

"ונחלתם אותה איש כאחיו" (יחזקאל מ"א 14)

# אלגוריתמי חלוקה הוגנת

# Fair Division Algorithms

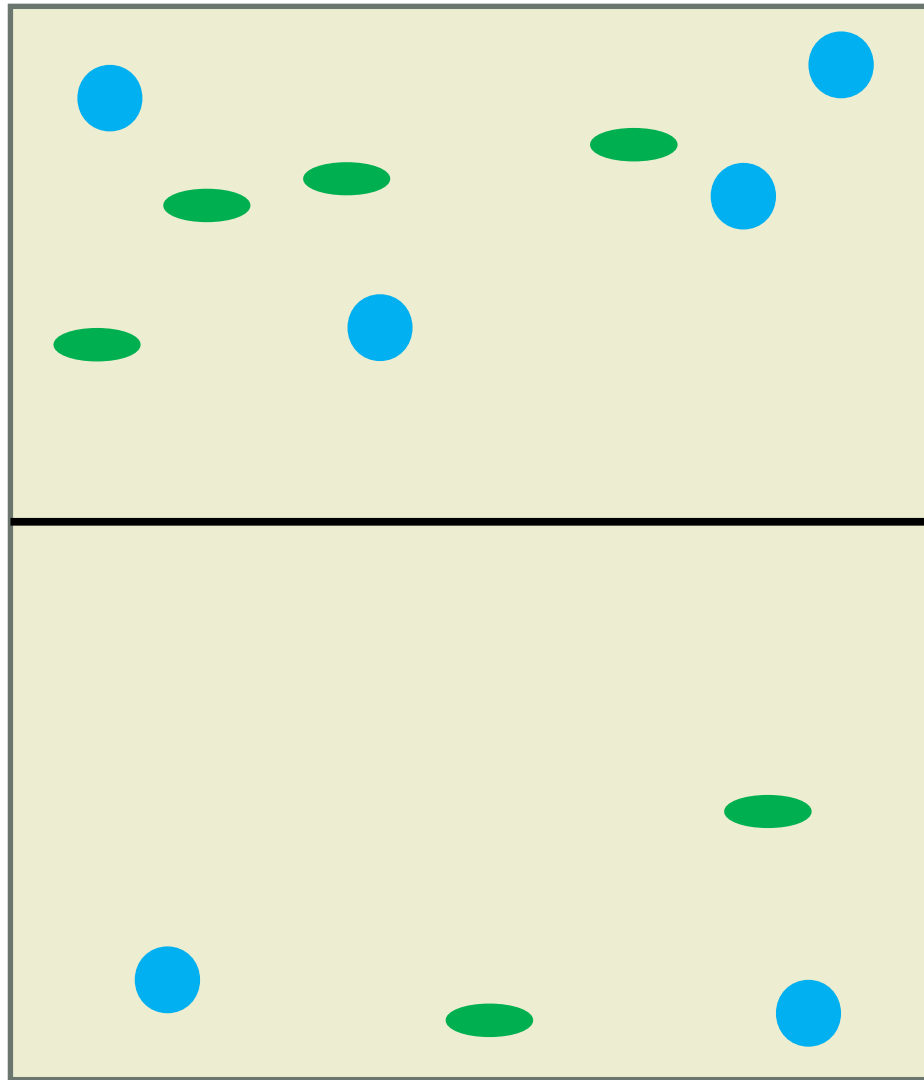
## אראל סגל-הלוי



# חלוקה הוגנת

- קלט: משאב משותף, זכויות שוות.
- אתגר: העדפות שונות.
- מטרה: חלוקה שתהיה הוגנת בעיני כולם.
- יישומים: הרבה
  - <http://spliddit.org/>
  - <http://www.fairoutcomes.com/>

