# דף נוסחאות לבחינה

| ההתפלגות | פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות | התוחלת | השונות | הפונקציה יוצרת המומנטים |
|---|---|---|---|---|
| בינומית | $\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,\ldots,n$ | $np$ | $np(1-p)$ | $(pe^t+1-p)^n$ |
| גיאומטרית | $(1-p)^{i-1}\cdot p \quad , \quad i=1,2,\ldots$ | $1/p$ | $(1-p)/p^2$ | $pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$ |
| פואסונית | $e^{-\lambda}\cdot\lambda^i/i! \quad , \quad i=0,1,\ldots$ | $\lambda$ | $\lambda$ | $\exp\{\lambda(e^t-1)\}$ |
| בינומית שלילית | $\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r}\cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,\ldots$ | $r/p$ | $(1-p)r/p^2$ | $\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$ |
| היפרגיאומטרית | $\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,\ldots,m$ | $nm/N$ | $\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$ | |
| אחידה בדידה | $\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1,m+2,\ldots,m+n$ | $m+(1+n)/2$ | $(n^2-1)/12$ | |
| אחידה | $1/(b-a) \quad , \quad a\le x\le b$ | $(a+b)/2$ | $(b-a)^2/12$ | $(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\ , t\neq 0$ |
| נורמלית | $(1/\sqrt{2\pi}\sigma)\cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , -\infty<x<\infty$ | $\mu$ | $\sigma^2$ | $\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$ |
| מעריכית | $\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$ | $1/\lambda$ | $1/\lambda^2$ | $\lambda/(\lambda-t) \quad , \quad t<\lambda$ |
| מולטינומית | $\binom{n}{n_1,\ldots,n_r}\cdot p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r} \quad , \sum n_i=n\ , \sum p_i=1$ | | | |

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$$

**כלל ההכלה וההפרדה**

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

**הסתברות מותנית**

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

**נוסחת הכפל**

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n\mid A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})$$

**נוסחת ההסתברות השלמה**

$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)$ , $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא $S$

**נוסחת בייס**

$P(B_j\mid A)=\dfrac{P(A\mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)}$ , $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא $S$

**תוחלת**

$$E[X]=\sum_x x\,p_X(x)=\int x\,f(x)dx$$

**תוחלת של פונקציה של מ"מ**

$$E[g(X)]=\sum_x g(x)\,p_X(x)=\int g(x)\,f(x)dx$$

**שונות**

$$\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$$

**תוחלת ושונות של פונקציה לינארית**

$$E[aX+b]=aE[X]+b$$

$$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$$

**תכונת חוסר-הזכרון** $P\{X > s+t \mid X > t\} = P\{X > s\} \quad , \quad s,t \ge 0$

**תוחלת מותנית** $E[X \mid Y=y] = \sum_x x\, p_{X|Y}(x \mid y) = \int x\, f_{X|Y}(x \mid y)dx$

**שונות מותנית** $\mathrm{Var}(X \mid Y=y) \;=\; E[X^2 \mid Y=y] - (E[X \mid Y=y])^2$

**נוסחת התוחלת המותנית** $E[X] = E[E[X \mid Y]] = \sum_y E[X \mid Y=y]p_Y(y)$

$E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X \mid Y]]$

**נוסחת השונות המותנית** $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

**תוחלת של סכום משתנים מקריים** $E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$

**שונות משותפת** $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$

$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$

**שונות של סכום משתנים מקריים** $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

**מקדם המתאם הלינארי** $\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) \Big/ \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

**פונקציה יוצרת מומנטים** $M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_X(at)$

כאשר $X_i$ מ״מ ב״ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t)$

**תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי**

( כאשר $X_i$ מ״מ ב״ת ש״ה )

$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X_1]$

$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\,\mathrm{Var}(N)$

$M_{X_1+\ldots+X_N}(t) = E\left[\left(M_{X_1}(t)\right)^N\right]$

**אי-שוויון מרקוב** $P\{X \ge a\} \le E[X]/a \quad , \quad a > 0$ , $X$ מ״מ אי-שלילי

**אי-שוויון צ׳בישב** $P\{|X-\mu| \ge a\} \le \sigma^2 / a^2 \quad , \quad a>0 \;,\; \mu, \sigma^2 < \infty$

**משפט הגבול המרכזי** $P\left\{ (\sum_{i=1}^n X_i - n\mu) \Big/ \sqrt{n\sigma^2} \le a \right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(a) \quad , \quad \mu,\sigma^2 < \infty$ , $X_i$ מ״מ ב״ת וש״ה

<u>טורים שימושיים</u>

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \ , \ -1 < x < 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = -\ln(1-x) \ , \ 0 < x < 1$$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

<u>אינטגרלים שימושיים</u>

$$\int (ax+b)^n dx = \tfrac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} \ , \quad n \neq -1 \quad ; \quad \int \tfrac{1}{ax+b} dx = \tfrac{1}{a} \ln(ax+b)$$

$$\int e^{ax} dx = \tfrac{1}{a} e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax} dx = \tfrac{1}{a \ln b} b^{ax} \qquad \int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

<u>חוקי לוגים</u>

$$\log_n a = \log_m a / \log_m n \quad ; \quad \log_n (a^b) = b \cdot \log_n a \quad ; \quad \log_n (ab) = \log_n a + \log_n b$$

<u>רשימת טענות</u>:

- אם $A$ ו- $B$ מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע $A$ יתרחש לפני המאורע $B$ היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$ .
- אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של תהליך פואסון עם קצב $\lambda$ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\lambda$ .
- אם $X_i$ הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $(n_i, p)$ לכל $i = 1,2,...,n$ , ואם $X_1$ , $X_2$ , ... , $X_n$ בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $\left(\sum_{i=1}^{n} n_i, p\right)$.
- אם $X_i$ הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר $p$ לכל $i = 1,2,...,n$ , ואם $X_1$ , $X_2$ , ... , $X_n$ בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא משתנה מקרי בינומי שלילי עם הפרמטרים $(n, p)$.
- אם $X_i$ הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\lambda_i$ לכל $i = 1,2,...,n$ , ואם $X_1$ , $X_2$ , ... , $X_n$ בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ .
- סכום של $n$ משתנים מקריים נורמליים בלתי-תלויים עם הפרמטרים $\mu_i$ ו- $\sigma_i^2$ , הוא משתנה מקרי נורמלי עם הפרמטרים $\Sigma \mu_i$ ו- $\Sigma \sigma_i^2$ .
- אם $X$ ו- $Y$ הם משתנים מקריים בינומיים בלתי-תלויים עם הפרמטרים $(n_X, p)$ ו- $(n_Y, p)$ , בהתאמה, אז ההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה $X$ בהינתן $X + Y = n$ היא היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N = n_X + n_Y$ , $m = n_X$ ו- $n = n$ .
- אם $X$ ו- $Y$ הם משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים $\lambda_1$ ו-$\lambda_2$, בהתאמה, אז

ההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה $X$ בהינתן $X + Y = n$ היא בינומית עם הפרמטרים $n$ ו- $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ .