

# חלוקה יעילה

# Efficient Division

אראל סגל-הלוי

# מהי יעילות כלכלית?

נסביר ע"י דוגמה. שלושה אחים רוצים ללכת יחד למסעדה ומתלבטים באיזו מסעדה לבחור. כל אח מדרג את המסעדות מהכי גרועה בעיניו (1) להכי טובה בעיניו (5):

מסעדה:	א	ב	ג	ד	ה
עמי:	1	2	3	4	5
תמי:	3	1	2	5	4
רמי:	3	5	5	1	1

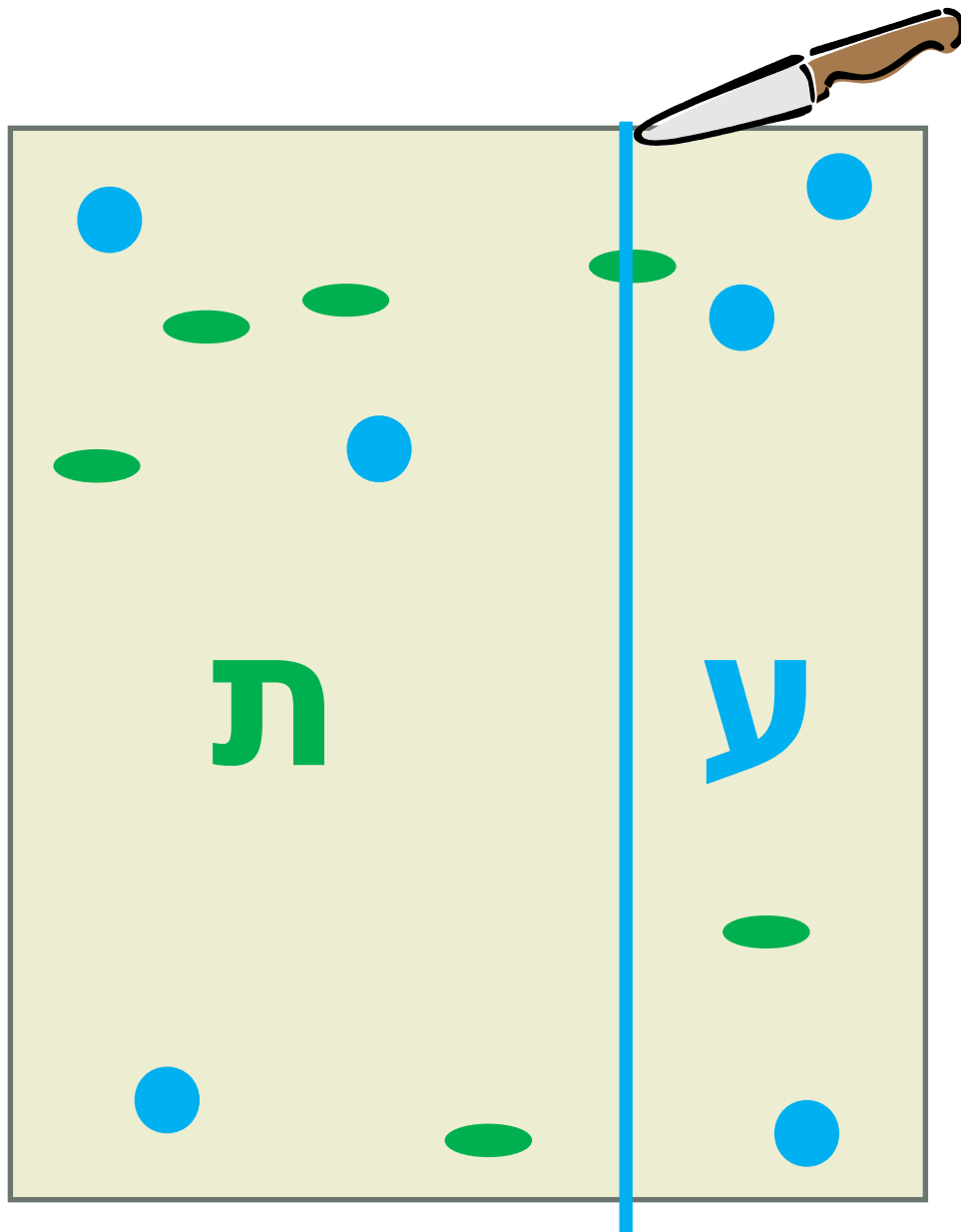
איזו בחירה – מבין החמש – היא לא יעילה?  
--- ב! כי בעיני כולם, היא פחות טובה מ-ג.

