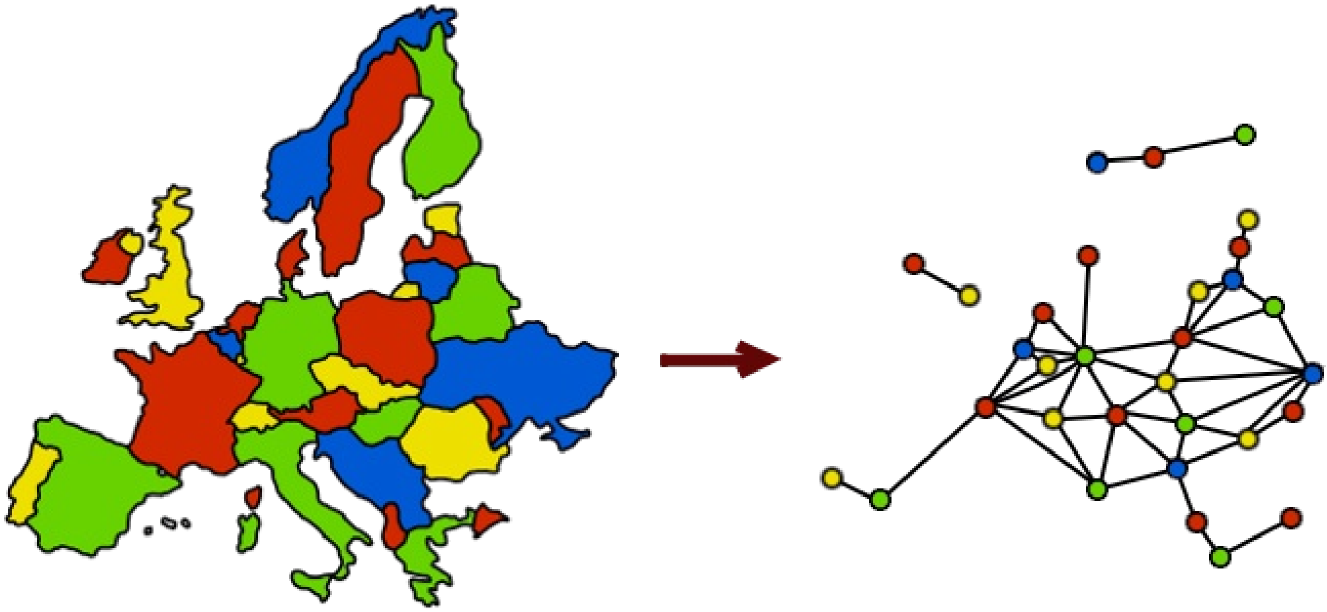
Ainsi, un graphe biparti est un graphe dont le nombre chromatique est égal à 2. (Si on ne tient pas compte du cas dégénéré d'un graphe qui n'a que des sommets et aucune arêtes et dont le nombre chromatique est égal à 1.)

Si on reprend l'exemple de notre graphe triangulaire ci-dessus, son nombre chromatique est égal à 3 :



Un célèbre résultat mathématique est le **théorème des quatre couleurs** qui affirme que tout graphe planaire (c'est-à-dire un graphe qui peut se dessiner dans un plan sans que les arêtes se croisent) peut être colorié avec seulement 4 couleurs. Autrement dit, le nombre chromatique d'un graphe planaire quelconque est au plus égal à 4.

En d'autres termes, ce théorème affirme qu'il est possible de colorier n'importe quelle carte avec seulement quatre couleurs.



Le voyage de Neptune ★★

Voici un tour de magie qui va vous faire voyager à travers le système solaire et vous faire découvrir quelques propriétés mathématiques des permutations.

Effet. Après avoir fait faire un petit voyage à Neptune, puis rassemblé les cartes des planètes en un seul paquet, on appelle les planètes une à une en égrenant une carte pour chaque lettre de leur nom. À chaque fois, la bonne planète arrive au bon moment.

Matériel
• 10 cartes représentant les 8 planètes du système solaire ainsi que le Soleil et Pluton. Vous pouvez imprimer ces cartes en les téléchargeant grâce aux liens suivants (format pdf) : Les huit planètes - Le Soleil et Pluton

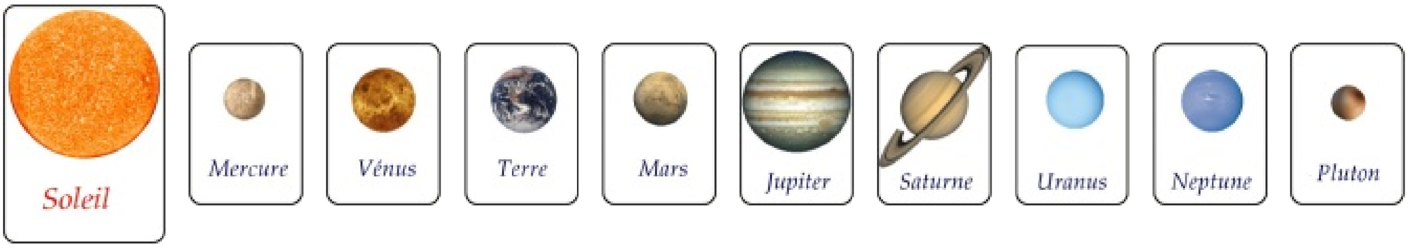
Le tour

Le système solaire est composé d'une étoile, le Soleil, ainsi que de huit planètes (de la plus proche à la plus éloignée du Soleil) : Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune.

En expliquant ceci à votre public, disposez les cartes de la façon suivante sur la table :

Cependant, jusqu'en 2006, les astonomes considéraient qu'il y avait une autre planète dans le système solaire : Pluton.

Placez Pluton après Neptune.



Pluton avait été découverte en 1930 et annoncée comme la neuvième planète. Seulement au fil des années les astronomes ont réalisé qu'elle ne méritait pas vraiment ce titre. En effet, Pluton était bien plus petite que la plupart des autres planètes et suivait une trajectoire inclinée par rapport aux autres. De plus, d'autres astres ayant à peu près la même taille que Pluton ont été trouvés, tels que Cérès dans la ceinture d'astéroïdes entre Mars et Jupiter. On ne pouvait pas donner à tous ces nouveaux astres le nom de planète donc les astronomes ont finalement décidé en 2006 de retirer Pluton de la liste des "vraies" planètes pour la mettre dans une autre catégorie, celle des planètes naines où elle rejoint Cérès, Éris, Makemake et Haumea.

Retirez Pluton des planètes posées sur la table (à partir de là, vous n'aurez plus besoin de cette carte).

Seulement voilà, Pluton évincé, la planète Neptune se retrouve à la place de dernière planète. Alors Neptune commence à *s'inquiéter en se disant que si jamais les astronomes se décidaient à supprimer une nouvelle planète, elle serait la prochaine victime. Elle pense alors qu'elle serait plus en sécurité si elle pouvait se raprocher du soleil. Et venir se placer par exemple entre Mercure et Vénus.*

Faîtes glisser Neptune et venez la placer entre Mercure et Vénus :

