

אנליזה נומרית יישומית – תרגיל בית 1 – פתרון משוואות איטרטיבי

שאלה 1

נתונה הפונקציה $f(x) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x$.

א. הראו קיים לה שורש בקטע $[0,2]$.

ב. כמה איטרציות יש לבצע בשביל למצוא לפונקציה שורש בקטע בדיוק של 10^{-1} , וכמה עבור 10^{-9} ? שיטת האיזון

ג. מצאו לפונקציה שורש בקטע בדיוק של 10^{-1} .

שאלה 2

פתרו את המשוואה $xe^x - 3x^2 = 0$ בשיטת ניוטון רפסון עם $x_0 = 3$ עד ל-6 איטרציות.

שאלה 3

א. מצאו בעזרת שיטת החציה את הקירוב ל- $\sqrt{40}$ עד לדיוק של 10^{-1} (התחילו מקטע באורך 1).

ב. מצאו את השורש בשיטת ניוטון רפסון עם $x_0=2$ עד ל-4 איטרציות.

שאלה 4

נתונה המשוואה

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$$

א. הראו שלמשוואה קיים שורש ממשי יחיד בקטע $(1.6, \infty)$ ומצאו קירוב שלו ע"י שיטת

החצייה עם קירוב התחלתי $x_0 = 1.6$ תוך שמירה על 4 ספרות אחרי הנקודה העשרונית,

בעיגול. יש לבדוק לפחות 3 איטרציות.

ב. מצאו את מספר האיטרציות הנדרשות לשגיאה קטנה מ- 10^{-3} .

ג. מצאו פתרון בשיטת NR בתחום $[1.6, 2.6]$. בצעו 3 איטרציות עם קירוב התחלתי $x_0 = 1.6$

תוך שמירה על 4 ספרות אחרי הנקודה העשרונית, בעיגול.

ד. סעיף זה אינו קשור לסעיפים קודמים. האם ניתן להשתמש בשיטת NR למציאת פתרון

למשוואה $x^{1/3} = 0$? הסבירו את תשובתכם.

חלק ב' -שאלות סימולציה

שאלה 5

DIV-NODE הוא מחשב בעל 3 פעולות אריתמטיות בלבד: חיבור, חיסור וכפל, ובנוסף פעולת השוואה. נדרש לפתח עבור DIV-NODE אלגוריתם שלם לחישוב מנת מספרים (כמובן ללא שימוש בחילוק) בדיוק של 10^{-4} או יותר, תוך שימוש בכלים של מציאת שורשים של פונקציות לא לינאריות.

א. נסחו אלגוריתם איטרטיבי המבטיח את השגת התוצאה בדיוק הנדרש תוך 4 איטרציות לכל היותר. הקפידו להסביר את אופן בחירת הניחוש ההתחלתי ומדוע 4 איטרציות לכל היותר הינן מספיקות.

ב. ממשו את האלגוריתם ב-MATLAB והדגימו את תוצאות ההרצה על הזוגות

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 14$$

$$a_1 = 3, \quad b_1 = 4$$

$$a_1 = 4, \quad b_1 = 3$$

$$a_1 = 14, \quad b_1 = 2$$

ג. אם כל אחת מהפעולות (חיבור, חיסור, כפל והשוואה) דורשת מחזור מכונה אחד, הערך את מספר המחזורים הנדרש לחישוב a/b בעזרת האלגוריתם.

שאלה 6

מעוניינים למצוא את נקודת החיתוך בין אליפסה בעלת המשוואה $3x^2 + 4y^2 - 3 = 0$ לבין המעגל

$$x^2 + y^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

ברביע הראשון של מערכת הצירים. מצאו פונקציה $f(x)$ בעלת שורש

בקואורדינטת ה- x של נקודת החיתוך בין הצורות וכתבו 2 תוכניות ב-MATLAB, למציאת השורש באמצעות שיטת החצייה ושיטת ניוטון רפסון. הריצו את התוכנית והשוו בין התוצאות עבור תנאי התחלה $a = x_0 = 0.1$, $b = x_1 = 0.8$ עם $\delta = 0.01$ ו- $\delta = 0.0001$

שאלה 1

$$f(x) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x$$

א. הראו קיים לה שורש בקטע $[0, 2]$.

ב. כמה איטרציות יש לבצע בשביל למצוא לפונקציה שורש בקטע בדיוק של 10^{-3} , וכמה עבור 10^{-9} ?
 ג. מצאו לפונקציה שורש בקטע בדיוק של 10^{-3} .

