

חלוקת עלויות Cost-sharing

אראל סגל-הלוי



דוגמה: שיתוף נסיעה במונית

נסיעה משותפת במונית יכולה לחסוך עלויות.

- אם כל הנוסעים עושים את אותו מסלול – הגיוני לחלק את דמי-הנסיעה שווה בשווה.
- אבל מה אם כל אחד נוסע במסלול אחר?

שאלה א – חלוקה הוגנת: איך לחלק את דמי-הנסיעה בין הנוסעים?

שאלה ב – מכרז: איך להחליט מי ישתתף בנסיעה?

בעיה כללית: משחק שיתופי

נתונים:

- קבוצה של שחקנים - N ;
- לכל תת-קבוצה S – העלות של מתן שירות רק לתת-הקבוצה הזאת - $c(S)$.

המטרה: לגבות מכל שחקן j תשלום $p(j)$, כך שסכום התשלומים הכללי הוא $c(N)$ – התשלומים מכסים את העלות של כל הקבוצה.

מהו כלל תשלום הוגן?

עלות שולית

הגדרה: העלות השולית של שחקן j , ביחס לקבוצת שחקנים S , היא התוספת שהוא מוסיף לעלות כשהוא מצטרף לקבוצה:

$$c(S \cup \{j\}) - c(S)$$

עקרון ההגינות: כלל תשלום נקרא סימטרי אם הוא תלוי רק בעלויות השוליות: אם לשני שחקנים יש עלויות שוליות זהות ביחס לכל הקבוצות, אז הם צריכים לשלם אותו הדבר.

עקרון הלא-מלם (null player): שחקן שכל העלויות השוליות שלו הן אפס, משלם 0.

ליניאריות

עקרון הליניאריות:

- אם מכפילים את העלויות בקבוע – כל התשלומים נכפלים באותו קבוע.
- דוגמה: המרה משקלים לאגורות.
- אם מחברים שתי טבלאות-עלויות – כל התשלומים מתחברים.
- דוגמה: חישוב תשלומים על שתי נסיעות ביחד, או על כל אחת לחוד.

משפט שאפלי (Shapley)

משפט: ישנו כלל-תשלומים אחד ויחיד המקיים את כל ארבעת התכונות:

- א. כיסוי מלא של העלות הכוללת,
- ב. עקרון הסימטריה,
- ג. עקרון הלמלם,
- ד. עקרון הליניאריות.

כלל-התשלומים הזה נקרא ערך שאפלי.

ערך שאפלי (Shapley Value)

אלגוריתם לחישוב ערך שאפלי:

- לכל אחד מ- n ! הסדרים האפשריים:
 - לכל שחקן:
 - חשב את העלות השולית שלו בסידור זה.
- לכל שחקן:
 - חשב את הממוצע של n ! העלויות השוליות.

משפט שאפלי – הוכחה (1)

א. כיסוי מלא: נכון לכל סדר בנפרד \leftarrow נכון גם לממוצע על כל הסדרים.

ב. סימטריה: ערך שאפלי של כל שחקן נקבע רק לפי העלויות השוליות שלו.

ג. למלם: העלויות השוליות 0 \leftarrow הממוצע 0.

ד. ליניאריות: ערך שאפלי הוא פונקציה ליניארית של הערכים בטבלה.

משפט שאפלי – הוכחה (2)

[המשך יבוא]

איך מחליטים מי יקבל שירות?

- עד כאן הנחנו שכולם נוסעים.
- אבל מה קורה אם העלות גבוהה מדי עבור חלק מהנוסעים - איך נחליט מי ייסע?
- **נתון:** לכל שחקן j , ערך הנסיעה הוא v_j .
- אם תת-קבוצה מסויימת נוסעת, **הרווחה החברתית** היא סכום הערכים של הנוסעים בתת-הקבוצה, פחות עלות הנסיעה.
- **דרוש:** כלל-החלטה שהוא:
 - א. יעיל פארטו – ממקסם רווחה חברתית.
 - ב. אמיתי – מעודד כל שחקן j לגלות את v_j .

מכרז לקבלת שירות בשיטת VCG

- התוצאות האפשריות – כל 2^n תת-הקבוצות.
- הערך של שחקן j הוא v_j אם נוסע, 0 לא.
- הערך של ה"נהג" הוא מינוס עלות הנסיעה.
- בוחרים את התוצאה הממקסמת את הסכום.
- תשלום שחקן j =: הסכום בלי j , פחות הסכום של אחרים (כולל ה"נהג") כש- j נמצא.

מכרז VCG הוא:

- יעיל-פארטו – לפי הגדרה.
- אמיתי – הוכחנו.
- הבעיה – גירעון! ראו גליון מצורף.

מכרז לקבלת שירות - מולין-שנקר (Moulin & Shenker, 2001)

קלט: כלל-תשלום. $p(S,j)$ = כמה משלם שחקן j
אם הקבוצה שמקבלת שירות היא S .

אלגוריתם:

- (1) **איתחול:** כולם נכנסים לחדר.
- (2) אומרים לכל אחד כמה הוא צריך לשלם לפי p , בהנחה שכל הנוכחים בחדר משתתפים.
- (3) מי שחושב שזה יקר מדי - יוצא מהחדר.
- (4) אם מישהו יצא מהחדר - חזור לצעד 2.
- (5) אחרת - סיים ושלח את הנשארים למונית.

מכרז מולין-שנקר - אמיתיות

האם מכרז מולין-שנקר הוא אמיתי?

הגדרה: כלל תשלום p נקרא מונוטוני אם כשהקבוצה קטנה, התשלום גדל (או שווה):

$$\text{If } S \leq T \quad \text{then} \quad p(S, i) \geq p(T, i)$$

משפט: ההדמיה של מכרז מולין-שנקר עם כלל-תשלום מונוטוני היא אמיתית.

הוכחה: התשלום של כל הנוסעים הנשארים לא

קטן ← לנוסע שיצא לא כדאי לחזור ←

ההתנהגות האופטימלית של נוסע היא לצאת

אם"ם התשלום הנוכחי גדול מהערך שלו. זה

בדיוק מה שההדמיה עושה כשהוא אמיתי. ***

מכרז מולין-שנקר + ערך שאפלי

טוב, אז האם ערך שאפלי הוא מונוטוני?

הגדרה: פונקציית עלות נקראת תת-מודולרית אם יש לה עלות שולית פוחתת, כלומר:

If $S \leq T$, then $c(S \cup \{i\}) - c(S) \geq c(T \cup \{i\}) - c(T)$

משפט: במשחק עם עלות שולית פוחתת, כלל-התשלום של שאפלי הוא מונוטוני.

הוכחה: שחקן א – בקבוצה, שחקן ב – מצטרף. נחשב את ערך שאפלי של שחקן א לפני ואחרי: * לפני – ממוצע על $n!$ סדרים.

* אחרי – ממוצע של $(n+1)!$ סדרים:

אם שחקן ב נכנס אחרי א – הערך שווה.

אם שחקן ב נכנס לפני א – הערך קטן או שווה. ***

מכרז מולין-שנקר + ערך שאפלי

יתרונות:

- מאוזן תקציבית;
- הוגן;
- אמיתי (אם יש עלות שולית פוחתת).

חסרון:

- לא יעיל פארטו.
- הוכחה: שיעורי בית.

מכרז למתן שירות – טְרִילָמָה

אמיתי	מאוזן תקציבית	יעיל פארטו	
כן	לא	כן	VCG
כן	כן	לא	מולין- שנקר
לא	כן	כן	תשלום = ערך