חלוקה הוגנת של שכר דירה
Fair Rent Division

אראל סגל-הלוי

חלוקת שכר דירה: מודל **קרדינלי**

הנחות:

- "חדרים סבירים" - כל דייר מייחס ערך כספי לכל חדר, סכום הערכים ≥ מחיר הדירה.
- "קוואזי-ליניאריות" - התועלת של דייר שמקבל חדר = ערך החדר פחות המחיר שלו.
- הנחת "הדיירים העניים" בדרך-כלל **לא** מתקיימת: אם חדר א = 100 וחדר ב = 50, נעדיף חדר א במחיר 5 מחדר ב בחינם.

חלוקת שכר דירה: סכום הערכים

משפט: בכל השמה ללא קנאה, סכום הערכים של הדיירים בחדרים שהם גרים בהם הוא מקסימלי.

הוכחה: תהי X השמת-חדרים ללא קנאה.
תהי Y השמה אחרת כלשהי. לפי הגדרת קנאה:

$$V_i(X_i) - P(X_i) \geq V_i(Y_i) - P(Y_i)$$

נסכום על כל הדיירים, i בין 1 ל-n:

$$\sum(V_i(X_i) - P(X_i)) \geq \sum(V_i(Y_i) - P(Y_i))$$

$$\sum V_i(X_i) - \sum P(X_i) \geq \sum V_i(Y_i) - \sum P(Y_i)$$

בשני הצדדים, סכום המחירים שווה למחיר הדירה.***

מיקסום סכום הערכים

משפט: בכל השמה ללא קנאה, סכום הערכים של הדיירים בחדרים שהם גרים בהם הוא מקסימלי.

מסקנות:

1) כל השמת-חדרים ללא קנאה היא יעילה פארטו.

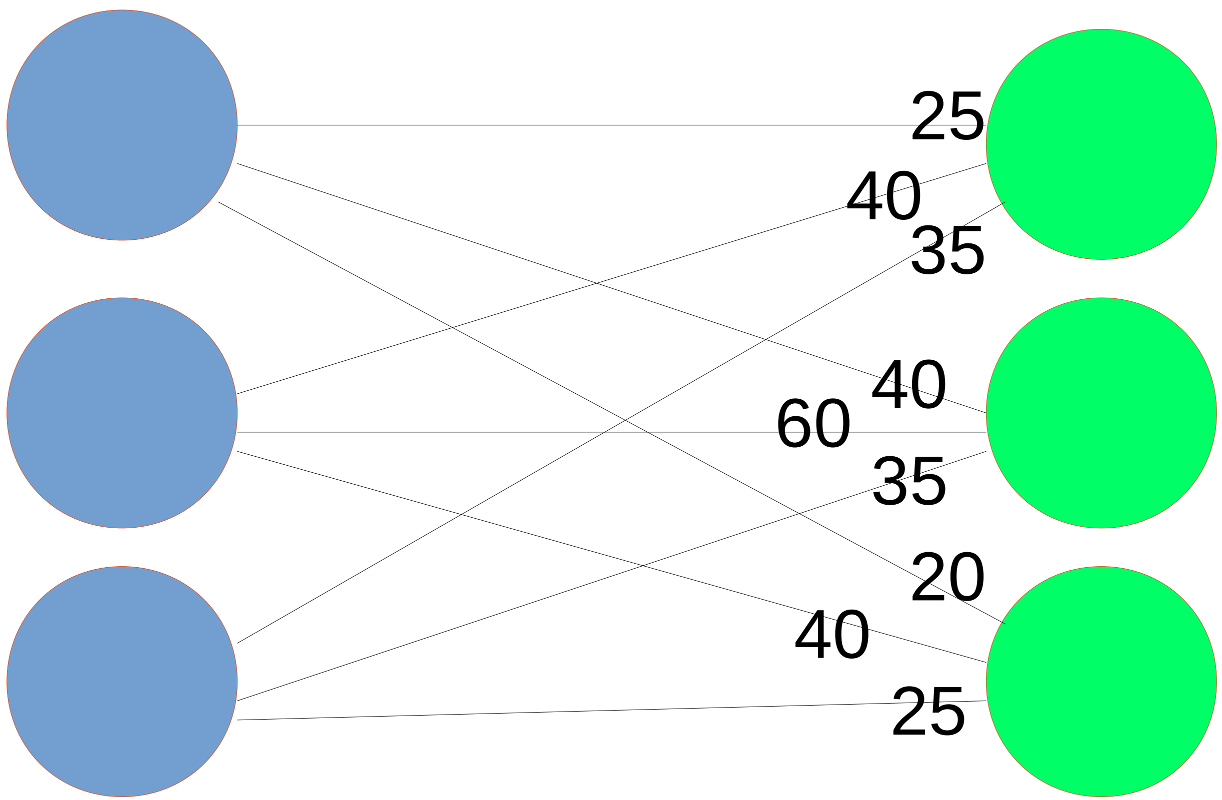
2) כדי למצוא חלוקת שכ"ד ללא קנאה, צריך אלגוריתם ל**השמה ממקסמת-סכום-ערכים**.

