

**Université Libre de Bruxelles
Faculté des Sciences**

MECANIQUE ANALYTIQUE

Pierre GASPARD

MATH-F-204

2011-2012

0

Introduction

1. But du cours

Le but du cours est de présenter les fondements et les méthodes de la mécanique analytique qui est la théorie mathématique décrivant le mouvement des corps matériels et, plus généralement, l'évolution temporelle des systèmes. Les corps matériels sont des objets caractérisés par leur masse comme les planètes en orbite autour du Soleil, les satellites ou les sondes spatiales, ou encore les atomes et les molécules qui composent la matière. Ces corps matériels sont en mouvement dans l'espace physique tridimensionnel où ils décrivent des trajectoires ou orbites au cours du temps. Ces mouvements intriguent depuis l'aube de l'humanité. Il y a plus de 300 ans, les travaux d'Isaac Newton (1643-1727) et d'autres ont permis de découvrir que ces mouvements obéissent à des lois mathématiques. Ainsi est née la mécanique analytique qui est devenue par ses succès l'un des paradigmes les plus influents de la science moderne. En effet, la mécanique newtonienne est à la base de l'idée que les phénomènes naturels peuvent se décrire mathématiquement. Cette idée s'est imposée à la suite de la prise de conscience que la force de gravité régit aussi bien le mouvement des planètes et des satellites que la chute des corps matériels sur terre.

C'est dans son ouvrage "Les principes mathématiques de la philosophie naturelle" publié pour la première fois en 1687 que Newton établit ainsi les lois du mouvement et l'universalité de la force de gravité pour expliquer toute une série de phénomènes naturels depuis les orbites képériennes des planètes ou comètes autour du Soleil jusqu'à la forme aplatie des globes planétaires ou les marées [1] (voir fig. 0.1). Les "Principia" eurent un impact majeur sur notre conception du monde en montrant que tous ces phénomènes trouvent leur explication dans des lois permettant d'établir des relations mathématiques entre des grandeurs mesurables par des observations ou des expériences. Historiquement, c'est sans doute la première fois que les mathématiques acquièrent une telle emprise sur le monde réel.

C'est probablement la régularité du mouvement des planètes qui a motivé et permis de découvrir pareilles relations mathématiques. Mais aujourd'hui, de telles relations ont été

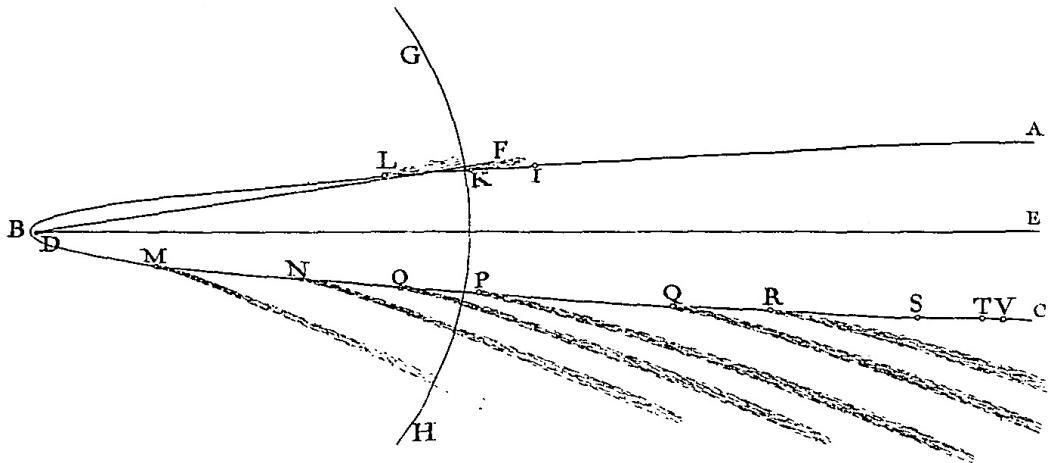


Figure 0.1: Trajectoire de la grande comète de 1680 ou comète de Kirch représentée dans les Principia (à la page 391 de la réf. [1]). Le point I est le lieu de la comète le 4 novembre 1680, K le 11 novembre, L le 19 novembre, M le 12 décembre, N le 21 décembre, O le 29 décembre, P le 5 janvier 1681, Q le 25 janvier, R le 5 février, S le 25 février, T le 5 mars et V le 9 mars. Ces observations permirent à Newton de vérifier les lois de Képler.

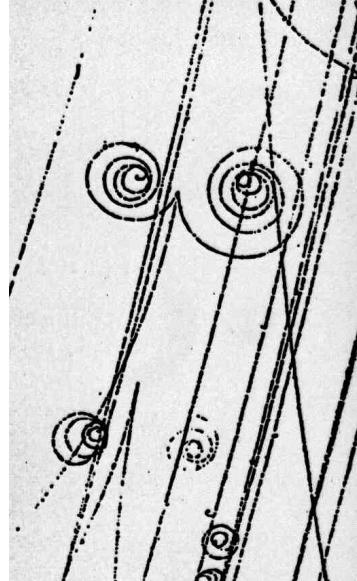


Figure 0.2: Trajectoires de particules chargées dans un champ magnétique et visualisées dans une chambre à bulles. Les trajectoires sont en spirale à cause de la dissipation d'énergie cinétique par rayonnement de lumière. Les spirales opposées sont les trajectoires de particules de charges opposées, à savoir des électrons et des positrons matérialisés à partir de photons gamma arrivant du dessus [2].

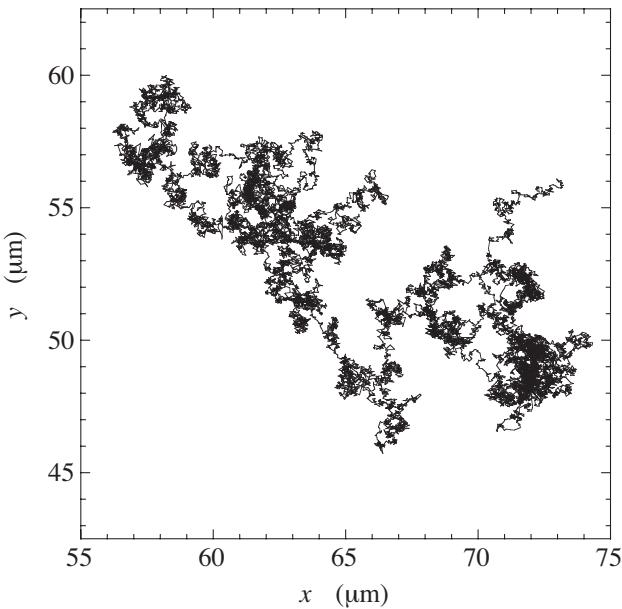


Figure 0.3: Trajectoire aléatoire d'une particule colloïdale d'un diamètre de 2 micromètres en suspension dans une solution aqueuse. La particule y subit un mouvement brownien à cause de ses collisions avec les molécules du fluide environnant. Le mouvement brownien de la particule colloïdale est le reflet de l'agitation thermique de ces molécules [3].

découvertes et validées expérimentalement jusque dans le monde microscopique des molécules, des atomes ou des particules subatomiques où les processus n'ont pas la régularité des orbites planétaires (voir figs. 0.2 et 0.3). Par ailleurs, l'évolution temporelle est aussi étudiée mathématiquement dans des systèmes de plus en plus complexes depuis les sciences naturelles jusqu'aux sciences humaines. La possibilité d'établir des relations mathématiques pour des phénomènes naturels ou autres est fascinante et a souvent étonné jusqu'aux chercheurs eux-mêmes, mais les fondements de cette mathématisation sont simples à comprendre.

2. Clés pour la mathématisation des sciences

Les nombres s'introduisent dans la description d'un phénomène à partir du moment où l'on peut identifier une collection d'objets que l'on estime être équivalents pour la description en question. La physique est ainsi basée sur des mesures de longueurs, de temps et de masses à l'aide d'étalons définis par des conventions internationales. Un étalon comme le mètre sert ainsi à mesurer une longueur quelconque par comparaison entre la distance séparant deux points de l'espace et le mètre qui est défini par deux traits tracés sur une barre solide. De même, la seconde est l'unité du temps mesuré par nos horloges et le kilogramme est défini par un étalon

de masse conservé dans un caveau au Bureau International des Poids et Mesures à Sèvres près de Paris [4]. Cet étalon peut être reproduit quasi à l'identique grâce à une balance. La mesure d'une masse quelconque peut alors s'effectuer comme un comptage par la relation d'équivalence établie grâce à la balance. Si l'on dispose d'une collection de poids identiques, ce comptage s'effectue sur les nombres entiers. Des nombres rationnels ou réels seront utilisés si des fractions de kilogramme peuvent être mesurées avec la balance.

En fait, c'est depuis la découverte de la mécanique newtonienne que la physique s'est élaborée sur la base de ces trois grandeurs de longueur, de temps et de masse. En effet, des grandeurs comme la vitesse, l'accélération, la force ou encore l'énergie ont toutes pour unités des combinaisons des trois unités fondamentales que sont le mètre, la seconde et le kilogramme. Même l'unité de la charge électrique peut s'exprimer en termes de ces trois unités fondamentales. Ainsi, la mécanique newtonienne a contribué au fondement du cadre métrologique de la physique.

Cependant, les mathématiques peuvent s'introduire par d'autres types de comptage. Déjà en physique, il existe des mesures qui consistent à compter des charges électriques comme des multiples entiers de la charge de l'électron. En effet, des charges électriques plus petites que celle de l'électron n'ont jamais été observées pour des particules isolables comme des ions ou des particules subatomiques. Il s'agit ici d'un comptage sur les nombres entiers plutôt que sur les nombres réels. Comme la charge électrique caractérise les particules atomiques ou subatomiques, une telle mesure revient à compter des particules identiques comme des électrons, des protons, des noyaux ou des atomes.

Dans ce même ordre d'idée, la chimie procède au comptage de molécules inorganiques, organiques ou biologiques (protéines, ARN, ADN,...). En biologie, ce sont les êtres vivants qui sont étudiés et comptés. Les systèmes biologiques peuvent se caractériser par le nombre de bactéries, cellules, végétaux ou animaux qu'ils contiennent à un instant donné. Par exemple, dans les écosystèmes, on observe l'existence d'oscillations de période de l'ordre de dix ans dans les populations de lynx et de lièvres sur un territoire [5]. Les oscillations peuvent être modélisées en termes mathématiques. Une telle modélisation mathématique est aussi pertinente dans l'étude des sociétés animales (abeilles, fourmis, termites, jusqu'aux primates). Par ailleurs, en astrophysique, les observations permettent d'identifier les étoiles et les galaxies et de les compter.

La médecine et les sciences humaines comme la sociologie ou l'économie sont aussi concernées. En particulier, l'épidémiologie qui est l'étude des épidémies se base sur des observations quantitatives qui permettent de déterminer l'évolution des populations infectées et de prévenir leur extension. Un autre exemple est le trafic autoroutier où les entités en mouve-

ment sont des véhicules que l'on peut compter ou suivre dans leur déplacement. Ainsi, des phénomènes d'ondes sont observés dans le débit des véhicules en relation avec la formation d'embouteillages (voir fig. 0.4). En économie, il existe de nombreux types d'entités qui se prêtent à un comptage et une étude quantitative: les prix, les taux de change entre les monnaies, les grandeurs financières ou autres caractérisant les entreprises ou les états, etc... Dans chaque cas, l'évolution temporelle des grandeurs en question est une préoccupation qui motive leur modélisation mathématique.

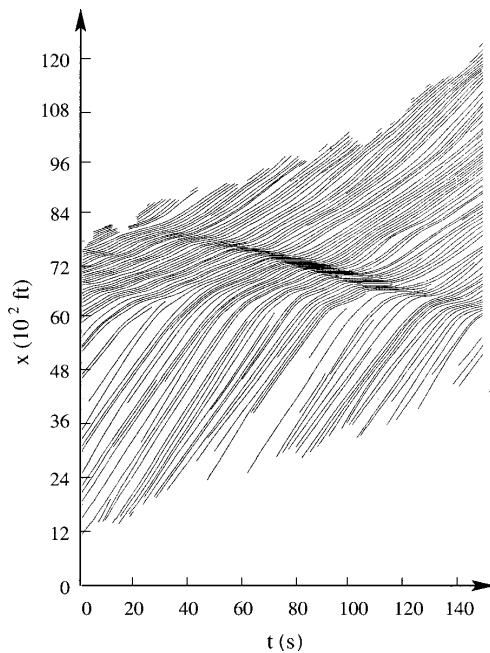


Figure 0.4: Embouteillages spontanés dans le trafic routier lorsque la densité des véhicules est trop grande. Les lignes sont les trajectoires des véhicules [6].

Nous pouvons ainsi comprendre comment, sur la base d'observations et de mesures, les sciences deviennent quantitatives grâce à l'identification des objets propres à chaque discipline scientifique, à leurs comptages sur les nombres entiers ou réels et à l'établissement de relations mathématiques entre ces nombres. De nos jours, toutes les sciences évoluent rapidement vers une plus grande mathématisation notamment grâce aux techniques informatiques de numérisation des données de caméras ou de détecteurs qui sont actuellement de plus en plus mis en réseaux et qui permettent d'identifier et de compter automatiquement les objets ou les événements intéressants (par exemple, des bactéries ou d'autres cellules qui prolifèrent dans une colonie observée sous un microscope muni d'une caméra vidéo), ou de suivre à la trace les objets

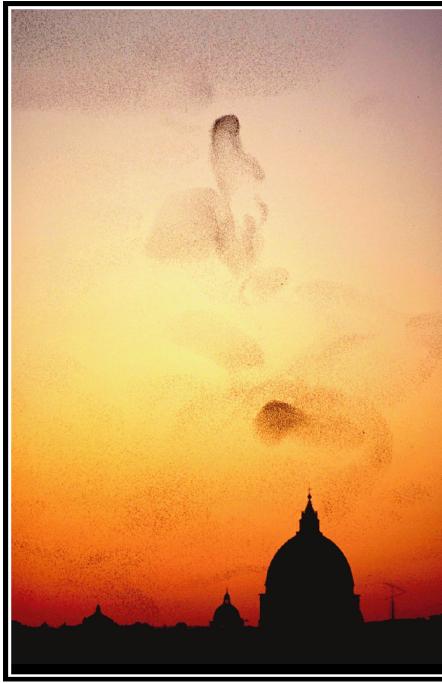


Figure 0.5: Vols d’étourneaux dans le ciel de Rome [7].

dans leur mouvement. Pareilles observations et mesures quantitatives des populations d’entités en interaction et de leurs mouvements permettent de comprendre l’évolution spatio-temporelle du système dans son ensemble. Dans ce domaine, les travaux les plus récents portent sur les vols d’étourneaux ou les bancs de poissons dont on cherche à comprendre les mouvements tourbillonnants (voir fig. 0.5). En dynamique des populations, la distribution spatiale et les mouvements des entités sont aussi étudiés mais il faut aussi tenir compte de ce que les entités naissent et meurent dans le système. Les techniques informatiques permettent aujourd’hui d’étudier des systèmes dont la complexité est de plus en plus grande. Les nouvelles connaissances ainsi acquises forment ce qui est aujourd’hui appelé la science des systèmes complexes.

Il est à noter que des animaux comme des oiseaux ou des poissons sont des entités auto-propulsées qui dépensent de l’énergie pour maintenir leur mouvement. Ces systèmes sont donc régis par des règles spécifiques de la physiologie et de l’éthologie de chaque espèce. Par contre, des corps matériels comme des atomes ou des molécules ne changent leur énergie que par leurs interactions mutuelles ou sous l’effet d’une force extérieure et leurs mouvements obéissent aux lois relativement simples de la mécanique.

3. La mécanique aujourd’hui

Les origines de la mécanique analytique remontent aux travaux des prédecesseurs de Newton comme Simon Stevin (1548-1620) [8], Galileo Galilei (1564-1642) [9], ou Johannes Képler (1571-1630) [10] qui marquent l’essor de la science moderne basée sur la méthode expérimentale. Aux XVIII^e et XIX^e siècles, la mécanique newtonienne connaît des développements retentissants non seulement en mécanique céleste, mais également en mécanique des milieux continus avec la mécanique des fluides et la description des ondes acoustiques ou à la surface de l’eau.

De plus, la mécanique newtonienne contribue à l’apparition de théories mathématiques majeures comme le calcul différentiel et intégral, la théorie des équations différentielles ordinaires et des équations aux dérivées partielles, et la géométrie différentielle [12, 13]. La théorie des équations différentielles ordinaires permet notamment d’obtenir les trajectoires des corps matériels tandis que la résolution des équations aux dérivées partielles décrit les mouvements de milieux continus comme les fluides, les solides ou les surfaces.

D’une part, des systèmes complètement intégrables par des méthodes analytiques ont été découverts depuis les années soixante [14]. Ces systèmes ont des mouvements extrêmement réguliers comme des ondes solitaires appelées solitons. D’autre part, des systèmes chaotiques ont été mis en évidence dans lesquels la plupart des trajectoires sont aussi aléatoires qu’un jeu de pile ou face [15] (voir fig. 0.6). La connection a ainsi été établie entre la mécanique et la théorie des probabilités et la théorie des processus stochastiques. Ces liens entre mécanique et probabilité sont étudiés dans la théorie ergodique et la théorie du chaos dynamique [17].

Au début du XX^e siècle, la mécanique newtonienne a été remise en question d’abord en 1905 par la relativité restreinte d’Einstein qui est une extension de la mécanique aux particules dont les vitesses approchent la vitesse de la lumière [18]. Ensuite en 1916, Einstein établit la relativité générale qui est une théorie de la gravité prenant en compte les changements conceptuels de la relativité restreinte [19].

Par ailleurs, dans le monde microscopique, la découverte des atomes et de leur structure vers la fin du XIX^e siècle et au début du XX^e siècle laissa entrevoir la nécessité d’une refonte de la mécanique à l’échelle atomique pour des particules comme l’électron. Des propriétés ondulatoires furent découvertes pour les particules subatomiques ce qui mena à l’établissement de la mécanique quantique en 1926 [20, 21].

Malgré sa remise en question par les relativités restreintes et générales et, surtout, par la mécanique quantique, la mécanique newtonienne reste toujours d’application dans son domaine de validité (voir table 1). Aujourd’hui, les équations de Newton sont utilisées en mécanique céleste pour envoyer des sondes spatiales aux confins du système solaire ou pour simuler les

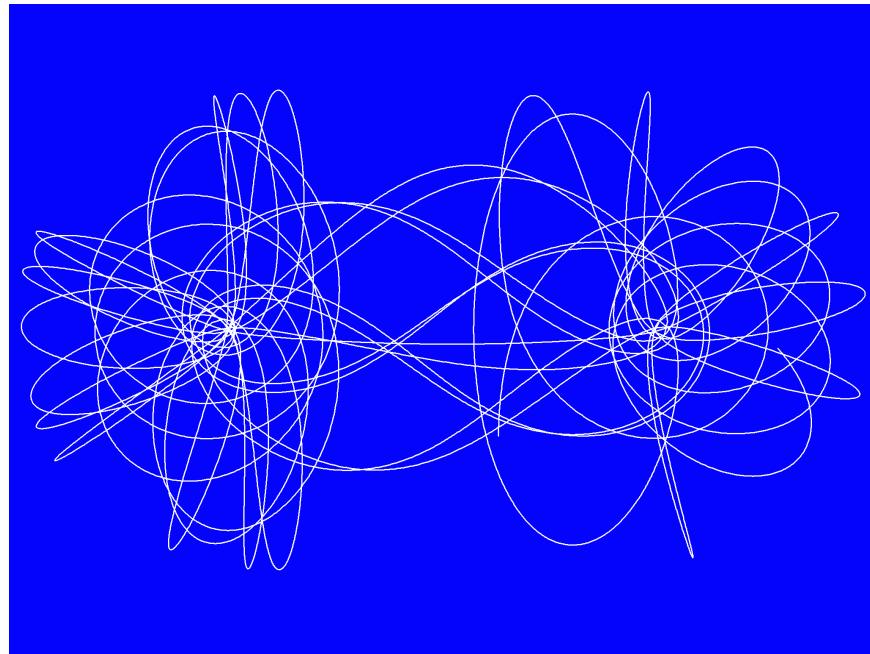


Figure 0.6: Trajectoire aléatoire du système chaotique à trois corps [16].

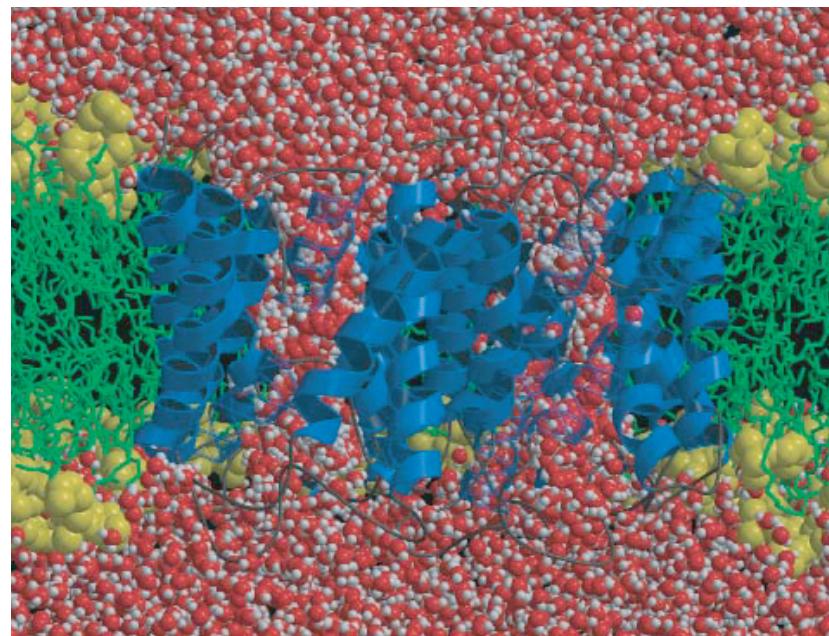


Figure 0.7: Snapshot d'une simulation de dynamique moléculaire d'une protéine d'aquaporine permettant le transfert de molécules d'eau entre deux milieux aqueux séparés par une membrane biologique [22].

mouvements de grands systèmes d'atomes ou de molécules d'intérêt en biologie cellulaire et en médecine (voir fig. 0.7).

De plus, les théories fondamentales qui ont étendu la mécanique newtonienne aux mondes microscopiques et cosmiques comme la mécanique quantique et les relativités ont hérité de la structure dite hamiltonienne, encore appelée structure symplectique, de la mécanique newtonienne. Cette structure garantit en particulier la conservation de l'énergie totale d'un système isolé, qui est une loi fondamentale de la nature. De manière remarquable, le même type de structure se retrouve aussi dans la théorie du contrôle optimal de systèmes régis par des équations différentielles ou dans l'étude de processus stochastiques dans la limite de faible bruit. Ainsi la mécanique analytique continue de jouer un rôle majeur dans la recherche scientifique du XXI^e siècle.

Table 1. Domaine de validité de la mécanique newtonienne.

en vitesse	$v \ll c$	(relativité restreinte)
en champ gravitationnel	$GM/c^2 \ll r$	(relativité générale)
en action	$S \gg \hbar$	(mécanique quantique)

- v est la vitesse d'un corps matériel.
- $c = 299\ 792\ 458$ mètre seconde $^{-1}$ est la vitesse de la lumière [4].
- $G = 6,674\ 28(67) \times 10^{-11}$ mètre 3 kilogramme $^{-1}$ seconde $^{-2}$ est la constante newtonienne de gravitation [23].
- r désigne la distance par rapport à un corps de masse M .
- $\hbar = 2\pi\hbar = 6,626\ 068\ 96(33) \times 10^{-34}$ kilogramme mètre 2 seconde $^{-1}$ est la constante de Planck [23].
- S désigne l'action d'un processus physique. L'action a pour unités celles d'une énergie multipliée par un temps.

Références

- [1] I. Newton, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* (Dunod, Paris, 2005).
- [2] F. Close, M. Marten, and C. Sutton, *The Particle Odyssey* (Oxford University Press, Oxford, 2002).
- [3] P. Gaspard, M. E. Briggs, M. K. Francis, J. V. Sengers, R. W. Gammon, J. R. Dorfman, and R. V. Calabrese, *Nature* **394** (1998) 865.
- [4] Site internet du Bureau International des Poids et Mesures: <http://www.bipm.org/>
- [5] S.I. Rubinow, *Introduction to Mathematical Biology* (Dover, New-York, 1975).
- [6] D. Helbing, *Rev. Mod. Phys.* **73** (2001) 1067 (et les références incluses).
- [7] M. Ballerini, N. Cabbibo, R. Candelier, A. Cavagna, E. Cisbani, I. Giardina, V. Lecomte, A. Orlandi, G. Parisi, A. Procaccini, M. Viale, and V. Zdravkovic, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **105** (2008) 1232.
- [8] J. T. Devreese and G. Vanden Berghe, *Magic is no magic: The wonderful world of Simon Stevin* (WIT press, Southampton, 2008).
- [9] G. Galilée, *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles* (1638, traduction française publiée p. 82 de la réf.[11]).
- [10] J. Képler, *L'harmonie du monde* (1619, traduction française publiée p. 300 de la réf. [11]).
- [11] S. Hawking, Editeur, *Sur les épaules des géants: les plus grands textes de physique et d'astronomie* (Dunod, Paris, 2003).
- [12] T. Gowers, Editor, *The Princeton Companion to Mathematics* (Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2008).

- [13] V. I. Arnol'd, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke* (Birkhäuser, Basel, 1990).
- [14] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, Phys. Rev. Lett. **15** (1965) 240.
- [15] A. Chenciner, *Three-body problem*, Scholarpedia **2** (2007) 2111.
- [16] J. C. Sprott, *Restricted Three-Body Problem*, <http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/3body.htm>
- [17] T. D. Sauer and J. Yorke, *Chaos*, Scholarpedia.
- [18] A. Einstein, *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement* (1905, traduction française publiée p. 819 de la réf. [11]).
- [19] A. Einstein, *Les fondements de la théorie de la relativité générale* (1916, traduction française publiée p. 856 de la réf. [11]).
- [20] W. Heisenberg, *The physical principles of the quantum theory* (University of Chicago Press, 1930; Dover, New York, 1949).
- [21] E. Schrödinger, *Mémoires sur la mécanique ondulatoire* (Librairie Félix Alcan, Paris, 1933; Editions Jacques Gabay, Sceaux, 1988).
- [22] H. J. C. Berendsen, Science **294** (2001) 2304; B. L. de Groot and H. Grubmüller, Science **294** (2001) 2353 ; La vidéo de la simulation se trouve à l'adresse internet: http://nobelprize.org/nobel_prizes/chemistry/laureates/2003/animations.html
- [23] P. J. Mohr, B. N. Taylor, and D. B. Newell, *CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2006*, Rev. Mod. Phys. **80** (2008) 633.

Chapitre 1

Eléments de géométrie et d'analyse vectorielle

Le cadre de la mécanique est l'espace qui nous entoure où les objets sont décrits par leur longeur, leur largeur et leur hauteur, ce qui en fait un espace de dimension trois. La notion de parallélisme qui le caractérise est à la base de la géométrie euclidienne établie dans l'Antiquité par les fameux axiomes d'Euclide (environ 350-290 avant l'ère commune). Ces axiomes définissent les concepts de point, de droite, d'angle droit et de parallèle par certaines de leurs propriétés [1]. De nos jours, un espace euclidien se conçoit en termes d'espace vectoriel où la notion de parallélisme est inhérente et dont l'avantage est de permettre le traitement algébrique des objets géométriques. Le but de ce chapitre est de donner des éléments sur les espaces vectoriels, les espaces euclidiens, les coordonnées curvilignes, ainsi que les principales notions d'analyse vectorielle que sont le gradient, la divergence et le rotationnel.

1.1 Espace vectoriel réel

Notations: On notera de manière équivalente un vecteur comme

$$\overrightarrow{OP}, \quad \vec{r} \quad \text{ou} \quad \mathbf{r}$$

La première notation \overrightarrow{OP} désigne explicitement un vecteur partant du point O servant d'origine et se dirigeant vers le point P (voir fig. 1.1).

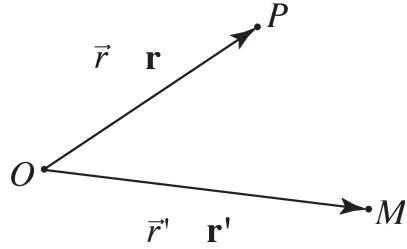


Figure 1.1: Deux exemples de vecteurs $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \mathbf{r}$ et $\overrightarrow{OM} = \vec{r}' = \mathbf{r}'$ dans un espace vectoriel. Le premier part de l'origine O et rejoint le point P , tandis que le second rejoint le point M .

Un *espace vectoriel réel* \mathcal{V} est un ensemble de vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ tels que:

$$\text{si } \mathbf{a} \text{ et } \mathbf{b} \in \mathcal{V}, \text{ alors } \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} \in \mathcal{V} \quad (1.1)$$

pour des nombres réels quelconques $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Le vecteur nul 0 correspond à l'origine de l'espace vectoriel. Deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} sont proportionnels ou linéairement dépendants s'il existe un nombre réel λ tel que $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$. Un ensemble de n vecteurs $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ sont linéairement dépendants si au moins un de ces vecteurs peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire s'il existe des nombres réels $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = 0. \quad (1.2)$$

Réciproquement, on dira que les n vecteurs $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ sont linéairement indépendants si aucun ne peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire si l'équation (1.2) est satisfaite si et seulement si (ssi) tous les nombres réels sont nuls: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Une *base de l'espace vectoriel* est un ensemble de vecteurs $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de l'espace qui sont linéairement indépendants et tels que tout vecteur \mathbf{a} de l'espace vectoriel peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs de base:

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + \cdots + a^n \mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^n a^i \mathbf{e}_i = a^i \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Dans l'avant-dernière expression, le signe de sommation a été omis et l'on a adopté la convention de sommation sur les indices répétés. La dernière expression donne le vecteur comme une matrice colonne.

Le nombre n de vecteurs d'une base est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants nécessaires pour décomposer tout vecteur \mathbf{a} de l'espace vectoriel. Ce nombre n caractérise l'espace vectoriel en question et est appelé la *dimension* de l'espace vectoriel, $\dim \mathcal{V} = n$.

Les opérations algébriques utilisant l'addition des vecteurs, leur multiplication par des nombres ainsi que le produit scalaire et le produit vectoriel définis ci-dessous forment ce qui est appelé *l'algèbre vectorielle*.

1.2 Produit scalaire

Dans l'espace vectoriel \mathcal{V} , on introduit cette notion comme suit:

Le *produit scalaire* entre deux vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$ est un nombre réel noté $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathbb{R}$ et tel que, pour tout vecteur $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathcal{V}$ et tout nombre réel $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, les propriétés suivantes soient satisfaites:

$$(\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{b} = \alpha_1 (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}) + \alpha_2 (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}) \quad (1.4)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2) = \beta_1 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_1) + \beta_2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_2) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0 \quad (1.7)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \text{ssi} \quad \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (1.8)$$

Le produit scalaire est donc l'application d'une paire de vecteurs sur les nombres réels. Cette application est linéaire à gauche et à droite. Elle est symétrique entre les deux vecteurs et elle définit une forme quadratique non-négative. Cette forme quadratique se représente par une matrice, c'est-à-dire un tableau de nombres, si chacun des deux vecteurs du produit scalaire sont décomposés sur une base de l'espace vectoriel:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a^i \mathbf{e}_i) \cdot (b^j \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) a^i b^j \equiv g_{ij} a^i b^j \quad (1.9)$$

La matrice des produits scalaires entre les vecteurs de base s'appelle la *métrique*:

$$g_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (1.10)$$

Le produit scalaire permet de définir la notion d'*orthogonalité*. On dira que les vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} sont *orthogonaux* ou *perpendiculaires*, ce que l'on notera $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, ssi leur produit scalaire est

nul: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Dans le même ordre d'idée, on définit la *longueur* du vecteur \mathbf{a} (encore appelé la *norme* ou le *module*) comme le nombre réel:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \quad (1.11)$$

qui est toujours non-négatif. Pour simplifier, on utilisera la notation $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2$. On dira qu'un vecteur est normé à l'unité, ou simplement unitaire si sa longueur est égale à l'unité. On parlera alors d'un vecteur unitaire noté \mathbf{u}_i ou $\vec{1}_i$ et tel que $\|\mathbf{u}_i\| = 1$.

Une *base orthonormée* ou *base cartésienne* est une base dont les vecteurs sont mutuellement orthogonaux et tous normés à l'unité. La métrique d'une telle base est la matrice identité, ce que l'on désigne par le *symbole de Kronecker*:

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.12)$$

Le produit scalaire de deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} peut s'interpréter géométriquement en termes de l'angle θ entre ces deux vecteurs selon la formule

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta \quad (1.13)$$

Ce résultat se démontre sur la fig. 1.2(a) où une base orthonormée $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ est construite

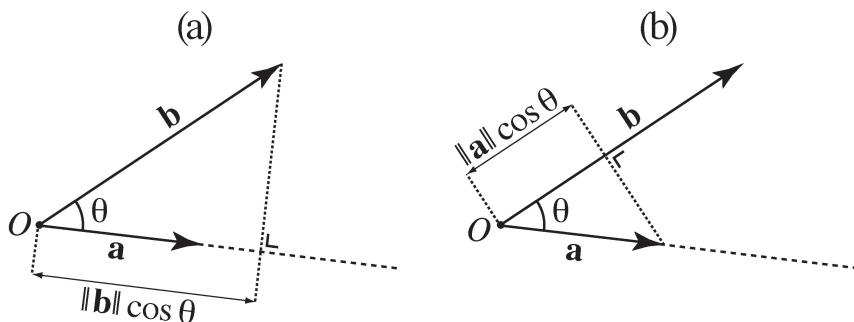


Figure 1.2: Interprétation géométrique du produit scalaire de deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} .

dans le plan des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} . Le vecteur unitaire \mathbf{u}_1 est pris dans la direction de \mathbf{a} tandis que l'autre vecteur unitaire \mathbf{u}_2 est pris perpendiculaire à \mathbf{u}_1 . Dans cette base cartésienne, les vecteurs se décomposent comme

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{u}_1 + a^2 \mathbf{u}_2 = \|\mathbf{a}\| \mathbf{u}_1 + 0 \mathbf{u}_2 \quad (1.14)$$

$$\mathbf{b} = b^1 \mathbf{u}_1 + b^2 \mathbf{u}_2 = \|\mathbf{b}\| \cos \theta \mathbf{u}_1 + \|\mathbf{b}\| \sin \theta \mathbf{u}_2 \quad (1.15)$$

où θ désigne l'angle entre les vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} . Le produit scalaire des deux vecteurs est donc donné par

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta \quad (1.16)$$

La première égalité donne le produit scalaire en termes des coordonnées cartésiennes et la seconde en termes des longueurs des vecteurs et de l'angle θ entre ces vecteurs. La figure 1.2(b) montre que la construction est la même si le vecteur \mathbf{a} est projeté orthogonalement sur le vecteur \mathbf{b} plutôt que l'inverse montré sur la figure 1.2(a). Le produit scalaire nous fournit donc l'angle entre deux vecteurs d'après

$$\theta = \arccos \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \quad (1.17)$$

Le produit scalaire est positif si l'angle entre les vecteurs est aigu ($0 \leq |\theta| < \frac{\pi}{2}$), il s'annule si l'angle est droit ($|\theta| = \frac{\pi}{2}$) et il est négatif si l'angle est obtus ($\frac{\pi}{2} < |\theta| \leq \pi$).

Un espace vectoriel muni d'un point scalaire est appelé un *espace euclidien centré* et noté \mathcal{E}_O^n . Il est centré parce que les vecteurs y sont définis vis-à-vis d'un point d'origine O qui est donc privilégié.

1.3 Produit vectoriel

Dans un espace vectoriel tridimensionnel muni d'une base orthonormée dextrogyre¹ $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, on définit le *produit vectoriel* de deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} comme le vecteur construit avec le déterminant suivant:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} \quad (1.18)$$

Les composantes cartésiennes de ce nouveau vecteur sont donc

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a^2 b^3 - a^3 b^2) \mathbf{u}_1 + (a^3 b^1 - a^1 b^3) \mathbf{u}_2 + (a^1 b^2 - a^2 b^1) \mathbf{u}_3 \quad (1.19)$$

On peut aussi écrire le produit vectoriel sous la forme

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \epsilon_{ijk} a^i b^j \mathbf{u}_k \quad (1.20)$$

¹Les vecteurs $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ forment une base dextrogyre si les trois vecteurs sont dirigés comme le pouce, l'index et le majeur de la main droite.

en termes du *symbole de Levi-Civita*:

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } ijk = 123 \text{ ou ses permutations cycliques,} \\ -1 & \text{si } ijk = 213 \text{ ou ses permutations cycliques,} \\ 0 & \text{si deux indices sont égaux.} \end{cases} \quad (1.21)$$

On remarquera que le troisième vecteur unitaire s'obtient à partir des deux autres d'après

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \quad (1.22)$$

Comme la base est dextrogyre, la direction de ce vecteur unitaire est fixée d'après la règle de la main droite dont le majeur pointe dans la direction de \mathbf{u}_3 si les directions de \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 sont données respectivement par le pouce et l'index. En fait, les trois vecteurs unitaires peuvent être permutés cycliquement dans l'éq. (1.22).

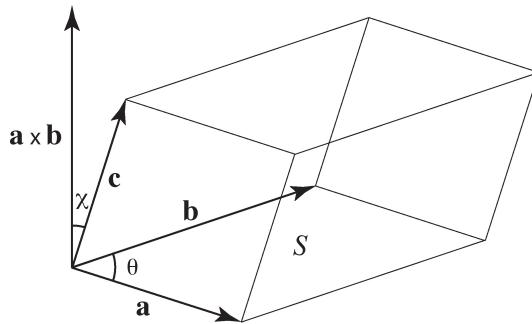


Figure 1.3: Interprétation géométrique du produit vectoriel et le volume sous-tendu par les trois vecteurs \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} .

Le produit vectoriel $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ s'interprète géométriquement comme le vecteur perpendiculaire au plan formé par les vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} dans la direction obtenue avec la règle de la main droite et dont la longueur est égale à l'aire S du parallélogramme sous-tendu par ces vecteurs (voir fig. 1.3). Si l'on choisit une nouvelle base orthonormée dextrogyre $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ dans laquelle le vecteur unité \mathbf{u}_1 pointe dans la direction du vecteur \mathbf{a} , \mathbf{u}_2 dans une direction perpendiculaire à \mathbf{u}_1 dans le plan de \mathbf{a} et \mathbf{b} , et \mathbf{u}_3 perpendiculairement à ce plan, alors les composantes des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} sont données par les éqs. (1.14) et (1.15) où θ est l'angle entre ces vecteurs. On notera que la troisième composante de ces vecteurs correspondant au vecteur unité \mathbf{u}_3 est nulle. Dans cette base, le produit vectoriel est donné par le vecteur

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ \|\mathbf{a}\| & 0 & 0 \\ \|\mathbf{b}\| \cos \theta & \|\mathbf{b}\| \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta \mathbf{u}_3 = S \mathbf{u}_3 \quad (1.23)$$

qui est donc bien perpendiculaire au plan des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} dans la direction de \mathbf{u}_3 établie par la règle de la main droite et dont la longueur est l'aire S du parallélogramme formé par \mathbf{a} et \mathbf{b} .

Par ailleurs, si ce vecteur $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ est pris en produit scalaire avec un troisième vecteur \mathbf{c} , nous obtenons le volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} . En effet, nous avons

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \epsilon_{ijk} a^i b^j c^k = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\| \sin \theta \cos \chi \quad (1.24)$$

en termes de l'angle χ entre les vecteurs \mathbf{c} et $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (voir fig. 1.3). Nous remarquons que ce volume peut être positif ou négatif selon que l'orientation est dextrogyre ou lévogyre entre les trois vecteurs \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} . On parlera donc de *volume orienté*.

On notera que la prise de deux produits vectoriels successifs s'exprime en termes de produits scalaires grâce aux *formules d'expulsion*:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (1.25)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \quad (1.26)$$

que l'on peut déduire de la relation fondamentale

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (1.27)$$

vérifiables par les définitions (1.12) et (1.21).

1.4 Base réciproque

Grâce au produit vectoriel, on introduit une *base réciproque de la base* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ en définissant de nouveaux vecteurs de base d'après

$$\mathbf{e}_*^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)} \quad (1.28)$$

$$\mathbf{e}_*^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)} \quad (1.29)$$

$$\mathbf{e}_*^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)} \quad (1.30)$$

Le dénominateur représente le volume orienté sous-tendu par les vecteurs de la base de départ

$$\text{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \quad (1.31)$$

On remarquera que la base réciproque d'une base orthonormée est la base elle-même. En général, la base réciproque de la base réciproque est la base de départ. Les vecteurs de la base réciproque sont orthogonaux à ceux de la base de départ

$$\mathbf{e}_*^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.32)$$

comme le montre la fig. 1.4.

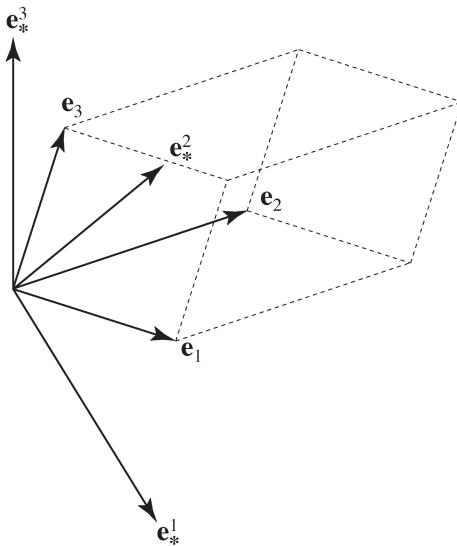


Figure 1.4: Base réciproque $\{\mathbf{e}_*^1, \mathbf{e}_*^2, \mathbf{e}_*^3\}$ de la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

1.5 Composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur

Un vecteur de l'espace vectoriel se décompose aussi bien dans une base que dans sa réciproque:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a_i \mathbf{e}_*^i \quad (1.33)$$

en termes de ses *composantes contravariantes*:

$$a^i \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_*^i \quad (1.34)$$

ou de ses *composantes covariantes*:

$$a_i \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i \quad (1.35)$$

Ainsi, la base réciproque permet d'obtenir les composantes dans une base par la simple prise de produits scalaires. En notations matricielles, nous aurions

$$\mathbf{a} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

où les composantes contravariantes forment une matrice colonne et

$$\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_*^1 \\ \mathbf{e}_*^2 \\ \mathbf{e}_*^3 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

où les composantes covariantes forment une matrice ligne.

