

## אלגוריתמים לחלוקה הוגנת של שכר דירה

נניח שאתם שוכרים דירה עם שותפים. יש שלושה שותפים ובדירה יש שלושה חדרים, כך שכל שותף צריך לקבל חדר. אבל החדרים לא שווים, נניח, יש סלון גדול הפונה לים, חדרון הפונה לכביש, והחדר השלישי הוא בכלל מרתף טחוב... בניגוד לעוגה, כאן אי אפשר "לחתוך" חדרים - כל אחד צריך לקבל חדר אחד בדיוק. האם אפשר לוודא שהחלוקה תהיה ללא קנאה?

-- התשובה היא כן - אם מכניסים לחישוב גם את המחיר של כל חדר. הרי בנוסף לחדרים, צריך לחלק גם את דמי-השכירות בין השותפים. אם המחיר של המרתף יהיה נמוך משמעותית מהמחיר של הסלון, אז ייתכן שמי שיקבל אותו לא יקנא (כלומר, ברור שהוא היה מעדיף לגור בסלון, אבל הוא מעדיף מרתף בזול על-פני סלון ביוקר).

אם כך, האתגר שלנו בשיעור הזה הוא: **איך לקבוע את הקצאת החדרים ואת המחיר לכל חדר, כך שאף אחד מהשותפים לא יקנא?**

אנחנו נראה שני פתרונות, ובאמצעותם גם נכיר שתי דרכים לייצג העדפות של בני-אדם:

\* העדפות קרדינליות - אנשים יודעים לתת ערך מספרי לכל חפץ, למשל "המרתף שווה בעיני 500 והסלון שווה בעיני 900".

\* העדפות אורדינליות - אנשים יודעים להגיד מה הם מעדיפים, אבל לא יודעים להגיד מספרים. לדוגמה, הם יכולים להגיד "אני מעדיף את המרתף שעולה 300 על-פני הסלון שעולה 800".

לכל דרך יש יתרונות וחסרונות: לרוב האנשים קל יותר להביע העדפות אורדינליות, אבל למחשב קל יותר כמובן לעבוד עם העדפות קרדינליות (מספרים).

## המודל האורדינלי

במודל האורדינלי, אנחנו מניחים שכל אחד מהשותפים יודע להגיד, עבור כל וקטור מחירים, איזה חדר הוא מעדיף בוקטור המחירים הזה. אנחנו מניחים שההעדפות מקיימות את התנאים הבאים:

- החדרים הם סבירים - ולכן, עבור כל וקטור-מחירים שסכום שכר הדירה הכולל, כל דייר מוכן לקבל לפחות חדר אחד.

- השותפים הם עניים - ולכן כל שותף מעדיף חדר בחינם על-פני חדר בתשלום.

עבור שני שותפים, יש פתרון פשוט לחלוקת החדרים: שותף אחד מחליט מה יהיה המחיר של כל חדר, והשותף השני בוחר חדר. הפתרון הזה נותן חלוקה ללא קנאה - בדיוק כמו אלגוריתם "חתוך ובחר" לחלוקת עוגה. האם אפשר להכליל את זה לשלושה שותפים או יותר?

התשובה היא כן - אפשר להשתמש באלגוריתם של סימונס-סו לחלוקת עוגה!

נניח ששכר-הדירה הכולל הוא 1. כל חלוקה של שכר-דירה בין החדרים היא וקטור של מספרים בין 0 ל-1, שסכומם 1. כפי שאתם בוודאי זוכרים, אוסף כל הוקטורים האלה הוא סימפלקס. נבצע מישלוח של הסימפלקס - נחלק אותו לסימפלקסונים קטנים, נניח, בגודל של אגורה אחת (אנחנו מניחים שהשותפים לא מקפידים על הבדלים של אגורה אחת בשכר הדירה). עבור כל וקטור-מחיר שנמצא על קודקוד של המישלוח, נשאל כל אחד מהשותפים "איזה חדר אתה מעדיף?".

הנחת "השותפים העניים" אומרת, שבכל קודקוד ראשי, כל שותף יבחר את אחת הפרוסות הריקות (=) אחד מ  $n-1$  החדרים שהמחיר שלו בקודקוד זה הוא 0. לדוגמה, אם יש שלושה חדרים ושלושה שותפים, אז בקודקוד מספר 1, כל שותף יכתוב 2 או 3. באותו אופן, בקודקוד 2 כל שותף יכתוב 1 או 3, ובקודקוד 3 כל שותף יכתוב 1 או 2. בקוים המחברים בין הקודקודים, כל שותף יבחר את החדר שהמחיר שלו 0. למשל, בקו בין קודקוד 1 לקודקוד 2, כל שותף יבחר את חדר מספר 3, וכו' (זה בדיוק הפוך מהמצב בבעיית חלוקת העוגה).