# חלוקת עוגה בין שני ילדים

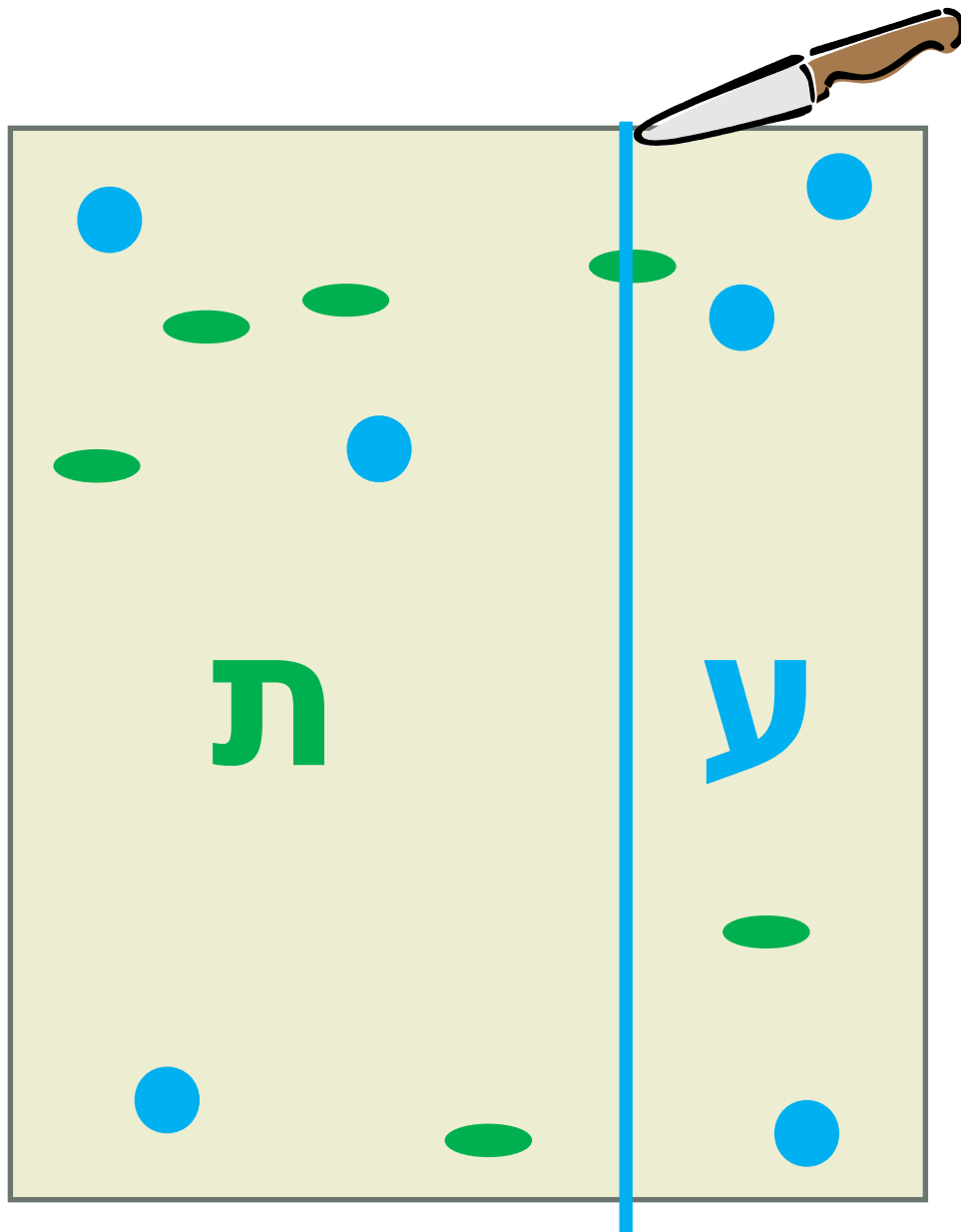


צריך לחלק עוגת  
יום-הולדת בין שני  
ילדים: עמי ותמי.

כל ילד מעדיף סוכריות  
בצבע אחר.

אם אנחנו נחלק את  
העוגה בצורה שנראית  
לנו הוגנת – לא בטוח  
שזה יהיה הוגן בעיניהם!