בעיית מיקסום סכום הערכים ידועה בשמות שונים:

- בעיית ההשמה – Assignment problem
- שידוך עם משקל מקסימלי – Maximum-weight matching

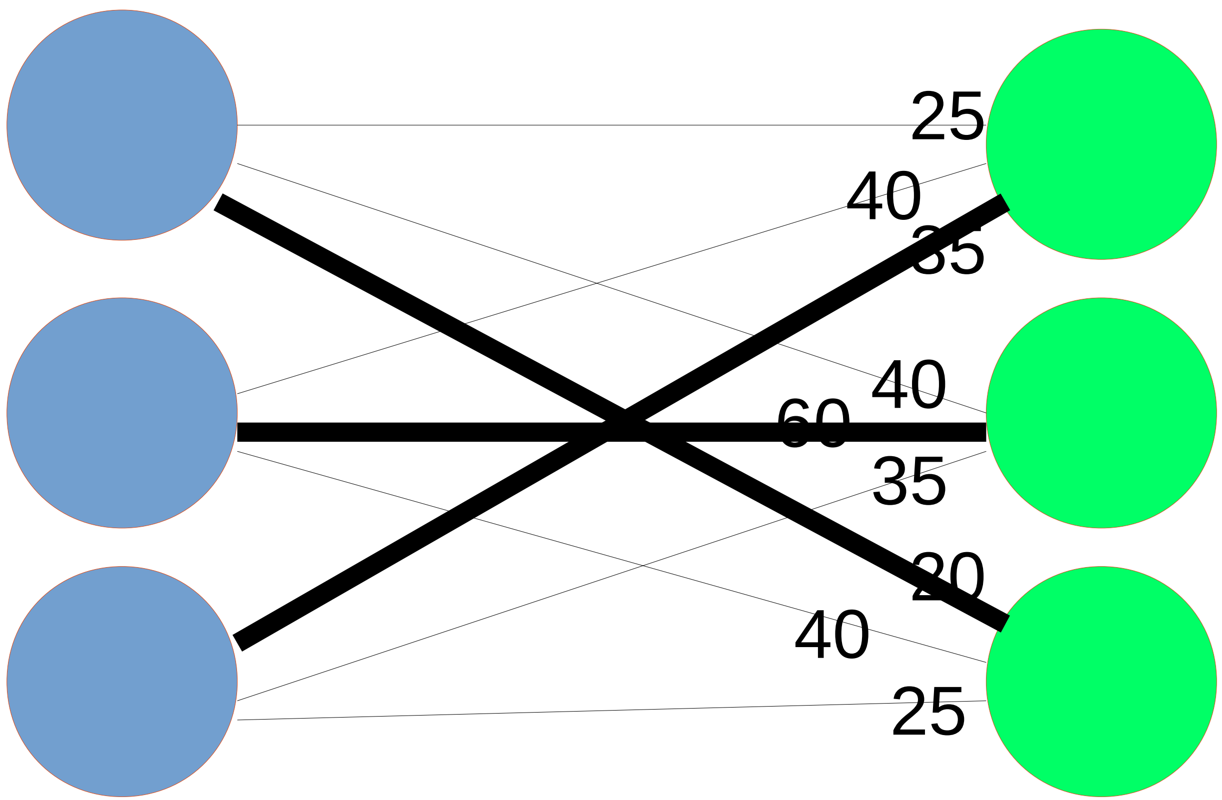
שידוך עם משקל מקסימלי

- **הקלט**: גרף דו-צדדי עם משקלים על הקשתות:



שידוך עם משקל מקסימלי

- **הפלט**: שידוך מושלם שמשקלו גדול ביותר:



שידוך עם משקל מקסימלי

- מספר השידוכים האפשריים: המון *(כמה?)*.
- יש הרבה אלגוריתמים יעילים לפתרון הבעיה.
- אנחנו נראה איך להפוך אותה *לבעיית אופטימיזציה* שאפשר לפתור ב Mathematica.
- לכל **קשת** בגרף (בין i ל j), יהיה **משתנה** :x[i,j]
1 - אם הקשת בשידוך, 0 - אם הקשת לא בשידוך.

