חלוקה הוגנת של חפצים בדידים
Fair Indivisible Item Assignment

אראל סגל-הלוי

חלוקת חפצים בדידים

כשהחפצים לא ניתנים לחלוקה, בדרך-כלל אי אפשר למצוא חלוקה פרופורציונלית וללא קנאה (דוגמה: בית).

פתרונות מקובלים:

1) הוספת כסף למערכת.
דוגמה: אלגוריתמי חלוקת שכר-דירה.

2) מציאת דרך יצירתית לחלק חפץ אחד.
דוגמה: אלגוריתם "וין-וין" לגישור.

3) חלוקה ללא-קנאה-בקירוב. ***דוגמה:***
חלוקת תכשיטים ומקומות בקורסים.

חלוקה הוגנת בקירוב

הגדרה: חלוקה נקראת "ללא קנאה מלבד 1" (Envy Free except 1, **EF1**) אם לכל שני משתתפים א,ב, אם מורידים מהסל של שחקן ב חפץ אחד לכל היותר, אז שחקן א לא מקנא בו.

המשמעות: רמת הקנאה היא הקטנה ביותר האפשרית, בהתחשב בעובדה שהחפצים בדידים.

כשה"עוגה" רציפה – תמיד קיימת חלוקה **EF**.

*האם כשהחפצים בדידים תמיד קיימת חלוקה **EF1**?*

אלגוריתם מעגלי הקנאה

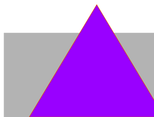
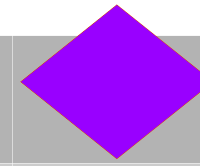
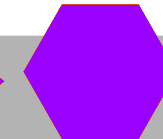
(Lipton, Markakis, Mossel, Saberi, 2004)

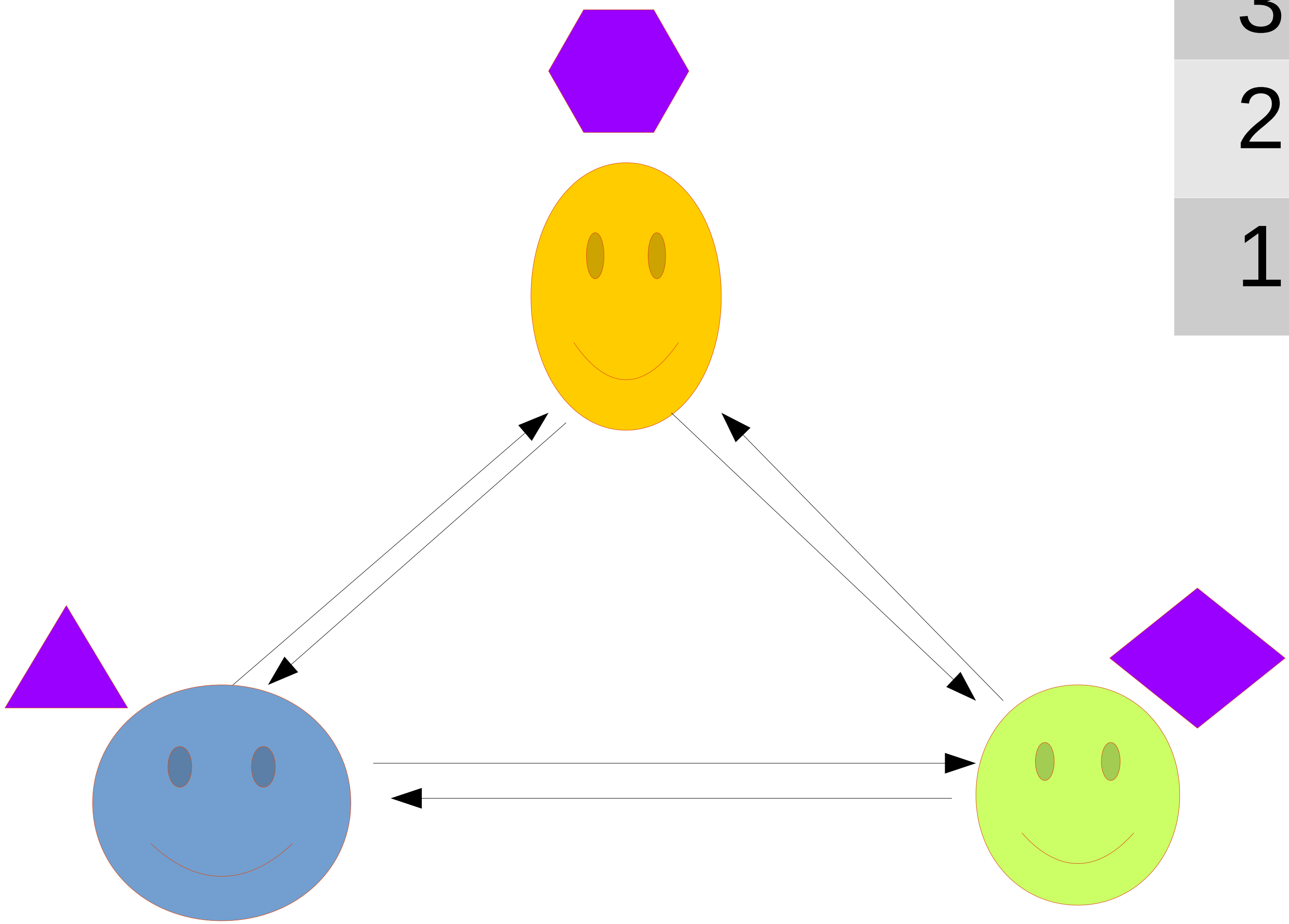
עוברים על החפצים בסדר שרירותי. לכל חפץ:

1. נותנים את החפץ לשחקן שאף-אחד לא מקנא בו.
2. אם אין כזה – סימן שיש מעגל-קנאה. מחליפים סלים במעגל בניגוד לכיוון הקנאה.

מבצעים את 2 עד שאין מעגלים, ואז חוזרים ל-1.

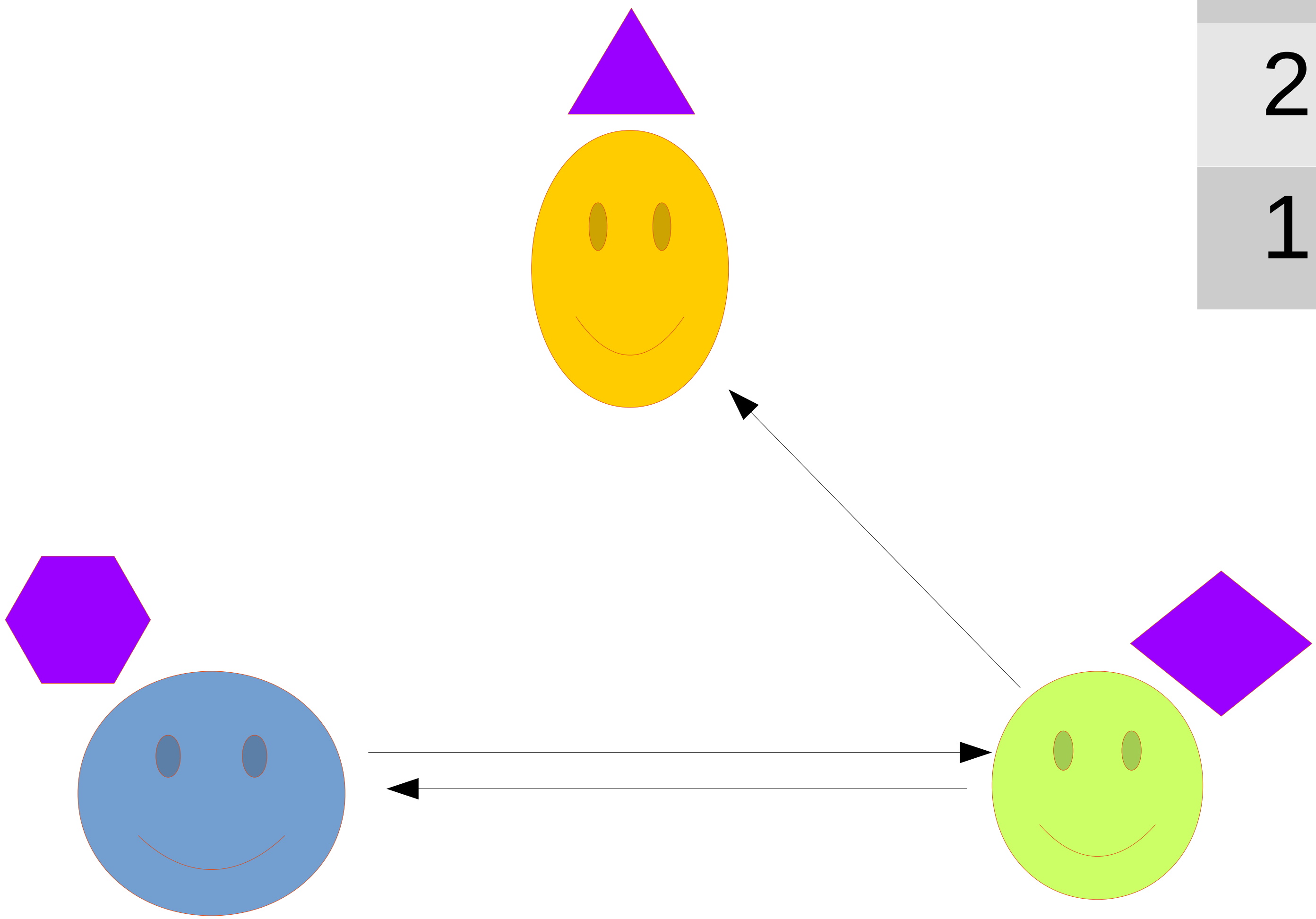
אלגוריתם מעגלי הקנאה - דוגמה

			
3	2	1	
2	1	3	
1	3	2	

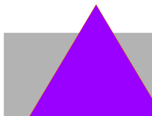
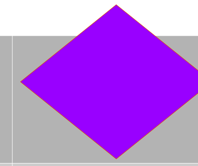
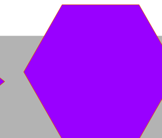


