5

Épargner et emprunter

Ce chapitre ne nécessite que les concepts de série géométrique, de suite définie récursivement et de limite. Il peut être couvert en deux heures de cours. Il ne contient qu'une partie élémentaire (voir la préface).

Rien ne semble plus éloigné des mathématiques que d'acheter une maison ou de penser à sa retraite, surtout quand on est âgé de 20 ans. Pourtant, épargner et emprunter sont soumis à des règles qui se modélisent très bien mathématiquement. C'est une des technologies mathématiques les plus vieilles. Leibniz a consacré de nombreux articles scientifiques aux problèmes des intérêts, des assurances et, de façon plus large, aux mathématiques financières [1]. Mais notre civilisation n'est pas la première à étudier ces problèmes. Une mission archéologique en Iran, sous la direction de Contenau et de Mecquenem, a ramassé en 1933 des tablettes babyloniennes dont l'étude a été faite dans les décennies qui ont suivi. Quelques-unes de ces tablettes avaient un contenu mathématique; elles seraient de la fin de la première dynastie de Babylone, un peu postérieures à Hammourabi (1793–1750 av. J.-C.), et une d'entre elles porte sur le calcul de l'intérêt composé et des annuités [2]. Ainsi, les problèmes étudiés dans ce chapitre constituent sûrement la plus vieille des applications mathématiques à la vie courante examinée dans le présent recueil !

Les mathématiques intervenant dans ces problèmes bancaires sont relativement simples. Pourtant, l'homme de la rue est en général rebuté par le jargon des prêts hypothécaires et est souvent suspicieux devant les promesses presque faramineuses des plans d'épargne-retraite. Il vaut donc la peine d'apprendre le vocabulaire et les bases mathématiques de ce sujet.

5.1 Vocabulaire bancaire

Comme dans plusieurs sujets où les mathématiques ont été ou sont utilisées, le vocabulaire n'a pas été créé par les mathématiciens. Il est souvent flou. Heureusement, dans le présent sujet, il est simple et précis. Deux exemples nous permettront d'introduire ce vocabulaire.

Le premier exemple est celui d'une épargnante. Elle va à la banque déposer 1000 \$ le jour de son anniversaire dans le but de retirer cette somme dans cinq ans, jour pour jour. La banque s'engage à lui verser 5 % par an. Le *solde initial* ou *principal* est le montant que l'épargnante met en banque ; dans l'exemple ci-dessus, le solde initial est de 1000 \$. Les 5 % que lui donne la banque sont le *taux d'intérêt*[1].

Le second exemple est celui d'un emprunteur. Vous avez travaillé plusieurs étés et il ne vous manque que 5000 \$ pour acheter votre première auto. Vous allez à la banque pour emprunter cette somme. La banque vous demandera de rembourser cette somme en donnant 156,38 \$ par mois pendant trois ans, car le prêt est concédé à 8 %. Le *montant du prêt* ou *solde initial* est la somme de 5000 \$ que la banque vous remet initialement, la *mensualité* est le montant de 156,38 \$ que vous paierez mensuellement, la *période d'amortissement* est les trois ans pendant lesquels vous paierez votre emprunt. À tout moment durant ces trois ans, le *solde* sera la partie du prêt (c'est-à-dire du solde initial) qu'il vous reste à payer. Dans trois ans, ce solde sera (enfin) 0 \$, et vous posséderez complètement votre auto !

5.2 Composition des intérêts

Il y a deux types d'intérêts : les simples et les composés. Nous commencerons par décrire les intérêts composés qui sont de loin les plus répandus.

Les intérêts composés ne « s'additionnent » pas, mais ils se... « composent ». Voyons ce que ceci veut dire. Dans le premier exemple de la section précédente, les intérêts sont de 5 % (sous-entendu par an). Le principal de 1000 \$ vaudra au premier anniversaire

$$1000\,\$ + (5\,\% \text{ de } 1000\,\$) = \left(1000\,\$ + \frac{5}{100} \times 1000\,\$\right) = (1000\,\$ + 50\,\$) = 1050\,\$.$$

Mais attention, au second anniversaire, le principal vaudra *plus* que $(1000\,\$ + 50\,\$ + 50\,\$) = 1100\,\$$. En effet, au premier anniversaire, le principal est de 1050 \$, et les intérêts que vous verse la banque sont alors calculés sur ce « nouveau » principal. À la fin de la seconde année, c'est-à-dire au second anniversaire du dépôt, le principal et les intérêts vaudront

$$1050\,\$ + (5\,\% \text{ de } 1050\,\$) = \left(1050\,\$ + \frac{5}{100} \times 1050\,\$\right) = (1050\,\$ + 52{,}50\,\$) = 1102{,}50\,\$.$$

Le petit 2,50 \$ de différence est pratiquement insignifiant ? Vous verrez que cette petite différence joue un grand rôle. Refaisons le calcul pour les autres anniversaires :

