

# חלוקה הוגנת של שכר דירה Fair Rent Division

אראל סגל-הלוי

# חלוקת שכר דירה: מודל קרדינלי

הנחות:

- "חדרים סבירים" - כל דייר מייחס ערך כספי לכל חדר, סכום הערכים  $\leq$  מחיר הדירה.
- "קוואזי-ליניאריות" - התועלת של דייר שמקבל חדר = ערך החדר פחות המחיר שלו.
- הנחת "הדיירים העניים" בדרך-כלל לא מתקיימת: אם חדר א = 100 וחדר ב = 50, נעדיף חדר א במחיר 5 מחדר ב בחינם.

# חלוקת שכר דירה: סכום הערכים

**משפט:** בכל השמה ללא קנאה, סכום הערכים של הדיירים בחדרים שהם גרים בהם הוא מקסימלי.

**הוכחה:** תהי  $X$  השמת-חדרים ללא קנאה.  
תהי  $Y$  השמה אחרת כלשהי. לפי הגדרת קנאה:

$$V_i(X_i) - P(X_i) \geq V_i(Y_i) - P(Y_i)$$

נסכום על כל הדיירים,  $i$  בין 1 ל- $n$ :

$$\sum (V_i(X_i) - P(X_i)) \geq \sum (V_i(Y_i) - P(Y_i))$$

$$\sum V_i(X_i) - \sum P(X_i) \geq \sum V_i(Y_i) - \sum P(Y_i)$$

בשני הצדדים, סכום המחירים שווה למחיר הדירה. \*\*\*

# מיקסום סכום הערכים

**משפט:** בכל השמה ללא קנאה, סכום הערכים של הדיירים בחדרים שהם גרים בהם הוא מקסימלי.

**מסקנות:**

(1) כל השמת-חדרים ללא קנאה היא יעילה פארטו.

(2) כדי למצוא חלוקת שכ"ד ללא קנאה, צריך אלגוריתם להשמה ממקסמת-סכום-ערכים.

# בעיית ההשמה - האלגוריתם ההונגרי

(Kuhn, Munkres 1957)

- **הקלט:** מטריצה  $n$  על  $n$  המתארת את הערך של כל דייר  $i$  לחדר  $j$ .
- **הפלט:** השמה של דייר לחדר, כך שסכום הערכים של הדיירים לחדריהם גדול ביותר.
- **שימושים נוספים:** השמת עובדים למשימות כך שסכום העלויות של המשימות קטן ביותר.
- **האלגוריתם** (ערך חיובי = עלות שלילית):  
[http://www.math.harvard.edu/archive/20\\_spring\\_05/handouts/assignment\\_overheads](http://www.math.harvard.edu/archive/20_spring_05/handouts/assignment_overheads).
- **סיבוכיות:**  $O(n^3)$

# חלוקת שכר-דירה – קביעת המחירים

- מצאנו השמה ממקסמת-ערכים. צריך לקבוע מחירים כך שההשמה תהיה ללא קנאה. איך?
- יש הרבה דרכים. דרך אחת היא להשתמש בפלט-הביניים של האלגוריתם ההונגרי.
- המטריצה המתקבלת זהה למקורית, פרט ל:
  - תוספת  $x_j$  לכל עמודה  $j$  (המייצגת חדר);
  - תוספת  $y_j$  לכל שורה  $j$  (המייצגת שחקן).
- כל העלויות  $0 \leq$ , ויש אפסים באלכסון.
- מכאן: אם מחיר חדר  $j$  הוא  $x_j$  -- ההשמה ללא קנאה!

# חלוקת שכר-דירה – קביעת המחירים

- קובעים את המחיר של חדר  $j$  ל- $x_j$ .
- משווים את סכום המחירים למחיר הכולל של הדירה.
- מחלקים את העודף / גירעון שווה בשווה בין כולם.
- **קיבלנו חלוקה ללא קנאה!**
- **מימושים והדגמות:**
- גליון אלקטרוני rent-division.ods
- אתר לקבוצות רכישה <http://tora.us.fm/fairness/home/>
- אתר לחלוקת ירושות <http://tora.us.fm/fairness/home/ab.html>
- אלג. גל-מש-פרוקצ'יה-ז'יק: <http://www.spliddit.org/apps/rent>

# חלוקת שכר-דירה – בעיית הטרמפיסט

חדר ב	חדר א	
0	<b>150</b>	דייר א
<b>10</b>	140	דייר ב

**משפט:** במודל הקרדינלי, ייתכן שבכל חלוקה ללא קנאה, אחד הדיירים ישלם מחיר שלילי (צריך לשלם לו שיסכים לגור איתנו...)

**הוכחה:** נניח שיש שני דיירים ושני חדרים, הדירה עולה 100 והערכים הם כמו בטבלה למעלה.

כל חלוקה ללא-קנאה ממקסמת סכום ערכים, לכן יש לתת חדר א לדייר א וחדר ב לדייר ב.

כדי ש-ב לא יקנא, המחיר של חדר א חייב להיות גבוה משל ב ב-130 (לפחות). הסכום הוא 100 ולכן:

$$(\text{price\_b} + 130) + \text{price\_b} = 100$$

$$\text{price\_b} = -15$$

**המחיר של חדר ב חייב להיות שלילי! \*\*\***



# חלוקת שכר-דירה – בעיית הטרמפיסט

אותו משפט

נכון גם

כשסכום

הערכים של כל

דייר שווה

למחיר הכולל:

חדר א	חדר ב	חדר ג	חדר ד	
36	34	30	0	דייר א
31	36	33	0	דייר ב
34	30	36	0	דייר ג
32	33	35	0	דייר ד

$$p_c \geq 35 \text{ [d envies]}$$

$$p_b \geq 33 \text{ [d envies]}$$

$$p_a \geq 33 \text{ [c envies]}$$

$$p_d \leq -1/4 \text{ [sum=100]}$$

# חלוקת שכר דירה – הבחירה הקשה

דיירים שמקבלים כסף	קנאה	עובד רק עם "דיירים עניים"	
לא	לא	כן	אלגוריתם סו. והמשולשים
כן	לא	לא	האלגוריתם ההונגרי ודומיו
לא	כן	לא	אלגוריתם הונגרי עם מחיר מינ. 0