

## מכרזים

מכרזים היו קיימים עוד מימי האימפריה הבבלית. המכרזים המתועדים הראשונים היו מכרזים למכירת נשים - הבבלים נהגו למכור את בנותיהם במכרז לחתן המרבה במחיר. בתקופת האימפריה הרומית נהגו למכור שלל-מלחמה במכירה פומבית. פעם אחת, האימפריה הרומית כולה הועמדה למכירה פומבית. זה קרה בשנת 193 לספה"נ, אחרי שהקיסר נרצח. המשמר הפריטוריאני (שומרי הראש של הקיסר) הכריזו שהם יתנו את הכתר למרבה במחיר. הזוכה החזיק בכתר כ-9 שבועות עד שנרצח גם הוא...

בימי הביניים מכרזים היו קצת פחות נפוצים. הם חזרו לאופנה בסביבות המאה ה-17, אז התחילו באנגליה למכור יצירות-אומנות במכרזים פומביים.

היום, החשיבות של מכרזים עולה במהירות. ממשלות משתמשות במכרזים כדי למכור משאבים ציבוריים, כגון קרקעות או תדרי-שידור או זכויות קידוח במים הכלכליים. חברת אי-ביי, שהוקמה בשנת 1995, איפשרה לכל אחד לבצע מכרז על חפצים שיש לו בבית. חברות המפעילות מנועי-חיפוש מוכרות מקומות על הדף למפרסמים. בכל רגע מתבצעים מיליוני מכרזים כאלו בו-זמנית באופן אוטומטי בכל רחבי העולם.

## סוגי מכרזים

ישנם כמה סוגים נפוצים של מכרזים:

- מכרז אנגלי - מתחילים במחיר נמוך. כל אחד מהמשתתפים יכול להעלות את המחיר. מי שהמחיר שלו נשאר אחרון - זוכה.
- מכרז יפני - מתחילים במחיר נמוך. הכרוז מעלה את המחיר בצעדים קבועים (נניח, בצעדים של 10 ין). כל אחד יכול לפרוש בכל עת. האחרון שנשאר אחרי שכולם פרשו - זוכה.
- מכרז הולנדי - מתחילים במחיר גבוה. הכרוז מוריד את המחיר בצעדים קבועים. הראשון שמרים את היד - זוכה.
- מכרז מעטפות חתומות, מחיר ראשון - כל משתתף כותב מספר במעטפה ומגיש לכרוז. הכרוז פותח את כל המעטפות. מי שכתב את המחיר הגבוה ביותר זוכה, ומשלם את המחיר שהכריז.
- מכרז מעטפות חתומות, מחיר שני - כנ"ל, רק שהזוכה לא משלם את המחיר שהכריז - אלא את המחיר הבא בתור.

מה ההבדלים בין כל סוגי המכרזים האלה? באיזה מכרז עדיף להשתמש ומדוע?

כדי לענות לשאלה אנחנו צריכים מודל המתאר את פעולות השחקנים.

אנחנו מניחים שיש חפץ אחד, וכל שחקן  $j$  מייחס לו ערך אחר -  $v[j]$ . מדוע הערכים שונים? כמה סיבות:

- טעם אישי (למשל באומנות)
- כישרון בניה (למשל בקרקעות)
- יכולת הפקת רווח (למשל בתדירים)
- הערכת סיכויי רווח (למשל בשדה גז או נפט)
- תרומה למכירות (למשל במכרז פרסום).
- אם שחקן זוכה בחפץ ומשלם מחיר  $p$ , אז התועלת שלו היא ההפרש  $v[j]-p$ .
- שימו לב - אנחנו מבחינים בין ערך לבין תועלת:
- ערך = ברוטו = כמה החפץ שווה עבורי.
- תועלת = נטו = כמה ערך נשאר לי אם קיבלתי את החפץ ושילמתי את המחיר.

## מכרז אמיתי

בתור התחלה נתמקד במכרז מעטפות חתומות - מכרז שבו כל שחקן עושה רק פעולה אחת והיא לרשום מספר במעטפה.