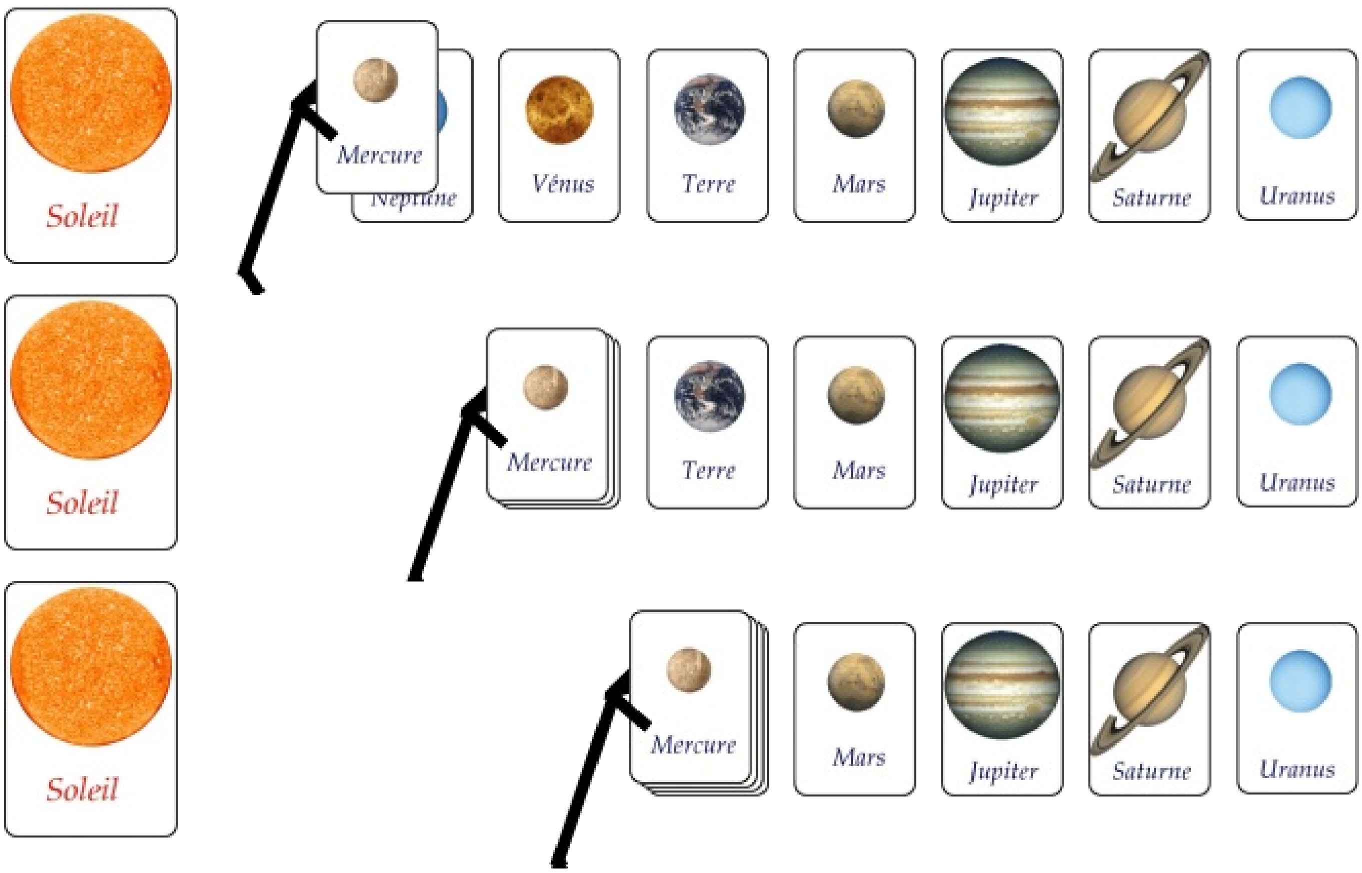
L'ordre des planètes serait alors le suivant : Mercure, Neptune, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus.

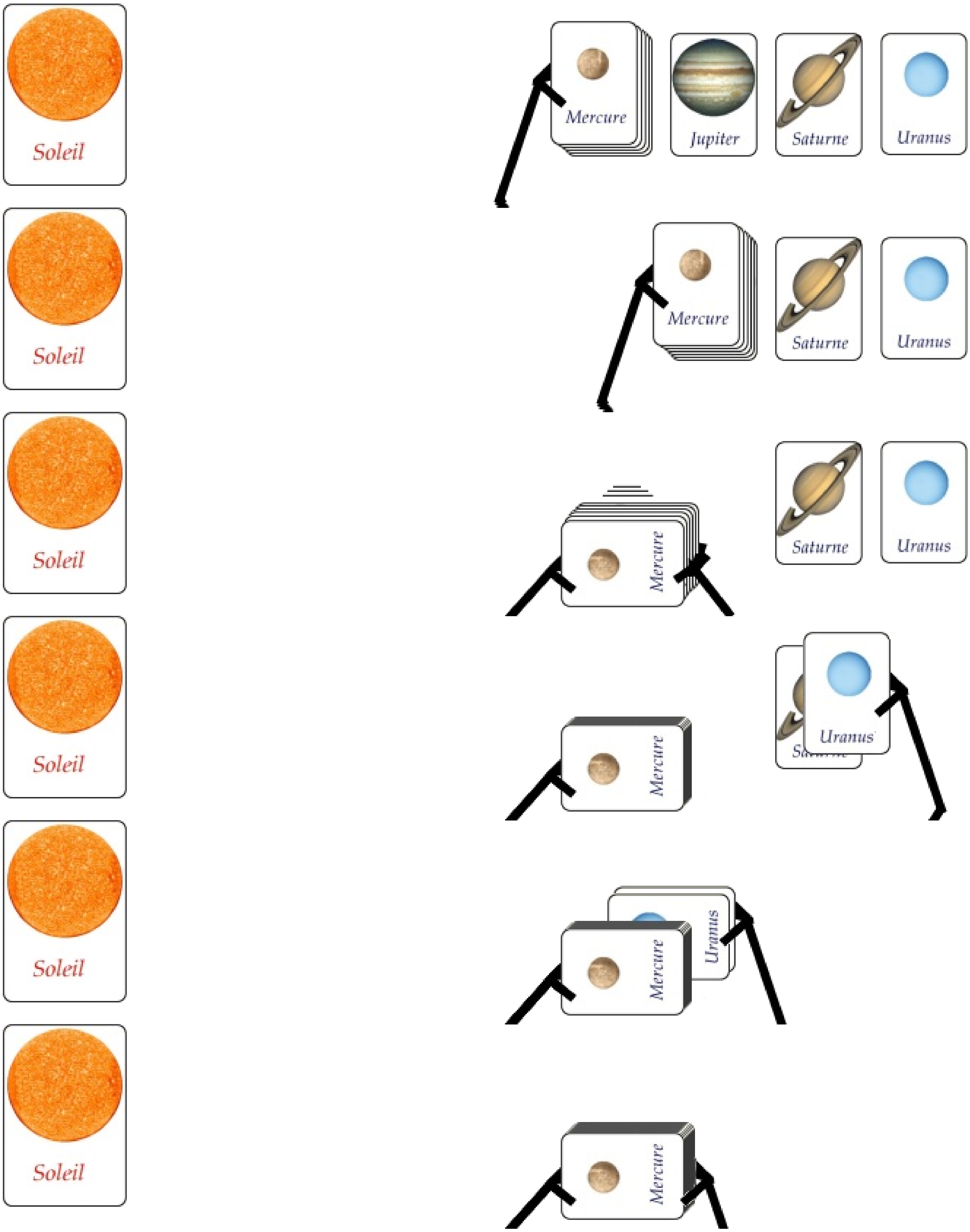
En énumérant les planètes, ramassez-les sur la table de la façon suivante :

- prenez Mercure et placez le sur Neptune ;
- puis placez le paquet Mercure-Neptune sur Vénus;
- *et caetera* jusqu'à Jupiter.
- Pour ramasser Saturne et Uranus vous allez vous y prendre différemment. Une fois arrivé à Jupiter, faîtes semblant de rassembler le paquet et profitez en pour changer la main avec laquelle vous ramassez Uranus et Saturne. De cette façon, vous commencerez par ramasser Uranus, que vous poserez sur Saturne, puis vous placerez les deux cartes ainsi réunis au dessus du paquet formé des autres planètes.

Vous devez alors avoir obtenu un paquet dont les cartes sont dans l'ordre en partant du dessus (faces vers le bas) : Saturne, Uranus, Jupiter, Mars, la Terre, Vénus, Neptune et Mercure.

Si vous n'avez pas bien compris, voici les manipulations en images :





Entraînez-vous bien à ramasser les cartes de cette façon. Vous devez le faire naturellement en ayant l'air de ramasser les cartes dans l'ordre où elles se trouvent sur la table. Les spectateurs ne doivent normalement pas se rendre compte que Saturne et Uranus ont été inversées. Ou en tout cas, il ne faut pas qu'ils aient l'impression que l'ordre des cartes est important.

Bien entendu, il est impossible qu'une planète se déplace de la sorte dans le système solaire. D'autant plus que cela déséquilibrerais les trajectoires de toutes les autres planètes. Nous allons donc les remettre dans l'ordre. Nous allons les appeler une à une par leur nom. Commençons donc par Mercure : M-E-R-C-U-R-E.

Pour cette manipulation vous devez tenir le paquet de cartes faces vers le bas. On ne doit plus voir la face des cartes jusqu'à ce qu'elles soient retournées. (De cette façon c'est donc Saturne la carte sur le dessus du paquet tandis que Mercure est en dessous.)

