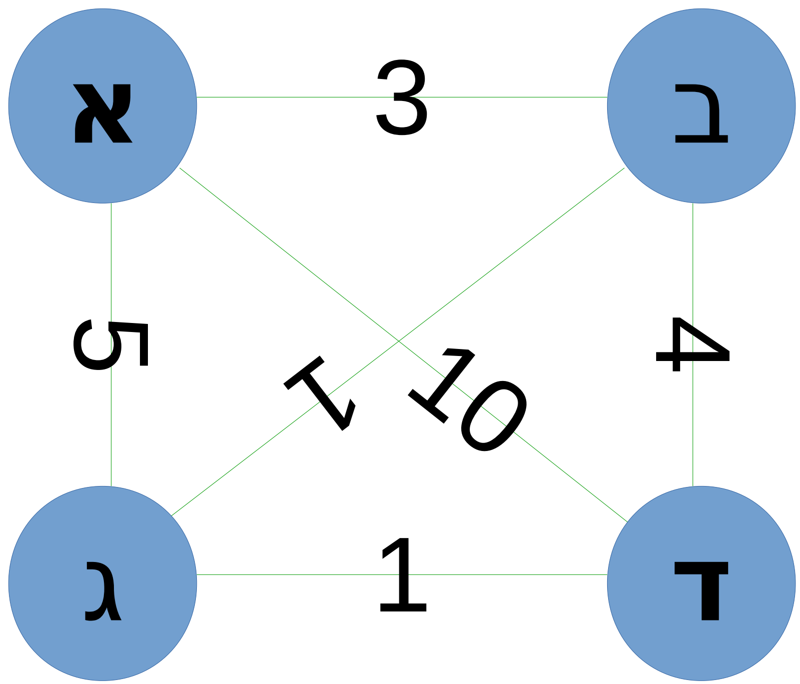
מכרזים אלגוריתמיים

אראל סגל-הלוי

מקורות:
הקורס של טים, הרצאה 3 והלאה:
http://theory.stanford.edu/~tim/f13/f13.html

מציאת מסלול זול ביותר

נתונה רשת. לכל קשת יש עלות-מעבר. צריך להעביר חבילה בין שתי נקודות ברשת *(א -> ד)*, במסלול הזול ביותר.

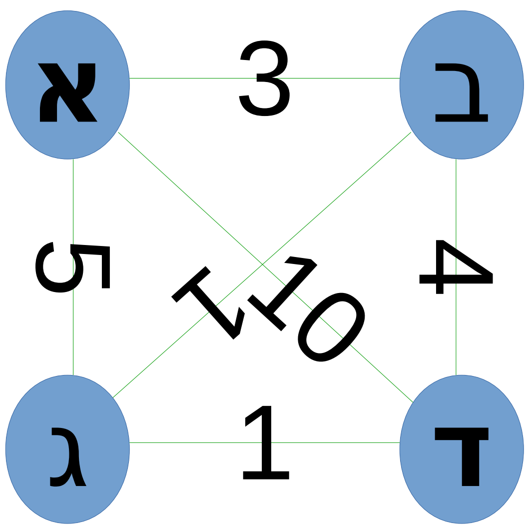


- אם עלות כל קשת ידועה לכולם – אלגוריתם.
- אם עלות כל קשת ידועה רק לבעליה – מכרז.

מכרז ויקרי-קלארק-גרובס למסלול זול ביותר

צריך לפתור 1+6 בעיות מסלול-זול-ביותר.

- כשכולם נמצאים: המסלול אבגד, הסכום 5-.
- בלי **אב**: המסלול אגד, הסכום 6-. **תשלום 4-**.
- בלי **בג**: המסלול אגד, הסכום 6-. **תשלום 2-**.
- בלי **גד**: המסלול אבד, הסכום 7-. **תשלום 3-**.
- בלי **אג/אד/בד**: אין שינוי, הסכום 5-. **תשלום 0**.
- תשלום כולל **9-**.



בעיית התרמיל (knapsack)

מכניסים אתכם לחדר מלא חפצים, נותנים לכם תרמיל שיכול להכיל עד 100 ק"ג, ואומרים לכם "כל מה שתצליחו להכניס לתרמיל – שלכם".

לכל חפץ יש **משקל אחר** ו**ערך אחר**.

איך תבחרו חפצים שסכום-ערכיהם גדול ביותר?

- הערך של כל חפץ ידוע לכולם – אלגוריתם.
- הערך של כל חפץ ידוע רק לחפץ – מכרז. *(דוגמה: יש 100 שניות המיועדות לפרסומות. לכל מפרסם יש פרסומת עם **אורך אחר** ו**ערך אחר**. איך לבחור איזה פרסומות לשים?)*

מכרז ויקרי-קלארק-גרובס למילוי תרמיל

כשיש m חפצים, צריך לפתור m+1 בעיות-תרמיל.

- **הבעיה**: בעיית התרמיל היא NP-קשה!
- פתרון אפשרי: *אלגוריתמי-קירוב*.

אלגוריתם חמדני א:

- סדר את החפצים בסדר יורד של הערך.
- בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.

דוגמה נגדית (גודל התרמיל = 100):

\$100/100k, \$20/2k, \$20/2k, \$20/2k ...

הראשון יזכה וישלם \$1000 – יותר מהערך שלו!

מכרז ויקרי-קלארק-גרובס למילוי תרמיל

כשיש m חפצים, צריך לפתור m+1 בעיות-תרמיל.

- **הבעיה**: בעיית התרמיל היא NP-קשה!
- פתרון אפשרי: *אלגוריתמי-קירוב*.

אלגוריתם חמדני ב:

- סדר את החפצים בסדר יורד של **ערך/משקל**.
- בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.

דוגמה נגדית:

$20/2k, $100/100k.

הראשון יזכה וישלם $100 – יותר מהערך שלו!

מכרז ויקרי-קלארק-גרובס למילוי תרמיל

אלגוריתם א+ב: הפעל את שני האלגוריתמים החמדניים. בחר את התוצאה עם הסכום הגבוה.

משפט: אלגוריתם א+ב נותן קירוב 1/2.

הוכחה: נניח שאלגוריתם ב נתקע אחרי k חפצים.

עם החפץ ה-k+1 – הסכום הוא מקסימלי++.

הסכום של אלגוריתם א הוא לפחות החפץ ה-k+1.

--> הסכום של אלגוריתמים א+ב מקסימלי++.

--> הסכום של א **או** ב הוא מקסימלי++ \ 2.

כאלגוריתם – טוב, כמכרז – לא מוצלח. דוגמה:

$54/52k, $52/51k, $49/49k.

הראשון יזכה וישלם $101 – יותר מהערך שלו!

מכרז מיירסון (Myerson)

נתונים:

- כלל-בחירה הקובע לכל שחקן אם נבחר או לא:
  - *"בחר את השלושה עם הערכים הגבוהים"*
  - *"בחר את המסלול הזול ביותר"*
  - *"בחר בעזרת אלגוריתם חמדני א"*
- לכל משתתף יש ערך ל"היבחרות".

דרוש: כלל-תשלום,
שאיתו המכרז יהיה אמיתי.

האם לכל כלל-בחירה קיים
כלל-תשלום אמיתי?

כלל-בחירה מונוטוני

הגדרה: כלל-בחירה נקרא *מונוטוני* אם, עבור כל שחקן i, הכלל הוא פונקציה מונוטונית-עולה של v_i.

- כלל-בחירה *בינארי* הוא מונוטוני אם עבור כל שחקן i, אם הוא נבחר כשהערך שלו *x*, אז הוא נבחר גם כשהערך שלו הוא כל מספר הגדול מ-*x*.

דוגמאות לכללים מונוטוניים:

- בחר את 3 הערכים הגדולים ביותר.
- בחר את הערך הגדול ביותר, בתנאי שהוא מעל 10.
- בחר בעזרת אלגוריתם חמדני א / ב / א+ב.

דוגמאות לכללים לא מונוטוניים:

- בחר את הערך השני מלמעלה.
- בחר את הערך הגדול ביותר, אם הוא מתחת ל-7.

משפט מיירסון

משפט מיירסון: מונוטוניות היא תנאי הכרחי ומספיק לאמיתיות. כלומר:

(א) לכל כלל-בחירה לא-מונוטוני - אין כלל-תשלום אמיתי.

(ב) לכל כלל-בחירה מונוטוני - קיים כלל-תשלום אמיתי, והוא יחיד.

בשקפים הבאים:

- נוכיח את משפט מיירסון.
- נגדיר במדוייק את כלל-התשלומים.