אנחנו רוצים להשתמש בלמה של שפרנר, אבל לשם כך אנחנו צריכים להחליט איזו תווית תהיה על כל קודקוד ראשי - יש שתי אפשרויות. אם נבחר בכל קודקוד מספר אחר, התוויות על הצלעות יתאימו לתנאי של שפרנר - בדקו ותראו. אפשר לבחור תוויות באופן דומה גם כשיש  $n$  חדרים ו- $n$  שותפים.

לכן, לפי הלמה של שפרנר, קיים סימפלקסון שבו כל שותף בוחר חדר אחר. הסימפלקסון הזה מייצג חלוקה כמעט-ללא-קנאה.

האלגוריתם של סימונס-סו לחלוקת שכר-דירה מומש ע"י הניו-יורק טיימס, ואפשר להשתמש בו כאן:

<https://www.nytimes.com/interactive/2014/science/rentdivisioncalculator.html>

## החיסרון של המודל האורדינלי

החיסרון העיקרי של המודל האורדינלי הוא "הנחת הדיירים העניים". רוב השותפים לא בהכרח מעדיפים חדר בחינם על חדר בתשלום. לדוגמה, אם המרתף הטחוב הוא בחינם, והסלון הענק עולה שקל לחודש, גם שותפים עניים במיוחד כנראה יעדיפו את הסלון.

הלקח מסיפור זה: לא מספיק לדעת אלגוריתמים - צריך גם להבין את ההנחות שלהם, ולוודא שהן מתאימות למציאות.

כדי להתמודד עם בעיה זו, נציג אלגוריתם המסתמך על **המודל הקרדינלי** - ואינו מניח את הנחת הדיירים העניים.

## מאמרים להרחבה ולמטלת רשות

1. M Ghodsi, M Latifian, Arman Mohammadi, Sadra Moradian, Masoud Seddighin (2018), "[Rent Division Among Groups](#)"
2. Velez (2018), "Equitable Rent Division", <https://dl.acm.org/citation.cfm?id=3274528>, <http://respec.tamu.edu/velezeqrent.pdf>
3. [AD Procaccia](#), [RA Velez](#), D Yu (2018), "[Fair rent division on a budget](#)".
4. [Megumi Asada](#), [Florian Frick](#), [Vivek Pisharody](#), [Maxwell Poley](#), [David Stoner](#), [Ling Hei Tsang](#), and [Zoe Wellner](#); "Fair Division and Generalizations of Sperner- and KKM-type Results", <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/17M1116210>
5. Azrieli, Yaron; Shmaya, Eran (2014). "Rental harmony with roommates". Journal of Economic Theory. **153**: 128. [arXiv1406.6672](#). doi:10.1016/j.jet.2014.06.006.
6. Lachlan Dufton and Kate Larson (2011). "[Randomised Room Assignment-Rent Division](#)" (PDF). Proceedings of the IJCAI-2011 Workshop on Social Choice and Artificial Intelligence. IJCAI. pp. 34–39. Retrieved 5 March 2016.

7. Sun, Ning; Yang, Zaifu (2003). "A general strategy proof fair allocation mechanism". Economics Letters. **81**: 73. [doi:10.1016/s0165-1765\(03\)00151-4](https://doi.org/10.1016/s0165-1765(03)00151-4).
8. Andersson, Tommy (2009). ["A general strategy-proof fair allocation mechanism revisited"](#). Economics Bulletin: 1719–1724.
9. Andersson, Tommy; Ehlers, Lars; Svensson, Lars-Gunnar (2014). "Budget balance, fairness, and minimal manipulability". Theoretical Economics. **9** (3): 753. [doi:10.3982/te1346](https://doi.org/10.3982/te1346).
10. Gal, Ya'akov (Kobi); Mash, Moshe; Procaccia, Ariel D.; Zick, Yair (2016). ["Which Is the Fairest \(Rent Division\) of Them All?"](#). ACM: 67–84. [doi:10.1145/2940716.2940724](https://doi.org/10.1145/2940716.2940724). ISBN 9781450339360.

סיכום: אראל סגל-הלוי.