

Vorlesung Höhere Mathematik 2

Kapitel 8: Einführung in gewöhnliche Differentialgleichungen

9. Februar 2023

Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften



Gliederung des Kapitels

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch

Mittelpunkt

Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

1 Historische Entwicklung

2 Problemstellung

3 Beispiele

4 Richtungsfelder

5 Euler-Verfahren

- Klassisch

- Mittelpunkt

- Modifiziert

6 Fehlerordnung

7 Runge-Kutta

8 DGL Systeme

9 Stabilität

10 Weiteres

Einführung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Prozesse in Natur und Technik lassen sich häufig nur mit Differentialgleichungen beschreiben.
- Die Lösung solcher Gleichungen ist deshalb eminent wichtig.
- Dabei lassen sich nur wenige Differentialgleichungen mit analytischen Verfahren lösen, die grosse Mehrzahl muss mit numerischen Lösungsverfahren angegangen werden.
- Wir wollen in diesem Kapitel einige einfache Lösungsverfahren betrachten und beschränken uns hierbei auf Anfangswertprobleme.
- Angesichts der Komplexität und Vielfalt von Differentialgleichungen kann dieses Kapitel nur als Einführung in die Problematik gesehen werden.

Lernziele

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch

Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Sie kennen die Definitionen einer gewöhnlichen Differentialgleichung n -ter Ordnung und eines Anfangswertproblems.
- Sie verstehen das Prinzip eines Richtungsfeldes und können Richtungsfelder interpretieren und zeichnen.
- Sie können gewöhnliche Differentialgleichungen lösen basierend auf dem Euler-Verfahren, dem modifizierten Euler-Verfahren, dem Mittelpunkt-Verfahren und den Runge-Kutta Verfahren.
- Sie können Differentialgleichungen n -ter Ordnung in ein System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung umwandeln und diese Systeme lösen.
- Sie kennen den Begriff der Stabilität.

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

8.1 Zur historischen Entwicklung

Zur historischen Entwicklung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Die Geschichte der Differentialgleichungen ist Teil der Geschichte der Differentialrechnung, so erstaunt es nicht, dass die Anfänge wieder auf Isaac Newton (1643 – 1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) zurück gehen.
- Vor ihnen beschäftigte sich aber bereits Galileo Galilei (1541 – 1642) mit der Beschreibung des freien Falls (siehe Kap. 8.3) und war um 1609 in der Lage, diesen mathematisch korrekt zu beschreiben.

Zur historischen Entwicklung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Galileo erkannte, dass im Vakuum alle Körper gleich schnell fallen und ihre Bewegung gleichmäßig beschleunigt ist
- Ein Umstand, den allerdings bereits der römische Dichter und Philosoph Lukrez um 55 v. Chr. in seinem Werk "De rerum natura" postulierte: "Deshalb müssen die Körper mit gleicher Geschwindigkeit alle trotz ungleichem Gewicht durch das ruhende Leere sich stürzen".
- Experiment: https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs&feature=player_detailpage#t=172

Zur historischen Entwicklung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

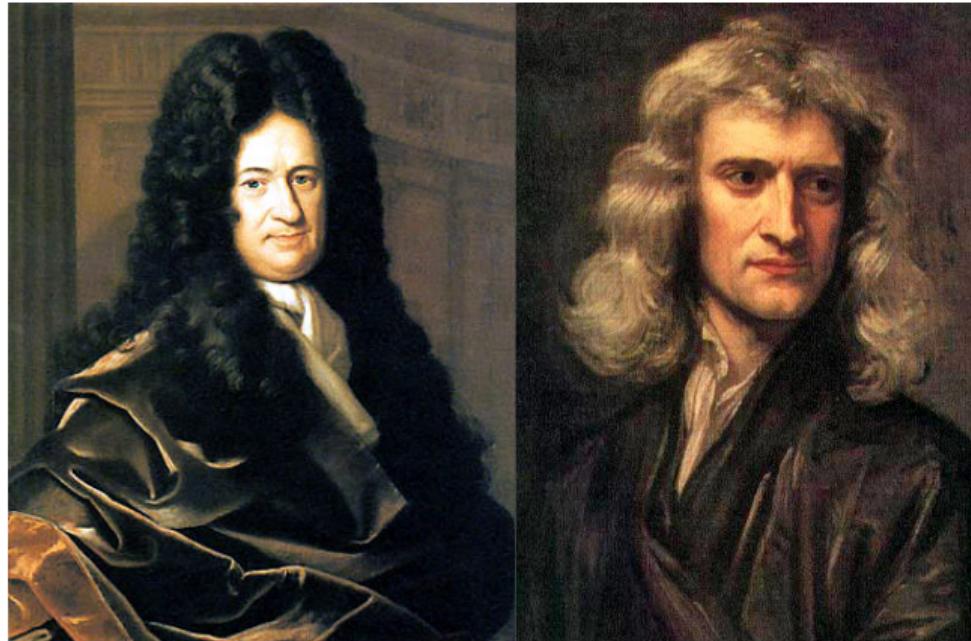
Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta
DGL
Systeme



- Gottfried Wilhelm Leibniz (links) und Isaac Newton (rechts), um 1700

Zur historischen Entwicklung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

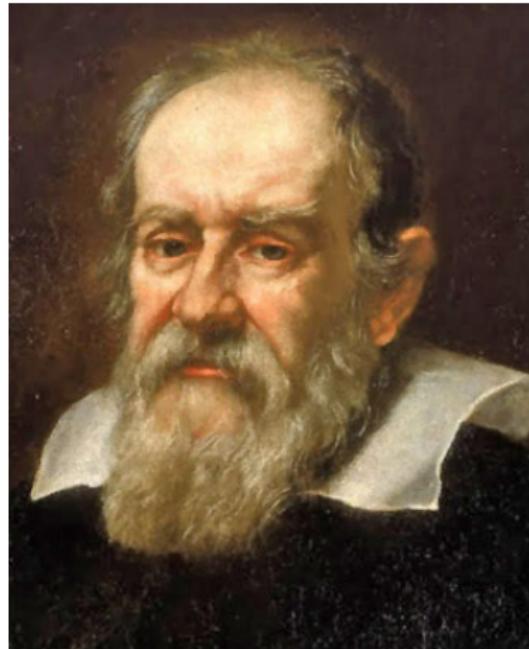
Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme



• Galileo Galilei, 1636

Zur historischen Entwicklung

- In seinem Werk “Methodus fluxionum et Serierum Infinitarum” beschäftigte sich Newton 1671 mit drei Arten von Differentialgleichungen und löste als Beispiele

$$(\dot{y})^2 = \dot{x}\dot{y} + (\dot{x})^2 x^2$$

$$\dot{y}ax - \dot{x}xy - a\dot{a}\dot{x} = 0$$

$$2\dot{x} - \dot{z} + \dot{y}x = 0$$

Zur historischen Entwicklung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Im Jahr 1687 veröffentlichte Newton dann in *Philosophiae Naturalis Principia* seine drei Gesetze der klassischen Mechanik, welche die Bewegung von Körpern letztlich in der Form von Differentialgleichungen beschreiben. In einer modernen Formulierung lauten die ersten beiden Gesetze
 - 1. Newtonsches Gesetz: $\sum \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$
 - 2. Newtonsche Gesetz: $\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$

Zur historischen Entwicklung

- Der französische Physiker und Aufklärer Jean-Baptiste le Rond, genannt D'Alembert, (1717 - 1783) beschrieb die Schwingung einer Saite bereits anhand der eindimensionalen homogenen Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

- Die allgemeine Lösung lautet

$$u(x, t) = f(x + ct) \cdot g(x - ct)$$

mit beliebigen zweimal differenzierbaren Funktionen $f(x)$ und $g(x)$.

- Beispiel: stehende Welle

https://www.youtube.com/watch?v=X8qZO6g_X5Q

Zur historischen Entwicklung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme



- Jean-Baptiste le Rond, genannt D'Alembert, 1753

Zur historischen Entwicklung

- Die Wellengleichung in 2 Dimensionen beschreibt z.B. die Ausbreitung einer Welle $u(x, y, t)$ auf einer Oberfläche

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0.$$

- Beispiel: Schwingung einer Membran
<https://www.youtube.com/watch?v=VNenUvw9rDA>
- Die Wellengleichung in 3 Dimensionen schliesslich beschreibt z.B. die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle $u(x, y, z, t)$ im Vakuum wobei $u = E$ das elektrische Feld beschreibt
-

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0.$$

Zur historischen Entwicklung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Leonhard Euler (1707 - 1783), ebenfalls involviert in der Diskussion um die Ausbreitung von Wellen, entwickelte unter anderem in der Strömungsmechanik die Euler-Gleichungen zur Beschreibung der Strömung von reibungsfreien Fluiden.
- Der Impulssatz lautet in der heutigen Form

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0,$$

wobei $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ der Geschwindigkeitsvektor, ρ die Dichte, $p = p(\mathbf{x}, t)$ der Druck, \mathbf{x} der Ortsvektor, t die Zeit und $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ der Nabla-Operator ist.

- Beispiel: Lösung der Euler-Gleichung
<https://www.youtube.com/watch?v=ifmSQOr8qNg>

Zur historischen Entwicklung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch

Mittelpunkt

Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- In 1768 publizierte Euler das nach ihm benannte Lösungsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen (siehe Kap.8.5).
- Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) beweist dessen Konvergenz 1824.

Zur historischen Entwicklung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme



- Leonhard Euler, 1753, und Augustin-Louis Cauchy

Zur historischen Entwicklung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch

Mittelpunkt

Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Der französische Mathematiker Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836) und der irische Mathematiker Sir George Gabriel Stokes (1819 - 1903) entwickeln unabhängig voneinander in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts die Navier-Stokes Gleichungen, eine Erweiterung der Euler-Gleichungen unter Einbezug der Viskosität (Reibung) von Fluiden:

Zur historischen Entwicklung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

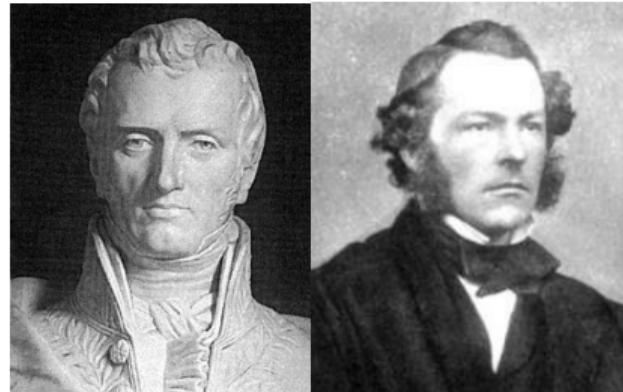
Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme



- Claude Louis Marie Henri Navier und George Gabriel Stokes

Zur historischen Entwicklung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Um 1855 werden die Mehrschritt-Lösungsverfahren des englischen Mathematikers und Astronoms John Couch Adams (1819 - 1892) in einem Brief des Ballistikers Francis Bashforth (1819 - 1912) erstmals erwähnt.
- Die deutschen Mathematiker Carl David Tolmé Runge (1856 - 1927) und Martin Wilhelm Kutta (1867 - 1944) entwickeln anfangs des 20. Jahrhunderts in Göttingen die Runge-Kutta-Lösungsverfahren für Anfangswertprobleme.
- Die amerikanischen Chemiker Charles Francis Curtiss (1921 - 2007) und Joseph Oakland Hirschfelder (1911 - 1990) publizieren 1952 ihre BDF (Backward Difference Formulas) Mehrschrittverfahren zur Lösung von sogen. steifen Differentialgleichungen.
- Der schwedische Mathematiker Germund Dahlquist (1925 - 2005) leistet bahnbrechende Beiträge zur Theorie der numerischen Lösung von Anfangswertproblemen, insbesondere zum Thema Stabilität.

Zur historischen Entwicklung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

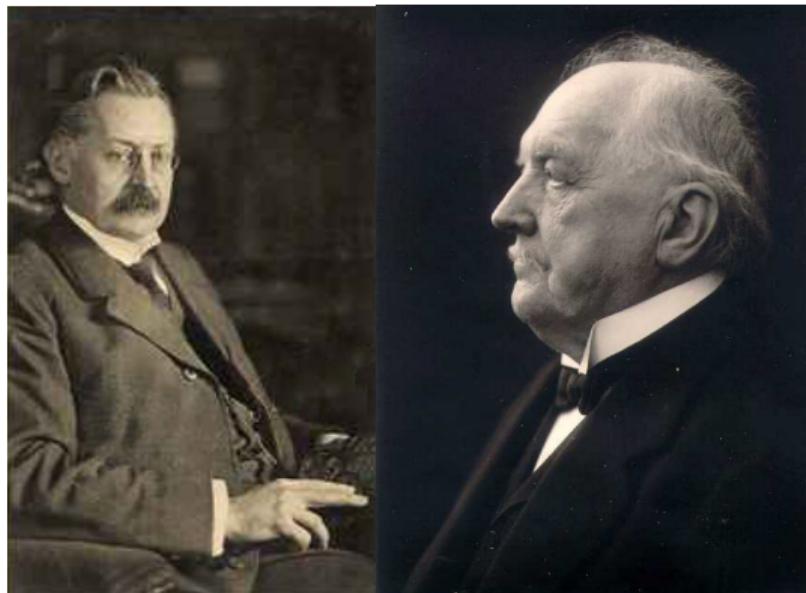
Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta
DGL
Systeme



- Carl Runge und Martin Wilhelm Kutta

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

8.2 Problemstellung

Problemstellung

- In vielen Prozessen in der Natur oder Technik spielen zeitliche Änderungen von beobachtbaren Größen ('Observablen'), nennen wir sie z.B. $y(t)$, eine wichtige Rolle.
- Häufig ist die zeitliche Änderungen einer solchen Größe, also $\frac{dy}{dt}$, abhängig von der Größe $y(t)$ selbst, d.h. wir können $\frac{dy}{dt}$ durch eine Funktion f ausdrücken, die von der Zeit t aber eben auch von der eigentlichen Größe $y(t)$ abhängt:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)). \quad (1)$$

- Eine solche Gleichung nennt man auch 'gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung'. Erster Ordnung deshalb, weil in diesem Fall nur die erste Ableitung auftritt. (Im Englischen spricht man von ODE.)