[1]Les mots « 5 % » ou « n % » signifient des fractions multiples de centièmes. Ainsi « 5 % » signifie $\frac{5}{100}$ et « n % » signifie $\frac{n}{100}$.

$$\begin{aligned} \text{troisième anniversaire :}\quad & 1157,63\,\$ \\ \text{quatrième anniversaire :}\quad & 1215,51\,\$ \\ \text{cinquième anniversaire :}\quad & 1276,28\,\$. \end{aligned}$$

Si les intérêts aux cinq anniversaires avaient été égaux à ceux de la première année (50 \$), le principal au cinquième anniversaire aurait valu ($1000\,\$ + 5 \times 50\,\$) = 1250\,\$$. Puisque les intérêts sont composés annuellement, le principal après cinq ans vaut plutôt 1276,28 \$.

Il est temps de formaliser ce calcul. Soient p_i la valeur du principal au i-ième anniversaire et p_0 le solde initial. Soit r le taux d'intérêt. Dans l'exemple ci-dessus, le taux est $r = \frac{5}{100}$. Le solde p_i à l'anniversaire i peut être calculé à partir du solde p_{i-1} un an avant. En effet, il suffit d'ajouter à ce dernier $r \times p_{i-1}$:

$$p_i = p_{i-1} + r \cdot p_{i-1} = p_{i-1}(1+r), \qquad i \geq 1.$$

À l'aide de cette formule récursive, on déduit que p_i est relié à p_0 par

$$\begin{aligned} p_i &= p_{i-1}(1+r) \\ &= (p_{i-2}(1+r))\,(1+r) = p_{i-2}(1+r)^2 \\ &= \cdots \\ &= p_0(1+r)^i, \qquad i \geq 1. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ceci est la formule des intérêts composés. Un mathématicien lirait cette formule en disant que « le principal d'un placement croît géométriquement », c'est-à-dire qu'il croît comme la puissance du nombre $1 + r$ (qui est plus grand que 1).

Certaines banques veulent avantager les clients et composent les intérêts selon un cycle *plus court* que l'année. Supposons que, dans l'exemple précédent, les intérêts sont composés trimestriellement, c'est-à-dire aux trois mois. Puisqu'il y a quatre cycles de trois mois dans un an, la banque versera des intérêts de $\frac{r}{4}\,\% = \frac{5}{4}\,\%$ tous les trois mois. Après un an, il y aura eu quatre versements d'intérêts, et leur composition produira un taux annuel r_{eff} supérieur au taux annoncé de 5 %. En effet,

$$1 + r_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{r}{4}\right)^4$$

et

$$r_{\text{eff}} = 5,095\,\%,$$

ce qui est donc avantageux pour le client ! Lorsqu'une banque verse les intérêts à intervalles plus rapprochés que l'année, le taux d'intérêt annoncé (par exemple, 5 %) est le *taux nominal.* Dans les faits, le taux annuel, appelé *taux effectif,* est celui que vous observerez aux anniversaires et est légèrement supérieur. Dans le présent exemple, le taux nominal est de 5 % alors que le taux effectif est de 5,095%.

Comme on peut l'imaginer, le taux effectif croît lorsque la période de composition des intérêts raccourcit. Par exemple, si les intérêts sont versés quotidiennement, le taux effectif associé à $r = 5\,\%$ est

$$r_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{r}{365}\right)^{365} - 1 = 5{,}126\,75\,\%.$$

Que dire des intérêts composés à l'heure? A la seconde? Au millième de seconde? Évidemment, seul un mathématicien peut poser la question : existe-t-il une limite au taux effectif lorsque la période tend vers zéro? Mais c'est une fort jolie question! Si l'année est divisée en n parties égales, alors le taux effectif $r_{\text{eff}}(n)$ est relié au taux nominal r par

$$1 + r_{\text{eff}}(n) = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

Selon cette règle, le banquier le plus généreux de la planète composera ses intérêts continûment, et son taux effectif sera

$$1 + r_{\text{eff}}(\infty) = \lim_{n\to\infty}(1 + r_{\text{eff}}(n)) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r.$$

La dernière étape utilise la relation

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

qui est habituellement démontrée dans un premier cours d'analyse. En faisant le changement de variable $m = \frac{n}{r}$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mr} = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^r = e^r.$$

Il est amusant de voir apparaître la base e des logarithmes népériens dans ce calcul simple. (Puisque les prêts sont vieux comme le monde, les banquiers auraient pu être les premiers à introduire ce nombre.) Si $r = 5\,\%$ comme plus tôt, 20 ans permettront de multiplier le principal par le nombre e. En effet, selon la formule des intérêts composés (5.1), le principal vaudra après 20 ans

$$p_{20} = p_0(1 + r_{\text{eff}}(\infty))^{20} = p_0(e^r)^{20} = p_0 e^{\frac{5}{100}\times 20} = p_0 e.$$

Il n'y a pas une grande différence entre le taux nominal de $r = 5\,\%$ et le taux effectif $r_{\text{eff}}(\infty)$ correspondant : $r_{\text{eff}}(\infty) = e^r - 1 = 5{,}127\,11\ldots\,\%$. Les banquiers n'utilisent donc pas ce concept de composition limite (un peu abstrait) comme outil de marketing.

