

Séance 10 : Représentations de $su(3)$ - Wigner-Eckart - Gell-Mann

1. Dans le modèle de Gell-Mann, les hadrons sont composés de trois quarks et les nucléons stables et résonances hadroniques forment les représentations irréductibles de $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$. Trouver ces représentations.
2. Dans le modèle de Gell-Mann, chaque poids de la représentation $(3, 0) = \mathbf{10}$ de $su(3)$ correspond à une résonance hadronique.
 - (a) Tracer le diagramme des poids de la représentation $(3, 0) = \mathbf{10}$ de $su(3)$.
 - (b) On définit l'isospin comme la valeur propre de $h_1 = T^3$, le générateur de Cartan de la sous-algèbre d'isospin $su(2)$. On définit l'hypercharge comme la valeur propre de $Y = \frac{2}{\sqrt{3}}T^8 = \frac{2}{\sqrt{3}}h_2$ et la charge électrique comme la valeur propre de $Q = h_1 + \frac{Y}{2}$. Utiliser la table des nombres quantiques suivants des résonances hadroniques connues en 1962 pour assigner les particules aux poids de la représentation $\mathbf{10}$.

Baryon	Isospin	Charge électrique
Δ^-	$-\frac{3}{2}$	-1
Δ^0	$-\frac{1}{2}$	0
Δ^+	$\frac{1}{2}$	1
Δ^{++}	$\frac{3}{2}$	2
Σ^{*-}	-1	-1
Σ^{*0}	0	0
Σ^{*+}	1	1
Ξ^{*-}	$-\frac{1}{2}$	-1
Ξ^{*0}	$\frac{1}{2}$	0

Indication : Chercher tout d'abord la racine associée à la sous-algèbre d'isospin.

- (c) Prédire les nombres quantiques d'une nouvelle particule (en 1962).
3. D'après Gell-Mann, on définit l'opérateur de masse comme la somme d'une constante M_0 et d'un opérateur tensoriel dans la représentation $(1, 1) = \mathbf{8}$ donné par

$$(M)_j^i = M_0 \delta_j^i + \mu (T^8)_j^i \quad (1)$$

où μ est une constante. On définit par B^* un vecteur de l'espace de représentation de **10**. C'est un vecteur à 10 composantes complexes qui représente les états possibles d'une résonance hadronique. On veut calculer les relations entre les masses des hadrons.

- (a) Ecrire les relations de commutation entre l'opérateur de masse et les générateurs de la sous-algèbre d'isospin. Ecrire aussi le commutateur $[T_8, M]$.
- (b) Utiliser les méthodes tensorielles pour calculer les éléments de matrice (B^*, MB^*) en termes d'éléments de matrice réduits. Pour ce faire, effectuer la décomposition en composantes irréductibles du produit tensoriel **10** \otimes **8**.
- (c) Dédire plusieurs relations entre les masses des 10 résonances hadroniques. La masse du baryon P est définie comme $M_P = (B^*(P), MB^*(P))$ où on sélectionne le vecteur B^* correspondant à la particule P et on normalise le produit hermitien par $(B^*(P), B^*(P')) = \delta_{PP'}$.
- (d) Utiliser les valeurs expérimentales de 1962

$$M_\Delta = 1230 \text{ Mev}, \quad M_{\Sigma^*} = 1385 \text{ Mev}, \quad M_{\Xi^*} = 1530 \text{ Mev}$$

pour prédire la masse de la particule prédite en exercice 2(c). C'est une des prédictions de Gell-Mann de 1964 qui lui a valu le prix Nobel en 1969.