Beispiel 8.1

- Radioaktiver Zerfall: die Abnahme $\frac{dn}{dt}$ der Anzahl $n = n(t)$ der Atome eines instabilen Isotops über die Zeit hängt einerseits von n selbst ab (d.h. je weniger Atome vorhanden sind, um so weniger zerfallen pro Zeiteinheit) und andererseits von einer (konstanten) Zerfallsrate λ ab gemäss:

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda n$$

mit der Lösung $n(t) = n_0 e^{-\lambda t}$ für die Anfangswertbedingung $n(t=0) = n_0$.

Beispiel 8.1

- Beliebige weitere Beispiele von DGL 1. Ordnung gemäss Gl. 1:

$$\frac{dy}{dt} = t \cdot y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos(t^2) \cdot \sin(ay)$$

⋮

Definition 8.1: DGL n-ter Ordnung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Natürlich können aber auch Ableitungen beliebiger, d.h. n -ter Ordnung in solchen Gleichungen auftreten, analog spricht man dann von gewöhnlichen Differentialgleichungen n -ter Ordnung.
- Ausserdem muss die Variable nicht die Zeit t sein, sondern es kann sich auch um eine beliebige Variable, nennen wir sie x , handeln.

Definition 8.1: DGL n-ter Ordnung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Definition 8.1: Gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung

- Eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekannten Funktion $y = y(x)$ bis zur n -ten Ordnung auftreten, heisst eine *gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung*. Sie hat die explizite Form

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (2)$$

Gesucht sind die Lösungen $y = y(x)$ dieser Gleichung, wobei die Lösungen y auf einem Intervall $[a, b]$ definiert sein sollen, $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Bemerkung

- Für die Ableitungen höherer Ordnung von $y(x)$ gibt es verschiedene Notationen:
 - Lagrange-Notation (mit Strichen, resp. Hochzahlen in Klammern):

$$y'(x), y''(x), y'''(x), y^{(4)}(x), y^{(5)}(x), \dots, y^{(n)}(x)$$

- Newton-Notation (mit Punkten)

$$\dot{y}(x), \ddot{y}(x), \dddot{y}(x), \ddot{\ddot{y}}(x), \dots$$

- Leibniz-Notation (mit Differentialoperator $\frac{d}{dx}$)

$$\frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y(x)}{dx^2}, \frac{d^3y(x)}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny(x)}{dx^n}$$

oder auch

$$\frac{d}{dx}y(x), \frac{d^2}{dx^2}y(x), \frac{d^3}{dx^3}y(x), \dots, \frac{d^n}{dx^n}y(x)$$

Beispiele

- DGL 2. Ordnung

$$y''(x) = y'(x)^3 \cdot y(x) + \cos(x)$$

oder

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)^3 \cdot y(x) + \cos(x)$$

- DGL 4. Ordnung (da es sich hier um eine Linearkombination der Ableitungen mit den Koeffizienten a_i handelt, spricht man auch von einer "linearen" DGL)

$$a_5 y^{(4)}(x) + a_4 y'''(x) + a_3 y''(x) + a_2 y'(x) + a_1 y(x) + a_0 = 0$$

oder

$$a_5 \frac{d^4 y(x)}{dx^4} + a_4 \frac{d^3 y(x)}{dx^3} + a_3 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + a_2 \frac{dy(x)}{dx} + a_1 y(x) + a_0 = 0$$

Bemerkung 1:

- Neben den *gewöhnlichen* Differentialgleichungen gibt es noch die *partiellen* Differentialgleichungen.
- Diese enthalten die partiellen Ableitungen einer unbekannten Funktion mehrerer Variablen.
- In dieser Vorlesung behandeln wir ausschliesslich gewöhnliche Differentialgleichungen und lassen den Ausdrück 'gewöhnlich' im Folgenden weg und verwenden die Abkürzung DGL.
- Ausserdem beschränken wir uns vorwiegend auf die erste und zweite Ordnung (also $n = 1$ und $n = 2$).
- Wie wir später sehen werden, kann jede Differentialgleichung höherer Ordnung auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden.

Bemerkung 2:

- Entsprechend gibt es auch Systeme von Differentialgleichungen, die unter Umständen miteinander gekoppelt sind.
- Ein Beispiel sind gekoppelte Schwingungen (z.B. zwei durch eine Feder miteinander gekoppelte Fadenpendel) oder das Räuber-Beute Modell, bei dem die zeitliche Entwicklung der Anzahl Räuber die Anzahl Beutetiere beeinflusst und umgekehrt.

Bemerkungen

Bemerkung 3:

- Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n -ter Ordnung enthält noch n unabhängige Parameter (denken Sie an die Integrationskonstante bei einem unbestimmten Integral).
- In den Anwendungen ist man jedoch häufig nur an einer spezifischen Lösung näher interessiert. Insbesondere müssen die n Parameter für die Anwendung numerischer Verfahren bekannt sein.
- Das heißt, um die n Parameter festlegen zu können, werden noch n zusätzliche Informationen über die gesuchte Lösung benötigt.
- Sie können z.B. bei einem physikalischen Prozess aus den zum Zeitpunkt $t = 0$ herrschenden Bedingungen bestehen.
- Je nach Art der Vorgabe unterscheidet man zwischen einem Anfangs- oder Randwertproblem. Wir konzentrieren uns hier auf Anfangswertprobleme.

Definition 8.2

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch

Mittelpunkt

Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Definition 8.2: Anfangswertproblem

- Bei einem Anfangswertproblem (AWP) für eine Differentialgleichung n -ter Ordnung werden der Lösungsfunktion $y = y(x)$ noch n Werte vorgeschrieben, nämlich der Funktionswert an einer bestimmten Stelle x_0 sowie die Werte der ersten $n - 1$ Ableitungen an der gleichen Stelle.
- Für die hier betrachteten Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung heisst das:
 - Differentialgleichung 1. Ordnung: Gesucht ist diejenige *spezifische* Lösungskurve $y = y(x)$, die durch den vorgegebenen Punkt $P = (x_0, y(x_0))$ verläuft. Gegeben ist beim AWP also die DGL 1. Ordnung $y'(x) = f(x, y(x))$ und der Anfangswert $y(x_0)$.
 - Differentialgleichung 2. Ordnung: Gesucht ist diejenige *spezifische* Lösungskurve $y = y(x)$, die durch den vorgegebenen Punkt $P = (x_0, y(x_0))$ verläuft und im Punkt x_0 die vorgegebene Steigung $y'(x_0) = m$ besitzt. Gegeben ist beim AWP also die DGL 2. Ordnung $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$ und die Anfangswerte $y(x_0)$ und $y'(x_0)$.

Quiz 8.1

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch

Mittelpunkt

Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Beantworten Sie die folgende Frage:

Betrachten Sie die DGL

$$y^{(4)}(t) = \cos(y^3) + t^2 + y''$$

mit den Anfangswerten

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 1$$

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

Eine richtige Antwort:

- A. Dies ist ein Anfangswertproblem für eine gewöhnliche DGL 2.
Ordnung mit $f(t, y, y', y'', y''') = y''$
- B. Dies ist ein Anfangswertproblem für eine gewöhnliche DGL 3.
Ordnung mit $f(t, y, y', y'', y''') = \cos(y^3)$
- C. Dies ist ein Anfangswertproblem für eine gewöhnliche DGL 4.
Ordnung mit $f(t, y, y', y'', y''') = \cos(y^3) + t^2 + y''$
- D. Weiss nicht.

Quiz 8.1: Lösung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

8.3 Beispiele aus den Naturwissenschaften (aus Papula)

Der Freie Fall (aus Papula)

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Wir betrachten einen frei fallenden Körper im luftleeren Raum und wollen den Weg bestimmen, den der Körper nach einer gewissen Zeit zurückgelegt hat.
- Dazu führen wir die von der Erdoberfläche senkrecht nach *oben* gerichtete Koordinatenachse s für den Weg ein.
- Der Körper unterliegt dann ausschliesslich der Schwerkraft und erfährt in der Nähe der Erdoberfläche die konstante Erd- bzw. Fallbeschleunigung $a = -g$ (das Minuszeichen bedeutet, dass die Bewegung des Körpers entgegen der Richtung der Koordinatenachse erfolgt).

Der Freie Fall (aus Papula)

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch

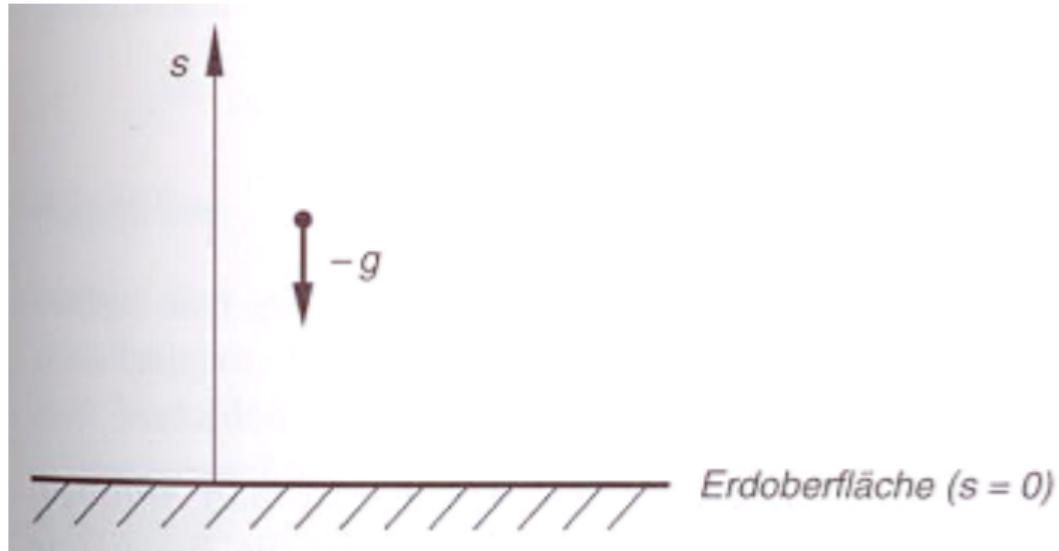
Mittelpunkt

Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme



Der Freie Fall (aus Papula)

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Wir wissen aus der Physik, dass die Beschleunigung $a(t)$ die Ableitung der Geschwindigkeit $v(t)$ nach der Zeit ist, und die Geschwindigkeit ist die Ableitung des zurückgelegten Weges $s(t)$ nach der Zeit, also:

$$v(t) = \frac{d}{dt} s(t) = \dot{s}(t) \text{ und } a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \dot{v}(t)$$

$$\text{bzw. } a(t) = \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{d}{dt} s(t)}_{v(t)} \right) = \frac{d^2}{dt^2} s(t) = \ddot{s}(t).$$

- Das bedeutet also, wir haben eine Differentialgleichung zweiter Ordnung die wir lösen müssen, nämlich

$$\ddot{s}(t) = -g$$

Der Freie Fall (aus Papula)

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Die Punkte bedeuten die (erste oder zweite) Ableitung nach der Zeit. Offensichtlich hängt die zweite Ableitung $\ddot{s}(t)$ nicht von $s(t)$ selbst ab sondern nur von der Konstanten g .
- Das bedeutet, dass wir analytisch integrieren können, um das Problem zu lösen. Wir erhalten dann nach einmal integrieren die Geschwindigkeit

$$v(t) = \int a(t) dt = \int (-g) dt = - \int g dt = -gt + v_0.$$

- Hierbei ist die Integrationskonstante v_0 die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$. Nochmals integrieren liefert

Der Freie Fall (aus Papula)

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Nochmals integrieren liefert

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (-gt + v_0) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0.$$

- Wieder ist s_0 die Integrationskonstante und gibt den Weg zum Zeitpunkt $t = 0$ an. Die Integrationskonstanten (Parameter) sind somit Anfangshöhe s_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 .

Der Freie Fall (aus Papula)

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Die oben hergeleitete Beziehung

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$$

gibt also die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{s}(t) = -g$$

an. Durch Festlegen der Anfangshöhe s_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 erhalten wir eine spezielle Lösung.

Beispiel 8.2

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Nehmen wir an, die Anfangshöhe sei $s_0 = 1000 \text{ m}$, die Anfangsgeschwindigkeit sei $v_0 = 0$ und die Gravitationskonstante $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
- Was für eine Strecke hat ein aus dieser Höhe fallengelassener Stein nach 3 s zurückgelegt? Wie lange dauert es, bis er den Boden bei $s = 0$ erreicht hat? Welche Geschwindigkeit hat er beim Aufprall?