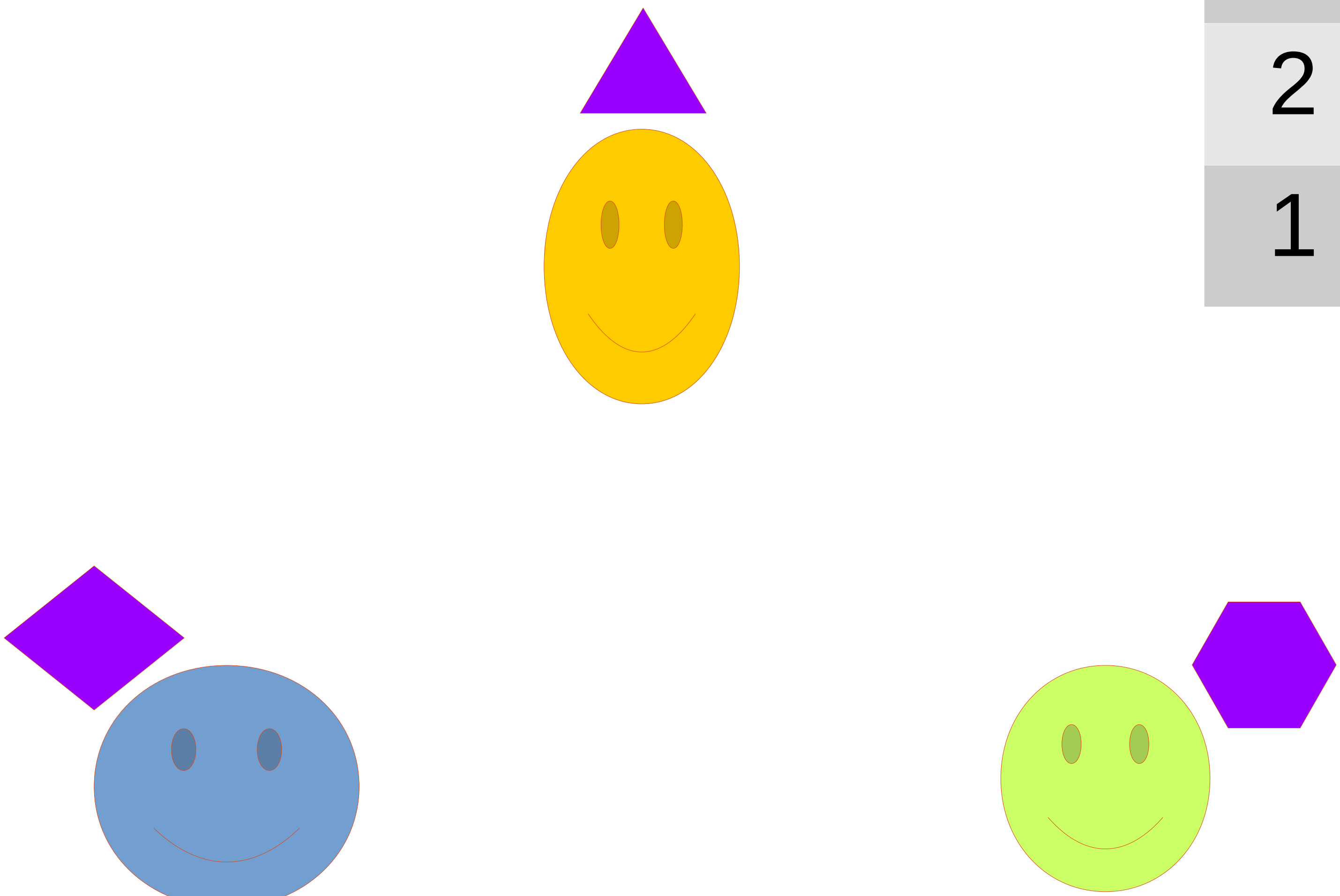
אלגוריתם מעגלי הקנאה - דוגמה

3	2	1	
2	1	3	
1	3	2	



אלגוריתם מעגלי הקנאה - דוגמה

			
3	2	1	
2	1	3	
1	3	2	



אלגוריתם מעגלי הקנאה – זמן ריצה

משפט: אם יש m חפצים ו-n שחקנים, אז זמן-הריצה של אלגוריתם מעגלי הקנאה הוא $O(m\ n^3)$.

הוכחה: מציאת מעגל – DFS - בזמן $O(n^2)$.

הסרת מעגל לא מוסיפה קשתות (כי אוסף הסלים לא משתנה), ומסירה לפחות קשת אחת.

כל חפץ מוסיף לכל היותר $n-1$ קשתות.

לכן יש להסיר לכל היותר $m(n-1)$ מעגלים.

אלגוריתם מעגלי הקנאה - הגינות

משפט: האלגוריתם מחזיר חלוקה EF1.

הוכחה: החלוקה ההתחלתית (הריקה) היא EF1.

מסירת חפץ לשחקן שלא מקנאים בו, אולי גורמת לשאר השחקנים לקנא בו, אבל רק עד כדי חפץ 1.

הסרת מעגל משפרת את התועלת של כל השחקנים במעגל, ולא משנה את אוסף הסלים. לכן, אם החלוקה היתה EF1, היא תישאר EF1 גם אחרי הסרת המעגל. ***

אלגוריתם מעגלי הקנאה - יעילות

משפט: אלגוריתם מעגלי הקנאה עלול להחזיר תוצאה שאינה יעילה-פארטו.

הוכחה: נניח שמחלקים ארבע אבנים יקרות:

	אודם	**ברקת**	**יהלום**	**ספיר**
א	**10**	0	**1**	2
ב	0	**10**	2	**1**

כשמחלקים את החפצים מימין לשמאל, א מקבל אודם ויהלום, ב מקבל ברקת וספיר.
החלוקה לא יעילה פארטו – היה עדיף לתת ל-א את אודם וספיר ול-ב את ברקת ויהלום. ***

חלוקת חפצים הוגנת ויעילה

כשה"עוגה" רציפה – תמיד קיימת חלוקה **EF** ויעילה.

*האם כשהחפצים בדידים קיימת חלוקה **EF1** ויעילה?*

כשה"עוגה" רציפה – החלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא ללא-קנאה ויעילה.

האם כשהחפצים בדידים – החלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא EF1 ויעילה פארטו?

כן! התגלה ב-2016.

מיקסום מכפלת הערכים

(Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, Wang, 2016)

משפט: נניח ש:

* ההעדפות אדיטיביות – ערך של סל הוא סכום הערכים של החפצים בסל.

* קיימת לפחות חלוקה אחת שבה כל שחקן מקבל ערך גדול מאפס.