La métrique de la base réciproque est donnée par

$$g^{ij} \equiv \mathbf{e}_*^i \cdot \mathbf{e}_*^j \quad (1.38)$$

Les vecteurs de la base s'expriment sur la base réciproque d'après

$$\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_*^j = g_{ij} \mathbf{e}_*^j \quad (1.39)$$

et vice versa

$$\mathbf{e}_*^i = (\mathbf{e}_*^i \cdot \mathbf{e}_*) \mathbf{e}_*^j = g^{ij} \mathbf{e}_j \quad (1.40)$$

Si nous introduisons ces relations dans l'éq. (1.32), nous obtenons

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \quad (1.41)$$

ce qui montre que la métrique de la base réciproque est donnée par l'inverse de la matrice de la métrique elle-même:

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} \quad (1.42)$$

Ces métriques permettent de transformer les composantes covariantes en contravariantes et réciproquement:

$$a^i = g^{ij} a_j \quad (1.43)$$

$$a_i = g_{ij} a^j \quad (1.44)$$

et le produit scalaire s'exprime comme:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = g_{ij} a^i b^j = g^{ij} a_i b_j = a^i b_i = a_i b^i \quad (1.45)$$

Si la base est orthonormée, les composantes contravariantes et covariantes sont identiques $a_i = a^i$ et l'on retrouve les relations habituelles

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i = a^i b^i \quad (1.46)$$

Par conséquent, on ne fera pas de différence entre les indices en haut et en bas si la base est orthonormée. Dans une base orthonormée, il n'y a donc plus de distinction à faire entre les composantes contra- et covariantes. La notion de base réciproque et la distinction entre indices en haut et en bas n'est utile que si la base n'est pas orthonormée (cartésienne).

1.6 Changement de base

A priori, nous pouvons définir plusieurs bases possibles dans un espace vectoriel. Comme tout vecteur de l'espace se décompose sur une base, il en est de même des vecteurs d'une autre base. Si l'on désigne par $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ et $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1}^n$ deux bases de l'espace, nous aurons que

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_j M^j_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.47)$$

où le tableau des nombres réels M^j_i forme la matrice du changement de base $\mathbf{M} = (M^j_i)_{i,j=1}^n$. Il s'agit d'une matrice carrée $n \times n$ telle que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{M} \quad (1.48)$$

Comme les vecteurs de chacune des deux bases sont linéairement indépendants, la matrice du changement de base peut être inversée et son déterminant ne s'annule pas:

$$\det \mathbf{M} \neq 0 \quad (1.49)$$

Les composantes covariantes se transforment d'après

$$a'_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}'_i = a_j M^j_i \quad (1.50)$$

ce que l'on peut noter

$$\begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{M} \quad (1.51)$$

en termes de la matrice \mathbf{M} .

Par contre, la transformation des composantes contravariantes se détermine en écrivant

$$\mathbf{a} = a^j \mathbf{e}_j = a'^i \mathbf{e}'_i \quad (1.52)$$

de sorte que

$$a^j = a'^i M_i^j \quad (1.53)$$

Comme nous pouvons aussi écrire

$$\mathbf{a} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}'_1 \ \mathbf{e}'_2 \ \mathbf{e}'_3) \cdot \begin{pmatrix} a'^1 \\ a'^2 \\ a'^3 \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

nous obtenons avec l'éq. (1.48)

$$\begin{pmatrix} a'^1 \\ a'^2 \\ a'^3 \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

ici en termes de l'inverse de la matrice de changement de base.

Cette même matrice détermine aussi la transformation de la base réciproque. En effet, d'après l'éq. (1.51), nous avons

$$\mathbf{a} = (a'_1 \ a'_2 \ a'_3) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_*^1 \\ \mathbf{e}'_*^2 \\ \mathbf{e}'_*^3 \end{pmatrix} = (a_1 \ a_2 \ a_3) \cdot \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_*^1 \\ \mathbf{e}_*^2 \\ \mathbf{e}_*^3 \end{pmatrix} = (a_1 \ a_2 \ a_3) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_*^1 \\ \mathbf{e}_*^2 \\ \mathbf{e}_*^3 \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

de sorte que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_*^1 \\ \mathbf{e}_*^2 \\ \mathbf{e}_*^3 \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_*^1 \\ \mathbf{e}_*^2 \\ \mathbf{e}_*^3 \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

Les composantes contra- et covariantes ont ainsi des règles de transformation différentes, de même que les vecteurs de la base et ceux de la base réciproque.

Par ailleurs, on notera que le changement de base transforme la métrique selon

$$g'_{kl} = g_{ij} M^i_k M^j_l \quad (1.58)$$

1.7 Transformations orthogonales

Un changement de base peut se concevoir comme une transformation de l'espace vectoriel modifiant ou déformant la base $\{\mathbf{e}_i\}$ en la nouvelle base $\{\mathbf{e}'_i\}$ donnée par l'éq. (1.48). Parmi toutes les transformations imaginables, celles qui ne changent ni les longueurs des vecteurs de base, ni les angles entre eux sont remarquables. Ces transformations laissent invariantes le produit scalaire et sont appelées les *transformations orthogonales*.

Considérons une base orthonormée $\{\mathbf{u}_i\}$. Dans une telle base, les composantes contra- et covariantes d'un vecteur sont égales: $a_i = a^i$. Par conséquent, la transformation des composantes

contravariantes dans le changement de base est donnée non seulement par l'éq. (1.55) mais aussi par la transposée de l'éq. (1.51) de sorte que l'on obtient la condition $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$ qui caractérise les matrices orthogonales \mathbf{O} définies par les relations

$$\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{1} \quad (1.59)$$

où T désigne la transposée et $\mathbf{1}$ la matrice identité. On vérifie que ces transformations ne changent pas le produit scalaire de deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} qui s'écrit dans une base orthonormée selon

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

comme

$$\begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{O} \quad (1.61)$$

et

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O}^T \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

on vérifie que

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' = \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (1.63)$$

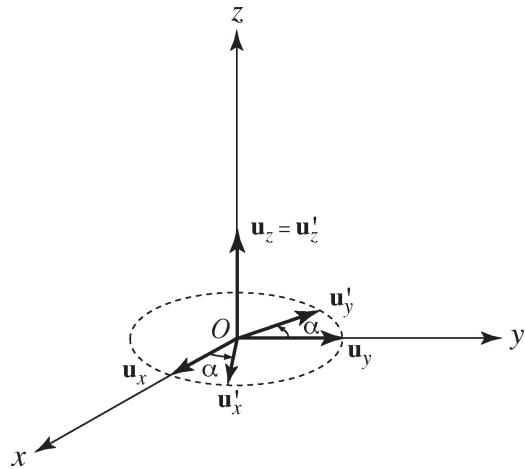
par la propriété (1.59) définissant les matrices orthogonales. Nous constatons qu'un tel résultat peut être interprété de deux façons différentes: soit comme le résultat d'un changement de base sur les composantes d'un seul et même vecteur, soit comme l'action d'une transformation du vecteur en un nouveau vecteur dans une seule et même base. Dans le premier cas, il s'agit d'un changement passif de référentiel et, dans le second, d'une transformation active de la position de l'objet dans l'espace.

Un exemple de transformation orthogonale est donné par une rotation d'un angle α autour de l'axe z . Nous supposons qu'il s'agit du changement de base correspondant (voir fig. 1.5). Pour cette rotation, les nouveaux vecteurs de base sont donnés par

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}'_x & \mathbf{u}'_y & \mathbf{u}'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

comme le montre la fig. 1.5, de sorte que cette rotation est représentée par la matrice

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

Figure 1.5: Rotation d'une base orthonormée d'un angle α autour de l'axe z .

Dans l'espace tridimensionnel, les transformations orthogonales comptent les rotations comme (1.65) pour lesquelles $\det \mathbf{O} = +1$ et les rotations combinées à des inversions comme

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

pour lesquelles $\det \mathbf{O} = -1$. Ces dernières changent les bases dextrogyres en bases lévogyres et vice versa. Toutes ces transformations forment un groupe appelé le groupe orthogonal de dimension trois et noté $O(3)$. Le sous-groupe des transformations dont le déterminant est unité est le groupe spécial orthogonal noté $SO(3)$. Comme les transformations orthogonales laissent le produit scalaire invariant, elles ne changent pas non plus la longueur des vecteurs.

1.8 Rectification d'une base quelconque

Une base quelconque peut se ramener à une base orthonormée par une transformation orthogonale suivie par un changement de longueur des vecteurs de base. Pour démontrer ce résultat, on utilise le fait que la métrique est donnée par une matrice réelle symétrique qui est donc diagonalisable par une transformation orthogonale de matrice \mathbf{O} de $SO(3)$ selon

$$\mathbf{g} = \mathbf{O}^T \cdot \gamma \cdot \mathbf{O} \quad (1.67)$$

où γ est une matrice diagonale, $(\gamma)_{ij} = \gamma_i \delta_{ij}$, dont les coefficients positifs $\gamma_i > 0$ sont les valeurs propres de la métrique. Le produit scalaire s'écrit

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= g_{ij} a^i b^j = \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{g} \cdot \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \sqrt{\gamma}^T \cdot \sqrt{\gamma} \cdot \mathbf{O} \cdot \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a'^1 & a'^2 & a'^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b'^1 \\ b'^2 \\ b'^3 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.68}$$

car la nouvelle base est orthonormée, de sorte que nous obtenons le changement de coordonnées

$$\begin{pmatrix} a'^1 \\ a'^2 \\ a'^3 \end{pmatrix} = \sqrt{\gamma} \cdot \mathbf{O} \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}\tag{1.69}$$

En comparant l'éq. (1.55), on trouve que

$$\mathbf{M} = \mathbf{O}^{-1} \cdot \gamma^{-\frac{1}{2}}\tag{1.70}$$

qui est bien l'enchaînement d'une transformation orthogonale suivie par un changement de longueur proportionnellement à l'inverse des racines carrées des valeurs propres de la métrique.

Le résultat précédent permet de démontrer que le volume orienté sous-tendu par les trois vecteurs $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ d'une base quelconque dextrogyre est donné par

$$\text{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = \sqrt{g}\tag{1.71}$$

en termes du déterminant de la métrique

$$g \equiv \det(g_{ij}) = \det \mathbf{g}\tag{1.72}$$

En effet, la transformation orthogonale \mathbf{O} ne change pas le volume qui peut se calculer dans la base particulière où le volume est sous-tendu par les vecteurs orthogonaux $\{\sqrt{\gamma_1} \mathbf{u}_1, \sqrt{\gamma_2} \mathbf{u}_2, \sqrt{\gamma_3} \mathbf{u}_3\}$ et on obtient

$$\text{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \text{vol}(\sqrt{\gamma_1} \mathbf{u}_1, \sqrt{\gamma_2} \mathbf{u}_2, \sqrt{\gamma_3} \mathbf{u}_3) = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} = \sqrt{g}\tag{1.73}$$

1.9 Produit vectoriel dans une base quelconque

Dans une base quelconque, le produit vectoriel peut donc s'écrire

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3) \times (b^1 \mathbf{e}_1 + b^2 \mathbf{e}_2 + b^3 \mathbf{e}_3) \\ &= (a^2 b^3 - a^3 b^2) \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 + (a^3 b^1 - a^1 b^3) \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 + (a^1 b^2 - a^2 b^1) \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \\ &= (a^2 b^3 - a^3 b^2) \sqrt{g} \mathbf{e}_*^1 + (a^3 b^1 - a^1 b^3) \sqrt{g} \mathbf{e}_*^2 + (a^1 b^2 - a^2 b^1) \sqrt{g} \mathbf{e}_*^3\end{aligned}\quad (1.74)$$

de sorte que

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_*^1 & \mathbf{e}_*^2 & \mathbf{e}_*^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (1.75)$$

ou encore

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sqrt{g} \epsilon_{ijk} a^i b^j \mathbf{e}_*^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k \quad (1.76)$$

ce qui implique que le volume sous-tendu par trois vecteurs est donné par

$$\text{vol}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sqrt{g} \epsilon_{ijk} a^i b^j c^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} a_i b_j c_k \quad (1.77)$$

avec les composantes contra- ou covariantes de ces vecteurs dans une base quelconque.

1.10 Tenseurs

Si l'on considère les vecteurs comme des objets mathématiques à un indice, les tenseurs sont des objets à plusieurs indices, le nombre d'indices étant l'ordre du tenseur.

1.10.1 Tenseurs d'ordre deux

Plus précisément, on définit un tenseur d'ordre deux d'espace euclidien centré \mathcal{E}_O^3 comme une application bilinéaire ou forme bilinéaire de $\mathcal{E}_O^3 \times \mathcal{E}_O^3$ sur les nombres réels \mathbb{R} ,

$$\mathbf{T} : \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_O^3 \longmapsto \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}, \quad \text{telle que} \quad (1.78)$$

$$\text{bilinéarité } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \lambda_1 \mathbf{T}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \lambda_2 \mathbf{T}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \\ \mathbf{T}(\mathbf{x}, \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2) = \lambda_1 \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \lambda_2 \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) \end{array} \right. \quad (1.79)$$

Il s'agit donc d'une fonction de deux variables vectorielles, à valeurs réelles et linéaires en chacune des variables. Les tenseurs du second ordre forment un espace vectoriel qui est le produit direct de deux copies de l'espace euclidien centré, $\mathcal{E}_O^3 \times \mathcal{E}_O^3$, car $\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$ et $\lambda \mathbf{T}$ sont aussi des tenseurs d'ordre deux.

A partir de deux vecteurs, \mathbf{a} et $\mathbf{b} \in \mathcal{E}_O^3$, on définit un tenseur d'ordre deux grâce à leur *produit tensoriel* $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ tel que

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_O^3 \longmapsto \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \quad (1.80)$$

qui est bien bilinéaire. On notera que le produit tensoriel n'est pas commutatif: $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$. Les produits tensoriels des vecteurs de base nous offrent des bases de l'espace des tenseurs:

$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_*^j, \quad \mathbf{e}_*^i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_*^i \otimes \mathbf{e}_*^j \quad (1.81)$$

telles que

$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_i y_j \quad (1.82)$$

$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_*^j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_i y^j \quad (1.83)$$

$$\mathbf{e}_*^i \otimes \mathbf{e}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^i y_j \quad (1.84)$$

$$\mathbf{e}_*^i \otimes \mathbf{e}_*^j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^i y^j \quad (1.85)$$

Ces bases permettent de décomposer un tenseur selon

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{avec} \quad T^{ij} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_*^i, \mathbf{e}_*^j) \quad (1.86)$$

$$\mathbf{T} = T^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_*^j \quad \text{avec} \quad T^i_j = \mathbf{T}(\mathbf{e}_*, \mathbf{e}_j) \quad (1.87)$$

$$\mathbf{T} = T_i^j \mathbf{e}_*^i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{avec} \quad T_i^j = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_*) \quad (1.88)$$

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_*^i \otimes \mathbf{e}_*^j \quad \text{avec} \quad T_{ij} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \quad (1.89)$$

En effet, on a par exemple pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_O^3$

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i x^i, \mathbf{e}_j y^j) = T_{ij} x^i y^j = T_{ij} \mathbf{e}_*^i \otimes \mathbf{e}_*^j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (1.90)$$

Les tenseurs forment donc un espace vectoriel de dimension $3 \times 3 = 9$ et ils admettent une représentation matricielle si l'indice de gauche est pris comme l'indice de ligne et celui de droite comme l'indice de colonne.

Remarque: Il faut noter que les tenseurs ne peuvent pas s'écrire en général comme le point tensoriel de deux vecteurs, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, car ceux-ci forment un espace de dimension 6, qui est inférieure à la dimension 9 de l'espace des tenseurs.

Le *transposé d'un tenseur* \mathbf{T} est défini par

$$\mathbf{T}^T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_O^3 \quad (1.91)$$

Tout tenseur d'ordre deux peut se décomposer en une partie symétrique et une autre antisymétrique selon

$$\mathbf{T} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T)}_{\equiv \mathbf{S}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T)}_{\equiv \mathbf{A}} \quad (1.92)$$

avec

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{S}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{S}^T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (1.93)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\mathbf{A}^T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (1.94)$$

de sorte que

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (1.95)$$

$$A_{ij} = -A_{ji} \quad (1.96)$$

On notera qu'une forme quadratique définit toujours un tenseur symétrique d'ordre deux et vice versa car

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = S_{ij} x^i x^j \quad (1.97)$$

avec $S_{ij} = S_{ji}$. Un exemple remarquable de tenseur symétrique d'ordre deux est donné par le tenseur métrique encore appelé le tenseur unité tel que

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_O^3 : \quad \mathbf{1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{ij} x^i y^j = g^{ij} x_i y_j = \delta_i^j x^i y_j = \delta^i_j x_i y^j \quad (1.98)$$

Nous aurons donc

$$\mathbf{1} = g_{ij} \mathbf{e}_*^i \otimes \mathbf{e}_*^j = g^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_*^i \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_*^i \quad (1.99)$$

Il faut remarquer que la première égalité permet d'écrire que $\mathbf{1} = \mathbf{g}$.

Par ailleurs, nous avons le lemme suivant:

Lemme: Dans l'espace vectoriel euclidien tridimensionnel \mathcal{E}_O^3 , tout tenseur d'ordre deux antisymétrique $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ peut être associé à un et un seul vecteur axial \mathbf{a} tel que:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_O^3 : \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{a}) \quad (1.100)$$

Par conséquent, le tenseur antisymétrique peut s'écrire

$$\mathbf{A} = -\mathbf{a} \times \quad (1.101)$$

La démonstration de ce lemme s'établit comme suit:

$$A_{12} = \mathbf{A}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \sqrt{g} \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_*^3 = \sqrt{g} a^3 \quad (1.102)$$

Par permutation cyclique, nous trouvons

$$a^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} A_{23} \quad (1.103)$$

$$a^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} A_{31} \quad (1.104)$$

$$a^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} A_{12} \quad (1.105)$$

de sorte que les matrices représentant le tenseur antisymétrique ont les formes

$$(A_{ij}) = \sqrt{g} \begin{pmatrix} 0 & a^3 & -a^2 \\ -a^3 & 0 & a^1 \\ a^2 & -a^1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A^{ij}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.106)$$

En notation indicelle, nous avons

$$a^i = \frac{1}{2\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} A_{jk}, \quad a_i = \frac{\sqrt{g}}{2} \epsilon_{ijk} A^{jk} \quad (1.107)$$

et

$$A_{ij} = \sqrt{g} \epsilon_{ijk} a^k, \quad A^{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} a_k \quad (1.108)$$

Comme le produit vectoriel dépend de l'orientation de la base, il en est de même pour le vecteur axial (parfois appelé pseudo-vecteur pour cette raison).

De même que pour les vecteurs, on abaisse ou on élève les indices des tenseurs grâce à la métrique, par exemple,

$$T_{ij} = T_i^k g_{kj} = g_{ik} T_j^k = g_{ik} T^{kl} g_{lj} \quad (1.109)$$

1.10.2 Tenseurs d'ordre k

Nous pouvons définir des tenseurs d'ordre quelconque. Un tenseur \mathbf{T} d'ordre k est une application k -linéaire de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathcal{E}_O^3$ sur les nombres réels $\mathbf{T}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}$.

Les tenseurs d'ordre 0 sont les nombres réels ou scalaires.

Les tenseurs d'ordre 1 s'identifient aux vecteurs car

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}_O^3 : \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{e}_i x^i) = \mathbf{a}(x_i \mathbf{e}_*^i) = a_i x^i = x_i a^i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \quad (1.110)$$

de sorte que l'on peut écrire

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a_i \mathbf{e}_*^i = \mathbf{a} \quad (1.111)$$

Au-delà les tenseurs d'ordre deux, nous avons les tenseurs d'ordre trois comme

$$\mathbf{T} = T^{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k = T_j^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_*^j \otimes \mathbf{e}_k = \dots \quad (1.112)$$

Un exemple remarquable de tenseur d'ordre trois est le tenseur complètement antisymétrique de l'espace euclidien centré tridimensionnel défini par

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{E}_O^3 : \quad \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{g}} (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \epsilon_{ijk} x^i y^j z^k \quad (1.113)$$

et donné par le symbole ϵ_{ijk} à l'éq. (1.21). Le tenseur complètement antisymétrique est relié au tenseur unité ou symbole de Kronecker par la formule (1.27) qui est fondamentale dans l'espace euclidien centré tridimensionnel.

Le *produit tensoriel* d'un tenseur $\mathbf{T}^{(k)}$ d'ordre k avec un tenseur $\tilde{\mathbf{T}}^{(l)}$ d'ordre l est défini par

$$\mathbf{T}^{(k)} \otimes \tilde{\mathbf{T}}^{(l)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l) = \mathbf{T}^{(k)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \tilde{\mathbf{T}}^{(l)}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l) \in \mathbb{R} \quad (1.114)$$

ce qui forme un tenseur d'ordre $k + l$.

Par ailleurs, le *produit contracté* d'un tenseur $\mathbf{T}^{(k)}$ d'ordre k avec un tenseur $\tilde{\mathbf{T}}^{(l)}$ d'ordre l est défini avec le produit scalaire selon

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(k)} \cdot \tilde{\mathbf{T}}^{(l)} &= (T^{(k)i_1 \dots i_k} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_k}) \cdot (\tilde{T}^{(l)j_1 \dots j_l} \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_l}) \\ &= (T^{(k)i_1 \dots i_{k-1} i_k} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_{k-1}} \otimes \mathbf{e}_{i_k}) \cdot (\tilde{T}^{(l)j_1 j_2 \dots j_l} \mathbf{e}_{j_1} \otimes \mathbf{e}_{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_l}) \\ &= T^{(k)i_1 \dots i_{k-1} i_k} g_{i_k j_1} \tilde{T}^{(l)j_1 j_2 \dots j_l} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_{k-1}} \otimes \mathbf{e}_{j_2} \dots \otimes \mathbf{e}_{j_l} \\ &= T^{(k)i_1 \dots i_{k-1} n} \tilde{T}^{(l)j_2 \dots j_l}_n \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_{k-1}} \otimes \mathbf{e}_{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_l} \\ &= T^{(k)i_1 \dots i_{k-1} n} \tilde{T}^{(l)}_{nj_2 \dots j_l} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_{k-1}} \otimes \mathbf{e}_*^{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_*^{j_l} \end{aligned} \quad (1.115)$$

ce qui en fait un tenseur d'ordre $k + l - 2$. On remarquera que le produit contracté généralise aux tenseurs le produit scalaire entre vecteurs. Autrement dit, le produit contracté de deux tenseurs d'ordre un est le produit scalaire de deux vecteurs:

$$\mathbf{T}^{(1)} \cdot \tilde{\mathbf{T}}^{(1)} = (T^{(1)i} \mathbf{e}_i) \cdot (\tilde{T}^{(1)j} \mathbf{e}_j) = g_{ij} T^{(1)i} \tilde{T}^{(1)j} = T^{(1)i} \tilde{T}_i^{(1)} = T_i^{(1)} \tilde{T}^{(1)i} \quad (1.116)$$

qui est un tenseur d'ordre 0, c'est-à-dire un scalaire. Par ailleurs, le produit contracté d'un tenseur d'ordre deux avec un tenseur d'ordre un ou vecteur donne un vecteur puisque

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = (T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (a^k \mathbf{e}_k) = T^{ij} g_{jk} a^k \mathbf{e}_i = T^{ij} a_j \mathbf{e}_i \quad (1.117)$$

Un exemple physique de tenseur est donné par le tenseur des pressions en hydrodynamique. Le tenseur des pressions relie un élément d'aire $\Delta \mathbf{S}$ d'une surface à la force $\Delta \mathbf{F}$ s'exerçant sur cet

élément d'aire. Comme l'élément d'aire $\Delta\mathbf{S}$ et la force correspondante $\Delta\mathbf{F}$ sont des grandeurs vectorielles, c'est un tenseur d'ordre deux qui les relie en toute généralité. Ce tenseur est appelé le tenseur des pressions et il s'écrit dans une base orthonormée selon

$$\mathbf{P} = P^{ij} \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j = P_{ij} \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \quad (1.118)$$

Si nous prenons son produit contracté avec l'élément d'aire $\Delta\mathbf{S} = \Delta S^i \mathbf{u}_i = \Delta S_i \mathbf{u}_i$, nous trouvons

$$\mathbf{P} \cdot \Delta\mathbf{S} = P_{ij} \Delta S_j \mathbf{u}_i = -\Delta\mathbf{F} \quad (1.119)$$

de sorte que les composantes de la force en question s'écriront

$$\Delta F_i = -P_{ij} \Delta S_j \quad (1.120)$$

Dans l'autre notation utilisée par un tenseur, cette composante serait donnée selon

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}_i, \Delta\mathbf{S}) = \mathbf{P}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \Delta S_j = P_{ij} \Delta S_j = -\Delta F_i \quad (1.121)$$

1.11 Espace euclidien

Un *espace euclidien* se définit comme *un espace vectoriel muni d'une distance*.

Une *distance* est une application de deux points de l'espace, c'est-à-dire de deux vecteurs sur les nombres réels,

$$\forall \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathcal{E}^n \longmapsto d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in \mathbb{R} \quad (1.122)$$

qui jouit des propriétés suivantes:

$$d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \geq 0 \quad (1.123)$$

$$d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0 \text{ssi } \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \quad (1.124)$$

$$d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = d(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \quad (1.125)$$

$$\forall \mathbf{r}_3 \in \mathcal{E}^n : d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \leq d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) + d(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2) \quad (\text{inégalité triangulaire}) \quad (1.126)$$

La dimension n de l'espace euclidien \mathcal{E}^n est celle de l'espace vectoriel. L'espace physique où nous vivons est l'espace euclidien à trois dimensions \mathcal{E}^3 muni de la distance, appelée elle-même la *distance euclidienne*:

$$d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| \quad (1.127)$$

et qui est définie à l'aide de la norme et donc du produit scalaire selon

$$\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| = \sqrt{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2} = \sqrt{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2} \quad (1.128)$$

Le choix d'un point d'origine dans l'espace euclidien définit un espace euclidien centré \mathcal{E}_O^3 , présenté ci-dessus comme un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. En effet, si l'origine est choisie au point O , la distance de tout point P de l'espace euclidien par rapport à cette origine est la norme du vecteur $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ de l'espace euclidien centré \mathcal{E}_O^3 . Le vecteur \overrightarrow{OP} est appelé un vecteur localisé en O . Le choix de différentes origines O, O', \dots définit différents espaces euclidiens centrés comme les ensembles de vecteurs localisés correspondants:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_O^3 &= \{\text{vecteurs localisés en } O\} \\ \mathcal{E}_{O'}^3 &= \{\text{vecteurs localisés en } O'\} \\ &\vdots\end{aligned}\tag{1.129}$$

Tous ces espaces euclidiens centrés sont équivalents sous l'effet des translations par les vecteurs joignant leurs origines respectives: $\overrightarrow{OO'}, \dots$. On parle de relation d'équipotence entre les vecteurs $\mathbf{r} \in \mathcal{E}_O^3$ et $\mathbf{r}' \in \mathcal{E}_{O'}^3$ si ces vecteurs forment un parallélogramme dans l'espace euclidien comme le montre la figure 1.6. Dans ce cas, les composantes des vecteurs \mathbf{r} et \mathbf{r}' sont les mêmes et rien ne les distingue. Par conséquent, aucun point n'est privilégié dans un espace euclidien, contraire-

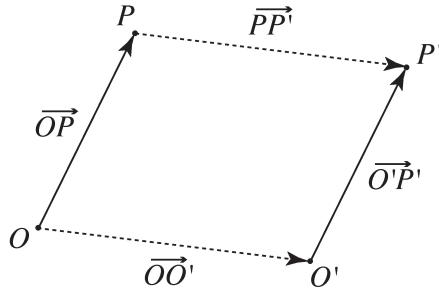


Figure 1.6: Relation d'équipotence entre les vecteurs $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r} \in \mathcal{E}_O^3$ et $\overrightarrow{O'P'} = \mathbf{r}' \in \mathcal{E}_{O'}^3$. $\overrightarrow{O'P'}$ est équipollent à \overrightarrow{OP} si $OO'PP'$ forme un parallélogramme.

ment à la situation dans les espaces euclidiens centrés où le vecteur nul est privilégié puisqu'il sert de point d'origine. Une autre façon de montrer cette propriété d'un espace euclidien est de constater que la distance (1.127) reste inchangée sous l'effet de translations $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{R}$:

$$d(\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}) = d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\tag{1.130}$$

Comme, par ailleurs, la distance (1.127) est inchangée sous l'effet de rotations ou, plus généralement, de transformations orthogonales $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{O} \cdot \mathbf{r}$, on dira que l'espace euclidien \mathcal{E}^3 est invariant sous le groupe des transformations composées de transformations orthogonales et de translations:

$$\forall \mathbf{O} \in O(3) \quad \text{et} \quad \forall \mathbf{R} \in \mathbb{R}^3 : \quad \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{O} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{R}\tag{1.131}$$

Dans ces notations, la transformation orthogonale \mathbf{O} est représentée par une matrice carrée 3×3 et chaque vecteur par la matrice colonne de ses composantes:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (1.132)$$

On peut montrer que la définition ci-dessus d'espace euclidien tridimensionnel est équivalente à celle basée sur les axiomes de la géométrie d'Euclide, la notion de parallélisme provenant du caractère vectoriel donné à l'espace. Des exemples d'espaces non-euclidiens ne sont apparus qu'à partir du moment où l'espace vectoriel a été remplacé par une variété différentiable (ou espace courbe) comme la sphère ou l'espace de Bolyai-Lobatchevsky au début du XIXe siècle.

1.12 Coordonnées curvilignes

1.12.1 Définition

On appelle *coordonnées curvilignes* de l'espace euclidien tridimensionnel un ensemble de trois coordonnées $(q^1, q^2, q^3) \in \mathbb{R}^3$ reliées aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) d'un point selon des fonctions

$$\begin{cases} x = x(q^1, q^2, q^3) \\ y = y(q^1, q^2, q^3) \\ z = z(q^1, q^2, q^3) \end{cases} \quad (1.133)$$

telles que le déterminant jacobien ne s'annule pas, ni ne diverge

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q^1, q^2, q^3)} \neq 0, \infty \quad (1.134)$$

pour que les coordonnées curvilignes puissent en retour être déterminées à partir des coordonnées cartésiennes et vice versa. Un point de l'espace euclidien sera donc donné par

$$\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z = \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3) \quad (1.135)$$

dans la base orthonormée $\{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z\}$.

1.12.2 Base naturelle

Une base naturelle peut être introduite en dérivant partiellement le vecteur de position par rapport à chacune des coordonnées curvilignes selon

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.136)$$

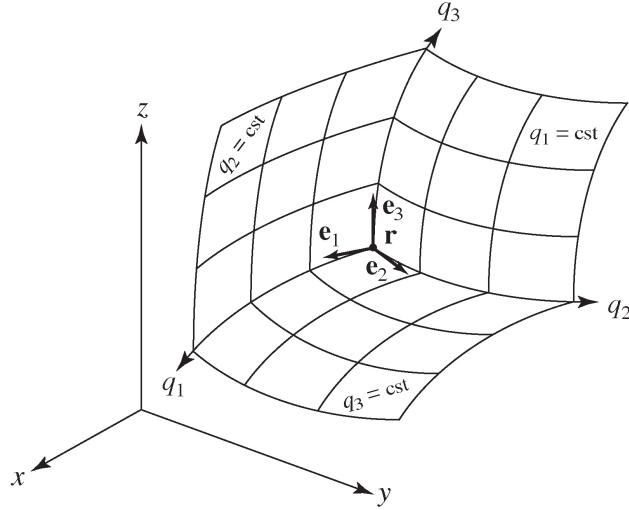


Figure 1.7: Représentation schématique des surfaces d'égales valeurs des coordonnées curvilignes (q^1, q^2, q^3) et des vecteurs de la base naturelle correspondante $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Par conséquent, chacun des vecteurs de base pointe dans la direction de croissance de la coordonnée curviligne correspondante:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i = \mathbf{e}_i dq^i \quad (1.137)$$

La métrique est donnée par

$$g_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} \quad (1.138)$$

qui permet d'obtenir le carré de l'élément de longueur

$$d\mathbf{r}^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = g_{ij} dq^i dq^j \quad (1.139)$$

On notera que les vecteurs de base et la métrique dépendent en général des coordonnées curvilignes et donc du point spatial où ils sont considérés.

Une base réciproque $\{\mathbf{e}_*^i\}_{i=1,2,3}$ peut être définie par les équations (1.28)-(1.30) de sorte que

$$d\mathbf{r} = dq_i \mathbf{e}_*^i \quad (1.140)$$

L'inverse de la métrique est donc donnée par

$$g^{ij} = \mathbf{e}_*^i \cdot \mathbf{e}_*^j \quad (1.141)$$

et

$$\|d\mathbf{r}\|^2 = g_{ij} dq^i dq^j = g^{ij} dq_i dq_j \quad (1.142)$$

Cette formule est un des points de départ de la géométrie différentielle et de la théorie des espaces riemanniens encore appelés variétés riemanniennes. Ces espaces sont définis par la donnée d'une métrique $g_{ij}(\mathbf{q})$ positive comme une fonction des coordonnées $\mathbf{q} = (q^1, q^2, \dots, q^n)$ et non plus par la relation (1.138). Cette généralisation rend possible la réalisation d'espaces courbes qui ne se rencontrent pas dans ce cours où l'on travaille dans l'espace euclidien sans courbure.

1.12.3 Coordonnées curvilignes orthogonales

Les coordonnées curvilignes sont dites être *orthogonales* si les vecteurs de base sont orthogonaux

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad (1.143)$$

Dans ce cas particulier, la métrique est diagonale

$$g_{ij} = g_{ii} \delta_{ij} = h_i^2 \delta_{ij} \quad (1.144)$$

avec

$$h_i \equiv \sqrt{g_{ii}} = \|\mathbf{e}_i\| \quad (1.145)$$

Par conséquent, nous pouvons définir une base naturelle orthonormée $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ avec les vecteurs unitaires:

$$\mathbf{u}_i \equiv \frac{\mathbf{e}_i}{\|\mathbf{e}_i\|} = \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{\mathbf{e}_i}{h_i} \quad (1.146)$$

La base réciproque correspondante est alors identique à la base orthonormée $\mathbf{u}_*^i = \mathbf{u}_i$.

On remarque que la base réciproque de la base formée par les vecteurs non-normés ne coïncide pas avec la base elle-même puisque

$$\mathbf{e}_i = h_i \mathbf{u}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_*^i = \frac{1}{h_i} \mathbf{u}_i \quad (1.147)$$

en accord avec les relations

$$g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij} \quad \text{et} \quad g^{ij} = \frac{1}{h_i^2} \delta_{ij} \quad (1.148)$$

Dans ce cas, la différentielle du vecteur de position s'écrit

$$d\mathbf{r} = dr^1 \mathbf{u}_1 + dr^2 \mathbf{u}_2 + dr^3 \mathbf{u}_3 = dr_1 \mathbf{u}_1 + dr_2 \mathbf{u}_2 + dr_3 \mathbf{u}_3 \quad (1.149)$$

et l'élément de longueur est donné par

$$\|d\mathbf{r}\|^2 = (dr_1)^2 + (dr_2)^2 + (dr_3)^2 = (h_1 dq^1)^2 + (h_2 dq^2)^2 + (h_3 dq^3)^2 \quad (1.150)$$

Dans ces coordonnées curvilignes orthogonales, un élément de volume est donné par

$$dV = dr_1 dr_2 dr_3 = h_1 h_2 h_3 dq^1 dq^2 dq^3 \quad (1.151)$$

et un élément de surface par le vecteur

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= dr_2 dr_3 \mathbf{u}_1 + dr_3 dr_1 \mathbf{u}_2 + dr_1 dr_2 \mathbf{u}_3 \\ &= h_2 h_3 dq^2 dq^3 \mathbf{u}_1 + h_3 h_1 dq^3 dq^1 \mathbf{u}_2 + h_1 h_2 dq^1 dq^2 \mathbf{u}_3 \end{aligned} \quad (1.152)$$

Il existe plusieurs systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales utilisées [2].

1.12.4 Coordonnées sphériques

Un exemple de coordonnées curvilignes orthogonales est donné par les *coordonnées sphériques* (r, θ, ϕ) définies par

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1.153)$$

où r est la *distance radiale*, $0 \leq \theta < \pi$ est l'*angle zénithal ou angle de colatitude* et $0 \leq \phi < 2\pi$ est l'*angle azimutal ou angle de longitude* (voir fig 1.8).

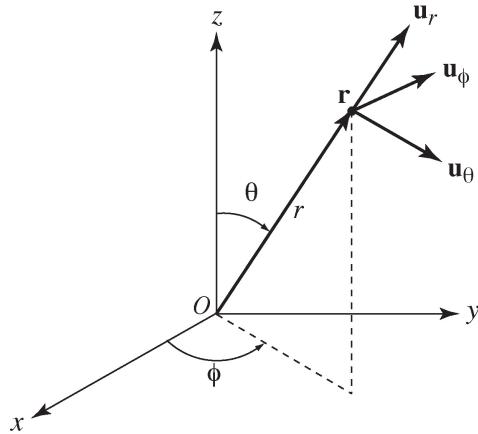


Figure 1.8: Définition des coordonnées sphériques et de la base naturelle orthonormée associée.

Ces coordonnées sont données en termes des coordonnées cartésiennes d'après

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \phi = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) & \text{si } x \geq 0 \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1.154)$$

La base naturelle des coordonnées sphériques est définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \mathbf{u}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{u}_y + \cos \theta \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_r \\ \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \phi \mathbf{u}_x + r \cos \theta \sin \phi \mathbf{u}_y - r \sin \theta \mathbf{u}_z = r \mathbf{u}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -r \sin \theta \sin \phi \mathbf{u}_x + r \sin \theta \cos \phi \mathbf{u}_y = r \sin \theta \mathbf{u}_\phi \end{array} \right. \quad (1.155)$$

Les vecteurs unités $\{\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\phi\}$ de la base naturelle orthonormée associée sont représentés sur la fig. 1.8. Les longueurs des vecteurs de la base naturelle sont données par

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r \sin \theta \quad (1.156)$$

de sorte qu'un élément de volume est égal à

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \quad (1.157)$$

ou encore

$$dV = r^2 \, dr \, d\cos \theta \, d\phi \quad (1.158)$$

en coordonnées sphériques.

1.12.5 Coordonnées cylindriques

Un autre exemple est donné par les *coordonnées cylindriques* (ρ, ϕ, z) définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{array} \right. \quad (1.159)$$

qui reprennent les coordonnées polaires (ρ, ϕ) dans le plan Oxy et où z reste la coordonnée cartésienne de hauteur (voir fig. 1.9). Par conséquent, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance à l'axe vertical z et $\phi = \text{arctg}(y/x)$ est l'angle azimuthal ou angle de longitude (encore appelé angle polaire dans le plan Oxy).

La base naturelle des coordonnées cylindriques est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_\rho = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \mathbf{u}_x + \sin \phi \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_\rho \\ \mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi \mathbf{u}_x + \rho \cos \phi \mathbf{u}_y = \rho \mathbf{u}_\phi \\ \mathbf{e}_z = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_z \end{array} \right. \quad (1.160)$$

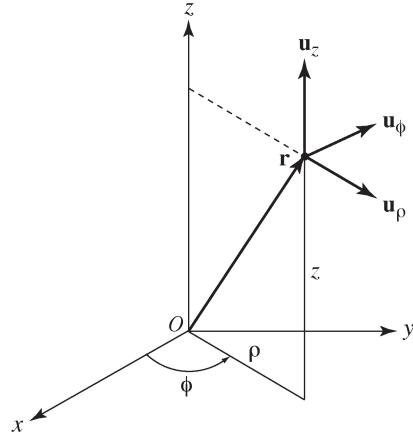


Figure 1.9: Définition des coordonnées cylindriques et de la base naturelle orthonormée associée.

ce qui définit les vecteurs unitaires de la base orthonormée associée (voir fig. 1.9). Les longueurs des vecteurs de la base naturelle sont donc

$$h_\rho = 1 , \quad h_\phi = \rho , \quad h_z = 1 \quad (1.161)$$

et l'on retrouve l'élément de volume des coordonnées polaires multiplié par l'élément de hauteur:

$$dV = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz \quad (1.162)$$

1.12.6 Changement de coordonnées curvilignes

On suppose que deux systèmes de coordonnées curvilignes sont définies par

$$q'^i = q'^i(q^j) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial(q'^1, q'^2, q'^3)}{\partial(q^1, q^2, q^3)} \neq 0 \quad (1.163)$$

et

$$q^j = q^j(q'^i) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial(q^1, q^2, q^3)}{\partial(q'^1, q'^2, q'^3)} \neq 0 \quad (1.164)$$

Les bases naturelles respectives sont alors reliées par

$$\mathbf{e}'_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q'^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} \frac{\partial q^j}{\partial q'^i} = \mathbf{e}_j M^j_i \quad (1.165)$$

avec la matrice de changement de base

$$M^j_i = (\mathbf{M})^j_i \equiv \frac{\partial q^j}{\partial q'^i} \quad \text{et} \quad (\mathbf{M}^{-1})^i_j = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j} \quad (1.166)$$

Les composantes contravariantes d'un vecteur

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}'_i = a^j \mathbf{e}_j \quad (1.167)$$

se transforment donc d'après

$$a'^i = a^j \frac{\partial q'^i}{\partial q^j} \quad (1.168)$$

et ses composantes covariantes selon

$$a'_i = a_j \frac{\partial q^j}{\partial q'^i} \quad (1.169)$$

De même, un tenseur d'ordre deux voit ses éléments se transformer comme

$$T'^{ij} = T^{kl} \frac{\partial q'^i}{\partial q^k} \frac{\partial q'^j}{\partial q^l}, \dots \quad (1.170)$$

1.13 La notion de champ

Dans un milieu continu comme un fluide ou un solide, les grandeurs peuvent varier continûment dans l'espace. C'est le cas par exemple pour la température $T(\mathbf{r})$, la densité de masse $\rho(\mathbf{r})$ ou la concentration d'un polluant $C(\mathbf{r})$ dans l'atmosphère. Toutes ces grandeurs sont des scalaires qui varient dans l'espace euclidien avec la position $\mathbf{r} \in \mathcal{E}^3$ où elles sont mesurées. Dans ces cas, on parlera de *champs scalaires*.

A coté des champs scalaires, on trouve des *champs vectoriels*. Un exemple de champ vectoriel est donné par la vitesse d'un fluide en écoulement. Cette vitesse est définie par un vecteur $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ qui varie dans l'espace. Par conséquent, on se représente l'écoulement d'un fluide comme un champ de vecteurs s'étendant dans l'espace occupé par le fluide. D'autres exemples sont les champs électrique et magnétique qui forment ce qui est appelé le champ électromagnétique (voir fig. 1.10).

Plus spécifiquement, on obtient aussi un exemple de champ en prenant un des vecteurs de la base naturelle de coordonnées curvilignes. En particulier, le vecteur $\mathbf{e}_r = \mathbf{u}_r$ des coordonnées sphériques forme un champ à caractère radial (voir fig. 1.11a). Par contre, le vecteur unité \mathbf{u}_ϕ des coordonnées sphériques ou cylindriques est un champ tournant autour de l'axe vertical z (voir fig. 1.11b).

