

# מכרזים למיקסום רווח

# Revenue-Maximizing Auctions

אראל סגל-הלוי

מקורות:

הקורס של טים, הרצאה 5 והלאה:

<http://theory.stanford.edu/~tim/f13/f13.html>

# מיקסום רווח לעומת מיקסום סכום ערכים

נניח שאנחנו מוכרים חפץ אחד ויש קונה אחד.

איזה מכרז ממקסם את סכום הערכים?  
• זה קל – נותנים לו את החפץ בחינם.

איזה מכרז ממקסם את הרווח של המוכרים?  
• זה קשה – תלוי בערך של השחקן!

במקום למקסם רווח – ננסה למקסם תוחלת רווח.  
• זה דורש מידע סטטיסטי על ערכים של שחקנים  
("סקר שוק").

# מיקסום רווח – חפץ אחד וקונה אחד

דוגמה: סקר-שוק הראה שערכי-הקונים מתפלגים אחיד בין 10 ל-30. מה תוחלת-הרווח של מכרז מיירסון? - תלוי בכלל הבחירה:

- בכלל-הבחירה "מקסם את סכום הערכים":  
ערך-הסף=0, התשלום=0, תוחלת הרווח=0.
- בכלל-הבחירה "בחר את הקונה אם"ם הערך שלו לפחות 10":  
ערך-הסף=10, הקונה תמיד נבחר (בהסתברות 1) ותמיד משלם, תוחלת הרווח=10.
- בכלל-הבחירה "בחר את הקונה אם"ם הערך שלו לפחות 15":  
ערך-הסף=15, הקונה נבחר בהסתברות  $\frac{3}{4}$ , תוחלת הרווח  $= \frac{3}{4} * 15 = 11.25$ .

# מיקסום רווח – חפץ אחד וקונה אחד

דוגמה: סקר-שוק הראה שערכי-הקונים מתפלגים אחיד בין 10 ל-30. מה תוחלת-הרווח של מכרז מיירסון? - תלוי בכלל הבחירה:

• בכלל-הבחירה "בחר את הקונה אם"ם הערך שלו לפחות  $p$ ", ערך-הסף  $p$ , הקונה נבחר בהסתברות  $(30-10)/(p-30)$ , ותוחלת הרווח היא:

$$\begin{aligned} E[\text{Revenue}(p)] &= p * \text{Prob}[v > p] \\ &= p * (30-p)/(30-10) \end{aligned}$$

$$\text{derivative by } p = (30-2p)/20 \rightarrow p_{opt} = 15$$

# מיקסום רווח – חפץ אחד וקונה אחד

**הכללה:** נניח שאספנו נתונים סטטיסטיים על ערכי קונים, והגענו למסקנה שהם מתפלגים כ:

$$\text{Prob}[v < p] = F(p)$$

**איזה מחיר ממקסם את תוחלת הרווח?**

$$E[\text{Revenue}(p)] = p \cdot \text{Prob}[v > p] = p \cdot [1 - F(p)]$$

$$p' = 0 \iff p - \frac{1 - F(p)}{F'(p)} = 0$$

**נגדיר את פונקציית הערך הוירטואלי:**

$$r(v) := v - \frac{1 - F(v)}{F'(v)}$$

**המכרז האופטימלי הוא: מכור אם  $r(v) > 0$ .**

# מיקסום רווח בשיטת מיירסון - כללי

נתון: שוק חד-פרמטרי:

- לכל משתתף יש ערך כספי יחיד ל"היבחרות".
- הערך של משתתף  $j$  לקוח מהתפלגות  $F_j$ .
- (למה התפלגות שונה לכל משתתף? למשל מאפיינים דמוגרפיים).

דרושים:

- כלל-בחירה לבחירת תת-קבוצה של משתתפים.
- כלל-תשלומים שאיתו כלל-הבחירה אמיתי.

כזכור, לפי משפט מיירסון, ברגע שיש כלל-בחירה –  
יש כלל-תשלומים יחיד שאיתו הכלל אמיתי.  
נחפש כלל-בחירה שממקסם את תוחלת הרווח.

