

# חלוקת עלויות

# Cost-sharing

אראל סגל-הלוי



# דוגמה: שיתוף נסיעה במונית

נסיעה משותפת במונית יכולה לחסוך עלויות.

- אם כל הנוסעים עושים את אותו מסלול – הגיוני לחלק את דמי-הנסיעה שווה בשווה.
- אבל מה אם כל אחד נוסע במסלול אחר?

**שאלה א – חלוקה הוגנת: איך לחלק את דמי-הנסיעה בין הנוסעים?**

**שאלה ב – מכרז: איך להחליט מי ישתתף בנסיעה?**

# בעיה כללית: משחק שיתופי

נתונים:

- קבוצה של שחקנים -  $N$ ;
- לכל תת-קבוצה  $S$  – העלות של מתן שירות רק לתת-הקבוצה הזאת -  $c(S)$ .

**המטרה:** לגבות מכל שחקן  $j$  תשלום  $p(j)$ , כך שסכום התשלומים הכללי הוא  $c(N)$  – התשלומים מכסים את העלות של כל הקבוצה.

מהו כלל תשלום הוגן?

# עלות שולית

**הגדרה:** העלות השולית של שחקן  $j$ , ביחס לקבוצת שחקנים  $S$ , היא התוספת שהוא מוסיף לעלות כשהוא מצטרף לקבוצה:

$$c(S \cup \{j\}) - c(S)$$

**עקרון ההגינות:** כלל תשלום נקרא סימטרי אם הוא תלוי רק בעלויות השוליות: אם לשני שחקנים יש עלויות שוליות זהות ביחס לכל הקבוצות, אז הם צריכים לשלם אותו הדבר.

**עקרון הלאמלם (null player):** שחקן שכל העלויות השוליות שלו הן אפס, משלם 0.

# ליניאריות

עקרון הליניאריות:

- אם מכפילים את העלויות בקבוע – כל התשלומים נכפלים באותו קבוע.
- דוגמה: המרה משקלים לאגורות.
- אם מחברים שתי טבלאות-עלויות – כל התשלומים מתחברים.
- דוגמה: חישוב תשלומים על שתי נסיעות ביחד, או על כל אחת לחוד.

# משפט שאפלי (Shapley)

**משפט:** ישנו כלל-תשלומים אחד ויחיד המקיים את כל ארבעת התכונות:

- א. כיסוי מלא של העלות הכוללת,
- ב. עקרון הסימטריה,
- ג. עקרון הלמלם,
- ד. עקרון הליניאריות.

כלל-התשלומים הזה נקרא ערך שאפלי.

# ערך שאפלי (Shapley Value)

אלגוריתם לחישוב ערך שאפלי:

- לכל אחד מ- $n$ ! הסדרים האפשריים:
  - לכל שחקן:
  - חשב את העלות השולית שלו בסידור זה.
- לכל שחקן:
- חשב את הממוצע של  $n$ ! העלויות השוליות.

# משפט שאפלי – הוכחה (1)

א. כיסוי מלא: נכון לכל סדר בנפרד  $\leftarrow$  נכון גם לממוצע על כל הסדרים.

ב. סימטריה: ערך שאפלי של כל שחקן נקבע רק לפי העלויות השוליות שלו.

ג. למלם: העלויות השוליות 0  $\leftarrow$  הממוצע 0.

ד. ליניאריות: ערך שאפלי הוא פונקציה ליניארית של הערכים בטבלה.



# משפט שאפלי – הוכחה (2)

[המשך יבוא]

# איך מחליטים מי יקבל שירות?

- עד כאן הנחנו שכולם נוסעים.
- אבל מה קורה אם העלות גבוהה מדי עבור חלק מהנוסעים - איך נחליט מי ייסע?
- **נתון:** לכל שחקן  $j$ , ערך הנסיעה הוא  $v_j$ .
- אם תת-קבוצה מסויימת נוסעת, **הרווחה החברתית** היא סכום הערכים של הנוסעים בתת-הקבוצה, פחות עלות הנסיעה.
- **דרוש:** כלל-החלטה שהוא:
  - א. יעיל פארטו – ממקסם רווחה חברתית.
  - ב. אמיתי – מעודד כל שחקן  $j$  לגלות את  $v_j$ .

