

CH8 INFLATION

8.1 Critiques de Λ -CDM

DEF Le modèle Λ -CDM (pour Λ -Cold Dark Matter) ou modèle de concordance est un modèle mathématique du big bang avec :

- ① Une constante cosmologique Λ
- ② Une DM supposée froide
- ③ De la matière ordinaire

→ Λ -CDM explique très bien l'univers jusqu'à la nucléosynthèse primordiale, avec des possibilités pour expliquer la baryogénèse et la densité relique de DM à plus haute température. Cependant, il y a 4 problèmes majeurs.

8.1.1 Homotropie : problème de l'horizon :

→ L'univers est homotrope sur une échelle au moins égale à notre horizon du particule actuel :

$$\chi_{\text{part. hor}}^0 = \int_{t_{\text{reco}}}^{t_0=14 \cdot 10^9 \text{ y}} \frac{dt}{a(t)} \quad \text{où on néglige la période de radiation.}$$

→ Il est possible de montrer que

$$\frac{a(t)}{a_0} = \left(\frac{1 - \Omega_i^0}{\Omega_i^0} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left\{ \sqrt{\Omega_i^0} \cdot \frac{3H_0}{2} \cdot t \right\}$$

La distance propre associée à cet horizon est

$$d_p^0 = a_0 \chi_{\text{part. hor}}^0 = \int_0^{t_0} \left(\frac{\Omega_i^0}{1 - \Omega_i^0} \right)^{1/3} \cdot \sinh^{-2/3} \left\{ \sqrt{\Omega_i^0} \cdot \frac{3H_0}{2} t \right\} dt$$

$$\simeq 47,5 \cdot 10^9 \text{ ly pour } \Omega_i^0 = 1$$

→ S'il n'y avait que de la matière, on aurait $\Omega_m^0 = 1$ et $\Omega_i^0 = 0$.

$$\text{Alors } d_{p, \text{part-hor}}^0 = a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a} = \int_0^{t_0} \frac{dt}{(t/t_0)^{2/3}} = 41,7 \cdot 10^9 \text{ ly}$$

→ Λ augmente la distance propre d_p pour un même t_0 .

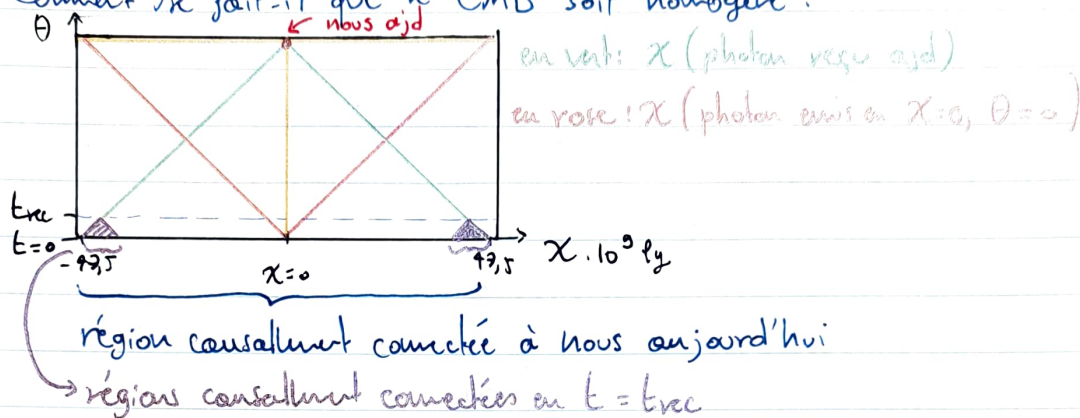
- Comparons $d_p = 47,47 \cdot 10^9 \text{ ly}$ avec la taille de l'horizon au moment de la recombinaison:

$$d_p^{t_{rec}} = a_0 \int_0^{t_{rec}} \frac{dt}{a(t)} = a_0 \int_0^{t_{rec}} \frac{dt}{a(t_{rec}) \sqrt{t/t_{rec}}} \quad \leftarrow \text{approx: univers de radiation}$$

$$= \frac{a_0}{a(t_{rec})} \int_0^{t_{rec}} \sqrt{\frac{t_{rec}}{t}} dt = (1+z_{rec}) 2 t_{rec} \approx 3,3 \cdot 10^8 \text{ ly}$$