- En prononçant le M, prenez la carte sur le dessus du paquet et placez la sous le paquet.
- Faîtes la même chose pour le E. Placez la carte du dessus du paquet sous le paquet.
- Et ainsi de suite pour chacune des sept lettres du nom de Mercure. Vous devez donc placer sept cartes sous le paquet.

Retournez alors la carte qui se trouve sur le dessus du paquet en annonçant : "Voilà Mercure !" Et c'est effectivement Mercure. Placez la carte à côté du Soleil.

Faîtes ensuite la même chose pour Vénus. En épellant V-E-N-U-S, vous placez cinq cartes du dessus sous le paquet. Retournez la carte qui est sur le dessus du paquet, c'est Vénus ! Placez la à coté de Mercure.

Continuons d'appeler les planètes une à une : T-E-R-R-E, et voilà la Terre. M-A-R-S, Mars arrive. J-U-P-I-T-E-R, on retourne Jupiter. S-A-T-U-R-N-E, voilà la planète aux anneaux. U-R-A-N-U-S, la voici.

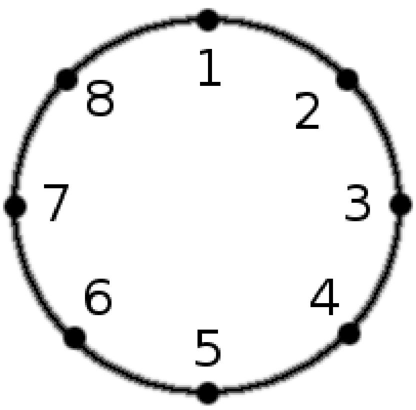
À chaque fois, retournez la carte annoncée qui se trouve bien sur le dessus du paquet et placez la à la suite des autres. La dernière carte qui vous reste dans les mains est Neptune, la voyageuse, qui retrouve la huitième et dernière place du système solaire. Ouf ! Tout est bien qui fini bien.

Comment ça marche ?

Pour comprendre comment le tour marche, nous allons nous poser la question suivante :

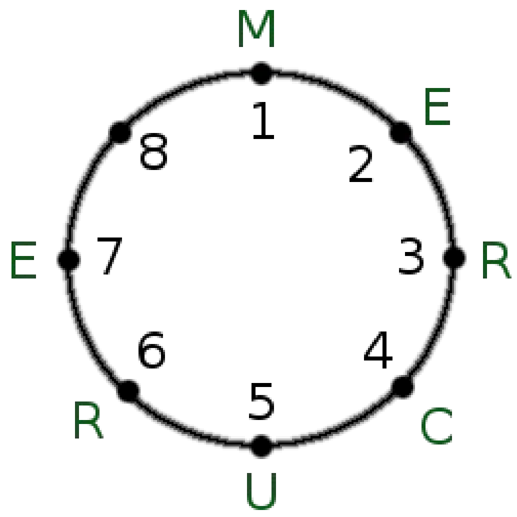
Dans quel ordre doit-on mettre les cartes au départ pour que les planètes ressortent dans l'ordre à l'arrivée quand on les fait sortir en épelant leur nom comme on l'a fait ?

Remarquons pour commencer que, du fait qu'à chaque lettre on prend une carte sur le dessus pour la mettre en-dessous, les cartes forment un cycle. On peut représenter ce cycle sur un cercle :

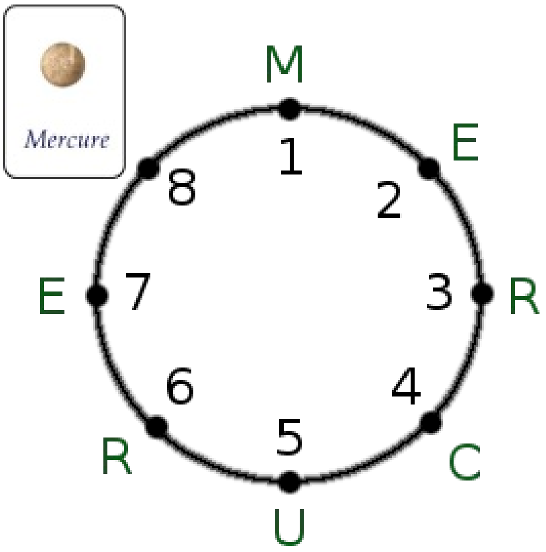


Le numéro 1 désigne la carte sur le dessus du paquet et le 8 celle du dessous.

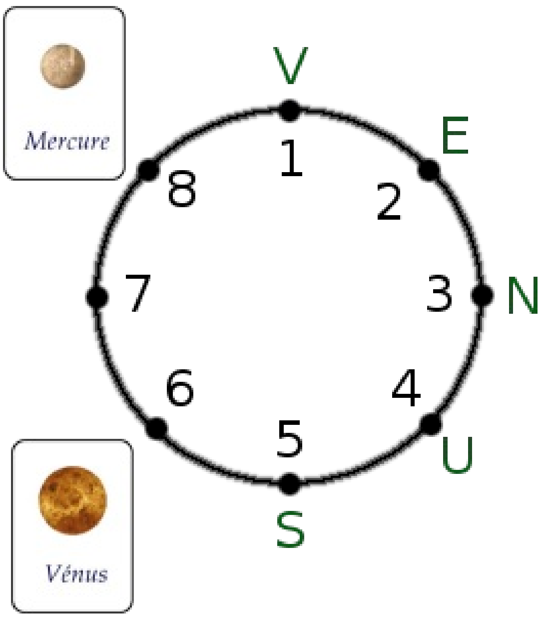
Où doit être placé Mercure pour sortir en premier ? Pour chaque lettre du nom de Mercure on fait passer une carte de dessus à dessous :



Mercure doit être la carte suivante. Elle doit donc se trouver en 8ème position :

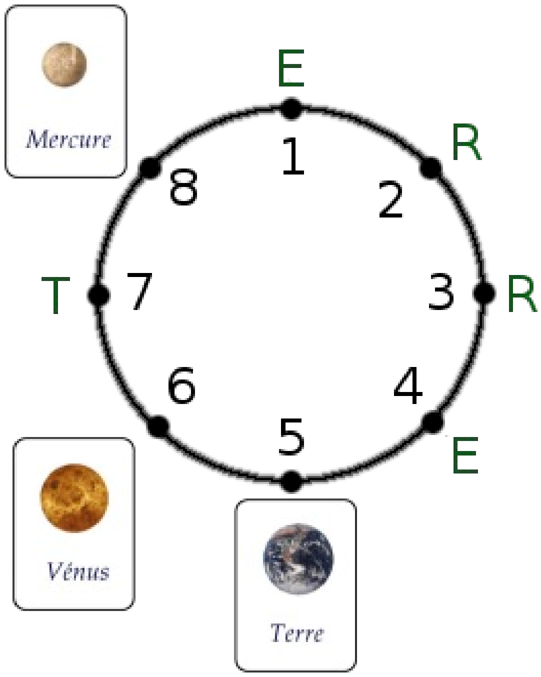


Comme les cartes ont fait un tour complet, le décompte de Vénus reprend à la carte numéro 1 :

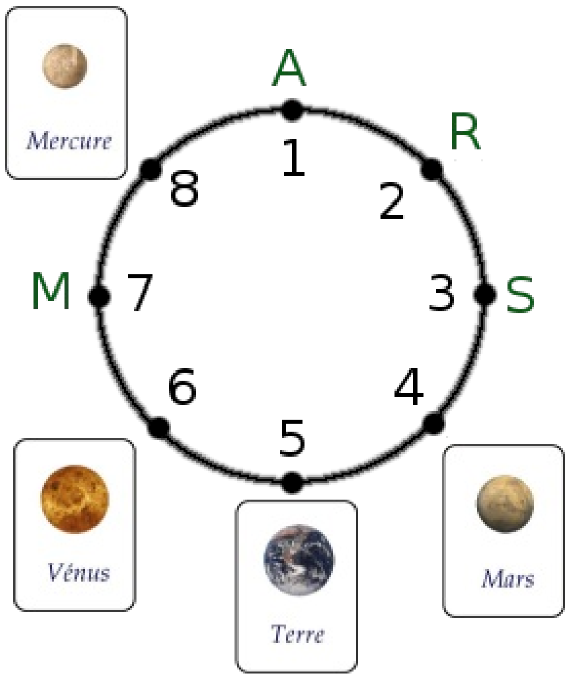


Vénus doit par conséquent être placée en 6ème position.

