

# Dinámica del sólido rígido. Giróscopo

Álvaro Díaz Carmona

4 de diciembre de 2020

## Resumen

<https://github.com/adiaz97/paper>

En este informe se reproduce un experimento para analizar el movimiento de un sólido rígido. El objetivo principal es la determinación de uno de los momentos de inercia de este sólido y el estudio de su rotación, precesión y nutación.

## 1. Introducción

El movimiento giroscópico es el de un cuerpo que gira en torno a un eje móvil. En el caso concreto del giróscopo, el cuerpo tiene simetría de revolución y gran momento de inercia respecto al eje de giro. De la misma manera que la masa de un objeto está relacionada con su resistencia a cambiar su desplazamiento, el momento de inercia para un cierto sólido no es más que una magnitud que mide su resistencia a la rotación en cierto punto. Si el sólido tiene ciertas simetrías, el momento de inercia puede ser el mismo en varios puntos, en un eje o incluso en todo el sólido. El momento de inercia para cualquier sólido solo depende de la distribución de masa dentro del volumen que ocupa. Para su cálculo se puede usar su definición  $I = \int_0^M r^2 dm$  donde  $r$  es el módulo de la distancia al eje de rotación. Esta definición es válida cuando el eje de rotación del sólido coincide con alguno de los ejes principales (si existen) que son ejes perpendiculares entre sí y aportan información sobre simetrías del cuerpo. En general, puede haber desde 0 hasta 3 ejes de simetría distintos (llamados  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ ). También hay otra manera de conocer el momento de inercia para un sólido, aprovechando las simetrías y las leyes de la Mecánica. Por ejemplo, supongamos un disco circular con un cierto espesor, que puede hacerse girar sobre su eje de revolución a través de una polea que une el eje del disco con una masa libre para caer (ver Figura 1). Podemos aplicar

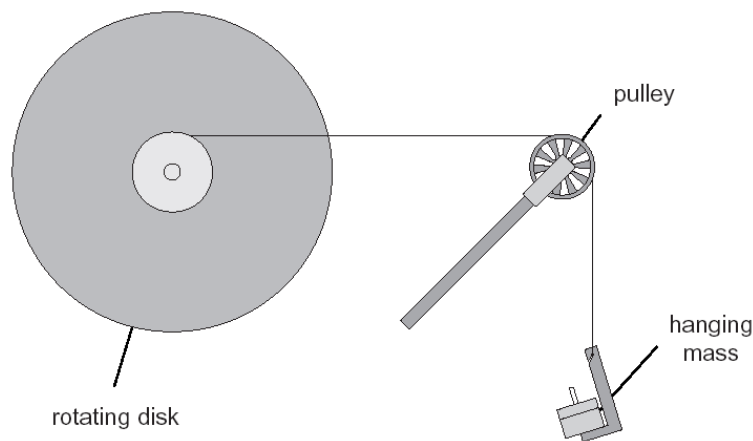


Figura 1: Disco y polea, según la disposición experimental.

la segunda Ley de Newton en su versión angular:

$$\sum F = m_d a_d \equiv \sum M = I \alpha . \quad (1)$$

Donde  $\sum F$  es la suma de todas las fuerzas externas ejercidas sobre el disco,  $m_d$  es su masa,  $a_d$  es la aceleración lineal que adquiere,  $\sum M$  es la suma de los momentos de las fuerzas externas y  $\alpha$  es la aceleración angular. Sabemos que, al estar causando la rotación con la polea, se produce un movimiento de rodadura en el disco, entonces  $\alpha = \frac{a}{R}$ . Por otro lado, por la definición del momento de una fuerza tenemos que  $\sum M = \vec{R} \times \vec{F}$  siendo  $\vec{R}$  la distancia desde la fuerza al punto de aplicación. Así, pues, el momento de inercia en el eje de rotación (que es un eje principal del disco) es

$$I = \frac{R^2 \times F_{eje}}{a} . \quad (2)$$

Sucede que, en el eje, la única fuerza externa es la tensión de la cuerda  $T$ . El peso no contribuye porque su punto de aplicación (el centro de gravedad) está dentro del eje y por lo tanto su distancia es nula. Para averiguar la tensión volvemos a aplicar la segunda Ley de Newton, esta vez en su forma original:

$$\sum F = ma \Rightarrow mg - T = ma \Rightarrow T = m(g - a) . \quad (3)$$

En este caso  $m$  es la masa de la pesa, y  $a$  es la aceleración lineal que tiene. Sustituyendo (3) en (2) tenemos que

$$I = mR^2 \left( \frac{g}{a} - 1 \right) . \quad (4)$$

De esta manera, observamos que cuanto mayor es la masa y el radio del disco mayor es el momento de inercia, esto es, más resistencia opone a girar si está en reposo o a dejar de girar si estaba en movimiento. También observamos que al aumentar la aceleración de la polea (el tirón de la cuerda) disminuye el momento de inercia. Este sencillo cálculo servirá de base para la experiencia registrada en el informe, pero los conceptos son fácilmente generalizables a cualquier sólido rígido.

## 2. Fundamento Teórico

Supóngase un sólido libre de girar sin rozamiento en torno a un punto fijo cuya velocidad angular inicial  $\omega$  es constante y se encuentra en la parte positiva del eje  $Z$ . Su momento angular  $\vec{L}$  quedará definido por:

$$\vec{L} = I_z \omega \hat{e}_z \quad (5)$$

Siendo  $I_z$  el momento de inercia respecto al eje  $Z$  y  $\hat{e}_z$  el vector unitario de ese mismo eje. En ausencia de momentos externos  $\vec{M}_{ext}$  el momento angular no varía y se mantiene la dirección del eje de rotación. Matemáticamente

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_{ext} = 0 \Leftrightarrow \vec{L} = cte . \quad (6)$$

Si se cuelga un cuerpo de masa  $m$  en un extremo del eje  $Z$ , se ejerce una fuerza peso  $\vec{P} = m\vec{g}$  y, sabiendo que el momento de una fuerza es el producto vectorial de esta por el vector posición del punto de aplicación de la fuerza  $\vec{r} \equiv d\hat{e}_z$ , entonces obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{g} . \quad (7)$$

Esta fuerza aplicada causa que el eje de giro cambie de dirección y, por lo tanto, el cuerpo adquiere una velocidad angular perpendicular al eje  $Z$ . Si esta fuerza es muy pequeña y, teniendo en cuenta que  $\omega = cte$ , podemos escribir (7) como

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = d\hat{e}_z \times m\vec{g} \approx I_z \omega \dot{\hat{e}}_z \quad (8)$$

donde hemos hecho la derivada temporal en (5) despreciando la variación en el momento de inercia. De aquí podemos deducir que

$$\dot{\hat{e}}_z = \vec{\Omega} \times \hat{e}_z \text{ con } \vec{\Omega} \equiv -\frac{dmg}{I_z \omega} \hat{g} . \quad (9)$$

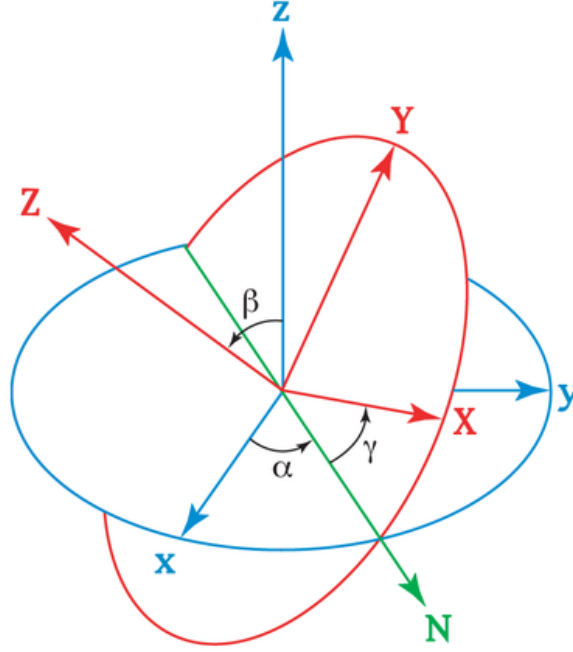


Figura 2: Ángulos de Euler de un sólido cuyo **sistema de referencia propio** gira respecto al **sistema de referencia del laboratorio** (azul)

Este fenómeno por el que el eje de rotación cambia de dirección se llama *precesión* y la velocidad angular con la que rota,  $\vec{\Omega}$ , se llama velocidad angular de precesión.