De façon générale, un *champ tensoriel* d'ordre k est une application définie en tout point \mathbf{r} de l'espace euclidien \mathcal{E}^3 qui associe un nombre réel à k vecteurs de l'espace euclidien $\mathcal{E}_{\mathbf{r}}^3$ centré en ce point \mathbf{r} :

$$\forall \mathbf{r} \in \mathcal{E}^3, \mathbf{x}_1 \in \mathcal{E}_{\mathbf{r}}^3, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathcal{E}_{\mathbf{r}}^3 : \quad \mathbf{T}^{(k)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k; \mathbf{r}) = T_{i_1 \dots i_k}^{(k)}(\mathbf{r}) x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k} \in \mathbb{R} \quad (1.171)$$

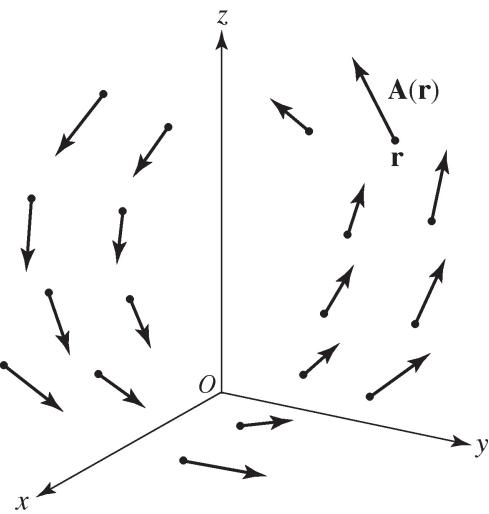


Figure 1.10: Illustration schématique d'un champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ dans l'espace euclidien tridimensionnel $\mathbf{r} \in \mathcal{E}^3$. Ce champ de vecteurs est par exemple le champ de vitesse dans un fluide, le champ électrique, le champ magnétique, ou encore un des vecteurs de la base naturelle de coordonnées curvilignes.

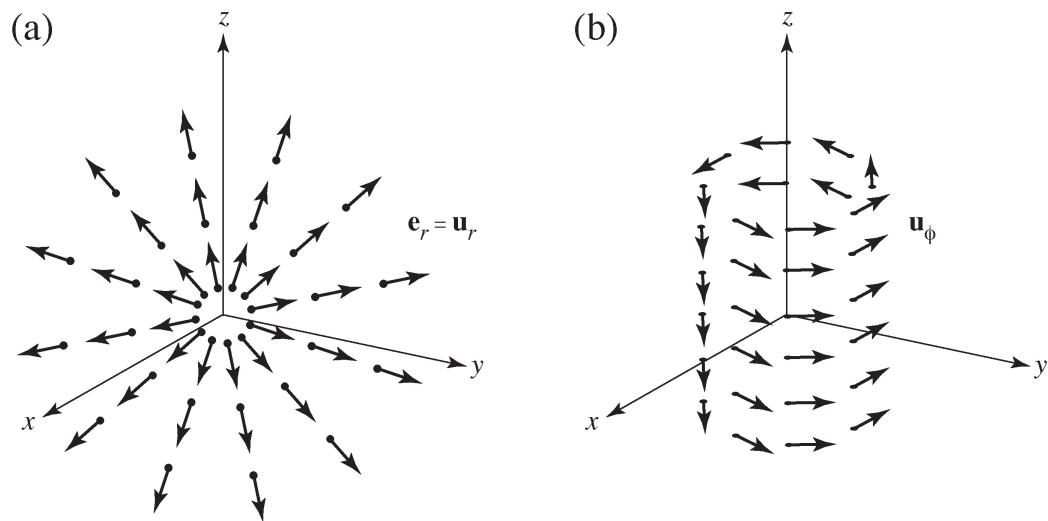


Figure 1.11: (a) Champ des vecteurs $\mathbf{e}_r = \mathbf{u}_r$ associés à la distance radiale des coordonnées sphériques. (b) Champ des vecteurs \mathbf{u}_ϕ associés à l'angle de longitude des coordonnées sphériques ou cylindriques.

Un exemple de champ tensoriel d'ordre deux est donné par la métrique de la base naturelle de coordonnées curvilignes de \mathcal{E}^3 , $g_{ij}(\mathbf{q})$, qui varie avec le point $\mathbf{r}(\mathbf{q}) \in \mathcal{E}^3$ considéré. Un autre exemple est le tenseur des pressions, $P_{ij}(\mathbf{r})$, dans un milieu continu comme un solide élastique déformé par des contraintes.

La notion de champ – et, en particulier, de champ de vecteurs – se définit de manière semblable dans différents types d'espaces comme nous le verrons par la suite.

1.14 Analyse vectorielle en coordonnées cartésiennes

On considère une base orthonormée $\{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z\}$ de l'espace euclidien centré tridimensionnel \mathcal{E}_O^3 . Un point de cet espace est donné par le vecteur $\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z$. Dans cet espace, nous considérons un champ scalaire défini par la fonction différentiable $f(\mathbf{r}) = f(x, y, z)$, ainsi que le champ vectoriel différentiable

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv A_x(\mathbf{r}) \mathbf{u}_x + A_y(\mathbf{r}) \mathbf{u}_y + A_z(\mathbf{r}) \mathbf{u}_z \quad (1.172)$$

1.14.1 Le gradient

Le gradient d'une fonction $f(\mathbf{r})$ différentiable est défini par le champ des vecteurs

$$\nabla f \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{u}_z \quad (1.173)$$

en termes des dérivées partielles vis-à-vis de chacune des trois coordonnées cartésiennes (x, y, z) . Les vecteurs du gradient pointent dans la direction ascendante de la fonction $f(\mathbf{r})$.

Par exemple, le gradient de la fonction en cloche ou fonction gaussienne

$$f(x, y, z) = \exp(-x^2 - y^2 - z^2) \quad (1.174)$$

est donné par

$$\nabla f(\mathbf{r}) = -2 f(\mathbf{r}) \mathbf{r} \quad (1.175)$$

et est donc dirigé vers l'origine $\mathbf{r} = 0$ où la fonction atteint son maximum. Par ailleurs, le gradient de la fonction $f(x, y, z) = y$ est le champ des vecteurs $\nabla f = \mathbf{u}_y$ qui sont tous dirigés dans la direction y dans laquelle la fonction croît indéfiniment.

Les extrema d'une fonction $f(\mathbf{r})$ sont les points \mathbf{r} où le gradient s'annule: $\nabla f = 0$. La notion de gradient est utile pour la géométrie des surfaces comme le montre le lemme suivant:

Lemme: Le vecteur unitaire \mathbf{n} perpendiculaire à la surface d'égales valeurs $f(\mathbf{r}) = C$ (où C est une constante) est donné au point \mathbf{r}_0 en termes du gradient de la fonction $f(\mathbf{r})$ d'après

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f(\mathbf{r}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{r}_0)\|} \quad (1.176)$$

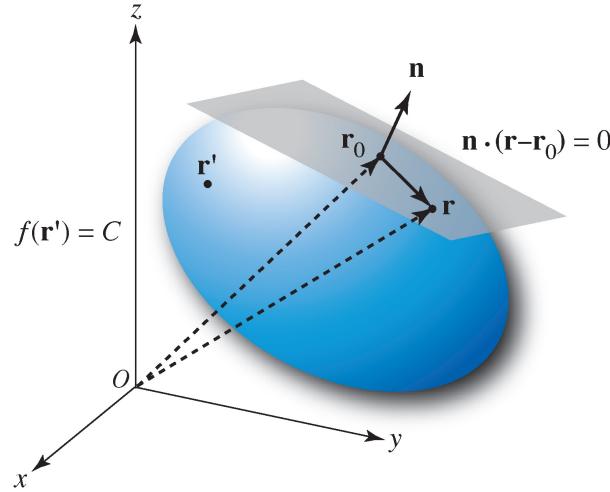


Figure 1.12: Surface $f(\mathbf{r}') = C$ à laquelle appartient le point \mathbf{r}' et le plan tangent en \mathbf{r}_0 .

Démonstration: La fonction $f(\mathbf{r})$ se développe en série de Taylor autour du point \mathbf{r}_0 selon

$$f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0) + \nabla f(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \dots \quad (1.177)$$

où les points désignent les termes de degré deux ou plus. Par conséquent, le plan tangent à la surface $f(\mathbf{r}) = C$ au point \mathbf{r}_0 a pour équation

$$\nabla f(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \quad (1.178)$$

puisque le point \mathbf{r}_0 appartient à la surface et satisfait donc $f(\mathbf{r}_0) = C$. En divisant par la norme du gradient nous trouvons $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$, ce qui démontre que le vecteur \mathbf{n} est perpendiculaire au plan tangent et donc à la surface (voir fig. 1.12).

1.14.2 La divergence

La divergence d'un champ vectoriel différentiable $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ est défini par le champ scalaire

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.179)$$

La divergence indique si les vecteurs du champ divergent les uns des autres localement.

Par exemple, le champ des vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ représenté sur la fig. 1.13a est à caractère divergent en accord avec le fait que sa divergence est positive et constante, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 3$. Par contre, le champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ de la fig. 1.13b tourne sans diverger autour de la direction du vecteur \mathbf{a} de sorte que la divergence s'annule $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Ces exemples montrent que la divergence évalue le caractère divergent des vecteurs dans le champ.

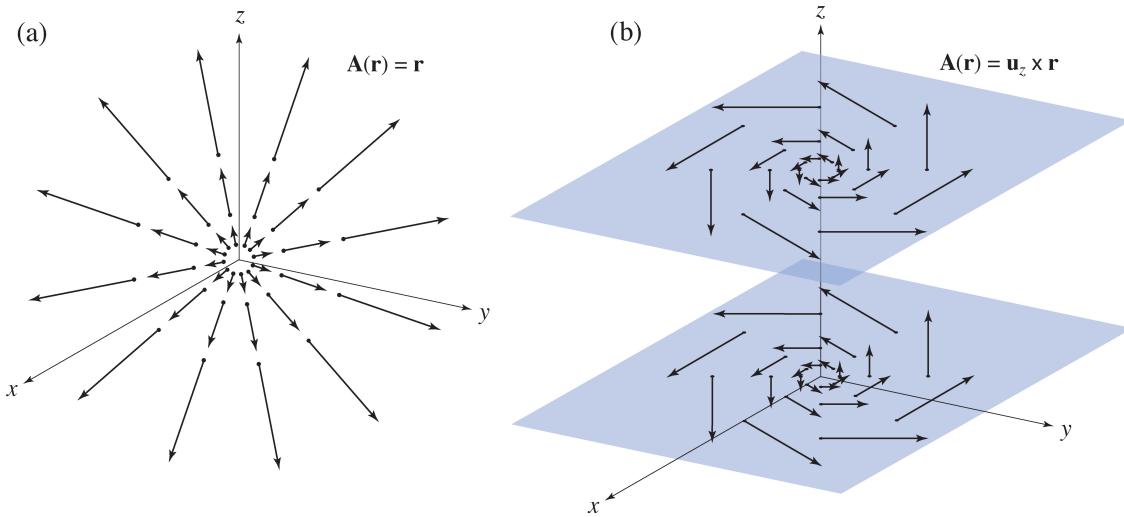


Figure 1.13: (a) Champ des vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ de divergence positive et constante $\nabla \cdot \mathbf{A} = 3$ et de rotationnel nul $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. (b) Champ des vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ avec $\mathbf{a} = \mathbf{u}_z$ de divergence nulle $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ et de rotationnel non-nul $\nabla \times \mathbf{A} = 2\mathbf{a}$.

1.14.3 Le rotationnel

Le rotationnel d'un champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ est défini par le nouveau champ de vecteurs

$$\nabla \times \mathbf{A} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (1.180)$$

Le rotationnel s'interprète comme une mesure du caractère tournant ou tourbillonnant du champ de vecteurs.

Par exemple, le rotationnel du champ de la fig. 1.13a s'annule car les vecteurs divergent sans mouvement tournant. Par contre, le champ de vecteurs de la fig. 1.13b présente un rotationnel

non-nul à cause du caractère tourbillonnant des vecteurs autour de l'axe $\mathbf{a} = \mathbf{u}_z$. Dans un fluide, un tourbillon est ainsi caractérisé par le rotationnel du champ de vitesse $\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r})$, qui est appelé la vorticité.

1.14.4 Intégrale de Riemann

Le gradient, la divergence et le rotationnel interviennent dans les grands théorèmes de l'analyse vectorielle qui portent sur des intégrales de ligne, de surface et de volume. Pour aborder ces théorèmes, il faut se rappeler que l'intégrale d'une fonction $f(x)$ est définie d'après Riemann comme la limite d'une somme

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty \\ N \Delta x = b - a}} \sum_{i=1}^N f(x^{(i)}) \Delta x \quad (1.181)$$

avec $x_i = a + (i - \frac{1}{2})\Delta x$ ($i = 1, 2, \dots, N$). L'intervalle $[a, b]$ d'intégration est découpé en N sous-intervalles de longueur $\Delta x = \frac{1}{N}(b - a)$. La fonction est évaluée à l'intérieur de chacun de ces sous-intervalles, par exemple, au point médiant $x_i = a + (i - \frac{1}{2})\Delta x$ (voir fig. 1.14). Une valeur approchée de l'intégrale est donnée par la somme des valeurs $f(x^{(i)})$ de la fonction multipliée par la longueur Δx des sous-intervalles. Ensuite, on répète ce calcul pour des sous-intervalles plus petits et donc plus nombreux pour obtenir une meilleure approximation de l'intégrale. La valeur de l'intégrale est obtenue dans la limite où sont pris des sous-intervalles arbitrairement petits.

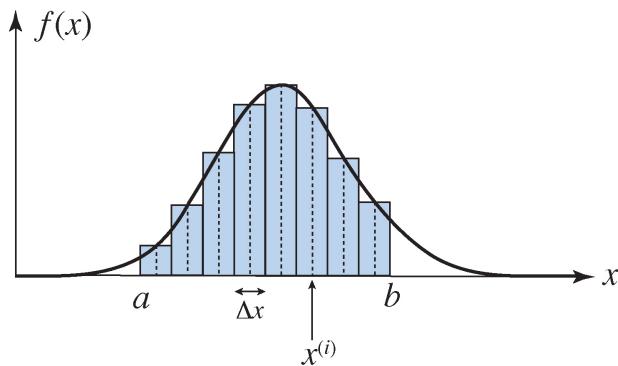


Figure 1.14: Evaluation de l'intégrale de Riemann d'une fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ de la droite réelle. L'intégrale est l'aire sous la courbe donnée par la fonction $f(x)$.

Les intégrales de Riemann multidimensionnelles se définissent de manière analogue en découpant le domaine d'intégration en petites cellules de taille identique, en effectuant la somme de la fonction multipliée par l'hypervolume des cellules et en prenant enfin la limite de cellules arbitrairement petites

$$\begin{aligned} & \iint \cdots \int_D f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \lim_{\Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_n \rightarrow 0} \sum_i f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_n \end{aligned} \quad (1.182)$$

1.14.5 Intégrale de ligne

Dans l'espace euclidien \mathcal{E}^3 , on considère une courbe donnée par les équations paramétriques

$$C \quad \begin{cases} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \\ z = z(\lambda) \end{cases} \quad (1.183)$$

où λ est un paramètre. Cette courbe est décrite par le vecteur

$$C : \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\lambda) = x(\lambda) \mathbf{u}_x + y(\lambda) \mathbf{u}_y + z(\lambda) \mathbf{u}_z \quad (1.184)$$

Un arc de cette courbe C est obtenu lorsque le paramètre varie sur l'intervalle $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Les extrémités de cet arc sont $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(\lambda_1)$ et $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(\lambda_2)$. L'intégrale de ligne d'un champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ le long de l'arc de courbe C est définie par

$$\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathbf{A}[\mathbf{r}(\lambda)] \cdot \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(A_x \frac{dx}{d\lambda} + A_y \frac{dy}{d\lambda} + A_z \frac{dz}{d\lambda} \right) d\lambda \quad (1.185)$$

1.14.6 Intégrale de surface

Soit une surface définie par l'équation paramétrique

$$S : \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\lambda, \mu) \quad (1.186)$$

où les deux paramètres λ et μ varient dans le domaine D (voir fig. 1.15).

Un élément d'aire de la surface dS multiplié par un vecteur \mathbf{n} normal à la surface définit le vecteur associé à chaque élément d'aire

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = dy dz \mathbf{u}_x + dz dx \mathbf{u}_y + dx dy \mathbf{u}_z \quad (1.187)$$

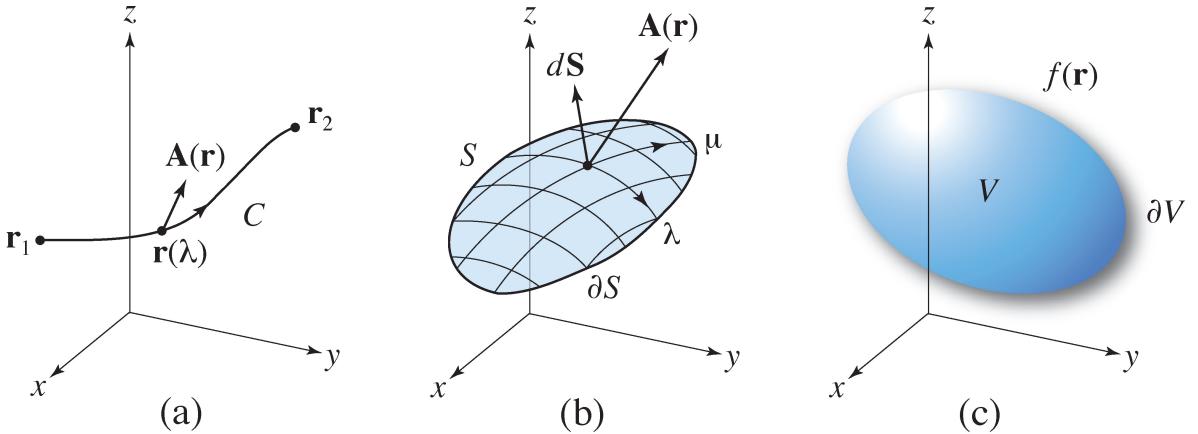


Figure 1.15: (a) Intégrale de ligne du champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ le long de la courbe $\mathbf{r}(\lambda)$ de paramètres $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. (b) Intégrale de surface du champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ sur la surface $\mathbf{r}(\lambda, \mu)$ de paramètres $(\lambda, \mu) \in D$. (c) Intégrale de volume de la fonction $f(\mathbf{r})$ sur le domaine $\mathbf{r} \in V$.

Par convention, ce vecteur est défini selon une direction appropriée. Cette décomposition en composantes cartésiennes revient à représenter de manière approchée la surface comme un assemblage de petits carrés de taille $dy dz$, $dz dx$ et $dx dy$ formés par les axes. Alternativement, le vecteur $d\mathbf{S}$ peut s'exprimer en termes des équations paramétriques de la surface. En effet, un déplacement sur la surface peut être induit par des variations $d\lambda$ et $d\mu$ des deux paramètres

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu} d\mu \quad (1.188)$$

L'élément d'aire sous-tendu par les vecteurs correspondants à ces deux types de déplacement est obtenu comme

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu} d\lambda d\mu \quad (1.189)$$

Il s'agit bien d'un vecteur qui est perpendiculaire à la surface puisque $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu}$ sont tangents à la surface et leur produit vectoriel est donc normal. Sa direction est obtenue d'après la règle de la main droite à partir des vecteurs $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu}$.

L'intégrale de surface du champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ est définie par

$$\iint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS \equiv \iint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S A_x dy dz + A_y dz dx + A_z dx dy \quad (1.190)$$

et se calculera en utilisant l'intégrale double suivante

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{A} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu} \right) d\lambda d\mu = \iint_D \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{vmatrix} d\lambda d\mu \quad (1.191)$$

1.14.7 Intégrale de volume

L'intégrale de la fonction $f(\mathbf{r}) = f(x, y, z)$ sur le volume V de l'espace euclidien \mathcal{E}^3 est définie par l'intégrale triple suivante

$$\iiint_V f(\mathbf{r}) \, dV = \iiint_V f(\mathbf{r}) \, d^3r = \iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad (1.192)$$

où $dV = d^3r = dx \, dy \, dz$ est l'élément de volume.

Ces différents types d'intégrales sont reliées entre elles par les grands théorèmes de l'analyse vectorielle.

1.14.8 Théorème du gradient

Si un champ de vecteurs est le gradient d'un champ scalaire $f(\mathbf{r})$, son intégrale de ligne sur un arc de courbe C est donnée par la différence entre les valeurs du champ scalaire aux extrémités de l'arc. En effet, si $\mathbf{A} = \nabla f$, l'intégrale de ligne s'exprime en termes de la différentielle de la fonction $f(\mathbf{r})$:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_C \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} df = f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1) \quad (1.193)$$

Par conséquent, cette intégrale s'annule si la courbe C est fermée sur elle-même dans l'espace euclidien:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \text{si } \mathbf{A} = \nabla f \quad (1.194)$$

Réciproquement, si l'intégrale de ligne d'un champ de vecteurs s'annule sur toutes les courbes C fermées sur elles-mêmes, alors ce champ de vecteurs peut s'exprimer comme le gradient d'un champ scalaire.

En effet, l'indépendance de l'intégrale de ligne du champ de vecteurs \mathbf{A} vis-à-vis du chemin suivi est garanti par la condition d'annulation $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$ pour toute courbe fermée puisque

$$\int_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.195)$$

est équivalent à

$$\oint_{C_1-C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1.196)$$

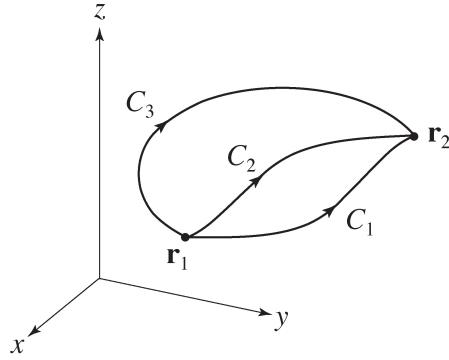


Figure 1.16: Illustration de l'indépendance de l'intégrale de ligne $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ en le chemin C suivi lorsque $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$ pour toutes les courbes fermées.

Par conséquent, l'intégrale de ligne ne dépend que des extrémités de l'arc de courbe sous l'hypothèse effectuée. Si une des extrémités est choisie comme l'origine, l'intégrale de ligne définit donc une fonction de l'autre extrémité à constante près:

$$f(\mathbf{r}) \equiv f(\mathbf{r}_0) + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.197)$$

Le gradient de cette fonction redonne bien le champ de vecteurs, $\mathbf{A} = \nabla f$. C.Q.F.D.

1.14.9 Théorème de la divergence

Ce théorème affirme que l'intégrale de volume de la divergence d'un champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ est égale à l'intégrale de surface du champ lui-même sur le bord ∂V du volume V d'intégration:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.198)$$

On remarquera que le bord ∂V du volume V est nécessairement une surface fermée sur elle-même (si le volume est compact et connexe).

Pour démontrer ce théorème en termes d'opérations arithmétiques élémentaires, on découpe le volume V en petites cellules de volume $\Delta x \Delta y \Delta z$ selon une grille parallèle aux axes des coordonnées cartésiennes (voir fig. 1.17). Les dérivées partielles peuvent alors s'écrire comme

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[A_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) - A_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \right] \quad (1.199)$$

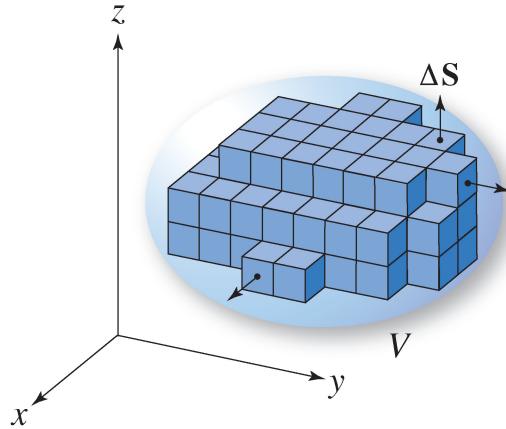


Figure 1.17: Découpage du volume V en petites cellules cubiques de volume $\Delta x \Delta y \Delta z$, chacune centrée sur un point d'une grille orthogonale.

Ces dérivées partielles sont définies au centre (x, y, z) de chacune des cellules et s'expriment comme des différences de la fonction évaluée aux bords $x + \frac{\Delta x}{2}$ et $x - \frac{\Delta x}{2}$ de la cellule.

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV &= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \sum_{\text{cellules}} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \\
&= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \sum_{\text{cellules}} \left\{ \frac{1}{\Delta x} \left[A_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) - A_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \right] \right. \\
&\quad + \frac{1}{\Delta y} \left[A_y \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) - A_y \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right) \right] \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Delta z} \left[A_z \left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2} \right) - A_z \left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2} \right) \right] \right\} \Delta x \Delta y \Delta z \\
&= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \sum_{\text{cellules}} \left\{ \left[A_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) - A_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \right] \Delta y \Delta z \right. \\
&\quad + \left[A_y \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) - A_y \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right) \right] \Delta z \Delta x \\
&\quad \left. + \left[A_z \left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2} \right) - A_z \left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2} \right) \right] \Delta x \Delta y \right\} \\
&= \iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \tag{1.200}
\end{aligned}$$

Ce calcul montre que l'on obtient une somme de différences multipliées par les éléments d'aire du vecteur $\Delta \mathbf{S} = \Delta y \Delta z \mathbf{u}_x + \Delta z \Delta x \mathbf{u}_y + \Delta x \Delta y \mathbf{u}_z$. Les différences s'interprètent donc comme

des différences d'intégrales de surface $\iint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ sur des faces opposées de chacune des cellules. On trouve bien six termes correspondant aux six faces de chaque cellule cubique. A l'intérieur du volume, les cellules sont faces contre faces. Comme les intégrales de surface sont orientées avec un vecteur $d\mathbf{S}$ pointant vers l'extérieur des cellules, les contributions de chaque paire de faces accolées s'annulent mutuellement et l'on reste avec les contributions des faces externes formant le bord $\overline{\partial V}$ du volume approché \bar{V} qui ne sont pas compensées. La somme sur toutes les cellules cubiques se réduit donc à une somme sur les faces non-compensées formant le bord du volume approché. Dans la limite, le résultat est donc donné par l'intégrale de surface du champ de vecteur sur le bord ∂V du volume, le vecteur d'élément d'aire $d\mathbf{S}$ pointant vers l'extérieur de ce volume. C.Q.F.D.

1.14.10 Théorème du rotationnel

D'après ce théorème encore appelé le théorème de Stokes, l'intégrale du rotationnel d'un champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ sur une surface S est égale à l'intégrale de ligne du champ lui-même sur le bord ∂S de la surface, l'intégrale s'annulant si la surface est fermée sur elle-même :

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.201)$$

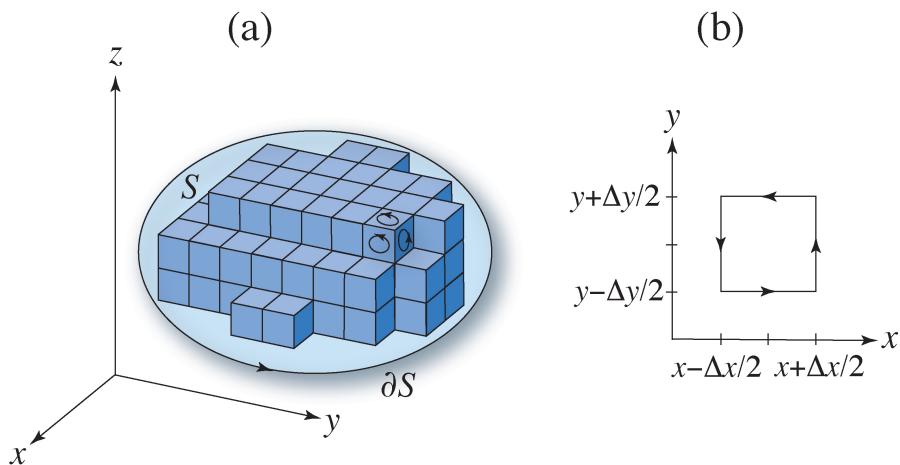


Figure 1.18: (a) Approximation d'une surface S par une surface composée de petites cellules carrées d'aire $\Delta y \Delta z$, $\Delta z \Delta x$ ou $\Delta x \Delta y$. (b) Intégrale de ligne sur le bord d'une cellule carrée parallèle au plan Oxy .

Une démonstration du théorème de Stokes en termes d'opérations arithmétiques élémentaires s'établit en approchant la surface S par une surface composée de petites cellules carrées (voir fig. 1.18a). Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} &= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \sum_{\text{cellules}} \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z \right. \\
 &\quad + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \Delta x \Delta z \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \right] \\
 &= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \sum_{\text{cellules}} \left\{ \frac{1}{\Delta y} \left[A_z \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) - A_z \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right) \right] \right. \\
 &\quad - \frac{1}{\Delta z} \left[A_y \left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2} \right) - A_y \left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2} \right) \right] \Big\} \Delta y \Delta z + \dots \\
 &= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \sum_{\text{cellules}} \left\{ \left[A_z \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) - A_z \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right) \right] \Delta z \right. \\
 &\quad - \left[A_y \left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2} \right) - A_y \left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2} \right) \right] \Delta y \\
 &\quad + \left[A_x \left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2} \right) - A_x \left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2} \right) \right] \Delta x \\
 &\quad - \left[A_y \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) - A_z \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \right] \Delta z \\
 &\quad + \left[A_y \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) - A_y \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \right] \Delta y \\
 &\quad \left. - \left[A_x \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) - A_x \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right) \right] \Delta x \right\} \\
 &= \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \tag{1.202}
 \end{aligned}$$

La première observation est que cette expression doit se réduire à une intégrale de ligne puisque l'on trouve les composantes du vecteur

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta x \mathbf{u}_x + \Delta y \mathbf{u}_y + \Delta z \mathbf{u}_z \tag{1.203}$$

donnant des incrément le long des segments de la grille choisie (voir fig. 1.18a). Par ailleurs, l'expression obtenue correspond à trois intégrales de ligne sur les petits carrés composant la surface approchée. Dans cette expression, quatre termes successifs correspondent aux quatre côtés de chaque carré. Par exemple, les quatre derniers termes forment une approximation de

l'intégrale de ligne sur une plaquette carrée parallèle au plan Oxy (voir fig. 1.18b):

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \simeq A_x \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right) \Delta x + A_y \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \Delta y \\ - A_x \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) \Delta x - A_y \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \Delta y \quad (1.204)$$

Le premier terme est une approximation de l'intégrale sur le segment allant du point $(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z)$ au point $(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z)$. Sur ce segment, la fonction prend approximativement la valeur au point médiant $(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)$ et ainsi de suite pour les trois autres segments du carré (voir fig. 1.18b). Comme chacune de ces intégrales est orientée, les contributions de segments communs accolés se compensent et la somme sur tous les carrés se réduit à une somme sur les segments formant le bord de la surface approchée. Dans la limite, on obtient donc bien l'intégrale de ligne $\oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ du champ de vecteur. C.Q.F.D.

Une démonstration alternative est obtenue en utilisant la représentation de la surface par ses équations paramétriques:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial r_i} \epsilon_{ilm} \frac{\partial r_l}{\partial \lambda} \frac{\partial r_m}{\partial \mu} d\lambda d\mu \\ = \iint_D (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) \frac{\partial A_k}{\partial r_i} \frac{\partial r_l}{\partial \lambda} \frac{\partial r_m}{\partial \mu} d\lambda d\mu \\ = \iint_D \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \right) d\lambda d\mu \\ = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.205)$$

Pour obtenir la dernière égalité, nous découpons le domaine d'intégration D en cellules de taille

$\Delta\lambda \Delta\mu$ (voir fig. 1.19). L'intégrale devient alors la somme

$$\begin{aligned}
 \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \right) d\lambda d\mu = \lim_{\Delta\lambda, \Delta\mu \rightarrow 0} \sum_{\text{cellules}} \\
 &\times \left\{ \frac{1}{\Delta\lambda} \left[\mathbf{A} \left(\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}, \mu \right) - \mathbf{A} \left(\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}, \mu \right) \right] \cdot \frac{1}{\Delta\mu} \left[\mathbf{r} \left(\lambda, \mu + \frac{\Delta\mu}{2} \right) - \mathbf{r} \left(\lambda, \mu - \frac{\Delta\mu}{2} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\Delta\mu} \left[\mathbf{A} \left(\lambda, \mu + \frac{\Delta\mu}{2} \right) - \mathbf{A} \left(\lambda, \mu - \frac{\Delta\mu}{2} \right) \right] \cdot \frac{1}{\Delta\lambda} \left[\mathbf{r} \left(\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}, \mu \right) - \mathbf{r} \left(\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}, \mu \right) \right] \right\} \Delta\lambda \Delta\mu \\
 &= \lim_{\Delta\lambda, \Delta\mu \rightarrow 0} \sum_{\text{cellules}} \left\{ \mathbf{A} \left(\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}, \mu \right) \cdot \underbrace{\left[\mathbf{r} \left(\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}, \mu + \frac{\Delta\mu}{2} \right) - \mathbf{r} \left(\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}, \mu - \frac{\Delta\mu}{2} \right) \right]}_{O(\Delta\mu)} \right. \\
 &\quad + \mathbf{A} \left(\lambda, \mu + \frac{\Delta\mu}{2} \right) \cdot \underbrace{\left[\mathbf{r} \left(\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}, \mu + \frac{\Delta\mu}{2} \right) - \mathbf{r} \left(\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}, \mu + \frac{\Delta\mu}{2} \right) \right]}_{O(\Delta\lambda)} \\
 &\quad + \mathbf{A} \left(\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}, \mu \right) \cdot \underbrace{\left[\mathbf{r} \left(\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}, \mu - \frac{\Delta\mu}{2} \right) - \mathbf{r} \left(\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}, \mu + \frac{\Delta\mu}{2} \right) \right]}_{O(\Delta\mu)} \\
 &\quad + \mathbf{A} \left(\lambda, \mu - \frac{\Delta\mu}{2} \right) \cdot \underbrace{\left[\mathbf{r} \left(\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}, \mu - \frac{\Delta\mu}{2} \right) - \mathbf{r} \left(\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}, \mu - \frac{\Delta\mu}{2} \right) \right]}_{O(\Delta\lambda)} \\
 &\quad \left. + O(\Delta\lambda \Delta\mu) \right\} \\
 &= \lim_{\Delta\lambda, \Delta\mu \rightarrow 0} \sum_{\text{cellules}} \left[\mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{r} + O(\Delta\lambda \Delta\mu) \right] \\
 &= \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \tag{1.206}
 \end{aligned}$$

Le passage de la deuxième somme à la troisième s'effectue en déplaçant de $\pm \frac{\Delta\lambda}{2}$ au $\pm \frac{\Delta\mu}{2}$ les points où la grandeur $\mathbf{r}(\lambda, \mu)$ est évaluée. Ces modifications sont de l'ordre de $\Delta\lambda \Delta\mu$ et s'ajoutent à des termes de l'ordre de $\Delta\lambda$ ou $\Delta\mu$. Elles sont donc négligeables dans la limite $\Delta\lambda, \Delta\mu \rightarrow 0$. Cependant, elles permettent d'obtenir une expression en termes d'approximations des intégrales de lignes sur les petits carrés qui composent le domaine D dans le plan des paramètres (voir fig. 1.19). Ici aussi, les termes correspondant à des côtés communs à des carrés accolés se compensent et il reste les termes non-compensés du bord ∂D du domaine D . On trouve enfin l'intégrale de ligne du champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ sur le bord ∂S de la surface. C.Q.F.D.

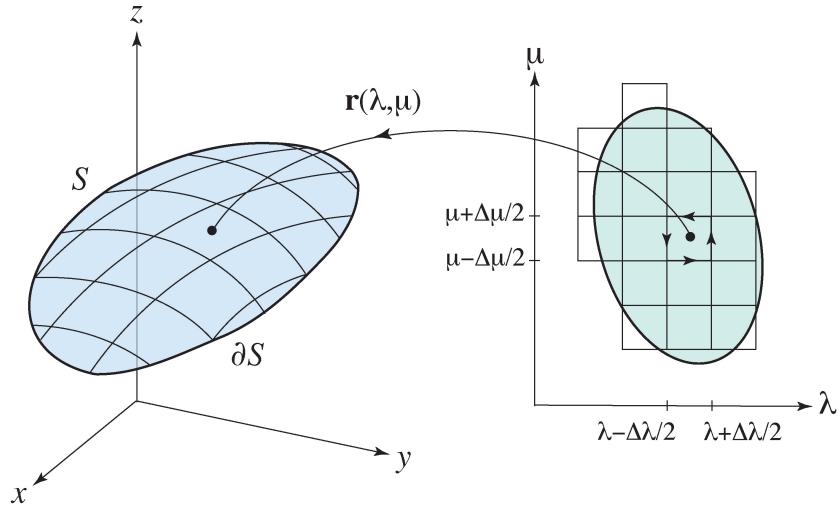


Figure 1.19: Approximation du domaine d'intégration dans le plan des deux paramètres λ et μ de la surface S .

1.15 Analyse vectorielle en coordonnées curvilignes orthogonales

Très souvent, on est amené à utiliser des notions de gradient, divergence ou rotationnel en coordonnées sphériques ou cylindriques. Bien qu'il s'agisse de coordonnées curvilignes, elles ont l'avantage d'être orthogonales ce qui simplifie les expressions correspondantes. Soient (q^1, q^2, q^3) des coordonnées curvilignes orthogonales de l'espace euclidien. Un déplacement infinitésimal s'écrira

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i = \mathbf{e}_i dq^i = \mathbf{u}_i h_i dq^i = \mathbf{u}_i dr_i \quad (1.207)$$

La base naturelle $\left\{ \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\}$ est formée de trois vecteurs orthogonaux qui ne sont pas nécessairement normés à l'unité. Il est donc commode de définir les vecteurs unitaires $\{\mathbf{u}_i\}$ qui forment une base orthonormée en introduisant les normes $h_i = \|\mathbf{e}_i\|$ des vecteurs de la base naturelle. La quantité

$$dr_i = h_i dq^i \quad (1.208)$$

est alors l'élément de longueur dans la direction du vecteur de base \mathbf{u}_i correspondant à un incrément dq^i de la coordonnée curviligne correspondante. Une base naturelle orthonormée au point $\mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)$ est donc donnée par $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Comme cette base est orthonormée, les vecteurs de la base réciproque coïncident avec les vecteurs de la base elle-même : $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_*^i$. Il est à noter que les directions des vecteurs de cette base changent en général avec le point

considéré dans l'espace euclidien, $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(q^1, q^2, q^3)$, mais ils restent mutuellement orthogonaux. Le vecteur donnant l'élément d'aire est donné par

$$d\mathbf{S} = h_2 h_3 dq^2 dq^3 \mathbf{u}_1 + h_3 h_1 dq^3 dq^1 \mathbf{u}_2 + h_1 h_2 dq^1 dq^2 \mathbf{u}_3 \quad (1.209)$$

et l'élément de volume par

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq^1 dq^2 dq^3 = \sqrt{g} dq^1 dq^2 dq^3 \quad (1.210)$$

1.15.1 Le gradient en coordonnées curvilignes orthogonales

Dans une des trois directions de la base, par exemple celle de \mathbf{u}_1 , le gradient d'une fonction $f[\mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)] = f(q^1, q^2, q^3)$ est son taux de croissance sur la distance $\Delta r_1 = h_1 \Delta q^1$ correspondant à l'incrément Δq^1 de cette coordonnée:

$$(\nabla f)_1 = \lim_{\Delta q^1 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta r_1} [f(q^1 + \Delta q^1, q^2, q^3) - f(q^1, q^2, q^3)] = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q^1} \quad (1.211)$$

Le gradient s'écrit donc

$$\nabla f = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q^i} \mathbf{u}_i \quad (1.212)$$

de sorte que l'on retrouve le résultat attendu

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i \quad (1.213)$$

puisque $d\mathbf{r} = \mathbf{u}_i h_i dq^i$.

1.15.2 La divergence en coordonnées curvilignes orthogonales

Soit un champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ que l'on décompose sur la base naturelle *orthonormée*²

$$\mathbf{A} = A^1 \mathbf{u}_1 + A^2 \mathbf{u}_2 + A^3 \mathbf{u}_3 = A_1 \mathbf{u}_1 + A_2 \mathbf{u}_2 + A_3 \mathbf{u}_3 \quad (1.214)$$

L'expression de la divergence peut être obtenue en utilisant le théorème de la divergence appliqué à un parallélépipède curviligne correspondant à une cellule d'extension $\Delta q^1 \Delta q^2 \Delta q^3$ dans l'espace des coordonées curvilignes. Dans l'espace euclidien, cette cellule présente un volume

$$\Delta V = \Delta r_1 \Delta r_2 \Delta r_3 = h_1 h_2 h_3 \Delta q^1 \Delta q^2 \Delta q^3 \quad (1.215)$$

²Nous travaillons ici avec la base orthonormée $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. D'autres composantes peuvent aussi être définies dans la base naturelle $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ce qui mène à des expressions alternatives que nous n'utiliserons pas ici.

L'intégrale de surface du champ de vecteurs sur cette cellule s'évalue donc comme suit :

$$\begin{aligned}
 \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV &= \iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \simeq \left(A_1 \Delta r_2 \Delta r_3 \right)_{q^1+\Delta q^1} - \left(A_1 \Delta r_2 \Delta r_3 \right)_{q^1} + \dots \\
 &\simeq \frac{\partial}{\partial q^1} \left(A_1 \Delta r_2 \Delta r_3 \right) \Delta q^1 + \dots \\
 &= \frac{\partial}{\partial q^1} \left(h_2 h_3 A_1 \right) \Delta q^1 \Delta q^2 \Delta q^3 + \dots \\
 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q^1} \left(h_2 h_3 A_1 \right) \Delta V + \dots \\
 &\simeq \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V
 \end{aligned} \tag{1.216}$$

où l'on a omis les contributions dans les deux autres directions. Nous obtenons ainsi la divergence

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q^1} \left(h_2 h_3 A_1 \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(h_3 h_1 A_2 \right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left(h_1 h_2 A_3 \right) \right] \tag{1.217}$$

1.15.3 Le rotationnel en coordonnées curvilignes orthogonales

Pour obtenir le rotationnel, nous utilisons le théorème de Stokes sur une surface formée de trois carrés curvilignes perpendiculaires aux trois vecteurs de base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ et d'extensions $\Delta S_1 = \Delta r_2 \Delta r_3 = h_2 h_3 \Delta q^2 \Delta q^3$, etc ... Nous avons donc

$$\begin{aligned}
 \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} &= \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \left(A_2 \Delta r_2 \right)_{q^3} + \left(A_3 \Delta r_3 \right)_{q^2+\Delta q^2} - \left(A_2 \Delta r_2 \right)_{q^3+\Delta q^3} - \left(A_3 \Delta r_3 \right)_{q^2} + \dots \\
 &= \frac{\partial}{\partial q^2} \left(A_3 \Delta r_3 \right) \Delta q^2 - \frac{\partial}{\partial q^3} \left(A_2 \Delta r_2 \right) \Delta q^3 + \dots \\
 &= \left[\frac{\partial}{\partial q^2} \left(h_3 A_3 \right) - \frac{\partial}{\partial q^3} \left(h_2 A_2 \right) \right] \Delta q^2 \Delta q^3 + \dots \\
 &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q^2} \left(h_3 A_3 \right) - \frac{\partial}{\partial q^3} \left(h_2 A_2 \right) \right] \Delta S_1 + \dots \\
 &= (\nabla \times \mathbf{A})_1 \Delta S_1 + \dots
 \end{aligned} \tag{1.218}$$

de sorte que l'on obtient l'expression suivante pour le rotationnel en coordonnées curvilignes orthogonales

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{u}_1 & h_2 \mathbf{u}_2 & h_3 \mathbf{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q^1} & \frac{\partial}{\partial q^2} & \frac{\partial}{\partial q^3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q^2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial q^3} (h_2 A_2) \right] \mathbf{u}_1 \\
 &+ \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial q^3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial q^1} (h_3 A_3) \right] \mathbf{u}_2 \\
 &+ \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q^1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial q^2} (h_1 A_1) \right] \mathbf{u}_3 \tag{1.219}
 \end{aligned}$$

On remarquera que ces expressions doivent être généralisées si l'on travaille avec des coordonnées curvilignes non-orthogonales [3, 4] comme expliqué en géométrie différentielle [5, 6].