**הגדרה:** מכרז נקרא **אמיתי** (truthful) אם כל שחקן  $j$  משיג תועלת גדולה ביותר כאשר הוא רושם  $v[j]$ , לכל צירוף פעולות של השחקנים האחרים.

למה זה טוב? - כי זה חוסך לשחקנים את הצורך "לרגל" אחרי שחקנים אחרים. כל שחקן צריך רק לדעת מה הערך שלו - הוא לא צריך לנסות לברר מה חושבים האחרים.

**משפט:** מכרז מחיר ראשון אינו אמיתי.

**הוכחה:** במכרז מחיר ראשון, שחקן הרושם את הערך האמיתי שלו מקבל תועלת 0 - או שהוא לא זוכה בכלל, או שהוא זוכה אבל המחיר שווה לערך ולכן ההפרש הוא 0. לעומת זאת, שחקן הרושם ערך נמוך יותר, עשוי לקבל 0 (אם הוא לא זוכה), אבל עשוי גם לקבל ערך גבוה יותר (אם הוא זוכה). \*\*\*

כיוון שמכרז מחיר ראשון אינו אמיתי, לשחקנים יש אינטרס לרגל אחרי שחקנים אחרים ולשנות את ההכרזות שלהם בהתאם. זה יצר בעיה רצינית במכרזי הפירסום הראשונים. החברה הראשונה שהתפרנסה ממכרזי פירסום על תוצאות חיפוש היתה Overture (עוד לפני גוגל). הם השתמשו במכרז מחיר ראשון. הם שמו לב שיש עומס כבד על השרתים, וכשבדקו מדוע, ראו שהרבה מפרסמים נכנסים שוב ושוב לחשבון שלהם, מסתכלים על הכרזות של מפרסמים אחרים, ומעדכנים את ההכרזה בהתאם! האם קיים מכרז אמיתי? - כן, ברור: מכרז שבו אף אחד לא זוכה אף פעם הוא אמיתי...

אבל, האם קיים מכרז אמיתי שהוא גם יעיל-פארטו?

התשובה היא כן! הוא נקרא מכרז ויקרי - על-שם הממציא (Vickrey), חתן פרס נובל בכלכלה. הוא נקרא גם "מכרז מחיר שני": השחקן שהכריז את הערך הגבוה ביותר זוכה, והוא משלם את המחיר השני בגובהו.

**משפט:** מכרז מחיר שני הוא אמיתי.

**הוכחה:** נניח שהערך שלי הוא  $v$  והערך המקסימלי של האחרים הוא  $x$ . התועלת הגבוהה ביותר שאני יכול לקוות להשיג במכרז ויקרי היא  $v-x$  (אם  $v > x$ ) או 0 (אם  $v < x$ ). או בקיצור:  $\max(0, v-x)$ .

כשאני מכריז  $v$ , התועלת שלי היא בדיוק  $\max(0, v-x)$ . התועלת שלי גדולה ביותר כשאני מכריז את הערך האמיתי - ולכן המכרז אמיתי. \*\*\*

עכשיו נוכיח שמכרז מחיר שני הוא יעיל-פארטו. שימו לב - יעילות פארטו כאן היא ביחס לקבוצת כל המשתתפים - גם הקונים וגם מנהל-המכרז (אילו הקבוצה לא היתה כוללת את מנהל המכרז, היה שיפור-פארטו מאד פשוט - לא לגבות כסף מהזוכה).

**משפט:** תוצאה של מכרז היא יעילה-פארטו אם-ורק-אם החפץ נמסר לקונה בעל הערך הגבוה ביותר.

**הוכחה:** נוכיח על-דרך השלילה.

כיוון אחד: נניח שתוצאה  $a$  אינה יעילה-פארטו. אז קיימת תוצאה  $b$  שהיא שיפור-פארטו שלה. התשלום שמקבל מנהל המכרז בתוצאה  $b$  חייב להיות לפחות כמו בתוצאה  $a$  (אחרת מנהל המכרז מפסיד). לכן סכום התשלומים שמשלמים הקונים בתוצאה  $b$  הוא לפחות כמו בתוצאה  $a$ . כיוון שזה שיפור פארטו -

סכום הערכים של הקונים בתוצאה ב חייב להיות גדול יותר מבתוצאה א. לכן, בתוצאה א סכום הערכים של הקונים אינו מקסימלי. לכן, בתוצאה א החפץ אינו נמסר לקונה עם הערך הגבוה ביותר.