Hay otro fenómeno característico de un giróscopo, llamado *nutación*. Conocidos los ángulos de Euler (ver Figura 2), es fácil ver que la velocidad angular del sólido en torno a su eje es  $\omega = \dot{\gamma}$  y  $\dot{\alpha}$  corresponde a la precesión. Entonces,  $\dot{\beta}$  representará un tercer movimiento al que hemos llamado nutación. Suponiendo la conservación de la energía, es demostrable que

$$\dot{\beta} = \frac{A - B \cos \beta}{I_{12} \sin^2 \beta}, \quad (10)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes y  $I_{12}$  es el momento de inercia respecto a los ejes contenidos en el plano perpendicular al eje de rotación. Si  $\beta$  adquiere un valor único habrá una precesión estacionaria; en cambio, si el ángulo oscila entre dos valores  $\beta_a$  y  $\beta_b$ , podemos distinguir tres casos:

1.  $\dot{\beta}$  nunca se anula, es decir,  $\arccos\left(\frac{A}{B}\right) > \beta_b$  o  $\arccos\left(\frac{A}{B}\right) < \beta_a$ . Entonces el eje precesa alrededor de la vertical (dirección  $Z$ ) y su posición oscila periódicamente entre los ángulos. El movimiento proyectado es similar a una función seno o coseno.
2. Si  $\beta_a < \arccos\left(\frac{A}{B}\right) < \beta_b$ , el eje se mueve realizando bucles,  $\dot{\beta}$  cambia de signo cuando el eje de rotación pasa de estar en la parte superior a la parte inferior del bucle.
3. En el caso límite  $\arccos\left(\frac{A}{B}\right) = \beta_a$ , el giróscopo oscila haciendo cúspides. El eje de rotación queda instantáneamente en reposo en la parte superior de cada cúspide.

### 3. Material y metodología

Los materiales utilizados para esta demostración experimental son:

- Giróscopo Pasco ME 8960 (un disco plano capaz de girar en torno a su eje de revolución, ver Figura 3).

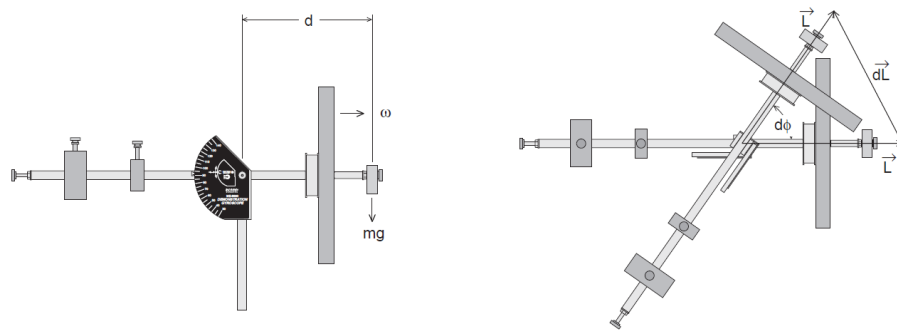


Figura 3: Gir6scopo utilizado en la experiencia.

- Pesas port6tiles de diferentes masas.
- Portapesas.
- Polea.
- Hilo.
- Tres sensores.
- Programas de DataStudio.

Para la determinaci6n del momento de inercia del gir6scopo se siguen los siguientes pasos, basados en el anterior [Secci6n 2](#):

1. Colocar en un extremo del hilo el portapesas con pesas medidas anteriormente. Pasar el hilo por la polea y unirlo al gir6scopo.
2. Liberar el portapesas para que caiga mueva la polea. Recoger datos de la aceleraci6n del disco con el ordenador.
3. Repetir el proceso hasta tomar las medidas necesarias.

Para la determinaci6n de la velocidad angular de precesi6n se siguen los siguientes pasos:

1. Equilibrar el gir6scopo.
2. Colocar una masa ya medida en el extremo del gir6scopo. Anotar la distancia  $d$  entre la masa y el eje de giro.
3. Quitar la pesa utilizada. Abrir el programa de DataStudio y, sujetando el eje del giroscopio poner en marcha el aparato utilizando el hilo para dar impulso. La eficiencia de la toma de datos aumenta cuanto mayor sea la velocidad proporcionada.
4. Con ayuda del sensor, determinar la velocidad angular de rotaci6n.
5. Mientras el disco gira, colocar la pesa en la posici6n indicada y, con ayuda del otro sensor, medir la velocidad angular de precesi6n.
6. Una vez medida, soltar el eje de rotaci6n y quitar la pesa. Volver a medir la velocidad de rotaci6n.
7. Repetir el proceso haciendo girar el disco en sentido contrario.

