

החלפות ומעגלים

היום נדבר על החלפות. נניח שכמה עובדים משובצים לתורניות, וחלק מהם היו מעדיפים להתחלף עם אחרים. או, כמה סטודנטים משובצים לחדרים במעונות והיו מעוניינים להתחלף. אנחנו רוצים ליצור שיבוץ חדש שיהיה יעיל פארטו. בניגוד לבעיות של חלוקה הוגנת, כאן - בניגוד לאנשים יש זכויות קודמות עוד לפני הפעלת האלגוריתם. כדי שאנשים יסכימו להשתתף באלגוריתם שלנו, אנחנו חייבים להבטיח להם שלא ייגרם להם נזק. אז בנוסף לתכונות של יעילות-פארטו ושל אמיתיות, אנחנו דורשים תכונה שלישית.

הגדרה: אלגוריתם מקיים את התכונה **רציונליות ליחידים** (individual rationality) אם כל משתתף מעדיף את תוצאת האלגוריתם על-פני המצב לפני המנגנון (או לפחות אדיש בין התוצאות).

האם קיים אלגוריתם המקיים תכונה זו? התשובה היא כן.

אלגוריתם מעגלי המסחר - Top Trading Cycles

האלגוריתם פותח ע"י אותם חוקרים שפיתחו את המנגנון לשידוך יציב - Gale ו Shapley, עם חוקר שלישי בשם Scarf. הקלט לאלגוריתם הוא שיבוץ של **אנשים לבתיים** - לכל איש יש בית אחד.

האלגוריתם מחזיק גרף מכוון שבו:

- הצמתים הם האנשים והבתים;
- יש קשת מכל אדם אל הבית שהוא הכי רוצה, ומכל בית אל האדם שהוא שייך אליו.

מעדכנים את הגרף באופן הבא:

- א. מוצאים מעגל מכוון בגרף (למשל ע"י אלגוריתם DFS שלמדתם בקורס קודם).
- ב. מבצעים את ההחלפה במעגל: כל אדם מקבל את הבית שהוא מצביע עליו.
- ג. מוחקים מהגרף את הצמתים של האנשים והבתים שהשתתפו בהחלפה.
- ד. לכל איש שנשאר בגרף, מעדכנים את הקשת שלו כך שתצביע לבית שהוא הכי רוצה מאלה שנשארו.
- ה. חוזרים על סעיפים א-ד עד שהגרף ריק.

משפט: אלגוריתם מעגלי המסחר מסתיים.

הוכחה: מספיק להוכיח שבשלב א תמיד קיים מעגל. הסיבה היא שמכל צומת יוצאת קשת בדיוק. כיוון שהגרף סופי, אם נתחיל מצומת כלשהו ונלך בכיוון החצים, מתישהו בהכרח נגיע לצומת שכבר היינו בו - זה מעגל. ***

מה סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם? - מציאת מעגל דורשת זמן $O(n)$. אחרי כל מציאת מעגל, מוחקים לפחות צומת אחד, כך שמספר השלבים הוא לכל היותר n . לכן זמן הריצה הכולל הוא $O(n^2)$.

משפט: אלגוריתם מעגלי המסחר הוא רציונלי ליחידים.

הוכחה: האלגוריתם משבץ כל משתתף בבית שהוא הצביע עליו בשלב כלשהו. כל משתתף מצביע תמיד על הבית של עצמו או על בית טוב יותר. ***

משפט: אלגוריתם מעגלי המסחר הוא אמיתי.

הוכחה: האבחנה החשובה כאן היא, שהקשת היוצאת מאדם מסוים משפיעה על הגרף רק באותו סיבוב שהוא סוחר, ואז הוא יוצא מהמשחק. למשל, אם יוסי סוחר במעגל 3 כשהוא אמיתי ובמעגל 5 כשהוא מתחכם, אז המסחר עד למעגל 3 מתנהל בדיוק באותו אופן בשני המצבים - העובדה שיוסי שינה את הקשת שלו, לא גרמה שום שינוי בקשתות אחרות ובמעגלים אחרים. נניח שיוסי סוחר במעגל k כשהוא אמיתי ובמעגל j כשהוא מתחכם. נשווה בין מצבים אלו בשני מקרים.

- מקרה א: $j \geq k$. במקרה זה, המסחר עד למעגל $k-1$ זהה בשני המצבים. לכן קבוצת הבתים שנשארו זמינים אחרי מעגל $k-1$ היא זהה בשני המצבים. וכשיוסי אמיתי, הוא מקבל את הבית הטוב ביותר בקבוצה זו, כך שההתחכמות לא יכולה להועיל לו.
- מקרה ב: $j < k$. במקרה זה, המסחר עד למעגל $j-1$ זהה בשני המצבים. בסיבוב הבא, כל הקשתות זהות בשני המצבים, פרט לקשת היוצאת מיוסי. כשיוסי מתחכם, הקשת היוצאת ממנו סוגרת מעגל (מעגל j); נניח שהוא סוגר מעגל עם בית כלשהו x . כשיוסי אמיתי, הוא נמצא בסופה של שרשרת המתחילה בבית x . כל עוד לא נסגר מעגל, כל השרשרת הזאת נשארת בגרף. בפרט, בית x עדיין נמצא בגרף כאשר מעגל k נסגר. לכן הבית שמקבל יוסי כשהוא תמים טוב לפחות כמו x .

אלגוריתם מעגלי המסחר הוא גם יעיל פארטו (שיעורי בית). אבל הוא מקיים גם תכונה חזקה יותר הנקראת יציבות. בהינתן שיבוץ מסויים של אנשים לבתים, נגדיר **קבוצה מערערת** (blocking coalition) כקבוצה היכולה לפרוש מהמערכת ולבצע מסחר פנימי בתוך הקבוצה, והתוצאה שתתקבל תהיה טובה יותר לפחות לאחד מחברי הקבוצה, ולא פחות טובה לכל שאר חברי הקבוצה. אם אין קבוצה מערערת, השיבוץ נקרא **יציב**. קבוצת השיבוצים היציבים נקראת **הליבה** (core) של משחק השיבוצים. ניתן להראות שהליבה כוללת בדיוק שיבוץ אחד, והוא השיבוץ המוחזר ע"י אלגוריתם מעגלי המסחר. קל לראות ששיבוץ יציב הוא יעיל פארטו ומקיים השתתפות מרצון.

משפט א: אלגוריתם מעגל המסחר מחזיר תמיד שיבוץ יציב.

משפט ב: יש רק שיבוץ יציב אחד - והוא זה שמחזיר אלגוריתם מעגלי המסחר. הוכחה: ראו במצגת.

אלגוריתם מעגלי המסחר יכול לשמש תחליף למסחר בכסף, במצבים שבהם לא רוצים מסיבה כלשהי להשתמש בכסף. לדוגמה, אפשר להשתמש בו כדי לבנות מערכת להחלפת ספרים משומשים. כל אחד מציע ספר ובוחר את הספר שהוא הכי רוצה מבין הספרים האחרים, והמערכת מבצעת החלפות במעגל. מעגלי-מסחר יכולים לשמש גם כדי ליישם את מצוות היוכל בימינו. ראו מאמרי "אלגוריתם היוכל - תהליך הדרגתי לחלוקת קרקעות", בד"ד 28, <http://www.tora.us.fm/tryg/yovl/bdd/yovel-bdd-28.pdf>.

מקורות

- Parkes and Seuken, "Economics and Computation" (2018), chapter 12

סיכום: אראל סגל-הלוי.