הוכחת משפט מיירסון

סימונים:

- כלל-הבחירה – c - פונקציה המקבלת כקלט את הערכים של כל המשתתפים, ומחזירה וקטור בינארי (*1 = "ברכותיי, נבחרת!")*. *c נתון וקבוע.*
- כלל התשלום – p - פונקציה המקבלת כקלט את הערכים של כל המשתתפים, ומחזירה וקטור מספרי של תשלומים. *את p אנחנו מחפשים.*

הוכחת משפט מיירסון - המשך

התועלת של משתתף עם ערך v שאומר x היא:

$$v*c(x) - p(x)$$

במכרז אמיתי, חייב להתקיים:

$$v*c(v) - p(v) \geq v*c(x) - p(x)$$

התועלת של משתתף עם ערך x שאומר v היא:

$$x*c(v) - p(v)$$

במכרז אמיתי חייב להתקיים:

$$x*c(x) - p(x) \geq x*c(v) - p(v)$$

מחברים את המשוואות ומקבלים:

$$v*[c(v)-c(x)] \geq p(v)-p(x) \geq x*[c(v) - c(x)]$$

הוכחת משפט מיירסון - המשך

נתון: כלל-בחירה c. **דרוש**: כלל-תשלום אמיתי p:

$$v[c(v)-c(x)] \geq p(v)-p(x) \geq x[c(v)-c(x)]$$

מצב א: $c(v)=c(x)$:

$$0 \geq p(v)-p(x) \geq 0$$

מכאן: $p(v)=p(x)$ - התשלום על בחירה לא תלוי בערך.

מצב ב: $c(v)>c(x)$, כלומר $c(v)=1$ וגם $c(x)=0$:

$$v \geq p(v)-p(x) \geq x$$

מכאן: $v>x$ – הפונקציה c חייבת להיות *מונוטונית*.

נשים את x קצת מתחת ל"סף" ואת v קצת מעל ל"סף", ונקבל: **$p(v)-p(x)$** חייב להיות שווה לערך הסף!

משפט מיירסון – ערך הסף

ערך הסף = הערך שבו הפונקציה c מתחלפת מ-0 ל-1.

ערך-הסף יכול להיות שונה משחקן לשחקן. דוגמאות:

- אם הכלל הוא "בחר את כל הערכים הגדולים מ-10", אז ערך-הסף לכל השחקנים הוא 10.
- אם הכלל הוא "בחר את הערך הגבוה ביותר", אז ערך-הסף של הנבחר הוא המחיר השני.
- אם הכלל הוא "הרץ אלגוריתם חמדני ב", אז ערך-הסף של כל שחקן יהיה תלוי במשקל שלו.

הוכחת משפט מיירסון - סיום

מצאנו כלל-תשלום אחד ויחיד המועמד להיות אמיתי:

- לכל שחקן i יש ערך-סף מסויים t_i.
- אם $t_i > v_i$, אז השחקן נבחר ומשלם t_i.
- אחרת, השחקן לא נבחר ולא משלם.

הוכחה שכלל-תשלום זה הוא אמיתי:

- אם נבחרת ותכריז מעל t_i, או לא נבחרת ותכריז מתחת ל t_i - כלום לא ישתנה.
- אם נבחרת, ותכריז מתחת ל-t_i - לא תיבחר, והתועלת שלך תהיה 0, אבל קודם התועלת שלך היתה חיובית (כי $t_i > v_i$).
- אם לא נבחרת, ותכריז מעל t_i - תיבחר ותשלם t_i, והתועלת שלך תהיה שלילית (כי $t_i < v_i$). ***

מכרז מיירסון למילוי תרמיל

הנחה: המשקל של כל משתתף ידוע. כל משתתף צריך להגיד רק את הערך שלו.

אלגוריתם חמדני א:

- סדר את החפצים בסדר יורד של הערך.
- בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.

***$100/100k**, $20/2k, $20/2k, $20/2k …*

הראשון נבחר ומשלם את ערך הסף שלו - $20.

אלגוריתם חמדני ב:

- סדר את החפצים בסדר יורד של **ערך/משקל**.
- בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.

***$20/2k, $5/1k,** $100/100k.*

שני הראשונים נבחרים:

הראשון משלם $2, השני משלם $1.

מכרז מיירסון למילוי תרמיל

- **אלגוריתם א+ב**: הפעל את שני האלגוריתמים החמדניים. בחר את התוצאה עם הסכום הגבוה.

$54/52k, $52/51k, $49/49k.

הראשון זוכה ומשלם: $52 * (52k/51k)

$100/100k, $20/2k, $20/2k.

הראשון זוכה ומשלם 40$.

$100/100k, $60/2k, $60/2k.

שני האחרונים זוכים ומשלמים: ?

ויקרי-קלארק-גרובס לעומת מיירסון

	וק"ג	מיירסון
פרמטרים לכל שחקן	הרבה *(למשל: בחירת מסעדה)*	אחד
כלל בחירה	מיקסום סכום ערכים	כל כלל מונוטוני *(למשל: קירוב בעיית התרמיל, מיקסום רווח)*