Beispiel 8.2: Lösung

- Wir haben also

$$s(t) = -\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 + 1000 \text{ [m]} \text{ bzw. } s(t=3s) = -\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3^2 + 1000 = 955 \text{ m} \Rightarrow 45 \text{ m}$$

- Beim Aufprall gilt

$$s(t) = -\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 + 1000 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000}{10}} = 14.14 \text{ s}$$

und für die Geschwindigkeit haben wir

$$v(t) = -gt + v_0 = -10 \cdot 14.14 = -141.42 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -509.12 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Beispiel 8.2: Lösung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

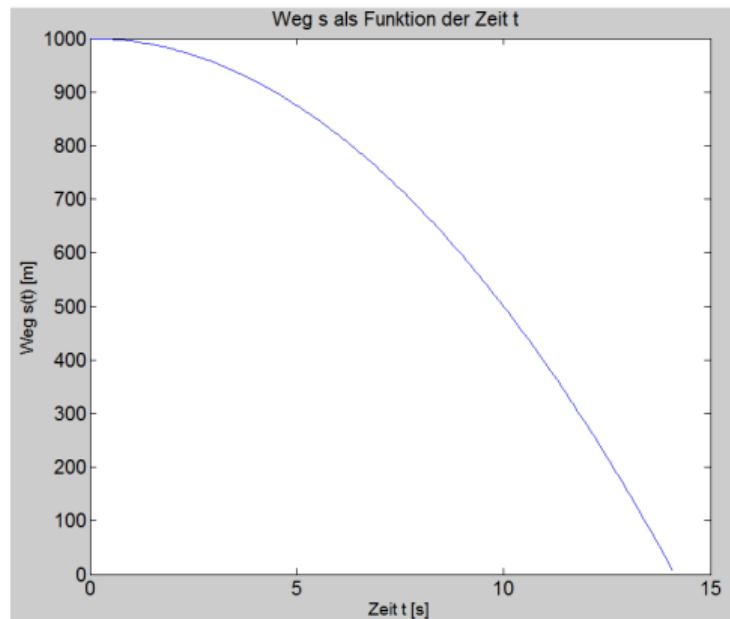
Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Das Minuszeichen bedeutet wieder, dass die Geschwindigkeit entgegen der Koordinatenachse, also auf die Erdoberfläche hinweist.
- Der hohe Wert der Geschwindigkeit überrascht und gilt nur unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes.
- In Realität führt die Luftreibung dazu, dass die maximale Fallgeschwindigkeit tiefer als der hier errechnete Wert liegt (ungefähr bei der Hälfte, natürlich noch abhängig von der Fläche des Objekts).

Beispiel 8.2: Lösung

- Die Fallparabel für diese Beispiel sieht folgendermassen aus:



Harmonische Schwingung eines Federpendels

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung
Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Von Newton wissen wir: die Beschleunigung, die eine Masse m erfährt, ist proportional zur angreifenden Kraft. Außerdem wissen wir, die Beschleunigung ist die zweite Ableitung der Ortskoordinate, also

$$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x} \quad (\text{2. Newtonsches Gesetz}).$$

Harmonische Schwingung eines Federpendels

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

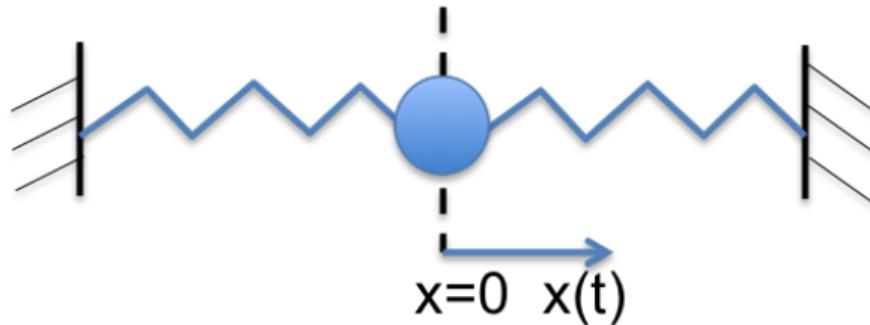
DGL
Systeme

- Wenn wir also die angreifende Kraft kennen, dann können wir dieses Gesetz dazu verwenden, die Ortskoordinate $x(t)$ als Funktion der Zeit zu bestimmen (wie wir es bereits beim Fall im luftleeren Raum getan haben).
- Nun wollen wir dies verwenden, um die Bewegungsgleichung eines ungedämpften Federpendels, also die Auslenkung $x(t)$ einer an einer Feder aufgehängten Masse m , zu berechnen:

Harmonische Schwingung eines Federpendels

HM 2,
Kapitel 8

Beispiele



Harmonische Schwingung eines Federpendels

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung
Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Welche Kräfte müssen wir berücksichtigen? Wenn die Feder um x ausgelenkt wird, wirkt eine Rückstellkraft, die proportional zur Auslenkung ist (*Hooke'sches Gesetz*):

$$F_1 = -cx \quad (c: \text{Federkonstante}).$$

Unter Vernachlässigung der Gravitation und Reibung können wir also schreiben

$$m\ddot{x} = -cx.$$

Harmonische Schwingung eines Federpendels

- Wir haben also wieder eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.
- Anders als beim Fall im luftleeren Raum hängt nun die zweite Ableitung der Auslenkung nach der Zeit \ddot{x} nicht nur von einer Konstanten, sondern auch von x selber ab.
- Anschaulich bedeutet dies, dass je grösser die Auslenkung x ist, umso grösser ist die rückstellende Kraft bzw. die Beschleunigung (welche, wie durch das Minuszeichen ersichtlich ist, in entgegengesetzter Richtung wirkt).
- Natürlich ist dies nur für genügend kleine Auslenkungen der Fall. Überschreitet x eine kritische Grenze, wird die Feder überdehnt und das Hookesche Gesetz verliert seine Gültigkeit.

Harmonische Schwingung eines Federpendels

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung
Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Um die obige Differentialgleichung zu lösen, benötigen wir also eine Funktion, die zweimal abgeleitet wieder sich selbst ergibt (bis auf eine Konstante und ein Vorzeichenwechsel).
- Wie sieht dieses $x(t)$ also aus? Aus der Analysis wissen wir, dass

$$\frac{d}{dt} \sin t = \cos t \text{ und } \frac{d}{dt} \cos t = -\sin t \text{ bzw. } \frac{d^2}{dt^2} \sin t = -\sin t$$

also ist $x(t)$ wahrscheinlich eine Sinus- bzw. Cosinus-Funktion.

Harmonische Schwingung eines Federpendels

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung
Problemstel-
lung
Beispiele
Richtungsfel-
der
Euler-Verfah-
ren
Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert
Fehlerord-
nung
Runge-Kutta
DGL
Systeme

- Tatsächlich, wenn wir den Ansatz machen

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

sehen wir durch einsetzen, dass diese Funktion die Differentialgleichung löst, wenn wir die sogenannte Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ setzen:

$$\dot{x}(t) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -A \cdot \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\frac{c}{m} \cdot x(t).$$

Harmonische Schwingung eines Federpendels

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Dabei ist der Parameter A die Amplitude (Auslenkung) zum Zeitpunkt $t = 0$ (also $x(0) = A$) und der Parameter φ ist die sogenannte Phasenverschiebung. Die (allgemeine) Lösung sieht also folgendermassen aus:

Harmonische Schwingung eines Federpendels

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklun

Beispiele

DGL
Systeme

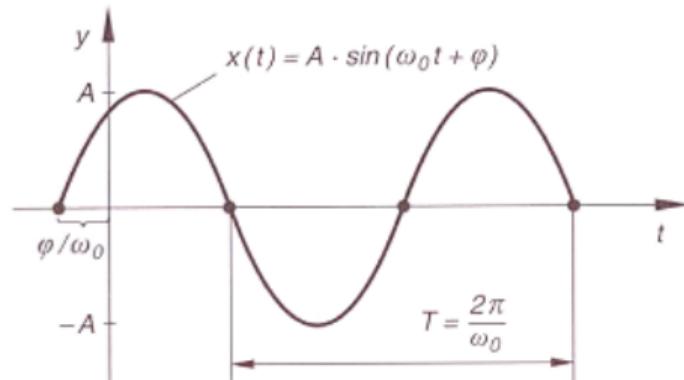


Bild IV-4
Weg-Zeit-Gesetz
einer harmonischen
Schwingung
(allgemeine Lösung)

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

8.4 Richtungsfelder für DGL 1. Ordnung

Richtungsfelder

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Differentialgleichungen 1. Ordnung und ihre Lösungen lassen sich mit Hilfe von sogenannten Richtungsfeldern veranschaulichen.
- Ausgangspunkt ist die geometrische Interpretation der Gleichung

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

- Offensichtlich gibt sie uns einen Zusammenhang zwischen der Steigung $y'(x)$ der gesuchten Funktion $y(x)$ für ein gegebenes x und dem Punkt $(x, y(x))$.

Richtungsfelder

- In der (x, y) -Ebene bedeutet dies also:
 - Wenn der Graph einer Lösung $y(x)$ durch einen Punkt (x_0, y_0) verläuft, so muss er dort die Steigung $y'(x_0)$ haben.
 - Das heisst, wir können in der (x, y) -Ebene an einem beliebigen (x, y) -Punkt die Steigung $y'(x) = f(x, y(x))$ ausrechnen und können also die Tangente durch einen kleinen Pfeil graphisch anzeigen.
 - Dann geben diese Pfeile in jedem Punkt die Richtung der Lösungskurve an.
 - Auf diese Weise erhält man das Richtungsfeld der Differentialgleichung und die Lösungskurven der Gleichung verlaufen stets tangential zu den Pfeilen im Richtungsfeld.

Beispiel 8.3

- Gegeben ist die Differentialgleichung

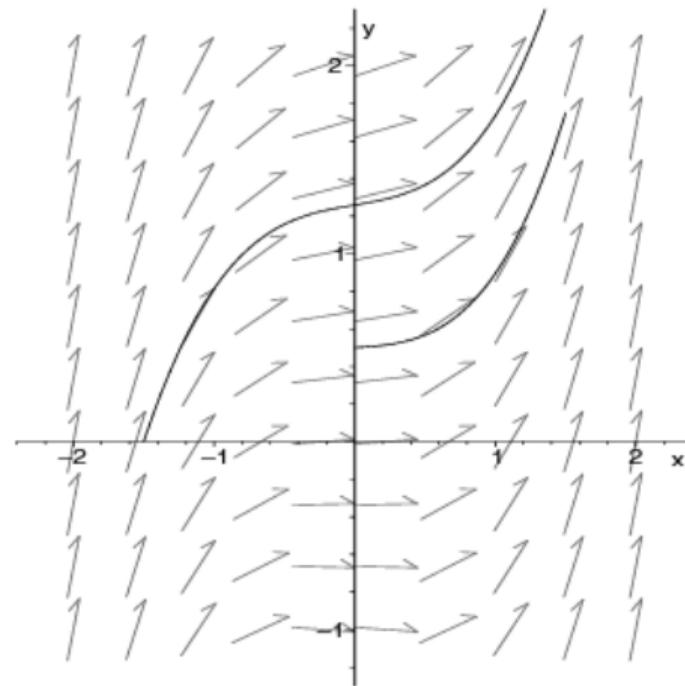
$$y'(x) = f(x, y(x)) = x^2 + 0.1 \cdot y(x).$$

- Wir erhalten das Richtungsfeld, indem wir für jeden Punkt in der (x, y) -Ebene die zugehörige Steigung einzeichnen.
 - Zum Beispiel haben wir für den Punkt $(-1, 1)$ die Steigung $y'(-1) = (-1)^2 + 0.1 \cdot 1 = 1.1$, oder für den Punkt $(0.5, 1)$ entsprechend $y'(0.5) = (0.5)^2 + 0.1 \cdot 1 = 0.35$.
 - Die Lösungskurven ergeben sich, wenn man von einem gegebenen Anfangspunkt den Richtungspfeilen folgt.
 - Gezeigt sind die Lösungen für die Anfangswerte $y(-1.5) = 0$ und $y(0) = 0.5$:

Beispiel 8.3

HM 2,
Kapitel 8

Richtungsfelder



Aufgabe 8.1

- Tragen Sie für die DGL

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot y \cdot t^2$$

die Steigung $\frac{dy}{dt}$ für die Punkte $(t_i, y_j) = (i, j)$ für $i, j = 0, 1, 2, 3$ in die untenstehende Tabelle ein und zeichnen Sie damit von Hand das entsprechende Richtungsfeld in untenstehendes Koordinatensystem.

- Zeichnen Sie anschliessend die (ungefähre) Lösungskurve für den Anfangswert $y(0) = 3$ ein.

Aufgabe 8.1

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot y \cdot t^2$$

$\frac{dy}{dt}$	$t_0 = 0$	$t_1 = 1$	$t_2 = 2$	$t_3 = 3$
$y_0 = 0$				
$y_1 = 1$				
$y_2 = 2$				
$y_3 = 3$				

Aufgabe 8.1: Lösung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

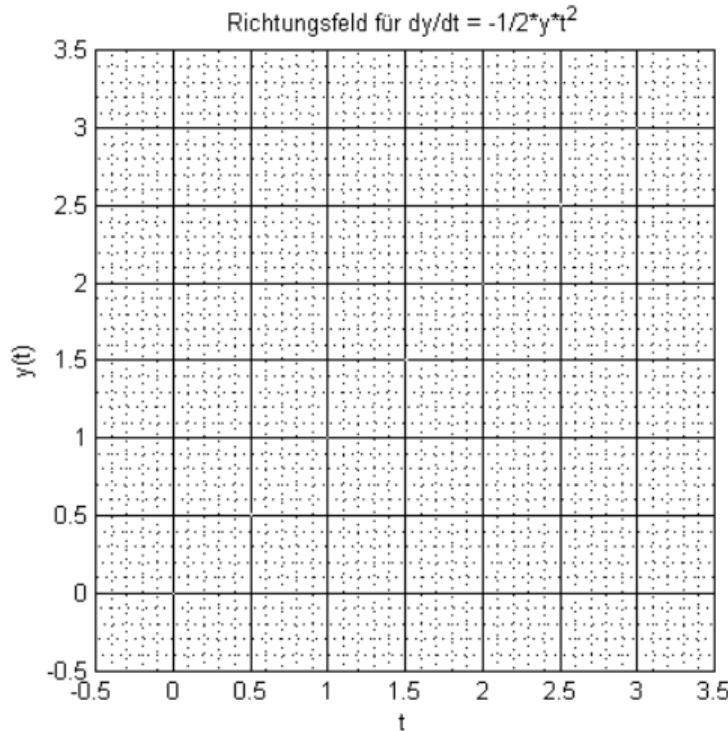
Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Aufgabe 8.1



Aufgabe 8.1: Lösung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Lösungsidee

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Die Idee vieler numerischer Verfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen ist es nun, dem Richtungsfeld möglichst genau zu folgen.
- Allerdings besteht eine Lösungskurve aus unendlich vielen Punkten, die nicht alle berechnet werden können.
- Man benötigt also eine Diskretisierung, vergleichbar zur Diskretisierung bei der numerischen Integration.