- Le ciel homogène du CMB observé aujourd'hui était composé de $\left(\frac{47,5}{0,33}\right)^3 \approx 3 \cdot 10^6$ de "patches" non causalement connectés!

Comment se fait-il que le CMB soit homogène?



↳ Les fonctions $\chi(\theta)$ des photons sont des droites car $\theta \equiv \int_0^t dt/a(t)$ paramétrise le temps, et pour de la lumière $\Delta\theta = \Delta\chi$

- Similairement, notre ciel actuel était composé de 10^{80} patches déconnectés en $t = t_{rec}$

- Un autre problème relié est la structure anisotrope du CMB, d'ordre 10^{-5} dans toutes les directions.

↳ Pour avoir formation de structures, il faut des anisotropies primordiales
→ Conditions initiales?

8.1.2 Problème de planéité

- On observe $\Omega_0 = 1,0005 \pm 0,0033$, soit $\Omega_0 - 1 = 0 \pm 3\%$
Si on retourne dans le passé, cela veut dire que notre univers était extrêmement plat.

(\Rightarrow p14) → L'équation de Friedmann F_1 est donnée par

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} = \frac{k}{\dot{a}^2} \Rightarrow \frac{(\Omega - 1)|_t}{(\Omega - 1)|_{t_0}} = \left(\frac{\dot{a}|_t}{\dot{a}|_{t_0}} \right)^2 = \begin{cases} (t/t_0)^{2/3} & \text{si matière} \\ t/t_0 & \text{si radiation} \end{cases}$$

On trouve :

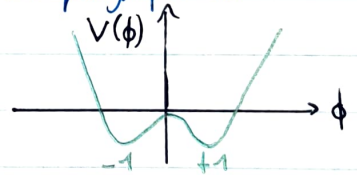
$$\rightarrow \frac{(\Omega - 1)|_{t_{rec}}}{(\Omega - 1)|_{t_0}} \simeq 8 \cdot 10^{-4}$$

$$\rightarrow \frac{(\Omega - 1)|_{t_{PL}}}{(\Omega - 1)|_{t_0}} = \frac{(\Omega - 1)|_{t_{PL}}}{(\Omega - 1)|_{t_{rec}}} \cdot \frac{(\Omega - 1)|_{t_{rec}}}{(\Omega - 1)|_{t_0}} = \frac{10^{-47}}{10^{12}} \cdot 10^{-4} \simeq 10^{-60}$$

- Pour avoir $\Omega - 1 \simeq 0$ aujourd'hui, il faut que Ω ait été extrêmement proche de 1 par le passé. Cela revient à avoir une situation de "vitesses d'échappement" dans laquelle l'énergie potentielle est égale à l'énergie cinétique.
↳ Problème de condition initiale également.

8.1.3 Problème des reliques indésirées

- Prédiction de transitions de phase issue de la physique des particules : on venait des murs de domaine qui séparent des régions où $\langle \phi \rangle = -v$ de régions où $\langle \phi \rangle = +v$



8.1.4 Problème de la constante cosmologique :

- La constante cosmologique / énergie noire n'est pas interdite par des symétries, et attendue à cause de la vue de champs scalaires.
- ex: $\frac{\rho_{\text{act}}^0}{\rho_{\text{crit}}^0} \sim \frac{\langle \phi \rangle^4}{\rho_{\text{crit}}^0} \sim \frac{(100 \text{ GeV})^4}{(10^{-3} \text{ eV})^4} = 10^{56}$ en contradiction avec $\Omega_{\Lambda, \text{observée}} \simeq 0,69$

