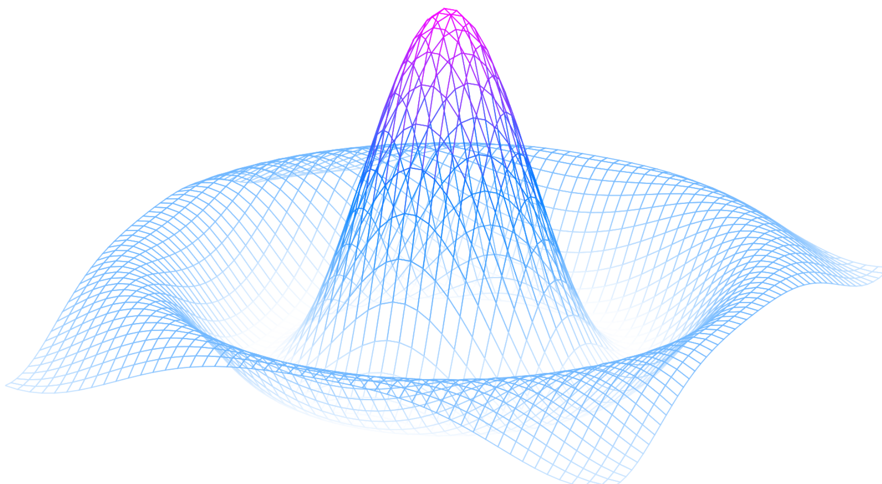
Université Libre de Bruxelles



Études sur les fonctions
en vue du test d'admission en mathématiques

Volume 2 - Notions avancées

Antoine DIERCKX

Version du 17 octobre 2023

Résumé

Les notes qui suivent sont à usage strictement personnel et n'ont été ni relues ni corrigées par un·e professionnel·le. Elles sont destinées à introduire certains concepts et techniques mathématiques mais ne constituent en aucun cas un syllabus. De très bons ouvrages, complets et en accès libres, peuvent être trouvés ici [1] et là [2].

Cette note est séparée en deux volumes :

— le premier porte sur des notions fondamentales, indispensables à la réussite du test d'admission en mathématique.

— le deuxième aborde des notions plus avancées, qui vous seront utiles plus tard dans votre parcours.

J'aimerais également remercier les personnes qui m'ont aidé dans la rédaction et la correction de cette note, en particulier : Sarah Lejeune et Clara Hannon.

> « S'il n'y pas de solution, c'est qu'il n'y a pas de problème »
> *Les Shadocks*

Enfin, si vous avez des remarques et/ou des corrections, contactez moi à l'adresse antwandirx@gmail.com.

Bonne lecture et bon courage !

Table des matières

Première partie
Trigonométrie

Le but de cette partie est l'introduction d'un nouveau pan des mathématiques : la *trigonométrie*.

Il s'agit de l'étude des triangles, des angles et des courbes. Partout où un cercle et une droite se côtoient se cache des notions de trigonométries.

Il est probable, si vous vous êtes déjà frotté à cette discipline à l'école, qu'elle vous en ait laissé un souvenir épineux, constitués de règles compliqués à retenir bêtement par coeur et de formules mathématiques alambiquées. Nous essayerons ici d'éviter un tel enseignement nécrosé, et l'on veillera à se concentrer sur une approche intuitive afin de limiter autant que faire se peut l'apprentissage façon bétail si cher à notre enseignement public. [1]

La trigonométrie une matière assez complexe et qui demande plusieurs lectures avant d'intégrer les concepts. Si vous avez des difficultés avec ce sujet, je ne peux trop vous recommander les vidéos de Clipédia sur le sujet. [4]
Une synthèse sur les fonctions trigonométriques peut également être trouvée ici.[5]

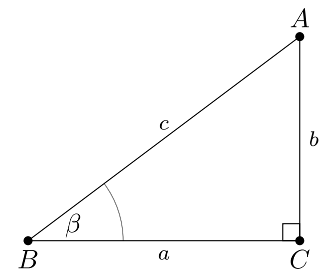
1. Si le sujet de l'enseignement des maths vous intéresse, je ne peut trop vous recommander le livre suivant : *La lamentation d'un mathématicien* [3]

1 Triangles et cercles

Commençons par le commencement. Avant de s'aventurer dans l'étude des cercles, il nous faut passer par celle des triangles. Cela nous permettra également de définir une distance en 2 et 3 dimensions, ce qui nous sera utile pour la suite.

1.1 Rappel sur les triangles rectangles

Définition 1.1. Un triangle de sommets A, B, C, de cotés a, b, c et d'angles α, β, γ : $\mathcal{T}(A, B, C)$ est dit rectangle en C si l'angle $\angle B\mathbf{C}A = 90°$.
Par rapport à l'angle $\angle A\mathbf{B}C = \beta$, on nomme
— b le **coté opposé**,
— a la **coté adjacent**,
— c l'**hypoténuse**.



Remarque. Par convention, on note avec une *lettre majuscule* les sommets, un *lettre minuscule* les cotés et une *lettre grecque* les angles.
De plus, le coté a est toujours à l'opposé du sommet A et de l'angle α. De même pour b et c.

1.2 Théorème de Pythagore

Maintenant que nous savons nommer les éléments d'un triangle, nous pouvons énoncer le théorème de Pythagore :

Théorème 1.1 (Pythagore)**.** *Soit $\mathcal{T}(a, b, c)$ un triangle rectangle en C.*
Alors le carré de la longueur de l'hypoténuse (ou côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.
Si on nomme a et b le cotés adjacents à l'angle droit du triangle rectangle, et c son coté opposé, on peut écrire :

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1.1}$$

ou encore :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1.2}$$

Remarque. Notons qu'on ne considère pas le cas où $c < 0$ (c'est à dire $c = -\sqrt{a^2 + b^2}$) car une distance est, par définition, positive ou nulle.

1.3 Distance euclidienne

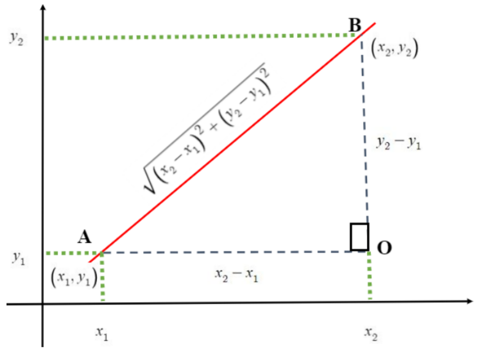
Définition 1.2 (Distance entre deux points)**.** Soit deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2). On définit la distance entre ces deux points à l'aide du théorème de Pythagore :

$$d^2 \equiv (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \tag{1.3}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1.4}$$

$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \tag{1.5}$$

où $\Delta x = x_2 - x_1$ et $\Delta y = y_2 - y_1$



Remarque. Il y a plusieurs manière de définir une distance. Celle présentée ici est dite *euclidienne* ou distance *usuelle.*

Figure 1 – Illustration de la distance euclidienne [6]