# חלוקת עוגה בין שני ילדים



הפתרון: לתת להם  
לחלק בעצמם!

- **עמי** מחלק את העוגה לשני חלקים שווים בעיניו (בשווי  $1/2$ ).
- **תמי** בוחרת את החלק הטוב בעיניה.
- **עמי** מקבל את השאר.

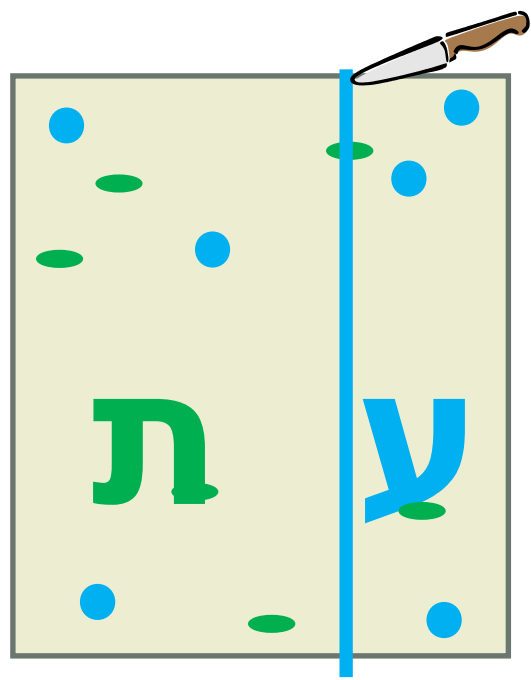
# חלוקת קרקע בין שני אנשים

בראשית יד 8-9: וַיֵּאמְרוּ אַבְרָם אֶל לוֹט: אֵל נָא  
תְּהִי מִי בְּרִיבָהּ בֵּינִי וּבֵינֶיךָ וּבֵין רְעִי וּבֵין  
רְעֶיךָ כִּי אֲנִי שׂוֹמֵר אֶתְּחִיבָנוּ הֲלֹא כָל  
הָאָרֶץ לְפָנֶיךָ, הֲפָרַדְנָא מֵעַלְיָ! אֲנִי  
הַשָּׂמַל וְאַיִמָּה, וְאַתָּה הַיָּמִין  
וְאַשְׁמָאִיל

אברם



לוט



# אלגוריתם "חתוך ובחר"

**תכונות:**

(1) כל משתתף חושב שהחלק שלו שווה לפחות  $1/2$  – חלוקה פרופורציונלית (proportional).

(2) כל משתתף חושב שהחלק שלו טוב לפחות כמו כל האחרים – חלוקה ללא קנאה (envy-free).

**הרחבות:**

- מה עושים כשיש הרבה ילדים?
- מה עושים כשהחפצים בדידים?
- מה עושים כשהמשתתפים לא שווים?