Finalmente, para la determinaci6n de la velocidad angular de nutaci6n se siguen los siguientes pasos:

1. Abrir el tercer programa de DataStudio y colocar el eje del disco formando  $30^\circ$  con la horizontal.

2. Determinar la velocidad angular de rotación (al principio y al final del ensayo), de precesión y de nutación con ayuda de los sensores.
3. Repetir el paso 2 pero empujando suavemente el eje del disco en la dirección de la precesión. Anotar el movimiento observado.
4. Repetir el paso 2 pero ahora empujando en sentido contrario.

## 4. Datos recogidos

En primer lugar se tomaron medidas de los parámetros básicos para el ensayo (ver [Tabla 1](#)). También se midieron las masas disponibles (ver [Tabla 2](#)). Para la segunda y tercera parte de esta experiencia,

	Radio	Espesor
Disco	$(12,7 \pm 0,1) \times 10^{-2} \text{ m}$	$(2,1 \pm 0,1) \times 10^{-2} \text{ m}$
Polea	$(2,3 \pm 0,1) \times 10^{-2} \text{ m}$	

Cuadro 1: Parámetros del disco y la polea

	$(\text{Masa} \pm 0,1) \times 10^{-3} \text{ kg}$
$m_1$	101,6
$m_2$	132,1
$m_3$	71,0
$m_4$	40,4
$m_5$	162,4

Cuadro 2: Masas utilizadas en la primera parte

se usa una masa  $m = (152,6 \pm 0,1) \times 10^{-3} \text{ kg}$ . El parámetro  $d$  utilizado en la ecuación (9) es  $d = (32,0 \pm 0,1) \times 10^{-2} \text{ m}$ .

Durante la observación de la nutación se recogieron gráficas en cada ensayo, similares a la [Figura 4](#)

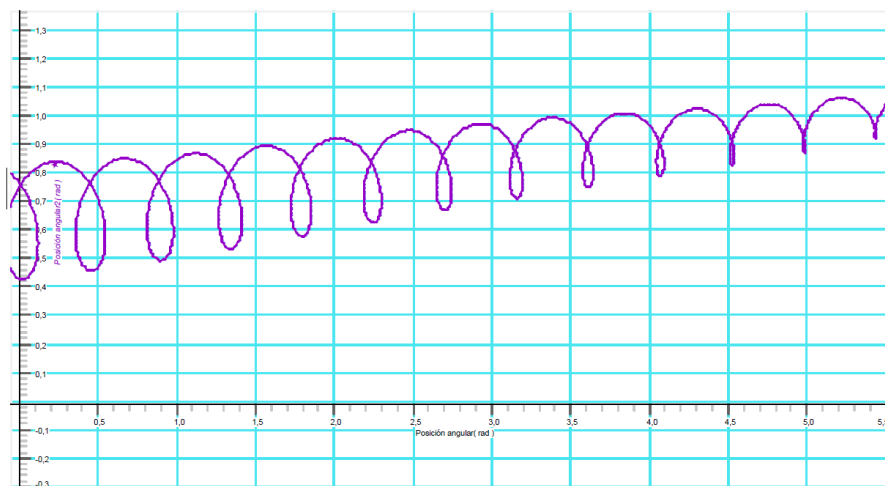


Figura 4: Observación representativa del fenómeno de la nutación.

## 5. Resultados

Siguiendo la metodología 3 citada, se realizaron varios ensayos para calcular el momento de inercia del gir6scopo. Es demostrable que, para una disposici6n como la indicada, podemos obtener el momento de inercia a partir de la aceleraci6n  $\vec{a}$  de la pesa que cae (Ecuaci6n 2). Los resultados conseguidos se recogen en la Tabla 3. Luego el momento de inercia del disco es