כיוון שני: נניח שבתוצאה א, החפץ נמסר לקונה א, שהערך שלו (x) אינו הגבוה ביותר. נוכיח שקיים שיפור-פארטו. נניח שהקונה עם הערך הגבוה ביותר הוא קונה ב, והערך שלו הוא y. נניח שבתוצאה א, קונה א משלם p וקונה ב משלם q. נבנה את תוצאה ב באופן הבא:

- החפץ נמסר לקונה ב;
- קונה א משלם p-x;
- קונה ב משלם q+x;
- כל שאר הקונים משלמים כמו בתוצאה א.

תוצאה ב היא שיפור פארטו של תוצאה א: התועלת של קונה ב גדלה (הוא הרויח חפץ ששווה עבורו y, והתשלום שלו גדל רק ב-x שהוא קטן יותר מ-y). התועלת של קונה א לא השתנתה (הוא הפסיד חפץ ששווה עבורו x, אבל גם התשלום שלו קטן יותר ב-x); התועלת של כל שאר הקונים לא השתנתה; וגם התועלת של מנהל המכרז לא השתנתה (סכום התשלומים נשאר זהה).

**הערה:** אפשר באותו אופן להוכיח משפט כללי יותר: בכלכלה עם כסף, כשלכל השחקנים יש תועלות קוואזי-ליניאריות, תוצאה היא יעילה-פארטו אם-ורק-אם היא ממקסמת את סכום הערכים של הקונים.

## מכרז פירסום

בעקבות הניסיון הכושל של חברת Overture, החליטו המהנדסים של גוגל, שמכרז-הפירסום בתוצאות החיפוש שלהם יסתמך על מכרז מחיר שני. זה עבד טוב מאד כל עוד היתה פרסומת אחת בכל דף. אבל אז החליטו להרחיב את המכרזים ולמכור כמה פרסומות בכל דף. זה דומה למכרז שבו כמה חפצים נמכרים. יותר מזה, החפצים אינם זהים: פרסומת בראש הדף שווה יותר מפרסומת בתחתית הדף. לכל פרסומת ישנו שיעור הקלקה (click-through rate, CTR), המתאר כמה אחוזים מבין האנשים הצופים בדף מקליקים על הפרסומת; ככל שהפרסומת גבוהה יותר, שיעור ההקלקה עליה גבוה יותר. איך אפשר להכליל את מכרז-מחיר-שני למצב זה?

קודם-כל נגדיר במדויק את ההנחות.

יש כמה משבצות-פירסום. לכל משבצת k יש שיעור-הקלקה  $r_k$ . נניח בה"כ שהמשבצות מסודרות כך ש:

$$r_1 > r_2 > \dots$$

לכל מפרסם j יש ערך-הקלקה  $v_j$ , המציין כמה המפרסם חושב שהוא ירויח, בממוצע, מהקלקה על המודעה שלו. איך מחשבים את ה- $v_j$  הזה? זה אחד התפקידים החשובים של מחלקת-השיווק בחברה. יש להם סטטיסטיקות מפורטות, כמה אנשים בממוצע נכנסים לכל מודעה, כמה מתוכם קונים מוצר, וכמה רווח יש לחברה מקניית המוצר, ולפי זה הם יכולים לחשב את תוחלת הערך של הקלקה על המודעה. מכאן: כל מפרסם j מעריך את משבצת k כ:

$$v_j * r_k$$

המטרה שלנו למצוא מכרז שהוא גם **יעיל פארטו** וגם **אמיתי** (- מעודד כל מפרסם לגלות את ה- $v_j$  האמיתי שלו).

נתחיל מהתכונה הראשונה. עבור כל מפרסם j, נסמן ב  $k(j)$  את המודעה שהוא מקבל.