Les *intérêts simples* sont très rares et ne sont presque jamais utilisés dans les milieux bancaires. Ils consistent à calculer les intérêts sur le solde initial quel que soit l'anniversaire du placement. Dans l'exemple d'un placement initial $p_0 = 1000\,\$$ et $r = 5\,\%$, les intérêts (simples) seront de $1000 \times \frac{5}{100}$ $= 50 \$$ chaque année. Le principal et les intérêts des cinq premiers anniversaires vaudront ensemble :

$$\begin{aligned}
p_1 &= 1050 \$, \\
p_2 &= 1100 \$, \\
p_3 &= 1150 \$, \\
p_4 &= 1200 \$, \\
p_5 &= 1250 \$.
\end{aligned}$$

Cette progression est dite arithmétique, car l'accroissement dépend *linéairement* du nombre d'années en banque :

$$p_i - p_0 = ir.$$

Si vous désirez placer votre argent à la banque, refusez les intérêts simples. Et si vos parents vous concèdent un prêt à intérêts simples, ils sont très généreux !

5.3 Un plan d'épargne

Les institutions financières recommandent de commencer à investir tôt pour la retraite. Elles proposent plusieurs plans d'épargne, certains vous promettant de pouvoir prendre votre retraite dès votre 55e anniversaire dans un confort financier assuré. Pour une jeune étudiante, ceci semble bien loin, et il peut lui paraître approprié de retarder de quelques années le début de son plan d'épargne pour la retraite. Mais les banques ont raison : le plus tôt sera le mieux !

Un plan d'épargne invite un client à s'engager à déposer chaque année une somme $\Delta \$$ et ce, pendant N années. Durant ces N années, la banque offrira un taux r que nous supposerons constant et composé annuellement. Les variables sont donc

Δ :	dépôt annuel de l'épargnant
r :	taux d'intérêt constant pour les N années
N :	durée du plan d'épargne
p_i :	solde du plan au i-ième anniversaire, $i = 0, 1, \ldots, N$.

L'épargnant dépose $\Delta \$$ le jour de la signature du contrat et

$$p_0 = \Delta.$$

Après un an, les intérêts ont couru, et la banque les verse dans le compte. À ces intérêts, l'épargnant ajoute une nouvelle tranche de $\Delta \$$. Ainsi, au premier anniversaire, le solde est

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_0 + rp_0 + \Delta \\
&= p_0(1 + r) + \Delta.
\end{aligned}$$

Ce raisonnement peut être répété pour toutes les années suivantes. Ainsi, p_i se déduit de p_{i-1} par

$$p_i = p_{i-1}(1+r) + \Delta.$$

Il est possible d'obtenir p_i en fonction de p_0. En expérimentant un peu, nous devinerons la réponse :

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1(1+r) + \Delta \\ &= (p_0(1+r) + \Delta)(1+r) + \Delta \\ &= p_0(1+r)^2 + \Delta(1 + (1+r)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_3 &= p_2(1+r) + \Delta \\ &= \left(p_0(1+r)^2 + \Delta(1 + (1+r))\right)(1+r) + \Delta \\ &= p_0(1+r)^3 + \Delta\left(1 + (1+r) + (1+r)^2\right). \end{aligned}$$

Il est tentant de proposer la formule générale

$$\begin{aligned} p_i &= p_0(1+r)^i + \Delta\left(1 + (1+r) + (1+r)^2 + \cdots + (1+r)^{i-1}\right) \\ &= p_0(1+r)^i + \Delta\sum_{j=0}^{i-1}(1+r)^j. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Cette formule sera prouvée à l'exercice 1.

En se rappelant que la somme des i premières puissances d'un nombre x est

$$\sum_{j=0}^{i-1} x^j = \frac{x^i - 1}{x - 1}$$

si $x \neq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} p_i &= \Delta(1+r)^i + \Delta\sum_{j=0}^{i-1}(1+r)^j, \qquad \text{car } p_0 = \Delta \\ &= \Delta\sum_{j=0}^{i}(1+r)^j \\ &= \Delta\frac{(1+r)^{i+1} - 1}{(1+r) - 1} \\ &= \frac{\Delta}{r}\left((1+r)^{i+1} - 1\right). \end{aligned}$$

Donc,

$$p_i = \frac{\Delta}{r}\left((1+r)^{i+1} - 1\right), \tag{5.3}$$

et, après N années, $p_N = \Delta((1+r)^{N+1} - 1)/r$. Remarquez que, si l'épargnant prend sa retraite au N-ième anniversaire, il ne déposera sans doute pas le montant de Δ \$, car c'est le jour où il prend possession de ses placements. Si c'est le cas, p_N devient plutôt

$$\begin{aligned} q_N &= p_N - \Delta \\ &= \frac{\Delta}{r}\left((1+r)^{N+1} - 1\right) - \Delta \\ &= \frac{\Delta}{r}\left((1+r)^{N+1} - 1 - r\right) \\ &= \frac{\Delta}{r}\left((1+r)^{N+1} - (1+r)\right). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Nous utiliserons cette formule (5.4) plutôt que (5.3) à l'avenir.

Exemple 5.1 *a) Voici un exemple numérique qui donne une idée des sommes en jeu. Supposons des placements annuels de* $\Delta = 1000$ \$ *pendant* $N = 25$ *ans. Si le taux d'intérêt est de* 8 %, *alors*

$$q_N = \frac{\Delta}{r}\left((1+r)^{N+1} - 1\right) - \Delta = 78\,954{,}42\,\$$$

alors que l'épargnant a déboursé 25 000 \$.

b) Supposons qu'un second épargnant retarde d'un an le début de ses contributions, mais prend sa retraite en même temps que l'épargnant de a). Quelle différence y aura-t-il entre les deux soldes terminaux ? Pour le second épargnant, $N = 24$ *alors que toutes les autres variables sont les mêmes. Donc,* $q_{24} = 72\,105{,}94$ \$, *et la différence entre les deux soldes est de* 6848,48 \$. *Pour avoir contribué 1000 \$ de moins lors de la première année, le second épargnant se retrouve avec près de 10 % de moins que le premier. Les banques ont raison : commencez tôt à épargner pour vos vieux jours !*

Nous avons fait au tout début l'hypothèse que le taux d'intérêt offert au cours des N années était constant. Cette hypothèse n'est pas réaliste! La figure 5.1 montre le taux moyen des prêts hypothécaires à l'habitation des principales banques canadiennes pour la dernière moitié de siècle. Lorsque les banques exigent des taux d'intérêt importants de leurs emprunteurs, elles peuvent offrir de bons taux aux épargnants.

5.4 Emprunter

Beaucoup de gens empruntent de l'argent pour s'acheter de gros objets tels une auto ou des électroménagers, d'autres, pour payer leurs études, et presque tous emprunteront à la banque pour s'acheter une maison. Il est donc utile de comprendre la « dynamique » des prêts.

À l'achat d'une maison, une personne utilise une partie de ses économies pour faire une mise de fond, c'est-à-dire que cette personne paie en partie sa maison à l'aide de ses épargnes. Elle emprunte la somme résiduelle à la banque et elle donne cette somme et sa mise de fonds au propriétaire précédent de la maison. L'acheteur n'aura donc une responsabilité financière qu'auprès de la banque.

La banque invitera l'emprunteur à choisir la *période d'amortissement* de son prêt, fixera le taux d'intérêt r (le *taux hypothécaire*) et déterminera la *mensualité* Δ, c'est-à-dire la somme que l'emprunteur devra payer à la banque tous les mois. Voici les variables en jeu.

p_i :	solde résiduel du capital emprunté au i-ième mois
Δ :	mensualité
r_m :	taux d'intérêt mensuel effectif
N :	période d'amortissement (en années).

La quantité p_0 représente l'emprunt contracté par l'acheteur. Il est important de remarquer que le « i » de cette section compte les mois alors que celui de la section précédente étiquetait les années. Chaque mois, les intérêts courent et augmentent la somme due, *mais* l'emprunteur remet Δ \$. Donc, s'il doit encore p_i au i-ième mois, il devra au $(i+1)$-ième mois :

$$p_{i+1} = p_i(1 + r_m) - \Delta.$$

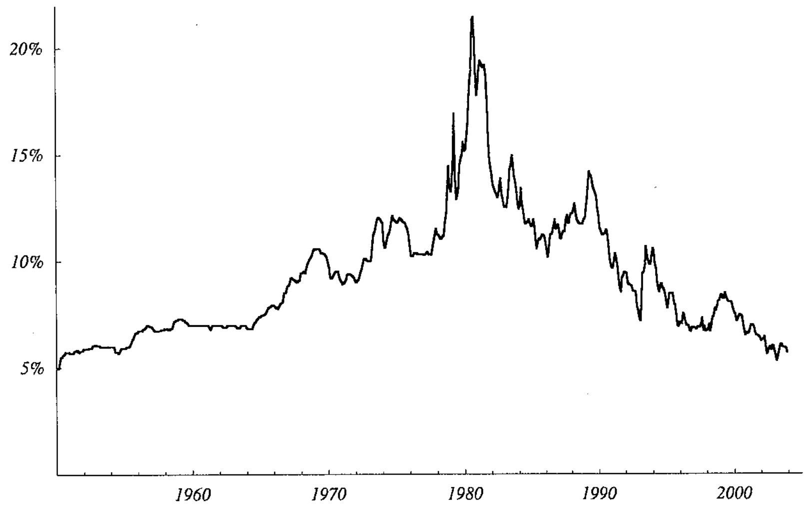

Fig. 5.1. Le taux moyen des prêts hypothécaires à l'habitation des principales banques canadiennes au cours des ans (source : site internet de la Banque du Canada).

