Année académique 2023–2024

PHYS-F432 – THÉORIE DE LA GRAVITATION

– Seconde séance d'exercices –

calcul tensoriel sur une variété différentielle et équations de Maxwell en espace-temps courbe

« *Aide-mémoire* »

---

1 Tenseurs sur une variété différentielle

On définit un tenseur de rang (p, q) par la façon dont laquelle ses composantes $T^{\mu_1 \ldots \mu_p}{}_{\nu_1 \ldots \nu_q}$ se transforment sous un changement de coordonnées quelconque $x^\mu \to x^{\mu'}(x)$:

$$T^{\mu_1 \ldots \mu_p}{}_{\nu_1 \ldots \nu_q} \to T^{\mu'_1 \ldots \mu'_p}{}_{\nu'_1 \ldots \nu'_q} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu'_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial x^{\nu'_q}} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q}.$$

Quelques cas particuliers :

- ◇ Un **scalaire** est un tenseur de rang $(0, 0)$;
- ◇ Un **vecteur** est un tenseur de rang $(1, 0)$;
- ◇ Un **covecteur** est un tenseur de rang $(0, 1)$;
- ◇ Une **métrique** est un tenseur de rang $(0, 2)$ symétrique et non-dégénéré.

On introduit la notation $_{(\cdot)}$ (respectivement $_{[\cdot]}$) pour la partie totalement symétrique (respectivement antisymétrique) d'un tenseur de rang $(0, \ell)$ $T_{\mu_1 \ldots \mu_\ell}$:

$$T_{(\mu_1 \ldots \mu_\ell)} \equiv \frac{1}{\ell!} \sum_{\pi \in S_\ell} T_{\mu_{\pi(1)} \ldots \mu_{\pi(\ell)}},$$
$$T_{[\mu_1 \ldots \mu_\ell]} \equiv \frac{1}{\ell!} \sum_{\pi \in S_\ell} \mathrm{sgn}(\pi) T_{\mu_{\pi(1)} \ldots \mu_{\pi(\ell)}}.$$

Ici, S_ℓ désigne le groupe des permutations à ℓ éléments.

2 Dérivées covariantes

La **dérivée covariante** d'un tenseur $T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}{}_{\beta_1 \ldots \beta_n}$ de rang (m, n) est donnée par [1]

$$\begin{aligned}\nabla_\gamma T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}{}_{\beta_1 \ldots \beta_n} = {} & T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}{}_{\beta_1 \ldots \beta_n, \gamma} + \Gamma^{\alpha_1}_{\lambda\gamma} T^{\lambda \alpha_2 \ldots \alpha_m}{}_{\beta_1 \ldots \beta_n} + \ldots + \Gamma^{\alpha_m}_{\lambda\gamma} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1} \lambda}{}_{\beta_1 \ldots \beta_n} \\ & - \Gamma^{\lambda}_{\beta_1 \gamma} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}{}_{\lambda \beta_2 \ldots \beta_n} - \ldots - \Gamma^{\lambda}_{\beta_n \gamma} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}{}_{\beta_1 \ldots \beta_{n-1} \lambda}.\end{aligned}$$

C'est un tenseur de rang $(m, n+1)$. On utilise parfois les notations compactes

$$T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}{}_{\beta_1 \ldots \beta_n ; \mu} \equiv \nabla_\mu T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}{}_{\beta_1 \ldots \beta_n},$$
$$T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}{}_{\beta_1 \ldots \beta_n , \mu} \equiv \partial_\mu T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}{}_{\beta_1 \ldots \beta_n}.$$

---

1. Plus exactement, ce sont ses composantes que nous écrivons ici.

Sauf mention contraire, nous emploierons toujours la connexion de Levi-Civita. Ses coefficients de connexion sont les **symboles de Christoffel** :

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}(\partial_\nu g_{\rho\lambda} + \partial_\rho g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\nu\rho}).$$

3 Formes différentielles

Une forme différentielle de rang p (ou **p-forme**) ω est un tenseur totalement antisymétrique de rang $(0, p)$:

$$\omega \equiv \frac{1}{p!} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \mathrm{d}x^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\alpha_p}.$$

On note Ω^p l'ensemble des champs de p-formes sur une variété. Il est utile de se souvenir des opérations suivantes :

- ◇ Le **wedge-produit** $\wedge$ est une application $\wedge : \Omega^p \times \Omega^q \to \Omega^{p+q}$ dont l'action est définie (en composantes) par

$$(\omega \wedge \mu)_{\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_q} \equiv \frac{(p+q)!}{p!\, q!} \omega_{[\alpha_1 \dots \alpha_p} \mu_{\beta_1 \dots \beta_q]}.$$

- ◇ La **dérivée extérieure** d est une application $\mathrm{d} : \Omega^p \to \Omega^{p+1}$, dont l'action sur une p-forme est définie par

$$(\mathrm{d}\omega)_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1}} \equiv (p+1) \partial_{[\alpha_1} \omega_{\alpha_2 \dots \alpha_{p+1}]}.$$

- ◇ Le **dual de Hodge** est une application $\star : \Omega^p \to \Omega^{n-p}$ définie par

$$(\star A)_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-p}} \equiv \frac{1}{p!} \varepsilon^{\beta_1 \dots \beta_p}{}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-p}} A_{\beta_1 \dots \beta_p}.$$

4 Symbole et tenseur de Levi-Civita

Sur une variété (pseudo-)Riemannienne $(\mathcal{M}, g)$ de dimension n, le **tenseur de Levi-Civita** $\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}$ est le tenseur totalement antisymétrique défini comme

$$\varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \equiv \sqrt{|g|}\, \tilde{\varepsilon}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n},$$

avec $\tilde{\varepsilon}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$ l'habituel symbole de Levi-Civita, c-à-d le symbole totalement antisymétrique et numériquement invariant (sous les transformations de déterminant positif) tel que $\tilde{\varepsilon}_{1 \dots n} = +1$. On montre que $\tilde{\varepsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n}$ est une densité tensorielle de poids 1 et que $\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}$ est un tenseur (*c.f.* exercice 2).

On note qu'on a

$$\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = (-1)^s n!,$$

où s est le nombre de '$-$' apparaissant dans la signature de la métrique. En agissant avec ∇_μ sur cette équation et en utilisant le fait que $\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ est non-nul, on obtient

$$\nabla_\mu \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = 0.$$

Enfin, on peut montrer que

$$\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \varepsilon_{\beta_1 \dots \beta_n} = (-1)^s n!\, \delta^{[\alpha_1}_{\beta_1} \dots \delta^{\alpha_n]}_{\beta_n}.$$

En contractant cette équation sur j de ses indices, on trouve l'identité remarquable

$$\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_j \alpha_{j+1} \dots \alpha_n} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_j \beta_{j+1} \dots \beta_n} = (-1)^s (n-j)!\, j!\, \delta^{[\alpha_{j+1}}_{\beta_{j+1}} \dots \delta^{\alpha_n]}_{\beta_n}.$$