**משפט:** הקצאת מקומות למפרסמים היא יעילה-פארטו, אם-ורק-אם היא ממקסמת את סכום הערכים:

$$v_1 * r_{k(1)} + v_2 * r_{k(2)} + v_3 * r_{k(3)} + \dots$$

**הוכחה:** אם ההקצאה אינה יעילה פארטו, אז קיים לה שיפור פארטו, ובו סכום הערכים גבוה יותר. אם ההקצאה לא ממקסמת את סכום הערכים, אז ניתן לעבור להקצאה שבה סכום הערכים גבוה יותר ולהעביר כספים בין המשתתפים, ומתקבל שיפור פארטו (כמו בהוכחת יעילות פארטו לגבי מכרז חפץ יחיד). \*\*\*

איך מוצאים הקצאה הממקסמת את סכום הערכים? אפשר להשתמש באלגוריתם חמדני:

- סדר את המפרסמים בסדר יורד של  $v_j$ :

- $v_1 > v_2 > \dots$

- תן למפרסם  $j$  את המקום ה- $j$ .

**משפט:** האלגוריתם החמדני ממקסם סכום ערכים.

**הוכחה:** נניח בשלילה שיש סדר שונה,  $k$ , הממקסם את סכום הערכים. בסדר זה יש מפרסמים  $j, i$  שעבורם:

$$v_j < v_i \quad r_{k(j)} > r_{k(i)}$$

נחליף את מפרסמים  $j$  ו- $i$ . אחרי ההחלפה,  $i$  נמצא במקום  $k(j)$  ו- $j$  נמצא במקום  $k(i)$ . השינוי בסכום הוא:

$$v_i * (r_{k(j)} - r_{k(i)}) - v_j * (r_{k(j)} - r_{k(i)}) = (v_i - v_j) * (r_{k(j)} - r_{k(i)}) > 0$$

מכאן שהסדר האחר אינו ממקסם את סכום הערכים – סתירה להנחה. \*\*\*

עכשיו אנחנו יודעים איך לחלק את שטחי-הפירסום בין המפרסמים. נשאר לנו רק לקבוע את התשלומים – כמה ישלם כל מפרסם על כל הקלקה. כמו במכרז על חפץ יחיד, גם כאן התשלומים הם שיקבעו אם המכרז יהיה אמיתי או לא. איך נכליל את כלל-התשלומים של ויקרי, מחפץ אחד לכמה חפצים שונים?

הפתרון הראשון שהשתמשו בו מהנדסי גוגל נקרא מכרז מחיר שני מוכלל – Generalized Second Price – Auction – GSP. המפרסם שההכרזה שלו היא ה- $j$  בגובהה, זוכה במקום  $j$ , ומשלם את ההכרזה של המפרסם ה- $j+1$  (ועוד סנט אחד). כשיש רק משבצת פירסום אחת, זה בדיוק כמו מכרז ויקרי, ולכן השם "מכרז מחיר שני מוכלל". אבל האם המכרז אכן אמיתי כשיש שני מקומות או יותר?

**משפט:** כשיש שני מקומות או יותר, מכרז מחיר שני מוכלל אינו אמיתי.

**הוכחה:** מספיק להביא דוגמה נגדית אחת. נניח שיש שני מקומות ושלושה מפרסמים:

$$r_1 = 0.1, \quad r_2 = 0.05,$$

$$v_1 = 10, \quad v_2 = 9, \quad v_3 = 6.$$

אם מפרסם 1 אמיתי ומכריז 10, הוא זוכה במקום ראשון, מרויח 10 לקליק ומשלם 9 לקליק, והתועלת שלו היא:

$$0.1 * (10 - 9) = 0.1$$

אם מפרסם 1 מתחכם ומכריז 8, הוא זוכה במקום שני, מרויח 10 לקליק ומשלם 6 לקליק, והתועלת שלו:

$$0.05 * (10 - 6) = 0.2$$

באופן כללי, במכרז GSP עדיף למפרסמים (לפעמים) להוריד את המחיר ולזכות במקום פחות טוב ויותר זול! מה אפשר לעשות? מה היא ההכללה האמיתית של מכרז ויקרי למצב של יותר מחפץ אחד?