Le signe « $-$ » devant Δ indique que l'emprunteur *réduit* sa dette chaque mois alors que les intérêts mensuels $r_m p_i$ l'augmentent. (Il n'a donc une chance de payer sa dette que si $p_i r_m < \Delta$.) Puisqu'il a choisi de payer cette dette en N années, et donc en $12N$ mois, il faudra que

$$p_{12N} = 0.$$

En copiant le calcul de la section précédente (exercice !), on peut exprimer p_i en fonction de p_0. On trouve

$$\begin{aligned} p_i &= p_0(1+r_m)^i - \Delta \sum_{j=0}^{i-1} (1+r_m)^j \\ &= p_0(1+r_m)^i - \Delta \frac{(1+r_m)^i - 1}{r_m}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Puisque la banque fixe le taux hypothécaire (et donc r_m) et que le client choisit le montant emprunté p_0 et la période d'amortissement, la seule inconnue est Δ. En utilisant $p_{12N} = 0$, on trouve

$$0 = p_{12N} = p_0(1+r_m)^{12N} - \frac{\Delta}{r_m}\left((1+r_m)^{12N} - 1\right)$$

et donc,

$$\Delta = r_m p_0 \frac{(1+r_m)^{12N}}{((1+r_m)^{12N} - 1)}. \tag{5.6}$$

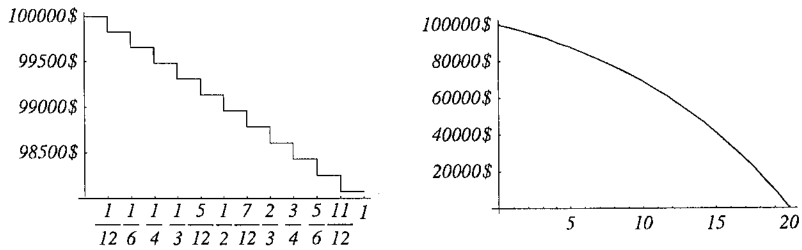

Fig. 5.2. Le solde résiduel durant la première année (à gauche) et durant les 20 ans d'amortissement (à droite). Voir l'exemple 5.2.

Exemple 5.2 *Pour un emprunt de 100 000 \$ payé sur 20 ans et contracté à un taux mensuel de $\frac{2}{3}$ % (donc, à un taux annuel nominal de* $12 \times \frac{2}{3}\,\% = 8\,\%$*), un acheteur devra débourser des mensualités de*

$$\Delta = \frac{2}{300} \times 100\ 000 \times \frac{(1+\frac{2}{300})^{240}}{((1+\frac{2}{300})^{240} - 1)}\ \$ = 836{,}44\ \$.$$

Ses 240 mensualités de 836,44 $ *totaliseront* $240 \times 836{,}44\,\$ = 200\,746\,\$$, *plus de deux fois le montant emprunté. En utilisant la formule (5.5), on peut tracer le solde résiduel* p_i *au cours des 20 années. La figure 5.2 montre le progrès du paiement de la dette de l'emprunteur durant la première année (graphique de gauche) et durant les 20 années suivantes jusqu'au remboursement complet (graphique de droite). Vous remarquerez qu'au cours de la première année, le solde n'a pas même baissé de 3000 $ alors que l'acheteur a donné à la banque* $12 \times 836{,}44\,\$ = 10\,037{,}28\,\$$. *Les hypothèques sont bien frustrantes.*

Si nous désirions rembourser le même emprunt en 15 ans plutôt qu'en 20, les versements mensuels seraient de 955,65 $, pour un total de 172 017 $ au terme de ces 15 années. Cette différence de plus de 28 000 $ entre les totaux sur 20 et sur 15 ans en fera songer plusieurs. Vous y penserez sûrement encore quand vous achèterez votre première résidence.

Nous avons vu à la première section la distinction entre taux nominal et taux effectif. Une distinction similaire apparaît pour les taux hypothécaires. Les banques présentent toujours leur taux hypothécaire r (annuel) sans expliquer comment elles calculent le taux mensuel r_m. Est-ce que

$$r_m = \frac{r}{12}? \qquad (r_{m1})$$

Ou est-ce que r_m est déterminé par

$$(1+r) = (1+r_m)^{12}? \qquad (r_{m2})$$

Dans le premier cas, le taux annuel effectif sera

$$r_{\text{eff1}} = (1+r_{m1})^{12} - 1 = \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12} - 1$$

alors que, dans le second, il sera $r_{\text{eff2}} = r$. Il est clair que $(1+\frac{r}{12})^{12} - 1 > r$ (pourquoi ?) et que les banques recevront plus d'intérêts avec r_{m1} qu'avec r_{m2}. Ainsi, r_{m1} avantage les banques, r_{m2}, les emprunteurs. Alors, comment r_m est-il calculé ?