8.2 Principe de l'inflation

Baumann, CH2

Kolb-Turner, p261-281

→ Pour un fluide d'équation d'état $p/\rho = w$ et $\Omega = 1$ ($k=0$), on a

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)} \quad \text{et} \quad H = \left(\frac{8\pi G \rho}{3}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\dot{a}} = \frac{1}{Ha} = \frac{1}{H_0} a^{(1+3w)/2}$$

DEF

On dit qu'une cosmologie est **standard** si $1+3w > 0$

Dans ce cas, $\dot{a} \downarrow$ lorsque $\left\{ \begin{array}{l} a \nearrow \\ t \nearrow \end{array} \right\} \Leftrightarrow \ddot{a} < 0$

→ Dans une cosmologie standard,

$$\chi_{\text{part-hor}} = \int_{t_i}^{t_0} dt/a = \int_{a_i}^a \frac{da}{a\dot{a}} = \frac{2H_0^{-1}}{1+3w} \left(a^{(1+3w)/2} - a_i^{(1+3w)/2} \right)$$

$\rightarrow 0$ lorsque $t_i \rightarrow 0$

$$\simeq \frac{2H_0^{-1}}{1+3w} a^{(1+3w)/2} = \frac{2}{1+3w} (aH)^{-1}$$

Ainsi, $\chi \sim 1/aH \sim R_H$

DEF

Le **rayon de Hubble** R_H est défini Mon $R_H = \frac{1}{aH}$

DEF

On dit qu'une cosmologie est **non standard** si $1+3w < 0$

Dans ce cas, $\dot{a} \nearrow$ lorsque $\left\{ \begin{array}{l} a \nearrow \\ t \nearrow \end{array} \right\} \Leftrightarrow \ddot{a} > 0$

↳ L'**inflation** est une cosmologie non standard.

→ Dans une cosmologie non-standard,

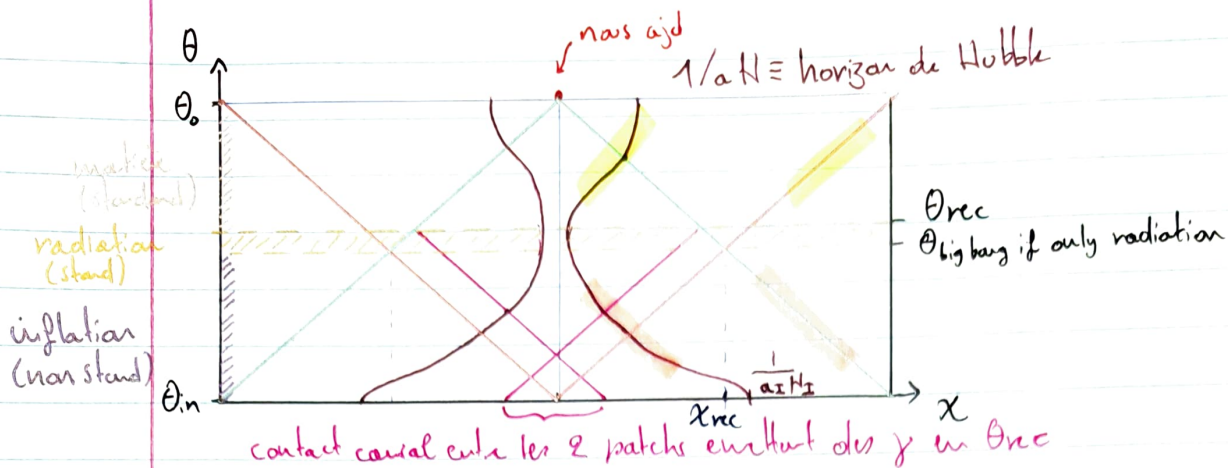
$$\chi_{\text{part-hor}} = \frac{2H_0^{-1}}{1+3w} \left(a^{(1-3w)/2} - a_i^{(1+3w)/2} \right) \simeq -\frac{2H_0^{-1}}{1+3w} a_i^{(1+3w)/2} \xrightarrow{a_i \rightarrow 0} \infty$$

↳ Dans une cosmologie non standard, $\chi_{\text{hor-part}}$ peut être arbitrairement grand en prenant $t_i \rightarrow 0$.