2 Cercles et angles

Avant de commencer la trigonométrie proprement dite, on va se simplifier la vie en utilisant une nouvelle unité d'angle : le *radian.*

Notation 2.1. Afin de représenter un cercle de centre $c = (x_c; y_c)$ et de rayon $r > 0$, on note $\mathcal{C}(c, r)$

Définition 2.2 (Cercle trigonométrique)**.**
Le cercle trigonométrique est le cercle 'le plus simple', c'est-à-dire de centre $c = (0; 0)$ et de rayon $r = 1$. On l'écrit $\mathcal{C}\Big((0;0), 1\Big)$

Propriété 2.1 (Rappel sur le cercle)**.** *Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon r. Alors :*
— *sa circonférence est donné par $L = 2\pi r$*
— *son aire est donnée par $A = \pi r^2$*

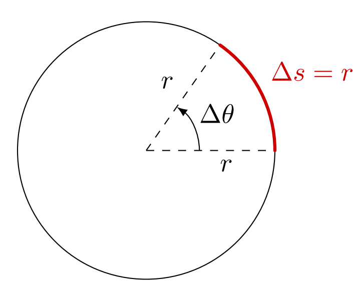
Le volume d'une pizza de rayon z et d'épaisseur a est : $\pi \cdot z \cdot z \cdot a$.

Remarquons que le rapport entre la circonférence d'un cercle et son rayon est toujours égale à

$$\frac{L}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Il est dès lors naturel de définir l'angle formé par un tour complet (soit 360 °) par 2π radians. La définition du radian est équivalente mais diffère quelque peu.

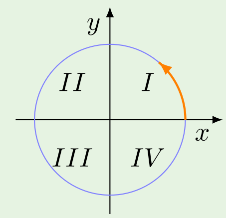
Définition 2.3 (Radian)**.** Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon r. On définit un angle d'un radian $\theta = 1$ rad comme l'angle pour lequel la longueur de l'arc Δs de cercle sous-tendu par cet angle est égal au rayon r.



Définition 2.4 (Angle orienté)**.** Un angle orienté peut être positif ou négatif.
Il est positif lorsqu'il tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (le *sens trigonométrique*), et négatif sinon.

Définition 2.5 (Quadrant)**.**

Le cercle trigonométrique se découpe en 4 quadrants (généralement indiqué en chiffre romain), numéroté selon le « sens trigonométrique ».



Propriété 2.2 (Arc de cercle)**.** *La longueur d'un arc de cercle Δs de rayon r intercepté par un angle θ (en radian) est donnée par*

$$\Delta s(\theta) = \theta \cdot r$$

On retrouve bien que $\Delta s(\theta = 2\pi) = 2\pi \cdot r = L$.

2.1 Sinus et cosinus dans un cercle

Première approche du sinus et cosinus

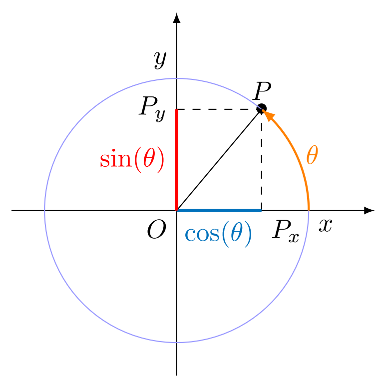
Avant de donner la « vraie » définition du sinus et du cosinus, les deux fondations de la trigonométrie, faisons un rapide détour par le monde physique pour comprendre la centralité de celles-ci.

Imaginons un cercle (de rayon r), sur lequel se déplace un point P. Si ce cercle est centré en l'origine, la distance entre mon point et l'origine sera toujours $d = r$. Si je connais l'angle θ entre mon point P et l'axe des x, j'ai suffisamment d'information pour localiser mon point.

Quelle est donc la coordonnée de mon point $P = (P_x, P_y)$? C'est ici que le sinus et cosinus entrent en jeux.
Si j'appelle $|P|$ la distance entre l'origine et P, ses coordonnées seront

$$P = \Big(|P| \cdot \cos(\theta), |P| \cdot \sin(\theta)\Big) \tag{2.1}$$

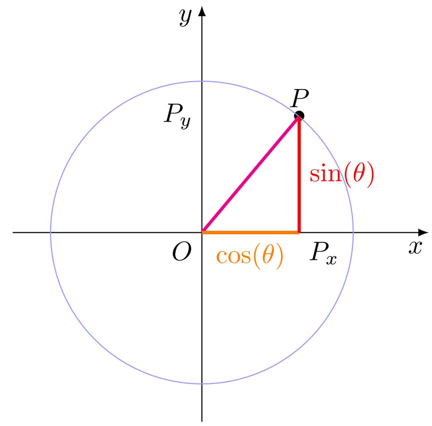
Il s'agit de la ***projection*** de la distance $|P|$ (ou de manière plus correcte du vecteur $\vec{P}$) sur son abscisse et son ordonnée.



2.2 Sinus et cosinus dans un triangle

Vers une définition rigoureuse

Reprenons le cercle précédent, et simplifions les choses. On choisit la distance $|P| = 1$ et donc le rayon du cercle $r = 1$. Il s'agit ainsi du cercle trigonométrique $\mathcal{C}\Big((0;0),1\Big)$.

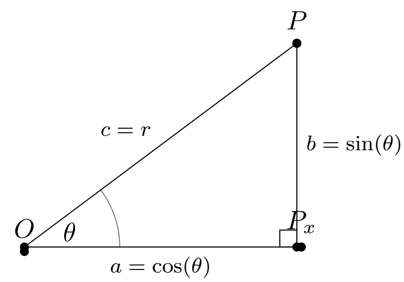


En reliants les points O, P_x et P, on trace un triangle rectangle. On va essayer de redéfinir le cosinus et le sinus en fonction de ce triangle.
Reprenons la formule 2.1 avec $|P| = 1$. On a :

$$P = (P_x, P_y) = \Big(\cos(\theta), \sin(\theta)\Big) \tag{2.2}$$

Ainsi, $P_x = \cos(\theta)$ et $P_y = \sin(\theta)$. En observant le triangle rectangle formé, cela correspond à

$$\cos(\theta) = a \text{ et } \sin(\theta) = b$$



Pour être complet, pour que cette relation reste vrai même si le rayon du cercle $r \neq 1$, il faut diviser par celui-ci. On obtient alors

$$\cos(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{a}{c} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{r} = \frac{b}{c}$$

puisque le rayon correspond au coté c de notre triangle.

Nous venons d'obtenir le lien entre le cercle trigonométrique et les triangles rectangles. Il est à présent temps de passer aux définitions.

Définition 2.6 (trigonométrie dans un triangle)**.** Soit $\mathcal{T}(a;b;c)$ un triangle rectangle en C avec l'hypoténuse $c = 1$ et β l'angle opposé au coté b. On définit :

— le sinus de β comme le rapport entre le coté opposé et l'hypoténuse.