La réponse dépend des pays ! Même en Amérique du Nord, les r_m sont calculés différemment au Canada et aux États-Unis. C'est la formule (r_{m1}) qu'utilisent les banques américaines. Les banques canadiennes n'utilisent ni (r_{m1}) ni (r_{m2}). Elles déterminent plutôt le taux mensuel effectif à l'aide de

$$\left(1 + \frac{r}{2}\right) = (1+r_m)^6, \qquad (r_{m\text{CAN}})$$

c'est-à-dire que le taux r_m composé mensuellement sur six mois doit reproduire la moitié du taux annuel. Avec ces r_m (américain ou canadien), il est possible de reproduire les calculs des banquiers au cent près !

5.5 Exercices

Note : les intérêts sont composés annuellement à moins d'indication contraire.

1. Prouver la formule (5.2). (Suggestion : par induction évidemment !)

2. **a)** La formule (5.4) est-elle linéaire en Δ ? En d'autres mots, si le dépôt annuel Δ est multiplié par x, est-ce que le solde du placement au i-ième anniversaire sera également multiplié par x ? (L'homme de la rue et les banquiers parleront de « règle de trois » plutôt que de « linéarité ».)
b) La même formule est-elle linéaire en r ?
c) Si l'épargnante verse plutôt $\frac{\Delta}{2}$ tous les six mois, est-ce qu'elle retirera la même somme après N années ?

3. La plupart des compagnies de cartes de crédit affichent des pourcentages annuels même si elles composent les intérêts mensuellement. Si le taux effectif annuel d'une compagnie est de 18 %, quel pourcentage mensuel celle-ci doit-elle utiliser ? Avant de commencer l'exercice : ce pourcentage mensuel sera-t-il plus petit ou plus grand que $\frac{18}{12}\,\% = 1{,}5\,\%$?

4. **a)** Une étudiante de 20 ans place 1000 \$ à 5 %. Elle a l'intention de laisser ce placement fructifier jusqu'à sa retraite à 65 ans. On suppose que le rendement (5 %) ne changera pas pendant sa carrière. Que vaudra alors le placement si les intérêts sont composés *(i)* annuellement ou *(ii)* mensuellement au taux de $\frac{5}{12}\,\%$?
b) Un étudiant du même âge que l'étudiante de a) décide de ne rien investir jusqu'à 45 ans. Alors, il décide de déposer une somme qui lui donnera, à 65 ans, le même montant que le placement de l'étudiante de a). Quelle est cette somme si les deux placements profitent du même taux ?

5. **a)** Une somme de 1000 \$ est placée pour dix ans. Que vaudra-t-elle si le rendement annuel est de 6 %, de 8 %, de 10 % ?
b) Combien faut-il attendre de temps pour que ce placement de 1000 \$ double de valeur pour les rendements annuels de a) ?
c) Que deviennent les réponses de b) si les intérêts sont simples plutôt que composés ?
d) Que deviennent les réponses de b) si le placement initial est de 2000 \$?

6. Une hypothèque est payée sur une période de 20 ans à un taux hypothécaire constant de 8 %. Après combien de mois la moitié de l'emprunt sera-t-elle remboursée ?

7. **a)** Une étudiante de 20 ans découvre une banque lui offrant 10 % par an si elle s'engage à placer 1000 \$ par année le jour de son anniversaire jusqu'à ce qu'elle ait 65 ans. Que vaudra le magot à son 65^e anniversaire ?
b) Que devrait être le dépôt annuel si l'étudiante veut prendre sa retraite millionnaire ?

8. Un étudiant veut emprunter une somme d'argent. Il sait qu'il ne pourra pas remettre un sou avant cinq ans. Deux scénarios s'offrent à lui. Premièrement, son père est prêt à lui prêter l'argent à 10 % d'intérêt simple pendant ces cinq ans. Deuxièmement, un ami s'offre à lui prêter l'argent à 7 % d'intérêt composé. Que lui suggérez-vous ?

9. Lors de la négociation d'un prêt hypothécaire, les paramètres suivants sont établis : le taux, le montant du prêt, la période d'amortissement, la période des versements (habituellement un mois, mais aussi une ou deux semaines) et la *durée du contrat.* Cette durée est toujours plus petite ou égale à la période d'amortissement. À la fin du contrat, l'emprunteur et la banque renégocient les paramètres ; le nouveau montant du prêt est alors le montant résiduel à payer.

a) Un couple achète une maison et doit emprunter 100 000 $ pour en assurer le paiement. Ils optent pour un remboursement sur 25 ans. Puisque les taux d'intérêt sont élevés au moment de l'achat (12 %), ils décident de fixer leur premier contrat avec la banque pour trois ans. Quel sera leur versement mensuel ? Quel sera le solde à la fin de cette période de trois ans ?

b) Après ces trois premières années, les taux ont baissé, et ils désirent toujours s'acquitter de leur dette au cours des 22 années restantes. Ils s'engagent donc pour une période de cinq ans à 8 %. Quel sera leur nouveau versement mensuel ? Quel sera le solde résiduel à la fin de ces huit premières années ?