# חלוקת עוגה – מודל כללי

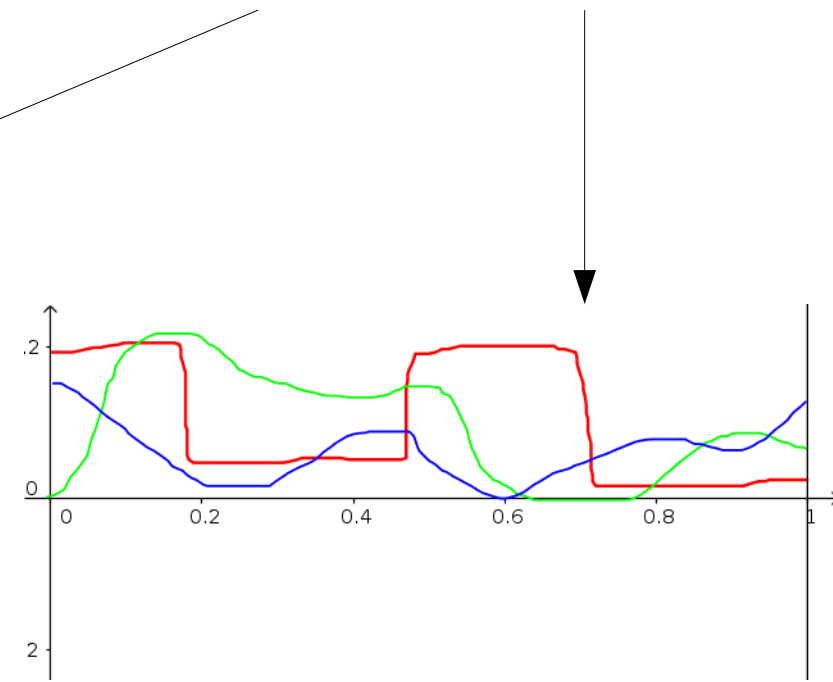
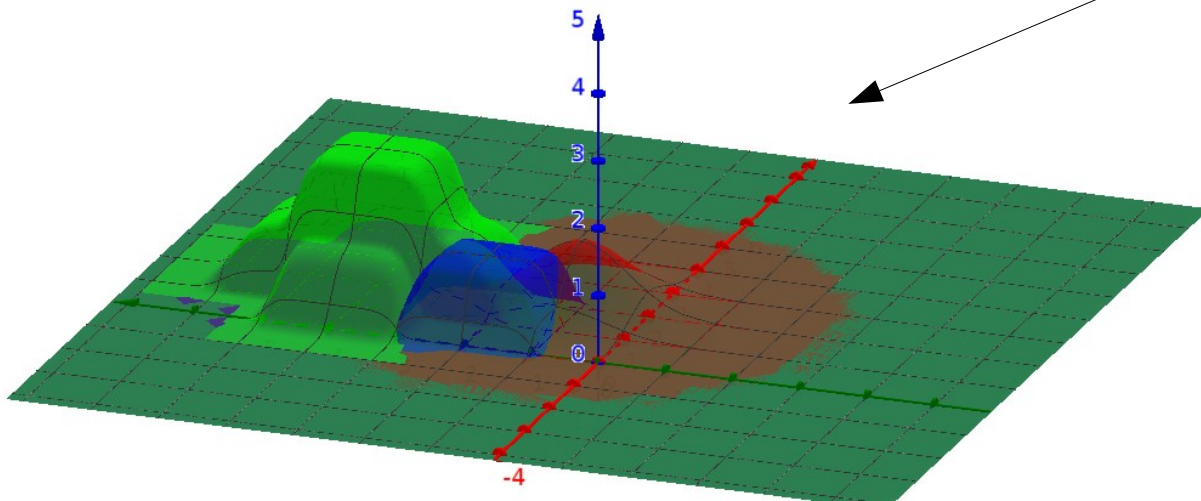
העוגה  $C$  היא קטע (חד ממדי) או מצולע (רב ממדי).  
לכל משתתף יש פונקצית צפיפות ערך על העוגה:

$$v_i: C \rightarrow R$$

ערך של חתיכת עוגה הוא אינטגרל על צפיפות הערך:

$$V_i(X) = \int_X v_i(x) dx$$

= השטח / הנפח מתחת לגרף של צפיפות הערך:



# חלוקת עוגה – מודל כללי

העוגה  $C$  היא קטע (חד ממדי) או מצולע (רב ממדי).  
לכל משתתף יש פונקצית צפיפות ערך על העוגה:

$$v_i: C \rightarrow R$$

ערך של חתיכת עוגה הוא אינטגרל על צפיפות הערך:

$$V_i(X) = \int_X v_i(x) dx$$

https://www.madlan.co.il/local/pricesHeatmap

מפת הנדל"ן והשכונות של ישראל

המפה לפניכם מציגה מידע על כל השכונות בישראל. בחרו בישוב שלכם על ידי לחיצה ובחרו את השכונה שלכם בלחיצה נוספת. מידע מחירים, חינוך ועוד יופיע בצד המפה.