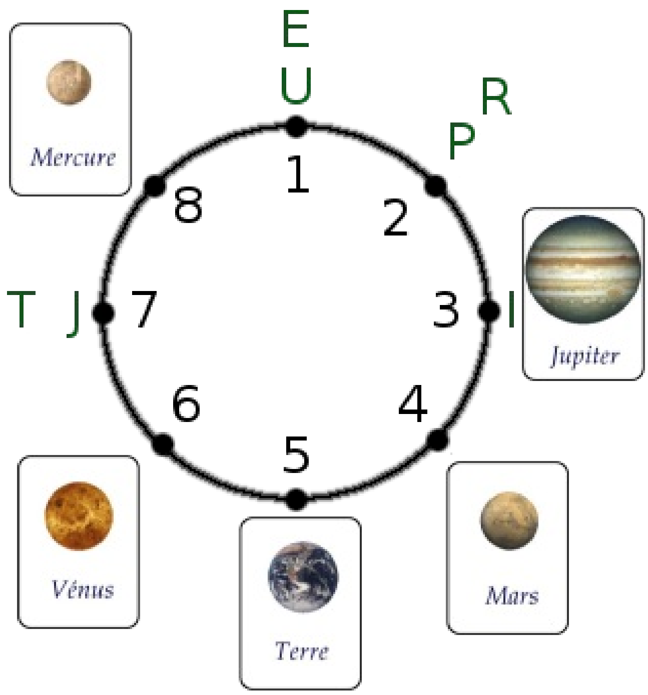
En énumérant la Terre, on saute la carte Mercure car celle-ci n'est plus dans le paquet :



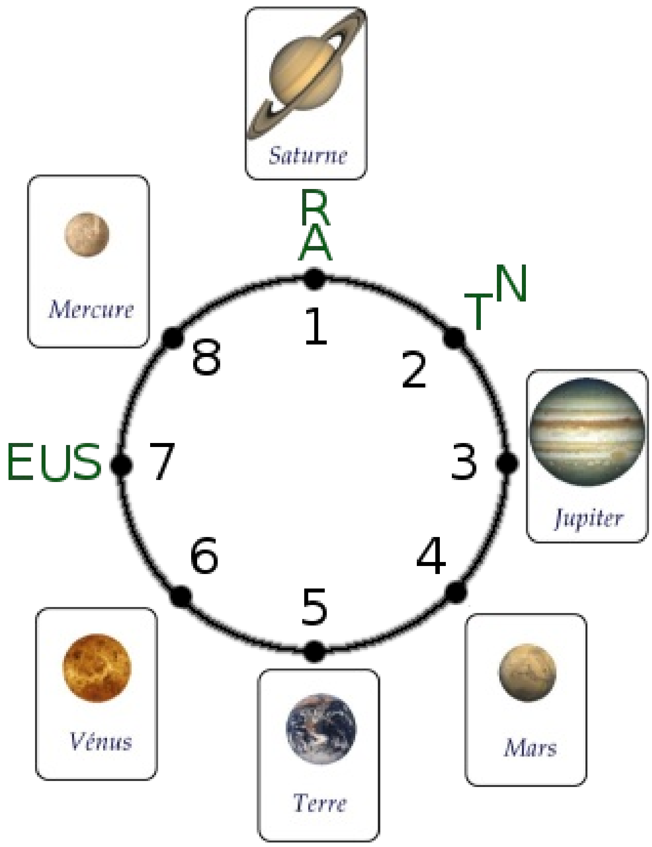
On continue avec Mars qui se retrouve en 4ème position :



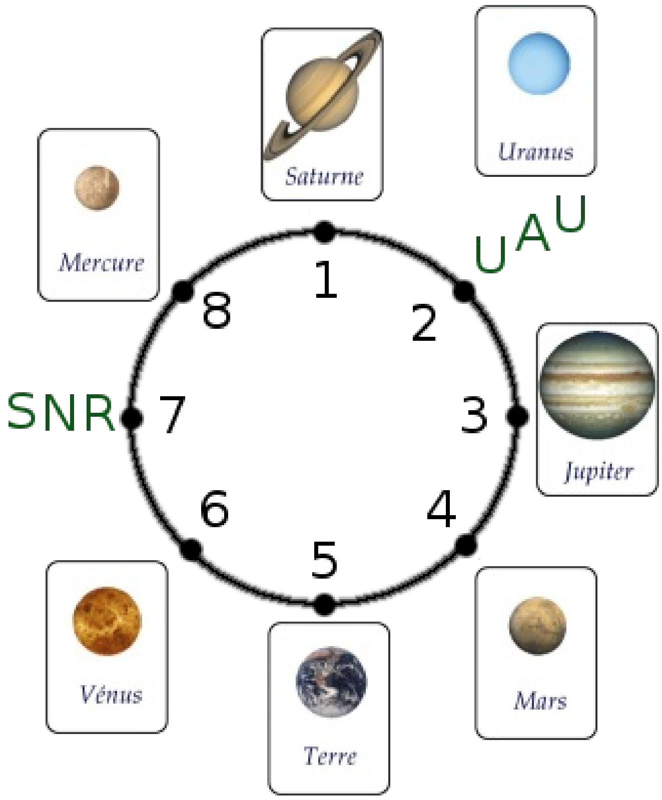
Pour Jupiter, on fait deux fois le tour du paquet et la carte doit se trouver en 3ème position :



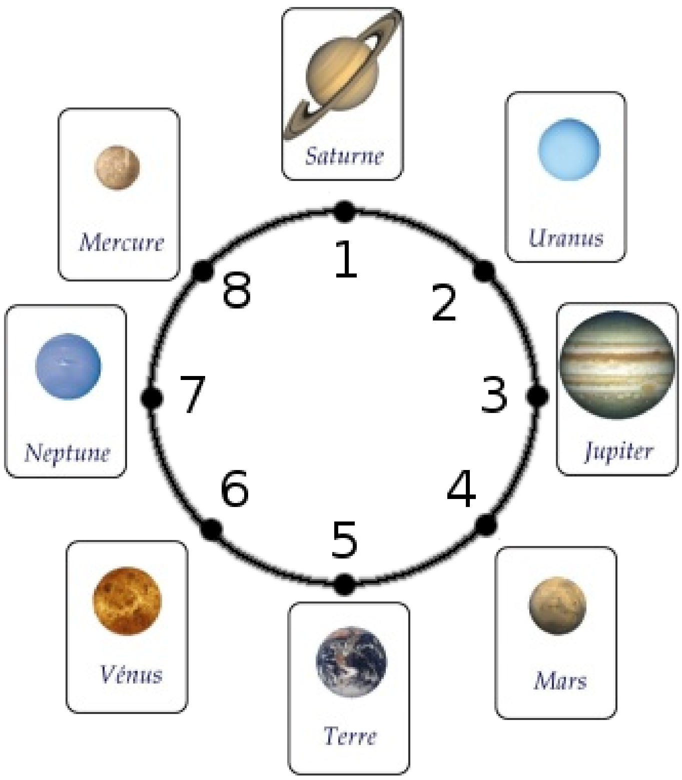
Pour Saturne on fait presque trois fois le tour du paquet (Saturne beaucoup).



Uranus doit être en deuxième position :



Et Neptune prend naturellement la place qui manque :



Et si maintenant on déplie :

Vous remarquez que c'est présisément l'ordre dans lequel on a ramassé les cartes ! C'est pour cette raison que l'on raconte l'histoire du voyage de Neptune et que l'on inverse Uranus et Saturne en ramassant les cartes.

Une fois qu'on a ramassé les cartes dans cette ordre là, tout est joué, il n'y a plus qu'à énumérer les différentes planètes pour les voir apparaître dans l'ordre.

Variantes

Quand vous avez compris le principe, vous pouvez inventer tous les tours que vous voulez de cette façon. Vous fabriquez les cartes avec les noms que vous voulez dessus à la place des planètes (par exemple les noms de vos ami(e)s). À l'aide d'un cercle vous trouvez l'ordre dans lequel vos cartes doivent se trouver au départ et vous n'avez plus qu'à inventer une histoire pour enrober le tout et le présenter à vos spectateurs.

Les permutations

Ce tour de magie fait intervenir des objets mathématiques que l'on appelle des **permutations**. Une permutation d'un certain nombre d'objets placés dans un certain ordre est une réorganisation de ces objets dans un nouvel ordre.

