

# אלגוריתמים 2

## מנגנונים

אראל סגל-הלוי

# אלגוריתמים ומנגנונים

- מציאת מסלול מהיר ביותר ברשת מחשבים...

- ... כשכל מחשב מדווח על המהירות שלו.

- מציאת ערך גבוה ביותר...
- ... כשכל אדם מדווח על הערך שלו.

- מציאת שידוך מקסימלי בין צמתים בגרף...
- ... כשכל צד מייצג אדם הזקוק

# אמיתיות ויעילות

אלגוריתמי שיבוץ  
דיקטטורה סדרתית

# שיבוץ סטודנטים למעונו

הקלט: 1. כל סטודנט ממלא:

עדיפות ראשונה:

עדיפות שניה:

עדיפות שלישית:  
~~2. משרד המעונות מגדיר~~

תור בין סטודנטים לפי

קריטריוני זכאות.

האלגוריתם: 1. עוברים על  
הסטודנטים לפי התור.

2. נותנים לכל סטודנט את  
העדיפות הכי גבוהה הפנויה.

3. אם כל 3 העדיפויות תפוסות  
– נותנים לו חדר פנוי כלשהו.

בנין מסונת 103



דירה בת 2 חדרים, כוללת 2 חדרי שינה הכוללים מיטה 2, 2 ארונות, 2 שולחנות, 2 כסאות, שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיריים חשמל וארונות מטבח, סלון, דירה ממוזגת.

"אפשרות לדירה עם מרפסת או גיזה בתוספת תשלום."

בנין מסונת 102



סטודיו

דירה המיועדת לסטודנט אחד, מותנה באישור דיוקן הסטודנטים.

שלישה

דירה המיועדת ל-3 סטודנטים, כל סטודנט בחדר נפרד שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיריים חשמל וארונות מטבח, סלון, דירה ממוזגת.

רביעיה

דירה המיועדת ל-4 סטודנטים, 2 סטודנטים בחדר שינה שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיריים חשמל וארונות מטבח, סלון, דירה ממוזגת.

זוגי

דירה המיועדת ל-2 סטודנטים, כל סטודנט בחדר נפרד שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיריים חשמל וארונות מטבח, סלון, דירה ממוזגת.

קרוואן מסודר



יחידה לסטודנט יחיד, הכוללת מיטה, ארון בגדים, שולחן, כיסא, מראה שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיריים חשמל וארונות מטבח, סלון. אפשרות התקנת מזגן בתוספת תשלום. קרוואן זה ניתן לקבל אך ורק באישור של דיוקן הסטודנטים.

בנין מסונת 101



יחידה בת 2 חדרים, הכוללת: 2 חדרי שינה הכוללים 4 מיטות, 2 ארונות בגדים, 3 שולחנות, 4 כסאות, שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיריים חשמל וארונות מטבח, סלון, דירות ממוזגות.

מסנן לזוגות נשואים



יחידה כוללת חדר שינה + סלון לזוג נשוי, חדר שינה הכולל 2 מיטות, 1 ארון בגדים, שולחן, 2 כסאות, מראה, שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיריים חשמל וארונות מטבח, סלון. אפשרות התקנת מזגן בתוספת תשלום.

קרוואן זוגי



יחידה כוללת חדר שינה + סלון, הכוללת 2 מיטות, 1 ארון בגדים, 2 שולחנות, 2 כסאות, מראה שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיריים חשמל וארונות מטבח, סלון. אפשרות התקנת מזגן בתוספת תשלום.

קרוואן שלישייה



יחידה כוללת 3 חדרים, הכוללת: 3 חדרי שינה הכוללים 3 מיטות, 3 ארונות בגדים, 4 שולחנות, 4 כסאות, שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיריים חשמל וארונות מטבח, סלון. אפשרות התקנת מזגן בתוספת תשלום.

קרוואן רביעיה



יחידה כוללת 2 חדרים, הכוללת: 2 חדרי שינה הכוללים 4 מיטות, 2 ארונות בגדים, 3 שולחנות, 4 כסאות, שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיריים חשמל וארונות מטבח, סלון. אפשרות התקנת מזגן בתוספת תשלום.

# שיבוץ סטודנטים למעונות

הקלט: 1. כל סטודנט ממלא:

עדיפות ראשונה:

עדיפות שניה:

עדיפות שלישית:  
2. ~~משרד המעונות מגדיר~~

תור בין סטודנטים לפי  
קריטריוני זכאות.

האלגוריתם: 1. עוברים על  
הסטודנטים לפי התור.

2. נותנים לכל סטודנט את  
העדיפות הכי גבוהה הפנויה.

3. אם כל 3 העדיפויות תפוסות  
- נותנים לסטודנט חדר  
באקראי.

האם

המנגנון

הזה טוב?

ומה זה

בכלל מנגנון

"טוב"?

# תכונה א: אמיתיות

**הגדרה:** אלגוריתם נקרא **אמיתי** (truthful, strategyproof) אם כל משתתף משיג את התוצאה הטובה ביותר עבורו כאשר הוא מדווח את ההעדפות האמיתיות שלו, וזאת בלי תלות בפעולות של המשתתפים האחרים.