Dans ce cas, $\chi \neq R_H$ car:

$$R_H = \frac{1}{aH} = \frac{1}{H(t_{\text{inf, init}})} \cdot a^{\underbrace{(1+3w)/2}_{<0}} \rightarrow R_H \downarrow \text{ lorsque } \left\{ \begin{array}{l} a \nearrow \\ t \nearrow \end{array} \right\}$$

$$\chi_{\text{part-hor}} = \frac{2H(t_{\text{inf, init}})^{-1}}{1+3w} a^{(1+3w)/2} - \chi_i \Rightarrow \chi \nearrow \text{ lorsque } \left\{ \begin{array}{l} a \nearrow \\ t \nearrow \end{array} \right\}$$



— : χ (photon reçu aujourd'hui)

— : χ (photon reçu en t_{rec})

↳ En $t = t_{rec}$, tout les patches du CMB dans le ciel aujourd'hui étaient à l'intérieur de \triangle → connectés causalement

→ De cette manière, on peut expliquer pourquoi l'univers est homogène.

→ N.B.: le rayon de Hubble $R_H = 1/aH$ donne la distance comobile qui peut être causalement connectée lors d'une période d'un "temps de Hubble" $\Delta t = 1/H$

$$d\chi = dt/a \Rightarrow \Delta\chi = \Delta t/a = \frac{1}{aH} = R_H$$

↳ En cosmologie standard, $1/H \sim \tau_{univ}$

$R_H \sim \chi_{part, hor} =$ horizon apparent ajd.

↳ En cosmologie non standard, ces approx. ne sont pas valable du tout.

Prop Soit t_I le moment du départ de l'inflation et t_E sa fin.

L'univers peut être homogène aujourd'hui si

$$\left. \frac{1}{aH} \right|_{t_0} = \frac{1}{a_0 H_0} < \frac{1}{a_I H_I} = \left. \frac{1}{aH} \right|_{t_I}$$

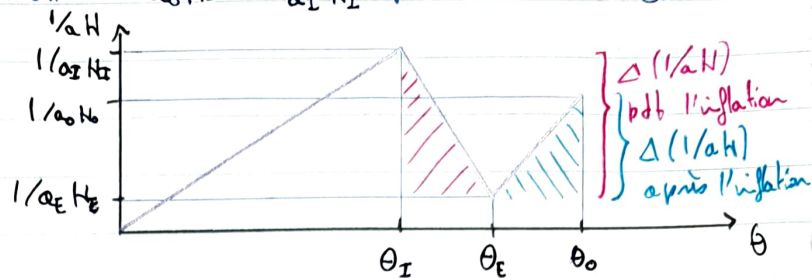
$$\text{Or, } \frac{1}{a_0 H_0} \simeq \Delta\chi \text{ entre } \theta_{rec} \text{ et } \theta_0, \text{ et } \frac{1}{a_I H_I} \simeq \Delta\chi \text{ entre } t_I \text{ et } t_{rec}$$

Alternativement, on peut voir $\frac{1}{a\chi H_I}$ comme l'horizon de particule d'un observateur à la fin de la période de cosmo. non standard qui était là avant l'inflation → $\Delta\chi$ qui aurait pu avoir un contact causal lors de cette période.