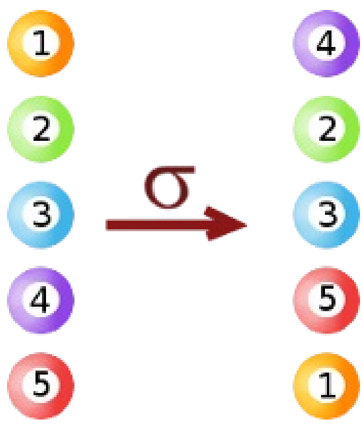
En mathématiques, pour décrire les permutations de n objets, on utilise tout simplement les nombres entiers de 1 à n. Voici par exemple comment on note une permutation de 5 objets :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Il faut lire ceci en colonne :

- *colonne 1 :* l'objet en position 1 se retrouve en position 5 ;
- *colonne 2 :* l'objet en position 2 se retrouve en position 2 ;
- *colonne 3 :* l'objet en position 3 se retrouve en position 3 ;
- *colonne 4 :* l'objet en position 4 se retrouve en position 1 ;
- *colonne 5 :* l'objet en position 5 se retrouve en position 4.

Voici donc comment se retrouvent les objets après la permutation σ :



En général, les permutations se notent avec la lettre grecque sigma : σ. L'ensemble des permutations des nombres de 1 à n se note $\mathfrak{S}_n$.

Tenez, une petite question pour tester votre sagacité. Sauriez-vous dire combien il existe de permutations de n objets ?

Si vous ne trouvez pas, voici la réponse :

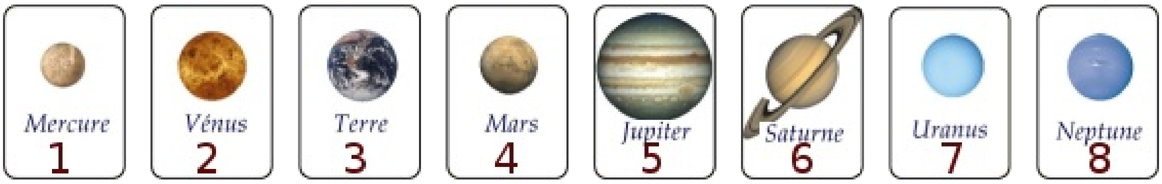
Secret (cliquez pour afficher)

Si on place les n objets les un après les autres, alors :

- le premier objet peut être placé aux n positions différentes ;
- le deuxième objet n'a plus que $n-1$ emplacements possibles puisque une place est déjà prise par l'objet 1 ;
- l'objet numéro 3 a $n-2$ places possibles ;
- ...
- et ainsi de suite jusqu'à l'objet n qui n'a qu'un choix : prendre la dernière place qu'il lui reste.

Au final, il y a donc $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ permutations dans $\mathfrak{S}_n$. Ce nombre se note $n!$ et se lit factorielle n.

Dans notre tour, les objets sont les huit planètes. Nous nous intéressons donc aux permutations de $\mathfrak{S}_8$. Nous allons symboliser les planètes par les nombres de 1 à 8 en partant de 1 pour Mercure à 8 pour Neptune.



Comme nous venons de le voir, il y a 8!=40320 permutations possibles de ces 8 planètes.

Composition de permutations

L'ensemble des permutations est muni d'une opération de composition qui consiste à effectuer deux permutations l'une à la suite de l'autre. Considérons par exemple les deux permutations de $\mathfrak{S}_8$ suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

On note alors $\sigma_2 \circ \sigma_1$ la permutation que l'on obtient en faisant d'abord la permutation σ_1 puis la permutation σ_2. Regardons par exemple l'objet placé en position numéro 1 : après σ_1 il se retrouve en position numéro 5, puis après σ_2, il se retrouve en position 2. En faisant la même chose pour tous les objets jusqu'à 8, on trouve que $\sigma_2 \circ \sigma_1$ est la permutation suivante :

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Inverse d'une permutation

Une autre propriété, est l'existence pour chaque permutation σ, d'une permutation inverse, notée σ^{-1} qui remet les éléments à leur place si on la compose avec σ. Autrement dit, si on note id la permutation identité, c'est-à-dire celle qui ne change pas la position des objets, alors on a :

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

L'inverse d'une permutation est facile à calculer. Reprenons par exemple σ_1 utilisé précédemment :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

L'objet en position 1 est envoyé en position 5. Ainsi, σ_1^{-1} doit envoyer l'objet numéro 5 en position 1. L'objet en position 2 ne bouge pas par σ_1, il en est donc de même de σ_1^{-1}. En continuant ainsi, on peut reconstituer entièrement σ_1^{-1} :

$$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Application à notre tour

Bien, nous sommes prêts à appliquer cela ces explications théoriques au cas de notre tour de magie. Nous avons nos huit planètes sur lesquelles on effectue deux permutations successives.

- Tout d'abord, on effectue la permutation qui consiste à placer Neptune (8) en deuxième position et à inverser Saturne (6) et Uranus (7) à la fin. Ceci s'écrit de la façon suivante :
$$\sigma_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix};$$
- Ensuite on refait une permutation sur ce nouvel ordre en effeuillant les cartes en épelant les noms des planètes comme décrit dans le tour. Pour la calculer, il suffit de prendre 8 cartes numérotées de 1 à 8, d'effectuer la manipulation puis de regarder dans quel ordre les cartes sortent. On trouve ceci :
$$\sigma_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

On constate alors ce à quoi on s'attendait : ces deux permutations sont inverses l'une de l'autre :

$$\sigma_b \circ \sigma_a = \mathrm{id} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sigma_b = \sigma_a^{-1}.$$

Ceci explique bien que lorsque l'on effectue la première permutation suivie de la seconde, les planètes reviennent (comme par magie) dans leur ordre initial. ^^

Partie 2 : Tours de probabilité

Retrouvez dans cette partie des tours de magie faisant intervenir des probabilités.

La course automobile ★★★

Voici un tour de magie et de voiture sur une piste en cartes à jouer. Le tout motorisé par la théorie des probabilités.

Effet. La voiture fait un tour de piste sur un circuit de cartes. À la fin, on constate que le magicien avait prédit à l'avance la carte sur laquelle la voiture allait s'arrêter.

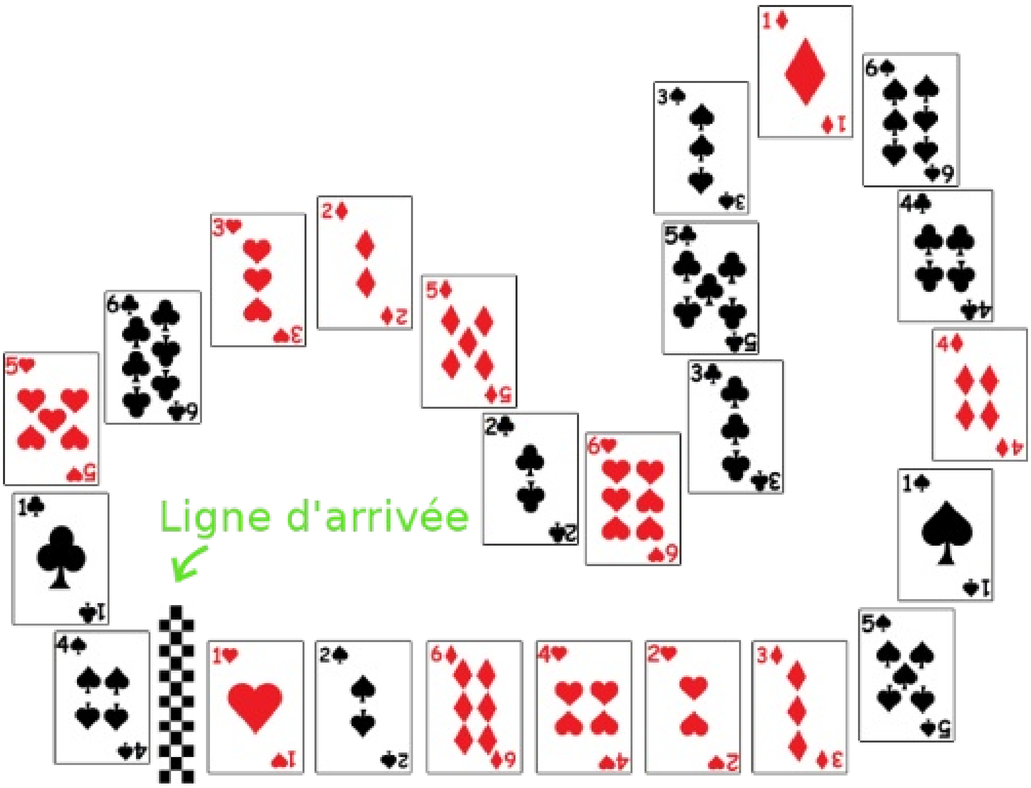
Matériel

- Les cartes 1 à 6 d'un jeu de carte classique (soit 24 cartes)
- Un dé
- Une petite voiture
- Un ligne d'arrivée (par exemple une ficelle ou une bande de papier...),
- Une feuille de papier avec un crayon pour noter votre prédiction et une enveloppe pour la cacher. (Peut être remplacé par une ardoise ou tout autre objet sur lequel on peut écrire)

Le tour

Demandez un volontaire dans votre public et donnez lui les 24 cartes. Demandez lui de bien les mélanger. Quand il a finit, reprenez lui le jeu et expliquez que ces cartes vont en réalité former un circuit automobile.