אז, כל חלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא גם יעילה-פארטו וגם EF1.

הוכחה: יעילות פארטו – ברורה.

EF1 – בשקף הבא.

מיקסום מכפלת הערכים – הוכחת EF1

המשך: נניח ש-i מקנא ב-j. נסתכל על כל החפצים בסל של j. לכל חפץ g, נבדוק את יחס הערכים:

$$V_i(g) / V_j(g)$$

נבחר את החפץ שיחס-הערכים שלו הכי גדול, ונעביר אותו מ-j ל-i. המכפלה בחלוקה החדשה שווה-או-קטנה מהמכפלה בחלוקה הקודמת, ולכן:

$$[V_i(X_i)+V_i(g)]*[V_j(X_j)-V_j(g)] \quad \leq \quad V_i(X_i)*V_j(X_j)$$

$$\rightarrow \quad V_j(X_j) * V_i(g) / V_j(g) \quad \leq \quad V_i(X_i) + V_i(g)$$

מיקסום מכפלת הערכים – הוכחת EF1

$$\rightarrow \quad V_j(X_j) * V_i(g) / V_j(g) \quad \le \quad V_i(X_i) + V_i(g)$$

המשך: יחס הערכים של g הוא הכי גדול ב-X_j, ולכן:

$$V_i(X_j) / V_j(X_j) \quad \le \quad V_i(g) / V_j(g)$$

מציבים למעלה ומקבלים:

$$V_i(X_j) \quad \le \quad V_i(X_i) + V_i(g)$$

$$V_i(X_j) - V_i(g) \quad \le \quad V_i(X_i)$$

מכאן: אם מורידים את *g* מהסל של *j*, אז *i* כבר לא מקנא. ***

מיקסום מכפלת הערכים – אלגוריתם

הבננו שהחלוקה ה"אידיאלית" של חפצים בדידים
היא חלוקה הממקסמת את מכפלת הערכים.
אבל איך מוצאים חלוקה כזאת?

- נסמן: $_i(g)$ = Value of good g to player i.
- $x_{i,g}$ = quantity of good g given to player i.
- אנחנו רוצים לפתור את הבעיה

$$\max \sum_{i=1}^{n} \log\left(\sum_{g=1}^{m} x_{i,g} \cdot V_i(g)\right)$$

$$\text{s.t.} \quad \forall g : \sum_{i=1}^{n} x_{i,g} = 1$$

- כאשר ה-$x_{i,g}$ רציפים, זה קל.
- כאשר ה-$x_{i,g}$ בדידים, זה קשה!

קושי של בעיות אופטימיזציה

	משתנים רציפים	משתנים בדידים
בעיה כללית:	קשה	קשה מאד
בעיה קמורה:	קל (גרדיינט)	קשה
בעיה ליניארית:	קל מאד	בינוני

מיקסום מכפלת הערכים – אלגוריתם

$$\max \sum_{i=1}^{n} \log\left(\sum_{g=1}^{m} x_{i,g} \cdot V_i(g)\right)$$

$$\text{s.t.} \quad \forall g : \sum_{i=1}^{n} x_{i,g} = 1$$

הבעיה המקורית היא קעורה אבל לא ליניארית ולכן מאד קשה.

$$\max \sum_{i=1}^{n} W_i$$

$$\text{s.t.} \quad W_i \leq \log\left(\sum_{g=1}^{m} x_{i,g} \cdot V_i(g)\right)$$

$$\forall g : \sum_{i=1}^{n} x_{i,g} = 1$$

הטריק: ננסה להפוך את הבעיה לליניארית.

צעד ראשון:

מיקסום מכפלת הערכים – אלגוריתם

צעד ראשון:
הבעיה עדיין לא
ליניארית.

$$\max \sum_{i=1}^{n} W_i$$

$$\text{s.t.} \quad W_i \le \log\left(\sum_{g=1}^{m} x_{i,g} \cdot V_i(g)\right)$$

$$\forall g : \sum_{i=1}^{n} x_{i,g} = 1$$

צעד שני: נניח שכל
הערכים הם בין 1
ל-1000. נחליף את
האילוץ האמצעי
ב-500 אילוצים
ליניאריים:

$$W_i \le \log k + [\log(k+1) - \log k] \cdot \left[\sum_{g=1}^{m} x_{i,g} \cdot V_i(g) - k\right]$$