Ensayo	Aceleraci6n ( $\text{m/s}^2$ )	Masa ( $\pm 0,0001 \text{ kg}$ )	Momento de inercia ( $\text{kg/m}^2$ )
1	$0,06220 \pm 0,00024$	0,1016	$0,842 \pm 0,008$
2	$0,0817 \pm 0,0005$	0,1321	$0,832 \pm 0,009$
3	$0,0431 \pm 0,0004$	0,0710	$0,851 \pm 0,010$
4	$0,02380 \pm 0,00016$	0,0405	$0,881 \pm 0,010$
5	$0,1030 \pm 0,0005$	0,1624	$0,809 \pm 0,008$
Promedio	$0,0628 \pm 0,0004$	0,1015	$0,843 \pm 0,009$

Cuadro 3: Datos y resultados para el momento de inercia.

$$I_z = 0,843 \pm 0,009 \text{ kg/m}^2. \quad (11)$$

En la segunda parte de la demostraci6n, se midieron la velocidad angular inicial  $\omega_1$ , la velocidad angular de precesi6n  $\vec{\Omega}_{exp}$  y la velocidad angular inicial  $\omega_2$ . Tambi6n se calcul6 el valor te6rico para la velocidad de precesi6n  $\vec{\Omega}_{teo}$  usando la expresi6n (9). Los resultados para los distintos ensayos est6n en la tabla Tabla 4. Finalmente, en el estudio del movimiento de nutaci6n se realizaron varios ensayos siguiendo la

Ensayo	$\omega_1$ ( $\pm 0,001 \text{ rad/s}$ )	$\vec{\Omega}_{exp}$ (rad/s)	$\omega_2$ ( $\pm 0,001 \text{ rad/s}$ )	$\vec{\Omega}_{teo}$ (rad/s)
1	57,461	$0,4178 \pm 0,0004 \vec{g}$	49,099	$0,421 \pm 0,005 \vec{g}$
2	45,397	$0,507 \pm 0,001 \vec{g}$	38,811	$0,526 \pm 0,006 \vec{g}$
1	49,943	$0,4620 \pm 0,0006 \vec{g}$	44,999	$0,472 \pm 0,005 \vec{g}$

Cuadro 4: Datos recogidos y resultados para la velocidad angular de precesi6n

metodologfa en la Secci6n 3. En casi todos los ensayos se observ6 que el eje del disco describfa bucles (Caso 2) salvo en uno solo, donde se registr6 una trayectoria con c6spides (Caso 3). A continuaci6n se muestran dos ejemplos de las gr6ficas recogidas en las Figuras 5 y 6.

## 6. Conclusiones

Siguiendo los pasos descritos se calcul6 el momento de inercia a partir de medidas de la aceleraci6n y se obtuvo el resultado final de  $I_z = 0,843 \pm 0,009 \text{ kg/m}^2$  con una dispersi6n de  $\sigma = 0,022 \text{ kg/m}^2$ . Este valor de dispersi6n significa que los valores obtenidos son pr6ximos, luego las medidas y los c6lculos se realizaron con precisi6n.

Respecto a la determinaci6n de la velocidad angular de precesi6n, la comparaci6n entre los valores medidos y los c6lculos en la Tabla 5 arroja errores relativos en los m6dulos menores al 2 % para todos los casos, mientras que la direcci6n y sentido coinciden. Asf pues estos c6lculos tienen exactitud y precisi6n. Tambi6n es importante notar que, comparando la velocidad angular inicial y final de rotaci6n, observamos que el disco es efectivamente frenado, es decir,  $\omega$  no es estrictamente constante. Atribuimos este hecho a rozamientos entre el disco y su eje de giro.

Finalmente, se observaron los movimientos de nutaci6n descritos en la (5) y se descubri6 que en las condiciones del laboratorio habfa preferencia por el caso 2 de nutaci6n (bucles), salvando una excepci6n en la que se observ6 el caso 3 (c6spides). Adem6s se comprob6 cualitativamente que el cabeceo o nutaci6n se reduce si se empuja el eje del giroscopio en sentido de la precesi6n y, recfprocamente, al aplicar una fuerza externa en sentido opuesto al movimiento de precesi6n, el cabeceo se acrecenta.

