

## מטלה - שידוכים ושיבוצים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. הגשה בזוגות, עד תחילת ההרצאה בשבוע הבא.

### שאלה 1: שידוך יציב ויעילות

- א. הוכיחו שכל שידוך יציב הוא יעיל-פארטו, אבל ההיפך לא נכון.
- ב. נניח שכל סטודנט מייחס ערך מספרי לכל מחלקה, כאשר המחלקה הכי גרועה בעיניו מקבלת 1, המחלקה הבאה מקבלת 2, וכו' (אם יש  $m$  מחלקות אז המחלקה הכי טובה מקבלת  $m$ ). גם כל מחלקה מייחסת ערך מספרי לכל סטודנט באותו אופן. האם כל שידוך יציב ממקסם את סכום הערכים? הוכיחו או הראו דוגמה נגדית.

### שאלה 2: כמה שידוכים יציבים יש?

- כשיש 3 סטודנטים ו-3 מחלקות, יש 6 שידוכים אפשריים. כמה מהם יציבים?
- א. הראו דוגמה שבה יש רק שידוך יציב אחד.
- ב. הראו דוגמה שבה יש בדיוק 2 שידוכים יציבים.
- ג. האם ייתכן שכל 6 השידוכים הם יציבים? אם כן - הראו דוגמה, אם לא - הוכיחו.
- ד. מה המספר הגדול ביותר של שידוכים יציבים שייתכנו במצב זה?

### שאלה 3: מי נשאר בחוץ?

- נניח שמספר הסטודנטים גדול ממספר המחלקות (ובכל מחלקה יש מקום אחד). במצב זה, בכל שידוך, חלק מהסטודנטים יישארו בחוץ.
- א. הראו דוגמה עם 3 סטודנטים ו-2 מחלקות, שבה יש לפחות שני שידוכים יציבים. מיצאו את שניהם והראו איזה סטודנט נשאר בחוץ בכל שידוך יציב.
- ב. הוכיחו, שבכל שידוך יציב (לא משנה באיזה אלגוריתם מצאנו אותו), אותם סטודנטים יישארו בחוץ. כלומר, אם מישהו נשאר בחוץ בשידוך יציב א, אז הוא נשאר בחוץ גם בשידוך יציב ב.
- אם אתם נתקעים, קראו בויקיפדיה על "Rural hospitals theorem".

### שאלה 4: אלגוריתם קבלה-על-תנאי

- א. הראו דוגמה עם 3 סטודנטים ו-3 מחלקות שבו אלגוריתם קבלה-על-תנאי מחזיר תמיד את אותו שידוך, בין אם הסטודנטים מציעים או המחלקות מציעות. תארו את ריצת האלגוריתם בכל אחד מהמצבים.
- ב. הוכיחו שאלגוריתם קבלה-על-תנאי כשהמחלקות מציעות, מחזיר את השידוך היציב הכי גרוע עבור הסטודנטים מכל השידוכים היציבים (רמז: הוכיחו שכל שידוך יציב שהוא הכי טוב עבור המחלקות, הוא הכי גרוע עבור הסטודנטים).

ג. באלגוריתם "קבלה על תנאי", כל מחלקה מדרגת את הסטודנטים בלי לראות מה הסטודנטים דירגו. נניח עכשיו שאנחנו מאפשרים למחלקות לראות את הדירוג של הסטודנטים לפני שהן מפרסמות את הדירוג שלהן. האם האלגוריתם עדיין אמיתי?

## שאלה 5: שידוך יציב לפי גובה

בליגת כדורסל מסויימת, לכל שחקן יש העדפות שונות על הקבוצות, אבל לכל הקבוצות יש אותן העדפות על השחקנים - כל הקבוצות מדרגות את השחקנים מהגבוה לנמוך. כיתבו אלגוריתם לשידוך יציב בין קבוצות לשחקנים, שהוא פשוט יותר מאלגוריתם קבלה על-תנאי, אך עדיין אמיתי. הוכיחו שהוא אמיתי.

## שאלה 6: תיכנות - יציבות

כיתבו אלגוריתם המקבל שידוך ובודק אם הוא יציב. בניגוד למטלות הקודמות, הפעם אתם תגדירו את מבני-הנתונים הדרושים, פורמט הקלט והפלט.