**שכונה ה**

מספר עסקאות: 17  
מספר למ"ר: 13,800 ש"ח  
מספר מדל: 1,330,000 ש"ח

**הקליקו לפרטים מלאים בצד מימין**

**אריאל**

מספר עסקאות: 78  
מספר למ"ר: 12,100 ש"ח  
מספר מדל: 1,308,000 ש"ח

**לחצו למידע נוסף במדל**

| חדרים | דירות חדשות | יד שניה 90-משנות ה-90 ואילך | יד שניה 70-משנות ה-80 |
|-------|-------------|-----------------------------|-----------------------|
| 3     | -           | -                           | 864,000               |
| 4     | -           | 1,156,000                   | 993,000               |
| 5     | -           | -                           | -                     |



# חלוקת עוגה להרבה אנשים

תכונות:

1. כל אחד חושב שהחלק שלו שווה לפחות

$n/1$  – חלוקה פרופורציונלית (proportional):

$$V_i(X_i) \geq V_i(C) / n$$

2. כל אחד חושב שהחלק שלו טוב לפחות כמו

כל האחרים – חלוקה ללא קנאה (envy-free):

$$V_i(X_i) \geq V_i(X_j)$$

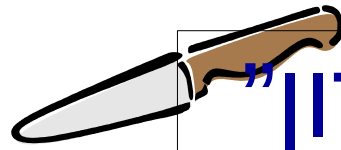
חידה: מה יותר קשה?





