

מטלה - חלוקת שכר-דירה

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. הגשה בזוגות, עד תחילת ההרצאה הבאה.

שאלה 1: כיסוי מינימלי

כיסוי (*covering*) של גרף הוא תת-קבוצה של הצמתים בגרף, כך שכל קשת בגרף סמוכה לפחות לצומת אחד מתוך הקבוצה.

כיתבו בעיית אופטימיזציה למציאת כיסוי מינימלי - כיסוי עם מספר קטן ביותר של צמתים. הגדירו במדויק מה הם המשתנים, מה הם האילוצים, ומה פונקציית המטרה.

שאלה 2: חלוקת שכר-דירה אגליטרית

בכל השמה של דיירים לחדרים, ישנן דרכים רבות לקבוע את מחירי החדרים. בכל וקטור מחירים, התועלת של כל דייר היא ערך החדר שקיבל עבורו פחות מחיר החדר. בכל וקטור מחירים, יש דייר אחד (או יותר) שהתועלת שלו הכי קטנה. החלוקה האגליטרית (*egalitarian*) היא החלוקה שבה התועלת הקטנה ביותר היא גדולה יותר מכל שאר החלוקות. החלוקה האגליטרית ללא קנאה היא החלוקה שבה התועלת הקטנה ביותר היא גדולה יותר מכל שאר החלוקות ללא קנאה.

א. תנו דוגמה עם שלושה חדרים ושלושה דיירים, שבו בחלוקה האגליטרית יש קנאה.

ב. מציאו את החלוקה האגליטרית-ללא-קנאה בדוגמה זו.

ג. האם מצב כזה (שבו בחלוקה האגליטרית יש קנאה) אפשרי גם עם שני חדרים ושני דיירים?

שאלה 3: סכום מחירים מקסימלי

נניח שמצאנו השמה שממקסמת את סכום הערכים, ואנחנו רוצים למצוא מחיר לכל חדר. במקום למצוא וקטור-מחירים עם סכום מינימלי, אפשר לנסות למצוא וקטור-מחירים עם סכום מקסימלי:

$$\text{Maximize} \quad \sum_i p[i]$$

$$\text{Such that} \quad \text{For all } i, j: w[d[i], i] - p[i] \geq w[d[i], j] - p[j]$$

א. מה הבעיה בתוכנית זו? (אפשר לפתור סעיף זה בשתי דרכים: להריץ ב Mathematica ולראות איזו הודעת שגיאה-מתקבלת, או לנסות לפתור את הבעיה ידנית במקרים פרטיים ולזהות את הבעיה).

ב. איזה אילוץ אפשר להוסיף לתוכנית, כך שיתקבל פתרון הגיוני?

שאלה 4: בעיית מכפלת הצריחים

נתון לוח שחמט (8 על 8) שבו בכל משבצת כתוב מספר חיובי כלשהו.

עליכם להציב שמונה צריחים על הלוח, כך שאף צריח לא מאיים על אף צריח אחר, ומכפלת המספרים הרשומים תחת הצריחים היא הגדולה ביותר.

א. כיתבו את בעיית האופטימיזציה.

ב. הדגימו את פתרון הבעיה על לוח קטן (3 על 3).

שאלה 5: תיכנות - חלוקת שכר-דירה ללא קנאה

רוצים לחלק n חדרים ל- n דיירים. כל דייר מיוצג ע"י המחלקה הבאה:

```
class Agent {  
    int bestRoom(int[] prices);  
    // INPUT:    the prices of the n rooms, in shekels.  
    // OUTPUT:   the index of a room that the agent most prefers  
    in these prices. Index is between 0 and n-1.  
};
```

כיתבו בשפה לבחירתכם, או בפסאודו-קוד, אלגוריתם המקבל כקלט n שחקנים ואת מחיר הדירה הכולל בשקלים, ומוצא השמת-חדרים ללא קנאה עד כדי שקל אחד. אם זה מקל עליכם - אפשר להניח ש $n=3$.

כותרת הפונקציה:

```
void findEnvyFreeAssignment(Agent[] agents, int totalRent)
```

פלט לדוגמה:

*Agent 0 receives room 2 for 163 shekels.
Agent 1 receives room 1 for 274 shekels.
Agent 2 receives room 0 for 343 shekels.*