For all i: Sum_j x[i,j] = 1;   For all j: Sum_i x[i,j] = 1

- **המשקל הכולל** של שידוך: $Sum_{i,j}$ w[i,j] * x[i,j]

שידוך עם משקל מקסימלי - תוכנית

לסיכום, זו התוכנית שיש לפתור:

Maximize $\quad \text{Sum}_{i,j}\ w[i,j] * x[i,j]$

Such that $\quad$ For all i: $\text{Sum}_j\ x[i,j] = 1$

For all j: $\text{Sum}_i\ x[i,j] = 1$

For all i,j: $1 \geq x[i,j] \geq 0$

For all i,j: $x[i,j]$ in $\mathbf{Z}$

הבעיה היחידה היא האילוץ האחרון –
כל המשתנים חייבים להיות מספרים שלמים.

אופטימיזציה עם משתנים שלמים היא בעיה NP-קשה!

שידוך עם משקל מקסימלי - תוכנית

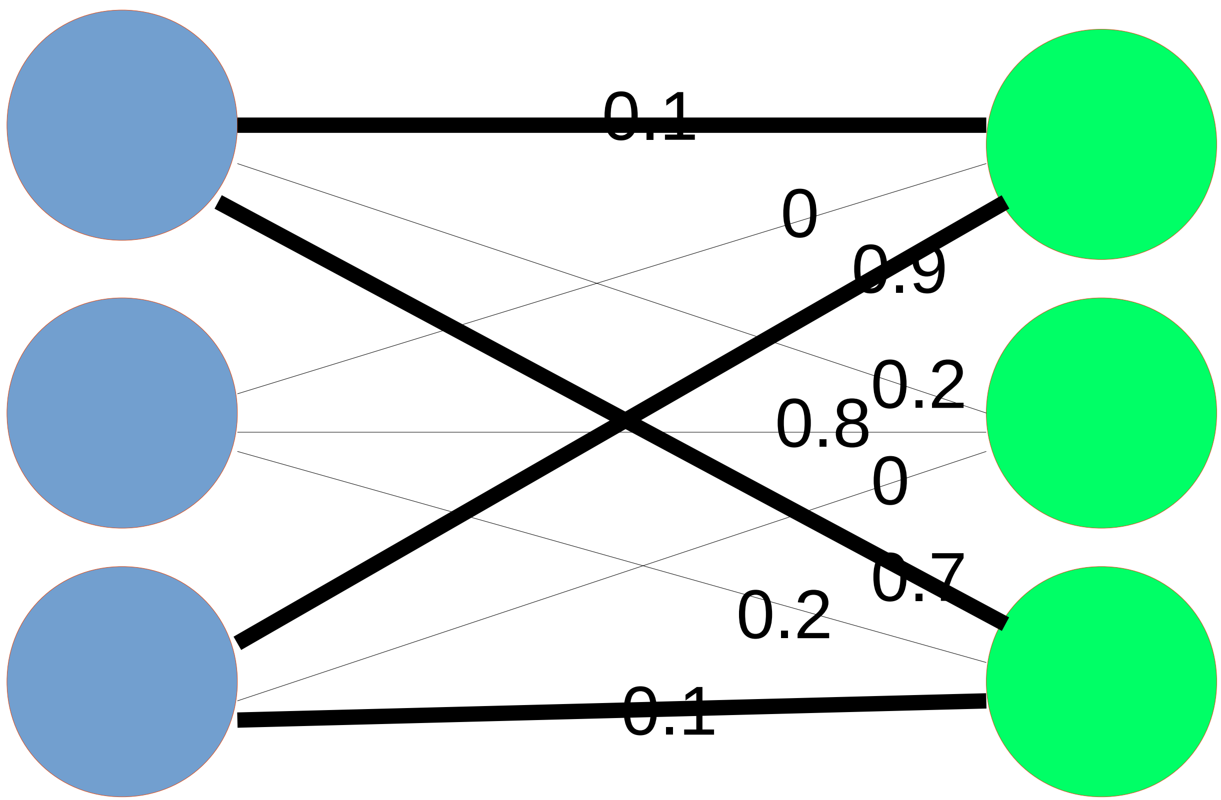
משפט: *אם* קיים פתרון אופטימלי לבעיה מהשקף הקודם, *אז* קיים פתרון אופטימלי שבו כל המשתנים הם שלמים.

