אלגברה לינארית 1־ תרגיל בית 8

שאלה 1

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ו־$S \subseteq V$ קבוצה. הראו כי S תלויה לינארית אם ורק אם קיים $v \in S$ כך ש־$\mathrm{Span}\left(S\right) = \mathrm{Span}\left(S \backslash \left\{v\right\}\right)$.

שאלה 2

יהא $\mathbb{F}$ שדה. נתבונן בתמ"ו $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \right\} \in \mathbb{F}^n$ ובקבוצה

$$S = \{e_{i+1} - e_i \mid i = 1, \ldots, n-1\} \subseteq \mathbb{F}^n$$

(זכרו כי e_i הוא הוקטור שבו מופיע 1 במקום ה־i ובשאר המקומות 0). הוכיחו כי

א. $\mathrm{Span}\left(S\right) = U$.

ב. S בלתי תלויה לינארית.

שאלה 3

נתון מ"ו V מעל $\mathbb{F}$, $v_1, v_2, v_3 \in V$ כך ש־(v_1, v_2), (v_1, v_3) ו־(v_2, v_3) הן כולן סדרות בת"ל, אבל (v_1, v_2, v_3) ת"ל. הוכיחו כי

$$\mathrm{Span}\left(v_1, v_2\right) = \mathrm{Span}\left(v_1, v_3\right) = \mathrm{Span}\left(v_2, v_3\right).$$

שאלה 4

יהא V מ"ו, ויהיו S ו-T תת־קבוצות של V.

הוכיחו או הפריכו: אם $S \cap T = \emptyset$ וגם $S \cup T$ בת"ל, אז $\mathrm{Span}\left(S\right) \cap \mathrm{Span}\left(T\right) = \{0\}$.

שאלה 5

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{R}$, $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$, $S_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, $S_2 = (3v_1, v_3, v_1 - 2v_4)$. אילו מבין הטענות הבאות נכונות? אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמא נגדית.

א. אם S_1 בת"ל, אז S_2 בת"ל.

ב. אם S_1 ת"ל, אז S_2 ת"ל.

שאלה 6

יהא V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $v_1, ..., v_k, ..., v_n \in V$, $k < n$. אילו מבין הטענות הבאות נכונות? אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אחרת, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $(v_1, ..., v_n)$ ת"ל, אזי $(v_1, ..., v_k)$ ת"ל או $(v_{k+1}, ..., v_n)$ ת"ל.

ב. אם $(v_1, ..., v_k)$ בת"ל וגם $v_{k+1} \notin \mathrm{Span}((v_1, ..., v_k))$, אזי $(v_1 - v_{k+1}, ..., v_k - v_{k+1})$ בת"ל.

ג. אם $(v_1, ..., v_n)$ ת"ל, אזי לכל $a_1, ..., a_n \in \mathbb{F}$ גם $(a_1 v_1, ..., a_n v_n)$ ת"ל.

ד. יהיו $u_1, u_2 \in V$ שאינם וקטור האפס. אם $u_1 \in \mathrm{Span}((v_1, ..., v_k))$, $u_2 \in \mathrm{Span}((v_{k+1}, ..., v_n))$, ו־$(v_1, ..., v_n)$ בת"ל, אזי (u_1, u_2) בת"ל.

שאלה 7

נתבונן ב־ $\mathbb{F}^3$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. האם הסדרה (v_1, v_2) בת"ל כאשר:

א. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

ב. $\mathbb{F} = \mathbb{F}_7$, $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

שאלה 8

בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתון מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}$, $v \in V$ ו־$\mathcal{B}$ בסיס סדור של V. חשבו את $[v]_{\mathcal{B}}$ כאשר:

א. $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ ו־ $v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

ב. $V=M_{2\times2}(\mathbb{R})$ מעל $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)$, $v=\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix}$.

ג. $V=\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ מעל $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}=\left(1+2x,x-x^2,x+x^2\right)$, $v=6+5x+2x^2$.

ד. $V=\mathbb{F}_2^{\mathbb{F}_2}$ מעל $\mathbb{F}_2$, $\mathcal{B}=(f,g)$, $v=h$, כאשר $f(x)=1$, $g(x)=x$, $h(x)=x^2+1$.

שאלה 9

יהא $\mathcal{B}=(v_1,v_2,v_3)$ בסיס סדור של $\mathbb{R}^3$. נתון כי $\mathcal{C}=(u_1,u_2,u_3)$ אף הוא בסיס סדור של $\mathbb{R}^3$, כאשר

$$u_1=v_1+v_2,u_2=v_2+2v_3,u_3=v_3+7v_1.$$

א. חשבו את $[u_i]_{\mathcal{B}}$ עבור $i=1,2,3$.

ב. יהא $v\in\mathbb{R}^3$ וקטור כך ש־ $[v]_{\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. מצאו את $[v]_{\mathcal{B}}$.

שאלה 10

נסמן $B=\begin{pmatrix}1&-2\\-3&6\end{pmatrix}$.

א. הראו כי $U=\{A\in M_{2\times2}(\mathbb{R}):AB=0\}$ הוא תמ"ו של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

ב. מצאו בסיס סדור $\mathcal{B}$ (כלשהו) ל־U (נמקו כמובן מדוע הסדרה הזו היא בסיס).

ג. נסמן $v=\begin{pmatrix}6&2\\9&3\end{pmatrix}$. ביחס ל־$\mathcal{B}$ שמצאתם בסעיף קודם, חשבו את $[v]_{\mathcal{B}}$.