→ Graphiquement, la condition $\frac{1}{a_0 H_0} < \frac{1}{a_I H_I}$ peut se voir comme:

→ Par avoir la condition respectée, il faut, puisque:

$$\frac{a_0 H_0}{a_E H_E} \approx \frac{a_0}{a_E} \left(\frac{a_E}{a_0} \right)^2 = \frac{a_E}{a_0}$$



où on a fait l'hypothèse que $T_E \approx 10^{16}$ GeV
et puisque: $\frac{a_E}{a_0} = \begin{cases} 10^{-28} & \text{pour } T_E = 10^{16} \text{ GeV} \\ 10^{-32} & \text{pour } T_E = m_{PL} \end{cases}$, on trouve que

$$\frac{1}{a_I H_I} > \frac{a_E H_E}{a_0 H_0} \frac{1}{a_E H_E} \Rightarrow \frac{a_E}{a_I} > \frac{H_I}{H_E} \cdot 10^{\frac{28}{32}} \sim 10^{\frac{26}{32}}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{a_E}{a_I}\right) > \left\{ \frac{64}{32} \right\} e\text{-folds} \quad (\text{multiplier une quantité par } e)$$

→ Cas particulier: énergie noire:

→ Si $w = -1$ (univers de de Sitter), alors

$$\frac{1}{\dot{a}} = \frac{1}{H_0} a^{(1+3w)/2} = \frac{1}{a H_0} \Rightarrow a = a_I e^{H_I(t-t_I)} \Rightarrow \ln\left(\frac{a}{a_I}\right) = H_I(t-t_I)$$

Or, $H_I = H = \sqrt{\frac{8\pi G \rho}{3}}$ avec $\rho = \rho_{PL} \sim m_{PL}^4$. On trouve que la

durée de l'inflation est donnée par $t_E - t_I > \frac{33}{H_I} = 10^{-38}$ s très court!

⊙ Problème de planéité résolu:

$$\rightarrow \frac{(\Omega-1)|t_E}{(\Omega-1)|t_I} = \frac{\dot{a}_I^2}{\dot{a}_E^2} = \frac{H_I^2}{H_E^2} \cdot \frac{a_I^2}{a_E^2} < 10^{-64}$$

→ L'inflation aplatit toute géométrie d'univers. On peut voir cela car $\rho = \text{cte} \Rightarrow \Omega-1 = \frac{k}{a^2 H^2} = \frac{\text{cte}}{a^2} \searrow$ lorsque $a \nearrow$

⊙ Problème des reliques indésirées résolu :

- Au cours de l'inflation, tout les fluides sont dilués exponentiellement.

$$\frac{\rho_{R,M}}{a^3} \propto \frac{1}{a^3} \propto e^{-3H_I t}$$
- L'entropie va aussi à zéro lors de l'inflation :

$$s \propto \frac{1}{a^2} \propto (e^{-H_I t})^2 \sim 0$$
- En particulier, il n'y a pas d'asymétrie baryonique à la fin de l'inflation car il n'y a pas de baryons ni d'anti baryons.

⊙ 2 paramètres importants :

DEF On introduit le premier paramètre de Slow-Roll ϵ et le deuxième paramètre de Slow-Roll η définis par :

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad \text{et} \quad \eta \equiv \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon H}$$

→ On a $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) < 0 \Leftrightarrow \ddot{a} > 0$

$$-\frac{\ddot{a}H + a\dot{H}}{(aH)^2} = \frac{-1}{a} (1 - \epsilon) < 0$$

et $\eta = \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon H} = \frac{d \ln \epsilon}{d \ln a}$

PROP Il faut $\epsilon < 1$ pour avoir une inflation, et $|\eta| < 1$ pour qu'elle dure dans le temps.