הוכחה: יהי x פתרון אופטימלי עם משתנים "שבורים".
נבחר משתנה אחד שבור - $x[i1, j2]$.
סכום המשתנים הסמוכים לצומת $j2$ *הוא שלם*.
לכן חייב להיות משתנה שבור נוסף – $x[i3,j2]$.
לכן חייייב להיות משתנה שבור נוסף - $x[i3,j4]$.
מספר המשתנים סופי ← יש "מעגל" משתנים שבורים.

שידוך עם משקל מקסימלי - דוגמה

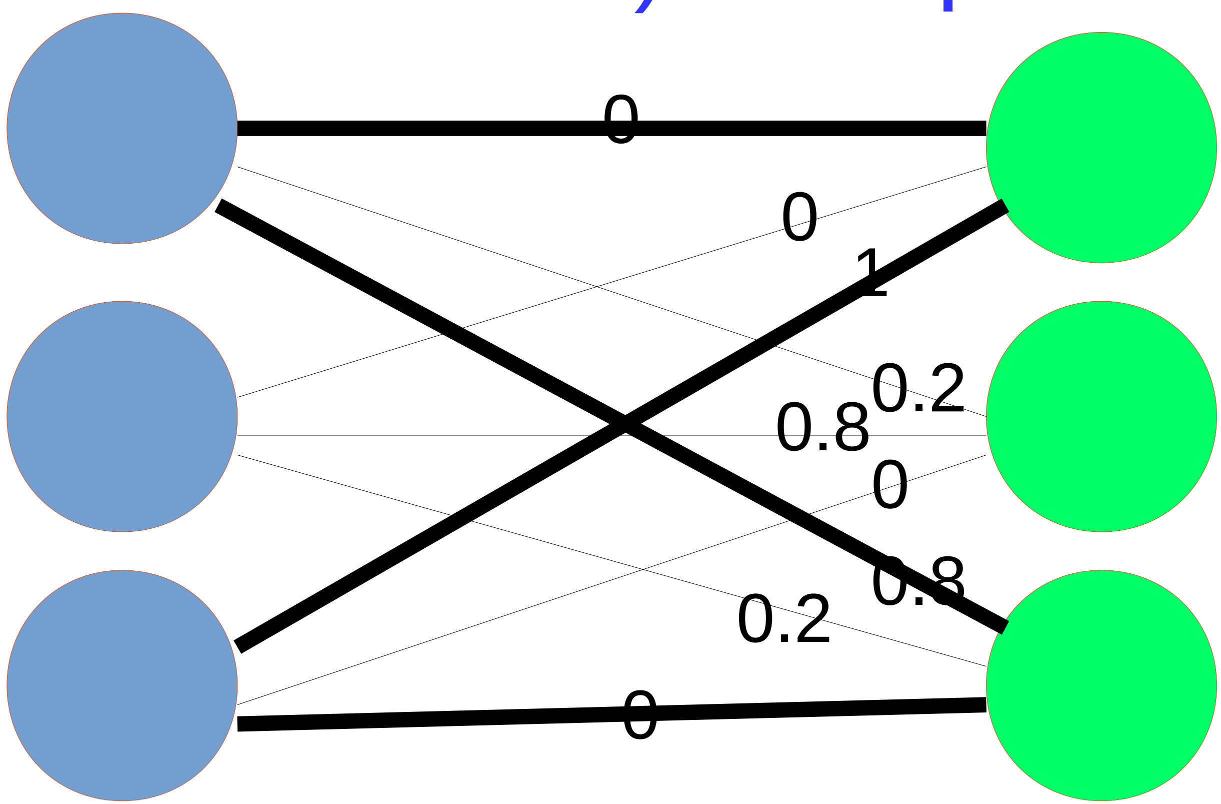
בגרף למטה מצוייר מעגל של משתנים "שבורים".