10. Deux prêts hypothécaires sont accordés pour des sommes égales. Ils seront remboursés sur 20 ans. Si les taux sont différents, quel sera le taux qui, à mi-terme (dix ans), aura permis de payer la plus grande partie du capital : le prêt au plus petit taux ou celui au plus grand ?

11. Dans presque toutes les librairies, on peut acheter des *Tables de prêts hypothécaires.* Vous trouverez en appendice (p. 171) les pages correspondant aux taux de 8 % et de 12 %. Le taux mensuel effectif a été calculé selon les règles canadiennes.

a) Selon ces tables, quel sera le versement mensuel sur un prêt hypothécaire de 40 000 $ à 8 % qui sera remboursé sur 15 ans ?

b) Et sur un prêt de 42 000 $ au même taux remboursé aussi sur 15 ans ?

c) Calculer le montant demandé en a) sans utiliser la table. (Déterminer d'abord le taux effectif mensuel r_m utilisé par les banques.)

12. Plusieurs banques offrent des hypothèques dont les versements sont faits aux deux semaines. Ces banques calculent le montant que l'emprunteur devrait payer s'il y avait 24 versements par année et l'utilisent comme paiement aux deux semaines. Supposons qu'il y ait exactement 26 paiements par année. Si la banque consent un prêt de 7 % sur 20 ans, ces versements aux deux semaines permettront de rembourser le prêt plus rapidement. En combien de temps le prêt sera-t-il remboursé ? (Vous devrez trouver une façon raisonnable de déterminer le taux $r_{2\text{s}}$ aux deux semaines. Essayez de copier la relation $(r_{m\text{CAN}})$.)

13. Utiliser votre logiciel préféré pour écrire un programme reproduisant les tables de l'appendice.

5.6 Appendice : tables de prêts hypothécaires

Les deux pages qui suivent contiennent respectivement les tables pour un taux annuel de 8 % et de 12 %. Ce sont ces tables que l'on retrouve dans les petits livres intitulés *Tables de prêts hypothécaires.* La ligne supérieure donne la période d'amortissement en années, et la colonne de gauche, le montant emprunté. Ces tables sont données à titre d'exemple et comme outil pour certains des exercices. Le taux mensuel effectif a été déterminé selon les règles canadiennes.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25
1000	86,93	45,17	31,28	24,35	20,21	17,47	15,52	14,07	12,95	12,06	9,48	8,28	7,63
2000	173,86	90,34	62,55	48,70	40,43	34,94	31,04	28,14	25,90	24,13	18,96	16,57	15,26
3000	260,78	135,50	93,83	73,06	60,64	52,41	46,56	42,21	38,85	36,19	28,44	24,85	22,90
4000	347,71	180,67	125,11	97,41	80,86	69,88	62,09	56,28	51,81	48,26	37,93	33,13	30,53
5000	434,64	225,84	156,38	121,76	101,07	87,35	77,61	70,35	64,76	60,32	47,41	41,42	38,16
6000	521,57	271,01	187,66	146,11	121,28	104,82	93,13	84,42	77,71	72,38	56,89	49,70	45,79
7000	608,50	316,18	218,93	170,46	141,50	122,29	108,65	98,49	90,66	84,45	66,37	57,99	53,42
8000	695,43	361,34	250,21	194,81	161,71	139,76	124,17	112,56	103,61	96,51	75,85	66,27	61,06
9000	782,35	406,51	281,49	219,17	181,93	157,23	139,69	126,64	116,56	108,58	85,33	74,55	68,69
10 000	869,28	451,68	312,76	243,52	202,14	174,70	155,21	140,71	129,51	120,64	94,82	82,84	76,32
15 000	1303,92	677,52	469,15	365,28	303,21	262,05	232,82	211,06	194,27	180,96	142,22	124,25	114,48
20 000	1738,57	903,36	625,53	487,04	404,28	349,40	310,43	281,41	259,03	241,28	189,63	165,67	152,64
25 000	2173,21	1129,20	781,91	608,80	505,35	436,74	388,04	351,77	323,78	301,60	237,04	207,09	190,80
30 000	2607,85	1355,04	938,29	730,56	606,42	524,09	465,64	422,12	388,54	361,92	284,45	248,51	228,96
35 000	3042,49	1580,88	1094,67	852,32	707,50	611,44	543,25	492,47	453,30	422,24	331,85	289,93	267,12
40 000	3477,13	1806,72	1251,05	974,07	808,57	698,79	620,86	562,82	518,05	482,56	379,26	331,34	305,29
45 000	3911,77	2032,56	1407,44	1095,83	909,64	786,14	698,46	633,18	582,81	542,88	426,67	372,76	343,45
50 000	4346,41	2258,40	1563,82	1217,59	1010,71	873,49	776,07	703,53	647,57	603,20	474,08	414,18	381,61
60 000	5215,70	2710,08	1876,58	1461,11	1212,85	1048,19	931,29	844,24	777,08	723,85	568,89	497,01	457,93
70 000	6084,98	3161,76	2189,34	1704,63	1414,99	1222,88	1086,50	984,94	906,59	844,49	663,71	579,85	534,25
80 000	6954,26	3613,44	2502,11	1948,15	1617,13	1397,58	1241,72	1125,65	1036,11	965,13	758,52	662,69	610,57
90 000	7823,54	4065,12	2814,87	2191,67	1819,27	1572,28	1396,93	1266,36	1165,62	1085,77	853,34	745,52	686,89
100 000	8692,83	4516,79	3127,64	2435,19	2021,42	1746,98	1552,14	1407,06	1295,13	1206,41	948,15	828,36	763,21