Références

- [1] T. L. Heath, *The Thirteen Books of Eudid's Elements*, 3 volumes (Dover, New York, 1956).
- [2] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 1980).
- [3] A. I. Borisenko and I. E. Torapov, *Vector and Tensor Analysis with Applications* (Dover, New York, 1968).
- [4] H. Margenau and G. M. Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry* (Van Nostrand, New York, 1943).
- [5] L. P. Eisenhart, *An Introduction to Differential Geometry* (Princeton University Press, Princeton, 1947).
- [6] E. Kreyszig, *Differential Geometry* (Dover, New York, 1991).

Chapitre 2

Cinématique

La cinématique (de *κινεῖν* qui signifie se mouvoir en grec) a pour but l'étude du mouvement des corps matériels dans l'espace, c'est-à-dire de leurs trajectoires au cours du temps. La cinématique combine donc les notions d'espace et de temps pour introduire les concepts de vitesse et d'accélération.

2.1 Espace physique

Loin des sources intenses de champ gravitationnel qui déforment l'espace-temps d'après la théorie de la relativité générale, l'espace physique qui nous entoure peut être considéré comme un espace euclidien tridimensionnel \mathcal{E}^3 muni de la distance euclidienne elle aussi

$$d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (2.1)$$

entre les deux points

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{u}_x + y_i \mathbf{u}_y + z_i \mathbf{u}_z \in \mathcal{E}^3 \quad (i = 1, 2) \quad (2.2)$$

de l'espace euclidien. Puisque la distance entre ces deux points reste invariante sous un changement de référentiel impliquant une transformation orthogonale \mathbf{O} et une translation \mathbf{R}

$$\mathbf{r} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{R} \quad (2.3)$$

l'espace physique est isotrope et homogène. Dans les notations de l'éq. (2.3), les vecteurs sont représentés par les matrices colonnes de leurs composantes, à savoir $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2.2 Mesure et unité de longueur

La distance (2.1) entre les deux points \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 est la longueur du morceau de droite ou du vecteur joignant un point à l'autre. Cette distance se mesure avec un étalon de longueur en comptant le nombre de copies de cet étalon qu'il faut mettre bout à bout pour couvrir la distance en question (voir fig. 2.1). En général, il est nécessaire d'ajouter une fraction d'étalon pour atteindre l'extrémité de l'intervalle, ce qui se traduit par le fait que les longueurs se mesurent sur les nombres réels.

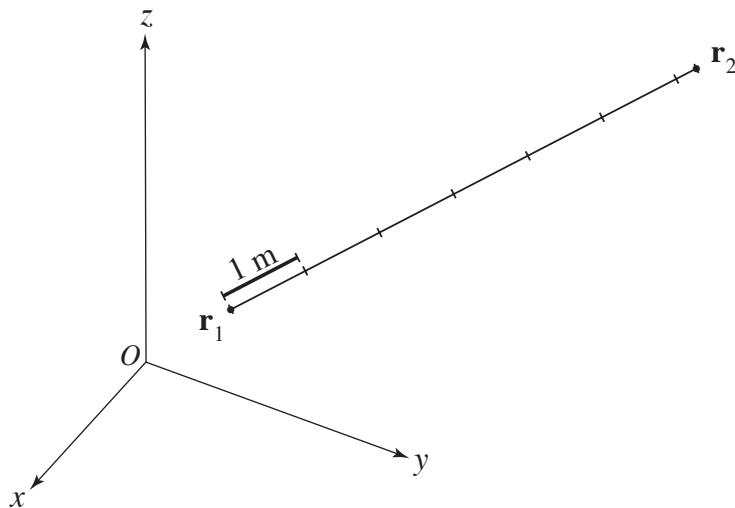


Figure 2.1: Mesure de la distance entre deux points de l'espace physique avec un étalon de longueur. On notera que la mesure d'une longueur se base sur l'homogénéité et l'isotropie de l'espace puisqu'il est supposé que l'étalon garde sa longueur unitaire sous l'effet de déplacements parallèles à lui-même ou de rotations.

Historiquement, des mesures de longueurs ont été effectuées depuis au moins le 3e millénaire avant notre ère en Egypte ancienne, en Mésopotamie et dans la vallée de l'Indus pour la construction des édifices, le cadastre des terres cultivables, ou pour la mesure des tissus. Toute une série d'unités de longueur ont coexisté lors de la féodalité et une unité de longueur universelle fut adoptée en 1791 comme la dix millionième partie du quart de méridien terrestre. Ainsi est né le mètre qui fut longtemps défini par un prototype en platine iridié. Actuellement, le mètre est défini en termes de l'unité de temps et du phénomène physique de propagation de la lumière. Depuis 1983, la définition adoptée par convention internationale est la suivante :

“Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de $1/299792458$ de seconde.” [1]

Il en résulte que la vitesse de la lumière dans le vide est égale à $c_0 = 299792458 \text{ m/s}$, exactement. Comme le français est la langue des conventions internationales, la définition ci-dessus prime sur ses traductions.

2.3 Le temps, sa mesure et son unité

Notre perception des changements dans le monde qui nous entoure nous montre la nécessité d'introduire une nouvelle grandeur physique par-delà l'espace, à savoir, le temps. Le temps se définit à partir d'un phénomène physique périodique que l'on peut supposer suffisamment régulier. In fine, la définition du temps est toujours tributaire de la régularité dans la périodicité du phénomène physique choisi. Si plusieurs phénomènes périodiques existent, notre seul recours pour choisir un étalon de temps est d'effectuer des mesures comparatives et de trouver une explication à l'irrégularité de certains des phénomènes par rapport à celui qui servira de référence.

La seconde, qui est l'unité de temps, fut définie à l'origine comme la fraction $1/86400$ au jour solaire moyen. Toutefois, les observations ont montré que la rotation de la terre est irrégulière à cause de la non-rigidité du globe terrestre en interaction avec la Lune et le Soleil. Depuis les années soixante, des horloges atomiques furent mises au point offrant une définition de haute précision d'un étalon de temps. En 1967/68, la définition suivante fut adoptée par convention internationale:

“La seconde est la durée de 9192631770 périodes de la radiation correspondante à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.” [2]

Il en résulte que la fréquence de transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 est égale à $\nu = 9192631770 \text{ Hz}$, exactement. En 1997, le Comité international a précisé que cette définition se réfère à un atome de césium au repos, à une température de 0 K. Ici aussi, la définition en français est celle de la convention internationale et prime donc sur toute traduction. De plus, la définition est sans ambiguïté car l'état fondamental de cet atome ne possède que deux niveaux hyperfins qu'il ne faut donc pas préciser. Par conséquent, le temps est le nombre t de secondes qui se sont écoulées depuis un instant de référence (comme midi ou minuit). Le temps t est donc toujours une durée entre deux événements observés. Le temps t est un nombre réel qui se mesure à l'aide d'une horloge. De telles machines sont fabriquées depuis l'Antiquité : clepsydres, horloges à balancier, horloges à quartz et, aujourd'hui, horloges atomiques, qui, dans tous les cas, utilisent un phénomène physique supposé suffisamment régulier. Une relation d'équivalence est donc supposée entre chacune des secondes successives

et c'est grâce à cette relation d'équivalence que la mesure du temps par un nombre réel peut être établie.

Il est à noter qu'un phénomène physique périodique permet de définir l'étalon de temps mais ne suffit pas pour la mesure d'une durée. Robinson Crusoë sur son île devait compter les jours successifs en entaillant un poteau en bois sinon il aurait perdu le décompte du temps passé sur son île [3]. Dans une horloge moderne, ce comptage se fait de manière électronique et le temps écoulé se trouve dans une mémoire électronique. Il est donc toujours nécessaire d'adoindre un compteur des cycles du phénomène périodique utilisé.

Le temps court sur les nombres réels $-\infty < t < +\infty$ de façon supposée uniforme de sorte que l'origine du temps peut toujours être redéfini par une "translation temporelle":

$$t = t' + T \quad (2.4)$$

L'origine du temps t est T si l'origine du temps t' est zéro.

2.4 Trajectoire

La trajectoire d'un corps matériel en mouvement est la courbe de l'espace euclidien suivie par ce corps au cours des instants successifs de son évolution temporelle :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{u}_x + y(t) \mathbf{u}_y + z(t) \mathbf{u}_z \in \mathcal{E}^3 \quad (2.5)$$

Cette courbe est donnée par des équations paramétriques dont le paramètre est le temps, $t \in \mathbb{R}$ (voir fig. 2.2).

2.5 Vitesse

La vitesse du corps matériel en mouvement sur la trajectoire (2.5) est le vecteur donné par la dérivée de la position par rapport au temps

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}} \quad (2.6)$$

En mécanique, la dérivée par rapport au temps est souvent notée par un point au-dessus de la grandeur dérivée. La vitesse se mesure donc en mètre par seconde (m/s).

Réciproquement, la position au temps t est donnée par l'intégrale sur l'intervalle de temps écoulé et par la position initiale :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt' \quad (2.7)$$

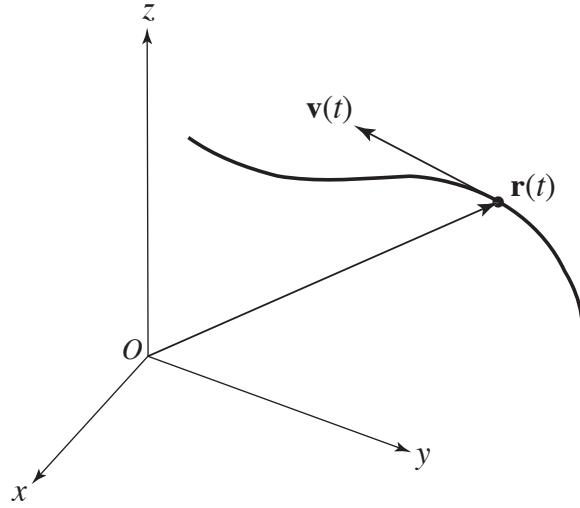


Figure 2.2: Trajectoire d'un corps matériel dans l'espace euclidien. Sa vitesse instantanée est un vecteur tangent à la courbe.

Si la trajectoire est échantillonnée à intervalles de temps Δt , la vitesse s'obtient d'après

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (2.8)$$

La vitesse est un vecteur qui est tangent à la trajectoire. En effet, le développement en série de Taylor de la trajectoire autour du temps t montre que

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t) \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (2.9)$$

Par conséquent, la vitesse multipliée par l'intervalle de temps Δt donne le déplacement du corps le long de sa trajectoire de sorte que la vitesse est bien tangente à la trajectoire.

La distance parcourue par un corps matériel le long de sa trajectoire s'exprime d'après

$$l = \int \|\mathbf{dr}\| = \int \|\mathbf{v}\| dt \quad (2.10)$$

en termes du module $\|\mathbf{v}\|$ du vecteur vitesse, appelé vitesse scalaire ou célérité.

2.6 Accélération

L'accélération d'un corps matériel est définie comme la dérivée de la vitesse par rapport au temps et donc par la dérivée seconde de la position par rapport au temps

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (2.11)$$

notée aussi

$$\mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (2.12)$$

L'accélération se mesure en mètre par seconde au carré (m/s^2).

Réciproquement, la vitesse d'un corps s'obtient à partir de son accélération d'après l'intégrale suivante :

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t') dt' \quad (2.13)$$

et sa position selon

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \mathbf{a}(t'') \quad (2.14)$$

$$= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t dt' (t - t') \mathbf{a}(t') \quad (2.15)$$

$$= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}(t)(t - t_0) - \int_{t_0}^t dt' (t' - t_0) \mathbf{a}(t') \quad (2.16)$$

où la dernière relation est obtenue en utilisant l'éq. (2.13).

L'accélération au temps t se calcule numériquement d'après

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t^2} [\mathbf{r}(t + \Delta t) - 2\mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t - \Delta t)] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\mathbf{v}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - \mathbf{v}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Remarque: La dérivée troisième de la position par rapport au temps est appelée la *secousse*:

$$\mathbf{s} \equiv \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} = \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} \quad (2.18)$$

Passons maintenant en revue quelques exemples de mouvements simples d'un corps matériel.

2.7 Le mouvement rectiligne uniforme

Ce mouvement – que l'on appelle souvent “MRU” en abrégé – se caractérise par l'annulation de l'accélération du corps matériel à tout instant:

$$\mathbf{a}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.19)$$

En conséquence de l'éq. (2.14), la position du corps matériel varie linéairement dans le temps selon

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) \quad (2.20)$$

et sa vitesse est nécessairement constante.

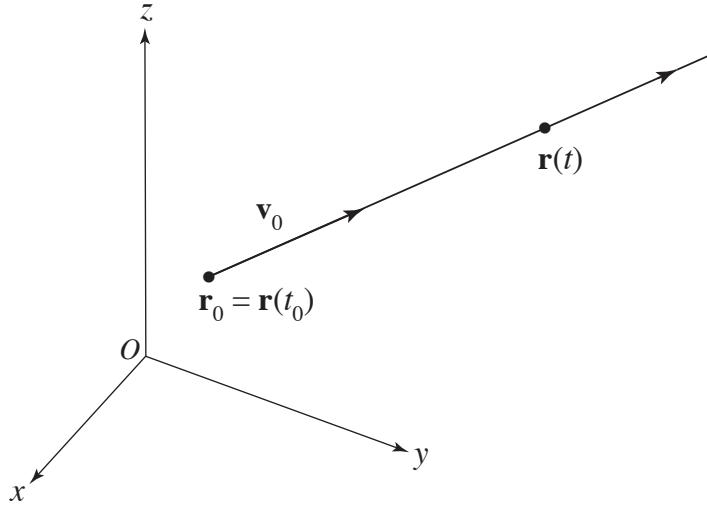


Figure 2.3: Mouvement rectiligne uniforme d'un corps matériel dans l'espace physique tridimensionnel. Ce mouvement suit la droite parallèle à la vitesse \mathbf{v}_0 et partant de la position initiale \mathbf{r}_0 .

2.8 Le mouvement uniformément accéléré

Dans ce mouvement, l'accélération garde sa valeur initiale à tout instant

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.21)$$

de sorte que sa vitesse varie linéairement dans le temps d'après (2.13) :

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0 (t - t_0) \quad (2.22)$$

tandis que sa position varie de façon quadratique avec le temps d'après (2.7) :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \mathbf{a}_0 (t - t_0)^2 \quad (2.23)$$

La trajectoire forme une parabole dans l'espace (voir fig. 2.4).

Toute la trajectoire est située dans le plan perpendiculaire au vecteur $\mathbf{a}_0 \times \mathbf{v}_0$. Le mouvement est rectiligne si la vitesse initiale \mathbf{v}_0 est parallèle à l'accélération constante \mathbf{a}_0 . L'axe de la parabole est parallèle à l'accélération \mathbf{a}_0 . Ce mouvement paraît rectiligne et uniforme en projection dans le plan perpendiculaire à l'accélération \mathbf{a}_0 .

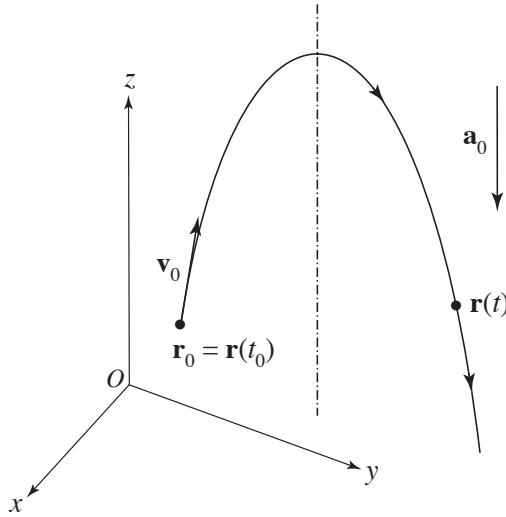


Figure 2.4: Trajectoire parabolique d'un corps matériel en mouvement uniformément accéléré.

2.9 Le mouvement harmonique

Pour un mouvement harmonique unidimensionnel, la trajectoire du corps matériel est donnée par une fonction trigonométrique :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + x_0 \quad (2.24)$$

où A est l'amplitude du mouvement harmonique, ω sa fréquence angulaire qui se mesure en radian par seconde et qui est reliée à la fréquence elle-même ν d'après $\omega = 2\pi\nu$. La fréquence ν se mesure en Hertz (Hz). ϕ est une phase et x_0 la valeur de la position autour de laquelle le corps matériel oscille ou vibre avec la période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} \quad (2.25)$$

(voir fig. 2.5).

La vitesse correspondante est donnée par

$$\dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (2.26)$$

et l'accélération par

$$\ddot{x} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad (2.27)$$

Nous constatons que le mouvement harmonique obéit donc à l'équation différentielle ordinaire du second ordre dans le temps suivante :

$$\ddot{x} = -\omega^2(x - x_0) \quad (2.28)$$

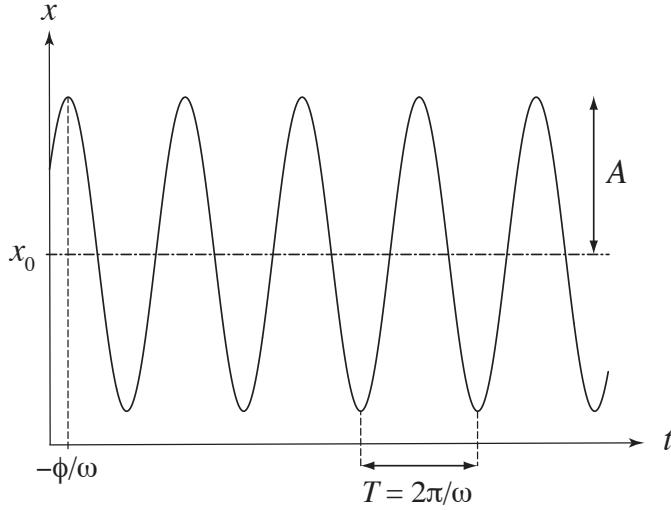


Figure 2.5: Mouvement harmonique unidimensionnel dans l'espace-temps.

où ni l'amplitude, ni la phase n'apparaissent plus.

2.10 Le mouvement circulaire uniforme

Dans le mouvement circulaire uniforme, un corps matériel décrit un cercle à vitesse angulaire constante ω . Si le cercle se trouve dans le plan Oxy , la trajectoire de ce mouvement est donnée par

$$\mathbf{r}(t) \begin{cases} x = R \cos(\omega t + \phi) + x_0 \\ y = R \sin(\omega t + \phi) + y_0 \end{cases} \quad (2.29)$$

qui représente un cercle de rayon R centré sur le point (x_0, y_0) (voir fig. 2.6).

L'équation de la trajectoire est bien celle d'un cercle :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad (2.30)$$

Il s'agit d'un mouvement périodique de période $T = 2\pi/\omega$. La vitesse du corps matériel est donnée par

$$\mathbf{v}(t) \begin{cases} \dot{x} = -\omega R \sin(\omega t + \phi) = -\omega(y - y_0) \\ \dot{y} = +\omega R \cos(\omega t + \phi) = +\omega(x - x_0) \end{cases} \quad (2.31)$$

et l'accélération par

$$\mathbf{a}(t) \begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2(x - x_0) \\ \ddot{y} = -\omega^2(y - y_0) \end{cases} \quad (2.32)$$

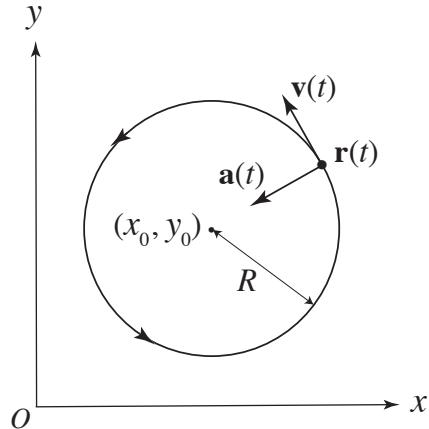


Figure 2.6: Mouvement circulaire uniforme.

ce qui montre qu'il s'agit d'un mouvement harmonique bidimensionnel de fréquence angulaire ω . La vitesse scalaire ou célérité est constante dans ce mouvement :

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \omega R \quad (2.33)$$

de même que le module de l'accélération

$$\|\mathbf{a}(t)\| = \omega^2 R \quad (2.34)$$

2.11 Le mouvement hélicoïdal

Ce mouvement est la combinaison d'un mouvement circulaire uniforme et d'un mouvement rectiligne uniforme. Il s'agit donc d'un mouvement tridimensionnel où le corps matériel décrit une hélice (voir fig. 2.7).

Si le mouvement est rectiligne uniforme dans la direction Oz , les équations de la trajectoire sont

$$\mathbf{r}(t) \begin{cases} x = R \cos(\omega t + \phi) + x_0 \\ y = R \sin(\omega t + \phi) + y_0 \\ z = v_0 t + z_0 \end{cases} \quad (2.35)$$

La vitesse est donnée par

$$\mathbf{v}(t) \begin{cases} \dot{x} = -\omega(y - y_0) \\ \dot{y} = +\omega(x - x_0) \\ \dot{z} = v_0 \end{cases} \quad (2.36)$$

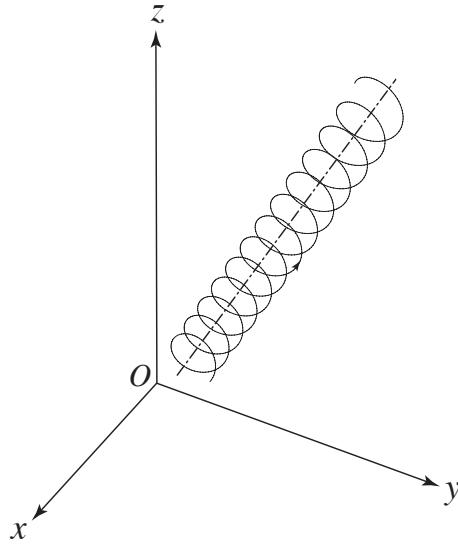


Figure 2.7: Mouvement hélicoïdal.

et l'accélération par

$$\mathbf{a}(t) \begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2(x - x_0) \\ \ddot{y} = -\omega^2(y - y_0) \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

2.12 Repère ou trièdre de Frenet

Les trajectoires peuvent être étudiées du point de vue de la géométrie différentielle qui permet d'introduire des notions de courbure et de torsion caractéristiques d'une trajectoire [4]. Ces notions se définissent grâce à une base orthonormée de trois vecteurs attachés à un point courant le long de la trajectoire. Tout d'abord, on peut définir le vecteur unitaire tangent à la trajectoire. Ce vecteur pointe dans la direction de la vitesse:

$$\mathbf{T} \equiv \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|} = \frac{\mathbf{v}}{v} \quad (2.38)$$

où $v = \|\dot{\mathbf{r}}\|$ est la vitesse scalaire ou célérité. Si nous introduisons l'élément de longueur de la trajectoire $dl = \|\mathbf{d}\mathbf{r}\|$, cette célérité est donnée par $v = dl/dt$ et le *vecteur unitaire tangent* par

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} \quad (2.39)$$

La trajectoire peut ainsi avoir pour paramètre la longueur l à la place du temps t . Comme le vecteur unitaire tangent obéit à la condition de normalisation

$$\mathbf{T}^2 = 1 \quad (2.40)$$

il est perpendiculaire à sa dérivée par rapport au temps ou à la longueur

$$\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dl} = 0 \quad (2.41)$$

Par conséquent, cette dérivée permet de définir le *vecteur unitaire normal*

$$\mathbf{N} \equiv R \frac{d\mathbf{T}}{dl} \quad (2.42)$$

où R est une constante de proportionnalité introduite pour que le vecteur normal obéisse à la condition de normalisation

$$\mathbf{N}^2 = 1 \quad (2.43)$$

La constante R est définie positive par convention ce qui revient à choisir la direction du vecteur \mathbf{N} et elle s'interprète comme le rayon de courbure de la trajectoire (voir fig. 2.8). Il est à noter que la vitesse et l'accélération de la trajectoire s'expriment en termes des vecteurs unitaires tangent et normal selon

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = v \mathbf{T} \\ \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \dot{v} \mathbf{T} + \frac{v^2}{R} \mathbf{N} \end{cases} \quad (2.44)$$

La première relation découle de la définition du vecteur unitaire tangent, tandis que la seconde s'obtient comme suit

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(v \mathbf{T}) = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + v \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{T}}{dl} = \dot{v} \mathbf{T} + \frac{v^2}{R} \mathbf{N} \quad (2.45)$$

Le module du produit vectoriel de la vitesse avec l'accélération est donc égal à

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\| = \frac{v^3}{R} \quad (2.46)$$

La courbure se définit comme l'inverse du rayon de courbure et se calcule d'après

$$\gamma \equiv \frac{1}{R} = \frac{1}{v^3} \|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\| \quad (2.47)$$

La dérivée du vecteur unitaire tangent par rapport à la longueur s'écrit donc

$$\frac{d\mathbf{T}}{dl} = \gamma \mathbf{N} \quad (2.48)$$

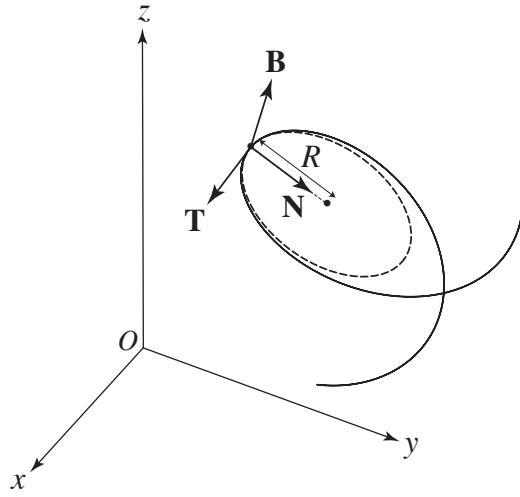


Figure 2.8: Les trois vecteurs unitaires tangent, normal et binormal du repère de Frenet courant le long d'une trajectoire de l'espace euclidien tridimensionnel.

Par ailleurs, on peut vérifier que le vecteur unitaire normal se détermine en termes de la vitesse et de l'accélération par

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{v} \mathbf{a} - \dot{\mathbf{v}} \mathbf{v}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{a} \times \mathbf{v}\|} \quad (2.49)$$

La question est maintenant de savoir si les deux vecteurs dont nous disposons suffisent à décrire complètement la géométrie différentielle d'une trajectoire quelconque. La réponse est négative car la dérivée du vecteur unitaire normal par rapport à la longueur ne s'exprime pas en termes des seuls vecteurs unitaires tangent et normal. Il est nécessaire d'introduire un troisième vecteur appelé *le vecteur unitaire binormal*

$$\mathbf{B} \equiv \mathbf{T} \times \mathbf{N} \quad (2.50)$$

qui forme bien une base orthonormée $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ de l'espace euclidien tridimensionnel avec les deux vecteurs unitaires introduits précédemment. On notera d'ailleurs les relations complémentaires:

$$\mathbf{T} = \mathbf{N} \times \mathbf{B} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} \quad (2.52)$$

La dérivée du vecteur normal par rapport à la longueur peut maintenant se décomposer dans cette base comme suit :

$$\frac{d\mathbf{N}}{dl} = c_1 \mathbf{T} + c_2 \mathbf{N} + c_3 \mathbf{B} \quad (2.53)$$

où c_i ($i = 1, 2, 3$) sont trois coefficients à déterminer. Comme les vecteurs tangent et normal sont perpendiculaires

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0 \quad (2.54)$$

la dérivée de cette condition par rapport à la longueur nous donne

$$\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dl} = -\mathbf{N} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dl} = -\gamma \quad (2.55)$$

de sorte que $c_1 = -\gamma$. Comme $\mathbf{N}^2 = 1$, on trouve que $\mathbf{N} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dl} = 0$ et $c_2 = 0$ par conséquent. Le troisième coefficient c_3 définit une nouvelle propriété locale de la trajectoire appelée la *torsion* τ qui permet d'écrire la relation (2.53) sous la forme

$$\frac{d\mathbf{N}}{dl} = -\gamma \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} \quad (2.56)$$

Enfin la dérivée du vecteur binormal par rapport à la longueur s'obtient en termes des vecteurs déjà introduits puisque

$$\frac{d\mathbf{B}}{dl} = \frac{d\mathbf{T}}{dl} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{dl} = \gamma \mathbf{N} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times (-\gamma \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}) = \tau \mathbf{T} \times \mathbf{B} = -\tau \mathbf{N} \quad (2.57)$$

D'après l'éq. (2.49), le vecteur unitaire binormal (2.50) s'exprime en termes de la vitesse et de l'accélération selon

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|} \quad (2.58)$$

Finalement, la torsion s'obtient comme suit

$$\tau = -\frac{1}{v} \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{s})}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|^2} \quad (2.59)$$

en termes de la secousse $\mathbf{s} = \dot{\mathbf{a}}$ subie le long de la trajectoire.

Les trois vecteurs unitaires $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ du repère ou trièdre de Frenet forment donc une base orthonormée locale associée à un point de la trajectoire. Cette base tourne dans l'espace lorsque le point se déplace. La rotation du triède de Frenet est décrit par le système fermé des équations différentielles (2.48), (2.56) et (2.57):

$$\frac{d}{dl} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ -\gamma & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Ces équations peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \frac{d}{dl} \mathbf{T} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{T} \\ \frac{d}{dl} \mathbf{N} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{N} \\ \frac{d}{dl} \mathbf{B} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B} \end{cases} \quad (2.61)$$

en termes du vecteur

$$\boldsymbol{\Omega} = \tau \mathbf{T} + \gamma \mathbf{B} \quad (2.62)$$

qui donne le taux de rotation de la base par unité de longueur de la trajectoire. Ce taux de rotation est relié à la matrice $\mathbf{O}(l)$ de la rotation de la base entre les points $\mathbf{r}(0)$ et $\mathbf{r}(l)$ d'après l'éq. (2.63) comme on peut le vérifier par un calcul direct.

En effet, si $\mathbf{U}(l) = \mathbf{O}(l) \cdot \mathbf{U}(0)$ désigne un des vecteurs unitaires, sa dérivée par rapport à la longueur l s'écrira sous la forme $\frac{d}{dl}\mathbf{U}(l) = \boldsymbol{\Omega}(l) \times \mathbf{U}(l)$ en termes du taux de rotation défini par l'éq. (2.63) comme on peut le vérifier par un calcul direct.

En résumé, le trièdre de Frenet permet de définir la courbure et la torsion comme des propriétés intrinsèques d'une trajectoire. La courbure et la torsion peuvent ainsi se calculer notamment pour chacun des mouvements particuliers des sections 2.7 à 2.11.

2.13 Espace-temps galiléen

Un système de trois axes orthogonaux et d'une horloge forment un référentiel de l'espace-temps. Un événement se produit en un point de l'espace physique tridimensionnel $\mathbf{r} \in \mathcal{E}^3$, à un instant $t \in \mathbb{R}$. Cet événement a donc les coordonnées d'espace-temps

$$(\mathbf{r}, t) = (x, y, z, t) \in \mathcal{E}^3 \otimes \mathbb{R} \quad (2.64)$$

(voir fig. 2.9). Les coordonnées d'espace-temps d'un événement dépendent du référentiel choisi.

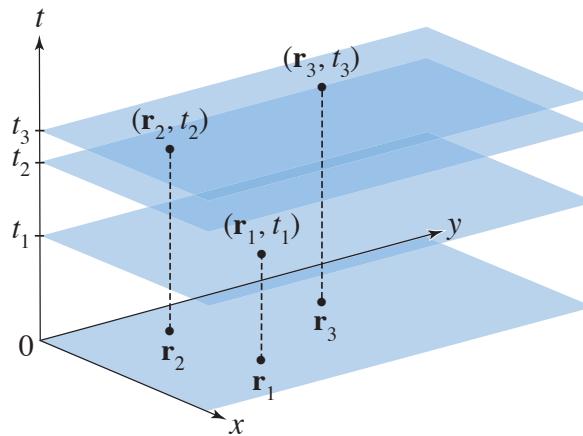


Figure 2.9: Illustration de l'espace-temps galiléen où se produisent plusieurs événements.

L'espace-temps galiléen de la mécanique non-relativiste se définit par les postulats suivants :

(1) L'intervalle de temps entre deux événements ne dépend pas du référentiel choisi. En particulier, la simultanéité a un sens absolu.

(2) La distance entre deux événements simultanés ne dépend pas du référentiel choisi.

Par conséquent, les transformations qui préservent ces postulats sont des combinaisons de translations temporelles T , de translations spatiales $\mathbf{R}(t)$ et de transformations orthogonales $\mathbf{O}(t)$, ces dernières dépendant éventuellement du temps t :

$$t = t' + T \quad (2.65)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{R}(t) \quad (2.66)$$

L'équation (2.65) exprime l'indépendance du temps vis-à-vis de l'espace et garantit la simultanéité absolue dans l'espace-temps galiléen. L'équation (2.66) représente le changement de coordonnées spatiales d'un point P de l'espace entre deux repères, $\mathcal{R} = \{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z\}$ et $\mathcal{R}' = \{\mathbf{u}'_x, \mathbf{u}'_y, \mathbf{u}'_z\}$, reliés par une translation spatiale $\overrightarrow{OO'} = X \mathbf{u}_x + Y \mathbf{u}_y + Z \mathbf{u}_z$ de composantes

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

dans la base du repère \mathcal{R} et une transformation orthogonale \mathbf{O} (voir fig. 2.10). Dans ces deux repères, le point P est représenté par les vecteurs

$$\overrightarrow{OP} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O'P} = \tilde{x} \mathbf{u}_x + \tilde{y} \mathbf{u}_y + \tilde{z} \mathbf{u}_z = x' \mathbf{u}'_x + y' \mathbf{u}'_y + z' \mathbf{u}'_z$$

de composantes $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans leur base respective. Ces deux repères sont par exemple attachés à deux astéroïdes qui se déplacent l'un par rapport à l'autre de sorte que la matrice orthogonale \mathbf{O} et le vecteur \mathbf{R} des origines peuvent dépendre du temps. On remarquera que la distance $d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ entre deux points P_1 et P_2 observés depuis chacun des deux repères est la même de sorte que le 2e postulat est bien satisfait.

2.14 Changement de repère

On peut se demander comment sont reliées entre elles les vitesses d'un corps matériel P qui est observé depuis deux repères se déplaçant l'un par rapport à l'autre. Dans ce but, nous dérivons l'éq. (2.66) par rapport au temps

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{r}' + \dot{\mathbf{R}} \quad (2.67)$$

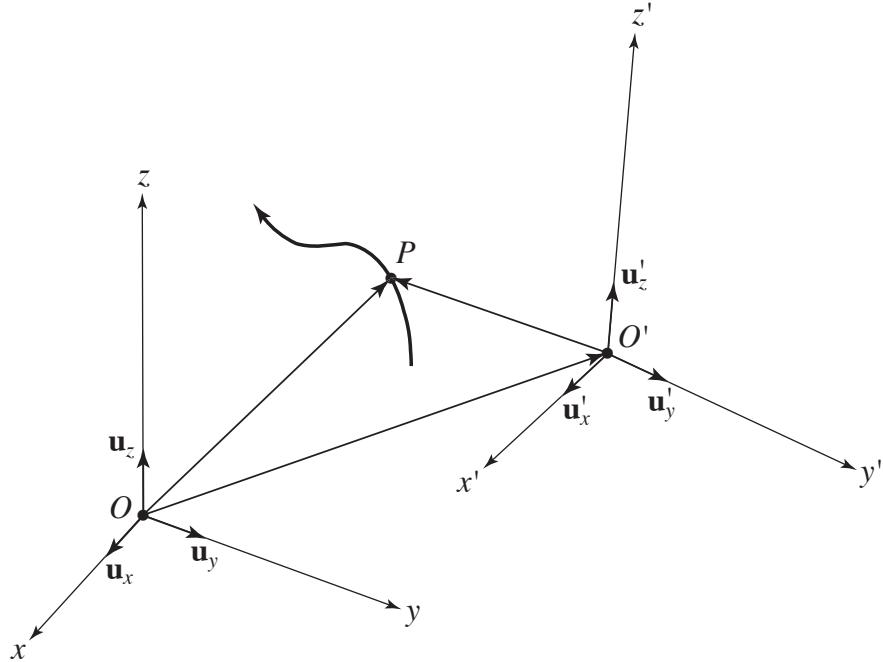


Figure 2.10: Un corps matériel P observé depuis deux repères $\mathcal{R} = Oxyz$ et $\mathcal{R}' = O'x'y'z'$ dans l'espace euclidien tridimensionnel.

Etant donné que \mathbf{O} est une matrice orthogonale nous avons que

$$\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{1} \quad (2.68)$$

de sorte que

$$\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^T = - \left(\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^T \right)^T \quad (2.69)$$

définit un tenseur antisymétrique qui peut donc s'exprimer en termes d'un vecteur axial

$$\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^T = \boldsymbol{\omega} \times \quad (2.70)$$

Ce vecteur axial $\boldsymbol{\omega}$ est la vitesse angulaire instantanée du repère $\mathcal{R}' = \{\mathbf{u}'_x, \mathbf{u}'_y, \mathbf{u}'_z\}$ par rapport au repère $\mathcal{R} = \{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z\}$. Pour s'en convaincre, considérons la rotation autour de l'axe Oz (voir fig. 2.11).

Les coordonnées du point P dans les deux repères sont reliées par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

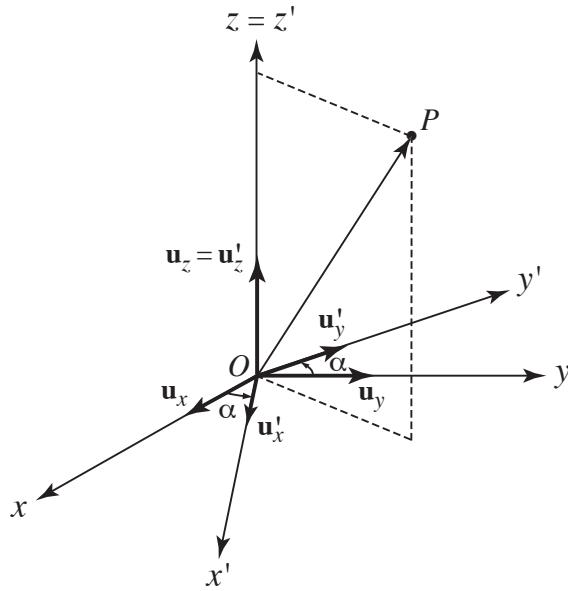


Figure 2.11: Le repère $\mathcal{R}' = \{\mathbf{u}'_x, \mathbf{u}'_y, \mathbf{u}'_z\}$ tourne à la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ par rapport au repère $\mathcal{R} = \{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z\}$ autour de l'axe $\mathbf{u}_z = \mathbf{u}'_z$.

de sorte que

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^T &= \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} \sin \alpha & -\dot{\alpha} \cos \alpha & 0 \\ \dot{\alpha} \sin \alpha & -\dot{\alpha} \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\alpha} & 0 \\ +\dot{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times\end{aligned}\quad (2.72)$$

avec $\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha} \mathbf{u}_z$ qui est bien le vecteur de la vitesse angulaire du repère $\mathcal{R}' = \{\mathbf{u}'_x, \mathbf{u}'_y, \mathbf{u}'_z\}$ par rapport à l'autre. Par conséquent, on peut écrire l'éq. (2.66) sous la forme

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{r}' + \dot{\mathbf{R}} \quad (2.73)$$

$$= \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{O} \cdot \mathbf{r}') + \dot{\mathbf{R}} \quad (2.74)$$

Le premier terme s'interprète comme la vitesse vue dans le repère \mathcal{R}' , le deuxième comme la contribution provenant du mouvement de rotation du repère \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} (appelé vitesse de Coriolis ou déflection de Coriolis) et le troisième comme la vitesse de déplacement de l'origine O' de \mathcal{R}' par rapport à l'origine O de \mathcal{R} . Si l'on dérive l'éq. (2.74), l'accélération est donnée par

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{O} \cdot \ddot{\mathbf{r}}' + \dot{\mathbf{O}} \cdot \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{O} \cdot \mathbf{r}') + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{r}}') + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{r}') + \ddot{\mathbf{R}} \quad (2.75)$$

$$= \mathbf{O} \cdot \ddot{\mathbf{r}}' + 2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{r}}') + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{O} \cdot \mathbf{r}')] + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{O} \cdot \mathbf{r}') + \ddot{\mathbf{R}} \quad (2.76)$$

Le deuxième terme de l'éq. (2.75) se traite comme précédemment et donne la même contribution que le quatrième terme de (2.75), tous les deux rassemblés dans le deuxième terme de (2.76), appelé l'accélération de Coriolis. Le cinquième terme de (2.75) se traite aussi comme précédemment pour donner le troisième terme de (2.76), appelé l'accélération centrifuge. Le quatrième terme de (2.76) est la contribution provenant de l'accélération angulaire $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ du repère \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} , tandis que le cinquième terme provient de l'accélération de O' par rapport à O . Si l'on introduit les vecteurs

$$\tilde{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{O} \cdot \mathbf{r}' \quad (2.77)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{r}}' \quad (2.78)$$

$$\tilde{\mathbf{a}} \equiv \mathbf{O} \cdot \ddot{\mathbf{r}}' \quad (2.79)$$

que représentent les vecteurs de position, de vitesse et d'accélération du point P observé dans le repère \mathcal{R}' depuis l'origine O' . Les relations (2.66), (2.74), et (2.76) s'écrivent

$$\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{R} \quad (2.80)$$

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{R}} \quad (2.81)$$

$$\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{R}} \quad (2.82)$$

La formule (2.81) donne l'addition des vitesses : la vitesse \mathbf{v} dans le repère \mathcal{R} est donnée par la somme de la vitesse $\dot{\mathbf{R}}$ du repère \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} , de la vitesse $\tilde{\mathbf{v}}$ dans le repère R' et de la contribution de Coriolis due à la rotation $\boldsymbol{\omega}$ de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} .

La formule (2.82) est la formule de Coriolis pour l'accélération : l'accélération \mathbf{a} dans le repère \mathcal{R} est reliée à l'accélération $\tilde{\mathbf{a}}$ dans l'autre repère \mathcal{R}' par les accélérations de Coriolis et centrifuge dues à la rotation $\boldsymbol{\omega}$ de \mathcal{R}' vis-à-vis de \mathcal{R} par l'accélération $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ de cette rotation et enfin par l'accélération $\ddot{\mathbf{R}}$ de O' par rapport à O . Nous étudierons plus loin les conséquences de ces changements au niveau de la formulation de la dynamique dans des repères mobiles.

Références

- [1] Site internet du Bureau International des Poids et Mesures:
http://www.bipm.org/fr/si/base_units/metre.html
- [2] Site internet du Bureau International des Poids et Mesures:
http://www.bipm.org/fr/si/base_units/second.html
- [3] Daniel Defoe, *Robinson Crusoe* (W. Taylor, London, 1719).
- [4] E. Kreyszig, *Differential Geometry* (Dover, New York, 1991).