הבה מנסה לכתוב את הפונקציה
 Score 100

$$f(x) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x \quad (k)$$

הבה מנסה לכתוב את הפונקציה
 Score 100

$$f(0) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) - 0 = 2$$

$$f(1) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) - 1 = -3 \cdot 10^{-3}$$

$$f(0) \cdot f(1) < 0 \quad (2, 0)$$

הבה מנסה לכתוב את הפונקציה
 Score 100

$$n \geq \log_2 \frac{b-a}{\delta}$$

$$f(x) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x \quad (b)$$

$$\delta = 10^{-1} \quad b = 2 \quad a = 0 \quad (10^{-1})$$

$$n \geq \log_2 \left(\frac{2-0}{10^{-1}} \right)$$

$$n \geq 4.32$$

$$\delta = 10^{-9} \quad b = 2 \quad a = 0 \quad (10^{-9})$$

$$n \geq \log_2 \left(\frac{2-0}{10^{-9}} \right)$$

$$n \geq 30.39$$

$$x_0 = 0 \quad x_1 = 2 \quad (c)$$

$$x_2 = \frac{0+2}{2} = 1 \quad \leftarrow \quad x_2 = \frac{x_0+x_1}{2}$$

פתרו את המשוואה $xe^x - 3x^2 = 0$ בשיטת ניוטון רפסון עם $x_0 = 3$ עד ל-6 איטרציות.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

(אם כי 3.08):

$$y = x \cdot e^x - 3x^2$$

הפונקציה

$$y' = 1 \cdot e^x + e^x \cdot x - 6x$$

$$x_0 = 3$$

$$y' = e^x \cdot x + e^x - 6x$$

$$i=1 \quad x_0=3 \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{3 \cdot e^3 - 3 \cdot 3^2}{e^3 \cdot 3 + e^3 - 6 \cdot 3} = 2.55$$

2.3)

$$i=2 \quad x_1=2.55 \quad x_2 = 2.55 - \frac{2.55 \cdot e^{2.55} - 3 \cdot 2.55^2}{e^{2.55} \cdot 2.55 + e^{2.55} - 6 \cdot 2.55} = 2.11$$

$$i=3 \quad x_2=2.11 \quad x_3 = 2.11 - \frac{2.11 \cdot e^{2.11} - 3 \cdot 2.11^2}{e^{2.11} \cdot 2.11 + e^{2.11} - 6 \cdot 2.11} = 1.79$$

$$i=4 \quad x_3=1.79 \quad x_4 = 1.79 - \frac{1.79 \cdot e^{1.79} - 3 \cdot 1.79^2}{e^{1.79} \cdot 1.79 + e^{1.79} - 6 \cdot 1.79} = 1.60$$

$$i=5 \quad x_4=1.6 \quad x_5 = 1.6 - \frac{1.6 \cdot e^{1.6} - 3 \cdot 1.6^2}{e^{1.6} \cdot 1.6 + e^{1.6} - 6 \cdot 1.6} = 1.52$$

$$i=6 \quad x_5=1.5 \quad x_6 = 1.5 - \frac{1.5 \cdot e^{1.5} - 3 \cdot 1.5^2}{e^{1.5} \cdot 1.5 + e^{1.5} - 6 \cdot 1.5} = 1.512$$

א. מצאו בעזרת שיטת החציה את הקירוב ל- $\sqrt{40}$ עד לדיוק של 10^{-1} (התחילו מקטע באורך 1).
 ב. מצאו את השורש בשיטת ניוטון רפסון עם $x_0=2$ עד ל-4 איטרציות.

$$F(x) = x^2 - 40 \quad (k)$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $x_1 = \sqrt{40} \quad x_2 = \sqrt{40}$

נסתכל על הפונקציה $F(x) = x^2 - 40$ ונראה שהיא מתחלפת.

