

1 Metoda inversă: Simularea unei variabile aleatoare discrete

- Fie v.a. discretă X definită prin repartiția

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \sum_{i=1}^m p_i = 1, x_1 < x_2 < \dots < x_m. \quad (1.1)$$

- Funcția de repartiție a v.a. X este dată de

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < x_1 \\ p_1 & \text{dacă } x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{dacă } x_2 \leq x < x_3 \\ \dots & \dots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_k & \text{dacă } x_k \leq x < x_{k+1} \\ \dots & \dots \\ 1 & \text{dacă } x \geq x_m \end{cases} \quad (1.2)$$

- Regula de generare a unei valori de selecție asupra v.a. X :

$$X = x_i \quad \text{dacă } F(x_{i-1}) < u \leq F(x_i) \text{ și } x_0 < x_1. \quad (1.3)$$

- Algoritmul pentru simularea v.a. X :

Intrare	Repartiția variabilei X $P(X = x_i) = p_i, \sum_{i=1}^m p_i = 1, x_1 < x_2 < \dots < x_m.$
Pas 1	Se generează o valoare de selecție u uniformă pe $[0,1]$
Pas 2	Dacă $u \leq p_1$ atunci $x = x_1$ Altfel dacă $u \leq p_1 + p_2$ atunci $x = x_2$ Altfel dacă $u \leq p_1 + p_2 + p_3$ atunci $x = x_3$ \dots Altfel dacă $u \leq p_1 + p_2 + \dots + p_m$ atunci $x = x_m$
Ieșire	Valoarea de selecție, x , a v.a. X

Exemplu 1

- Vrem să generăm o v.a. discretă X cu repartiția

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

- Funcția de repartiție este dată de

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0 \\ 0.3 & \text{dacă } 0 \leq x < 1 \\ 0.5 & \text{dacă } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{dacă } x \geq 2 \end{cases} \quad (1.5)$$

- Se generează valori de selecție asupra v.a. X conform regulilor

$$X = \begin{cases} 0 & U \leq 0.3 \\ 1 & 0.3 < U \leq 0.5 \\ 2 & 0.5 < U \leq 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

- Dacă v.a. $u = 0.78$ atunci obținem valoarea de selecție $x = 2$.

Aplicații

Fie v.a. discretă X definită prin repartiția

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \sum_{i=1}^m p_i = 1, x_1 < x_2 < \dots < x_m. \quad (1.7)$$

1. Scrieți o funcție care simulează v.a. discretă X . Antetul funcției va fi:

function $x = \text{simVarDiscreta}(X, p)$

unde parametrul de intrare X este vectorul $X = [x_1, x_2, \dots, x_m]$, iar p este vectorul conținând probabilitățile de apariție a valorilor din X , și anume $p = [p_1, p_2, \dots, p_m]$.

2. Apelați funcția creată la punctul 1. pentru a genera o mulțime de 1000 de valori de selecție asupra v.a. discrete definite în Exemplu 1. Validați rezultatul obținut construind histograma asociată mulțimii de selecție.
3. Apelați funcția creată la punctul 1. pentru a simula v.a. $X \sim \text{Bin}(0.5, 10)$. Validați rezultatul obținut construind histograma asociată mulțimii de selecție generate în concordanță cu repartiția $\text{Bin}(0.5, 10)$.

Bibliografie

- [Martinez, Martinez (2002)] W. L. Martinez, A. R. Martinez (2002), *Computational Statistics Handbook with MATLAB*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton London New York Washington, D.C.
- [Văduva (2004)] I. Văduva (2004), *Modele de simulare: note de curs*, Editura Universității din București, București