Commencez à placer les cartes pour former une boucle par exemple de la façon suivante :



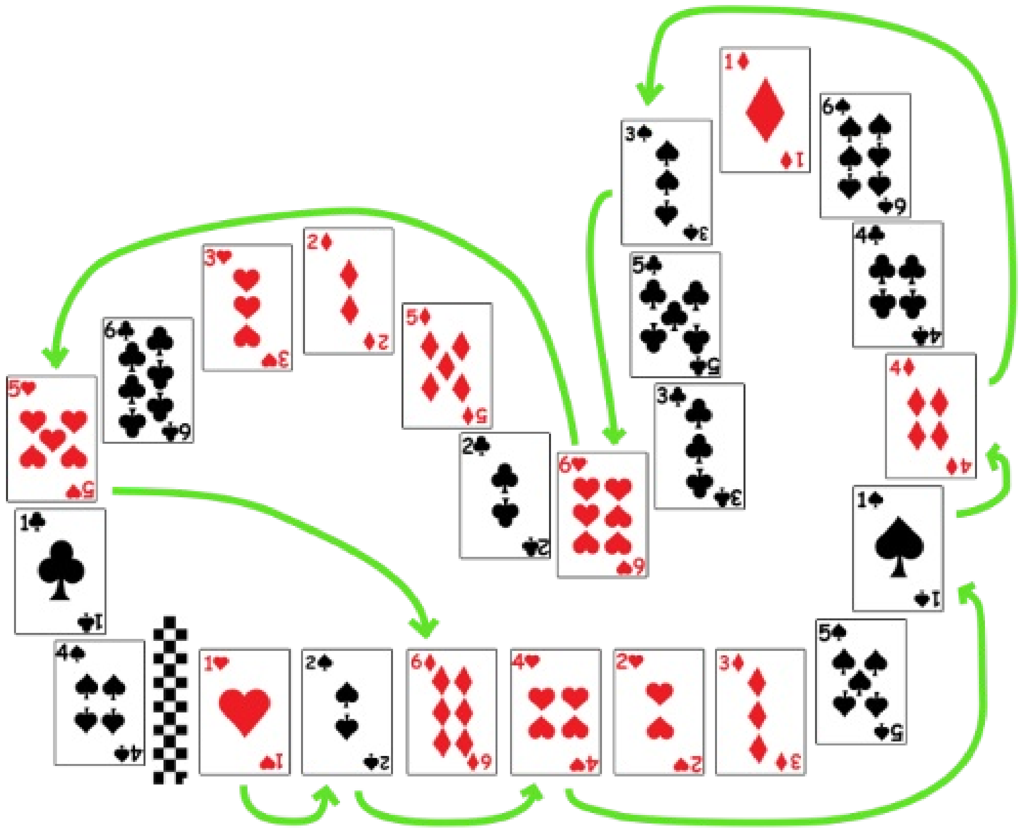
Placez la ligne d'arrivée après la dernière carte. Dans l'exemple ci-dessus, la première carte est l'as de cœur et la dernière est le 4 de pique. La forme du circuit n'a absolument aucune importance, vous pouvez laisser libre cours à votre imagination.

Cependant, tout en disposant les cartes, vous allez devoir faire un petit calcul sans que les spectateurs s'en apperçoivent :

- En posant la première carte, regardez son numéro. Dans mon exemple, je compte 1 (As de cœur).
- Comptez alors une carte et regardez son numéro. Dans l'exemple il s'agit du 2 de pique.

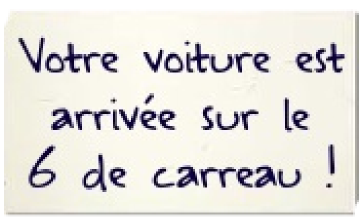
- Comptez alors 2 cartes à partir du 2 de pique et regardez le numéro de cette carte. Dans l'exemple, je tombe sur le 4 de cœur.
- Comptez alors 4 cartes et regardez encore le numéro.
- Et ainsi de suite jusqu'à la fin du circuit. À chaque fois comptez autant de cartes que le numéro de la carte sur laquelle vous êtes tombé.
- Regardez alors la dernière carte sur laquelle vous arrivez après avoir franchi la ligne d'arrivée. Dans mon exemple, il s'agit du 6 de carreau.

En image ça donne ça :



Vous devez vous entraîner à faire ce calcul mentalement sans que votre public s'en apperçoive. Vous devez avoir l'air de poser les cartes le plus naturellement possible.

Expliquez à votre public que vous allez faire une prédiction qu'ils découvrirons plus tard. Prenez alors la feuille de papier (où ce que vous avez prévu pour écrire la prédiction) et notez secrètement :

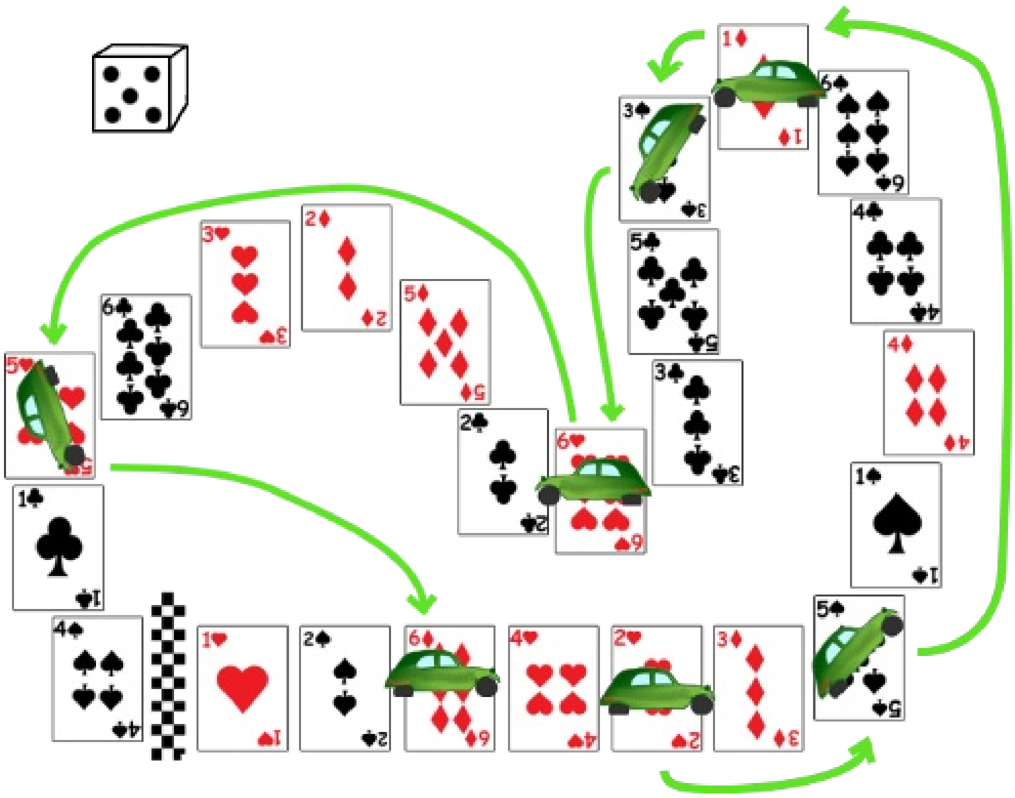


Cachez le tout dans l'enveloppe et donnez la à un spectateur en le chargeant de veiller à ce que vous ne touchiez plus à cette prédiction d'ici la fin du tour.

Donnez maintenant le dé et la petite voiture à votre premier spectateur et expliquez lui les règles.

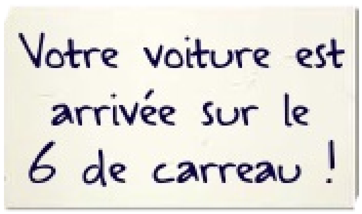
Le dé va décider de la position de départ de la voiture. Le spectateur lance le dé. S'il fait 1 il part de la première carte (As de cœur dans l'exemple), s'il fait 2 il part de la deuxième carte (2 de pique), s'il fait 3 de la troisième (6 de carreau), ... s'il fait 6 de la sixième (3 de carreau).

Partant de cette position, la voiture va avancer à chaque coup du nombre indiqué sur la carte sur laquelle il se trouve. Dans l'exemple, si le dé est tombé sur 5, la voiture part du 2 de cœur. Elle avance donc de deux cases et se retrouve sur le 5 de pique, puis avance de 5 et se retrouve sur l'as de carreau... Et ainsi de suite jusqu'à ce qu'elle franchisse la ligne d'arrivée.



Une fois qu'elle a franchi la ligne d'arrivée, la voiture s'arrête et doit normalement se trouver sur la carte que vous avez prévue. Le 6 de carreau dans l'exemple.

Insistez alors sur le fait que le dé a décidé de la position de départ et que vous ne pouviez pas savoir à l'avance quel allait être le parcours de la voiture. Demandez au spectateur auquel vous aviez confié votre prédiction d'ouvrir l'enveloppe.



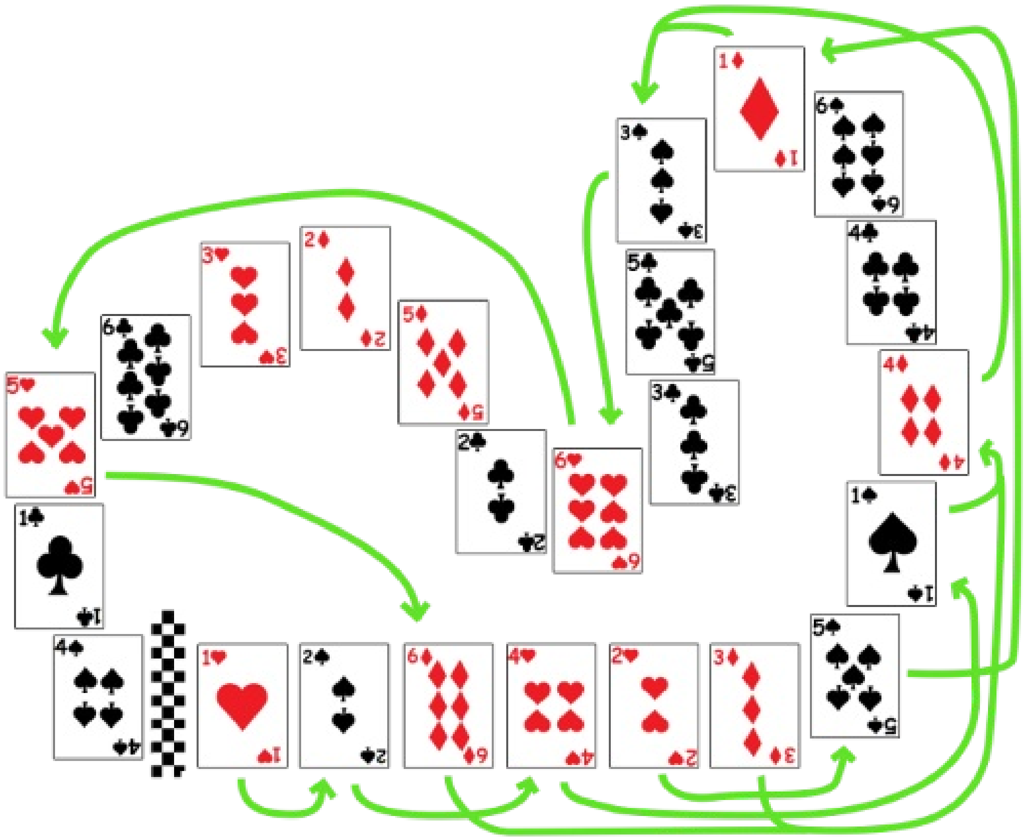
Tout le monde constate alors que vous aviez bien prédit la position d'arrivée de la voiture !

Comment ça marche ?

Bien sûr, la première remarque que vous pouvez vous faire, c'est que si le dé tombe sur le chiffre 1 alors vous êtes certain de gagner. En effet, la voiture va commencer sur la première carte et va ensuite passer par toutes les cartes que vous aviez comptées secrètement en installant le circuit.

Oui mais que se passe-t-il si le dé ne tombe pas sur le chiffre 1 ?

Pour voir ça, traçons sur l'exemple précédent les 6 chemins possibles en fonction du résultat du dé. C'est à dire les chemins partant des 6 premières cartes.



Bon au début c'est un peu fouilli mais on voit qu'assez rapidement les chemins se regroupent et finissent tous ensemble. Plus précisément, il se retrouvent tous au niveau du 3 de pique.

Autrement dit : Quel que soit le résultat du dé et la position de départ de la voiture, la fin du trajet sera toujours la même et la voiture finira obligatoirement sur le 6 de carreau.

Oui d'accord dans l'exemple ça marche. Mais le spectateur a mélangé les cartes au début et le circuit peut donc être totalement différent. Est-ce que les chemins se regroupent toujours de cette façon si les cartes ne sont pas dans le même ordre ?

La réponse est non. Il est possible que ça ne marche pas. Mais rassurez vous, ça marche souvent. En fait, ce tour utilise les probabilités. On ne peut pas être certain que ça marche mais il y a une forte probabilité.

Forte comment ?

En fait, il y a 78% de chances pour que tous les chemins fusionnent tous. Vous allez me dire que 78% ce n'est pas tant que ça, ça fait presque une chance sur quatre de rater le tour !

Eh bien non pas tout à fait, car dans les 22% de probabilité pour que les chemins ne se regroupent pas tous, il est toujours possible que le chemin choisi par le dé se regroupe avec le chemin partant de la première carte (qui est celui que vous avez calculé). Si par exemple 5 chemins sur les 6 se rassemblent et un seul reste de son côté, il y a 5 chances sur 6 pour que la voiture arrive quand même sur la carte que vous avez prévue.

Bref au bout du compte, tout cela fait que vous avez 93% de chances de réussir le tour. Ce qui signifie qu'en gros le tour réussi 13 fois sur 14.

À noter que les statistiques que je vous donne, je les ai calculées grâce à une simulation informatique. Il me semble difficile de calculer explicitement la probabilité pour que les chemins fusionnent ou pour que le tour réussisse. Mais si vous avez une idée astucieuse pour faire ce calcul, je suis preneur !

Variantes

Au lieu de prendre les cartes de 1 à 6, il est possible de prendre plus ou moins de cartes.

Voici les probabilités pour que le tour marche en fonction du nombre de cartes :

cartes de 1 à 2	>99%
cartes de 1 à 3	99%
cartes de 1 à 4	98%
cartes de 1 à 5	96%
cartes de 1 à 6	93%
cartes de 1 à 7	90%
cartes de 1 à 8	88%
cartes de 1 à 9	85%
cartes de 1 à 10	82%

Moins vous prendrez de cartes, plus le tour aura de chances de réussir. Seulement avec moins de cartes, le tour devient aussi moins impressionant et vos spectateurs ont plus de chances de découvrir le truc.

Plus vous prenez de cartes, plus le tour est intéressant, mais plus il est risqué. Si vous prenez les 40 cartes de 1 à 10, le tour n'a que 82% de chance de réussir. Mais vous pouvez augmenter cette probabilité en proposant à la voiture de faire deux tours de pistes au lieu d'un seul ce qui laisse plus de temps aux chemins pour fusionner.
Il faut voir aussi qu'un circuit de 40 cartes, c'est grand ! Il faut prévoir une table assez large.

Couplage de processus aléatoires

En théorie des probabilités, un **couplage** de deux variables aléatoires X et Y est la donnée d'une loi conjointe pour le couple (X, Y).