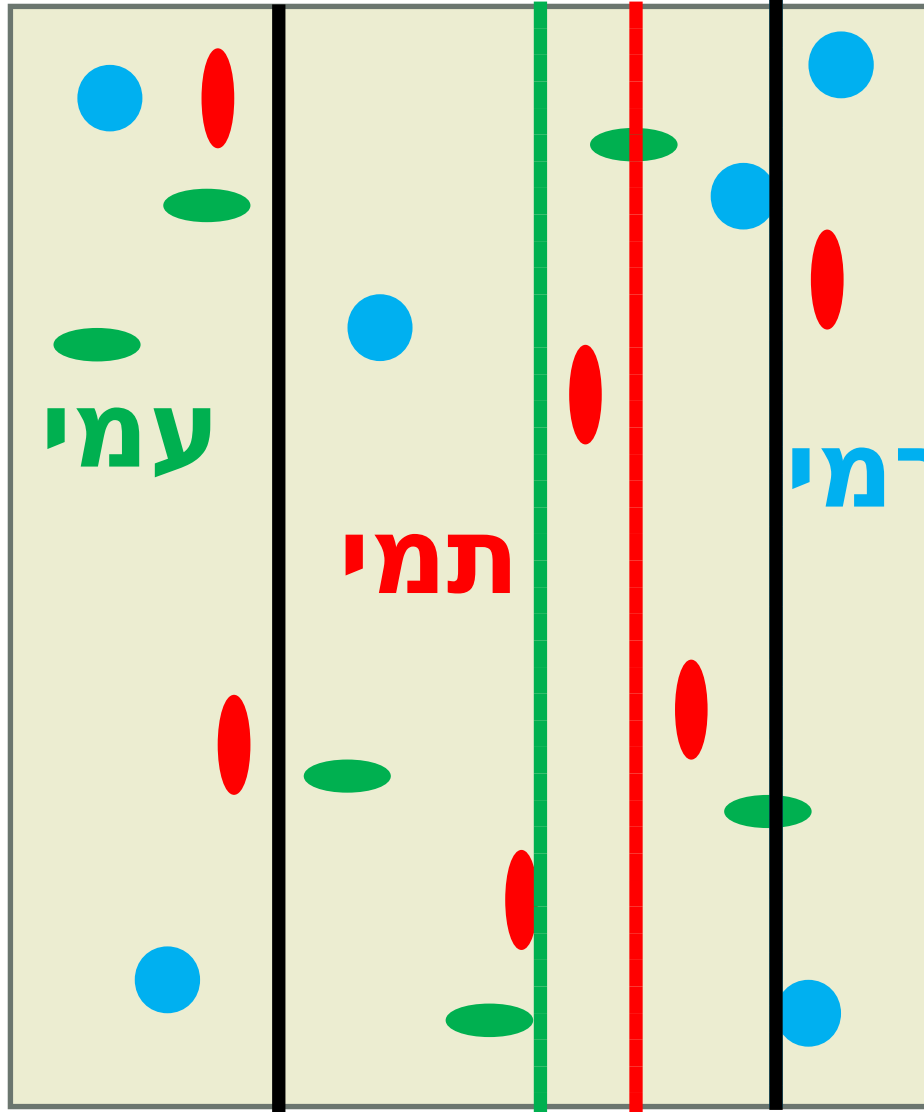


# חלוקה פרופורציונלית



אלג. "המפחית האחרון"

– Last Diminisher –  
הוגו שטיינהאוס 1948



- **עמי** מסמן  $n/1$  בעיניו.
- אם **תמי** חושבת שזה יותר מדי - היא מפחיתה ל- $n/1$ .
- וכן **רמי** וכו'.
- האחרון שהפחית מקבל את החלק שסימן.
- ממשיכים ברקורסיה.

הרעיון: מכרז בין השחקנים: מי שמוכן לקבל הכי מעט – זוכה.



# אלגוריתם המפחית האחרון

**משפט:** אלגוריתם "המפחית האחרון" נותן חלוקה פרופורציונלית - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לפחות  $n/1$  מערך העוגה בעיניו. **הוכחה:** נניח שערך