במעגל מספר זוגי של קשתות – כי הגרף דו-צדדי:



שידוך עם משקל מקסימלי - דוגמה

מכל קשת *איזוגית* במעגל – נוריד e.
לכל קשת *זוגית* במעגל – נוסיף e.
נבחר את e כך שמשתנה אחד לפחות יהפוך לשלם,
והשאר יישארו בין 0 ל-1 (בדוגמה למטה e=0.1):



שידוך עם משקל מקסימלי - השלמה

משפט: *אם* קיים פתרון אופטימלי לבעיה מהשקף הקודם, *אז* קיים פתרון אופטימלי שבו כל המשתנים הם שלמים.

הוכחה [המשך]: הורדנו e מקשתות איזוגיות והוספנו e לקשתות זוגיות. התוצאה:

- סכום המשתנים ליד כל צומת נשאר 1.
- הפתרון עדיין אופטימלי – אילו ערך הפתרון היה נמוך יותר, היה אפשר להוסיף מינוס e ולקבל פתרון עם ערך גבוה יותר, בסתירה לאופטימליות של x.

אם נמשיך כך, כל המשתנים השבורים יהפכו לשלמים!

שידוך עם משקל מקסימלי - חלופות

יש עוד אלגוריתמים לפתרון בעיית ההשמה.
לדוגמה: **האלגוריתם ההונגרי**.

https://en.wikipedia.org/wiki/Hungarian_algorithm

רוב המימושים שלו (ראו בתחתית העמוד) דורשים מאות שורות קוד.

לעומת זאת, פתרון בעיית האופטימיזציה ב- Mathematica דורש בערך 10 שורות קוד.

חלוקת שכר-דירה – קביעת המחירים

- מצאנו השמה ממקסמת-ערכים. צריך לקבוע מחירים כך שההשמה תהיה ללא קנאה, וסכום המחירים יהיה שווה לשכר-הדירה. **איך?**
- אפשר לפתור בעיית אופטימיזציה!

חלוקת שכר-דירה – קביעת המחירים

- קובעים את המחיר של חדר j ל-x_j.
- משווים את סכום המחירים למחיר הכולל של הדירה.
- מחלקים את העודף / גירעון שווה בשווה בין כולם.
- קיבלנו חלוקה ללא קנאה!

חלוקת שכר-דירה – מימושים והדגמות

- גליון אלקטרוני rent-division.ods
- אתר לקבוצות רכישה *http://tora.us.fm/fairness/home/*
- אתר לחלוקת ירושות *http://tora.us.fm/fairness/home/ab.html*
- *אלג. גל-מש-פרוקצ'יה-זיק: http://www.spliddit.org/apps/rent*

חלוקת שכר-דירה – בעיית הטרמפיסט

	סלון	מרתף
דייר א	**150**	0
דייר ב	140	**10**

משפט: במודל הקרדינלי, ייתכן ש**בכל** חלוקה ללא קנאה, אחד הדיירים ישלם מחיר שלילי (צריך *לשלם לו שיסכים לגור איתנו...*)

הוכחה: נניח שיש שני דיירים ושני חדרים, הדירה עולה 100 והערכים הם כמו בטבלה למעלה.

כל חלוקה ללא-קנאה ממקסמת סכום ערכים, לכן יש לתת את הסלון לדייר א ואת המרתף לדייר ב.

כדי ש-ב לא יקנא, המחיר של הסלון חייב להיות גבוה יותר ב-130 (לפחות). הסכום הוא 100 ולכן:

(price_martef + 130) + price_martef = 100

price_martef = -15

המחיר של המרתף חייב להיות שלילי! ***

חלוקת שכר-דירה – בעיית הטרמפיסט

אותו משפט נכון גם כשסכום הערכים של כל דייר שווה למחיר הכולל:

	חדר ד	חדר ג	חדר ב	חדר א
דייר א	0	30	34	**36**
דייר ב	0	33	**36**	31
דייר ג	0	**36**	30	34
דייר ד	**0**	35	33	32

$p_c \geq 35$ [d envies]

$p_b \geq 33$ [d envies]

$p_a \geq 33$ [c envies]

$p_d \leq -1/4$ [sum=100]

חלוקת שכר דירה – טרילמה

	עובד רק עם "דיירים עניים"	קנאה	דיירים שמקבלים כסף
אלגוריתם סו והמשולשים	כן	לא	לא
האלגוריתם ההונגרי ודומיו	לא	לא	כן
אלגוריתם הונגרי עם מחיר מינ. 0	לא	כן	לא