C'est souvent quelque chose d'assez troublant pour les étudiants qui débutent en probabilités : connaître les lois des variables X et Y ne permet pas de connaître celle du couple (X, Y) ! Nous allons voir pourquoi dans la suite.

Lancers de pièces

Supposons par exemple que nos deux variables X et Y représentent le lancer d'une pièce de monnaie équilibrée, c'est-à-dire qu'elles peuvent chacune tomber sur pile ou face avec probabilité 1/2. Leur loi est donc donnée par le tableau suivant :

Valeur	Probabilité
pile	1/2
face	1/2

Si l'on veut maintenant regarder la loi du couple (X, Y) il est possible que les deux pièces soient indépendantes, dans ce cas, chacun des couples de valeur a une probabilité 1/4. Leur loi est la suivante :

Valeur	Probabilité
(pile,pile)	1/4
(pile,face)	1/4
(face,pile)	1/4

(face,face)	1/4

Mais il est tout à fait possible de les coupler de façon différentes. Imaginons que les deux pièces sont reliées par une barre rigide qui fait que quand on les lance ensemble, elles tombent toujours du même côté, alors la loi du couple est la suivante :

Valeur	Probabilité
(pile,pile)	1/2
(pile,face)	0
(face,pile)	0
(face,face)	1/2

Ce qu'il faut bien comprendre ici, c'est que la loi du couple est modifiée, mais pas la loi des variables X et Y. Un observateur qui ne regarderait qu'une seule des deux pièces en ignorant totalement la seconde ne verrait pas de différence dans sa loi que les deux pièces soient reliées ou non.

Il existe de nombreuses autres façons de coupler les deux pièces. On peut supposer qu'elles ont tendance à tomber du même côté mais sans que ce soit systématique (par exemple, on peut imaginer que la barre ci-dessus est remplacée par un élastique assez court). La loi peut alors être la suivante :

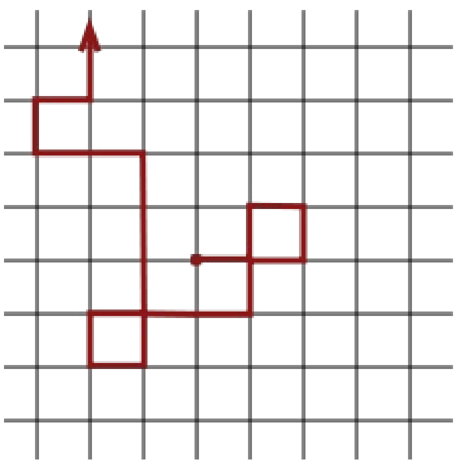
Valeur	Probabilité
(pile,pile)	1/3
(pile,face)	1/6
(face,pile)	1/6
(face,face)	1/3

On pourrait aussi imaginer les coupler de façon à ce qu'elles ne tombent jamais du même côté ou bien qu'elles aient une légère tendance à être opposées sans que ce soit systématique.

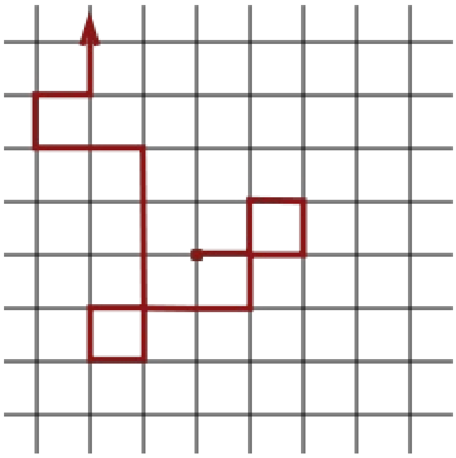
Marches aléatoires

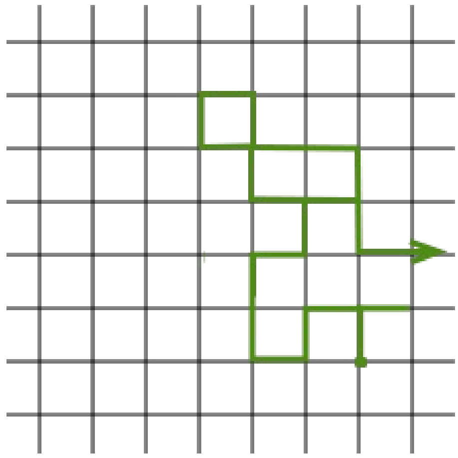
Une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$, c'est le déplacement sur un quadrillage carré d'une particule qui fait à chaque coup, un pas au hasard vers la droite, la gauche, le haut ou le bas. Chacune des quatre directions ayant une probabilité 1/4.

Voici un exemple :

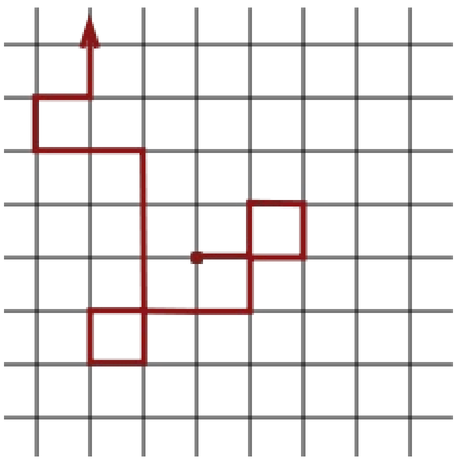


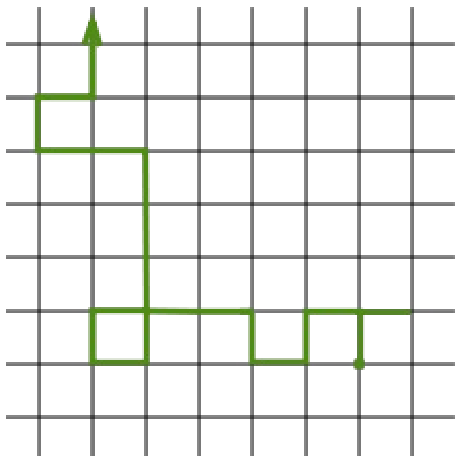
Regardons maintenant deux marches aléatoires simultanées. Elles peuvent être indépendantes, c'est à dire qu'à chaque coup, les deux particules choisissent leur direction au hasard sans se préoccuper de ce que fait l'autre.





Mais il est également possible de les coupler de la façon suivante : dès que la particule verte passe par un point où la particule rouge est déjà passée, alors elle suit le même parcours qu'elle. On obtient alors quelque chose qui ressemble à ça :





Encore une fois, les lois de chacune des deux marches ne sont pas modifiées : à chaque fois, elle prennent une des quatre direction avec probabilité 1/4 indépendamment de ce qu'elles ont fait auparavant. Un observateur qui ne regarderait que la marche rouge ou que la marche verte ne verrait pas la différence avec le couplage précédent où elles étaient indépendantes.

En probabilités, les couplages sont souvent des outils très utiles. Trouver un couplage astucieux entre deux variables ou processus aléatoires est souvent un moyen de découvrir des propriétés intéressantes ou des liens inattendus entre eux.

Retour à la voiture

Revenons maintenant à notre tour de magie. Le déplacement de la voiture sur le circuit peut se décrire de la façon suivante : à chaque étape, la voiture avance au hasard de 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 cartes.

Si au lieu de déplacer la voiture en fonction du numéro inscrit sur la carte on choisissait de tirer ce déplacement par un lancer de dé à chaque tour, la loi de la trajectoire suivie par la voiture serait la même. Oui, mais voilà, vous aurez compris que si les lois individuelles des trajectoires sont identiques, cela ne signifie pas que la loi conjointe de toutes les trajectoires possibles l'est.

Si on tire les déplacements au dé, les trajectoires sont indépendantes et il n'y a aucune raison pour que la voiture arrive toujours sur la même carte à la fin.

Si au contraire le déplacement se fait en fonction des numéros des cartes, on a un couplage de toutes les trajectoires. Les différentes trajectoires possibles de la voiture suivent le même chemin dès lors qu'elles passent sur une même carte et c'est pour cette raison qu'elles ont de fortes chances de se retrouver au même endroit au final !

Le principe est le même que celui de la marche aléatoire étudiée ci-dessus quand la particule verte suit le même parcours que la rouge dès qu'elle passe par un endroit ou cette dernière est déjà passé.