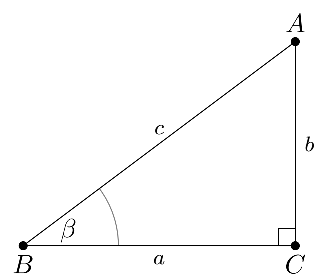
$$\boxed{\sin(\beta) = \frac{\text{coté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{b}{c}} \tag{2.3}$$

— le cosinus de α comme le rapport entre le coté adjacent et l'hypoténuse.

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\text{coté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{a}{c}} \tag{2.4}$$

— la tangente comme le rapport du sinus par le cosinus.

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{b}{a}} \tag{2.5}$$

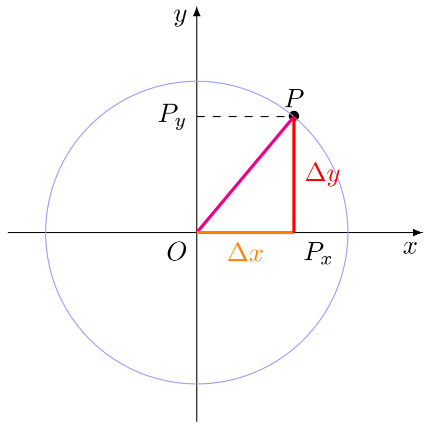


Remarque. Il existe un moyen mnémotechnique pour retenir ces définitions :

$$SOH\ CAH\ TOA \rightarrow S = \frac{0}{H},\ C = \frac{A}{H},\ T = \frac{O}{A} \tag{2.6}$$

avec O pour « coté opposé », A pour « coté adjacent » et H pour « hypoténuse ».

Remarque. Si les fonctions sin et cos semble « naturelles » (puisqu'elles paramétrisent la position d'un point se déplaçant sur le cercle trigonométrique), on peut se poser la question de l'utilité de la fonction tan.
Pour la comprendre, reprenons le cercle suivant :



Par définition, la fonction tangente est donnée par

$$\tan(\theta) = \frac{\text{coté opposé}}{\text{coté adjacent}}$$

Or, si l'on inscrit le triangle rectangle dans le cercle ci-contre, le coté opposé est Δy et le coté adjacent est Δx. On a alors :

$$\tan(\theta) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ce résultat sera très utile dans la partie **??**.

3 Fonctions trigonométriques

3.1 Définitions

Définition 3.1 (Fonctions trigonométriques)**.** Une fonction trigonométrique associe à un angle θ la valeur des rapports des cotés d'un triangle rectangle inscrit dans le cercle unité (*cercle trigonométrique*) selon la définition 2.6. On a donc 2 fonctions trigonométriques fondamentales :

$$\sin : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1] \\ \theta \longmapsto \sin(\theta) \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\cos : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1] \\ \theta \longmapsto \cos(\theta) \end{cases} \tag{3.2}$$

Une troisième fonction est définie comme étant le rapport des deux premières :

$$\tan : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1] \\ \theta \longmapsto \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \end{cases} \tag{3.3}$$

Ces nouvelles fonctions sont très différentes de ce que nous avons étudié précédemment, et des notions comme les racines et la croissance ne sont pas aussi « simple » que dans le cas des polynômes.

3.2 Étude des fonctions trigonométriques

Voyons à présent quelques propriétés de ces fonctions afin de commencer à se construire une intuition sur celles-ci.

3.2.1 Ensemble image

Propriété 3.1 (Fonctions bornées)**.** *Les fonctions* $\sin(x)$ *et* $\cos(x)$ *sont bornées pour tout* x *réels.*

Preuve. Montrons que la fonction $\sin(x)$ est bornée.
Par définition,

$$\sin(x) = \frac{\text{coté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{b}{c}$$

Or, par le théorème de Pythagore,

$$a^2 + b^2 = c^2 \implies b^2 = c^2 - a^2$$

On a donc :

$$\big(\sin(x)\big)^2 = \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2 - a^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2 \leq 1$$

On vient de montrer que

$$\big(\sin(x)\big)^2 \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ceci implique que

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La cas du $\cos(x)$ se traite de manière similaire, et est laissé en exercice au lecteur·ice. □

3.2.2 Identité remarquable

Propriété 3.2 (Identité trigonométrique pythagoricienne)**.**

$$\boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

Preuve. Repartons de la définition géométrique du sinus et du cosinus :

$$\begin{aligned}(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 &= \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 \\ &= \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{c^2} \\ &= \frac{c^2}{c^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

□

3.2.3 Périodicité

Propriété 3.3 (Périodicité)**.** *Les fonctions* sin, cos *et* tan *sont périodiques, c'est-à-dire qu'elles se répètent après une période donnée. Les fonctions* sin *et* cos *ont toutes les deux une période* $P = 2\pi$*, et la fonction* tan *possède une période* $P = \pi$*. On écrit :*

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi) \tag{3.5}$$
$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi) \tag{3.6}$$
$$\tan(x) = \tan(x + \pi) \tag{3.7}$$

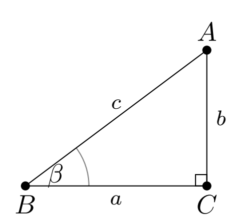
Preuve. Les fonctions trigonométriques sont définies à partir d'un triangle rectangle, lui même caractérisé par un angle. Or, un angle n'est pas modifié lorsqu'on lui ajoute un tour complet (soit 2π rad). Il en est de même pour son triangle associé, et enfin pour les fonctions cos, sin et tan.

Propriété 3.4 (Symétries)**.** *Les fonctions* sin, cos *et* tan *sont symétriques, c'est-à-dire que l'on peut changer les variables de certaines manières sans changer l'image de la fonction. On écrit :*

$$\sin(x) = -\sin(-x) \tag{3.8}$$
$$\cos(x) = \cos(-x) \tag{3.9}$$
$$\tan(x) = -\tan(x) \tag{3.10}$$

3.2.4 Représentation graphique

Nous avons vu que les fonctions sinus et cosinus sont bornées et liées par cette identité pythagoricienne. Il est temps de se les représenter sur un graphique. Pour cela, calculons d'abords quelques valeurs particulières de sinus et cosinus :



— $\theta = 0$: cela correspond à l'angle nul, c'est à dire au coté $b = 0$ et $c = a$.
Dans ce cas,

$$\sin(0) = \frac{0}{c} = 0$$
$$\cos(0) = \frac{a}{c} = \frac{a}{a} = 1$$
$$\tan(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

— $\theta = \pi/4$: puisqu'un tour complet veut 2π, un angle de $\pi/4$ vaut 45 °. Cela correspond au cas où $a = b$, ce qui implique $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$, ce qui implique $c = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$.
Dans ce cas,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

— $\theta = \frac{\pi}{2}$: puisqu'un tour complet veut 2π, un angle de $\frac{\pi}{2}$ vaut 90 °. Cela correspond au cas où $a = 0$, et où $c = b$.
Dans ce cas,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{b}{c} = \frac{b}{b} = 1$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{c} = \frac{0}{c} = 0$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{0}$$

On observe que la fonction $\tan(\theta)$ n'est pas définie [2] en $\theta = \frac{\pi}{2}$.