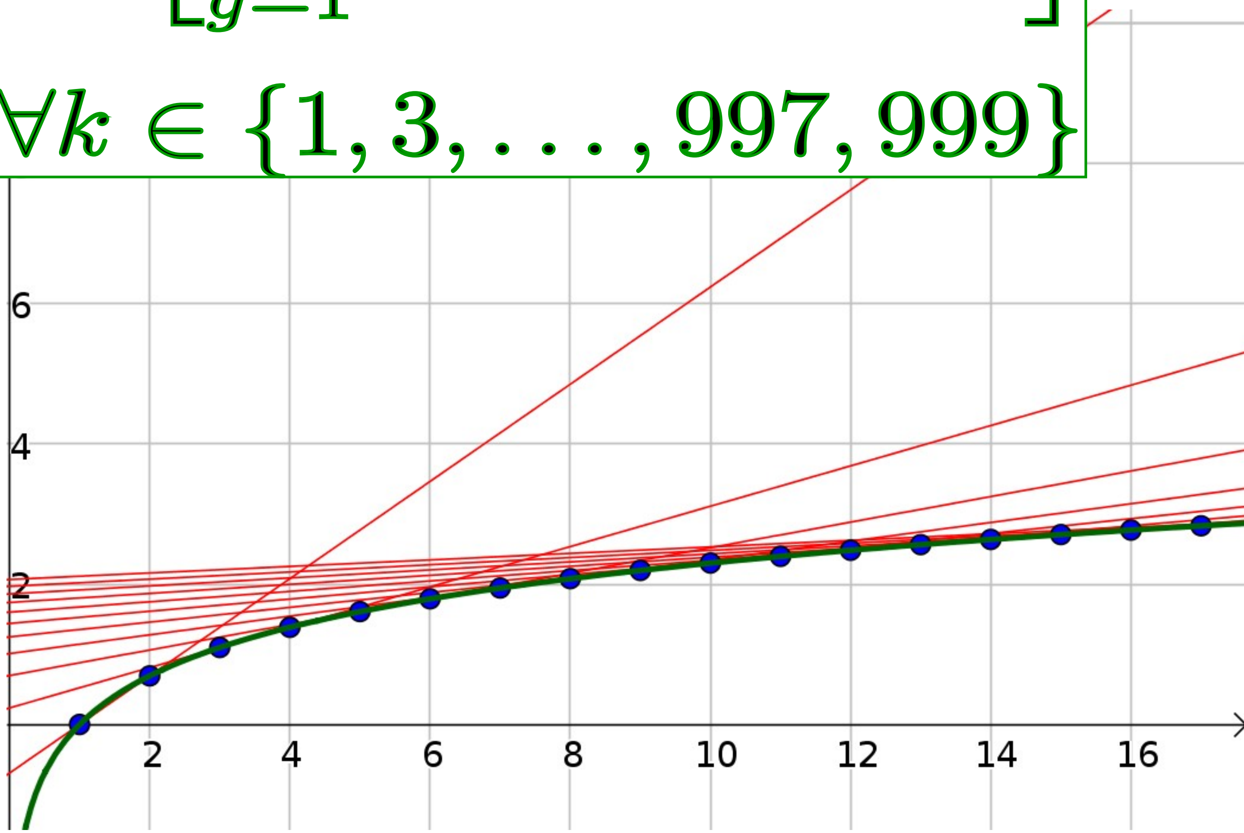
$$\forall k \in \{1, 3, \ldots, 997, 999\}$$

מיקסום מכפלת הערכים – אלגוריתם

$$W_i \leq \log k + [\log(k+1) - \log k] \cdot \left[\sum_{g=1}^{m} x_{i,g} \cdot V_i(g) - k\right]$$
$$\forall k \in \{1, 3, \ldots, 997, 999\}$$

הרעיון: מחליפים את הפונקציה הלוגריתמית באוסף של 500 פונקציות ליניאריות שחוסמות אותה מלמעלה.

פתרון אופטימלי לבעיה הליניארית הוא גם פתרון אופטימלי לבעיה המקורית!



מיקסום מכפלת הערכים – מימוש

http://www.spliddit.org/apps/goods