Lösungsidee

- Gesucht ist die Funktion $y : x \mapsto y(x), [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Anfangsbedingung $y(a) = y_0$ für die DGL 1. Ordnung $y'(x) = f(x, y(x))$.
 - Wir wählen für ein vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$ die (äquidistante) Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$ und diskretisieren das Intervall $[a, b]$ mit $n+1$ Gitterstellen $x_i = a + ih$, wobei $i = 0, \dots, n$.
 - Ziel ist es jetzt also, für die Gitterstellen x_i Näherungen y_i für die exakte Lösung $y(x_i)$ des Anfangswertproblems zu berechnen.
 - Es gibt dafür sogen. Einzelschritt- und Mehrschrittverfahren:
 - In einem Einzelschrittverfahren wird die Näherung an der nächsten Stelle x_{i+1} basierend auf der bereits bekannten Näherung an der Stelle x_i berechnet gemäß

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + \text{Steigung} \cdot h$$

- Dabei ist der Wert für *Steigung* eine numerische Näherung für $\frac{dy}{dx}$ auf dem gesamten Intervall $[x_i, x_{i+1}]$.

Lösungsidee

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Der Unterschied der verschiedenen Einschrittverfahren, die wir kennen lernen werden, liegt in der Art und Weise, wie diese Steigung berechnet wird.
- Bei Mehrschrittverfahren wird die Näherung an der Stelle x_{i+1} basierend auf den bekannten Näherung an mehreren vorherigen Stellen berechnet. Auf Mehrschrittverfahren werden wir nur am Rand eingehen.

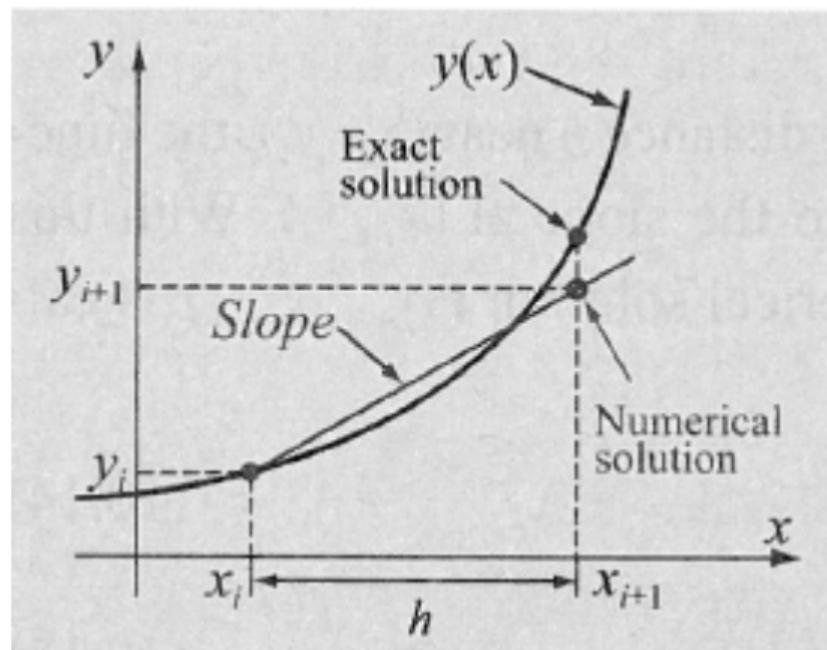


Abbildung: Einschrittverfahren zur Berechnung von y_{i+1} basierend auf y_i . Slope bedeutet Steigung (aus [9]).

Quiz 8.2

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

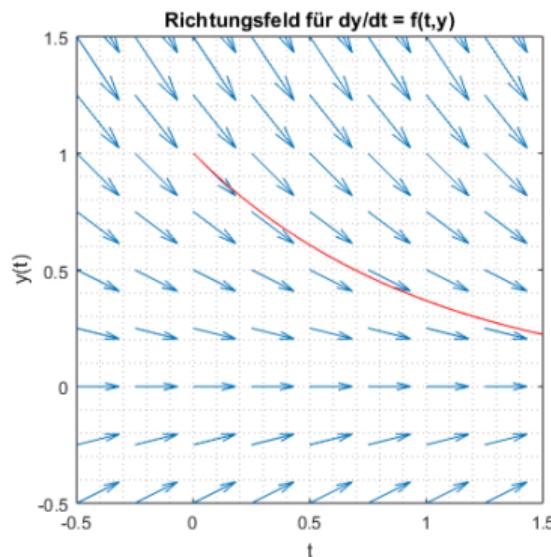
Runge-Kutta

DGL
Systeme

Beantworten Sie die folgende Frage:

Welchem Anfangswertproblem entspricht dieses Richtungsfeld mit Lösung?

- A. $\frac{dy}{dt} = -y$ mit $y(0) = 1$
- B. $\frac{dy}{dt} = -t$ mit $y(0) = -1$
- C. $\frac{dy}{dt} = y$ mit $y(0) = 1$
- D. Weiss nicht.



Quiz 8.2: Lösung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Richtige Antwort:

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch

Mittelpunkt

Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

8.5 Das Euler-Verfahren

Euler-Verfahren

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch

Mittelpunkt

Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Das einfachste numerische Einschrittverfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen ist das klassische Euler-Verfahren.
- Obwohl es in der Praxis mehrere Einschränkungen für die Anwendung dieses Verfahrens gibt und es deshalb keine grosse praktische Bedeutung hat, wollen wir es hier verwenden, um die grundlegenden Prinzipien zu demonstrieren.
- Verbesserte Verfahren sind das modifizierte Eulerverfahren (manchmal auch Heun-Verfahren genannt) oder das Mittelpunkt-Verfahren.

Das klassische Euler-Verfahren

- Wir gehen aus vom Anfangswertproblem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \quad \text{mit } y(a) = y_0.$$

- Das bedeutet also, $x_0 = a$ ist die einzige Stelle, bei der wir den Wert von $y(x)$ exakt kennen (da ja $y(x_0) = y_0$ vorgegeben ist) und auch die einzige Stelle, wo wir y' exakt kennen (wegen $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0)$). Dem Startpunkt $(x_0, y(x_0))$ kommt also eine besondere Bedeutung zu. Alle weiteren berechneten Werte werden Fehler enthalten, da wir dem Richtungsfeld nicht exakt folgen können.

Das klassische Euler-Verfahren

- Wir nehmen aber an, dass die Steigung in den Punkten um $(x_0, y(x_0))$ nur wenig von $y'(x_0)$ abweicht.
- Wir können dann die Steigung der Sekanten durch die Punkte $(x_0, y(x_0))$ und $(x_1, y(x_1))$ mit der Steigung $y'(x_0)$ gleichsetzen und dann nach $y(x_1)$ auflösen:

$$\begin{aligned}y'(x_0) &= f(x_0, y(x_0)) \approx \frac{y(x_1) - y(x_0)}{\underbrace{x_1 - x_0}_h} \\ \Rightarrow y(x_1) &\approx y(x_0) + h \cdot f(x_0, y(x_0)) = y_1.\end{aligned}$$

Das klassische Euler-Verfahren

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Wir folgen sozusagen der Tangente im Punkt $(x_0, y(x_0))$ um die Schrittweite h in der Hoffnung, dass wir dann genügend nahe an den Punkt $y(x_1)$ rankommen.
- Wenn die Schrittweite h genügend klein ist, sollte auch der Fehler entsprechend klein sein und umgekehrt.
- Dieser Schritt lässt sich nun ausgehend von der Näherung $y_1 \approx y(x_1)$ wiederholen, wir erhalten dann

$$y(x_2) \approx y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = y_2$$

usw. Dies ergibt das Euler-Verfahren:

Das klassische Euler-Verfahren

Algorithmus: Euler-Verfahren [1]:

- Gegeben sei für $x \in [a, b]$ das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit } y(a) = y_0.$$

- Das Euler-Verfahren zur numerischen Lösung lautet

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

wobei $x_0 = a$, $x_i = a + ih$ für $i = 0, \dots, n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$) und

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Das klassische Euler-Verfahren

Bemerkung:

- Das Euler-Verfahren lässt sie sich auch mittels numerischer Integration herleiten, sofern man annimmt, dass $f(x, y(x))$ auf dem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ konstant ist (vgl. Kap. 7.2.2, Rechteckregel):

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$$

$$dy = f(x, y(x)) dx$$

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$$

$$[y]_{y_i}^{y_{i+1}} \approx f(x_i, y_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

$$y_{i+1} - y_i \approx f(x_i, y_i) \cdot h$$

$$y_{i+1} \approx y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Das klassische Euler-Verfahren

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch

Mittelpunkt

Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

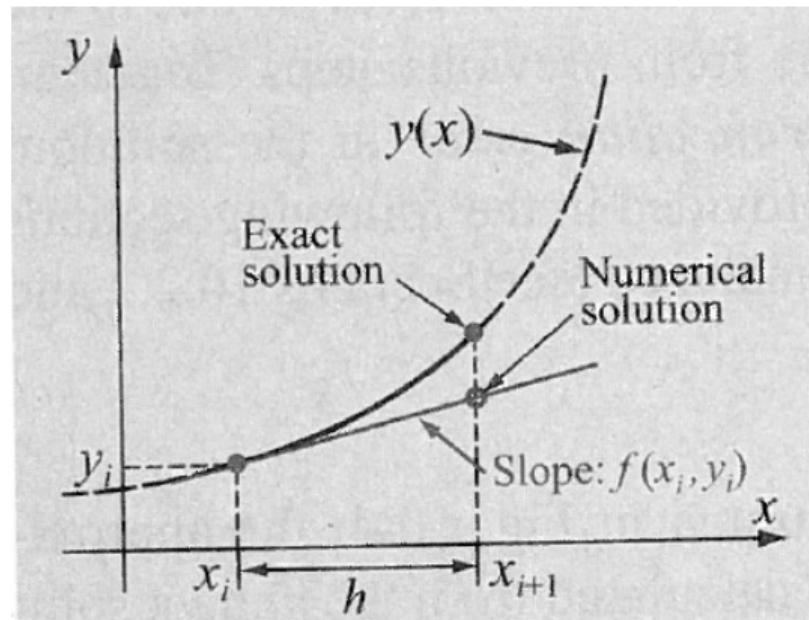


Abbildung: Euler-Verfahren zur Berechnung von y_{i+1} an der Stelle x_{i+1} basierend auf der Tangente mit der Steigung $f(x_i, y_i)$ an der Stelle x_i (aus [9]).

Aufgabe 8.2

- Berechnen Sie mit dem Euler-Verfahren die numerische Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)) = t^2 + 0.1 \cdot y(t)$$

mit $y(-1.5) = 0$ auf dem Intervall $[a, b] = [-1.5, 1.5]$ und $n = 5$.

- Zeichnen Sie Ihre Lösung mit MATLAB in ein Koordinatensystem und vergleichen Sie mit der exakten Lösung

$$y(t) = -10t^2 - 200t - 2000 + 1722.5 \cdot e^{0.05(2t+3)}$$

- Offensichtlich weicht das Euler-Verfahren stark von der exakten Lösung ab. Woran liegt das?

Aufgabe 8.2: Lösung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Aufgabe 8.2: Lösung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Aufgabe 8.2: Lösung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch

Mittelpunkt

Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Quiz 8.3

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch

Mittelpunkt

Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Beantworten Sie die folgende Frage:

Betrachten Sie die DGL

$$y'(t) = \cos(y^3) + t^2, y(0) = 1$$

Wie lautet die korrekte Iterationsvorschrift für y_i für des klassischen Euler-Verfahrens?

Eine richtige Antwort:

- A. $y_{i+1} = \cos(y_i^3) + t_i^2$
- B. $y_{i+1} = y_i + h(\cos(y_i^3) + t_i^2)$
- C. $y_{i+1} = h(\cos(y_i^3) + t_i^2)$
- D. Weiss nicht.

Quiz 8.3: Lösung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch

Mittelpunkt

Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Richtige Antwort:

Das Mittelpunkt-Verfahren

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch

Mittelpunkt

Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Das klassische Euler-Verfahren beruht darauf, die Steigung $y'(x_i)$ am Punkt (x_i, y_i) zu berechnen und der Tangent in diesem Punkt eine Schrittweite h zu folgen.
- Beim Mittelpunktverfahren folgt man der Tangente nur die halbe Schrittweite $h/2$ und berechnet beim Mittelpunkt des Intervalls $x_{h/2} = x_i + \frac{h}{2}$ die neue Steigung $y_{h/2}$:

$$y_{h/2} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i)$$

- Anschliessend geht man zurück an den Ausgangspunkt (x_i, y_i) und benutzt die berechnete Steigung $y_{h/2}$ für einen ganzen Schritt der Schrittweite h .