# מיקסום רווח בשיטת מיירסון - כללי

לכל כלל-תשלומים  $p$ , תוחלת הרווח היא:

$$E[\text{Revenue}(v_1, \dots, v_n)] = E[\sum_{j=1}^n p_j(v_1, \dots, v_n)]$$

לפי משפט מיירסון, כלל-התשלומים הוא פונקציה של כלל-הבחירה  $c$ . אם מציבים, מקבלים:

$$E[\text{Revenue}(v_1, \dots, v_n)] = E[\sum_{j=1}^n c_j(v_1, \dots, v_n) \cdot r_j(v_j)]$$

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים.  
מסקנה: כדי למקסם רווח, צריך למצוא כלל-בחירה  
אשר ממקסם את סכום הערכים הוירטואליים.

# מיקסום רווח בשיטת מיירסון – חפץ אחד

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים.

$$r_j(v) := v - \frac{1 - F_j(v)}{F'_j(v)}$$

א. קונה אחד:

תוחלת הרווח = הערך הוירטואלי  $r(v)$ .

כלל-הבחירה הוא: מכור אם-ורק-אם  $r(v) > 0$ .

\*\*\* הכלל אמיתי בתנאי ש- $r$  היא פונקציה עולה.

התשלום הוא ערך-הסף  $r^{-1}(0)$ .



# מיקסום רווח בשיטת מיירסון – חפץ אחד

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים.

$$r_j(v) := v - \frac{1 - F_j(v)}{F'_j(v)}$$

ב. הרבה קונים מאותה התפלגות  $F$  ועם אותו  $r$ :  
(נניח ש- $r$  פונקציה עולה).

תוחלת הרווח  $r(v_j) =$  של המנצח.

כלל-הבחירה הוא: מכור למשתתף עם  $v_j$  הכי גבוה,

בתנאי ש  $r(v_j) > 0$ .

התשלום הוא ערך-הסף: הערך השני בגובהו  
או  $r^{-1}(0)$  - הגבוה מביניהם.

--- שקול למכרז ויקרי עם מחיר מינימום  $r^{-1}(0)$  !

# מיקסום רווח בשיטת מיירסון – חפץ אחד

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים.

$$r_j(v) := v - \frac{1 - F_j(v)}{F'_j(v)}$$

ג. שני קונים עם התפלגויות שונות:

תוחלת הרווח  $r_j(v_j) =$  של המנצח.

כלל-הבחירה הוא: מכור למשתתף עם  $r_j(v_j)$  הכי גבוה,

בתנאי ש  $r_j(v_j) > 0$ . התשלום = ערך-הסף.

**דוגמה:**  $F_a = \text{Unif}[10, 30]$ ,  $F_b = \text{Unif}[20, 40]$

$$r_a(v) = 2v - 30, \quad r_b(v) = 2v - 40.$$

אם  $a$  אמר 23 ו- $b$  אמר 27, אז  $a$  יזכה! וישלם את ערך-הסף שלו שהוא 22 [ערך הסף של  $b$  הוא 28].

# מיקסום רווח במערכת הפירסום של יאהו \*

- עד 2008, יאהו השתמשה במחירי-מינימום נמוכים וזהים עבור כל מילות-החיפוש.
- ב-2008 בוצע מחקר סטטיסטי שנועד להעריך את ההתפלגות  $F$  עבור כל מילה בנפרד.
- חושב מחיר-מינימום שונה עבור כל מילה.
- המנהלים לא הסכימו להשתמש במחירים החדשים אלא עשו ממוצע בין הישנים לחדשים.
- **התוצאה: עליה גדולה ברווחים בסוף 2008.**

\* <http://theory.stanford.edu/~tim/f13/I/I6.pdf>

\* Ostrovsky, Michael, and Michael Schwarz. "Reserve prices in internet advertising auctions: A field experiment." Proceedings of the 12th ACM conference on Electronic commerce. ACM, 2011.