Chapitre 3

Les lois fondamentales de la mécanique

3.1 Masse

La masse (en grec $\mu\alpha\zeta\alpha$) est la *quantité de matière* contenue dans un corps et elle se mesure à l'aide d'une balance (voir fig. 3.1).

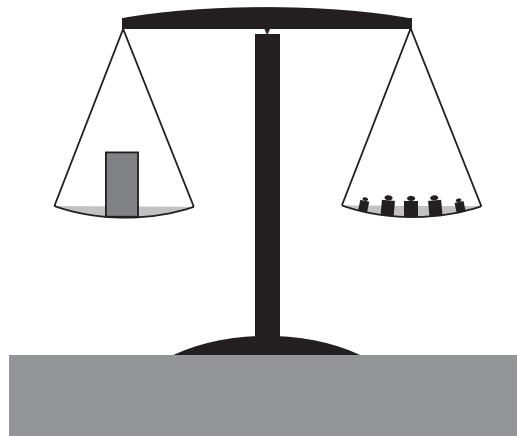


Figure 3.1: Schéma d'une balance et de la mesure de la masse d'un corps placé sur le plateau de gauche avec une série de masses unités ou de fractions de la masse unité placées dans le plateau de droite. Une relation d'équivalence entre les masses sur les deux plateaux est établie lorsque la balance est équilibrée.

La balance se compose d'un fléau suspendu en son milieu et aux extrémités duquel sont attachés deux plateaux identiques. Les distances séparant le point de suspension des extrémités des bras où sont attachés les plateaux sont égales (à moins de pratiquer un étalonnage préalable comme c'est nécessaire pour la balance dite romaine formée d'un fléau à bras inégaux). La mesure s'effectue en plaçant le corps sur un des plateaux de la balance et en équilibrant le fléau avec autant de copies ou de fractions d'un étalon de masse que nécessaire.

La balance est connue depuis l'Antiquité. Un des plus vieux modèles de balance connus date de 5000 ans avant l'ère commune et provient de l'Egypte ancienne. Il a été découvert sur le site de Naqadeh [1]. Il représente un fléau avec un trou en son milieu pour le suspendre avec une corde et deux trous aux extrémités de ses bras pour y attacher les masses à comparer (voir fig. 3.2). Cet objet archéologique atteste que l'invention de la balance remonte à 7000 ans au moins. Des scènes d'utilisation de balance sont aussi représentées sur des papyrus égyptiens (voir fig. 3.2b).

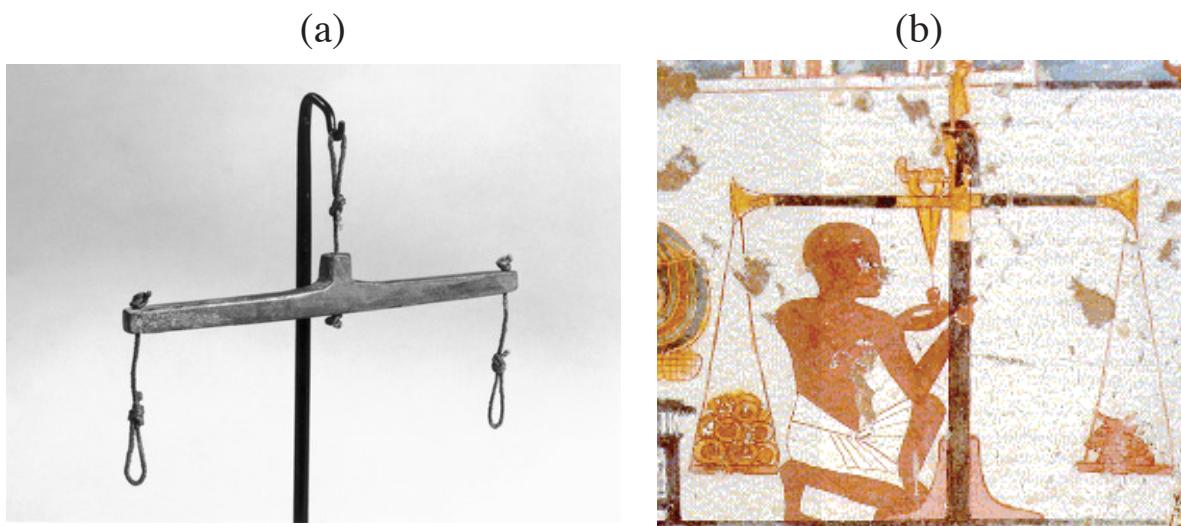


Figure 3.2: (a) Modèle en pierre de balance datant d'environ 5000 ans avant notre ère et découvert sur le site archéologique de Naqadeh en Egypte. L'objet mesure 8 cm de long [1]. (b) Scène d'utilisation d'une balance sur un papyrus égyptien remontant à environ 1300-1200 avant l'ère commune.

Les balances devaient servir au troc de grains et de métaux. De nombreux étalons de masse ont été définis et utilisés au cours des âges. Dans un souci d'unification, le gramme fut défini en 1795 comme la quantité de matière d'un volume d'eau égal à 1 cm^3 à la température de la glace fondante. Pour des raisons de commodité, un prototype de kilogramme en platine fut fabriqué en 1799, qui servit d'étalon pendant près de nonante ans. Pour l'instauration du système international vers 1889, un nouveau prototype fut fabriqué avec 90% de platine et 10% d'iridium. Ce prototype international du kilogramme est conservé au Bureau International des Poids et Mesures au Pavillon de Bréteuil à Sèvres. Depuis une convention internationale de 1901:

“Le kilogramme est l’unité de masse;
il est égal à la masse du prototype international du kilogramme.” [2]

Ce prototype international sert à fabriquer des copies pour les agences nationales de métrologie comme le NIST aux Etats-Unis. La comparaison entre l'étalon et les copies s'effectue à l'aide de balances de haute précision.

La balance établit ainsi une *relation d'équivalence* qui permet de définir la masse d'un objet comme le nombre réel m qui donne le multiple du kilogramme égal à la masse en question. L'unité de la masse est donc le kilogramme, noté kg. La masse est une grandeur scalaire définie positive ou nulle, $m \geq 0$. De plus, la masse est une grandeur additive dans le sens où la masse totale M de plusieurs corps de masses $\{m_i\}_{i=1}^n$ est la somme de leur masse:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \quad (3.1)$$

Dans les systèmes non-relativistes composés de particules se déplaçant avec des vitesses nettement plus petites que la vitesse de la lumière, la masse totale est une grandeur conservée dans le temps d'après le

Principe de conservation de la masse totale:

Au cours des transformations d'un système (non-relativiste), sa masse totale reste constante:

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad (3.2)$$

Vers 1785, Lavoisier (1743-1794) vérifia expérimentalement ce principe pour les transformations de la matière par des réactions chimiques. Après la découverte de la radioactivité, il sera remis en cause en 1905 avec l'avènement de la relativité restreinte d'Einstein.

3.2 Force

Le concept de force est aussi très ancien. Nous en prenons intuitivement connaissance en exerçant des poussées ou des tractions avec nos doigts, nos bras ou nos jambes pour soutenir ou déplacer des objets. Nos muscles nous permettent d'évaluer les poids: en prenant une bouteille dans le frigo, nous la soupesons avec suffisamment de sensibilité pour savoir immédiatement s'il faut ou non déboucher une nouvelle bouteille pour remplir un verre. Le poids apparaît être proportionnel à la quantité de matière contenue dans un corps. A cet égard, la notion de poids est confondue avec celle de masse. Cependant, une distinction claire est apparue avec les travaux d'Archimède (287-212 avant l'ère commune) qui montra que le poids apparent d'un corps plongé dans un liquide est égal à son poids dans l'air moins une poussée exercée par la pression du liquide. Cette différence se mesure à l'aide de la balance hydrostatique dont un des plateaux soutient le corps immergé (voir fig. 3.3).

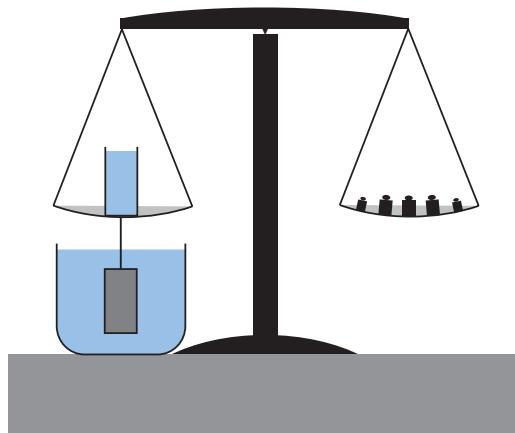


Figure 3.3: Schéma d'une balance hydrostatique permettant de mesurer la poussée d'Archimède due à la pression du liquide où le corps est plongé. Le corps immergé subit deux forces: celle due à son poids et celle provenant de la pression du liquide.

De manière générale, une force peut se mesurer à l'aide d'un *dynamomètre* qui se compose d'un ressort dont la longueur est proportionnelle à la force exercée lorsqu'il est étiré ou comprimé. Cette proportionnalité provient de son élasticité et n'est garantie que si la variation de longueur est suffisamment petite pour éviter des déformations plastiques permanentes du ressort ou sa rupture (voir fig. 3.4). Il est à noter qu'un dynamomètre doit être étalonné par exemple avec une mesure de poids. L'unité de force est le newton (symbole N) dont la définition sera donnée par la suite.

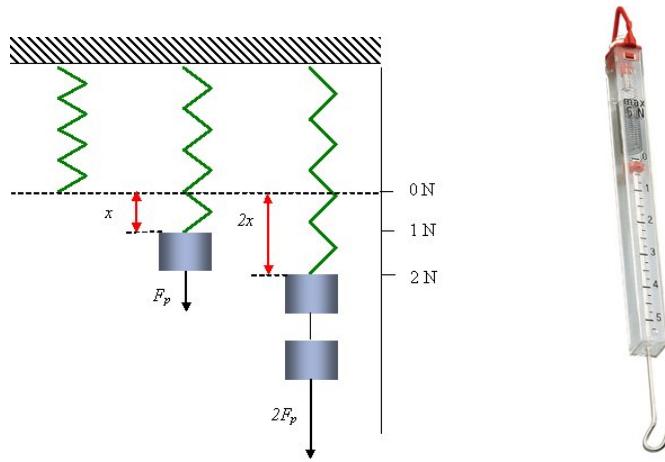


Figure 3.4: (a) Schéma d'un ressort servant de dynamomètre (à gauche). (b) Dynamomètre pour la mesure de forces de maximum 5 N (à droite).

Comme les travaux de Simon Stevin de Bruges l'on montré [3], la force est une grandeur vectorielle qui s'exerce sur un point d'application avec une intensité, une direction et un sens. Nous avons le

Postulat de Stevin:

Si plusieurs forces $\{\mathbf{F}\}_{i=1}^n$ s'exercent sur un même point d'application, celui-ci subit l'effet d'une force totale égale à la somme vectorielle des forces:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

Nous connaissons à l'heure actuelle de nombreux types de forces pouvant s'exercer sur les corps matériels depuis les grandes échelles jusqu'aux plus petites:

- **Poids:** La première force connue est le poids d'un corps de masse m qui est dirigé vers le sol et donné par $\mathbf{F} = -mg \mathbf{u}_z$ où $g = 9,81 \text{ N/kg}$ et \mathbf{u}_z est le vecteur unitaire pointant vers le haut.

- **Forces de pression:** Les forces dues à la pression d'un liquide sont connues depuis les travaux d'Archimède. La force $\Delta\mathbf{F}$ s'exerçant sur une facette d'aire ΔS d'un corps rigide immergé est donnée par

$$\Delta\mathbf{F} = -P \Delta S \mathbf{n} \quad (3.3)$$

où \mathbf{n} est un vecteur unitaire normal à cette facette et pointant vers l'extérieur du corps. P désigne la pression hydrostatique qui augmente avec la profondeur h selon $P = \rho_f g h$ où ρ_f est la densité du fluide en kg/m^3 et $g = 9,81 \text{ N/kg}$. Les unités de la pression sont donc $[P] = \text{N/m}^2$.

- **Force de gravité:** La force de gravité entre deux corps m et m' est inversement proportionnelle au carré de la distance r les séparant

$$\mathbf{F} = -G \frac{m m'}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (3.4)$$

où \mathbf{u}_r est un vecteur unitaire le long de la droite joignant les deux corps. Cette force découverte par Newton vers 1687 est toujours attractive. La constante de gravité

$$G = 6,674\,28(67) \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2 \quad (3.5)$$

fut mesurée par Cavendish en 1798. La force de gravité est universelle dans le sens où elle s'exerce aussi bien entre les planètes et les étoiles qu'entre la Terre et les objets à sa surface.

Elle détermine donc le poids d'un objet à la surface terrestre. Par conséquent, la constante de proportionnalité entre le poids d'un objet et sa masse est donnée en termes de la masse de la terre $m' = 5,977 \times 10^{24}$ kg et de son rayon $r = 6378$ km comme on peut le vérifier d'après $g = Gm'/r^2$.

- **Force électrique:** La force de Coulomb entre deux charges électriques q et q' est aussi inversement proportionnelle au carré de la distance les séparant

$$\mathbf{F} = k \frac{qq'}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (3.6)$$

Cette force découverte vers 1780 est répulsive entre les charges de même signe, mais attractive entre des charges de signes opposés. La charge électrique se mesurant en Coulomb (symbole C), la constante de proportionnalité vaut

$$k = 8,988 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2 \quad (3.7)$$

Il est à noter qu'un électron a une charge $q = -1,602 \times 10^{-19}$ C et un proton la charge opposée. La force électrique agissant sur une charge q peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E} \quad (3.8)$$

en termes du champ électrique $\mathbf{E} = (kq'/r^2)\mathbf{u}_r$ évalué à la position de l'espace où se trouve la charge q , cette position étant mesurée par rapport à la charge q' dont émane le champ. Le champ électrique est un champ vectoriel qui remplit l'espace tout entier et représente la force qui s'exercerait en un point quelconque sur une charge électrique d'un Coulomb.

- **Force magnétique:** Les aimants exercent aussi des forces particulières dues au champ magnétique \mathbf{B} qui en émane et que l'on met en évidence grâce à de la limaille de fer. Un champ magnétique agit sur une charge électrique en mouvement animée d'une vitesse \mathbf{v} . La force qu'elle subit est appelée la force de Lorentz et est donnée par

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.9)$$

où \mathbf{B} est le champ magnétique à l'endroit où se trouve la particule de charge électrique q . L'expression mathématique de cette force est connue depuis la fin du XIXe siècle. Il faut remarquer que c'est la circulation des électrons à l'échelle atomique qui induit les forces entre les aimants.

- **Forces moléculaires:** La découverte de la taille des atomes et des molécules avec les travaux de Van der Waals vers la fin du XIXe siècle montre l'existence de forces moléculaires

entre ceux-ci à l'échelle microscopique. Ces forces dépendent de la structure des atomes et, en particulier, du nuage électronique entourant chaque noyau et s'étendant sur des distances de l'ordre de l'Ångström, c'est-à-dire 10^{-10} m. Le cortège électronique détermine aussi les forces qu'exercent les liaisons chimiques entre les atomes composant une molécule. Par exemple dans une molécule diatomique comme le dihydrogène H_2 ou le monoxyde de carbone CO , la force interatomique s'annule lorsque la liaison chimique adopte sa position d'équilibre. Si la molécule est comprimée ($r < r_0$), la force est répulsive à cause de la répulsion coulombienne en $1/r^2$ entre les noyaux. Si la molécule est étirée, la force est attractive mais s'affaiblit aux grandes séparations entre les atomes comme $-1/r^7$ lors de la rupture de la liaison chimique (voir fig. 3.5).

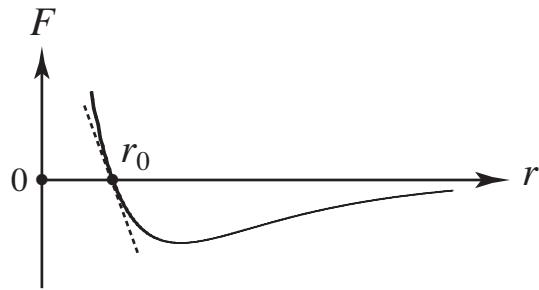


Figure 3.5: Diagramme schématique de la force moléculaire agissant entre les deux atomes d'une molécule diatomique comme H_2 , N_2 , O_2 , ou CO . La ligne pointillée montre l'approximation linéaire $F = -k(r - r_0)$ avec $k = F'(r_0)$ où $F' = dF/dr$ est la dérivée de la force par rapport à la distance r entre les noyaux des deux atomes de la molécule.

Pour de petites déformations de la liaison chimique autour de la distance d'équilibre r_0 , on peut supposer que la force varie linéairement selon

$$\mathbf{F} = -k(r - r_0) \mathbf{u}_r \quad (3.10)$$

où k est une constante de rappel qui caractérise l'élasticité de la molécule. Pour une molécule de dihydrogène H_2 , cette constante vaut $k = 575$ N/m et la distance d'équilibre $r_0 = 0,74$ Å, pour le dimère de sodium Na_2 , nous avons $k = 17$ N/m et $r_0 = 3,08$ Å.

- **Forces élastiques:** A l'échelle macroscopique, les matériaux tiennent ensemble par les liaisons chimiques entre les atomes qui les composent. Par conséquent, l'élasticité dans ces liaisons confèrent aux matériaux des propriétés d'élasticité si leurs déformations sont modérées. C'est le cas pour le ressort d'un dynamomètre, la corde d'un piano, ou les poutres et piliers qui constituent la structure d'un bâtiment ou d'un pont. Dans un modèle simplifié, on peut considérer le matériau comme un cristal formant un réseau cubique simple où chaque atome

est entouré de six premiers voisins séparés les uns des autres par la distance d'équilibre r_0 des liaisons chimiques (voir fig. 3.6).

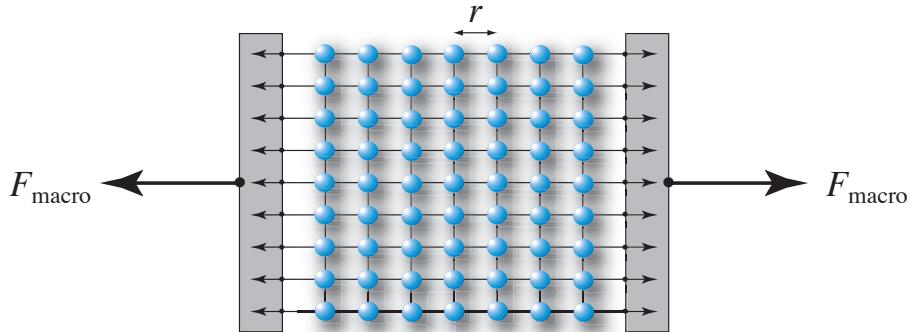


Figure 3.6: Schéma d'un cristal en déformation élastique.

Le cristal forme un parallélépipède de section carrée d'aire S et de longueur L_0 à l'équilibre. Sa section se compose de n^2 atomes et sa longueur de N atomes de sorte que $S = (nr_0)^2$ et $L_0 = Nr_0$. Sous l'effet d'une force macroscopique F_{macro} de traction, le cristal s'allonge jusqu'à la longueur $L = Nr = L_0 + \Delta L = N(r_0 + \Delta r)$. La force macroscopique se répartit également sur les n^2 liaisons chimiques formant chaque plan cristallin transverse à la longueur:

$$F_{\text{macro}} = n^2 F_{\text{micro}} \quad (3.11)$$

où la force microscopique développée par une liaison chimique vaut

$$F_{\text{micro}} = -k \Delta r \quad (3.12)$$

d'après l'éq. (3.10) avec $\Delta r = r - r_0$. En conséquence, la force macroscopique s'exprime en termes de l'allongement $\Delta L = L - L_0$ du cristal selon la relation

$$F_{\text{macro}} = -n^2 k \frac{\Delta L}{N} = -\frac{S}{L_0} E \Delta L = -K(L - L_0) \quad (3.13)$$

où l'on a introduit le module d'élasticité ou module de Young

$$E \equiv \frac{k}{r_0} \quad (3.14)$$

qui est une grandeur d'origine microscopique et caractéristique du matériau considéré. La constante de rappel macroscopique K dépend de la géométrie de l'objet que ce soit un cristal ou un ressort de métal. Pour des matériaux comme l'aluminium, le module de Young vaut

$E = 7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ et il monte à $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ pour l'acier, ce qui correspond aux ordres de grandeur du modèle microscopique ci-dessus.

Toutes les forces mentionnées ci-dessus ont la propriété de conserver l'énergie comme nous le verrons dans la suite. Par-delà ces forces conservatives, il existe des forces qui ne conservent pas l'énergie soit qu'elles dissipent de l'énergie, soit qu'elles sont le fait de moteurs qui mettent en mouvement les corps matériels:

- **Forces de frottement:** Il existe de nombreux types de forces de frottement selon qu'un objet se déplace dans un fluide ou en contact avec une surface solide. Ces forces s'opposent en général au mouvement de l'objet. Par exemple, une sphère solide en mouvement lent dans un fluide visqueux y subit une force proportionnelle à sa vitesse

$$\mathbf{F} = -\zeta \mathbf{v} \quad (3.15)$$

où le coefficient de frottement est donné par la formule de Stokes

$$\zeta = 6\pi\eta R \quad (3.16)$$

en termes du rayon R de la sphère et de la viscosité de cisaillement η du fluide. Cette viscosité est définie comme le coefficient de proportionnalité entre la pression tangentielle à une couche de fluide et le gradient de vitesse qu'elle y induit selon

$$\frac{\Delta F}{\Delta S} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (3.17)$$

(voir fig. 3.7). La viscosité vaut $\eta = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N s/m}^2$ dans l'air, $\eta = 10^{-3} \text{ N s/m}^2$ dans l'eau et $\eta = 0,85 \text{ N s/m}^2$ dans la glycérine.

La force de frottement (3.15) dépend de l'écoulement hydrodynamique autour de l'objet en déplacement (voir fig. 3.8). Dans le cas considéré, cet écoulement est laminaire et les lignes de courant sont régulières. A l'échelle microscopique, le frottement de la sphère est dû à ses collisions avec les molécules du fluide environnant qui freinent le mouvement et dissipent de l'énergie. Il est à noter que la force de frottement augmente selon le carré de la vitesse lorsque l'écoulement hydrodynamique devient turbulent comme c'est le cas pour les voitures ou les avions.

Par ailleurs, un corps solide qui frotte sur une surface solide subit une force de frottement proportionnelle à la force qui s'exerce perpendiculairement à la surface et opposée à l'avancement parallèle à cette dernière:

$$\mathbf{F}_{\parallel} = -\mu F_{\perp} \frac{\mathbf{v}_{\parallel}}{\|\mathbf{v}_{\parallel}\|} \quad (3.18)$$

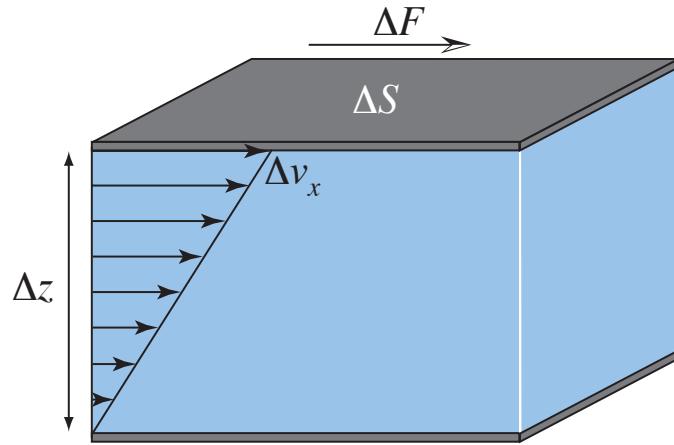


Figure 3.7: Couche de fluide entre deux plaques rigides mis en mouvement parallèlement l'une à l'autre par la force ΔF s'exerçant tangentiellement à la plaque supérieure d'aire ΔS . Le fluide est un écoulement laminaire de gradient $\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\Delta v_x}{\Delta z}$.

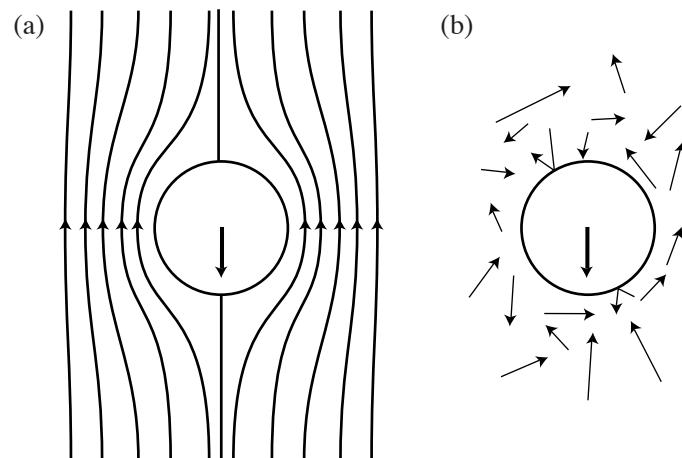


Figure 3.8: (a) Ecoulement hydrodynamique laminaire autour d'une sphère rigide en mouvement. (b) Schéma du mouvement au niveau moléculaire.

(voir fig. 3.9). Ce type de force de frottement porte le nom de Charles-Augustin de Coulomb. Il faut noter que la mise en mouvement de l'objet nécessite typiquement une force plus grande caractérisée par un coefficient de frottement statique $\mu_s > \mu$ plus grande que le coefficient de frottement cinétique μ . Pour le frottement de l'acier sur l'acier non lubrifié, ces coefficients de frottement valent $\mu = 0,6$ et $\mu_s = 0,7$, pour du teflon sur du teflon dans l'air $\mu = \mu_s = 0,04$ [4]. Ces coefficients dépendent de la nature et de l'état des surfaces en contact.

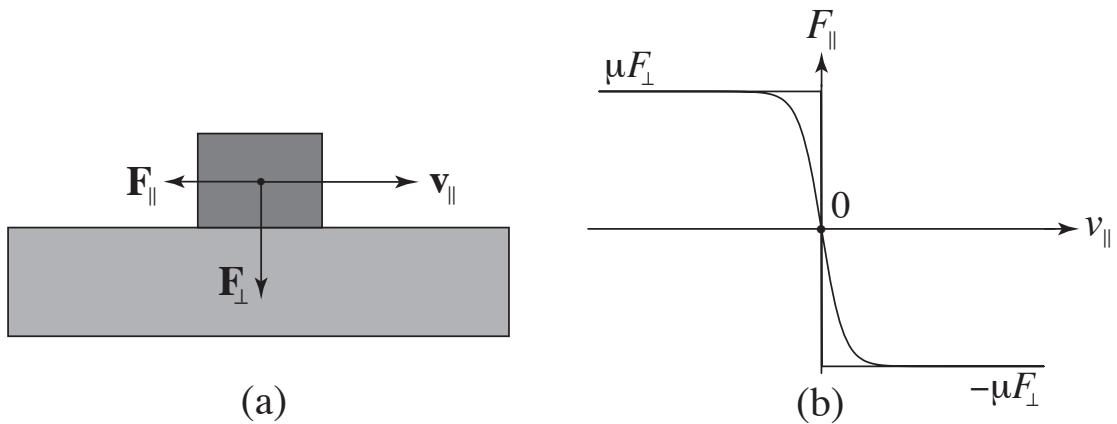


Figure 3.9: (a) Frottement d'un corps solide sur une surface avec laquelle son contact est maintenu par une force perpendiculaire F_{\perp} . (b) Comportement de la force de frottement (3.18) en fonction de la vitesse, comparé avec un modèle d'interpolation entre les comportements (3.15) et (3.18) donné par la fonction $F_{\parallel} = -\mu F_{\perp} \tanh \frac{\zeta v_{\parallel}}{\mu F_{\perp}}$.

- **Forces actives de moteurs:** A côté des forces qui freinent le mouvement, il y en a d'autres qui mettent en mouvement comme c'est le cas pour les moteurs. Des moteurs existent depuis l'échelle nanométrique comme les moteurs moléculaires dans nos muscles jusqu'à l'échelle macroscopique comme les moteurs d'avions ou de fusées.

Nos muscles ont des structures subcellulaires complexes formées de filaments de protéines d'actine sur lesquels se déplacent des protéines de myosine d'un diamètre d'environ 10 nm. Ces dernières ont des sites catalytiques pour la réaction d'hydrolyse de molécules d'adénosine triphosphate



qui libère un phosphate inorganique P_i et de l'énergie. Cette énergie chimique provoque une déformation élastique de la myosine, lui permettant de développer une force d'environ 5 pN vis-à-vis du filament d'actine (voir fig. 3.10). Comme nos muscles se composent de milliers de cellules qui chacune se compose de millions de filaments d'actine sur lesquels se déplacent des centaines de protéines de myosine, on conçoit que nos muscles peuvent développer des forces

de l'ordre du newton. Il faut remarquer que les moteurs moléculaires se caractérisent par une relation entre la force qu'ils développent et leur vitesse d'avancement (voir fig. 3.10b).

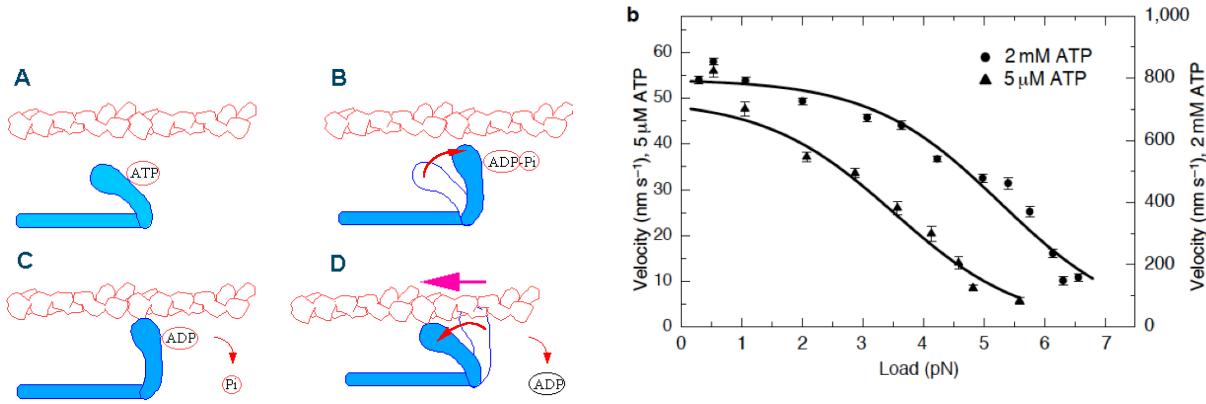


Figure 3.10: (a) Cycle du moteur moléculaire actine-myosine (à gauche). La protéine de myosine (en bleu) change de conformation sous l'effet de l'hydrolyse de l'adnosine triiphosphate ATP et se déplace le long du filament d'actine (en blanc et rouge). ADP désigne une molécule d'adnosine diphosphate et P_i un phosphate inorganique. (b) Relation force-vitesse (en anglais, *load-velocity*) du moteur moléculaire kinésine-microtubule [5]. Le symbole M est l'unité de concentration d'une mole par litre.

A notre échelle, un avion comme l'Airbus 320 de 34 m d'envergure est doté de deux moteurs de 120 kN de poussée, le Boeing 747 de 70 m d'envergure de quatre moteurs de 296 kN de poussée et l'Airbus 380 de 80 m d'envergure de quatre moteurs de 320 kN pouvant monter à 370 kN de poussée, notamment lors du décollage. La navette spatiale a trois moteurs de 1,8 MN de poussée chacun et deux boosters de 14,7 MN chacun. La poussée totale au décollage peut atteindre 39,4 MN pour un poids de 20 MN. La poussée (thrust en anglais) est la principale caractéristique des moteurs d'avions et de fusées.

3.3 Les lois du mouvement de Newton

La grande révolution des travaux de Galilée à Newton est d'avoir compris comment le concept de force est relié au mouvement des corps et à leur masse. Ainsi l'unité de force s'est trouvée reliée aux unités d'espace (mètre) de temps (seconde) et de masse (kilogramme) fixant le cadre métrologique de la physique. C'est en 1687 que Newton énonça les trois lois fondamentales du mouvement.

1ère loi: Principe d'inertie

Il existe des repères, appelés repères inertIELS, dans lesquels tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, à moins qu'une force n'agisse sur lui et ne modifie son état.

Cette première loi sert en quelque sorte de définition des repères inertIELS dans lesquels les forces sont définies et où l'équation du mouvement s'applique. Cette équation est établie par la

2ème loi: Equation de Newton

Dans un repère inertIEL, un corps de masse constante m sur lequel agit une force \mathbf{F} suit une accélération \mathbf{a} égale à la force divisée par la masse:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} \quad (3.20)$$

Tout d'abord, il faut noter que la 2ème loi est compatible avec la 1ère loi puisque l'accélération d'un corps est nulle, $\mathbf{a} = 0$, si aucune force n'agit sur lui, $\mathbf{F} = 0$, de sorte que le corps est en mouvement rectiligne uniforme, $\mathbf{r} = \mathbf{v}_0(t - t_0) + \mathbf{r}_0$, si $\mathbf{v}_0 \neq 0$ ou bien au repos si $\mathbf{v}_0 = 0$.

L'équation de Newton (3.20) établit le lien fondamental entre le concept de force, d'une part, et le mouvement, d'autre part, au travers de la notion de masse qui apparaît comme une grandeur caractérisant l'*inertie* d'un corps vis-à-vis de la force qui s'exerce sur lui. En effet, son accélération donnée par $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ sera d'autant plus faible que sa masse est grande. Par conséquent, l'inertie d'un corps augmente avec sa masse alors que sa vivacité augmente lorsque sa masse diminue.

En reliant entre eux les concepts de force, de masse et d'accélération, la 2ème loi de Newton permet de définir l'unité de force (le newton) en termes des trois unités fondamentales de longueur, de temps et de masse. La force nécessaire pour qu'un corps de 1 kg subisse une accélération de 1 m/s² est égale à 1 N:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2 \quad (3.21)$$

La 2ème loi de Newton a donc joué un rôle historique pour établir le cadre métrologique de la physique en reliant les grandeurs de la cinématique à celles de masse et de force. C'est une révolution car, pour la première fois, différentes notions intuitives mais de pratique courante se trouvent reliées les unes aux autres.

Si le système se compose de plusieurs corps matériels, il est nécessaire de savoir comment les forces agissent entre les corps, ce qui fait l'objet de la

3ème loi: Principe d'action-réaction

Tout corps matériel P_1 exerçant une force \mathbf{F}_{21} sur un autre corps matériel P_2 subit de la part de ce dernier une force \mathbf{F}_{12} d'intensité égale, de même direction, mais de sens opposé, et dirigée le long de la droite joignant les deux corps:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{F}_{12} = 0 \quad (3.23)$$

avec $\mathbf{r}_{12} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ (voir fig. 3.11).

Ce principe d'action-réaction est d'application dans tout système statique comme une chaîne de points matériels suspendus dans le champ de gravité terrestre (voir fig. 3.12). La force \mathbf{F}_{21} qui s'exerce sur le point matériel P_2 et maintient le restant de la chaîne au repos agit vers le haut avec une intensité égale à la force \mathbf{F}_{12} que subit le point P_1 de la part de la chaîne en-dessous de lui et \mathbf{F}_{12} est dirigée vers le bas. Ce principe d'action-réaction est aussi d'application dans les problèmes dynamiques comme deux patineurs sur la glace qui se repoussent mutuellement pour partir chacun en un mouvement rectiligne uniforme dans des sens opposés (voir fig. 3.12b). Ce principe est notamment en jeu dans la propulsion des avions ou des fusées.

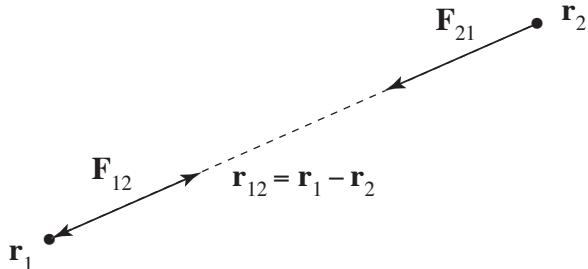


Figure 3.11: Illustration de la 3ème loi de Newton ou principe d'action-réaction.

Il est à remarquer que, dans certains systèmes en électromagnétisme, le mouvement ne se conçoit pas en termes de forces entre les particules matérielles obéissant au principe d'action-réaction. La description de ces systèmes nécessite l'introduction du concept de champ, comme le champ électromagnétique qui exerce localement (et non plus à distance) une force sur les particules matérielles chargées.

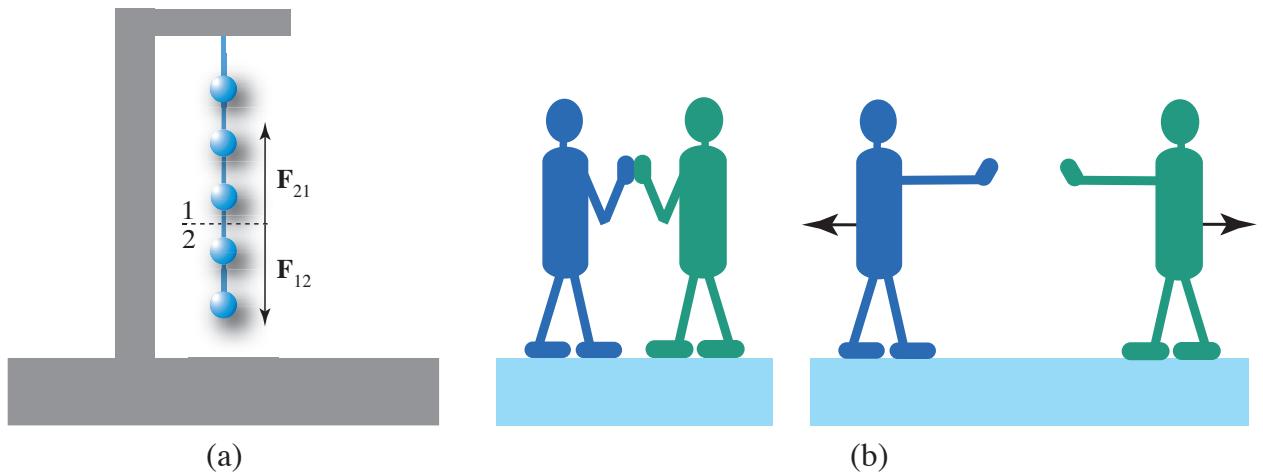


Figure 3.12: (a) Principe d'action-réaction dans un problème de statique. (b) Le même principe en jeu dans un problème de dynamique où deux patineurs se repoussent sur de la glace.

3.4 L'équation de Newton comme équation différentielle

Pour étudier le mouvement d'un point matériel, on a besoin de connaître la nature de la force qui s'exerce sur lui. Les exemples énoncés ci-dessus montrent que les forces sont des fonctions de la position du point matériel et parfois aussi de sa vitesse ou du temps.

On peut se demander si une force pourrait dépendre de l'accélération ou d'une dérivée ultérieure de la position. Outre le fait que les observations expérimentales n'ont pas montré la nécessité d'introduire pareilles dépendances, il faut remarquer que l'utilisation de dérivées de la position par rapport au temps égales ou supérieures à deux dans une force introduirait des ambiguïtés non seulement dans la définition de la force apparaissant dans l'équation de Newton (3.20) mais aussi dans la définition de la masse. Par exemple, si la force était une fonction de l'accélération

$$m a = F(a) = F(0) + F'(0) a + \frac{1}{2} F''(0) a^2 + \dots \quad (3.24)$$

le théorème des fonctions implicites permettrait de retrouver une force indépendante de l'accélération:

$$[m - F'(0)] a = F(0) - \frac{1}{2} F''(0) \left[\frac{F(0)}{m - F'(0)} \right]^2 + \dots \quad (3.25)$$

avec une nouvelle masse et une autre force.

De manière semblable, si la force venait à dépendre de la secousse selon

$$m a = F_0(x, v, t) + k \ddot{a} \quad (3.26)$$

où k est une constante suffisamment petit, nous aurions le développement suivant:

$$m a = F_0 + \frac{k}{m} \left(\frac{\partial F_0}{\partial t} + v \frac{\partial F_0}{\partial x} + \frac{F_0}{m} \frac{\partial F_0}{\partial v} \right) + O(k^2) \quad (3.27)$$

de la même forme que l'équation de Newton (3.20) modulo une redéfinition de la force [6].

Ces deux exemples montrent que l'on retrouverait la forme newtonienne (3.20) des équations du mouvement même si des dérivées par rapport au temps au-delà de la vitesse y figuraient de manière perturbative. Cependant, les observations expérimentales sur les forces fondamentales de la gravité ou de l'électromagnétisme montrent qu'il n'est pas utile de considérer pareilles dépendances, ce qui justifie le postulat suivant:

Principe de déterminisme (postulat des conditions initiales)

Les seules expressions admissibles pour une force sont des fonctions $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ suffisamment régulières pour que le système d'équations différentielles ordinaires

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t)$$

admette une et une seule solution de conditions initiales

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) = \mathbf{v}_0$$

sur la position et la vitesse du corps matériel.

Pour un corps matériel se déplaçant dans l'espace tridimensionnel, les conditions initiales sont fixées par la donnée des trois composantes \mathbf{r}_0 de la position au temps initial t_0 et des trois composantes de la vitesse \mathbf{v}_0 . En effet, l'équation de Newton est du deuxième ordre dans le temps qu'il est donc nécessaire d'intégrer deux fois de suite sur le temps pour transformer l'accélération $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ en la trajectoire $\mathbf{r}(t)$. Ces deux intégrations font apparaître deux constantes d'intégration (vectorielles) qui correspondent à \mathbf{r}_0 et \mathbf{v}_0 . Ceci explique que six nombres réels sont nécessaires pour préciser les conditions initiales d'un système de trois équations différentielles ordinaires du deuxième ordre (en le temps). Une façon de présenter le système pour mettre en évidence le nombre de variables correspondant aux conditions initiales est d'écrire les équations de Newton sous la forme d'un système de six équations différentielles ordinaires du premier ordre en le temps comme suit:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \end{cases} \quad (3.28)$$

Il s'agit bien d'un système fermé avec les mêmes variables dans le membre de droite que celles qui apparaissent dérivées une fois par rapport au temps dans le membre de gauche. Puisque ce système est du premier ordre dans le temps, une seule intégrale sur le temps devrait suffir pour en obtenir la solution. Puisque ce système contient six variables, sa résolution nécessite six conditions initiales que sont les positions \mathbf{r}_0 et les vitesses \mathbf{v}_0 au temps initial t_0 . En introduisant le vecteur

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (3.29)$$

Le système (3.28) peut s'écrire

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{C}(\mathbf{X}, t) \quad (3.30)$$

Si on intègre par rapport au temps les deux nombres, on obtient

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{C}[\mathbf{X}(\tau), \tau] d\tau \quad (3.31)$$

Avec les six conditions initiales $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$.