Das Mittelpunkt-Verfahren

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung
Problemstel-
lung
Beispiele
Richtungsfel-
der
Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkte
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

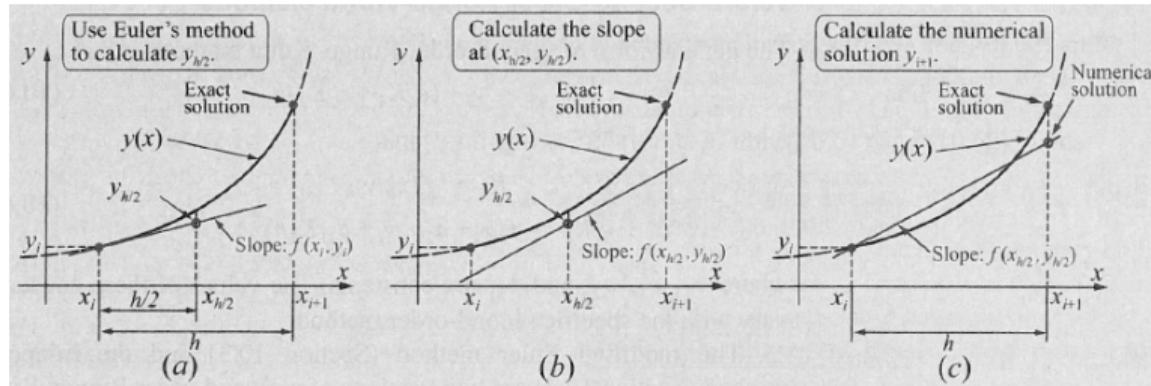


Abbildung: Mittelpunkt -Verfahren zur Berechnung von y_{i+1} an der Stelle x_{i+1} basierend auf der Tangente mit der Steigung $f(x_{h/2}, y_{h/2})$ an der Stelle $x_{h/2}$ (aus [9]).

Das Mittelpunkt-Verfahren

Algorithmus: Mittelpunkt-Verfahren

- Gegeben sei für $x \in [a, b]$ das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit } y(a) = y_0.$$

- Das Mittelpunkt-Verfahren zur numerischen Lösung lautet

$$x_{h/2} = x_i + \frac{h}{2}$$

$$y_{h/2} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{h/2}, y_{h/2})$$

wobei $x_0 = a$, $x_i = a + ih$ für $i = 0, \dots, n-1$ ($n \in \mathbb{N}$) und $h = \frac{b-a}{n}$.

Beispiel 8.4

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung
Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Wir berechnen wie in Aufgabe 8.2 die numerische Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)) = t^2 + 0.1 \cdot y(t),$$

mit $y(-1.5) = 0$ auf dem Intervall $[a, b] = [-1.5, 1.5]$ und $n = 5$, diesmal aber mit dem Mittelpunkt-Verfahren.

Beispiel 8.4: Lösung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt

Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

$$n = 5 \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.5 - (-1.5)}{5} = 0.6$$

$$t_i = a + ih = -1.5 + i \cdot 0.6 \quad (i = 0, 1, \dots, 5)$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_{h/2}, y_{h/2}) = y_i + h(t_{h/2}^2 + 0.1y_{h/2})$$

i	t_i	y_i	$t_{h/2} =$ $t_i + \frac{h}{2}$	$y_{h/2} =$ $y_i + \frac{h}{2} \cdot (t_i^2 + 0.1y_i)$	$t_{i+1} =$ $t_i + h$	$y_{i+1} =$ $y_i + h \cdot (t_{h/2}^2 + 0.1y_{h/2})$
0	-1.5	0	-1.2	0.6750	-0.9	0.9045
1	-0.9	0.9045	-0.6	1.1746	-0.3	1.1910
2	-0.3	1.1910	0.0	1.2537	0.3	1.2662
3	0.3	1.2662	0.6	1.3312	0.9	1.5621
4	0.9	1.5621	1.2	1.8519	1.5	2.5372
5	1.5	2.5372	-	-	-	-

Aufgabe 8.3

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Implementieren Sie das obige Beispiel 8.4 als Skript mit dem Mittelpunkt-Verfahren in Python und stellen Sie die Lösung grafisch dar (ohne Richtungsfeld).

Aufgabe 8.3: Lösung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Aufgabe 8.3: Lösung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Das modifizierte Euler-Verfahren

- Beim modifizierte Euler-Verfahren (manchmal auch als Heun-Verfahren bezeichnet, wobei es hier in der Literatur Inkonsistenzen gibt) verwendet man den Durchscchnitt zweier Steigungen.
- Zuerst folgt man wie beim klassischen Euler-Verfahren ausgehend vom Punkt (x_i, y_i) der Tangente der Steigung $f(x_i, y_i)$ einen ganzen Schritt und erhält den neuen Punkt $(x_{i+1}, y_{i+1}^{Euler})$ wobei $y_{i+1}^{Euler} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$. Dies ist in folgender Abb. (a) dargestellt.
- Anschliessend berechnet man im Punkt $(x_{i+1}, y_{i+1}^{Euler})$ die nächste Steigung $f(x_{i+1}, y_{i+1}^{Euler})$, siehe Abb. (b).
- Anschliessend wird der Durchschnitt der beiden Steigungen genommen und vom Ausgangspunkt (x_i, y_i) ein Schritt mit Schrittänge h gemacht zum neuen Punkt (x_{i+1}, y_{i+1}) , siehe Abb. (c).

Das modifizierte Euler-Verfahren

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung
Problemstel-
lung
Beispiele
Richtungsfel-
der
Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

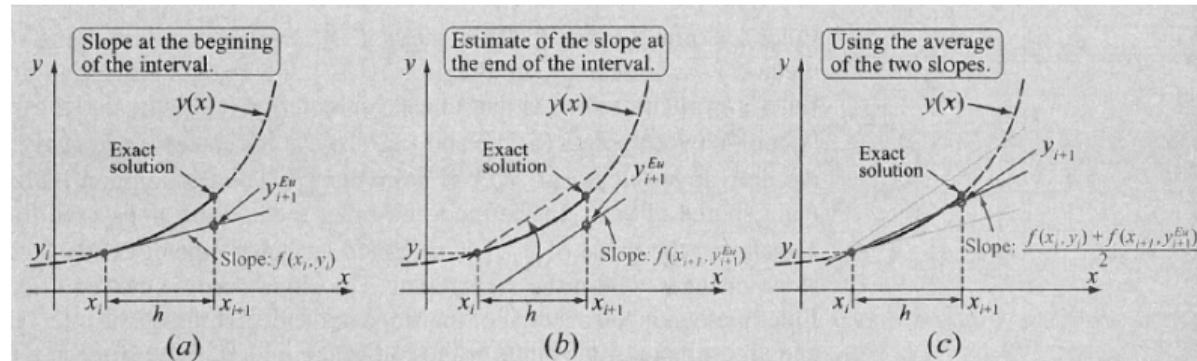


Abbildung: Modifiziertes Euler-Verfahren zur Berechnung von y_{i+1} an der Stelle x_{i+1} basierend auf dem Mittelwert der Steigungen $f(x_i, y_i)$ und $f(x_{i+1}, y^{Eu}_{i+1})$ an den Stellen x_i bzw. x_{i+1} (aus [9]).

Das modifizierte Euler-Verfahren

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Algorithmus: Modifiziertes Euler-Verfahren für $y' = f(x, y)$ mit $y(a) = y_0$.

- Führe das klassische Euler-Verfahren durch und speichere die erste Tangentensteigung in der Variable k_1 :

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + h \\y_{i+1}^{Euler} &= y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \\k_1 &= f(x_i, y_i)\end{aligned}$$

- Berechne die zweite Tangentensteigung am Punkt $(x_{i+1}, y_{i+1}^{Euler})$ und speichere sie in k_2 :

$$k_2 = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{Euler})$$

- Bilde den Durchschnitt der Steigungen $(k_1 + k_2)/2$ und mache einen Schritt h ausgehend vom ursprünglichen Punkt (x_i, y_i) zur Berechnung der Näherung (x_{i+1}, y_{i+1}) :

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + h \\y_{i+1} &= y_i + h \cdot \frac{(k_1 + k_2)}{2}\end{aligned}$$

- Wiederhole diese Schritte ausgehend von $x_0 = a$ für $x_i = a + ih$ mit $i = 0, \dots, n-1$



Beispiel 8.5

- Wir berechnen wieder wie in Aufgabe 8.2 und Beispiel 8.4 die numerische Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)) = t^2 + 0.1 \cdot y(t),$$

mit $y(-1.5) = 0$ auf dem Intervall $[a, b] = [-1.5, 1.5]$ und $n = 5$, diesmal aber mit dem modifizierten Euler-Verfahren.

Anschliessend vergleichen wir die Werte mit der exakten Lösung

$$y(t) = -10t^2 - 200t - 2000 + 1722.5 \cdot e^{0.05(2t+3)}$$

Beispiel 8.5: Lösung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch

Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

$$n = 5 \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.5 - (-1.5)}{5} = 0.6$$

$$t_i = a + ih = -1.5 + i \cdot 0.6 \quad (i = 0, 1, \dots, 5)$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{(k_1 + k_2)}{2}$$

i	t_i	y_i	$k_1 = f(t_i, y_i)$	$y_{i+1}^{Euler} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i)$	$t_{i+1} = t_i + h$	$k_2 = f(t_{i+1}, y_{i+1}^{Euler})$	$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{(k_1 + k_2)}{2}$
0	-1.5	0	2.2500	1.3500	-0.9	0.9450	0.9585
1	-0.9	0.9585	0.9059	1.5020	-0.3	0.2402	1.3023
2	-0.3	1.3023	0.2202	1.4344	0.3	0.23345	1.4384
3	0.3	1.4384	0.2338	1.5787	0.9	0.9678	1.7989
4	0.9	1.7989	0.9899	2.3929	1.5	2.4893	2.8426
5	1.5	2.8426	-	-	-	-	-

Beispiel 8.5: Lösung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

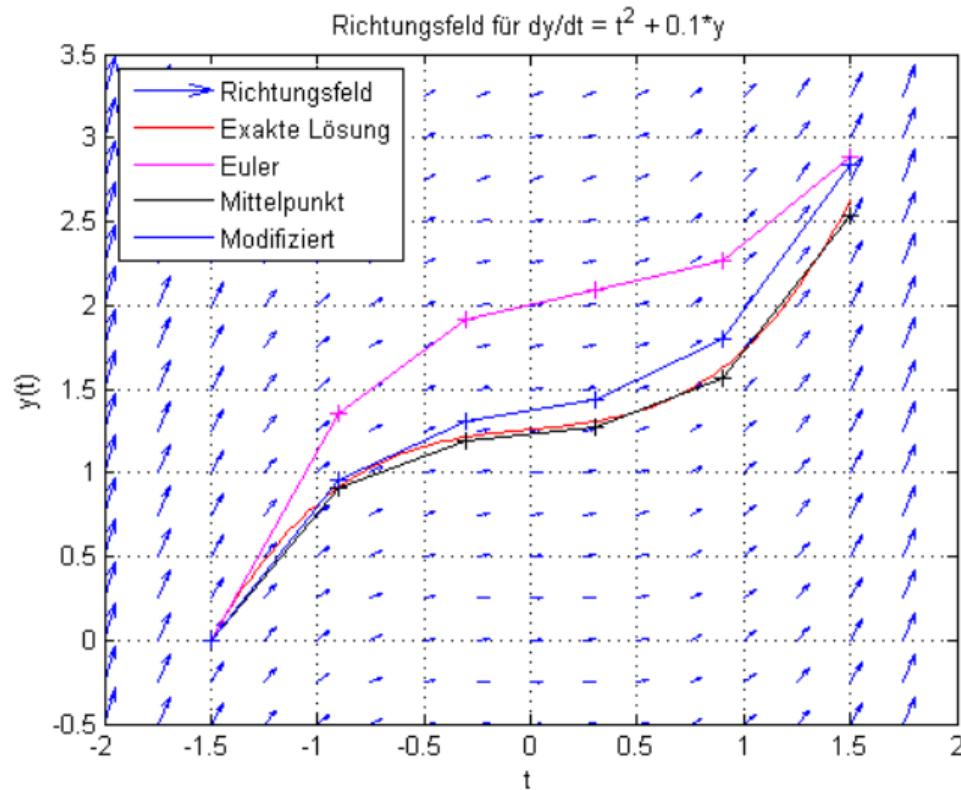
DGL
Systeme

i	t	y_{exakt}	y_{euler}	$y_{\text{mittelpunkt}}$	$y_{\text{mod. euler}}$
0	-1.5	0	0	0	0
1	-0.9	0.9135	1.3500	0.9045	0.9585
2	-0.3	1.2133	1.9170	1.1910	1.3023
3	0.3	1.3069	2.0860	1.2662	1.4384
4	0.9	1.6267	2.2652	1.5621	1.7989
5	1.5	2.6318	2.8871	2.5372	2.8426

Beispiel 8.5: Lösung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung
Problemstel-
lung
Beispiele
Richtungsfel-
der
Euler-Verfah-
ren
Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert
Fehlerord-
nung
Runge-Kutta
DGL
Systeme



Aufgabe 8.4

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch

Mittelpunkt

Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Implementieren Sie das obige Beispiel 8.5 als Skript mit dem modifizierten Euler-Verfahren in Python und stellen Sie die Lösung grafisch dar (ohne Richtungsfeld).