## מכרז ויקרי-קלארק-גרובס (VCG)

המכרז שנתאר עכשיו הוא מכרז אמיתי כללי ביותר. הוא מתאים לא רק לפרסומות, אלא לכל בעיה של בחירה בין כמה תוצאות אפשריות, כאשר לכל משתתף ישנן העדפות "כספיות" על התוצאות האפשריות, וההעדפות הן קוואזי-ליניאריות בכסף -- התועלת של שחקן היא ערך התוצאה פחות התשלום. המכרז נקרא ויקרי-קלארק-גרובס, על-שם ממציאיו (Vickrey, Clarke, Groves). המכרז עובד באופן הבא.

- בחר את התוצאה עם סכום-הערכים הגבוה ביותר.
- עבור כל שחקן:
  - חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים.
  - חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים אילו השחקן הנוכחי לא היה משתתף.
- גבה מהשחקן את ההפרש בין שני הסכומים.

להדגמה, ראו את "בעיית בחירת המסעדה" בגליון האלקטרוני המצורף.

כשיש חפץ אחד, מכרז VCG זהה למכרז ויקרי:

- "בחר את התוצאה עם סכום-הערכים הגבוה ביותר" - במכרז עם חפץ אחד, המשמעות היא פשוט לתת את החפץ לשחקן עם הערך הגבוה ביותר (נסמן ערך זה ב  $v_1$ ).
- עבור כל שחקן:
  - "חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים כשהשחקן הנוכחי משתתף" - לזוכה, הסכום של האחרים הוא 0; לכל השאר, הסכום של האחרים הוא  $v_1$ .
  - "חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים אילו השחקן הנוכחי לא היה משתתף" - לזוכה, הסכום של האחרים היה  $v_2$  (המחיר השני); לכל השאר, הסכום של האחרים היה עדיין  $v_1$ .
- "גבה מהשחקן את ההפרש בין הסכומים" - לזוכה, ההפרש הזה הוא  $v_2$ ; לכל השאר, ההפרש הוא 0.

**משפט:** מנגנון ויקרי-קלארק-גרובס הוא אמיתי.

**הוכחה:** נזכיר את המושגים שנשתמש בהם בהוכחה: ערך = ברוטו (לא כולל המחיר); תועלת = נטו (ערך פחות מחיר). התועלת של כל שחקן היא:

1. הערך של השחקן עצמו;
  2. פחות הסכום של שאר השחקנים בלעדיו;
  3. ועוד הסכום של שאר השחקנים כשהוא פה.
- נסכם את שורות 1 ו-3, ונקבל שהתועלת של כל שחקן היא:
- סכום הערכים של כל השחקנים (שורה 1,3);
  - פחות מספר שאינו תלוי כלל בהצהרה של השחקן (שורה 2).

השחקן שואף להשיג תועלת גדולה ביותר. על שורה 2 הוא לא יכול להשפיע, לכן יש לו אינטרס למקסם את הסכום של שורות 1+3. אבל, זה בדיוק מה שעושה אלגוריתם VCG כשהשחקן אמיתי - ממקסם את סכום הערכים של כולם! לכן, אם השחקן אומר את האמת, האלגוריתם בוחר את האפשרות הטובה ביותר עבורו. \*\*\*

## אלגוריתם VCG בפירסום

נדגים את פעולת אלגוריתם VCG במכרזי פירסום. נחזור לדוגמה הקודמת שבה יש שני מקומות ושלושה מפרסמים, עם הנתונים הבאים:

$$r_1 = 0.1, \quad r_2 = 0.05, \\ v_1 = 10, \quad v_2 = 9, \quad v_3 = 6.$$

המחיר למפרסם 1:

$$9 \cdot 0.1 + 6 \cdot 0.05 - \text{סכום האחרים בלעדיו} \\ - 9 \cdot 0.05 - \text{סכום האחרים כשהוא נמצא} \\ = 7.5 \cdot 0.1$$

עכשיו הוא משלם 7.5

המחיר למפרסם 2:

$$10 \cdot 0.1 + 6 \cdot 0.05 - \text{סכום האחרים בלעדיו} \\ - 10 \cdot 0.1 - \text{סכום האחרים כשהוא נמצא} \\ = 6 \cdot 0.05 \quad (\text{כמו קודם})$$

## VCG לעומת GSP

VCG הוא אמיתי, אבל התשלומים בו נמוכים יותר מב-GSP.