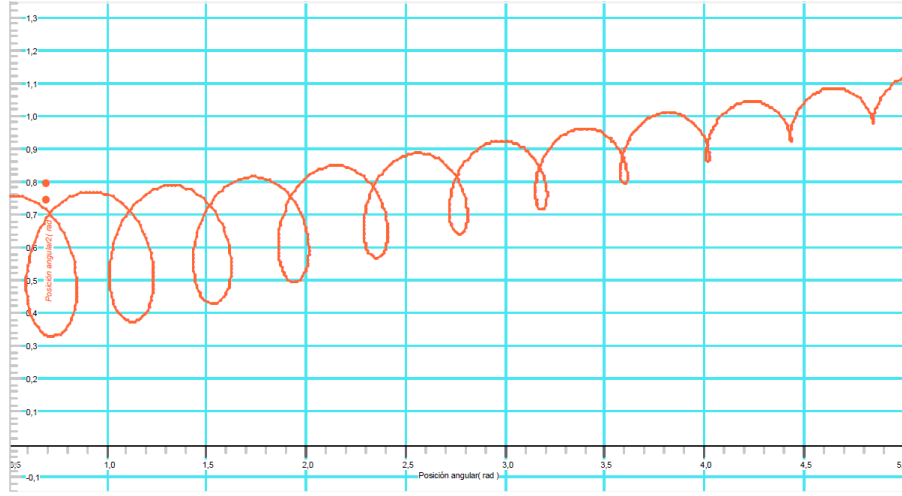


Figura 5: Observación del segundo caso de nutación.

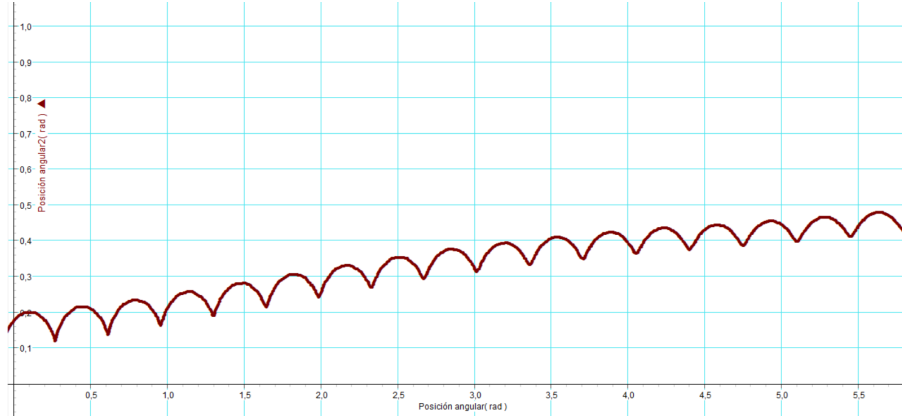


Figura 6: Observación del tercer caso de nutación.

## Apéndices

### Apéndice de errores

- Momento de inercia.

$$\Delta I_z = \sqrt{\left(R^2 \left(\frac{g}{a} - 1\right)\right)^2 (\Delta m)^2 + \left(2m \left(\frac{g}{a} - 1\right)\right)^2 (\Delta R)^2 + \left(mR^2 \left(\frac{g}{a^2}\right)\right)^2 (\Delta a)^2} \quad (12)$$

- Velocidad angular de precesión.

$$\Delta \Omega_{teo} = \sqrt{\left(\frac{mg}{I_z \omega_{rot}}\right)^2 (\Delta d)^2 + \left(\frac{dmg}{I_z \omega_{rot}}\right)^2 (\Delta m)^2 + \left(\frac{dmg}{I_z^2 \omega_{rot}}\right)^2 (\Delta I_z)^2 + \left(\frac{dmg}{I_z \omega_{rot}^2}\right)^2 (\Delta \omega_{rot})^2} \quad (13)$$

## Referencias

- [1] J.B. Marion. *Dinámica clásica de partículas y sistemas*. Reverté, 1985.

$\Omega_{exp}$ (rad/s)	$\Omega_{teo}$ (rad/s)	Error relativo (%)
$0,4178 \pm 0,0004$	$0,421 \pm 0,005$	0,29
$0,507 \pm 0,001$	$0,526 \pm 0,006$	1,94
$0,4620 \pm 0,0006$	$0,472 \pm 0,005$	1,04

Cuadro 5: Comparación de los módulos de las velocidades de precesión experimentales y teóricas

- [2] Herbert Goldstein. *Classical mechanics*. Addison Wesley, San Francisco, 2002.
- [3] John Taylor. *Mecánica clásica*. Reverte, Barcelona, 2013.