# מהי יעילות כלכלית?

## הגדרות:

- מצב א נקרא **שיפור פארטו** (Pareto) של מצב ב, אם הוא טוב יותר לחלק מהמשתתפים, וטוב לפחות באותה מידה לכולם.
- בעברית: "זה נהנה וזה לא חסר".
- מצב נקרא **יעיל פארטו** אם לא קיים מצב אחר שהוא שיפור-פארטו שלו.
- **יעילות פארטו** – תנאי הכרחי לבחירה שהיא "נכונה" מנקודת-מבט כלכלית.
- האם האלגוריתמים לחלוקת-עוגה שראינו הם מחזירים תמיד חלוקה שהיא יעילה פארטו?

# יעילות אלגוריתם "חתוך ובחר"



בדרך-כלל,  
אלגוריתם "חתוך  
ובחר" אינו יעיל  
פארטו.

*דוגמה*  
(עמי חותך ותמי בוחרת):

# יעילות אלגוריתם "חתוך ובחר"

**משפט:** אלגוריתם "חתוך ובחר" מחזיר תוצאה יעילה פארטו אם מתקיימים התנאים הבאים:

- (1) העוגה חד-ממדית.
- (2) שני השחקנים רוצים רק חתיכות קשירות.
- (3) לכל נקודה בעוגה יש ערך חיובי ממש.
- (4) החותך חותך לשני חלקים שווים ולא "מתחכם"

**הוכחה:**

לפי תנאים 1+2, יש רק שתי אפשרויות: או שהחותך משמאל והבוחר מימין, או הפוך. לפי תנאי 3, בסדר שנבחר, אין שיפור פארטו. לפי תנאי 4, גם בסדר ההפוך אין שיפור פארטו.

\*\*\*

# יעילות – המקרה הכללי

.... אבל מה קורה אם:

- (1) העוגה רב-ממדית?
- (2) השחקנים רוצים חתיכות לא דווקא קשירות?
- (3) יש הרבה שחקנים – יותר משניים?
- (4) אנחנו רוצים שהחלוקה תהיה גם ללא קנאה?

## הנחות:

- ה"עוגה" מחולקת לאיזורים. הערך של כל שחקן אחיד בכל איזור (אבל שונה לכל שחקן).
- אין חשיבות לקשירות.
- לדוגמה: ה"איזורים" מייצגים משאבי מיחשוב.

# יעילות – מיקסום סכום הערכים

ניסיון ראשון: נמצא חלוקה הממקסמת את סכום הערכים. הרעיון: כל חלוקה כזאת יעילה פארטו.

$$\max \sum_{j=1}^n V_j(X_j)$$

אלגוריתם: תן כל אזור לשחקן עם הערך הכי גבוה:

מעבד	זיכרון	דיסק	
81	19	0	עמי:
80	0	20	תמי:

רואים שהאלגוריתם לא הוגן. האם הוא יעיל?

# יעילות – מיקסום סכום הערכים

**משפט:** כל חלוקה הממקסמת את סכום הערכים היא יעילה פארטו.

- הוכחה:** נתונה חלוקה א הממקסמת סכום ערכים.
- נניח בשלילה שהחלוקה לא יעילה פארטו.
  - אז קיימת חלוקה ב שהיא שיפור-פארטו שלה.
  - בחלוקה ב, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו בחלוקה א, ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר.
  - לכן בחלוקה ב סכום הערכים גבוה יותר – בסתירה לכך שחלוקה א ממקסמת את סכום הערכים.



# יעילות – מיקסום סכום עולה

ניסיון שני: נמצא חלוקה הממקסמת את הסכום של פונקציה עולה של הערכים:

$$\max \sum_{j=1}^n f(V_j(X_j))$$

דוגמה: שחקן א מקבל  $x$  אחוזים מהאזור השמאלי:

מעבד	זיכרון	דיסק	
81	19	0	עמי:
80	0	20	תמי:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & f(81x + 19) + f(80(1-x) + 20) \\ \text{subject to} & 0 \leq x \leq 1 \end{array}$$

# יעילות – מיקסום סכום עולה

**משפט:** כל חלוקה הממקסמת סכום של פונקציה עולה כלשהי של הערכים, היא יעילה פארטו.

**הוכחה:** נתונה חלוקה א הממקסמת סכום זה.

• נניח בשלילה שהחלוקה לא יעילה פארטו.

• אז קיימת חלוקה ב שהיא שיפור-פארטו שלה.

• בחלוקה ב, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו

בחלוקה א, ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר.