התשלום כולל של מפרסם  $i$  במכרז VCG הוא:

$$v_{i+1} \cdot (r_i - r_{i+1}) + v_{i+2} \cdot (r_{i+1} - r_{i+2}) + \dots$$

התשלום עבור קליק של מפרסם  $i$  במכרז VCG הוא:

$$[v_{i+1} \cdot (r_i - r_{i+1}) + v_{i+2} \cdot (r_{i+1} - r_{i+2}) + \dots] / r_i$$

לעומת זאת, התשלום עבור קליק של מפרסם  $i$  במכרז GSP הוא:

$$v_{i+1}$$

אפשר לראות שזה גדול יותר.

לכן, מעבר ממכרז GSP למכרז VCG עלול לגרום לירידה זמנית ברווחים.

למה ירידה זמנית? - כי במשך הזמן, צפוי שהמפרסמים יתרגלו לכך שהמכרז אמיתי ולכן הם לא צריכים להוריד את ההכרזות שלהם, ואז הרווחים יעלו בחזרה.

סיבה נוספת שבהתחלה לא רצו לעבור ל-VCG היתה שהוא מסובך למימוש, ופחות ברור למפרסמים. אבל, בשנים האחרונות חזרו להשתמש בו. הסיבה היא, שמכרזי-פירסום בימינו ממילא מאד מסובכים. למשל בפייסבוק, לא רק המיקום משתנה אלא גם הגודל והצורה. משלמים לא רק על קליק אלא גם על לייק וכד'. לכן הכלל הפשוט של GSP לא עובד. לעומת זאת, מכרז VCG הוא כללי ויכול להתמודד גם עם מצבים מורכבים.

## מקורות

- ויקיפדיה האנגלית, ערך Auction

- הקורס של טים, שיעורים 13-16

## סרטים

- מכרז אנגלי על כד מתקופת שושלת מינג: <https://youtu.be/ZyATAodMDrQ>
- מכרז אנגלי על אוסף המכוניות של סיינפלד: <https://youtu.be/nG1mkKgduiM>
- מכרז הרווקים של קריימר: <https://youtu.be/6WlwHRKE9xE>
- מכרז מוטות-הגולף של איליין ("קדחת מכרזים"): <https://youtu.be/akwSGr-9Ldc>
- מכרז על צאן ובקר בסגנון ראפ: <https://youtu.be/FsYFwvV-ReQ>
- הסרט הבא מראה כמה זה חשוב לשים לב לתמריצים - גם כשמתכננים תחרויות ספורט. באלופות העולם בבדמינטון לנשים, היה משחק בין דרום-קוריאה לסין, ונוצר מצב שבו לשתי הקבוצות היה תמריץ להפסיד - כדי לקבל מתחרה קלה יותר בסיבוב הבא. הן אכן השתדלו להפסיד - וזה מאד עיצבן את הצופים ומארגני התחרות!  
<https://youtu.be/7mq1ioqiWEo>

## מאמרים להרחבה ולמטלת רשות

- [K Leyton-Brown, P Milgrom \(2017\): "Economics and computer science of a radio spectrum reallocation"](#)  
איך שילוב בין כלכלה לבין מדעי-המחשב הכניס לממשלת ארה"ב מיליארדי דולרים במכרז למכירת תדרים.
- S. Li (2017): "[Obviously strategy-proof mechanisms](#)"
- Ausubel and Milgrom (2006): "[The lovely but lonely Vickrey auction](#)"
- Varian and Harris (2014): "[The VCG auction in theory and practice](#)"  
עדות מהכלכלן הראשי של גוגל על שימוש במכרז וק"ג
- H Nurmi, A Salomaa (1993): "[Cryptographic protocols for Vickrey auctions](#)"
- A Ghosh, A Roth - (2015): "[Selling privacy at auction](#)"

סיכום: אראל סגל-הלוי.