Aufgabe 8.4: Lösung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

8.6 Fehlerordnung eines Verfahrens

Fehlerordnung eines Verfahrens

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- In der obigen Aufgabe haben wir gesehen, dass sich die numerische Lösung weit von der exakten Lösung entfernen kann.
- Nun wollen wir dies etwas genauer untersuchen.
- Dafür müssen wir den Begriff des “lokalen” und “globalen” Fehlers sowie der jeweiligen Fehlerordnung definieren.

Definition 8.3: lokaler Fehler

Definition 8.3 [1]: lokaler Fehler / Konsistenzordnung

- Sei $y'(x) = f(x, y(x))$ eine Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $y(x_i) = y_i$ und der exakten Lösung $y(x)$. Sei y_{i+1} der mit einem numerischen Näherungsverfahren mit der Schrittweite h berechnete Näherungswert für $y(x_{i+1})$, wobei $x_{i+1} = x_i + h$. Dann ist der **lokale Fehler** (also nach einer Iteration) definiert als die Differenz zwischen dem exakten Wert und der Näherung:

$$\varphi(x_i, h) := y(x_{i+1}) - y_{i+1}$$

- Ein numerisches Verfahren hat die **Konsistenzordnung p** falls gilt:

$$|\varphi(x_i, h)| \leq C \cdot h^{p+1}$$

für genügend kleine h und einer Konstante $C > 0$, die von der Differentialgleichung abhängt.

Definition 8.4: globaler Fehler

Definition 8.4 [1]: globaler Fehler / Konvergenzordnung

- Sei $y'(x) = f(x, y(x))$ eine Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ und der exakten Lösung $y(x)$. Sei y_n der mit einem numerischen Näherungsverfahren mit der Schrittweite h berechnete Näherungswert für $y(x_n)$, wobei $x_n = x_0 + nh$. Dann ist der Gesamtfehler (also nach n Iterationen) bzw. der **globale Fehler** definiert als die Differenz zwischen dem exakten Wert und der Näherung:

$$y(x_n) - y_n$$

- Ein numerisches Verfahren hat die **Konvergenzordnung p** falls gilt:

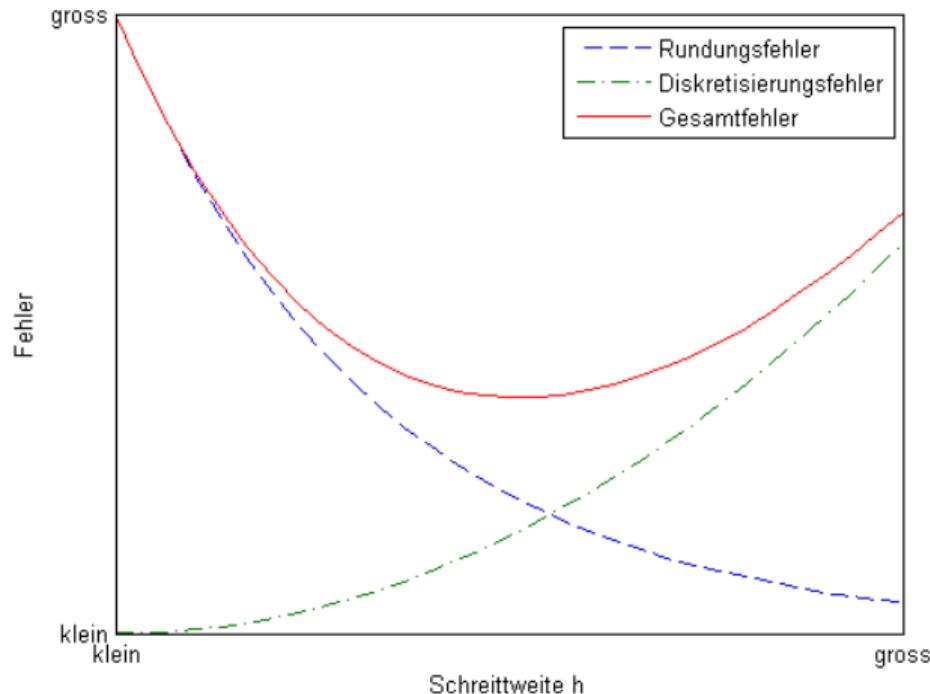
$$|y(x_n) - y_n| \leq C \cdot h^p$$

für genügend kleine h und einer Konstante $C > 0$, die von der Differenzialgleichung abhängt.

Bemerkungen:

- ① Der lokale Fehler ist also ein Mass ist für die Abweichung von der exakten Lösung nach einer Iteration, während der globale Fehler die Abweichung von der exakten Lösung nach n Iterationen misst.
- ② Die hier gemachten Definitionen beziehen sich nur auf den Diskretisierungsfehler. Nicht berücksichtigt wird der Rundungsfehler, der für abnehmendes h hinzu kommt (siehe auch folgende Abbildung).

Fehlerordnung eines Verfahrens



Fehlerordnung eines Verfahrens

Weitere Bemerkungen:

- ① Für die hier betrachteten Verfahren ist die Konsistenz- und Konvergenzordnung jeweils identisch.
- ② Verwendbar sind nur Verfahren mit der Konvergenzordnung $p \geq 1$, da dann der globale Fehler gegen Null strebt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} |y(x_n) - y_n| \leq \lim_{h \rightarrow 0} C \cdot h^p = 0.$$

Das bedeutet, der Fehler wird theoretisch beliebig klein, wenn die Schrittweite h beliebig klein wird. In der Praxis verhindern natürlich Rundungsfehler, dass eine beliebige Genauigkeit erzielt werden kann.

Beispiel 8.6

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Für das Euler-Verfahren kann man mittels Taylorentwicklung zeigen, dass für den lokalen Fehler gilt:

$$\varphi(x_n, h) = \frac{h^2}{2} y''(z)$$

wobei $z \in [x_n, x_n + h]$ eine unbekannte Zwischenstelle im Intervall ist. Die Konsistenzordnung ist also $p = 1$.

Beispiel 8.6

- Für den globalen Fehler gilt:

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [x_0, x_n]} |y''(x)| \cdot \tilde{C}$$

wobei wir auf die Konstante \tilde{C} hier nicht weiter eingehen möchten. Sie lässt sich aber unter gewissen Bedingungen berechnen. Die Abschätzung zeigt, dass damit auch die Konvergenzordnung des Euler-Verfahrens 1 ist.

Beispiel 8.6

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Die Mittelpunktsregel und das modifizierte Euler-Verfahren haben die Konsistenz- und Konvergenzordnung $p = 2$ (ohne Beweis).

Quiz 8.4

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung
Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Beantworten Sie die folgende Frage:

Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

Mehrere richtige Antworten:

- A. Der globale Fehler misst die Abweichung von der exakten Lösung nach n Iterationen.
- B. Der lokale Fehler ist ein Mass ist für die Abweichung von der exakten Lösung nach einer Iteration.
- C. Mit einer Konvergenzordnung von $p > 1$ strebt der globale Fehler wegen $|y(x_n) - y_n| \leq C \cdot h^p$ gegen 0 für $h \rightarrow 0$, d.h. für beliebig kleines h kann die Lösung numerisch beliebig genau berechnet werden.
- D. Der Rundungsfehler verhindert, dass für eine Konvergenzordnung von $p > 1$ die Lösung numerisch beliebig genau berechnet werden kann für $h \rightarrow 0$
- E. Weiss nicht.

Quiz 8.4: Lösung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Richtige Antworten:

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta
DGL
Systeme

8.7 Runge-Kutta Verfahren

Runge-Kutta Verfahren

- Wie bereits gesehen, wird in Einzelschrittverfahren die Steigung im Richtungsfeld verwendet gemäss (vgl. Abb. 1):

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + \text{Steigung} \cdot h$$

- Das klassische Euler-Verfahren verwendet einen Punkt, um die Steigung zu berechnen und hat die Konsistenz- und Konvergenzordnung $p = 1$.
- Das Mittelpunkt-Verfahren und das modifizierte Euler-Verfahren verwenden dazu zwei Punkte und haben die Konsistenz- und Konvergenzordnung $p = 2$.
- Offenbar kann durch die Hinzunahme von zusätzlichen Punkten zur Berechnung eines Durchschnitt-Werts für die Steigung die Genauigkeit eines Einschrittverfahrens verbessert werden.

Klassisches vierstufiges Runge-Kutta Verfahren

Algorithmus: klassisches vierstufiges Runge-Kutta Verfahren [1]

- Gegeben sei für $x \in [a, b]$ das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit } y(a) = y_0.$$

- Das klassische Runge-Kutta zur numerischen Lösung lautet

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + h k_3)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

wobei $x_0 = a$, $x_i = a + ih$ für $i = 0, \dots, n-1$ ($n \in \mathbb{N}$) und $h = \frac{b-a}{n}$.

Klassisches vierstufiges Runge-Kutta Verfahren

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

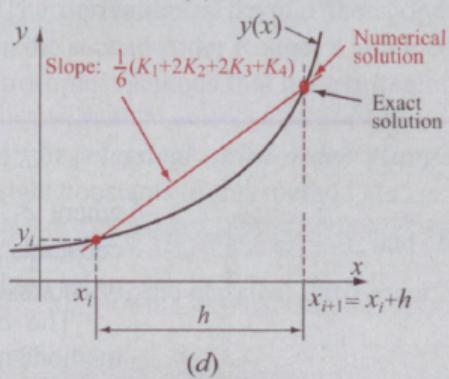
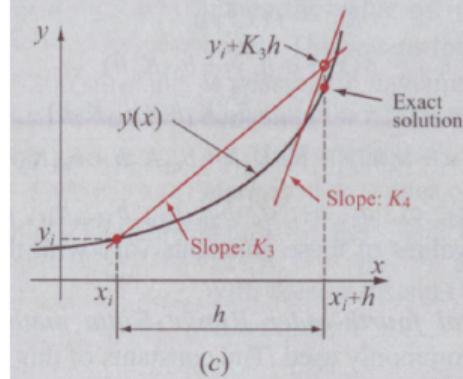
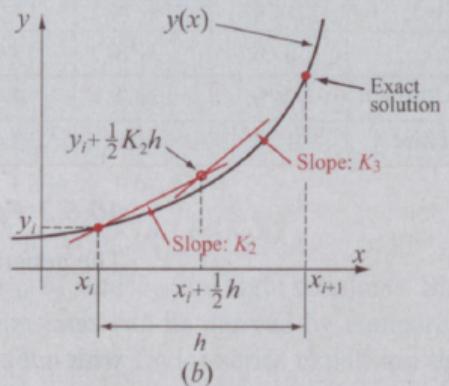
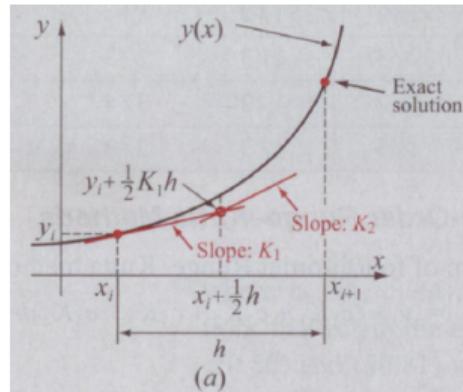
Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme



Klassisches vierstufiges Runge-Kutta Verfahren

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Bemerkung:

- Das klassische vierstufige Runge-Kutta Verfahren hat die Konsistenz- und Konvergenzordnung $p = 4$, siehe dazu auch das folgende Beispiel.

Beispiel 8.7

- Wir berechnen wieder wie in Beispiel 8.5 die numerische Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)) = t^2 + 0.1 \cdot y(t),$$

mit $y(-1.5) = 0$ auf dem Intervall $[a, b] = [-1.5, 1.5]$ und $n = 5$, diesmal aber mit dem klassischen Runge-Kutta Verfahren.

Beispiel 8.7: Lösung

- Klassisches Runge-Kutta Verfahren:

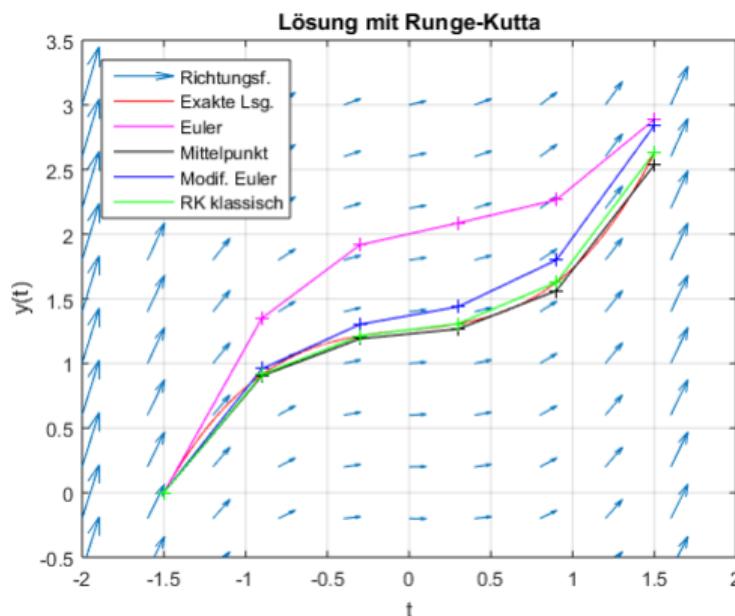
i	t_i	y_{exakt}	y_i	k_1	k_2	k_3	k_4	y_{i+1}
0	-1.5	0	0	2.2500	1.5075	1.485	0.8991	0.9135
1	-0.9	0.9135	0.9135	0.9013	0.4784	0.4657	0.2093	1.2133
2	-0.3	1.2133	1.2133	0.2113	0.1277	0.1252	0.2188	1.3069
3	0.3	1.3069	1.3069	0.2207	0.4973	0.5056	0.9710	1.6267
4	0.9	1.6267	1.6267	0.9727	1.6318	0.1651	2.512	2.6318
5	1.5	2.6318	2.6318	-	-	-	-	-

- Der Vergleich mit den Werten der exakten Lösung y_{exakt} aus Bsp. 8.5 zeigt bei dieser Genauigkeit keinen Unterschied mehr.