- En effet, si $\eta < 1$, ϵ varie peu pendant $1/H$:

$$\eta = \frac{d\epsilon}{d\ln a} \cdot \Delta \ln a \cdot \frac{1}{\epsilon} \approx \frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} \quad \text{et} \quad a \sim e^{H_I t}$$

$(\Delta t)_{\text{inflation}} \gg H^{-1}$

8.3 Dynamique du champ scalaire

- Si la constante cosmologique était une constante, l'inflation ne s'arrêterait jamais. L'énergie noire doit être la valeur d'un champ scalaire, qui peut varier pour mettre fin à l'inflation.
- Considérons $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V[\phi]$. Pour un champ scalaire, on a :

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V[\phi] + \underbrace{\frac{(\nabla \phi)^2}{2a^2}}_{\text{dilaté}} \quad \text{et} \quad p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V[\phi] - \underbrace{\frac{(\nabla \phi)^2}{2a^2}}_{\text{dilaté}}$$

→ Pour avoir $w = p/\rho < -1/3$, il faut que le terme du potentiel domine. Si $V[\phi] \gg \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \Rightarrow w = -1$: énergie noire !

↳ Il faut que ϕ varie très lentement, puis accélère pour mettre fin à l'inflation. Ceci est déterminé par le potentiel.

→ Les EOM sont $\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'[\phi] = 0$ « analogue à un pion qui glisse avec friction $3H$ »

↳ Regardons la chronologie :

① Radiation :

→ ρ dominé par la radiation. Avec l'expansion, $\rho_{R,m} \downarrow$ mais ρ_ϕ reste constant (potentiel plat)

② Début de l'inflation :

→ Une fois que $\rho_R + \rho_m < \rho_\phi$, l'inflation commence. L'horizon de particule qui s'est développé lors de l'étape 1 est donné par $\sim \frac{1}{a \pm H \pm} \sim \chi_{\text{hor-part}}$

→ L'univers est de "de Sitter" : $w = -1$

③ Inflation:

→ Si le terme $\ddot{\phi}$ est négligeable, $\dot{\phi}$ reste petit (tel que $\dot{\phi}^2/2 \ll V[\phi]$), alors: $3H\dot{\phi} = -V'[\phi]$

Il y a équilibre entre la pente et la friction.

$\Rightarrow \dot{\phi} = \text{cte}$ tant que $V'(\phi) = \text{cte}$.

④ Accélération:

→ Si à un moment, $V'[\phi] \neq 0$, alors $\dot{\phi} \neq 0$ et $\ddot{\phi} \neq 0$. Le terme $\ddot{\phi}$ cesse d'être négligeable et il y a une accélération de la valeur de ϕ .

→ Un moment, on va avoir $\dot{\phi}^2/2 > V[\phi]$ et $w > -1/3$

\Rightarrow L'inflation s'arrête.

→ En pratique, on a les 2 conditions suivantes pour l'inflation:

$$\epsilon_V = \frac{m_{PL}^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 < 1 \Leftrightarrow \epsilon = \epsilon_V < 1$$

$$\eta_V = \frac{m_{PL}^2}{8\pi} \frac{V''}{V} < 1 \Leftrightarrow \eta_V = |2\epsilon_V - \eta/2| \text{ et } \eta < 1 \text{ si } \epsilon_V < 1$$

⑤ Gracful exit:

→ Juste après l'arrêt de l'inflation, ϕ déballe la pente

↳ ϕ n'est plus de l'énergie noire pure, mais un champ scalaire dynamique avec une énergie cinétique importante: des particules!

→ On parle de graceful exit de l'inflation si ϕ transfère son énergie aux particules du SM pour former un bain thermique.

→ On parle de reheating lorsque $\phi \rightarrow \text{SM}_1, \text{SM}_2$ en passant de $T=0 \mapsto T \sim (\rho_\phi)^{1/4}$ lorsque les nouvelles particules thermalisent:

$$\ddot{\phi} + (3H + \underbrace{\Gamma_{\phi \rightarrow \text{SM}_1, \text{SM}_2}}_{\text{friction supplémentaire}}) \dot{\phi} + V[\phi] = 0$$

→ Toutes les particules ϕ disparaissent et l'air de la radiation commence.