## שאלות:

- למה זה טוב?
- האם אלגוריתם "שיבוץ שלוש עדיפויות" הוא אמיתי?

# תכונה א: אמיתיות

**משפט:** אלגוריתם "שיבוץ שלוש עדיפויות"  
אינו אמיתי.

**הוכחה:** ניקח לדוגמה סטודנט ששלושת  
העדיפויות הראשונות שלו הן 101, 102,  
103. נניח לצורך הדוגמה שבכל בניין יש  
100 חדרים, והסטודנט נמצא במקום 301  
בתור.

אם הסטודנט ידע ש-300 הראשונים בתור  
רוצים את הבניינים האלה, כדאי לו לומר

שיבוץ כדאי להשיג את הסטודנטים

# תכונה א: אמיתיות

**שאלה:** האם קיים אלגוריתם שיבוע אמיתי?

**תשובה:** כן, זה קל:

• התעלם מהקלט ושבע את הסטודנטים  
באקראי.

מה הבעיה באלגוריתם זה?



# תכונה ב: יעילות פארטו

## הגדרות:

- תוצאה א נקראת **שיפור פארטו** (Pareto) של תוצאה ב, אם היא טובה יותר לחלק מהמשתתפים, וטובה לפחות באותה מידה לכולם.
- בעברית: "זה נהנה וזה לא חסר".
- תוצאה נקראת **יעילה פארטו** אם לא קיימת תוצאה אחרת שהיא שיפור פארטו שלה.
- **מנגנון הוא יעיל פארטו** אם תוצאתו יעילה פארטו.
- למה זה טוב?
- האם מנגנון "שיבוץ שלוש עדיפויות" יעיל פארטו?

# תכונה ב: יעילות פארטו

**משפט:** אלגוריתם "שיבוץ שלוש עדיפויות"  
אינו יעיל פארטו.

## הוכחה:

ניקח לדוגמה שני סטודנטים, א ו-ב, שכל  
שלושת העדיפויות שלהם נתפסו כשהגיע  
תורם.

כל אחד מהם משובץ באקראי. ייתכן ש-א  
ישובץ לעדיפות הרביעית של ב שהיא  
העדיפות האחרונה שלו, ולהיפך. תוצאה

זו תוצאה יעילה פארטו.

# תכונה ב: יעילות פארטו

**שאלה:** האם קיים אלגוריתם שיבוץ יעיל פארטו?

**תשובה:** כן! דומה לקודם בהבדל אחד:  
כל סטודנט מסמן את **כל** רשימת העדיפויות שלו, ולא רק שלוש עדיפויות גבוהות ביותר.

האלגוריתם המתקבל נקרא "דיקטטורה סדרתית" (serial dictatorship).

על מנתם "דוקטורט" לדברותם "לצ"ב" ונעיל

# תכונה א: אמיתיות

**משפט:** אלגוריתם "דיקטטורה סדרתית" אמיתי.

**הוכחה:** נניח שמקומך בתור הוא  $k$ . עד שמגיע תורך,  $k-1$  חדרים כבר תפוסים, וקבוצת החדרים הנשארים לא תלויה בדיווח שלך. המנגנון בוחר עבורך, מתוך החדרים הנשארים, את החדר הטוב ביותר עבורך - בהתאם לרשימה שדיווחת. לכן, התוצאה הטובה ביותר עבורך תתקבל ע"י דיווח הרשימה

\*\*\*

# תכונה ב: יעילות פארטו

**משפט:** אם כל יחסי ההעדפה הם חזקים (אין אדישות), אז אלגוריתם "דיקטורה סדרתית" יעיל פארטו.

**הוכחה:** כיוון שהאלגוריתם אמיתי, ניתן להניח שכל הסטודנטים מדווחים את העדיפויות האמיתיות.

בהינתן קלט מסויים, נגדיר:  
• שיבוץ א – השיבוץ של המנגנון.

• שיבוץ ב – שיבוץ אחר כלשהו.

# תכונה ב: יעילות פארטו

## [המשך הוכחה]

נניח בשלילה ששיבוץ ב הוא שיפור פארטו של א.

נניח שהסטודנט הראשון הנהנה מהשיפור הוא הסטודנט שמקומו בתור  $k$ .

• בשיבוץ א,  $k$  מקבל את החדר הטוב ביותר

מהחדרים שלא נלקחו על-ידי סטודנטים  $j > k$ .

• בשיבוץ ב מצבו טוב יותר, ולכן הוא בהכרח מקבל

חדר שבשיבוץ א ניתן לסטודנט  $j > k$ .

• בשיבוץ ב,  $j$  מקבל חדר אחר. החדר האחר גרוע

יותר או טוב יותר מזה שקיבל בשיבוץ א. אם הוא

גרוע יותר – זה לא שיפור פארטו. אם הוא טור

# המסר

שינוי קטן באלגוריתם יוצר שינוי  
גדול  
באיכות-החיים של המשתתפים.

**שאלה:** האם מנגנון השיבוץ  
למעונות באריאל הוא אמיתי? יעיל  
פארטו?