העוגה כולה הוא  $n$ . נוכיח שכל שחקן מקבל חלק ששווה בעיניו לפחות 1. נוכיח באינדוקציה על  $n$ .

**בסיס:** שחקן אחד מקבל הכל.

**צעד:** נניח ל- $n-1$  שחקנים. עכשיו יש  $n$ . אחד מקבל חלק ששווה בעיניו 1. נשארים  $n-1$  שחקנים. עבורם, החלק שנמסר שווה לכל היותר 1. לכן, החלק שנשאר שווה בעיניהם לפחות  $n-1$ . לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מקבל לפחות 1. \*\*\*

# אלגוריתם המפחית האחרון

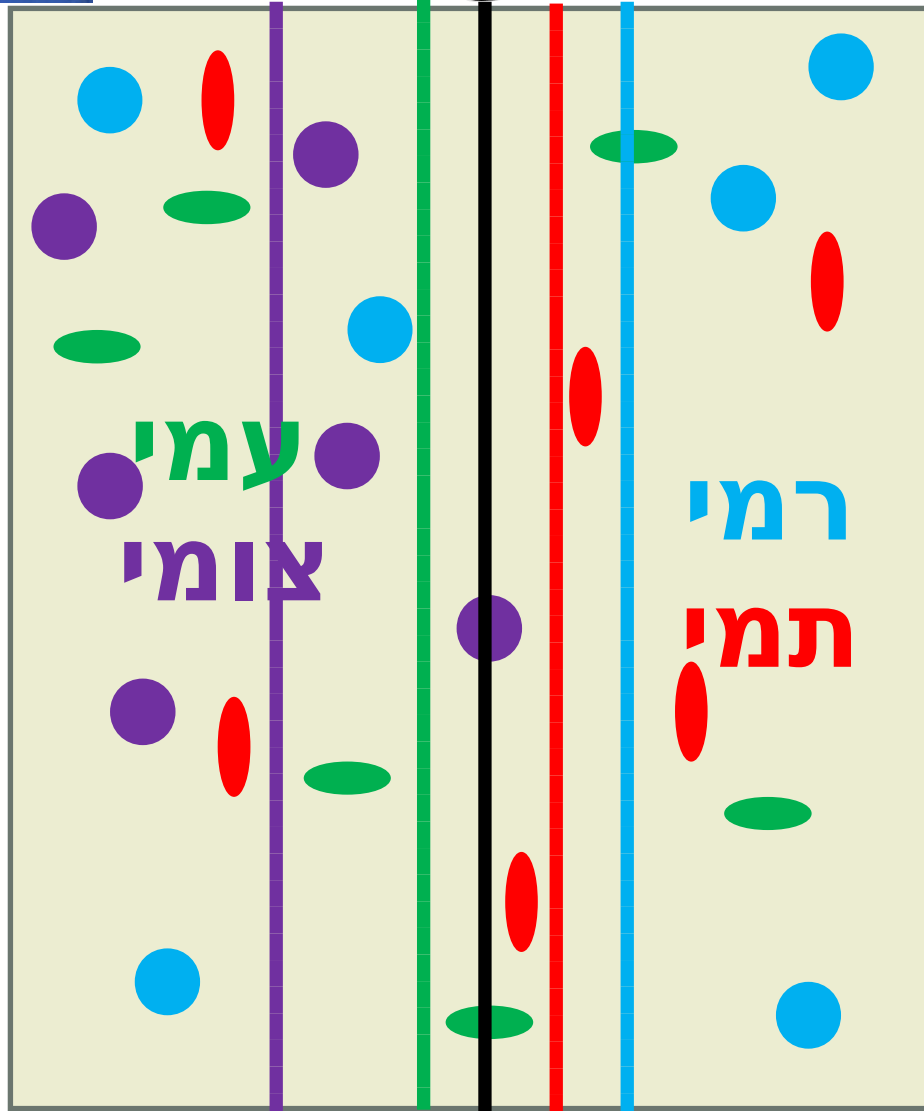
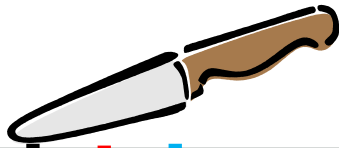
**משפט:** אלגוריתם "המפחית האחרון" משתמש ב-  $O(n^2)$  שאילות.

