

"וְנָחֲלֵתֶם אוֹתָהּ אִישׁ כְּאֻזְיוֹ" (יחזקאל מ"ד 14)

אלגוריתם "המנצח המתוקן" Adjusted Winner Algorithm

אראל סגל-הלוי



חלוקת חפצים בדידים

כשהחפצים לא ניתנים לחלוקה, בדרך-כלל אי אפשר למצוא חלוקה פרופורציונלית וללא קנאה (דוגמה: בית).

פתרונות מקובלים:

(1) הוספת כסף למערכת.

דוגמה: אלגוריתמי חלוקת שכר-דירה.

(2) מציאת דרך יצירתית לחלק חפץ אחד.

דוגמה: אלגוריתם "וין-וין" לגישור.

(3) חלוקה ללא-קנאה-בקירוב.

דוגמה: חלוקת תכשיטים ומקומות בקורסים.

חלוקת חפצים בין שני אנשים

נתונים:

- שני שותפים (למשל: דונאלד ואיוואנה).
- m חפצים או נושאים שיש עליהם מחלוקת
- כל שותף מייחס ערך באחוזים לכל נושא.

האתגר – להחליט מי יקבל כל חפץ/נושא כך ש:

- לא תהיה קנאה.
- התוצאה תהיה יעילה פארטו.
- נצטרך לחתוך חפץ אחד לכל היותר.

חלוקת חפצים בין שני אנשים

ניסיון ראשון: אחד מחלק, השני בוחר.

- אין קנאה; חפץ אחד נחתך; אבל לא יעיל פארטו.

30	20	30	20	דונאלד:
20	40	10	30	איואנה:

ניסיון שני: כל חפץ נמסר למי שהכי רוצה אותו.

- יעיל פארטו, אף חפץ לא נחתך; אבל יש קנאה.

30	30	30	10	דונאלד:
16	18	20	40	איואנה:

חלוקת חפצים בין שני אנשים

ניסיון שלישי: מיקסום מכפלת הערכים.

- אין קנאה; יעיל פארטו;
אבל לא ברור כמה חפצים נחתכים.
[בנוסף, גם לא פשוט לחישוב].

אלגוריתם "המנצח המתוקן" (Adjusted Winner) Brams and Taylor, 1996

- א. סדר חפצים בסדר עולה של היחס דונאלד/איואנה.
- ב. אתחול: תן את כל החפצים לדונאלד.
- ג. העבר חפצים לאיואנה לפי הסדר, עד ש:
 - (1) הסכום של דונאלד שווה לסכום של איואנה, או -
 - (2) יש חפץ אחד שאם נחתוך אותו הסכום ישתווה.

אלגוריתם "המנצח המתוקן"

משפט: אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה יעילה פארטו.

הוכחה: יהי r יחס-הניקוד של החפץ האחרון שהועבר מהמנצח/ת למפסיד/ה ($r > 1$). [היחס הגדול ביותר].
נכפיל את הניקוד של המפסיד ב- r .
עכשיו בחלוקה הסופית, כל חפץ נמסר למי שנותן לו ניקוד מירבי. מכאן - החלוקה הסופית ממקסמת סכום: $v[\text{winner}] + r \cdot v[\text{loser}]$.

אלגוריתם "המנצח המתוקן"

משפט: אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה ללא קנאה.

הוכחה: לשני השותפים ניקוד שווה.

אילו הניקוד היה קטן מ-50, הם היו יכולים להתחלף וזה היה שיפור פארטו – סתירה למשפט הקודם. ***

אלגוריתם "המנצח המתוקן"

מקורות:

- Brams and Taylor: Fair Division (1996 book), The Win-Win Solution (1999 book).
- הקורס של ויליאם גסרך – כולל מצגות סטודנטים על יישומים של האלגוריתם במקרים שונים:
www.cs.umd.edu/~gasarch/COURSES/2/
- האתר של אוניברסיטת ניו-יורק – כולל הדגמה חיה ואפשרות לשלם כדי לקבל הסכם פורמלי:
<http://www.nyu.edu/projects/adjustedwinner/>
- <http://fairoutcomes.com/fd.html>