# מכרז לקבלת שירות בשיטת VCG

- התוצאות האפשריות – כל  $2^n$  תת-הקבוצות.
- הערך של שחקן  $j$  הוא  $v_j$  אם נוסע, 0 לא.
- הערך של ה"נהג" הוא מינוס עלות הנסיעה.
- בוחרים את התוצאה הממקסמת את הסכום.
- תשלום שחקן  $j$  =: הסכום בלי  $j$ , פחות הסכום של אחרים (כולל ה"נהג") כש- $j$  נמצא.

מכרז VCG הוא:

- יעיל-פארטו – לפי הגדרה.
- אמיתי – הוכחנו.
- הבעיה – גירעון! ראו גליון מצורף.

# מכרז לקבלת שירות - מולין-שנקר (Moulin & Shenker, 2001)

קלט: כלל-תשלום.  $p(S,j)$  = כמה משלם שחקן  $j$   
אם הקבוצה שמקבלת שירות היא  $S$ .

אלגוריתם:

- (1) **איתחול:** כולם נכנסים לחדר.
- (2) אומרים לכל אחד כמה הוא צריך לשלם לפי  $p$ , בהנחה שכל הנוכחים בחדר משתתפים.
- (3) מי שחושב שזה יקר מדי - יוצא מהחדר.
- (4) אם מישהו יצא מהחדר - חזור לצעד 2.
- (5) אחרת - סיים ושלח את הנשארים למונית.

# מכרז מולין-שנקר - אמיתיות

האם מכרז מולין-שנקר הוא אמיתי?

הגדרה: כלל תשלום  $p$  נקרא מונוטוני אם כשהקבוצה קטנה, התשלום גדל (או שווה):

$$\text{If } S \leq T \quad \text{then} \quad p(S, i) \geq p(T, i)$$

משפט: ההדמיה של מכרז מולין-שנקר עם כלל-תשלום מונוטוני היא אמיתית.

הוכחה: התשלום של כל הנוסעים הנשארים לא

קטן ← לנוסע שיצא לא כדאי לחזור ←

ההתנהגות האופטימלית של נוסע היא לצאת

אם"ם התשלום הנוכחי גדול מהערך שלו. זה

בדיוק מה שההדמיה עושה כשהוא אמיתי. \*\*\*

# מכרז מולין-שנקר + ערך שאפלי

טוב, אז האם ערך שאפלי הוא מונוטוני?

**הגדרה:** פונקציית עלות נקראת תת-מודולרית אם יש לה עלות שולית פוחתת, כלומר:

If  $S \leq T$ , then  $c(S \cup \{i\}) - c(S) \geq c(T \cup \{i\}) - c(T)$

**משפט:** במשחק עם עלות שולית פוחתת, כלל-התשלום של שאפלי הוא מונוטוני.

**הוכחה:** שחקן א – בקבוצה, שחקן ב – מצטרף. נחשב את ערך שאפלי של שחקן א לפני ואחרי: \* לפני – ממוצע על  $n!$  סדרים.

\* אחרי – ממוצע של  $(n+1)!$  סדרים:

אם שחקן ב נכנס אחרי א – הערך שווה.

אם שחקן ב נכנס לפני א – הערך קטן או שווה. \*\*\*

# מכרז מולין-שנקר + ערך שאפלי

## יתרונות:

- מאוזן תקציבית;
- הוגן;
- אמיתי (אם יש עלות שולית פוחתת).

## חסרון:

- לא יעיל פארטו.
- הוכחה: שיעורי בית.

# מכרז למתן שירות – טְרִילָמָה

אמיתי	מאוזן תקציבית	יעיל פארטו	
כן	לא	כן	VCG
כן	כן	לא	מולין- שנקר
לא	כן	כן	תשלום = ערך