**הוכחה:** בכל צעד שחקן אחד יוצא –  $n$  צעדים. בכל צעד צריך לשאול כל שחקן שאילתה אחת. סה"כ  $O(n^2)$  שאילות. \*\*\*

עבור כלכלנים – זה מספיק.

אבל מדעני-מחשב שואלים:  
האם יש אלגוריתם מהיר יותר?

# חלוקה פרופורציונלית מהירה



אלגוריתם אבן-פז –

- Even-Paz

שמעון אבן ועזריה פז, '84

- כל שחקן מחלק לשני חלקים בשווי  $1/2$  בעיניו.
- חותכים את העוגה בחציון של הקוים.
- שולחים כל שחקן לחצי שמכיל את הקו שלו.
- מחלקים כל חצי ברקורסיה.

# אלגוריתם אבן-פז

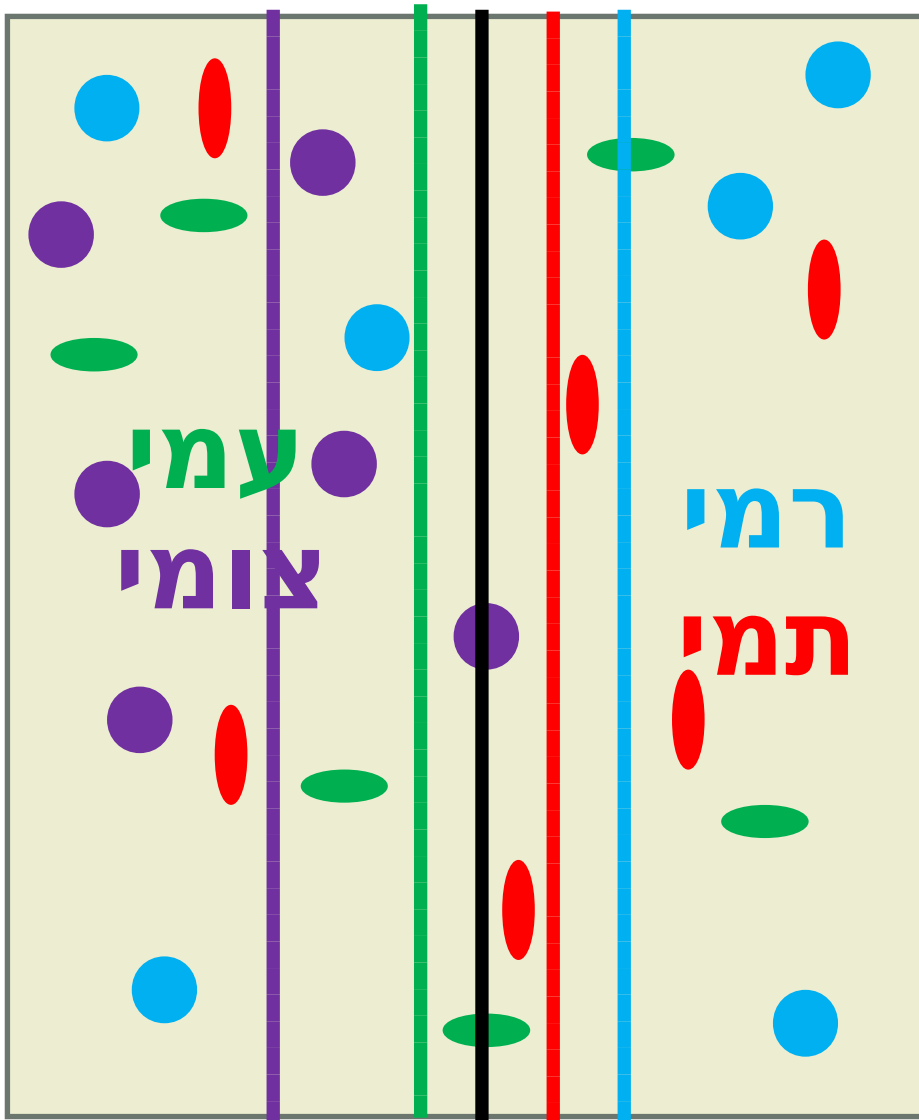
מה עושים כש- $n$  איזוגי?

- כל שחקן מחלק לשני חלקים ביחס של:

$$(n-1)/2 : (n+1)/2$$

- חותכים את העוגה כך שבצד אחד יהיו  $(n-1)/2$  קוים ובצד שני  $(n+1)/2$  קוים.

- שולחים כל שחקן לחצי שמכיל את הקו שלו.



# אלגוריתם אבן-פז

**משפט:** אלגוריתם אבן-פז נותן חלוקה פרופורציונלית - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לפחות  $n/1$  מערך העוגה בעיניו.

**הוכחה:** נניח שעריך העוגה כולה הוא  $n$ . נוכיח שכל שחקן מקבל חלק ששווה בעיניו לפחות 1. נוכיח באינדוקציה על  $n$ .

**בסיס:** שחקן אחד מקבל הכל.

**צעד:** נניח שנכון לכל מספר שחקנים עד  $n-1$ . עכשיו יש  $n$ . כל מי שמשחק לפי הכללים, מגיע לחלק ששווה בעיניו לפחות  $k$ , ויש בו  $k$  שחקנים, כאשר  $k$  הוא  $n/2$  או  $(n+1)/2$  או  $(n-1)/2$ . לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מקבל לפחות 1. \*\*\*



# אלגוריתם אבן-פז

**משפט:** אלגוריתם אבן-פז משתמש  
ב-  $O(n \log n)$  שאילתות.

**הוכחה:** נעגל את  $n$  למעלה לחזקה הקרובה של  
2. הגדלנו אותו בפחות מ-2. עכשיו, בכל צעד,  
גודל הקבוצות קטן פי 2. לכן מספר הצעדים הוא  
לכל היותר  $\log_2(2n)$ . בכל צעד, שואלים כל  
שחקן שאילתה אחת. לכן הסיבוכיות  $O(n \log n)$ .

**האם יש אלגוריתם מהיר יותר?**

-- לא! כל אלגוריתם לחלוקה פרופורציונלית צריך  
לפחות  $O(n \log n)$  שאילתות (הוכח בשנת 2007).