L'existence et l'unicité de cette solution est garantie par le

Théorème de Cauchy: On suppose que le champ vectoriel $\mathbf{C}(\mathbf{X}, t)$ défini sur $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}$ est borné dans le domaine

$$D : |t - t_0| < T \quad \text{et} \quad \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| < R \quad (3.32)$$

centré sur les conditions initiales (\mathbf{X}_0, t_0) dans le sens où

$$\sup_{(\mathbf{X}, t) \in D} \|\mathbf{C}(\mathbf{X}, t)\| \leq M \quad (3.33)$$

avec $\|\mathbf{V}\| = \sup_{i=1, \dots, d} |V_i|$. De plus, on demande qu'il y satisfait la condition de Lipschitz

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{C}(\mathbf{X}', t)\| \leq L \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\| \quad (3.34)$$

avec la constante de Lipschitz $L > 0$, $\mathbf{X} \in D$ et $\mathbf{X}' \in D$. Sous ces conditions, le système d'équations différentielles (3.30) admet une solution $\mathbf{X}(t)$ de conditions initiales $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0)$ qui est unique sur l'intervalle de temps $|t - t_0| < \theta$ avec $\theta = \min(T, R/M)$. Cette solution est continue en les conditions initiales car

$$\|\tilde{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{X}(t)\| \leq (\|\Delta \mathbf{X}_0\| + M |\Delta t_0|) \exp(L |t - t_0|) \quad (3.35)$$

où $\tilde{\mathbf{X}}(t)$ est la solution de conditions initiales $(\mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}_0, t_0 + \Delta t_0)$.

Démonstration: L'équation intégrale (3.31) peut être utilisée de manière récursive en partant de l'approximation la plus grossière qui consiste à supposer la solution égale à sa condition initiale:

$$\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{C}(\mathbf{X}_0, \tau) d\tau \quad (3.36)$$

$$\mathbf{X}_2(t) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{C}[\mathbf{X}_1(\tau), \tau] d\tau \quad (3.37)$$

⋮

$$\mathbf{X}_n(t) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{C}[\mathbf{X}_{n-1}(\tau), \tau] d\tau \quad (3.38)$$

⋮

Tout d'abord, nous avons les inégalités successives

$$\|\mathbf{X}_n(t) - \mathbf{X}_0\| = \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{C}[\mathbf{X}_{n-1}(\tau), \tau] d\tau \right\| \leq M |t - t_0| < R \quad (3.39)$$

puisque le champ vectoriel est donné d'après l'éq. (3.33). La dernière inégalité provient de la nécessité que l'approximation $\mathbf{X}_n(t)$ reste dans le domaine D , ce qui impose que l'intervalle de temps soit restreint à $|t - t_0| < R/M$. Comme le temps t appartient au domaine D , nous trouvons ici la condition $|t - t_0| < \theta$ avec $\theta = \min(T, R/M)$. Ensuite, nous considérons les différences entre les approximations successives sous l'hypothèse que $t > t_0$. En premier lieu, nous avons que

$$\|\mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_0\| \leq M(t - t_0) \quad (3.40)$$

puis nous utilisons la condition de Lipschitz (3.34) dans

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_2(t) - \mathbf{X}_1(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t \{\mathbf{C}[\mathbf{X}_1(\tau), \tau] - \mathbf{C}(\mathbf{X}_0, \tau)\} d\tau \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|\mathbf{C}[\mathbf{X}_1(\tau), \tau] - \mathbf{C}(\mathbf{X}_0, \tau)\| d\tau \\ &\leq L \int_{t_0}^t \|\mathbf{X}_1(\tau) - \mathbf{X}_0\| d\tau \\ &\leq ML \int_{t_0}^t (\tau - t_0) d\tau = \frac{1}{2} ML(t - t_0)^2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

A la n^e étape, nous trouvons que

$$\|\mathbf{X}_n(t) - \mathbf{X}_{n-1}(t)\| \leq \frac{1}{n!} ML^{n-1}(t - t_0)^n \quad (3.42)$$

et une inégalité analogue si $t < t_0$. Ces inégalités assurent la convergence absolue de la série:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + [\mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_0] + [\mathbf{X}_2(t) - \mathbf{X}_1(t)] + \cdots + [\mathbf{X}_n(t) - \mathbf{X}_{n-1}(t)] + \cdots \quad (3.43)$$

puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{X}_n(t) - \mathbf{X}_{n-1}(t)\| \leq \frac{M}{L} \exp(L|t - t_0|) < \infty \quad (3.44)$$

est fini pour tout temps t . Ce premier résultat garantit l'existence de la solution dans l'intervalle $|t - t_0| < \theta$:

$$\mathbf{X}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}_n(t) \quad (3.45)$$

Pour démontrer l'unicité, nous considérons une autre solution $\tilde{\mathbf{X}}(t)$ de conditions initiales $(\mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}_0, t_0 + \Delta t_0)$:

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}_0 + \int_{t_0 + \Delta t_0}^t \mathbf{C}[\tilde{\mathbf{X}}(\tau), \tau] d\tau \quad (3.46)$$

obtenue par les approximations successives:

$$\tilde{\mathbf{X}}_n(t) = \mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}_0 + \int_{t_0 + \Delta t_0}^t \mathbf{C}[\tilde{\mathbf{X}}_{n-1}(\tau), \tau] d\tau \quad (3.47)$$

La différence entre les approximations (3.47) et (3.38) donne pour $t > t_0$

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{X}}_n(t) - \mathbf{X}_n(t)\| &= \left\| \Delta \mathbf{X}_0 + \int_{t_0 + \Delta t_0}^{t_0} \mathbf{C}[\tilde{\mathbf{X}}_{n-1}(\tau), \tau] d\tau + \int_{t_0}^t \left\{ \mathbf{C}[\tilde{\mathbf{X}}_{n-1}(\tau), \tau] - \mathbf{C}[\mathbf{X}_{n-1}(\tau), \tau] \right\} d\tau \right\| \\ &\leq \|\Delta \mathbf{X}_0\| + M |\Delta t_0| + L \int_{t_0}^t \|\tilde{\mathbf{X}}_{n-1}(\tau) - \mathbf{X}_{n-1}(\tau)\| d\tau \end{aligned} \quad (3.48)$$

En supposant que

$$\|\tilde{\mathbf{X}}_n(t) - \mathbf{X}_n(t)\| \leq \|\Delta \mathbf{X}_0\| f_n(t) + M |\Delta t_0| f_{n-1}(t) \quad (3.49)$$

Nous trouvons que

$$\begin{aligned} f_0(t) &= 1 \\ f_1(t) &= 1 + L(t - t_0) \\ &\vdots \\ f_n(t) &= 1 + L \int_{t_0}^t f_{n-1}(\tau) d\tau = 1 + L(t - t_0) + \cdots + \frac{L}{n!} (t - t_0)^n \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.50)$$

Dans la limite $n \rightarrow \infty$, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = e^{L(t-t_0)} \quad (3.51)$$

de sorte que

$$\|\tilde{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{X}(t)\| \leq (\|\Delta \mathbf{X}_0\| + M |\Delta t_0|) e^{L(t-t_0)} \quad (3.52)$$

Une inégalité semblable est obtenue lorsque $t < t_0$, ce qui démontre l'inégalité (3.35). Cette inégalité assure la continuité en les conditions initiales et garantit l'unicité de la solution puisque

$$\lim_{\Delta \mathbf{X}_0, \Delta t_0 \rightarrow 0} \tilde{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}(t) \quad (3.53)$$

en vertu de la continuité de la solution en ses conditions initiales. C.Q.F.D. On notera qu'une autre démonstration de ce même théorème est proposée dans la réf. [8].

Le théorème de Cauchy assure une forme très forte du principe de causalité pour les systèmes mécaniques. Selon ce principe, tout effet a une cause dont il résulte:

$$\text{cause} \longrightarrow \text{effet}$$

Dans le schéma newtonien, les conditions initiales \mathbf{r}_0 et \mathbf{v}_0 sont les causes de tout effet se produisant lors du mouvement $\mathbf{r}(t; \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t_0)$ issu de ces conditions initiales. La trajectoire $\mathbf{r}(t; \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t_0)$ est univoquement déterminée par ses conditions initiales \mathbf{r}_0 et \mathbf{v}_0 , ce qui porte le nom de déterminisme.

Il faut remarquer que le déterminisme n'implique pas qu'il soit possible d'effectuer des prédictions sur l'évolution temporelle future d'un système. En effet, les conditions initiales sont toujours entachées d'erreurs ($\Delta \mathbf{r}_0, \Delta \mathbf{v}_0, \Delta t_0$). Dans l'exemple du tir d'un boulet par un canon, les conditions initiales du boulet dépendent des processus se déroulant dans le canon. Or, ce dernier ne fait pas partie du système formé par le boulet et décrit par les équations de Newton ($\ddot{x} = 0, \ddot{y} = 0, \ddot{z} = -g$). Comme la parfaite reproductibilité du tir n'est pas assurée, les conditions initiales du boulet sont distribuées de manière statistique lors qu'une suite de tirs. Si les écarts entre les trajectoires possibles croissent tout au plus comme le carré du temps pour le mouvement parabolique du boulet, il existe cependant d'autres systèmes, appelés systèmes chaotiques, dans lesquels les écarts croissent exponentiellement autour du temps initial t_0 comme le suggère l'inégalité (3.35). Ces systèmes présentent la propriété de *sensibilité aux conditions initiales* selon laquelle

$$\|\Delta \mathbf{X}(t)\| \simeq \|\Delta \mathbf{X}_0\| e^{\lambda |t-t_0|} \quad \text{pour } |t-t_0| < \theta \quad (3.54)$$

avec $\Delta\mathbf{X}(t) = \tilde{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{X}(t)$. La constante λ porte le nom d'exposant de Lyapounov et cette grandeur caractéristique du système mesure le taux de croissance exponentielle de la distance entre des trajectoires initialement voisines. Dans les systèmes chaotiques, une prévision avec une précision $\|\Delta\mathbf{X}(t)\| < \epsilon$ n'est plus possible au-delà de l'intervalle de temps

$$|t - t_0| \simeq \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\epsilon}{\|\Delta\mathbf{X}_0\|} \quad (3.55)$$

appelé le temps de Lyapounov. Ce temps représente l'horizon au-delà duquel les événements ne sont plus prévisibles à la précision ϵ . Ce problème fondamental se manifeste, notamment, en météorologie.

Ceci étant dit, il existe des méthodes systématiques de résolution des équations de Newton.

3.5 Méthodes de résolution

Tout d'abord, nous avons les *méthodes analytiques* pour résoudre toute une série de problèmes mécaniques dont la plupart de ceux rencontrés dans ce cours. Ces méthodes analytiques fournissent les solutions des équations différentielles ordinaires de Newton par des intégrales donnant des fonctions sous une forme analytique.

Il existe aussi des *méthodes semi-analytiques* comme le développement de la solution en série de Taylor

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{c}_n}{n!} (t - t_0)^n \quad (3.56)$$

où les coefficients

$$\mathbf{c}_n = \frac{d^n \mathbf{r}}{dt^n}(t_0) \quad (3.57)$$

sont calculables numériquement de manière récursive en termes des conditions initiales et de l'équation de Newton, $m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0 &= \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{c}_1 &= \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{c}_2 &= \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t_0) \\ \mathbf{c}_3 &= \frac{1}{m} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{v}} \right) (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t_0) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.58)$$

La trajectoire peut se calculer de proche en proche en répétant la construction de la série.

Une méthode semi-analytique pour obtenir des solutions périodiques $\mathbf{r}(t + T) = \mathbf{r}(t)$ de période donnée T consiste à effectuer une série de Fourier:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{A}_n \cos n\omega t + \mathbf{B}_n \sin n\omega t) \quad (3.59)$$

où $\omega = 2\pi/T$ est la fréquence angulaire et les coefficients \mathbf{A}_n et \mathbf{B}_n sont à calculer.

Sinon les méthodes les plus pratiques sont les *méthodes numériques*.

Dans le cas de forces dépendant des positions et éventuellement du temps, nous avons l'*algorithme de Verlet* qui consiste à écrire la dérivée seconde du temps sous sa forme approchée

$$m \frac{\mathbf{r}_{n+1} - 2\mathbf{r}_n + \mathbf{r}_{n-1}}{\Delta t^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}_n, t_n) \quad (3.60)$$

avec $\mathbf{r}_n \simeq \mathbf{r}(t_n)$ et $t_n = n\Delta t$. La vitesse approchée se calcule d'après

$$\mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n}{\Delta t} \quad (3.61)$$

avec $\mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}} \simeq \mathbf{v}(t_n + \Delta t/2)$. Ainsi, la trajectoire peut se calculer numériquement par itérations successives des équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}_{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}_n, t_n) \\ \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \Delta t \mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}} \\ t_{n+1} = t_n + \Delta t \end{array} \right. \quad (3.62)$$

partant de la position initiale \mathbf{r}_0 au temps t_0 et de la vitesse $\mathbf{v}_{-\frac{1}{2}} \simeq \mathbf{v}_0 - \frac{\Delta t}{2m} \mathbf{F}(\mathbf{r}_0, t_0)$. Cet algorithme est utilisé avec succès pour l'intégration des systèmes conservatifs.

Pour les systèmes dissipatifs, $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{C}(\mathbf{X}, t)$, une intégration stable peut s'effectuer grâce à l'*algorithme de Runge-Kutta d'ordre deux*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_1 = \Delta t \mathbf{C}(\mathbf{X}_n, t_n) \\ \mathbf{K}_2 = \Delta t \mathbf{C}(\mathbf{X}_n + \mathbf{K}_1, t_n + \Delta t) \\ \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \\ t_{n+1} = t_n + \Delta t \end{array} \right. \quad (3.63)$$

partant des conditions initiales $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ au temps t_0 . Il faut noter que l'*algorithme d'Euler*:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + \Delta t \mathbf{C}(\mathbf{X}_n, t_n) \quad (3.64)$$

peut présenter des instabilités numériques si le pas d'intégration Δt n'est pas choisi suffisamment petit et il n'est donc pas recommandé en pratique. L'algorithme de Runge-Kutta permet de choisir un pas Δt plus long. Il existe d'autres algorithmes d'ordre plus élevé permettant de choisir le pas Δt plus long encore, ce qui peut raccourcir sensiblement l'intégration numérique d'une trajectoire.

3.6 Repères inertIELS

Un repère inertiEL \mathcal{R} est un repère où la 2ème loi de Newton est valable:

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (3.65)$$

Soit un autre repère \mathcal{R}' en mouvement quelconque vis-à-vis du repère inertiEL:

$$\mathbf{r} = \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{R}(t) \quad (3.66)$$

D'après le chapitre 2, le mouvement observé depuis ce repère quelconque obéit à l'équation:

$$m \left[\tilde{\mathbf{a}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{R}} \right] = \mathbf{F} \quad (3.67)$$

Cette équation n'a plus la forme d'une équation de Newton à cause de termes supplémentaires qui représentent autant de pseudo-forces. La forme newtonienne

$$m \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{F} \quad (3.68)$$

est retrouvée dans le repère \mathcal{R}' sous les conditions que

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0 \\ \ddot{\mathbf{R}} = 0 \end{cases} \quad (3.69)$$

c'est-à-dire que le repère \mathcal{R}' ne tourne pas et n'accélère pas vis-à-vis de \mathcal{R} . Ces conditions signifient que la matrice $\mathbf{O}(t)$ de la transformation orthogonale de l'éq. (3.66) et le vecteur $\mathbf{R}(t)$ reliant les origines des repères \mathcal{R} et \mathcal{R}' obéissent aux équations suivantes

$$\frac{d\mathbf{O}(t)}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{O}(t) = \mathbf{O}_0 \quad (3.70)$$

$$\frac{d^2\mathbf{R}(t)}{dt^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t \quad (3.71)$$

de sorte que le repère \mathcal{R}' est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} et que la transformation orthogonale qui les relient est constante dans le temps. Sous ces conditions, le

repère \mathcal{R}' est aussi un repère inertiel. Par conséquent, le repère \mathcal{R} et tous les repères \mathcal{R}' au repos ou en mouvement rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} forment l'ensemble des *repères inertIELS*. Il s'agit de tous les repères où le principe d'inertie (c'est-à-dire la 1ère loi de Newton) est valable.

L'identification expérimentale d'un tel repère dépend de la précision de mesure des accélérations. Le repère du centre de masse du système solaire est un exemple de repère inertiel si l'on néglige le mouvement de révolution de la Galaxie. A cet égard, le repère du centre de masse de la Galaxie est un meilleur exemple de repère inertiel.

L'ensemble des transformations de l'espace-temps qui relient entre eux les repères inertIELS forment le *groupe de Galilée*:

$$\begin{cases} t = t' + T_0 \\ \mathbf{r} = \mathbf{O}_0 \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t' \end{cases} \quad (3.72)$$

Il s'agit d'un groupe continu ou groupe de Lie à 10 paramètres: les 3 composantes \mathbf{R}_0 des translations de l'espace tridimensionnel, les 3 composantes \mathbf{V}_0 de la vitesse du mouvement rectiligne uniforme entre les repères, les 3 paramètres définissant une rotation \mathbf{O}_0 (l'angle de rotation et les deux angles fixant l'axe de rotation) et le temps T_0 de la translation temporelle de l'origine du temps. Dans le domaine d'application de la mécanique newtonienne, nous avons le

Principe de relativité galiléenne:

Toutes les lois de la nature sont les mêmes par rapport à tous les repères inertIELS, c'est-à-dire que les équations du mouvement ont des expressions invariantes sous le groupe de Galilée.

Ce principe fut remis en question pour les particules de vitesse approchant la vitesse de la lumière par la relativité restreinte d'Einstein en 1905.

3.7 Quantité de mouvement

La *quantité de mouvement* ou *impulsion* (en anglais, *linear momentum*) d'une particule matérielle se définit comme le produit de sa masse avec sa vitesse:

$$\mathbf{p} \equiv m \mathbf{v} \quad (3.73)$$

La quantité du mouvement a pour unité des kg m s^{-1} ou des Ns. La 2ème loi s'exprime en termes de l'impulsion sous la forme:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (3.74)$$

La quantité de mouvement est constante si aucune force ne s'exerce sur la particule, c'est-à-dire si elle suit un mouvement rectiligne uniforme.

3.8 Moment cinétique

Le *moment cinétique* (en anglais, *angular momentum*) d'une particule matérielle se définit par rapport à l'origine d'un repère comme le produit vectoriel de la position \mathbf{r} de la particule avec son impulsion \mathbf{p} :

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (3.75)$$

Le moment cinétique a pour unité des $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ ou des N m s . L'équation d'évolution temporelle du moment cinétique s'obtient en le dérivant par rapport au temps et en utilisant la 2ème loi:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = m \underbrace{\mathbf{v} \times \mathbf{v}}_{=0} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.76)$$

Le premier terme s'annule puisque la vitesse $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ est parallèle à l'impulsion $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ tandis que le second définit le *couple de force* (en anglais, *torque*) vis-à-vis de l'origine du repère:

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.77)$$

L'équation d'évolution du moment cinétique prend donc une forme analogue à l'éq. (3.74)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \quad (3.78)$$

en termes du couple de force.

Le moment cinétique est conservé si le couple de force s'annule, $\mathbf{N} = 0$, ce qui se produit si la force \mathbf{F} est parallèle au vecteur \mathbf{r} . C'est le cas si l'origine du repère est le centre d'un champ de forces obéissant à la 3ème loi: on parlera dans ce cas d'une *force centrale*. Des exemples de force centrale sont donnés par la force de gravité et la force électrique coulombienne pour lesquelles $\mathbf{F} = \|\mathbf{F}\| \mathbf{r} / \|\mathbf{r}\|$ de sorte que $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \|\mathbf{F}\| (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) / \|\mathbf{r}\| = 0$.

Si le moment cinétique est conservé, la trajectoire de la particule matérielle reste à tout instant dans le plan perpendiculaire au vecteur du moment cinétique et passant par l'origine du repère, c'est-à-dire par le centre du champ de force. En effet, par sa définition (3.75), le moment cinétique est perpendiculaire au vecteur de position \mathbf{r} ainsi qu'à celui de la vitesse \mathbf{v} : $\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = 0$ et $\mathbf{v} \cdot \mathbf{L} = 0$. Par conséquent, la trajectoire ne quitte pas le plan en question (voir fig. 3.13). Dans ce cas, on peut introduire un nouveau repère $Ox'y'z'$ dont l'axe Oz' pointe dans la

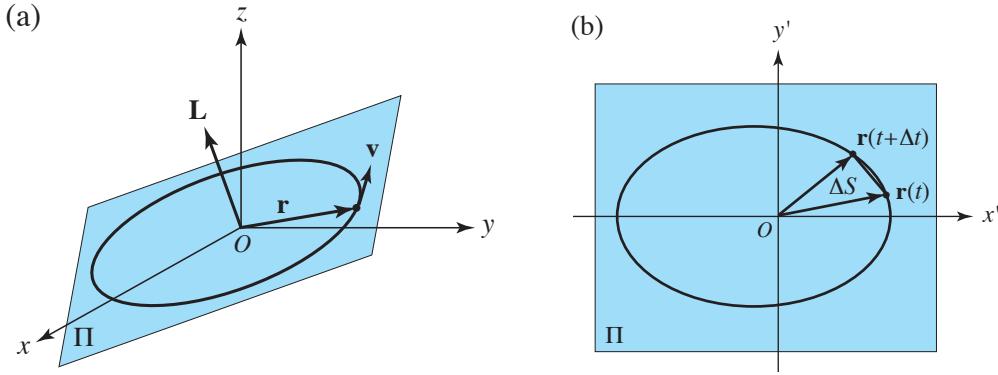


Figure 3.13: (a) Mouvement d'une particule matérielle dans un champ de force central émanant de l'origine O du repère $Oxyz$. La trajectoire reste dans le plan Π perpendiculaire au moment cinétique constant \mathbf{L} et passant par O . (b) Aire ΔS balayée par le vecteur de position $\mathbf{r}(t)$ pendant le laps de temps Δt .

direction du moment cinétique \mathbf{L} et dont le plan $Ox'y'$ est celui de la trajectoire. Dans ce plan, on utilise des coordonnées polaires: $x' = r \cos \theta$ et $y' = r \sin \theta$. La vitesse est alors donnée par

$$\begin{cases} \dot{x}' = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y}' = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \end{cases} \quad (3.79)$$

qui s'exprime en termes des vecteurs unitaires associés aux coordonnées polaires

$$\begin{cases} \mathbf{u}_r = \cos \theta \mathbf{u}'_x + \sin \theta \mathbf{u}'_y \\ \mathbf{u}_\theta = -\sin \theta \mathbf{u}'_x + \cos \theta \mathbf{u}'_y \end{cases} \quad (3.80)$$

d'après

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \quad (3.81)$$

Comme le vecteur de position est lui-même donné par $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$, le moment cinétique prend la forme

$$\mathbf{L} = m r^2 \dot{\theta} \mathbf{u}'_z \quad (3.82)$$

puisque $\mathbf{u}'_z = \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta$. La conservation du moment cinétique dans un champ de force central fournit donc l'équation

$$m r^2 \dot{\theta} = L = \text{constante} \quad (3.83)$$

qui s'interprète comme suit.

L'aire balayée par le vecteur de position $\mathbf{r}(t)$ pendant le laps de temps Δt est égale à l'aire du triangle joignant l'origine O , le point $\mathbf{r}(t)$ au temps t et le point $\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta \mathbf{r}$ au

temps $t + \Delta t$ (voir fig. 3.13b), si l'on néglige l'incurvation de la trajectoire pour Δt suffisamment petit:

$$\Delta S = \frac{1}{2} \|\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r}\| + O(\Delta t^2) \quad (3.84)$$

En divisant par Δt et en prenant la limite $\Delta t \rightarrow 0$, on définit la *vitesse aréolaire*:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \|\mathbf{r} \times \mathbf{v}\| \quad (3.85)$$

puisque $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$. La vitesse aréolaire est l'aire balayée par unité de temps par la trajectoire et elle apparaît proportionnelle au module du moment cinétique:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\|\mathbf{L}\|}{2m} = \frac{L}{2m} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \quad (3.86)$$

Nous avons donc la

Loi des aires:

La vitesse aréolaire est constante au cours du mouvement d'une particule matérielle dans un champ de force central où son moment cinétique est conservé.

3.9 Energie

3.9.1 Travail et puissance

Le *travail* (en anglais, *work*) d'une force \mathbf{F} qui agit sur un point matériel se déplaçant le long d'un chemin $\mathbf{r}(\lambda)$ partant de $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(\lambda_1)$ et aboutissant à $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(\lambda_2)$ est défini par l'intégrale du produit scalaire de la force avec le déplacement:

$$W \equiv \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.87)$$

Le travail est une forme d'*énergie*. L'unité du travail et de l'énergie est le Joule (symbole J):

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \quad (3.88)$$

Le travail est négatif si la force s'oppose au déplacement sinon il est positif. Pour cette raison, le travail (3.87) représente le gain d'énergie réalisé par le corps exerçant la force en question, tandis que $-W$ est le coût énergétique de cette force.

Dans le cas où le chemin suivi par le point matériel est une trajectoire $\mathbf{r}(t)$ partant de $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ et arrivant à $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$, le travail de la force peut s'exprimer en termes de la vitesse d'après

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \quad (3.89)$$

Le travail par unité de temps de la force est appelée la *puissance*

$$P \equiv \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (3.90)$$

dont l'unité est le Watt (symbole W):

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J s}^{-1} = 1 \text{ N m s}^{-1} = 1 \text{ kg m}^2 \text{s}^{-3} \quad (3.91)$$

Il s'agit donc d'une énergie par unité de temps.

3.9.2 Energie cinétique

D'après la 2ème loi de Newton, le travail d'une force agissant sur un corps matériel en mouvement sous l'effet de cette même force peut s'exprimer comme suit:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} m \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt = \left[\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \right]_{t_1}^{t_2} = T_2 - T_1 \quad (3.92)$$

où l'on a introduit l'*énergie cinétique*

$$T \equiv \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \quad (3.93)$$

L'énergie cinétique est d'autant plus grande que la particule se déplace vite. Le travail d'une force le long d'un arc de trajectoire est donc égal au gain d'énergie cinétique de la particule. L'énergie cinétique a pour unité le Joule comme pour le travail.

3.9.3 Energie potentielle

Soit un champ de force positionnelle $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$. Supposons que le travail de cette force s'annule pour tous les chemins fermés:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (3.94)$$

D'après le théorème du rotationnel, cette condition est équivalente à

$$\iint \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.95)$$

où l'intégrale s'étend à toutes les surfaces qui s'appuient sur le chemin fermé de l'intégrale (3.94) de sorte que le champ de force est *irrotationnel*: $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. D'après le théorème du gradient, il existe alors un champ scalaire dont le champ de force est le gradient. En choisissant un signe opposé, nous avons

$$\mathbf{F} = -\nabla U \quad (3.96)$$

où le champ scalaire $U(\mathbf{r})$ est appelé l'*énergie potentielle*. Si une force dérive d'un potentiel selon l'éq. (3.96), elle est appelée une *force potentielle*. On notera qu'une force potentielle est irrotationnelle et réciproquement. En effet, l'éq. (3.95) implique (3.94) de sorte que le travail d'une telle force ne dépend pas du chemin suivi mais seulement de ses extrémités, ce qui permet de définir un potentiel à une constante près:

$$U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (3.97)$$

Le travail d'une force potentielle est donc égal à la différence d'énergie potentielle entre les points de départ et d'arrivée:

$$W_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \nabla U \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dU = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2) \quad (3.98)$$

Le travail est négatif si l'énergie potentielle au point d'arrivée est plus élevée qu'au point de départ de sorte qu'un travail a dû être fourni au corps matériel. Un exemple est donné par la force de gravité à la surface terrestre, $\mathbf{F} = m \mathbf{g}$, où l'accélération de gravité est verticale et dirigée vers le bas, $\mathbf{g} = -g \mathbf{u}_z$ avec $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. D'après l'éq. (3.97), l'énergie potentielle est donnée par

$$U(\mathbf{r}) = -m \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} = m g z \quad (3.99)$$

à une constante d'intégration près. Dans ce cas, l'énergie potentielle augmente avec la hauteur. Au sommet de l'Everest (8880 m), un litre d'eau aurait une énergie potentielle d'environ 87113 J de plus qu'au niveau de la mer.

On remarquera qu'il existe aussi des forces potentielles dépendant explicitement du temps comme c'est le cas pour une particule chargée dans un champ électrique uniforme et oscillant dans le temps. Pour ces forces, l'énergie potentielle dépend du temps $U = U(\mathbf{r}, t)$. Si une particule suit la trajectoire $\mathbf{r}(t)$, le travail de la force ne coïncide plus avec la différence d'énergie

potentielle puisque

$$\begin{aligned}
 U_2 - U_1 &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} U[\mathbf{r}(t), t] dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{v} \cdot \nabla U + \frac{\partial U}{\partial t} \right) dt \\
 &= - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial U}{\partial t} dt \\
 &= -W_{12} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial U}{\partial t} dt
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

Le travail d'une telle force est donc égal à la différence d'énergie potentielle plus l'intégrale sur le temps de la dérivée partielle du potentiel vis-à-vis de sa dépendance explicite en le temps.

3.9.4 Energie totale

Soit une particule matérielle en mouvement dans un champ de force potentielle, l'*énergie totale* de la particule se définit comme la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle:

$$E \equiv T + U = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + U(\mathbf{r}, t) \tag{3.101}$$

avec une dépendance éventuelle de l'énergie totale en le temps. L'équation d'évolution temporelle de l'énergie totale s'obtient en dérivant par rapport au temps et en utilisant l'équation de Newton (2ème loi):

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= m \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \cdot \nabla U + \frac{\partial U}{\partial t} \\
 &= \underbrace{\mathbf{v} \cdot (m \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{F})}_{=0} + \frac{\partial U}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

de sorte que

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} \tag{3.103}$$

Si l'énergie potentielle ne dépend pas explicitement du temps, l'énergie totale reste donc constante au cours du temps et nous obtenons le

Théorème de conservation de l'énergie totale:

L'énergie totale d'une particule matérielle en mouvement dans un champ de force potentielle est conservée si l'énergie potentielle est indépendante du temps.

Une force potentielle indépendante du temps est appelée une *force conservatrice*.

On note que l'énergie totale joue un rôle central en mécanique car elle détermine univoquement le mouvement d'une particule matérielle dans un champ de force potentielle même si ce champ n'est pas indépendant du temps. En effet, si l'énergie totale est considérée comme une fonction $E = E(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ de la position, de la vitesse et du temps, l'équation de Newton $m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla U$ peut se déduire de cette fonction d'après

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{m} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{v}} \\ m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial \mathbf{r}} \end{cases} \quad (3.104)$$

Ce système d'équations prend une forme plus élégante si l'on remplace la vitesse \mathbf{v} par l'impulsion $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ de la particule. L'énergie totale devient alors une fonction de la position, de l'impulsion et du temps appelée la *fonction hamiltonienne*:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r}, t) \quad (3.105)$$

et les équations du mouvement deviennent les *équations d'Hamilton*:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \end{cases} \quad (3.106)$$

qui seront étudiées en détail plus loin.

3.9.5 Forces conservatives versus forces dissipatives

Comme le montre les différents exemples de force présentés dans la section 3.2, il existe des forces qui dépendent de la vitesse comme la force magnétique de Lorentz ou la force de frottement (3.15) due à la viscosité qu'un fluide exerce sur un corps en mouvement. Considérons ici le cas où une force proportionnelle à la vitesse s'ajoute à une force potentielle indépendante du temps:

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} \quad (3.107)$$

avec le tenseur C_{ij} . Dans ce cas, l'énergie totale de la particule

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + U(\mathbf{r}) \quad (3.108)$$

évolue dans le temps selon

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \mathbf{v} \cdot (m\dot{\mathbf{v}} + \nabla U) \\ &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{F} + \nabla U) \\ &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{v}) = C_{ij}v_i v_j\end{aligned}\quad (3.109)$$

Si on décompose le tenseur C_{ij} en sa partie symétrique et sa partie antisymétrique:

$$C_{ij} = C_{ij}^S + C_{ij}^A \quad (3.110)$$

avec

$$C_{ij}^S = \frac{1}{2}(C_{ij} + C_{ji}) \quad (3.111)$$

$$C_{ij}^A = \frac{1}{2}(C_{ij} - C_{ji}) \quad (3.112)$$

nous constatons que la variation temporelle de l'énergie totale ne dépend que de la partie symétrique

$$\frac{dE}{dt} = C_{ij}^S v_i v_j \quad (3.113)$$

Par conséquent, une force linéaire en la vitesse au travers d'un tenseur antisymétrique conserve l'énergie totale de la particule. Comme un tenseur antisymétrique s'exprime par le produit vectoriel d'un vecteur axial, nous concluons que la force magnétique de Lorentz est une force conservatrice puisque, dans ce cas,

$$C_{ij} = q \epsilon_{ijk} B_k = -q B_k \epsilon_{jik} = -C_{ji} = C_{ij}^A \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = -\mathbf{C}^T = -q \mathbf{B} \times \quad (3.114)$$

En effet, la puissance de la force de Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ s'annule toujours puisque cette force reste perpendiculaire à la vitesse de la particule: $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$, tout au long de sa trajectoire.

Par contre, la force de frottement d'un fluide visqueux (3.15) est donnée par un tenseur symétrique

$$C_{ij} = -\zeta \delta_{ij} = C_{ji} = C_{ij}^S \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^T = -\zeta \mathbf{1} \quad (3.115)$$

où $\mathbf{1}$ est le tenseur identité donné par la matrice unité 3×3 . Dans ce cas, l'énergie totale diminue au cours du temps tant que le corps est en mouvement dans le fluide

$$\frac{dE}{dt} = -\zeta \mathbf{v}^2 \leq 0 \quad (3.116)$$

avec l'égalité si et seulement si le corps est au repos $\mathbf{v} = 0$. On parlera alors d'une *force dissipative* puisqu'elle dissipe de l'énergie à un taux égal à la puissance $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\zeta \mathbf{v}^2 \leq 0$.

On remarquera que la force de frottement (3.18) entre deux solides en contact est également dissipative puisque cette force est toujours opposée à la vitesse et qu'elle n'est donc pas potentielle à la cause de cette dépendance en la vitesse. Par ailleurs, les forces actives engendrées par les moteurs ne conservent pas non plus l'énergie totale du corps en mouvement puisqu'elles tendent à l'augmenter. Il faut noter que les systèmes avec des forces dissipatives ou des forces actives n'admettent pas de description en termes d'une fonction hamiltonienne et des équations d'Hamilton. Cependant, la description hamiltonienne du mouvement s'applique aux systèmes avec des forces potentielles $\mathbf{F} = -\nabla U$ ou des forces conservatrices dépendant de la vitesse comme la force de Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (voir plus loin).

3.10 Systèmes de particules matérielles

Considérons à présent un ensemble de particules matérielles en mouvement (non-relativiste) sous l'effet de forces extérieures et/ou de forces d'interaction mutuelle entre les particules. Ces N particules ont des masses $\{m_i\}_{i=1}^N$, des positions $\{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^N$ et des vitesses $\{\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i\}_{i=1}^N$. La masse totale $M = \sum_{i=1}^N m_i$ est conservée, $\frac{dM}{dt} = 0$, par le principe de conservation de la masse totale. D'après la 2ème loi, le mouvement de chaque particule est décrit par l'équation de Newton

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} + \sum_{j(\neq i)} \mathbf{F}_{ij} \quad (3.117)$$

où $\mathbf{F}_i^{(\text{ext})}$ est la force extérieure agissant sur la particule i et \mathbf{F}_{ij} sont les forces d'interaction dues aux autres particules j composant le système et agissant sur la particule i (voir fig. 3.14). Selon le postulat de Stevin, la force totale agissant sur la particule i est la somme vectorielle de toutes les forces d'interaction et de la force extérieure comme exprimé dans l'éq. (3.117). On notera qu'une particule n'exerce pas de force sur elle-même, $\mathbf{F}_{ii} = 0$.

D'après le principe d'action-réaction (3ème loi de Newton), les forces d'interaction s'opposent deux à deux et sont dirigées sur la droite joignant les particules:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \quad (3.118)$$

$$\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij} = 0 \quad (3.119)$$

avec $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Ces conditions sont satisfaites, en particulier, si les forces d'interaction sont potentielles et si le potentiel ne dépend que de la distance entre les particules:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial U_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} \quad \text{avec} \quad U_{ij} = U(r_{ij}) \quad (3.120)$$

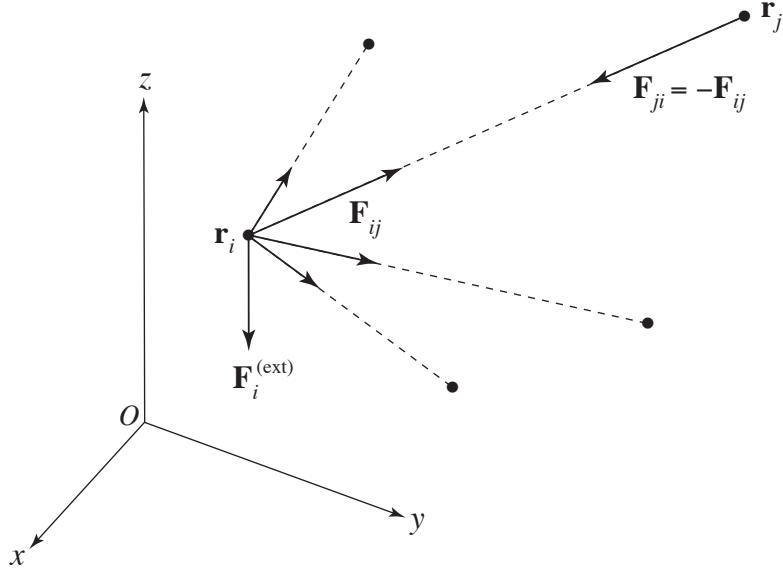


Figure 3.14: Schéma d'un système de particules matérielles sur lesquelles agissent des forces extérieures et des forces d'interaction mutuelle.

avec $r_{ij} = \|\mathbf{r}_{ij}\| = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| = r_{ji}$. En effet, nous avons dans ce cas:

$$\mathbf{F}_{ij} = -U'(r_{ij}) \frac{\partial \mathbf{r}_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} = -U'(r_{ij}) \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|} \quad \text{avec} \quad U'(r) = \frac{dU(r)}{dr} \quad (3.121)$$

de sorte que

$$\mathbf{F}_{ji} = -U'(r_{ji}) \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|} = +U'(r_{ij}) \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|} = -\mathbf{F}_{ij} \quad (3.122)$$

et

$$\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij} = -\frac{1}{r_{ij}} U'(r_{ij}) \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{r}_{ij} = 0 \quad (3.123)$$

Le principe d'action-réaction est donc satisfait pour des forces centrales comme la force gravitationnelle entre deux particules matérielles, la force électrique coulombienne entre deux particules chargées, ou les forces moléculaires entre les atomes au sein des matériaux.

Comme le mouvement de chaque particule est régi par l'équation de Newton (3.117) et que celle-ci dépend des coordonnées des autres particules, l'évolution temporelle de l'ensemble des N particules sera décrite par un système de $3N$ équations différentielles ordinaires du 2ème

ordre en le temps

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_1^{(\text{ext})} + \sum_{j(\neq 1)} \mathbf{F}_{1j} \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_2^{(\text{ext})} + \sum_{j(\neq 2)} \mathbf{F}_{2j} \\ \vdots \\ m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} + \sum_{j(\neq i)} \mathbf{F}_{ij} \\ \vdots \end{array} \right. \quad (3.124)$$

Sous les conditions du théorème de Cauchy, la trajectoire de toutes les particules $\{\mathbf{r}_i(t)\}_{i=1}^N$ est une solution des N équations de Newton couplées et cette solution est unique si elle part des conditions initiales données par les positions initiales et les vitesses initiales $\{\mathbf{r}_i(t_0) = \mathbf{r}_{i0}, \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}(t_0) = \mathbf{v}_{i0}\}_{i=1}^N$, au temps initial t_0 . Par conséquent, le système de particules évolue selon une loi déterministe comme exprimé par Pierre Simon Laplace (1749-1827) dans l'introduction de son livre sur les probabilités [9]:

“Tous les événements, ceux même qui par leur petiteur, semblent ne pas tenir aux grandes lois de la nature, en sont une suite aussi nécessaire que les révolutions célestes. Une intelligence qui pour un instant donné, connaît toutes les forces dont la matière est animée, ainsi que la position et la vitesse de chacune de ses molécules... embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome. Pour une semblable intelligence, rien ne serait irrégulier, et la courbe décrite par une simple molécule d'air ou de vapeurs, paraîtrait réglée d'une manière aussi certaine, que l'est pour nous l'orbite du Soleil. Mais dans l'ignorance où nous sommes de l'immensité des données nécessaires à la solution de ce grand problème,... nous attribuons les phénomènes qui nous paraissent arriver et se succéder sans aucun ordre, à des causes variables et cachées, dont l'action est désignée par le mot hasard, mot qui n'est au fond que l'expression de notre ignorance.”

ou encore Henri Poincaré (1854-1912) également dans son livre sur les probabilités [10]:

“Une cause très petite qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissons exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à un instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation

qu'approximativement... Il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les dernières. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit."

Ces deux auteurs apportent ainsi une explication des origines du hasard sur la base du déterminisme des lois de Newton. D'une part, Laplace relève la difficulté de connaître toutes les positions et les vitesses dans des systèmes contenant des nombres gigantesques de molécules. D'autre part, Poincaré énonce clairement la propriété de sensibilité aux conditions initiales caractérisant les comportements chaotiques qu'il a lui-même découverts. Cette sensibilité aux conditions initiales est une difficulté supplémentaire qui peut déjà se manifester dans de petits systèmes. Tant Poincaré que Laplace font référence à une approximation ou ignorance dans notre connaissance des conditions initiales des équations déterministes de Newton pour expliquer le hasard étudié dans la théorie des probabilités. On remarquera que pareille approximation ou ignorance tient en général au fait que les conditions initiales sont des nombres réels formant un continuum et dont la connaissance se base sur la notion de coupure de Dedekind impliquant une suite infinie d'approximations successives. Cette difficulté serait résolue si les variables prenaient leur valeur sur les nombres entiers ou rationnels. Cependant, une irrésolution inhérente affecte toute utilisation des nombres réels, a fortiori, dans les systèmes chaotiques où la sensibilité aux conditions initiales limite les possibilités de prévision de leur évolution temporelle.