— Il reste deux valeurs intéressantes pour θ mais qui ne seront pas traitée ici :
  — $\theta = \frac{\pi}{6}$: on a alors
$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \text{ et } \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
  — $\theta = \frac{\pi}{3}$: on a alors
$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Ces valeurs sont reprises sous forme de tableau et graphiquement ci-dessous :

2. N'étant pas Chuck Norris, la division par zéro n'est pas à notre portée. On se contentera de dire que la fonction est indéterminée en ce point.

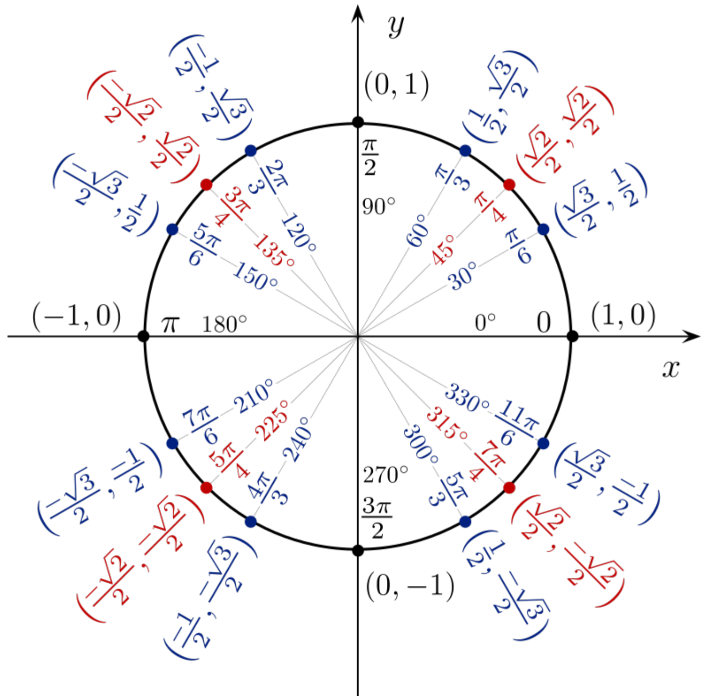
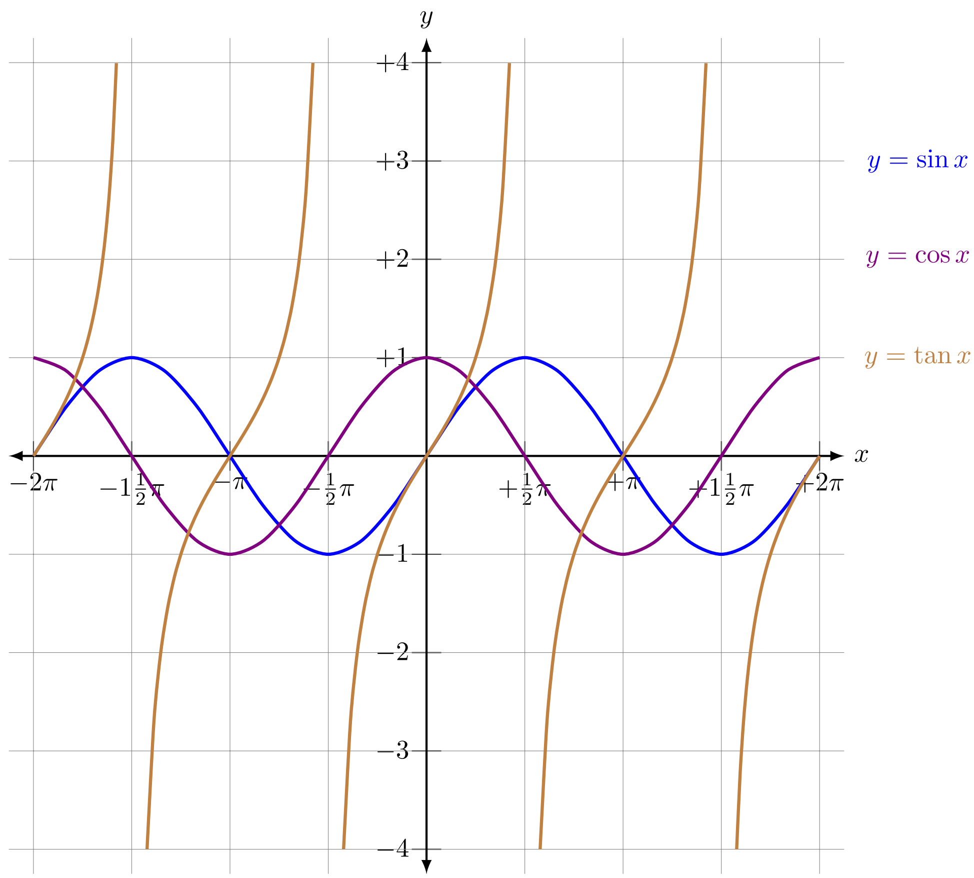


FIGURE 2 – Angles remarquables sur le cercle trigonométrique [7]

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\emptyset$

TABLE 1 – Tableau des valeurs remarquables dans le premier quadrant

Après tout ce suspens, il est finalement temps pour nous d'admirer une représentation graphique des fonctions trigonométriques.



> Why was π sad ?
> *'cos π is negative*

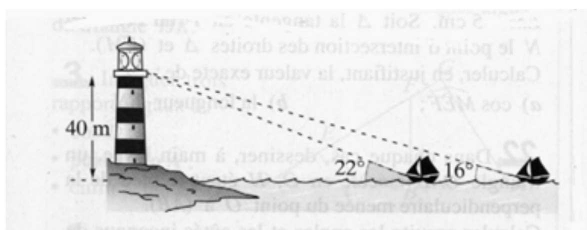
3.3 Exercices simples

Remarque. Afin de ne pas entraver le plaisir de la résolution d'exercices, les indications et/ou solutions sont localisées dans la partie IV. Les symboles suivants sont utilisés :
— indique que l'usage de la calculatrice est recommandée.
— indique la présence d'une indication.
— indique la présence d'une résolution partielle de l'exercice.
— indique la présence de la solution finale.
— indique la présence d'une explication détaillée.

Exercice 3.1 ().
— *Quel est l'aire d'un carré de diagonale égale à* 5cm *?*

Exercice 3.2. *Donner une mesure en radians de l'angle formé par les aiguilles d'une montre (petite et grande) aux heures suivantes :*
— *à 3h*
— *à 6h*
— *à 8h*
— *à 13h*

Exercice 3.3 (). *Un phare de 40m de haut voit au loin deux bateaux $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Depuis la bateau $\mathcal{B}_1$ (resp. $\mathcal{B}_2$), le haut du phare forme un angle de 22° (resp. 16°).*



— *Calculer la distance entre les deux bateaux*

Exercice 3.4. *Soit θ l'angle entre l'axe des x et un point M sur le cercle trigonométrique. Placer sur ce cercle tout les points M tels que*

$$M = \frac{27\pi}{6} + 2\pi \cdot k, \quad kin\mathbb{Z}$$

Exercice 3.5 (). *Un télésiège d'une longueur de* 1453*m transporte des skieur·euses depuis une altitude de* 1839*m jusqu'à* 2261*m.*
— *Calculer l'angle formé par le câble du télésiège avec l'horizontale, en radian et en degré.*

Exercice 3.6 (). *Une personne mesurant 1,8m, situé à 100m de la tour Eiffel, observe son sommet avec un angle de 72,8°.*
— *Calculer la hauteur de la tour Eiffel.*

3.4 Problèmes

> « Il vaut mieux mobiliser son intelligence sur des conneries que mobiliser sa connerie sur des choses intelligentes. »
> *Les Shadoks*

Exercice 3.7 (7.0.1). *Résoudre les équations et inéquations suivante dans $\mathbb{R}$:*

1.
$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2.
$$\sin(3x) = \frac{1}{2}$$

3.
$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

4.
$$\cos(2x) = \sin(3x)$$

5.
$$\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Indice : utilisez le résultat du point 1.

6.
$$\sin(3x) > \frac{1}{2}$$

Indice : utilisez le résultat du point 2.

Exercice 3.8 (7.0.2). *Résoudre dans les réels l'équation suivante :*

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}$$

Deuxième partie

Fonctions usuelles

Remarque. Une partie des notes qui suivent sont issues de ce pdf.[8]

Dans cette partie, nous allons faire un inventaire des fonctions les plus communes, et étudier leurs propriétés. Le but n'est évidemment pas de faire une liste exhaustive (ce serait impossible), mais de proposer un ensemble de fonctions de base, ainsi que certaines techniques pour les modifier (translation, symétries, etc.).

> Il faut que je pense à mettre une jolie citation ici

4 Propriétés d'une fonction

Afin de pouvoir classifier les fonctions, il est utile d'en étudier d'abords quelques propriétés supplémentaires.
Beaucoup de concepts semblables mais distincts sont présentés dans cette partie, attention à ne pas les confondre ! Afin de rendre plus concrètes les propriétés présentées ci-après, n'hésitez pas à utiliser votre calculatrice graphique préférée ou un équivalent en ligne. [3]

4.1 Rappel de la définition d'une fonction

Définition 4.1. Soit X, Y deux ensembles, et $x \in X$, $y \in Y$. Alors on définit la **fonction** f par :

$$f : X \to Y \tag{4.1}$$
$$x \mapsto f(x) \tag{4.2}$$

où tout élément $x \in X$ est envoyé sur **au plus** un élément $y \in Y$. Formellement,

$$\forall x \in X, \exists! y \in \mathrm{Im}\{f\} \mid \quad y = f(x) \tag{4.3}$$

On peut écrire

$$\boxed{y = f(x)}$$

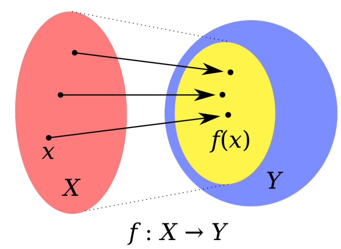


FIGURE 3 – Visualisation du concept de fonction en terme d'ensembles

Par définition donc, un élément de l'ensemble de départ ne peut pas avoir plusieurs images. Graphiquement, si l'on s'imagine tracer la fonction au crayon, on ne peut pas « revenir en arrière » (par exemple dessiner une boucle).

Exemple: Le cercle trigonométrique n'est pas une fonction. En effet, il est définit comme tout les points se trouvant à une distance unitaire de l'origine, soit :

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 = 1 \\ \iff & y^2 = 1 - x^2 \\ \iff & y = \pm\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

Le problème ici est le signe $\pm$. Ceci veut dire que pour chaque $x \in [-1, 1]$, il y a deux images. Par exemple, si $x = 0$, $y = \pm\sqrt{1 - 0} = \pm 1$.

Dans toute cette partie II, nous allons considérer une fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \to f(x) \end{cases}$$

Nous allons maintenant nous intéresser plus précisément aux ensembles X et Y.

4.1.1 Ensemble de départ et domaine de définition

Dans notre étude, nous considérons toujours des fonctions réelles à variable réelle. Notre ensemble de départ est donc $\mathbb{R}$. Cependant, certaines fonctions ne sont pas définies pour tout nombres réels.

Exemple: La fonction *inverse* définie par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \to \frac{1}{x} \end{cases}$$

3. Je recommande https://www.desmos.com/calculator et https://www.geogebra.org/graphing?lang=fr.

n'est pas définie en $x = 0$ puisqu'on ne peut pas diviser par 0. On dit que son *domaine* est différent de son ensemble image.

Définition 4.2 (Domaine de définition)**.** Soit une fonction $f : \begin{cases} X \longrightarrow Y \\ x \to f(x) \end{cases}$

Son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est défini comme :

$$\mathcal{D}_f \,\widehat{=}\, \{x \in X |\, f(x) \text{ est définie } \} \tag{4.4}$$

Ainsi, en général :

$$\boxed{\mathcal{D}_f \subset X}$$

Exemple: Soit

$$f : x \to 1/x$$

Alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ car $\frac{1}{0}$ n'est pas définit.
Soit

$$g : x \to \sin(x)$$

Alors $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$
Soit

$$h : x \to \tan(x)$$

Alors $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\;\; k \in \mathbb{Z}\}$
Soit

$$u \colon x \mapsto \sqrt{4 - x}$$

Alors $\mathcal{D}_u =]-\infty; 4]$ car une racine carrée n'est définie que pour un argument positif. Il faut alors résoudre l'équation $4 - x \geq 0$.
Soit

$$v \colon x \mapsto \sqrt{4 - x^2}$$

Alors $\mathcal{D}_v = [-2; 2]$
Soit

$$w \colon x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Alors $\mathcal{D}_w =]-2; 2[$

4.1.2 Ensemble d'arrivée et ensemble image

De la même manière que le domaine de définition d'une fonction ne « rempli » pas toujours son ensemble de départ, son ensemble d'arrivée peut également se trouver « vide » à certains endroits. On introduit alors l'*ensemble image*.

Définition 4.3 (Ensemble image)**.** Soit une fonction $f : \begin{cases} X \longrightarrow Y \\ x \to f(x) \end{cases}$

Son ensemble image $\text{Im}\{f\}$ est défini comme :

$$\text{Im}\{f\} \,\widehat{=}\, \{y \in Y |\, \exists x \in X \quad f(x) = y\} = \{f(x) |\, x \in X\} \,\widehat{=}\, f(X) \tag{4.5}$$

Ainsi, en général :

$$\boxed{\text{Im}\{f\} \subset Y}$$

4.2 Injectivité, surjectivité et bijectivité

On peut à présent classifier les fonctions avec ces nouvelles notions.
Les relations entre le domaine $\mathcal{D}_f$, l'ensemble de départ X, l'image $\mathrm{Im}\{f\}$ et l'ensemble d'arrivée Y sont décrites par les propriétés d'*injectivité* et de *surjectivité*.

4.2.1 Fonction injective (💡 : $x \to 1/x$)

Définition 4.4 (Injectivité)**.** Soit une fonction

$$f : \begin{cases} \mathcal{D}_f \subset X & \longrightarrow \mathrm{Im}\{f\} \subset Y \\ x & \to f(x) \end{cases}$$

f est dite *injective* si deux éléments distincts de $\mathcal{D}_f$ possèdent toujours deux images distinctes. Plus formellement :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f,\ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) \tag{4.6}$$
$$\iff \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f,\ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2 \tag{4.7}$$

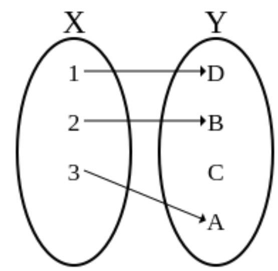


FIGURE 4 – Illustration d'une fonction injective non surjective

Exemple: Un exemple de fonction injective est la fonction inverse :

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Elle est injective puisque $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_{1/x} = \mathbb{R}\backslash\{0\},\ f(x_1) = f(x_2) \iff \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \iff x_2 = x_1$
Elle n'est pas surjective car pour $y = 0$, il n'a a pas d'antécédent. En effet, $\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = \pm\infty$ ce que est hors du domaine $\mathcal{D}_{1/x}$.

4.2.2 Fonction surjective (💡 : $x \to x^2$ sur $\mathbb{R}^+$)

Définition 4.5 (Surjectivité)**.** Soit une fonction

$$f : \begin{cases} \mathcal{D}_f \subset X & \longrightarrow \mathrm{Im}\{f\} \subset Y \\ x & \to f(x) \end{cases}$$

f est dite *surjective* si chaque élément de $\mathrm{Im}\{f\}$ possèdent toujours au moins un antécédent dans $\mathcal{D}_f$. Plus formellement :

$$\forall y \in \mathrm{Im}\{f\},\ \exists x\ \in \mathcal{D}_f|\quad y = f(x) \tag{4.8}$$
$$\tag{4.9}$$

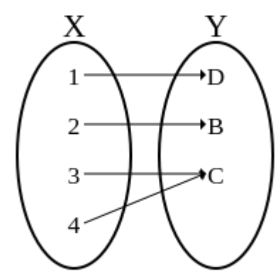


FIGURE 5 – Illustration d'une fonction non injective et surjective

Exemple: Un exemple de fonction surjective est la fonction carré :

$$x \mapsto x^2$$

Elle est surjective puisque $\forall y \in \mathrm{Im}\{x^2\} = \mathbb{R}^+,\ \exists x\ \in \mathcal{D}_f|\quad y = x^2 \iff \sqrt{y} = x$ ou $\sqrt{y} = -x$
Elle n'est pas injective puisque pour $x_1 = 2$ et $x_2 = -2$, on a $f(x_1) = 2^2 = 4 = (-2)^2 = f(x_2)$

4.2.3 Fonction bijective (💡 : $x \to x$)

Définition 4.6 (Bijectivité)**.** Soit une fonction

$$f : \begin{cases} \mathcal{D}_f \subset X & \longrightarrow \mathrm{Im}\{f\} \subset Y \\ x & \to f(x) \end{cases}$$

f est dite *bijective* si elle est à la fois injective et surjective. Formellement,

$$\forall y \in \mathrm{Im}\{f\}, \exists! x \in X \mid \quad y = f(x) \tag{4.10}$$

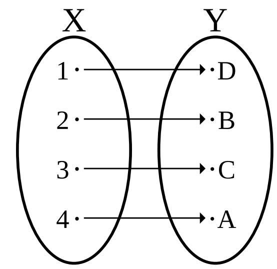


FIGURE 6 – Illustration d'une fonction injective et surjective

Exemple: Un exemple de famille de fonctions bijectives est les droites :

$$x \mapsto ax + b, \quad a \in \mathbb{R}_0, b \in \mathbb{R}$$

Elle est injective car $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_{ax+b}, f(x_1) = f(x_2) \iff ax_1 + b = ax_2 + b \iff x_1 = x_2$
Elle est surjective car $\forall y \in \mathrm{Im}\{ax + b\}, \exists x \in \mathcal{D}_{ax+b} | y = ax + b$. Ici, on peut prendre $x = \frac{y-b}{a}$ qui est effectivement toujours défini puisque $a \neq 0$.

4.2.4 Fonction ni injective ni surjective

Certaines fonctions ne sont ni injectives, ni surjectives. Cependant, on choisissant astucieusement le domaine $\mathcal{D}_f$ et l'image $\mathrm{Im}\{f\}$, on peut toujours se ramener à une fonction surjective.

Exemple: La fonction $x \mapsto x^4$ n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$ mais l'est bien sur $\mathbb{R}^+$.

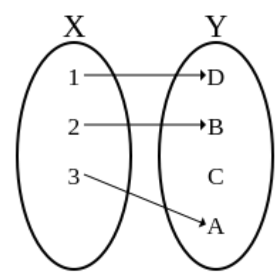


FIGURE 7 – Illustration d'une fonction ni injective ni surjective

4.3 Opérations sur les fonctions [À partir d'ici, le syllabus est en cours de rédaction]

Puisque nous avons à présent définit rigoureusement ce qu'était une fonction, nous pouvons aborder comment les fonctions « interagissent » entre elles.

4.3.1 Addition

Définition 4.7. Soit f et g deux fonctions réelles définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et sur $\mathcal{D}_g$. Leur **somme** est définie par

$$\big(f + g\big) : \begin{cases} \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) + g(x) \end{cases} \tag{4.11}$$

L'opération de soustraction s'obtient en considérant la fonction $-g$ à la place de g.

4.3.2 Multiplication

Définition 4.8. Soit f et g deux fonctions réelles définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et sur $\mathcal{D}_g$. Leur **produit** est défini par

$$(f \cdot g) \colon \begin{cases} \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) \cdot g(x) \end{cases} \tag{4.12}$$

L'opération de division requiert une attention particulière pour l'ensemble de définition car il ne faut pas diviser par 0.

Définition 4.9. Soit f et g deux fonctions réelles définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et sur $\mathcal{D}_g$. Leur **quotient** est défini par

$$\left(\frac{f}{g}\right) \colon \begin{cases} \mathcal{D}_f \cap \{\mathcal{D}_g |\ g(x) \neq 0\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{cases} \tag{4.13}$$

Il faut soustraire au domaine de g l'ensemble des valeurs où $g = 0$, c'est-à-dire l'ensemble de ses racines $X_{0,g}$. On peut alors réécrire notre fonction quotient comme

$$\left(\frac{f}{g}\right) \colon \begin{cases} \mathcal{D}_f \cap \{\mathcal{D}_g \backslash X_{0,g}\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{cases}$$

4.3.3 Composition

Intuitivement, la composition est le fait d'appliquer plusieurs fonctions à la suites.

Définition 4.10. Soit f et g deux fonctions réelles définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et sur $\mathrm{Im}\{f\}$. Leur **composition** est définie par

$$(g \circ f) \colon \begin{cases} \mathcal{D}_f & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto g(f(x)) \end{cases} \tag{4.14}$$

À priori, la composition est une nouvelle opération qui peut être dès lors moins intuitive que celles vues précédement. Faisons quelques exemples pour bien comprendre ce concept.

Exemple: Soit les fonctions $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto 1/x$ et $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$.
La fonction $g \circ f$ est alors donnée par

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(1/x) \\ &= (1/x)^2 \\ &= 1/x^2 \end{aligned}$$

Quel est alors le domaine et l'ensemble image de $g \circ f$?
Par définition, $\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Son ensemble image est donnée par $\mathrm{Im}\{g \circ f\}$ tel que $x \in \mathcal{D}_f$. Ici, $\mathrm{Im}\{g \circ f\} = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = \mathbb{R}_+^0$.

Calculons à présent $f \circ g$:
— $f \circ g = f(g(x)) = f(x^2) = 1/(x^2) = 1/x^2$

— Son domaine est donné par $\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$
— Son image est donnée par $\text{Im}\{g \circ f\}$ tel que $x \in \mathcal{D}_g$, c'est à dire $\text{Im}\{g \circ f\} = \mathbb{R}_+^0$

On voit que $g \circ f$ et $f \circ g$ ne sont pas exactement pareilles, car $\mathcal{D}_{g\circ f} \neq \mathcal{D}_{f\circ g}$.

Remarque. À la différence des opérations précédentes, la **composition n'est pas commutative**. En général,

$$\boxed{g \circ f \neq f \circ g} \tag{4.15}$$

Voyons un exemple de cette non-commutativité :

Exemple: Soit les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 3$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$.
La fonction $g \circ f$ est alors donnée par

$$g(f(x)) = g(2x + 3) = (2x + 3)^3$$

La fonction $f \circ g$ est alors donnée par

$$f(g((x)) = f(x^3) = 2 \cdot (x^3) + 2 = 2x^3 + 2$$

Il est facile de voir que $g(f(x)) \neq f(g(x))$.

4.4 Symétries

En mathématique, on parle de symétrie d'un système lorsqu'on peut modifier certaines de ses variables, d'une certaine façon, sans que le système ne soit modifié.
Dans le cas des fonctions, il existe des familles de symétries communes, qui l'est utile de couvrir avant d'aborder la manipulation des fonctions.

4.4.1 Parité

Fonction paire

Définition 4.11. Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ une fonction réelle à variable réelle.
Elle est dite paire si $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = f(x) \tag{4.16}$$

Exemple: Vérifions si la famille de fonctions $x \mapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est paire :
$f(x) = ax + b$ et $f(-x) = -ax + b$. Par définition, cette famille est paire si

$$\begin{aligned} & f(-x) = f(x) \\ \iff & -ax + b = ax + b \\ \iff & -ax = ax \\ \iff & -a = a \end{aligned}$$

Ceci est faux $\forall a \in \mathbb{R}$, mais vrai dans le cas particulier où $a = 0$. Ainsi, on peut dire que la famille de fonction $x \mapsto b$ avec $b \in \mathbb{R}$ est paire. Il s'agit en fait de la famille des fonctions constantes.

Fonction impaire

Définition 4.12. Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ une fonction réelle à variable réelle.
Elle est dite impaire si $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = -f(x) \tag{4.17}$$

Exemple: Vérifions à présent si la famille de fonctions $x \mapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est impaire : $f(-x) = -ax + b$ et $-f(x) = -ax - b$. Par définition, cette famille est paire si

$$\begin{aligned} & f(-x) = -f(x) \\ \iff & -ax + b = -ax - b \\ \iff & b = -b \\ \iff & b = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la famille de fonction $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$ est impaire. Il s'agit en fait de la famille des fonctions affines qui passent par l'origine.

4.4.2 Périodicité

Définition 4.13. Soit $f \colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ une fonction réelle à variable réelle.
Elle est dite périodique de période $L \in \mathbb{R}$ si $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x + L) \tag{4.18}$$

Exemple: La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est périodique, de période 2π car

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sin(x + 2\pi)$$

4.4.3 Réciproque

Intuitivement, la réciproque d'une fonction est une deuxième fonction qui « annule » la première *par composition*. Commençons par introduire un concept important : la fonction (ou l'*application*) identité.

Définition 4.14. On définit la **fonction identitée** I par celle n'ayant aucun effet lorsqu'elle est appliquée à un élément. On écrit

$$I \colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases} \tag{4.19}$$

La réciproque d'une fonction bijective est alors définie de la manière suivante :

Définition 4.15. Soit $f \colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ une fonction réelle à variable réelle *injective*.
Sa réciproque est l'unique fonction f^{-1} telle que

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = I(x) = \left(f \circ f^{-1}\right)(x) \tag{4.20}$$

Remarque. Il faut demander que f soit bijective pour prendre sa réciproque. En effet, si f n'est pas injective, sa réciproque n'enverra pas une *unique* image pour chaque élément de son domaine

Exemple: La fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \colon x \mapsto x^2$ ne possède pas de réciproque car elle n'est pas injective. En effet, si l'on essaye d'appliquer la définition, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(f \circ f^{-1}\right)(x) = I(x) \\ \iff & f\left(f^{-1}\right) = x \\ \iff & \left(f^{-1}\right)^2 = x \\ \iff & f^{-1} = \pm\sqrt{|x|} \end{aligned}$$

On remarque que $f^{-1}[x^2]$ rend 2 fonctions :

$$f_+^{-1} = +\sqrt{x} \text{ et } f_-^{-1} = -\sqrt{x}$$

On peut séléctionner une seule de ces deux fonctions en rendant $f\colon x \mapsto x^2$ bijective en restreignant son domaine.
On définit alors

$$f_+\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \colon x \mapsto x^2 \text{ et } f_-\colon \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ \colon x \mapsto x^2$$

Nos fonctions réciproques sont dès lors bien définies. montrons le pour f_-^{-1} :

$$\begin{aligned} & \left(f_- \circ f_-^{-1}\right)(x) = I(x) \\ \iff & f_-\left(f_-^{-1}\right) = x \\ \iff & \left(f_-^{-1}\right)^2 = x \\ \iff & f_-^{-1} = -\sqrt{|x|} \end{aligned}$$

5 Manipulation de fonction

Avant de dresser une liste de fonctions, nous allons voir différentes techniques générales pour transformer des fonctions.
Inspiré de *Révisions : manipulations de graphes* [9]

5.1 Translation

5.1.1 Translation de la variable

5.1.2 Translation de l'image

5.2 Dilatation et contraction

5.2.1 Dilatation et contraction de la variable

5.2.2 Dilatation et contraction de l'image

5.3 Renversement

5.3.1 Renversement de la variable

5.3.2 Renversement de l'image

5.4 Réciproque

6 Inventaire des fonctions usuelles et de leurs propriétés

6.1 Les polynômes

6.2 Les fonctions trigonométriques

6.2.1 La fonction sinus et sa réciproque

6.2.2 La fonction cosinus et sa réciproque

6.2.3 La fonction tangente et sa réciproque

6.3 Les fonctions puissances

6.4 Le logarithme

6.5 L'exponentielle

Troisième partie
Vecteurs et matrices

Quatrième partie

Solutions des exercices et problèmes

> « Il est difficile de faire la différence entre un·e mathématicien·ne qui dort et un·e mathématicien·ne qui travaille. »
> *André Lichnerowicz*

7 Solutions des exercices sur la trigonométrie

Solution 7.0.1 (3.7)**.** *1. On veut résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'égalité suivante :*

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si vous connaissez un peu votre tableau des valeurs remarquables 1, vous remarquerez que si $\cos(x) = \sqrt{2}/2$, alors $x = \pi/4$. Mais ceci n'est vrai que dans le premier quadrant !
À la question : résous pour $x \in [0, \pi/2]$ l'égalité $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, la réponse est effectivement $x = \pi/4$.
Cependant, dans $\mathbb{R}$, le nombre de solutions est infini ! Comment faire pour toutes les obtenir ? Il faut visualiser le cercle :

— *Premièrement, on sait que si l'on rajoute 2π rad à x, rien ne change. C'est notre premier pas vers l'ensemble des solutions. On peut écrire*

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

— *Deuxièmement, $\cos$ est une fonction paire. Ainsi, $\cos(x) = \cos(-x)$. On peut donc aussi prendre la valeur $x = -\pi/4$, ainsi que tout ses multiples 2π. C'est notre deuxieme ensemble de solutions :*

$$x = \frac{-\pi}{4} + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

— *Finalement, il faut rassembler ces deux ensembles :*

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pm\pi}{4} + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{8\pi k \pm \pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

2. On veut résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\sin(3x) = \frac{1}{2}$$

On reconnaît du tableau 1 l'égalité suivante : $\sin(\theta) = 1/2 \Rightarrow \theta = \pi/6$ (valable entre 0 et $\pi/2$). On pose donc $\theta = 3x$ et on résout pour θ.

— *Le premier ensemble de solution est donné par*

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

— *Puisque $\sin$ est la « projection » d'un angle sur l'axe y, $\sin(\theta + \pi/2) = \sin(\theta)$. Notre deuxième ensemble de solution est donc donné par*

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

— *L'ensemble fusionné de solution est donné par :*

$$\begin{aligned} &\theta = \frac{\pi + 12\pi k}{6}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ et } \theta = \frac{2\pi + 12\pi k}{6}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \iff &\theta \in \{\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ \frac{\pi}{3} + 2\pi k \ ; \quad k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

— *On résout à présent pour $x = \theta/3$: il faut tout diviser par 3.*

$$x \in \{\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi k, \ \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k \ ; \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

Solution 7.0.2 (3.8)**.** *Afin de résoudre ce problème, il faut procéder par étape.*

1. *Se ramener à une forme* $f(x) = 0$
2. *Considérer la fonction trigonométrique comme une nouvelle inconnue et résoudre*
3. *Remplacer et résoudre*
4. *Ne pas oublier la périodicité*

Commençons :

1.

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2} \\ \iff \cos^2 x - \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

On a bien une égalité de la forme $f(x) = 0$*.*

2. *On pose* $\widetilde{x} = \cos x$ *et on résout* $f(\widetilde{x}) = 0$

$$\begin{aligned} f(\widetilde{x}) &= \widetilde{x}^2 - \frac{1}{2} = 0 \\ &= \left(\widetilde{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\widetilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \\ \iff \quad & \widetilde{x} \in \{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\} \end{aligned}$$

3. *On remplace* $\widetilde{x}$ *par* $\cos x$ *:*

$$\widetilde{x} = \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

On reconnaît alors la valeur remarquable de $\cos = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *qui correspond à un angle de* $\pm\frac{\pi}{4}$*. De même,* $\cos = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ *correspond à un angle de* $\pm\frac{3\pi}{4}$*.*
Si on nous demandait les solutions sur un intervalle $[-\pi; \pi]$*, on aurait terminé.*

4. *En 'ajoutant' la périodicité de* 2π *de la fonction* $\cos$*, on obtient :*

$$\begin{aligned} x \in &\{\frac{\pi}{4} + k_1 \cdot 2\pi; \quad \frac{-\pi}{4} + k_2 \cdot 2\pi; \quad \frac{3\pi}{4} + k_3 \cdot 2\pi; \quad \frac{-3\pi}{4} + k_4 \cdot 2\pi; \quad k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}\} \\ \iff \quad x \in &\{\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}; \quad k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Cinquième partie

Formulaire

Type de fonction	Polynome de degré 1	Polynome de degré 2
Forme générale	$f(x) = ax + b$	$f(x) = ax^2 + bx + c$
Racines ($f(x_0) = 0$)	$x_0 = \frac{-b}{a}$	$x_0^{\pm} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Minimum / Maximum	$\emptyset$	$x_{\min} = \frac{-b}{2a}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\emptyset$

Références

[1] Arian Novruzi. *Introduction au Calcul Différentiel et Intégral.* URL : https://mysite.science.uottawa.ca/novruzi/mat1700/my-mat1700-course.pdf. (accessed: 26.07.2023).

[2] Guillaume Dujardin. *Calcul différentiel et intégral II.* URL : http://chercheurs.lille.inria.fr/~gdujardi/ULB/syllabusCDI2.pdf. (accessed: 26.07.2023).

[3] P. Lockhart, F. Bourgeois et B. Delvaux. *La lamentation d'un mathématicien.* L'Arbre de Diane, 2017. ISBN : 9782930822099. URL : https://books.google.be/books?id=Vc-8DgAAQBAJ.

[4] Marc Haelterman & Olivier Decroly. *CLIPEDIA.* URL : https://clipedia.be/mathematiques/geometrie. (accessed: 11.08.2023).

[5] Vivien Ripoll. *Rappels de trigonométrie.* URL : https://www.normalesup.org/~vripoll/MAT1013_Rappels_trigo.pdf. (accessed: 04.08.2023).

[6] Vikram Singh. *How to Compute Euclidean Distance in Python.* URL : https://www.shiksha.com/online-courses/articles/how-to-compute-euclidean-distance-in-python/. (accessed: 22.08.2023).

[7] J. Belk. *Cercle trigonométrique et angles remarquables.* URL : https://fr.wikipedia.org/wiki/Table_de_lignes_trigonom%C3%A9triques_exactes#/media. (accessed: 22.08.2023).

[8] Romain Joly. *Chapitre 5 : Les Fonctions Usuelles - université grenoble alpes.* URL : https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rjoly/Documents/Pedago/MAT252/Chap5-MAT252.pdf.

[9] Chantal Hoessels. *Révisions : manipulations de graphes.* URL : http://www.csdm.be/wp-content/uploads/2020/05/4G_MATH5H_Hoessels-Pizzolante_manipulations2.pdf. (accessed: 24.08.2023).