Tab. 5.1. Table des mensualités pour des prêts hypothécaires à un taux annuel de 8 %

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25
1000	88,71	46,94	33,08	26,19	22,10	19,40	17,50	16,09	15,02	14,18	11,82	10,81	10,32
2000	177,43	93,88	66,15	52,38	44,20	38,80	35,00	32,19	30,04	28,36	23,63	21,62	20,64
3000	266,14	140,82	99,23	78,58	66,30	58,20	52,49	48,28	45,06	42,54	35,45	32,43	30,96
4000	354,85	187,75	132,30	104,77	88,39	77,60	69,99	64,38	60,09	56,72	47,26	43,24	41,28
5000	443,57	234,69	165,38	130,96	110,49	97,00	87,49	80,47	75,11	70,90	59,08	54,05	51,59
6000	532,28	281,63	198,46	157,15	132,59	116,40	104,99	96,57	90,13	85,08	70,90	64,86	61,91
7000	620,99	328,57	231,53	183,34	154,69	135,80	122,49	112,66	105,15	99,26	82,71	75,67	72,23
8000	709,71	375,51	264,61	209,54	176,79	155,20	139,99	128,75	120,17	113,44	94,53	86,48	82,55
9000	798,42	422,45	297,69	235,73	198,89	174,60	157,48	144,85	135,19	127,62	106,34	97,29	92,87
10 000	887,13	469,38	330,76	261,92	220,98	194,00	174,98	160,94	150,21	141,80	118,16	108,10	103,19
15 000	1330,70	704,08	496,14	392,88	331,48	291,00	262,47	241,41	225,32	212,70	177,24	162,15	154,78
20 000	1774,27	938,77	661,52	523,84	441,97	388,00	349,97	321,88	300,43	283,61	236,32	216,19	206,38
25 000	2217,84	1173,46	826,91	654,80	552,46	485,00	437,46	402,36	375,54	354,51	295,40	270,24	257,97
30 000	2661,40	1408,15	992,29	785,76	662,95	582,00	524,95	482,83	450,64	425,41	354,48	324,29	309,57
35 000	3104,97	1642,84	1157,67	916,72	773,45	679,00	612,44	563,30	525,75	496,31	413,56	378,34	361,16
40 000	3548,54	1877,54	1323,05	1047,68	883,94	776,00	699,93	643,77	600,86	567,21	472,64	432,39	412,76
45 000	3992,10	2112,23	1488,43	1178,64	994,43	873,00	787,42	724,24	675,97	638,11	531,72	486,44	464,35
50 000	4435,67	2346,92	1653,81	1309,60	1104,92	970,00	874,92	804,71	751,07	709,01	590,80	540,49	515,95
60 000	5322,81	2816,30	1984,57	1571,52	1325,91	1164,00	1049,90	965,65	901,29	850,82	708,97	648,58	619,14
70 000	6209,94	3285,69	2315,34	1833,44	1546,89	1358,00	1224,88	1126,60	1051,50	992,62	827,13	756,68	722,33
80 000	7097,08	3755,07	2646,10	2095,36	1767,88	1552,00	1399,87	1287,54	1201,72	1134,42	945,29	864,78	825,52
90 000	7984,21	4224,46	2976,86	2357,27	1988,86	1746,00	1574,85	1448,48	1351,93	1276,22	1063,45	972,88	928,71
100 000	8871,34	4693,84	3307,62	2619,19	2209,85	1940,00	1749,83	1609,42	1502,15	1418,03	1181,61	1080,97	1031,90

Tab. 5.2. Table des mensualités pour des prêts hypothécaires à un taux annuel de 12 %

Références

[1] Leibniz, G. W. *Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik*, dir. E. Knobloch et J.-M. Graf von der Schulenburg, Akademie Verlag, 2000, 686 p.

[2] Bruins, E. M. et M. Rutten. « Textes mathématiques de Suse », *Mémoires de la Mission archéologique en Iran*, tome XXXIV, Paris, Librairie orientaliste Paul Geuthner, 1961.