$$\sqrt{40} \approx 6.324$$

(נראה שזה נכון)

$$F(6) = 6^2 - 40 = -4$$

$$F(7) = 7^2 - 40 = 9$$

$$\left. \begin{array}{l} F(6) = -4 \\ F(7) = 9 \end{array} \right\} F(6) \cdot F(7) < 0 \quad \checkmark$$

$$i=1 \quad x_1=7 \quad x_0=6 \quad x_2 = \frac{6+7}{2} = 6.5 \quad F(6.5) = 2.25 \quad \text{נסתכל}$$

$$i=2 \quad x_1=6.5 \quad x_0=6 \quad x_2 = \frac{6.5+6}{2} = 6.25 \quad F(6.25) = 6.25^2 - 40 = -0.937$$

$$i=3 \quad x_1=6.5 \quad x_0=6.25 \quad x_2 =$$

$$i=4 \quad x_1=6.375 \quad x_0=6.25 \quad x_2 =$$

$$i=5 \quad x_1=6.312 \quad x_0=6.375 \quad x_2 =$$

$$i=1 \quad x_0=2 \quad x_1 = 2 - \frac{(2^2 - 36)}{2 \cdot 2} = 11$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \quad (2)$$

$$i=2 \quad x_1=11 \quad x_2 = 11 - \frac{(11^2 - 40)}{11 \cdot 2} = 7.318$$

$$\boxed{y = x^2 - 40 \quad y' = 2x}$$

$$i=3 \quad x_2=7.318 \quad x_3 = 7.318 - \frac{(7.318^2 - 40)}{(2 \cdot 7.318 \cdot 2)} = 6.391$$

$$i=4 \quad x_3=6.391 \quad x_4 = 6.391 - \frac{(6.391^2 - 40)}{6.391 \cdot 2} = 6.324$$

שאלה 4

נתונה המשוואה

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$$

א. הראו שלמשוואה קיים שורש ממשי יחיד בקטע $(1.6, \infty)$ ומצאו קירוב שלו ע"י שיטת

החצייה עם קירוב התחלתי $x_0 = 1.6$ תוך שמירה על 4 ספרות אחרי הנקודה העשרונית,

בעיגול. יש לבדוק לפחות 3 איטרציות.

$$\begin{aligned} F(1.6) \cdot F(\infty) &< 0 \\ (-) \cdot (\infty) &< 0 \\ \underline{\underline{-\infty < 0}} \end{aligned}$$

ק"מ נקודה

$$\begin{cases} F(1.6) = (1.6)^3 - (1.6)^2 - 1.6 - 1 = -1.064 \\ F(\infty) = \infty \end{cases}$$

2.1

$$a = 1.6 \quad b = 2 \quad x_0 = 1.6$$

$$F(1.6) = -1.064$$

$$c = \frac{1.6 + 2}{2} = 1.8$$

$$F(1.8) = -0.208$$

$$\underline{2 - 1.6 > 10^{-4}}$$

2.2

$$a = 1.8 \quad b = 2 \quad c = 0.349$$

$$\underline{2 - 1.8 > 10^{-4}}$$

2.3

$$a = 1.8 \quad b = 1.9 \quad c = 1.85$$

$$F(1.85) = 0.059$$

2.4

$$a = 1.8 \quad b = 1.85 \quad c = 1.825$$

$$F(1.825) = -0.077$$

$$1.85 - 1.8 > 10^{-4}$$

ב. מצאו את מספר האיטרציות הנדרשות לשגיאה קטנה מ- 10^{-3} .

$$10^{-3} = 0.001$$

$$\frac{2 - 1.6}{2^n} < 10^{-3}$$

$$\frac{0.4 \cdot 10^{-3}}{2^n} < 1$$

$$0.4 \cdot 10^{-3} < 2^n$$

$$n = \frac{\ln(0.4 \cdot 10^{-3})}{\ln(2)}$$

$$n = -11.297$$

ג. מצאו פתרון בשיטת NR בתחום $[1.6, 2.6]$. בצעו 3 איטרציות עם קירוב התחלתי $x_0 = 1.6$.

$$[1.6, 2.6]$$

$$x_0 = 1.6$$

(ז)

$$F(x) = x^3 - x^2 - x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

$$\rightarrow x_1 = 1.6 - \frac{F(1.6)}{F'(1.6)} = 1.905$$

$$\rightarrow x_2 = 1.905 - \frac{F(1.905)}{F'(1.905)} = 1.842$$

$$\rightarrow x_3 = 1.842 - \frac{F(1.842)}{F'(1.842)} = 1.8392$$

ד. סעיף זה אינו קשור לסעיפים קודמים. האם ניתן להשתמש בשיטת NR למציאת פתרון למשוואה $x^{1/3} = 0$? הסבירו את תשובתכם.

כן, משוואה שגורה אין בהתאם ל-NR.