Beispiel 8.7: Lösung

HM 2,
Kapitel 8

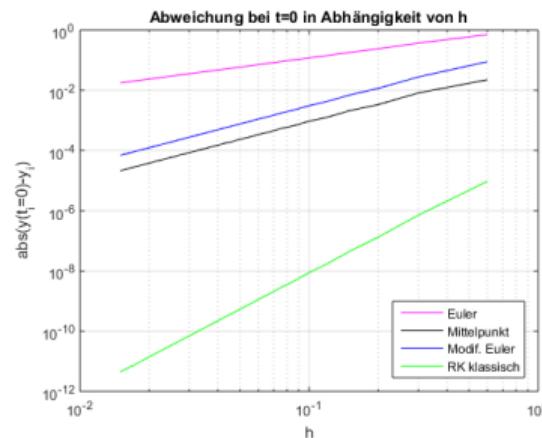
Historische
Entwicklung
Problemstel-
lung
Beispiele
Richtungsfel-
der
Euler-Verfah-
ren
Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert
Fehlerord-
nung
Runge-Kutta
DGL
Systeme



- In der obigen Abbildung ist die Lösung grafisch gezeigt.

Beispiel 8.7: Lösung

- Ebenfalls gezeigt ist die Abweichung $|y_{\text{exakt}}(t_i = 0) - y_i|$ für das fixierte $t_i = 0$ in Abhängigkeit von unterschiedlichen Schrittweite h .
- Wir wissen bereits, dass das klassische Euler-Verfahren die Konvergenzordnung $p = 1$ hat, das Mittelpunkt- und das modifizierte Euler-Verfahren $p = 2$ und das klassische Runge-Kutta Verfahren $p = 4$.
- Im log-log Koordinatensystem (rechte Figur) entspricht das gerade der Steigung der entsprechenden Geraden. Der Achsenabschnitt (Ordinate) korreliert mit der Proportionalitätskonstante C der theoretischen Fehlerabschätzung aus Def. 8.4.



Aufgabe 8.5

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- a) Implementieren Sie das obige Beispiel 8.7 als Skript mit dem modifizierten Euler-Verfahren in Python und stellen Sie die Lösung grafisch dar (ohne Richtungsfeld).
- b) Berechnen Sie für die Differentialgleichung $y'(x) = y(x)$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ die Lösung auf dem Intervall $x \in [0, 1]$ mit dem klassischen vierstufigen Verfahren von Runge-Kutta und den Schrittweiten $h = 0.1$ und $h = 0.05$ und vergleichen Sie die numerische Lösung mit dem exakten Wert.

Aufgabe 8.5: Lösung für a)

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Aufgabe 8.5: Lösung für a)

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Aufgabe 8.5: Lösung für b)

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Aufgabe 8.5: Lösung für b)

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Aufgabe 8.5: Lösung für b)

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Aufgabe 8.5: Lösung für b)

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Allgemeines s-stufiges Runge-Kutta Verfahren

Definition 8.5 [1]: Allgemeines s–stufiges Runge-Kutta Verfahren

- Ein allgemeines (explizites) s –stufiges Runge-Kutta Verfahren ist gegeben durch die Formeln

$$k_n = f \left(x_i + c_n h, y_i + h \sum_{m=1}^{n-1} a_{nm} k_m \right) \quad \text{für } n = 1, \dots, s$$

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{n=1}^s b_n k_n$$

- Hierbei ist $s \in \mathbb{N}$ die Stufenzahl und a_{nm} , b_n , c_n sind Konstanten. Die Konsistenz- und Konvergenzordnung hängt von der Wahl dieser Konstanten ab.

Allgemeines s-stufiges Runge-Kutta Verfahren

- Man notiert die Koeffizienten meist in der Form

c_1				
c_2	a_{21}			
c_3	a_{31}	a_{32}		
\vdots				
c_n	a_{n1}	a_{n2}	\dots	$a_{n,n-1}$
\vdots				
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	$a_{s,s-1}$
	b_1	b_2	\dots	b_{s-1}
				b_s

Beispiel 8.8

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

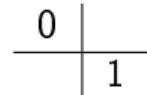
Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

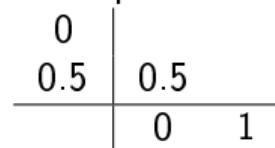
DGL
Systeme

- Alle bisher vorgestellten Verfahren entsprechen diesem Schema:

- Euler-Verfahren, $s = 1$:



- Mittelpunkt-Verfahren, $s = 2$:



Beispiel 8.8

- Modifiziertes Euler-Verfahren, $s = 2$:

0	
1	1
	0.5 0.5

- klass. Runge-Kutta Verfahren, $s = 4$:

0	
0.5	0.5
0.5	0 0.5
1	0 0 1
	$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

8.8 Erweiterung auf Systeme von Differentialgleichungen

Systeme von Differentialgleichungen

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Die bisher vorgestellten Lösungsverfahren sind nur anwendbar auf Differentialgleichungen 1. Ordnung.
- Was aber, wenn eine Differentialgleichung höherer Ordnung gemäss Def. 8.2 vorliegt?
- Wir zeigen in diesem Abschnitt,
 - 1 wie aus einer Differentialgleichung k -ter Ordnung ein System von k Differentialgleichungen 1. Ordnung gemacht und
 - 2 wie dieses System anschliessend mit den uns bereits bekannten Verfahren gelöst werden kann.

Zurückführen einer DGL k -ter Ordnung auf k DGL 1. Ordnung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Beginnen wir mit dem Beispiel 8.9 [2]:

- Wir betrachten die Differentialgleichung 3. Ordnung

$$y''' + 5y'' + 8y' + 6y = 10e^{-x}$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = y''(0) = 0$$

Zurückführen einer DGL k -ter Ordnung auf k DGL 1. Ordnung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- 1. Schritt: wir lösen nach der höchsten Ableitung auf:

$$y''' = 10e^{-x} - 5y'' - 8y' - 6y$$

Zurückführen einer DGL k -ter Ordnung auf k DGL 1. Ordnung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- 2. Schritt: wir führen Hilfsfunktionen z_1, z_2, z_3 bis zur zweiten Ableitung ein:

$$z_1(x) = y(x)$$

$$z_2(x) = y'(x)$$

$$z_3(x) = y''(x)$$

Zurückführen einer DGL k -ter Ordnung auf k DGL 1. Ordnung

- 3. Schritt: wir leiten die Hilfsfunktionen ab und setzen sie in $z'_3 = y'''$ ein

$$\begin{aligned} z'_1 &= y' (= z_2) \\ z'_2 &= y'' (= z_3) \\ z'_3 &= y''' \\ &= 10e^{-x} - 5y'' - 8y' - 6y \\ &= 10e^{-x} - 5z_3 - 8z_2 - 6z_1 \end{aligned}$$

Zurückführen einer DGL k -ter Ordnung auf k DGL 1. Ordnung

- 4. Schritt: wir schreiben die DGL in vektorieller Form

$$\mathbf{z}' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ 10e^{-x} - 5z_3 - 8z_2 - 6z_1 \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x, \mathbf{z})$$
$$\text{mit } \mathbf{z}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zurückführen einer DGL k -ter Ordnung auf k DGL 1. Ordnung

- Wir haben so ein Anfangswertproblem 1. Ordnung erhalten (wobei Vektoren und vektorwertige Funktionen fett gedruckt sind):

$$\mathbf{z}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{z}) \text{ mit } \mathbf{z}(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \end{pmatrix}$$

- Damit haben wir die DGL 3. Ordnung zurückgeführt auf 3 DGL 1. Ordnung und können die uns bekannten Verfahren zur Lösung anwenden.

Zurückführen einer DGL k -ter Ordnung auf k DGL 1. Ordnung

- Bemerkung: da es sich um eine lineare DGL 3. Ordnung handelt hat, lässt sich z' in diesem Beispiel als lineares Gleichungssystem schreiben

$$z' = \mathbf{A}z + \mathbf{b}$$

wobei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -6 & -8 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10e^{-x} \end{pmatrix}$$

Dies ist aber nicht generell der Fall, deshalb schreiben wir z' i.d.R. in der vektoriellen Form.

Zurückführen einer DGL k -ter Ordnung auf k DGL 1. Ordnung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Rezept für das Zurückführen auf ein System erster Ordnung

- ① Die Differentialgleichung nach den höchsten vorkommenden Ableitungen der unbekannten Funktionen auflösen.
- ② Neue Funktionen für die unbekannten Funktionen und deren Ableitungen bis Ordnung der höchsten Ableitung minus 1 einführen.
- ③ Das System erster Ordnung durch Ersetzen der höheren Ableitungen durch die neuen Funktionen aufstellen.
- ④ Das entsprechende Anfangswertproblem in vektorieller Form aufschreiben.

Aufgabe 8.6

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Führen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen auf ein System erster Ordnung zurück:

① $y^{(4)} + 1.1y''' - 0.1y'' - 0.3y = \sin x + 5$ mit
 $y(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ und $y'(0) = 2$

② $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ mit $y(1) = y'(1) = 2$

Aufgabe 8.6: Lösung zu (1)

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Aufgabe 8.6: Lösung zu (1)

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Aufgabe 8.6: Lösung zu (1)

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Aufgabe 8.6: Lösung zu (1)

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Aufgabe 8.6: Lösung zu (2)

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Aufgabe 8.6: Lösung zu (2)

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Lösen eines Systems von k DGL 1. Ordnung

- Wie wir im Beispiel 8.9 gesehen haben, kann ein Anfangswertproblem vorliegen als System von DGL 1. Ordnung in der Form

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \text{ mit } \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^{(0)},$$

(wobei wie in den früheren Kapiteln ein hochgestellter Index in Klammern $\mathbf{y}^{(i)}$ einen Vektor aus \mathbb{R}^n nach der i -ten Iteration bezeichnet).

Lösen eines Systems von k DGL 1. Ordnung

- Es wird also die Lösung $\mathbf{y}(x)$ gesucht, welche sich als vektorwertige Funktion $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ interpretieren lässt mit

$$\mathbf{y} : x \mapsto \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_k(x) \end{pmatrix},$$

wobei die Komponenten $y_i(x)$ skalarwertige Funktionen $y_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind. Analog ist dann \mathbf{f} eine vektorwertige Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit

$$\mathbf{f} : (x, \mathbf{y}(x)) \mapsto \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x, \mathbf{y}(x)) \\ f_2(x, \mathbf{y}(x)) \\ \vdots \\ f_k(x, \mathbf{y}(x)) \end{pmatrix}$$

Lösen eines Systems von k DGL 1. Ordnung

- In Komponentenschreibweise lautet das ganze System

$$y'_1(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_k(x))$$

$$y'_2(x) = f_2(x, y_1(x), \dots, y_k(x))$$

$$\begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

$$y'_k(x) = f_k(x, y_1(x), \dots, y_k(x))$$

Rezept für das Lösen eines Systems von k DGL 1. Ordnung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Ist ein Lösungs-Verfahren

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + h \\y_{i+1} &= y_i + \text{Steigung} \cdot h\end{aligned}$$

für die eindimensionale Gleichung

$$y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$$

definiert, so kann es völlig analog erweitert werden als

$$\begin{aligned}x_i &= x_i + h \\y^{(i+1)} &= y^{(i+1)} + \text{Steigung} \cdot h\end{aligned}$$

für ein System

$$y' = f(x, y(x)) \text{ mit } y(x_0) = y^{(0)},$$

(wobei wie üblich ein hochgestellter Index in Klammern $y^{(i)}$ einen Vektor aus \mathbb{R}^n nach der i -ten Iteration bezeichnet).

Rezept für das Lösen eines Systems von k DGL 1. Ordnung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch

Mittelpunkt

Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Dabei werden ersetzt:

- y' durch den Vektor y' der Ableitungen der einzelnen Komponenten,
- $f(x, y(x))$ durch die vektorwertige Funktion $f(x, y(x))$ und
- die skalare Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ durch die Anfangsbedingung $y(x_0) = y^{(0)}$.

Es ist dann also

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, y' = \begin{pmatrix} y'_1(x) \\ y'_2(x) \\ \vdots \\ y'_n(x) \end{pmatrix}, f(x, y(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x, y(x)) \\ f_2(x, y(x)) \\ \vdots \\ f_n(x, y(x)) \end{pmatrix},$$

$$y(x_0) = y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix}$$

Lösen eines Systems von k DGL 1. Ordnung

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

Bemerkung:

- Wurde das System erstellt, um eine DGL k -ter Ordnung zu lösen, so finden sich die gesuchte Lösung $y(x)$ in der ersten Komponente des Vektors $\mathbf{y}(x)$, also $y(x) \approx y_1(x)$.