3.11 Quantité de mouvement totale

La quantité de mouvement totale ou impulsion totale est la somme vectorielle des impulsions $\{\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i\}_{i=1}^N$ de chaque particule composant le système:

$$\mathbf{P} \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \quad (3.125)$$

L'évolution temporelle de cette quantité se déduit des équations de Newton (3.117) comme suit:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} + \sum_{i=1}^N \sum_{j(\neq i)=1}^N \mathbf{F}_{ij} \quad (3.126)$$

D'après le principe d'action-réaction, la double somme sur les forces d'interaction s'annulent identiquement:

$$\sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} (\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} (\mathbf{F}_{ij} - \mathbf{F}_{ij}) = 0 \quad (3.127)$$

Par conséquent, l'impulsion totale évolue sous l'effet de la force extérieure totale agissant sur tout le système:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} \equiv \mathbf{F}^{(\text{ext})} \quad (3.128)$$

Ce résultat concerne non seulement le système solaire en révolution dans la Galaxie ou un système planétaire comme Jupiter et ses satellites en révolution autour du Soleil, mais aussi des systèmes avec des forces de cohésion plus intenses entre les particules comme c'est le cas d'un objet solide où les atomes ont des mouvements limités les uns par rapport aux autres alors que le solide peut se trouver en mouvement accéléré par le champ de gravité terrestre. Si ce dernier exemple suggère que le système se comporte lui-même comme un tout, la comparaison de l'éq. (3.128) pour le système avec l'éq. (3.74) pour une particule isolée montre que ce résultat est général. Cette similitude dans les descriptions newtoniennes d'un système de particules et d'une particule isolée peut être complétée en introduisant la position du *centre de masse* du système d'après

$$\mathbf{R} \equiv \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (3.129)$$

qui est la position moyenne obtenue en pondérant la position de chaque particule par sa masse. La vitesse du centre de la masse:

$$\mathbf{V} \equiv \dot{\mathbf{R}} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (3.130)$$

est reliée à l'impulsion totale du système et à la masse totale $M = \sum_{i=1}^N m_i$ selon

$$\mathbf{P} = M \mathbf{V} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad (3.131)$$

En conséquence, le centre de masse du système de particules matérielles obéit lui-même à l'équation de Newton

$$M \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F}^{(\text{ext})} \quad (3.132)$$

La force agissant sur le centre de la masse du système est la somme de toutes les forces en vertu du postulat de Stevin et cette somme est égale à la force extérieure totale. Si celle-ci

s'annule $\mathbf{F}^{(\text{ext})} = 0$, le centre de masse suit un mouvement rectiligne uniforme ou reste au repos, $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t$, ce qui est consistant vis-à-vis du principe d'inertie (1ère loi).

Enfin, l'éq. (3.128) établit le résultat fondamental suivant:

Théorème de conservation de la quantité de mouvement totale:

La quantité de mouvement totale (3.125) d'un système de particules matérielles est une constante du mouvement, $\mathbf{P} = \text{cst}$, si la force extérieure totale agissant sur le système est nulle, $\mathbf{F}^{(\text{ext})} = 0$, c'est-à-dire si le système est isolé.

Ce théorème s'applique aux collisions élastiques ou inélastiques entre particules et permet aussi d'obtenir l'équation du mouvement d'un véhicule à réaction qui perd sa masse comme une fusée (voir plus loin).

3.12 Moment cinétique total

Le moment cinétique total d'un système de particules matérielles vis-à-vis de l'origine du repère choisi est défini comme la somme vectorielle des moments cinétiques de chaque particule vis-à-vis de cette origine:

$$\mathbf{L} \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \quad (3.133)$$

L'évolution temporelle du moment cinétique total est une conséquence du mouvement des particules décrit par l'équation newtonienne (3.117) d'après

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^N \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i}_{=0} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{F}^{(\text{ext})} + \sum_{j(\neq i)} \mathbf{F}_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} + \sum_{i \neq j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} \end{aligned} \quad (3.134)$$

A la première ligne, le premier terme s'annule car il s'agit du produit vectoriel de deux vecteurs parallèles puisque $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i$ est la vitesse et l'impulsion lui est proportionnelle, $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ de sorte que $\dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i = 0$. D'après le principe d'action-réaction, le dernier terme de la

troisième ligne s'annule identiquement:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \neq j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}) \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij} = 0
 \end{aligned} \tag{3.135}$$

Par conséquent, le moment cinétique total évolue dans le temps sous l'effet du couple total des forces extérieures:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} = \sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i^{(\text{ext})} \equiv \mathbf{N}^{(\text{ext})} \tag{3.136}$$

On retrouve donc pour le système dans son ensemble une équation analogue à l'éq. (3.78) pour une seule particule matérielle. Pour le système total, nous avons le

Théorème de conservation du moment cinétique total:

Le moment cinétique total (3.133) d'un système de particules matérielles est une constante du mouvement, $\mathbf{L} = \text{cst}$, si le couple total des forces extérieures agissant sur le système est nul, $\mathbf{N}^{(\text{ext})} = 0$.

On remarquera que l'annulation du couple total des forces extérieures se produit non seulement si le système est isolé et aucune force extérieure n'agit sur lui ($\mathbf{F}_i^{(\text{ext})} = 0$) mais encore si toutes les forces extérieures sont centrales et émanent d'un seul et même centre situé à l'origine des coordonnées $\mathbf{F}_i^{(\text{ext})} = \|\mathbf{F}_i^{(\text{ext})}\| \mathbf{r}_i / \|\mathbf{r}_i\|$. Dans ce cas, le couple de la force extérieure agissant sur chaque particule s'annule car $\mathbf{N}_i^{(\text{ext})} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} = \|\mathbf{F}_i^{(\text{ext})}\| (\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_i) / \|\mathbf{r}_i\| = 0$ et le couple total des forces extérieures s'annule par voie de conséquence: $\mathbf{N}^{(\text{ext})} = \sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i^{(\text{ext})} = 0$. Une telle situation se rencontre par exemple si l'origine est la source fixe d'un champ de gravitation ou encore si toutes les particules sont confinées dans une cavité sphérique centrée sur l'origine.

Le moment cinétique total peut toujours se décomposer en deux parties: la première est le moment cinétique du mouvement du centre de masse par rapport à l'origine du repère inertiel considéré et la seconde est le moment cinétique total du système de particules par rapport à son centre de masse. En effet, nous pouvons introduire un repère centré sur le centre de masse. Dans ce repère, la position et la vitesse de chaque particule sont données par

$$\mathbf{r}'_i \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{R} \tag{3.137}$$

$$\mathbf{v}'_i \equiv \mathbf{v}_i - \mathbf{V} \tag{3.138}$$

avec $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ et elles satisfont les relations

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = 0 \quad (3.139)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i = 0 \quad (3.140)$$

en vertu de la définition (3.129) du centre de masse. Les relations (3.139) et (3.140) traduisent le fait que le centre de masse se retrouve à l'origine dans le nouveau repère. Le moment cinétique total s'écrit donc

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i) \\ &= M \mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i \right)}_{=0} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \right)}_{=0} \times \mathbf{V} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i \end{aligned} \quad (3.141)$$

avec la masse totale $M = \sum_{i=1}^N m_i$. Par les éqs. (3.139) et (3.140), les deux termes croisés s'annulent et l'on obtient la décomposition annoncée:

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i \equiv \mathbf{L}_{\text{c.m.}} + \mathbf{L}' \quad (3.142)$$

où $\mathbf{L}_{\text{c.m.}} \equiv \mathbf{R} \times \mathbf{P}$ est le moment cinétique du centre de masse par rapport à l'origine du repère inertiel considéré et \mathbf{L}' est le moment cinétique total calculé par rapport au centre de masse \mathbf{R} . Le moment cinétique du centre de masse évolue dans le temps selon

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{c.m.}}}{dt} = \underbrace{\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{P}}_{=0} + \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}^{(\text{ext})} \quad (3.143)$$

où le premier terme s'annule puisque $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}$ et $\mathbf{P} = M\mathbf{V}$ et le second terme est donné par l'éq. (3.128). Par conséquent, nous obtenons le couple de la force extérieure s'exerçant sur le centre de masse:

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{c.m.}}}{dt} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}^{(\text{ext})} \equiv \mathbf{N}_{\text{c.m.}}^{(\text{ext})} \quad (3.144)$$

Par ailleurs, le moment cinétique \mathbf{L}' évolue sous l'effort du couple total des forces extérieures, couple calculé dans le repère du centre de masse puisque

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} - \frac{d\mathbf{L}_{\text{c.m.}}}{dt} = \mathbf{N}^{(\text{ext})} - \mathbf{N}_{\text{c.m.}}^{(\text{ext})} \equiv \mathbf{N}'^{(\text{ext})} \quad (3.145)$$

avec

$$\mathbf{N}'^{(\text{ext})} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} \quad (3.146)$$

Si le système est isolé, c'est-à-dire qu'aucune force extérieure n'agit sur lui, alors ces deux moments cinétiques sont conservés séparément:

$$\mathbf{L}_{\text{c.m.}} = \text{cst} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}' = \text{cst} \quad \text{si} \quad \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} = 0 \quad \forall i \quad (3.147)$$

Si le système est isolé, le repère du centre de masse est un repère inertiel car il suit un mouvement rectiligne uniforme. Par conséquent, le théorème de conservation du moment cinétique total y est valable comme dans le repère de l'observateur en accord avec le principe de relativité galiléenne. A cet égard, les théorèmes de conservation de l'impulsion totale et du moment cinétique total ont un status de lois de la nature.

3.13 Energie totale

Nous supposerons ici que les forces extérieures et celles d'interaction sont potentielles en excluant la possibilité de forces dépendant de la vitesse et, notamment, de forces dissipatives. Il existe alors des fonctions d'énergie potentielle, $U_{ij} = U(r_{ij}, t)$ et $U_i^{(\text{ext})} = U^{(\text{ext})}(\mathbf{r}_i, t)$ dont dérivent les forces correspondantes:

$$\mathbf{F}_i^{(\text{ext})} = -\frac{\partial U_i^{(\text{ext})}}{\partial \mathbf{r}_i} = -\nabla U_i^{(\text{ext})} \quad (3.148)$$

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial U_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} = -\nabla U_{ij} \quad (3.149)$$

Les forces d'interaction obéissent au principe d'action-réaction (3ème loi) si l'énergie potentielle U_{ij} ne dépend que de la distance r_{ij} entre les particules.

Sous de telles conditions, l'énergie totale du système est définie selon

$$E = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 + U_i^{(\text{ext})} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij} \quad (3.150)$$

Les derniers termes représentant l'énergie potentielle totale des forces d'interaction entre chaque paire de particules. L'énergie potentielle d'une paire $i-j$ de particules peut être vue comme l'énergie potentielle du lien établi entre ces particules par la force d'interaction. L'énergie potentielle totale est donc donnée par la moitié de la double somme sur les particules qui est égale à la simple somme sur les liens (puisque $U_{ii} = 0$):

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} U_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} U_{ij} = \sum_{\text{liens } i-j} U_{ij} \quad (3.151)$$

Ce raisonnement explique la présence du facteur $\frac{1}{2}$ dans l'éq. (3.150).

D'après les équations de Newton (3.117), l'évolution temporelle de l'énergie totale s'obtient comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \sum_{i=1}^N \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_i + \frac{\partial U_i^{(\text{ext})}}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial U_i^{(\text{ext})}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left(\frac{\partial U_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial U_{ij}}{\partial \mathbf{r}_j} \cdot \dot{\mathbf{r}}_j + \frac{\partial U_{ij}}{\partial t} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_i - \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} \cdot \mathbf{v}_i + \frac{\partial U_i^{(\text{ext})}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left(-\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i - \mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{v}_j + \frac{\partial U_{ij}}{\partial t} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \underbrace{\left(m_i \dot{\mathbf{v}}_i - \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} - \sum_{j(\neq i)} \mathbf{F}_{ij} \right)}_{=0} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial U_i^{(\text{ext})}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{\partial U_{ij}}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.152)$$

De la deuxième à la troisième ligne, nous avons permué i et j dans

$$\sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{v}_j = \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i \quad (3.153)$$

ce qui est permis puisqu'il s'agit d'indices de sommation. Ces deux termes sont donc égaux, ce qui élimine un facteur $\frac{1}{2}$. A la troisième ligne, ces termes sont placés dans la première somme qui s'annule identiquement d'après l'équation de Newton (3.117) et l'on trouve que

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U_i^{(\text{ext})}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{\partial U_{ij}}{\partial t} \quad (3.154)$$

Nous avons donc le

Théorème de conservation de l'énergie totale:

Dans un système mécanique où les forces sont potentielles et ne dépendent pas de la vitesse, l'énergie totale est une constante du mouvement, $E = \text{cst}$, si toutes les énergies potentielles sont indépendantes du temps, $\partial_t U_i^{(\text{ext})} = 0$ et $\partial_t U_{ij} = 0$, c'est-à-dire si le système est isolé.

On remarquera que l'énergie totale d'un système isolé se sépare en l'énergie cinétique de son centre de masse et son énergie totale calculée dans le repère du centre de masse. Tout d'abord, l'énergie cinétique totale se décompose comme suit:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i)^2 = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{V}}_{=0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}'_i^2 \quad (3.155)$$

en termes des vitesses (3.138) définies par rapport au centre de masse. D'après l'éq. (3.140), nous avons donc

$$T = T_{\text{c.m.}} + T' \quad (3.156)$$

avec

$$T_{\text{c.m.}} = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 \quad (3.157)$$

$$T' = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}'_i^2 \quad (3.158)$$

Par ailleurs, l'énergie potentielle totale des forces d'interaction dépend des différences de position des particules $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j$ et ne dépend donc pas de la position du centre de masse. Par conséquent, nous avons la décomposition

$$E = T_{\text{c.m.}} + E' \quad \text{avec} \quad E' = T' + U' \quad \text{et} \quad U' = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij} \quad (3.159)$$

pour un système isolé en l'absence de force extérieure.

Par contre, si le système est soumis à des forces extérieures, leur énergie potentielle, $U^{(\text{ext})} = \sum_{i=1}^N U_i^{(\text{ext})}$ ne se sépare pas dans tous les cas en une fonction de \mathbf{R} et une autre ne dépendant que des positions $\{\mathbf{r}'_i\}_{i=1}^N$. La séparation de l'énergie totale est par exemple possible si la force extérieure est constante pour chaque particule car, dans ce cas,

$$U^{(\text{ext})} = - \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} \cdot \mathbf{r}_i = - \mathbf{F}^{(\text{ext})} \cdot \mathbf{R} - \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} \cdot \mathbf{r}'_i = U_{\text{c.m.}}^{(\text{ext})} + U'^{(\text{ext})} \quad (3.160)$$

de sorte que $E = E_{\text{c.m.}} + E'$ avec $E_{\text{c.m.}} = T_{\text{c.m.}} + U_{\text{c.m.}}^{(\text{ext})}$ et $E' = T' + U'^{(\text{ext})}$. Pour un système dans le champ uniforme de gravité terrestre, le potentiel extérieur se réduit même à celui du centre de masse puisque $U^{(\text{ext})} = \sum_{i=1}^N m_i g z_i = MgZ = U_{\text{c.m.}}^{(\text{ext})}$ et $U'^{(\text{ext})} = 0$. Cependant, il existe des forces extérieures pour lesquelles une telle séparation n'est pas envisageable.

Comme pour un système à une seule particule, nous pouvons ici aussi introduire la *fonction hamiltonienne* en remplaçant la vitesse de chaque particule par son impulsion dans l'énergie totale (3.150):

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + U_i^{(\text{ext})} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij} \quad (3.161)$$

Dans cette formulation, le mouvement est régi par les *équations d'Hamilton*:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \\ \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.162)$$

Pour la fonction hamiltonienne (3.161), ces équations s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\mathbf{p}_i}{m_i} \\ \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\nabla U_i^{(\text{ext})} - \sum_{j(\neq i)} \nabla U_{ij} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.163)$$

et l'on retrouve bien les équations de Newton du système

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} + \sum_{j(\neq i)} \mathbf{F}_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.164)$$

La formulation hamiltonienne est donc équivalente à la formulation newtonienne pour les systèmes à forces potentielles.

3.14 Mécanique et thermodynamique

Grâce au théorème de conservation de l'énergie totale pour un système isolé, la mécanique newtonienne permet de justifier le premier principe de la thermodynamique selon lequel l'énergie totale d'un système est toujours conservé et ne peut varier que sous l'effet d'échanges d'énergie avec son environnement, ce qui est le cas si le système est soumis à des forces extérieures dépendant du temps.

Si E désigne l'énergie sous toutes ses formes possibles (mécanique, chimique ou nucléaire) dans un système en contact avec son environnement, la variation dE de son énergie sur un laps de temps dt se décompose a priori en une contribution interne $d_i E$ et une contribution due aux échanges d'énergie avec l'environnement $d_e E$:

$$dE = d_i E + d_e E \quad (3.165)$$

Par le premier principe de thermodynamique, la contribution interne est toujours nulle:

$$\text{1er principe de la thermodynamique: } d_i E = 0 \quad (3.166)$$

car il n'y a ni source, ni perte d'énergie à l'intérieur du système. Les seules variations possibles de l'énergie du système sont celles dues aux échanges avec l'extérieur: $dE = d_e E$. Si le système est isolé d'un quelconque environnement, les échanges n'existent pas $d_e E = 0$ et l'énergie du système est alors conservée: $dE = 0$.

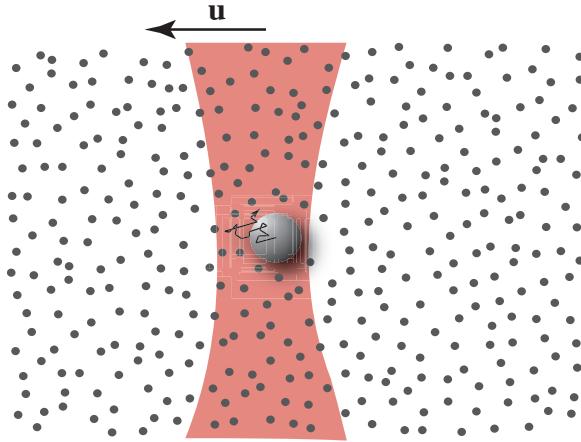


Figure 3.15: Illustration schématique d'une particule brownienne dans un fluide et entraînée par un piège optique se déplaçant à la vitesse \mathbf{u} .

Pour illustrer ce résultat, considérons une particule colloïdale d'un diamètre de l'ordre du micromètre en suspension dans un fluide composé de molécules d'un diamètre de l'ordre de l'Ångström. Le fluide se trouve à la température ambiante dans un récipient qui est grand par rapport au diamètre de la particule colloïdale. Celle-ci y est en mouvement d'agitation thermique appelé mouvement brownien et provoqué par les collisions avec les molécules du fluide environnant (voir fig. 3.15). De plus, la particule brownienne est transparente et confinée dans un piège optique se déplaçant à la vitesse \mathbf{u} . Ce piège optique exerce une force de rappel qui est linéaire en l'écart vis-à-vis de son centre. L'énergie totale du fluide et de la particule colloïdale est donnée par:

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \frac{k}{2} (\mathbf{r} - \mathbf{u} t)^2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 + U_{0i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij} \quad (3.167)$$

où \mathbf{r} , \mathbf{v} et m sont respectivement la position, la vitesse et la masse de la particule colloïdale, k est la constante de rappel du piège optique, m_i et \mathbf{v}_i sont les masses et les vitesses des molécules du fluide, U_{0i} les énergies potentielles d'interaction entre la particule colloïdale et les molécules, et U_{ij} les énergies potentielles d'interaction mutuelle entre les molécules.

Les équations de Newton de la particule brownienne et des molécules du fluide sont données par

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k (\mathbf{r} - \mathbf{u} t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{0i} \quad (3.168)$$

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_{i0} + \sum_{j(\neq i)=1}^N \mathbf{F}_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.169)$$

avec $\mathbf{F}_{i0} = -\mathbf{F}_{0i}$. La dépendance temporelle de la force exercée sur la particule colloïdale par le piège optique a pour effet que l'énergie totale n'est pas conservée

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = \frac{\partial U^{(\text{ext})}}{\partial t} = -k (\mathbf{r} - \mathbf{u} t) \cdot \mathbf{u} \quad (3.170)$$

La force extérieure effectue donc un travail sur le système total au travers de la particule colloïdale. Comme celle-ci est entraînée par le piège optique, elle est en mouvement vis-à-vis du fluide qui s'échauffe progressivement à cause de la viscosité ce qui augmente l'énergie cinétique des molécules autour de la particule colloïdale. Si le récipient contenant le fluide est très grand par rapport à la taille de la particule colloïdale, l'élévation de température qui en résulte est négligeable.

Le bilan d'énergie de la particule brownienne est plus intéressant à considérer. Le système formé par la particule colloïdale est un sous-système du système total et il a pour énergie la somme de son énergie cinétique et de l'énergie potentielle due au piège optique:

$$E \equiv \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \frac{k}{2} (\mathbf{r} - \mathbf{u} t)^2 = T + U^{(\text{ext})} \quad (3.171)$$

Cette énergie représente une partie seulement de l'énergie totale:

$$E_{\text{tot}} = E + E_{\text{fluide}} \quad (3.172)$$

le reste étant l'énergie du fluide et de son interaction avec la particule colloïdale. L'énergie (3.171) de cette dernière évolue dans le temps sous l'effet de l'équation newtonienne (3.168):

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= m \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + k (\mathbf{r} - \mathbf{u} t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{v} \cdot [m \dot{\mathbf{v}} + k (\mathbf{r} - \mathbf{u} t)] - k (\mathbf{r} - \mathbf{u} t) \cdot \mathbf{u} \\ &= \mathbf{v} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{0i} \right) - k (\mathbf{r} - \mathbf{u} t) \cdot \mathbf{u} \\ &= \frac{dQ}{dt} + \frac{dW}{dt} \end{aligned} \quad (3.173)$$

Le premier terme est la puissance du travail des forces moléculaires exercées par les molécules du fluide environnant sur la particule colloïdale lors de leurs collisions:

$$\frac{dQ}{dt} \equiv \mathbf{v} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{0i} \right) = -\mathbf{v} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{i0} \right) \quad (3.174)$$

En utilisant le principe d'action-réaction, ce premier terme est aussi égal à la perte de puissance due au travail des forces moléculaires exercées par la particule colloïdale sur les molécules du fluide. Le deuxième terme est la puissance du travail effectué par le piège optique sur la particule colloïdale:

$$\frac{dW}{dt} \equiv -k(\mathbf{r} - \mathbf{u}t) \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial U^{(\text{ext})}}{\partial t} \quad (3.175)$$

Il faut noter que le mouvement de la particule colloïdale est brownien et donc irrégulier de sorte que les puissances des travaux effectués et l'énergie E fluctuent dans le temps. On peut définir leur moyenne temporelle sur un long intervalle de temps $T \rightarrow \infty$:

$$\bar{X} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \quad (3.176)$$

avec $X = \frac{dE}{dt}, \frac{dQ}{dt}$ ou $\frac{dW}{dt}$. Le piège optique a tendance à échauffer le fluide en se déplaçant, la moyenne temporelle de la puissance de son travail sur la particule colloïdale est positif, $\frac{\bar{dW}}{dt} = \frac{\partial U^{(\text{ext})}}{\partial t} > 0$, ce qui s'interprète en disant que la force extérieure apporte de l'énergie à la particule brownienne. Comme le piège se déplace à vitesse constante \mathbf{u} et que le fluide est visqueux, la position moyenne de la particule colloïdale par rapport au centre du piège est décalée par l'effet de la force moyenne de viscosité $\bar{\mathbf{F}}_{\text{visc}} = -\zeta \mathbf{u}$ qui s'oppose à la force moyenne exercée par le piège optique $\bar{\mathbf{F}}_{\text{opt}} = -k(\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{u}t)$, de sorte que le décalage est donné par

$$\bar{\Delta r} \equiv \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{u}t = -\frac{\zeta}{k} \mathbf{u} \quad (3.177)$$

Dans un régime stationnaire, l'énergie moyenne de la particule devant rester constante $\frac{d\bar{E}}{dt} = 0$, l'énergie apportée par le piège optique est donc dissipée dans le fluide environnant

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = -\frac{d\bar{W}}{dt} = -\zeta \mathbf{u}^2 \leq 0 \quad (3.178)$$

De ce point de vue, $\frac{d\bar{Q}}{dt}$ représente la chaleur dissipée par unité de temps dans le fluide. Cet exemple nous montre que les lois de la mécanique newtonienne permettent de justifier que les variations d'énergie d'un système couplé à un environnement sont dues au travail dW des

forces s'exerçant sur le système et à la chaleur dQ dissipée par le système dans l'environnement (c'est-à-dire deux formes d'échanges d'énergie entre le système et son environnement):

$$dE = dQ + dW \quad (3.179)$$

Cette expression est à la base des considérations de thermodynamique [11, 12].

Si un sous-système subit typiquement de la dissipation d'énergie vers son environnement, par contre, le système total est conservatif s'il est isolé. Dans ce cas, le mouvement de ses particules admet une description hamiltonienne comme nous l'avons montré ci-dessus.

3.15 Mouvement des corps à masse variable

Le théorème de conservation de l'impulsion totale nous permet d'établir l'équation du mouvement d'un corps à masse variable tel qu'un véhicule à réaction comme une fusée. Pour éviter des confusions avec des questions de signe, considérons un système de masse m qui augmente sa masse par l'arrivée d'une masse dm pendant l'intervalle du temps dt et comparons les valeurs de l'impulsion totale à ces deux instants (voir fig. 3.16).

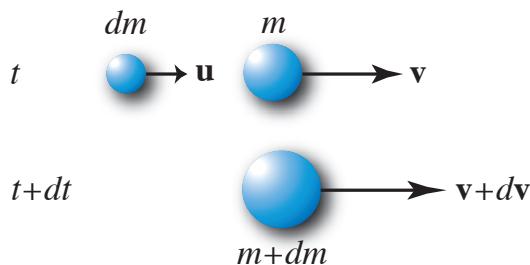


Figure 3.16: Schéma d'un système à masse variable à deux instants successifs.

La masse dm se déplaçant à la vitesse \mathbf{u} alors que la vitesse de la masse m vaut \mathbf{v} , l'impulsion totale à l'instant t est donnée par

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} + dm \mathbf{u} \quad (3.180)$$

A l'instant ultérieur $t+dt$, les masses m et dm sont solidaires l'une de l'autre et elles se déplacent ensemble à la nouvelle vitesse $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, de sorte que l'impulsion devient

$$\mathbf{p} + d\mathbf{p} = (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) \quad (3.181)$$

Le changement d'impulsion totale est donc donné par

$$\begin{aligned} d\mathbf{p} &= (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - (m \mathbf{v} + dm \mathbf{u}) \\ &= m d\mathbf{v} - dm (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (3.182)$$

où le terme quadratique en les différentielles est négligeable dans la limite $dt \rightarrow 0$. Par conséquent, la dérivée de l'impulsion par rapport au temps vaut:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{v}_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} \quad (3.183)$$

où l'on a introduit la vitesse relative de la masse des gaz éjectés par rapport à la fusée:

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} \equiv \mathbf{u} - \mathbf{v} \quad (3.184)$$

Si aucune force extérieure n'agit sur le système, l'impulsion totale est conservée et $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$. Si une force extérieure est présente, l'impulsion varie dans le temps selon $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}^{(\text{ext})}$. Par conséquent, l'équation du mouvement du véhicule à réaction s'écrit

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}^{(\text{ext})} + \mathbf{v}_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} \quad (3.185)$$

où le second terme est la poussée du moteur à réaction qui représente la force exercée par les gaz éjectés vis-à-vis de la fusée en mouvement. La poussée est une caractéristique technique d'un moteur de fusée ou d'avion à réaction.

Références

- [1] W. M. Flinders Petrie, *Prehistoric Egypt* (British School of Archeology in Egypt, University College, London, 1920).
- [2] Page internet du Bureau International des Poids et Mesures:
http://www.bipm.org/fr/si/base_units/kilogram.html
- [3] J. T. Devreese and G. Vanden Berghe, *Magic is no magic: The wonderful world of Simon Stevin* (WIT press, Southampton, 2008).
- [4] D. C. Giancoli, *Physique générale 1: Mécanique et thermodynamique* (De Boeck Université, Bruxelles, 1993) p. 333.
- [5] M. J. Schnitzer, K. Visscher, and S. M. Block, *Force production by single kinesin motors*, Nature Cell Biology **2** (2000) 718.
- [6] La dépendance de la force (3.26) en la secousse $s = \dot{a}$ est rencontrée lorsqu'une particule chargée subit le phénomène de freinage par rayonnement électromagnétique. Voir réf. [7].
- [7] L. Landau et E. Lifchitz, *Physique théorique, tome 2, Théorie des champs* (Editions MIR, Moscou, 1989).
- [8] V. Smirnov, *Cours de mathématiques supérieures, tome II* (Editions MIR, Moscou, 1970).
- [9] Pierre Simon Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, 3e édition (Mme Ve Courcier, Paris, 1820) site internet de Gallica-Math: <http://math-doc.ujf-grenoble.fr/>
- [10] Henri Poincaré, *Calcul des probabilités*, 2e édition (Paris, Gauthier-Villars, 1912: reproduit par les Editions Jacques Gabay, Paris, 1987).
- [11] I. Prigogine, *Introduction à la thermodynamique des processus irréversibles* (Dunod, Paris, 1968).

- [12] D. Kondepudi and I. Prigogine, *Modern Thermodynamics: From Heat Engines to Dissipative Structures* (Wiley, Chichester, 1998).

Chapitre 4

Systèmes d'oscillateurs

Les oscillateurs constituent une classe importante de systèmes mécaniques. Avec le pendule de Galilée, ils sont à l'origine de développements historiques en mécanique. Il existe plusieurs types d'oscillateurs selon la dimension de l'espace dans lequel ils évoluent, selon le nombre de points matériels qui les composent, selon la forme du potentiel où ils présentent leurs mouvements périodiques, ou encore s'ils sont amortis ou subissent une force extérieure dépendant du temps. Nous commencerons par les oscillateurs conservatifs unidimensionnels dans un potentiel quelconque.

4.1 Oscillateurs conservatifs à une dimension

Soit une particule matérielle de masse m évoluant sous l'effet d'une force positionnelle sur une droite Ox :

$$m \ddot{x} = F(x) \quad (4.1)$$

La primitive du champ de force $F(x)$ détermine l'énergie potentielle de la particule:

$$U(x) = U_0 - \int_0^x F(x') dx' \quad (4.2)$$

de sorte que

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \equiv -U'(x) \quad (4.3)$$

En multipliant les deux membres de l'équation de Newton (4.1) par la vitesse \dot{x} et en intégrant sur le temps,

$$\int m \dot{x} \ddot{x} dt = - \int \dot{x} \frac{dU}{dx} dt \quad (4.4)$$

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) dt = - \int \frac{dU}{dt} dt = - \int dU \quad (4.5)$$

nous obtenons la constante du mouvement donnée par l'énergie totale

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E \quad (4.6)$$

qui se compose de l'énergie cinétique $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ et de l'énergie potentielle U : $E = T + U$.

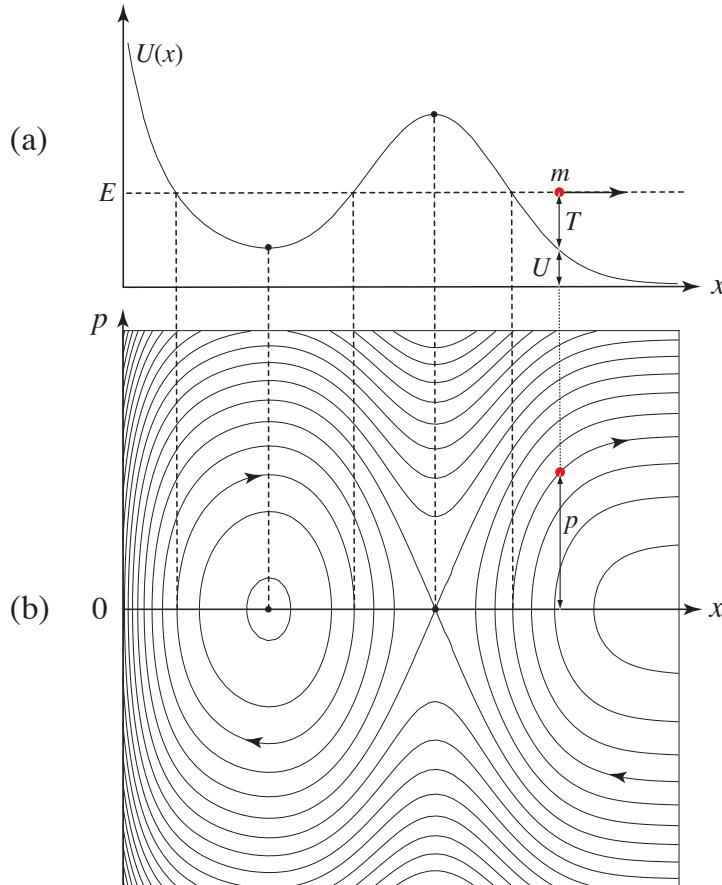


Figure 4.1: (a) Energie potentielle typique $U(x)$ en fonction de la position x . (b) Portrait de phase composé de plusieurs trajectoires dans l'espace des phases formé par le plan Oxp avec l'impulsion $p = m\dot{x}$. Les trajectoires se dirigent toujours vers la droite dans le demi-plan supérieur ($p > 0$) et vers la gauche dans le demi-plan inférieur ($p < 0$). Le potentiel choisi est ici $U(x) = x^{-2} + \exp[-(x - 4)^2]$.

Pour interpréter et utiliser cette relation, représentons l'énergie potentielle en fonction de la position en correspondance avec le graphique de quelques trajectoires typiques dans l'espace des phases ou plan de phase Oxp où $p = m\dot{x}$ est l'impulsion. Ce graphique s'appelle le portrait de phase (voir fig. 4.1). Dans ce but, il est utile de remplacer la vitesse par l'impulsion dans l'énergie totale ce qui donne la fonction hamiltonienne du système unidimensionnel:

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(x) = E \quad (4.7)$$

Nous considérons un potentiel typique présentant un minimum en x_{\min} , un maximum en x_{\max} , divergeant en $x = 0$ et tendant vers une constante pour $x \rightarrow +\infty$. Le minimum et le maximum du potentiel sont des points d'équilibre ou points stationnaires où la vitesse peut s'annuler si l'énergie E est égale à l'énergie potentielle en ce point. La particule n'y subit aucune accélération puisque la dérivée première du potentiel s'y annule de même que la force: $F(x_{\min}) = -U'(x_{\min}) = 0$ et $F(x_{\max}) = -U'(x_{\max}) = 0$. Cependant, ces deux points sont différents. En effet, les perturbations restent bornées autour du minimum puisqu'il est situé au fond d'un creux du potentiel. Pour cette raison, le minimum est un *point d'équilibre stable*. Par contre, le maximum est situé à un sommet du potentiel et de petites perturbations auront tendance à s'amplifier et à éloigner la particule matérielle du maximum qui est donc un *point d'équilibre instable*. Dans le portrait de phase représenté à la fig. 4.1b, ces deux points d'équilibre sont situés en $x = x_{\min}$ et $x = x_{\max}$ sur l'axe des abscisses où l'impulsion est nulle $p = 0$. On notera que les deux trajectoires de conditions initiales situées en ces points d'équilibre y restent indéfiniment: $\{x(t) = x_{\min}, p(t) = 0\}$ et $\{x(t) = x_{\max}, p(t) = 0\}$. Il s'agit des deux seules trajectoires stationnaires du système.

Supposons à présent que la particule matérielle se trouve en une position x quelconque avec une énergie E comme le montre la fig. 4.1. Pour représenter sa trajectoire, nous procédons comme suit. Sur le graphique de l'énergie potentielle, nous traçons une droite horizontale au niveau égal à l'énergie E . Au point x où se trouve la particule, nous obtenons son énergie cinétique T comme la distance entre la droite horizontale à l'énergie E et la courbe de l'énergie potentielle $U(x)$ puisque $T = E - U(x)$. L'énergie potentielle $U(x)$ est donnée par la hauteur de la courbe à partir de l'axe des abscisses situé en $U = 0$. Comme l'énergie cinétique est définie par $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{p^2}{2m}$, nous pouvons alors déterminer à un signe près la vitesse et l'impulsion de la particule

$$p = m \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2m [E - U(x)]} \quad (4.8)$$

On remarquera que la vitesse et l'impulsion existent comme nombre réel si l'énergie est plus grande que l'énergie potentielle: $E \geq U(x)$. Cette condition n'est pas remplie dans la barrière de potentiel située sous le maximum ou dans la partie répulsive du potentiel près de $x = 0$. Ces régions où l'énergie cinétique serait négative sont donc interdites à la particule qui doit rebrousser chemin aux points où son énergie cinétique s'annule avec sa vitesse et son impulsion: $U(x) = E$. Ces points sont donc appelés les *points de rebroussement*. Il en existe trois pour le potentiel de la fig. 4.1 à l'énergie E considérée. A une énergie E inférieure au minimum du potentiel, le puits de potentiel n'est plus accessible à la particule et il n'existe alors qu'un seul point de rebroussement où une particule venant de grandes distances rebrousse chemin. De

manière analogue, si l'énergie E est supérieure au maximum du potentiel, la particule voyage à suffisamment grande énergie cinétique pour passer au-dessus de la barrière et venir rebondir sur la partie répulsive du potentiel près de l'origine $x = 0$ où se trouve le seul point de rebroussement qu'elle rencontre. A pareille énergie E , la particule venant de grandes distances avec une vitesse négative voit son énergie cinétique diminuer à l'approche de la barrière de potentiel, atteindre son minimum au sommet de la barrière, augmenter dans le puits de potentiel pour diminuer à nouveau et s'annuler au point de rebroussement où la vitesse change de signe et la particule repart en sens inverse. On note que le plan de phase est symétrique sous l'opération de renversement du temps qui inverse le temps et l'impulsion en laissant inchangée la position:

$$\begin{cases} t \rightarrow -t \\ x \rightarrow x \\ p \rightarrow -p \end{cases} \quad (4.9)$$

Cette propriété de symétrie signifie que, si les équations du mouvement possèdent une trajectoire comme solution, sa symétrique sous renversement du temps en est aussi une solution. Cette symétrie résulte du fait que la fonction hamiltonienne est quadratique en l'impulsion $H(-p, x) = H(p, x)$.

Considérons maintenant une particule située dans le puits de potentiel entre la partie répulsive du potentiel et le sommet de la barrière, $0 < x < x_{\max}$, avec une énergie E inférieure à l'énergie potentielle du maximum et nécessairement supérieure au minimum, $U(x_{\min}) < E < U(x_{\max})$. Dans ce cas, la particule est piégée (ou confinée) dans le puits de potentiel d'où elle ne peut s'échapper. Elle y rencontre deux points de rebroussement entre lesquels elle effectue un mouvement de va-et-vient. Dans le plan de phase Oxp , ces trajectoires forment des boucles fermées sur elles-mêmes. Pour des conditions initiales données $\{x(0), p(0)\}$, il existe une et une seule trajectoire correspondante de sorte que le point matériel n'aura d'autre futur que de parcourir la boucle encore et encore de façon périodique. La période T est définie comme le laps de temps positif et minimum pour que la trajectoire revienne à sa condition initiale ou, plus généralement, à un point (x, p) de l'espace des phases qu'il a croisé précédemment de sorte que

$$\begin{cases} x(t + T) = x(t) \\ p(t + T) = p(t) \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.10)$$

avec $T \neq 0$. Si l'on connaît la période, tous les temps de récurrence sont les multiples entiers de la période:

$$\begin{cases} x(t + nT) = x(t) \\ p(t + nT) = p(t) \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (4.11)$$

On parle d'*orbitre périodique* ou de *trajectoire périodique*.

La période peut se calculer grâce à l'éq. (4.8). En utilisant la symétrie sous le renversement du temps (7.108), la période est égale au double du temps pris par la particule pour aller d'un point de rebroussement à l'autre à vitesse ou impulsion positive: $T(E) = 2(t_2 - t_1) = 2 \int_{t_1}^{t_2} dt$. Pour obtenir le temps de parcours entre les deux points de rebroussement, nous utilisons l'éq. (4.8) avec le signe positif, nous en divisons les deux membres par la racine carrée, nous multiplions par dt et nous intégrons pour obtenir la période:

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (4.12)$$

où les points de rebroussement sont donnés par les racines de l'équation $U[x_{1,2}(E)] = E$. *A priori*, la période est une fonction de l'énergie E . En particulier, on doit s'attendre à un allongement non-borné de la période à mesure que l'énergie E atteint le maximum de l'énergie potentielle, $\lim_{E \rightarrow U(x_{\max})} T(E) = \infty$, car la particule prend un temps infini pour rejoindre le point d'équilibre instable x_{\max} à l'énergie $E = U(x_{\max})$. Une autre façon de comprendre ce résultat est de noter que la période ne peut être qu'infinie aux énergies supérieures à la barrière $E > U(x_{\max})$, puisque la particule s'échappe *in fine* à l'infini.

Les solutions oscillantes de l'équation de Newton peuvent en principe être obtenue par l'intégrale

$$\pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}} = t - t_0 \quad (4.13)$$

qui donne implicitement la dépendance temporelle de la position, $t = t_0 + f(x; x_0)$, la solution explicite devant alors être obtenue en invoquant le théorème des fonctions implicites: $x = f^{-1}(t - t_0; x_0)$. Si l'intégrale ci-dessus et son inversion peuvent aisément s'effectuer par des méthodes numériques aujourd'hui couramment utilisées, la résolution analytique n'est possible que si l'intégrale est une fonction aux propriétés connues. Ces fonctions et leurs propriétés sont compilées dans des tables [1, 2] ou dans des logiciels de calcul symbolique sur ordinateur [3, 4].

Nous pouvons introduire ici des considérations de probabilité en se demandant quelle serait la densité de probabilité d'observer la position $x(t)$ dans l'intervalle $[x, x + dx]$ si le temps t est pris au hasard ou à intervalles de temps réguliers Δt pour autant que le rapport $T(E)/\Delta t$ soit irrationnel. La distribution statistique des temps d'échantillonnage est uniforme, en particulier, sur une demi-période correspondant au passage d'un point de rebroussement à l'autre. Par conséquent, la probabilité de présence du corps matériel dans un certain intervalle de position peut être reliée à la probabilité que le temps d'échantillonnage se trouve dans l'intervalle de temps correspondant:

$$\text{Prob}\{x(\mathcal{T}) \in [x, x + dx]\} = \text{Prob}\{\mathcal{T} \in [t, t + dt]\} = \frac{dt}{T(E)/2} \quad (4.14)$$

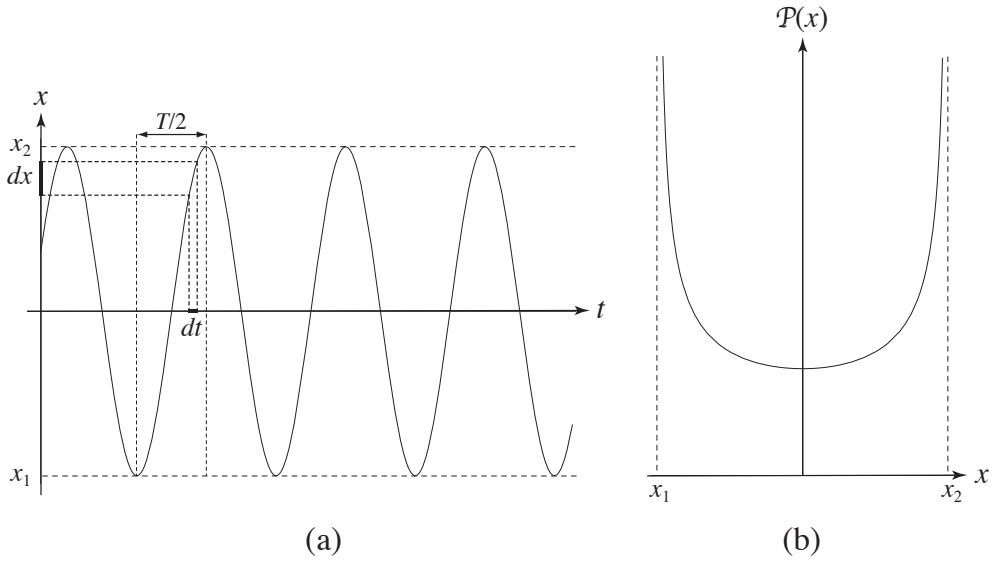


Figure 4.2: (a) Orbite périodique échantillonnée de manière stroboscopique à intervalles de temps réguliers. Sur la demi-période $T/2$, chaque intervalle de position $[x, x + dx]$ correspond à un intervalle de temps $[t, t + dt]$ où peut tomber un temps d'échantillonnage \mathcal{T} . (b) Densité de probabilité des positions $x(t)$ observées. Elle diverge comme $\mathcal{P}(x) \sim (x - x_1)^{-1/2}$ et $\mathcal{P}(x) \sim (x_2 - x)^{-1/2}$ aux deux points de rebroussement à cause du ralentissement de la particule près de ces points.