• כיוון שהפונקציה עולה, בחלוקה ב הסכום גבוה יותר

– סתירה לכך שחלוקה א ממקסמת את הסכום.

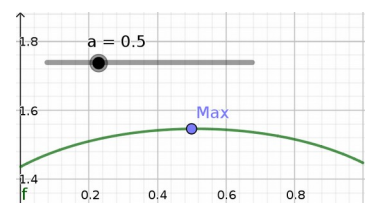
# מיקסוס סכום עולה - דוגמה

דוגמה לבעיית אופטימיזציה הממקסמת סכום של פונקציה עולה של הערכים:

$$\max \sum_{j=1}^n \sqrt{V_j(X_j)}$$

דוגמה: שחקן א מקבל  $x$  אחוזים מהאזור השמאלי:

מעבד	זיכרון	דיסק	
81	19	0	עמי:
80	0	20	תמי:



המקסימום ב:  $x \sim 0.5$   
במקרה הזה הוגן!

$$\max \sqrt{81x + 19} + \sqrt{80(1 - x) + 20}$$
$$\text{s.t. } 0 \leq x \leq 1$$

# יעילות – מיקסום סכום קעור

**משפט:** לכל פונקציה קעורה יש נקודת מקסימום אחת ויחידה בכל תחום קמור.

**מסקנה:** מקסימום מקומי של הפונקציה הוא גם מקסימום גלובלי.

**מסקנה מעשית:** קיימים אלגוריתמים מהירים למציאת נקודת מקסימום (דוגמה: טיפוס על גבעה).  
ראו בקורס חקר ביצועים או בתוכנות מתימטיות, למשל Mathematica:

```
In[9]:= FindMaximum[{  
(81 x + 19)^0.5 + (80 (1 - x) + 20)^0.5, 0 <= x  
<= 1}, {x}]
```

```
Out[9]= {15.4601, {x -> 0.512327}}
```

# יעילות – מיקסום סכום קעור

עכשיו כשאנחנו יודעים שקיימים אלגוריתמים מהירים לחישוב מקסימום של סכום קעור של הערכים, השאלה הנשארת היא – איזו פונקציה  $f$  לבחור?

מתברר שאם הפונקציה  $f$  היא לוגריתמית:

$$f(V) = \log(V)$$

אז החלוקה לא רק יעילה אלא גם ללא קנאה!

# יעילות – מיקסום סכום לוגים

**משפט:** כל חלוקה הממקסמת את סכום לוגי הערכים היא חלוקה ללא קנאה.

**הוכחה:** נסתכל בפרוסת עוגה אינפיניטימלית,  $Z$ .  
התרומה שלה ל- $f(V_j(X_j))$  היא: (חשבון אינפי 1)

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(Z)$$

לכן, אלגוריתם האופטימיזציה ייתן כל פרוסה  $Z$   
לשחקן  $j$  שהמכפלה הזאת עבירו גדולה ביותר:

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(Z) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(Z)$$

נסכם את המשוואה על כל הפרוסות שניתנו ל- $j$ :

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

# יעילות – מיקסום סכום לוגים

**משפט:** כל חלוקה הממקסמת את סכום לוגי הערכים היא חלוקה ללא קנאה.

הוכחה [המשך]:

לכל חלוקה הממקסמת את הסכום של  $f(V)$ :

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(X_i)$$

כאשר  $f$  היא פונקציה לוגריתמית, מקבלים:

$$(1 / V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq (1 / V_i(X_i)) * V_i(X_i)$$

מעבירים אגף ומקבלים, לכל שני שחקנים  $j, i$ :

$$V_i(X_i) \geq V_j(X_j)$$

וזו בדיוק ההגדרה של חלוקה ללא קנאה! \*\*\*

# יעילות, הגינות וקשירות

ראינו שתמיד אפשר למצוא חלוקה שהיא:

- הוגנת ויעילה,
- הוגנת וקשירה,
- יעילה וקשירה.

האם תמיד קיימת חלוקה הוגנת, יעילה וקשירה?

-- לא! הנה דוגמה:

עמי	2	0	3	0	2	0	0
תמי	0	0	0	0	0	7	0
צומי	0	2	0	2	0	0	3



# חלוקה ללא קנאה - סיכום

כן

לא

קשיר <

יעיל פארטו  
v

סימונס-סו:  
זמן אקספוננציאלי  
ברמת הדיוק של  
הקירוב.

עזיז-מקנזי:  
זמן  
היפר-אקספוננציאלי  
במספר השחקנים.

לא

לא קיים.

אופטימיזציה קמורה:  
זמן פולינומיאלי  
במספר השחקנים  
והאיזורים.

כן