Beispiel 8.10

- Wir lösen das System aus Beispiel 8.9 mit dem Euler-Verfahren in vektorieller Form

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + h \\ \mathbf{y}^{(i+1)} &= \mathbf{y}^{(i+1)} + h \cdot \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}^{(i)})\end{aligned}$$

auf dem Intervall $[0, 1]$ und $h = 0.5$

Beispiel 8.10

- Das System lautet

$$\mathbf{z}' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ 10e^{-x} - 5z_3 - 8z_2 - 6z_1 \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x, \mathbf{z})$$

$$\text{mit } \mathbf{z}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^{(0)} \\ z_2^{(0)} \\ z_3^{(0)} \end{pmatrix}$$

Beispiel 8.10

- $i = 0$: für den ersten Schritt erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(x_0, \mathbf{z}^{(0)}) &= \begin{pmatrix} z_2^{(0)} \\ z_3^{(0)} \\ 10e^{-x_0} - 5z_3^{(0)} - 8z_2^{(0)} - 6z_1^{(0)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10e^{-0} - 5 \cdot 0 - 8 \cdot 0 - 6 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{z}^{(1)} &= \mathbf{z}^{(0)} + h \cdot \mathbf{f}(x_0, \mathbf{z}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ x_1 &= x_0 + h = 0.5\end{aligned}$$

Beispiel 8.10

- $i = 1$: für den zweiten Schritt erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x_1, \mathbf{z}^{(1)}) &= \begin{pmatrix} z_2^{(1)} \\ z_3^{(1)} \\ 10e^{-x_1} - 5z_3^{(1)} - 8z_2^{(1)} - 6z_1^{(1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 10e^{-0.5} - 5 \cdot (-1) - 8 \cdot 0 - 6 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -0.9347 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{z}^{(2)} = \mathbf{z}^{(1)} + h \cdot \mathbf{f}(x_1, \mathbf{z}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -0.9347 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \\ -1.4673 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = x_1 + h = 1.0$$

Aufgabe 8.7

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch

Mittelpunkt

Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Benutzen Sie die Gleichungssysteme der Aufgabe 8.6 und berechnen Sie manuell je den ersten Schritt des Euler-Verfahrens und des klassischen vierstufigen Verfahrens von Runge-Kutta mit $h = 0.1$.
- Wird In den Übungen gelöst.

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

8.9 Stabilität

Stabilität

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta
DGL
Systeme

- Wie wir bereits gesehen haben, setzt sich der Fehler bei der Lösung einer DGL zusammen aus dem vom benutzten Verfahren abhängigen Diskretisierungsfehler und dem vom Rechner abhängigen Rundungsfehler.
- Auf die Begriffe der Konsistenz bzw. Konvergenz sind wir in Kap. 8.6 eingegangen.
- In gewissen Situationen kann es vorkommen, dass der numerische Fehler im Verlauf der Iteration unbeschränkt gross werden kann, unabhängig von der Schrittweite h .
- Man spricht dann von Instabilität bzw. einer instabilen Lösung.
- Die Stabilität einer Lösung hängt von drei Faktoren ab:
 - ① dem benutzten Verfahren,
 - ② der Schrittweite h und
 - ③ dem spezifischen Anfangswertproblem.

Es gibt verschiedene Methoden, um das Problem zu untersuchen, z.B.

- Durchrechnen der Lösung einmal mit single- und einmal mit double-precision mit anschliessendem Vergleich. Dies kann Aussagen möglich machen zur Akkumulation von Rundungsfehlern.
- Variation der Schrittweite h . Dies erlaubt Aussagen zum Diskretisierungsfehler.
- Vergleich der Resultate erzielt mit einem Lösungsverfahren höherer Ordnung und einem Lösungsverfahren niederer Ordnung.
- Vergleich der Resultate eines numerischen Lösungsverfahrens mit der analytischen Lösung, sofern diese bekannt ist.

- Wir wollen den letzten Punkt etwas ausführen und betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = -\alpha y, \quad y(0) = y_0 = 1 \quad (\alpha > 0)$$

für welches wir die exakte Lösung kennen:

$$y(x) = e^{-\alpha x}.$$

Das Euler-Verfahren liefert die numerische Lösung

$$y_{i+1} = y_i - h \cdot \alpha y_i = y_i (1 - h\alpha).$$

Stabilität

- Durch rekursives Einsetzen von $y_i = y_{i-1}(1 - h\alpha)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i \cdot (1 - h\alpha) = y_{i-1}(1 - h\alpha)^2 = y_{i-2}(1 - h\alpha)^3 \\&= \dots = \underbrace{y_0}_{=1} (1 - h\alpha)^{i+1}\end{aligned}$$

- Da die exakte Lösung $y = e^{-\alpha x}$ streng monoton fallend ist, sollte auch die Näherungslösung streng monoton fallend sein, d.h. in diesem Fall

$$|1 - h\alpha| < 1$$

und es folgt

$$0 < h\alpha < 2 \Rightarrow 0 < h < \frac{2}{\alpha}.$$

- Wir haben also eine obere Schranke für h hergeleitet bzw. eine Schrittweitenobergrenze, für die die numerische Lösung stabil bleibt.

Definition 8.6: Stabilitätsfunktion / Stabilitätsintervall

- Kann bei der Anwendung eines Verfahrens auf die DGL $y' = -\alpha y$ die numerische Lösung in der Form

$$y_{i+1} = g(h\alpha) \cdot y_i$$

geschrieben werden, so nennt man $g(z)$ die Stabilitätsfunktion des Verfahrens (mit $z = h\alpha$).

- Das offene Intervall $z \in (0, \alpha)$, in dem $|g(z)| < 1$ gilt, bezeichnet man als das Stabilitätsintervall des Verfahrens.

- Bemerkung:

- Wie wir oben gesehen haben, ist die Stabilitätsfunktion für das Eulerverfahren $g(z) = 1 + z$
- Man kann zeigen, dass die Stabilitätsfunktion des s -stufigen (expliziten) Runge-Kutta Verfahrens ein Polynom vom Grad s ist.

Beispiel 8.11

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Wir betrachten die DGL

$$y' = -2.5y, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 3.4].$$

Mit $\alpha = 2.5$ gilt $\frac{2}{\alpha} = 0.8$ und damit für eine stabile Lösung

$$0 < h < 0.8.$$

In der folgenden Abbildung ist die stabile Lösung für $h_1 = 0.2$ gezeigt im Vergleich zur instabilen Lösung mit $h_2 = 0.85$.

Beispiel 8.11

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

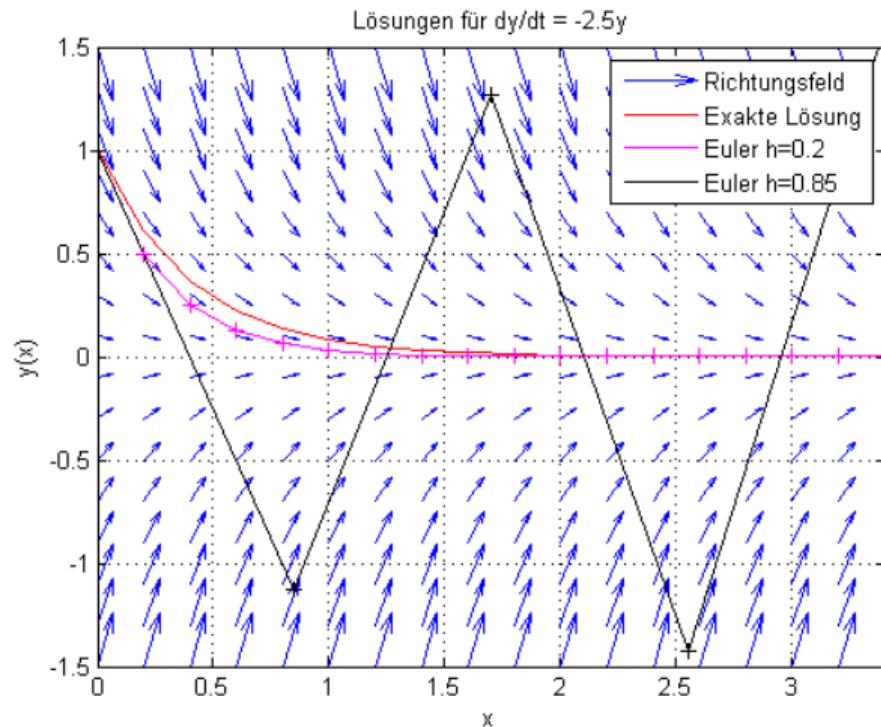
Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme



Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

8.10 Weitere Punkte

Weitere Punkte

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Wir haben in diesem Kapitel einige wichtige Verfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen kennen gelernt und konnten doch nur an der Oberfläche der ganzen Thematik kratzen.
- Im Folgenden gehen wir zur Vollständigkeit noch kurz auf Mehrschrittverfahren und implizite Verfahren ein, erläutern die Begriffe der Schrittweitensteuerung und Steifigkeit von DGL und schliessen das Kapitel mit einer kurzen Übersicht über die in MATLAB bereits implementierten Funktionen zur Lösung von Anfangswertproblemen ab.

Mehrschrittverfahren

- Wir haben bisher nur Einschrittverfahren kennengelernt, d.h. zur Berechnung von y_{i+1} wird nur der vorhergehende Punkt (x_i, y_i) benötigt.
- Bei Mehrschrittverfahren werden im Gegensatz dazu für die Berechnung von y_{i+1} nicht nur (x_i, y_i) sondern noch weiter zurückliegende Punkte wie (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_{i-2}, y_{i-2}) etc. benötigt.
- Ein Beispiel aus der Klasse der Mehrschrittverfahren sind die Adams-Bashforth Methoden. Die Adams-Bashforth Methode 3. Ordnung lautet z.B.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} (23f(x_i, y_i) - 16f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(x_{i-2}, y_{i-2})).$$

- Mehrschrittverfahren können effizienter sein bei der Berechnung der numerischen Lösung einer DGL.

Implizite vs. explizite Verfahren

- Wir haben uns in diesem Kapitel auf die Lösung von expliziten DGL der Form

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

beschränkt, d.h. die DGL ist nach der höchsten Ableitung aufgelöst. Wir haben demnach auch nur explizite Verfahren angewendet.

- Im Gegensatz dazu gibt es die impliziten DGL der Form

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) = 0,$$

die nicht nach der höchsten Ableitung aufgelöst sind.

Implizite vs. explizite Verfahren

- Bei den zugehörigen impliziten Lösungsverfahren muss jeweils noch ein Nullstellenproblem gelöst werden (z.B. mit dem Newton-Verfahren), wie beim impliziten Euler-Verfahren

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + h \\y_{i+1} &= y_i + h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1})\end{aligned}$$

da hier die gesuchte Lösung y_{i+1} auf beiden Seiten der Gleichung auftaucht. Diese Verfahren sind deshalb aufwendiger, aber auch stabiler als die expliziten Verfahren.

Steife DGL

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Im Zusammenhang mit Stabilitätsüberlegungen (vgl. Kap. 8.10) redet man auch von sogn. 'steifen' DGL (stiff ODE).
- Diese sind DGL mit stark schwankenden Zeitskalen t (oder Längenskalen x) der Lösung y .
- Zur Lösung solcher steifen DGL benötigen explizite Lösungsverfahren eine verschwindend kleine Schrittweite h , so dass die Lösung wegen langer Laufzeiten unpraktikabel oder wegen zunehmenden Rundungsfehlern instabil wird.
- Steife DGL werden deshalb mit impliziten Verfahren gelöst.

Schrittweitensteuerung

- Für DGL mit stark schwankenden Lösungsfunktionen $y(x)$ ist es effizienter, statt einer konstanten (ausreichend klinen) Schrittweite $h = \frac{b-a}{n} = \text{const.}$ eine variable Schrittweite h , anzuwenden, die klein ist in Bereichen grosser Krümmung der Lösung $y(x)$ und gross in Bereichen mit kleiner Krümmung.
- Hierzu sind Fehlerschätzungen für den lokalen Fehler nötig.
- Auf die dazu benötigten Verfahren gehen wir nicht ein.

Python-Funktionen zur Lösung von Anfangswertproblemen

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta

DGL
Systeme

- Python bietet mehrere Funktionen an, um Anfangswertprobleme zu lösen. Eine häufig benutzte ist
 - `scipy.integrate.solve_ivp()` (siehe Dokumentation)
- Die zu verwendenden Methoden (z.B. Runge-Kutta) werden als Parameter spezifiziert.

Python-Funktionen zur Lösung von Anfangswertproblemen

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung

Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta
DGL
Systeme

method	Description
'RK45'	Default. Explicit Runge-Kutta method of order 5(4). The error is controlled assuming accuracy of the fourth-order method, but steps are taken using the fifth-order accurate formula (local extrapolation is done).
'RK23'	Explicit Runge-Kutta method of order 3(2). The error is controlled assuming accuracy of the second-order method, but steps are taken using the third-order accurate formula (local extrapolation is done).
'DOP853'	Explicit Runge-Kutta method of order 8. Python implementation of the “DOP853” algorithm originally written in Fortran.

Python-Funktionen zur Lösung von Anfangswertproblemen

HM 2,
Kapitel 8

Historische
Entwicklung
Problemstel-
lung

Beispiele

Richtungsfel-
der

Euler-Verfah-
ren

Klassisch
Mittelpunkt
Modifiziert

Fehlerord-
nung

Runge-Kutta
DGL
Systeme

method	Description
'Radau'	Implicit Runge-Kutta method of the Radau IIA family of order 5 [4]. The error is controlled with a third-order accurate embedded formula.
'BDF'	Implicit multi-step variable-order (1 to 5) method based on a backward differentiation formula for the derivative approximation.
'LSODA'	Adams/BDF method with automatic stiffness detection and switching.