D'après l'équation (4.8), dt est relié à dx d'après:

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (4.15)$$

Comme la densité de probabilité est définie par $\mathcal{P}(x) \equiv \text{Prob}\{x(\mathcal{T}) \in [x, x + dx]\} / dx$, nous obtenons

$$\mathcal{P}(x) = \frac{\sqrt{2m}}{T(E)\sqrt{E - U(x)}} \quad (4.16)$$

qui est représentée sur la fig 4.2b.

D'après la théorie des séries de Fourier (voir cours d'analyse), toute fonction périodique peut être développée en une série de fonctions trigonométriques:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \quad (4.17)$$

de période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (4.18)$$

où ω est la fréquence angulaire en radian/sec. La fréquence en Hertz (c'est-à-dire en s^{-1}) est définie par $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. L'oscillation correspondant aux termes de la série de Fourier avec $n = 1$

est appelée la *fondamentale* et les suivantes avec $n > 1$ sont les *harmoniques*, une nomenclature utilisée notamment en musique. Un système dont les mouvements oscillatoires sont décrits par une série de Fourier réduite aux seuls termes avec $n = 1$ est qualifié d'*oscillateur harmonique*. Si le développement de Fourier nécessite des termes avec $n > 1$, on parle d'*oscillateur anharmonique*.

4.2 Oscillateur harmonique unidimensionnel

Considérons le mouvement oscillant de faible amplitude autour du minimum d'un puits de potentiel (comme celui de la fig. 4.1). Pour décrire ce mouvement, le potentiel peut être développé en série de Taylor autour de son minimum $x_{\min} \equiv x_0$:

$$U(x) = U(x_0) + \underbrace{U'(x_0)(x - x_0)}_{=0} + \frac{1}{2} U''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (4.19)$$

Comme sa dérivée première s'annule au minimum $U'(x_0) = 0$, et que les amplitudes $|x - x_0|$ sont supposées suffisamment petites pour négliger les termes de degré supérieur au terme quadratique (qui est le premier terme non trivial rencontré dans la série), on peut décrire le mouvement en première approximation avec un potentiel quadratique. En plaçant l'origine des positions au minimum du potentiel $x \rightarrow x + x_0$ et l'origine des énergies à l'énergie du minimum $E \rightarrow E + U(x_0)$, le potentiel s'écrit:

$$U(x) = \frac{k}{2} x^2 \quad (4.20)$$

avec la constante $k = U''(0) > 0$ donnant la courbure du potentiel au minimum. La force correspondante est donc linéaire en l'écart x par rapport au minimum et attractive vis-à-vis de ce minimum:

$$F(x) = -U'(x) = -k x \quad (4.21)$$

où $k > 0$ apparaît comme la constante de rappel caractérisant par exemple l'élasticité d'un ressort. L'équation de Newton est alors

$$m \ddot{x} = -k x \quad (4.22)$$

ou encore

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (4.23)$$

avec la fréquence angulaire

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.24)$$

qui augmente avec la constante de rappel lorsque le ressort est plus rigide, mais diminue lorsque la masse augmente ce qui est un effet de ralentissement dû à l'inertie.

Tout système régit par l'équation (4.23) est appelé un *oscillateur harmonique*. En effet, la solution générale de cette équation différentielle du second ordre en le temps, linéaire, homogène et à coefficients constants est donnée par une fonction trigonométrique:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (4.25)$$

L'équation (4.25) donne bien une solution de l'éq. (4.23) puisque :

$$\frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega \sin \omega t \quad (4.26)$$

$$\frac{d}{dt} \sin \omega t = +\omega \cos \omega t \quad (4.27)$$

de sorte que

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos \omega t = -\omega^2 \cos \omega t \quad (4.28)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin \omega t = -\omega^2 \sin \omega t \quad (4.29)$$

ce qui implique

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (4.30)$$

comme attendu. Toutes ces solutions sont de fréquence angulaire ω et de période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4.31)$$

On notera que la période est indépendante de l'énergie. Cette propriété commune à tous les oscillateurs harmoniques porte le nom d'*isochronisme* des oscillations.

La solution générale dépend de deux constantes à fixer puisque l'équation différentielle est du second ordre dans le temps. Ces deux constantes sont de manière équivalente (A, φ) , (a, b) ou (x_0, \dot{x}_0) . La constante A est l'*amplitude* des oscillations et φ leur *phase*. L'amplitude des oscillations est reliée à l'énergie E totale d'après

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 = \frac{k}{2} A^2 \quad (4.32)$$

de sorte que $A = \sqrt{2E/k}$. En conséquence, les orbites de l'oscillateur harmonique forment des ellipses dans l'espace des phases Oxp (voir fig. 4.3). Comme l'énergie E est une constante du mouvement, elle est fixée par les conditions initiales (x_0, \dot{x}_0) . Les constantes a et b sont

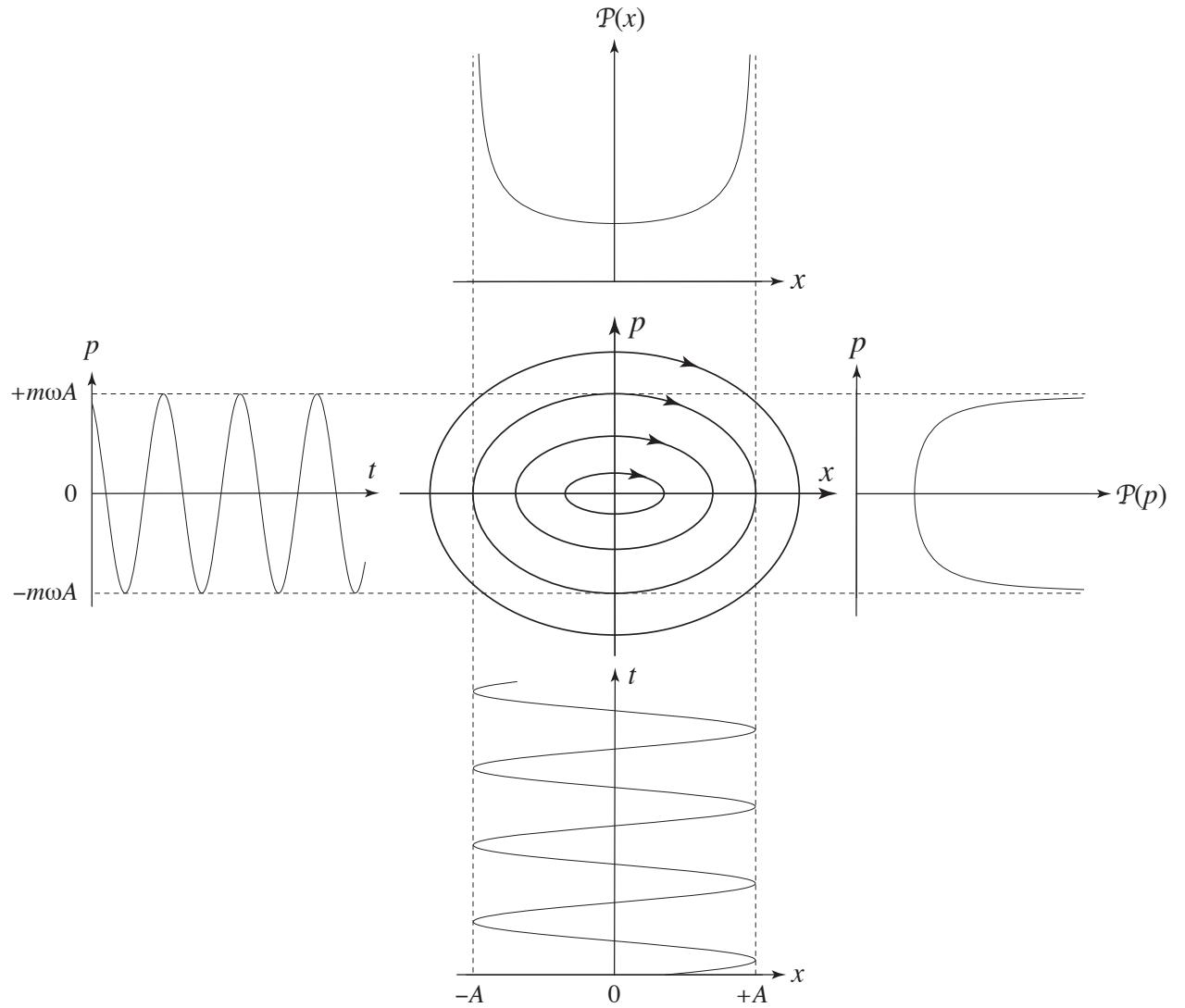


Figure 4.3: Portrait de phase de l'oscillateur harmonique dont les trajectoires d'énergie non-nulle forment des ellipses $\frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 = E$ de demi-axes $x_E = \sqrt{2E/k} = A$ en position et $p_E = \sqrt{2mE} = m\omega A$ en impulsion. Autour du portrait de phase sont représentées les projections en position et en impulsion d'une trajectoire en fonction du temps, ainsi que les densités de probabilité d'observer la position en x , $\mathcal{P}(x) = (\pi\sqrt{A^2 - x^2})^{-1}$, et l'impulsion en p , $\mathcal{P}(p) = (\pi\sqrt{m^2\omega^2 A^2 - p^2})^{-1}$.

les coefficients des fonctions cosinus et sinus donnant la solution. Ils sont obtenus à partir de l'amplitude et de la phase d'après

$$\begin{cases} a = +A \cos \varphi \\ b = -A \sin \varphi \end{cases} \quad (4.33)$$

et inversément

$$\begin{cases} A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = -\arctg \frac{b}{a} \end{cases} \quad (4.34)$$

Alternativement, nous pouvons les déterminer en termes de la position initiale $x(0) = x_0 = a$ et de la vitesse initiale $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = \omega b$, ce qui permet d'exprimer la solution en fonction de ses conditions initiales:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (4.35)$$

Le théorème d'unicité de Cauchy est bien satisfait puisqu'une et une seule solution part des conditions initiales (x_0, \dot{x}_0) .

La méthode générale de résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants utilise l'hypothèse que la solution est donnée par une exponentielle:

$$x(t) = C e^{st} \quad (4.36)$$

où s est le taux de croissance de l'exponentielle. Il s'agit d'une hypothèse utile parce que l'exponentielle est une fonction propre de l'opérateur $\frac{d}{dt}$ de dérivation par rapport au temps, de ses multiples $\frac{d^j}{dt^j}$, ainsi que des combinaisons linéaires $\sum_{j=0}^n a_j \frac{d^j}{dt^j}$. Appliquant de tels opérateurs

sur l'exponentielle $\exp(st)$ redonne la même exponentielle multipliée par le polynôme $\sum_{j=0}^n a_j s^j$ qui doit s'annuler si l'opérateur est celui d'une équation différentielle linéaire homogène. Ce polynôme caractéristique admet un nombre de racines réelles ou complexes égal à l'ordre de l'équation différentielle. Si ces racines sont distinctes, nous obtenons toutes les solutions particulières dont nous avons besoin pour former la solution générale par combinaison linéaire. Si des racines de multiplicité $k > 1$ se présentent, il peut être nécessaire de chercher des solutions données par une exponentielle multipliée par un polynôme de degré $k - 1$ en le temps (voir cours d'analyse).

Dans le cas de l'éq. (4.23) du second ordre en le temps, le polynôme caractéristique est quadratique et donné par

$$s^2 + \omega^2 = 0 \quad (4.37)$$

qui admet deux racines imaginaires et complexes conjuguées:

$$s_{\pm} = \pm i\omega \quad (4.38)$$

Par conséquent, nous retrouvons la solution trigonométrique en vertu de la formule fondamentale:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad (4.39)$$

La solution générale est donc donnée par la combinaison linéaire des deux solutions particulières obtenues:

$$x(t) = C_+ e^{s_+ t} + C_- e^{s_- t} \quad (4.40)$$

Etant donné que la solution doit être réelle $x(t) = x(t)^*$ et que $s_- = s_+^*$, les coefficients doivent aussi être complexes conjugués:

$$C_+ = C_-^* = \frac{A}{2} e^{i\varphi} \quad (4.41)$$

et l'on retrouve la solution sous la forme de l'éq.(4.25) puisque

$$x(t) = C_+ e^{i\omega t} + C_+^* e^{-i\omega t} = 2 \operatorname{Re}(C_+ e^{i\omega t}) = \operatorname{Re}[A e^{i(\omega t + \varphi)}] = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.42)$$

Le mouvement de cet oscillateur est donc bien harmonique et de période déterminée par la courbure du puits de potentiel à son minimum:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}} \quad (4.43)$$

De telles oscillations sont harmoniques et isochrones tant que leurs amplitudes restent suffisamment petites. Ces oscillations se répètent indéfiniment car l'énergie totale est conservée.

4.3 Oscillateur harmonique avec amortissement

La plupart des oscillateurs naturels sont soumis à des forces de frottement qui dissipent l'énergie, par exemple, à cause de la résistance de l'air ou du fluide dans lequel le corps matériel est en mouvement. Dans ces cas, une force de frottement proportionnelle à la vitesse $F_f = -\zeta \dot{x}$ s'ajoute à la force de rappel $F_r = -kx$ de l'oscillateur harmonique et l'équation du mouvement devient:

$$m\ddot{x} + \zeta \dot{x} + kx = 0 \quad (4.44)$$

Il s'agit toujours d'une équation différentielle du second ordre en le temps, linéaire, homogène et à coefficient constant. Nous pouvons donc rechercher des solutions particulières sous la forme de fonctions exponentielles comme (4.36). Le polynôme caractéristique est ici donné par

$$ms^2 + \zeta s + k = 0 \quad (4.45)$$

dont les deux racines sont

$$s_{\pm} = \frac{1}{2m} \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 4mk} \right) \quad (4.46)$$

Comme $\zeta > 0$, la partie réelle de ces racines est négative, $\text{Re } s_{\pm} < 0$, de sorte que les solutions correspondantes tendent vers zéro pour $t \rightarrow +\infty$, ce qui est une conséquence de la dissipation de l'énergie de l'oscillateur provenant du frottement. Lorsque les deux racines sont distinctes $s_+ \neq s_-$, deux cas se présentent selon que les racines sont complexes conjuguées ou réelles. Dans le premier cas, les solutions sont des oscillations amorties et, dans le second, les solutions décroissent vers zéro sans osciller.

4.3.1 Cas de l'oscillateur sous-amorti ($0 < \zeta < 2\sqrt{mk}$)

Dans ce cas, les racines sont complexes conjuguées et peuvent s'écrire:

$$s_{\pm} = -\frac{\zeta}{2m} \pm i\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\zeta}{2m}\right)^2} \equiv -\Gamma \pm i\Omega \quad (4.47)$$

où l'on a introduit la fréquence de l'oscillateur harmonique non-amorti: $\omega \equiv \sqrt{k/m}$. La solution générale est alors donnée par

$$x(t) = C_+ e^{s_+ t} + C_- e^{s_- t} = C_+ e^{-\Gamma t + i\Omega t} + C_- e^{-\Gamma t - i\Omega t} = A e^{-\Gamma t} \cos(\Omega t + \varphi) \quad (4.48)$$

avec une amplitude initiale A et une phase φ fixée par les conditions initiales x_0 et \dot{x}_0 . On constate que la fréquence des oscillations est modifiée par le frottement

$$\Omega \equiv \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\zeta}{2m}\right)^2} \quad (4.49)$$

et que l'amplitude des oscillations décroît exponentiellement avec le taux d'amortissement

$$\Gamma \equiv \frac{\zeta}{2m} \quad (4.50)$$

directement proportionnel au coefficient de frottement ζ . Par conséquent, les oscillations tendent à disparaître sur une échelle de temps de l'ordre de l'inverse du taux d'amortissement Γ^{-1} .

La fig. 4.4 montre un exemple de telles oscillations ainsi que le portrait de phase de l'oscillateur sous-amorti. Les trajectoires suivent des spirales qui convergent vers le point d'équilibre situé à l'origine. Le taux de dissipation de l'énergie est la puissance de la force de frottement:

$$\frac{dE}{dt} = -\zeta \dot{x}^2 \leq 0 \quad (4.51)$$

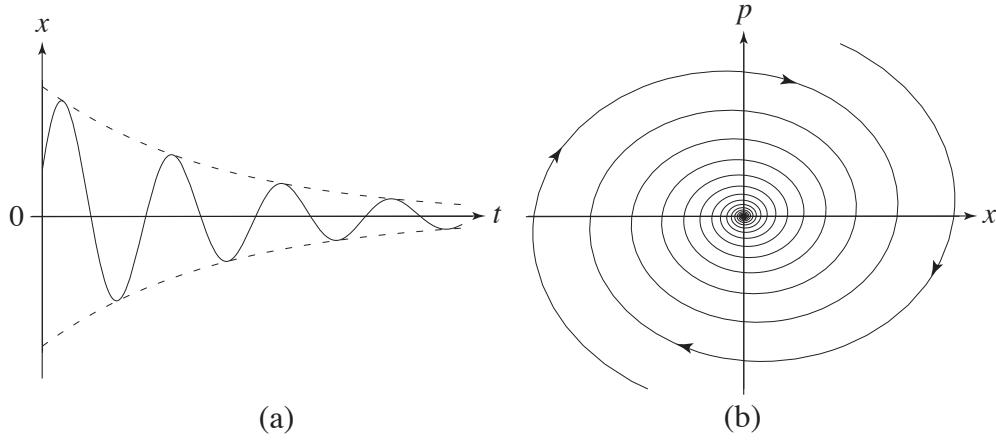


Figure 4.4: (a) Exemple de trajectoire (4.48) de l'oscillateur sous-amorti. Les pointillés montrent la décroissance exponentielle de l'amplitude des oscillations. (b) Portrait de phase de l'oscillateur sous-amorti.

4.3.2 Cas de l'oscillateur sur-amorti ($2\sqrt{mk} < \zeta$)

Si le coefficient de frottement ζ est suffisamment grand, le temps d'amortissement finit par être plus court qu'une période d'oscillation et les trajectoires deviennent purement exponentielles. Dans ce cas, les racines sont réelles et négatives:

$$s_{\pm} = -\frac{\zeta}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\zeta}{2m}\right)^2 - \omega^2} \equiv -\Gamma_{\pm} \quad (4.52)$$

et la solution générale est la superposition linéaire de deux exponentielles:

$$x(t) = C_+ e^{-\Gamma_+ t} + C_- e^{-\Gamma_- t} \quad (4.53)$$

avec des coefficients C_{\pm} réels à fixer par les conditions initiales x_0 et \dot{x}_0 . Comme les deux racines sont distinctes et que $\Gamma_- > \Gamma_+$, l'une des deux exponentielles décrit une transitoire qui disparaît rapidement sur un court laps de temps de l'ordre de Γ_-^{-1} , tandis que l'autre exponentielle s'amortit plus lentement sur un temps de l'ordre de Γ_+^{-1} , qui d'ailleurs s'allonge à proximité du régime sous-amorti.

La figure 4.5 montre des exemples de solutions, ainsi qu'un portrait de phase. On notera que les solutions particulières $x = Ce^{st}$ définissent des directions propres $\dot{x} = sx$ dans l'espace des phases le long desquelles les trajectoires sont rectilignes.

Il faut remarquer qu'un système mécanique de taille R plongé dans un fluide visqueux comme de l'eau est d'autant plus amorti qu'il est petit. En effet, sa masse diminue comme le

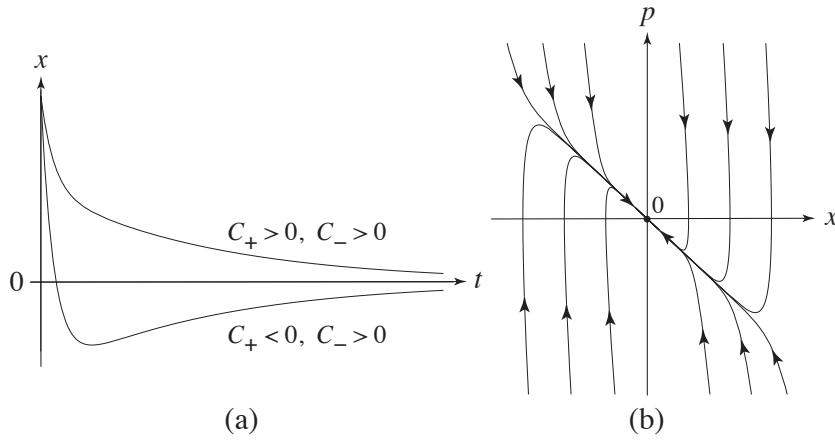


Figure 4.5: (a) Deux exemples de trajectoires de l'oscillateur sur-amorti correspondant à deux ensembles de conditions initiales, l'un pour lequel $C_+ > 0$ et $C_- > 0$ et l'autre où $C_+ < 0$ et $C_- > 0$. (b) Portrait de phase de l'oscillateur sur-amorti.

cube de sa taille $m \sim R^3$, sa constance de rappel comme sa taille $k \sim R$ d'après l'éq. (3.13) et son coefficient de frottement comme sa taille aussi $\zeta \sim R$ d'après la formule de Stokes (3.16). Par conséquent, les oscillateurs sont typiquement sur-amortis dans le monde cellulaire ou intracellulaire de la biophysique. Dans pareils systèmes fortement sur-amortis, les racines sont approximativement données par $s_+ \simeq -\frac{\zeta}{m}$ et $s_- \simeq -\frac{m\omega^2}{\zeta} = -\frac{k}{\zeta}$ et la solution par

$$x(t) \simeq C_+ e^{-\frac{\zeta}{m}t} + C_- e^{-\frac{k}{\zeta}t} \quad (4.54)$$

La première exponentielle due aux effets inertIELS venant de la masse décroît très rapidement tandis que la seconde est beaucoup plus lente et domine aux temps longs. Dès lors, on pourra négliger le terme inertiel dans l'équation de Newton pour décrire des phénomènes aux grandes échelles de temps dans les systèmes sur-amortis de la biophysique:

$$\underbrace{m\ddot{x}}_{\simeq 0} = -\zeta\dot{x} - kx + F \quad (4.55)$$

Dans ces conditions, l'équation de Newton se simplifie en une équation du premier ordre dans le temps

$$\zeta\dot{x} = -kx + F \quad (4.56)$$

où F désigne toute autre force agissant sur le corps en mouvement.

Remarque: Dans le cas marginal où $\zeta = 2\sqrt{mk}$, les deux racines du polynôme caractéristique coïncident $s_+ = s_- = -\frac{\zeta}{2m}$ et l'hypothèse que les solutions sont des fonctions exponentielles

n'offre que la seule solution particulière $\exp(-\zeta t/2m)$. Il faut alors considérer une seconde solution de la forme $t \exp(-\zeta t/2m)$. On vérifie qu'il s'agit de deux solutions linéairement indépendantes permettant d'obtenir la solution générale sous la forme: $x(t) = (C+Dt) \exp(-\zeta t/2m)$. Il est cependant exceptionnel que l'égalité $\zeta = 2\sqrt{mk}$ soit satisfaite, contrairement aux deux autres cas décrits ci-dessus qui sont des cas typiques, encore appelés cas génériques.

4.4 Oscillateur harmonique amorti avec forçage temporel

Pour maintenir le mouvement d'un oscillateur amorti, on peut compenser la dissipation d'énergie par une force extérieure dépendant du temps et effectuant un travail sur l'oscillateur. L'équation du mouvement prend alors la forme

$$m\ddot{x} + \zeta\dot{x} + kx = F(t) \quad (4.57)$$

où $F(t)$ est une fonction du temps suffisamment régulière pour qu'une solution existe. Nous avons ici affaire à une équation différentielle ordinaire du second ordre dans le temps, linéaire, à coefficients constants, mais inhomogène. Grâce au principe de superposition linéaire, sa solution générale est donnée par la solution générale de l'équation homogène correspondante à laquelle s'ajoute une solution particulière de l'équation inhomogène.

Pour effectuer la résolution nous utilisons la *méthode de variation des constantes* (voir cours d'analyse). Il s'agit de prendre une combinaison linéaire de toutes les solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène et de supposer que les constantes de cette combinaison linéaire dépendent maintenant du temps. Nous considérons les cas génériques où toutes les racines de polynôme caractéristique sont distinctes, $s_+ \neq s_-$, de sorte que les deux solutions particulières sont des fonctions exponentielles du temps:

$$x(t) = C_+(t) e^{s_+ t} + C_-(t) e^{s_- t} \quad (4.58)$$

Pour une équation du second ordre dans le temps comme l'équation de Newton (4.57), il faut imposer une condition auxiliaire sur les dérivées par rapport au temps des constantes, à savoir que

$$\dot{C}_+(t) e^{s_+ t} + \dot{C}_-(t) e^{s_- t} = 0 \quad (4.59)$$

Par conséquent, la vitesse et l'accélération s'écrivent

$$\dot{x}(t) = s_+ C_+(t) e^{s_+ t} + s_- C_-(t) e^{s_- t} \quad (4.60)$$

$$\ddot{x}(t) = s_+ \dot{C}_+(t) e^{s_+ t} + s_- \dot{C}_-(t) e^{s_- t} + s_+^2 C_+(t) e^{s_+ t} + s_-^2 C_-(t) e^{s_- t} \quad (4.61)$$

En les introduisant dans l'équation inhomogène (4.57) et en utilisant le fait que les exposants s_{\pm} sont les racines du polynôme caractéristique (4.45) de l'équation homogène, nous obtenons l'équation

$$m s_+ \dot{C}_+(t) e^{s_+ t} + m s_- \dot{C}_-(t) e^{s_- t} = F(t) \quad (4.62)$$

qui doit être satisfaite avec l'éq. (4.59). Ensemble, elles forment un système de deux équations à deux inconnues. Ce système est soluble car son wronskien est différent de zéro:

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{s_+ t} & e^{s_- t} \\ s_+ e^{s_+ t} & s_- e^{s_- t} \end{vmatrix} = -(s_+ - s_-) e^{(s_+ + s_-)t} \neq 0 \quad (4.63)$$

grâce à l'hypothèse que $s_+ \neq s_-$ (qui exclut le cas marginal où $\zeta = 2\sqrt{mk}$). Les coefficients $C_{\pm}(t)$ obéissent donc aux équations:

$$\begin{cases} \dot{C}_+(t) = +\frac{e^{-s_+ t}}{m(s_+ - s_-)} F(t) \\ \dot{C}_-(t) = -\frac{e^{-s_- t}}{m(s_+ - s_-)} F(t) \end{cases} \quad (4.64)$$

qui s'intègrent sur le temps pour obtenir la solution

$$x(t) = C_+(0) e^{s_+ t} + C_-(0) e^{s_- t} + \int_0^t dt' \frac{e^{s_+(t-t')} - e^{s_-(t-t')}}{m(s_+ - s_-)} F(t') \quad (4.65)$$

Il s'agit bien de la solution générale de l'équation inhomogène puisqu'elle dépend de deux constantes d'intégration $C_{\pm}(0)$ permettant de satisfaire le problème de Cauchy de conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. En posant $\tau = t - t'$ et en effectuant ce changement de variable dans l'intégrale, cette solution peut se réécrire sous la forme

$$x(t) = C_+(0) e^{s_+ t} + C_-(0) e^{s_- t} + \int_0^t d\tau \phi(\tau) F(t - \tau) \quad (4.66)$$

où

$$\phi(t) = \frac{e^{s_+ t} - e^{s_- t}}{m(s_+ - s_-)} \quad (t > 0) \quad (4.67)$$

est appelée la *fonction de réponse* du système. Il s'agit en fait d'une solution particulière de l'équation homogène de l'oscillateur amorti correspondant aux conditions initiales $\phi(0) = 0$ et $\dot{\phi}(0) = 1/m$. Une telle solution est engendrée si l'oscillateur subit une force instantanée infinie au temps $t = 0$. Une telle force s'exprime par une distribution de Dirac ou fonction généralisée définie par la dérivée de la fonction en marche d'escalier de Heaviside:

$$F(t) = \delta(t) = \frac{d}{dt} \Theta(t) \quad (4.68)$$

avec $\Theta(t) = 1$ si $t > 0$ et 0 si $t < 0$. Pour cette force, le troisième terme de l'éq. (4.66) se réduit à la fonction de réponse elle-même $\phi(t)$ si $t > 0$ et à zéro si $t < 0$. Le principe de causalité est donc satisfait. La fonction de réponse porte aussi le nom de fonction de Green (ou propagateur).

Dans le cas sous-amorti, la fonction de réponse vaut

$$\phi(t) = \Theta(t) \exp\left(-\frac{\zeta t}{2m}\right) \frac{\sin \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\zeta}{2m}\right)^2} t}{m \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\zeta}{2m}\right)^2}} \quad \left(\omega > \frac{\zeta}{2m}\right) \quad (4.69)$$

et, dans le cas sur-amorti,

$$\phi(t) = \Theta(t) \exp\left(-\frac{\zeta t}{2m}\right) \frac{\sinh \sqrt{\left(\frac{\zeta}{2m}\right)^2 - \omega^2} t}{m \sqrt{\left(\frac{\zeta}{2m}\right)^2 - \omega^2}} \quad \left(\omega < \frac{\zeta}{2m}\right) \quad (4.70)$$

Dans tous les cas, la fonction de réponse est une fonction réelle, $\phi^*(t) = \phi(t)$, qui s'annule aux temps négatifs en vertu du principe de causalité. De plus, la fonction de réponse d'un oscillateur amorti s'annule à l'infini, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = 0$, à cause de la dissipation.

L'amortissement provoque la décroissante progressive des deux premiers termes de l'éq. (4.66). Ceux-ci représentent donc le comportement transitoire de l'oscillateur qui suit la condition initiale sur un laps de temps de l'ordre du temps de relaxation de l'oscillateur amorti. Ce temps de relaxation vaut $t_{\text{relax}} \simeq 2m/\zeta$ pour l'oscillateur sous-amorti et $t_{\text{relax}} \simeq 1/\Gamma_+$ pour l'oscillateur sur-amorti. Par contre, le troisième terme est permanent tant que l'oscillateur est entraîné par une force extérieure non-nulle. Si la condition initiale était fixée loin dans le passé, la partie non-transitoire qui perdurerait dans le temps serait

$$x(t) = \int_0^\infty d\tau \phi(\tau) F(t - \tau) \quad (4.71)$$

La solution est donnée par la convolution de la force $F(t)$ avec la fonction de réponse. Celle-ci joue le rôle de filtre puisqu'elle intègre la force entre le présent, $F(t)$, et un temps passé de l'ordre du temps de relaxation, $F(t - t_{\text{relax}})$. Le système garde donc la mémoire de la force sur un tel intervalle de temps. Si la force extérieure $F(t)$ est un signal reçu par le système constitué de l'oscillateur amorti, celui-ci agit comme un filtre qui lisse le signal (voir fig. 4.6). De ce point de vue, un oscillateur amorti représente un filtre comme on en considère dans la théorie du traitement du signal.

Considérons le cas particulier où la force extérieure $F(t)$ est une superposition linéaire de

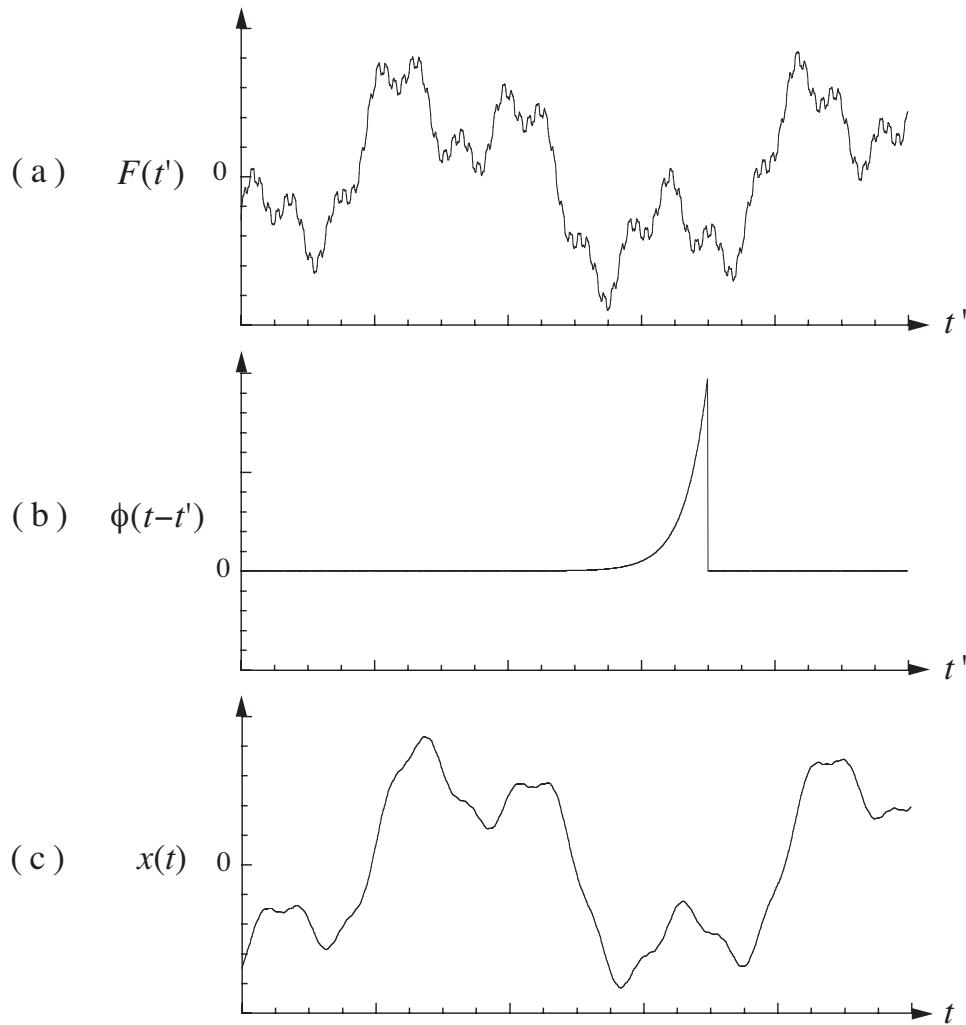


Figure 4.6: Illustration de l'action d'une force extérieure dépendant du temps sur un oscillateur sur-amorti:
 (a) Force extérieure donnée par une fonction irrégulière du temps $F(t')$; (b) Fonction de réponse $\phi(t - t')$ s'étendant vers le passé depuis l'instant présent t ; (c) Position $x(t)$ de l'oscillateur donnée par l'intégrale de convolution (4.71).

fonctions trigonométriques de diverses fréquences:

$$F(t) = \sum_{j=1}^{\nu} f_j \cos(\omega_j t + \alpha_j) \quad (4.72)$$

Dans le cas $\nu = 1$, le forçage extérieur est périodique dans le temps. La solution particulière de l'équation inhomogène est alors donnée par

$$X(t) = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty d\tau \phi(\tau) \sum_{j=1}^{\nu} f_j e^{i[\omega_j(t-\tau)+\alpha_j]} \right\} \quad (4.73)$$

$$= \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{\nu} f_j e^{i(\omega_j t + \alpha_j)} \int_0^\infty d\tau \phi(\tau) e^{-i\omega_j \tau} \right] \quad (4.74)$$

$$= \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{\nu} f_j \frac{e^{i(\omega_j t + \alpha_j)}}{-m\omega_j^2 + i\zeta\omega_j + k} \right] \quad (4.75)$$

que l'on peut réécrire sous la forme réelle:

$$X(t) = \sum_{j=1}^{\nu} f_j \frac{\cos(\omega_j t + \alpha_j + \beta_j)}{\sqrt{(m\omega_j^2 - k)^2 + (\zeta\omega_j)^2}} \quad (4.76)$$

avec le déphasage

$$\beta_j = \operatorname{arctg} \frac{\zeta\omega_j}{m\omega_j^2 - k} = \operatorname{arctg} \frac{\zeta\omega_j}{m(\omega_j^2 - \omega^2)} \quad (4.77)$$

Le bilan de l'énergie $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2$ de l'oscillateur amorti et forcé est régi par l'équation

$$\frac{dE}{dt} = -\zeta\dot{x}^2 + \dot{x}F(t) \quad (4.78)$$

Sur un long intervalle de temps, l'énergie injectée par le travail de la force extérieure $F(t)$ est dissipée par la force de frottement de sorte que les moyennes temporelles des puissances de ces deux forces doivent se compenser:

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dE}{dt} dt = -\overline{\zeta\dot{x}^2} + \overline{\dot{x}F(t)} = 0 \quad (4.79)$$

On remarque que la solution générale (4.66) se compose d'une partie transitoire donnée par la solution de l'équation homogène qui s'annule aux temps longs et une partie non transitoire, permanente qui se manifeste à tout temps. La puissance dissipée en moyenne ne peut dépendre que de cette dernière et s'obtient d'après

$$\overline{\zeta\dot{x}^2} = \overline{\zeta\dot{X}^2} = \frac{\zeta}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{f_j^2 \omega_j^2}{(m\omega_j^2 - k)^2 + (\zeta\omega_j)^2} \quad (4.80)$$

sous l'hypothèse que les fréquences sont *incommensurables*, c'est-à-dire qu'elles satisfont à la condition que, pour des entiers $n_j \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{j=1}^{\nu} n_j \omega_j = 0 \Leftrightarrow n_1 = n_2 = \dots = n_{\nu} = 0 \quad (4.81)$$

Comme la moyenne temporelle des termes oscillants vaut

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i \sum_{j=1}^{\nu} n_j \omega_j t} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{i \sum_{j=1}^{\nu} n_j \omega_j T} - 1}{i \sum_{j=1}^{\nu} n_j \omega_j T} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^{\nu} n_j \omega_j = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.82)$$

la condition d'incommensurabilité implique que les termes faisant intervenir deux fréquences différentes s'annulent et que les contributions individuelles de chaque fréquence s'ajoutent les unes aux autres. La puissance dissipée à la fréquence ω_j est donc donnée par

$$\overline{\zeta \dot{x}^2} \Big|_j = \frac{\zeta f_j^2}{2m^2} \frac{\omega_j^2}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\zeta}{m} \omega_j)^2} \quad (4.83)$$

en termes que la fréquence intrinsèque de l'oscillateur $\omega = \sqrt{k/m}$. Cette fonction est représentée avec le déphasage correspondant (4.77) sur la fig. 4.7.

Ces fonctions présentent un phénomène de résonance. Lorsque la fréquence de forçage ω_j approche la fréquence intrinsèque ω de l'oscillateur, l'amplitude de ses oscillations devient plus importante qu'autrement et la puissance dissipée également par voie de conséquence, formant une courbe typique de résonance. La largeur à mi-hauteur du pic de résonance vaut $\Delta\omega_j = \zeta/m$ qui s'annule avec le coefficient de frottement. Le déphasage tend à s'annuler si la fréquence de forçage est inférieure à la fréquence intrinsèque, mais elle tend vers $-\pi$ à des fréquences de forçage au-delà de la résonance. De nombreux systèmes naturels ou artificiels illustrent ce phénomène de résonance qui peut avoir des conséquences dramatiques s'il se manifeste dans des constructions comme des ponts suspendus, des tours ou des véhicules.

On note que l'oscillateur harmonique amorti agit comme un filtre du signal fourni par la force extérieure puisqu'il amplifie les fréquences de ce signal qui sont proches de la fréquence intrinsèque $\omega = \sqrt{k/m}$ de l'oscillateur. On utilise ainsi de tels oscillateurs pour le traitement du signal notamment en électronique où des circuits analogues à des oscillateurs mécaniques peuvent être fabriqués à l'aide de condensateurs, de bobines d'induction et de résistances. En particulier, un circuit électrique équivalent à l'oscillateur mécanique d'éq. (4.57) est présenté à la fig. 4.8. Il se compose d'une bobine d'induction d'auto-inductance L produisant une différence

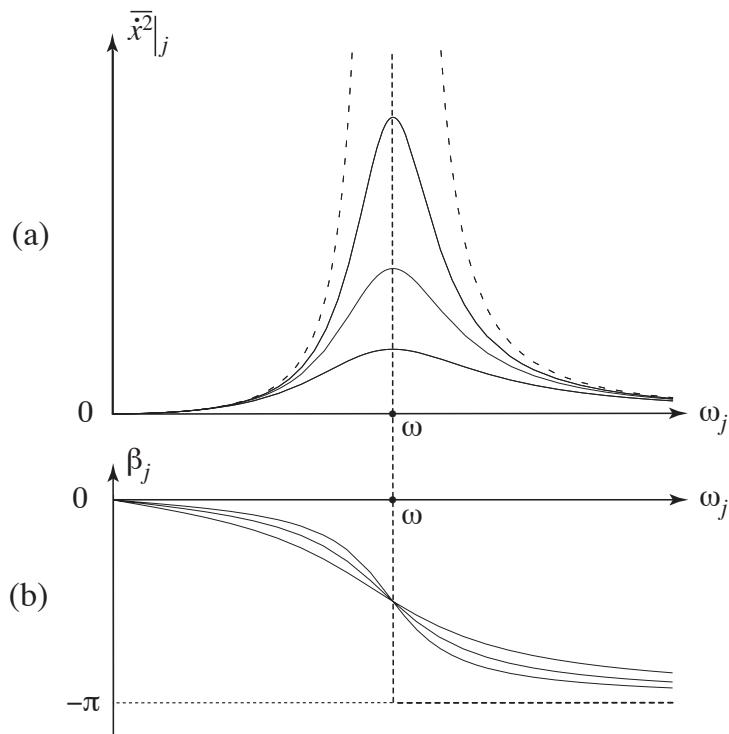


Figure 4.7: (a) Moyenne temporelle du carré de la vitesse donnée par l'éq. (4.83) dans le cas d'un oscillateur harmonique amorti et forcé périodiquement à la fréquence ω_j en fonction de celle-ci pour différentes valeurs du coefficient de frottement: $\zeta = 0,7 \text{ m}$, $\zeta = m$ et $\zeta = 1,5 \text{ m}$. (b) Le déphasage (4.77) correspondant. Les courbes en pointillés correspondent à la limite sans frottement $\zeta = 0$.

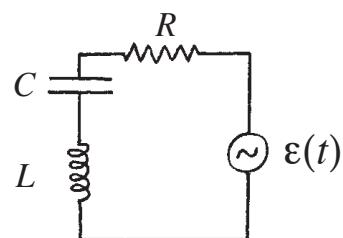


Figure 4.8: Circuit électrique équivalent à l'oscillateur harmonique amorti et forcé.

de potentiel électrique $\Phi_L = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$ lorsque le courant qui la traverse varie dans le temps, d'un condensateur de capacité C dont la différence de potentiel électrique est proportionnelle aux charges électriques $\pm q$ sur ses plaques, $\Phi_C = q/C$, et d'une résistance R qui provoque une chute de potentiel $\Phi_R = RI = R \frac{dq}{dt}$ lorsqu'elle est parcourue par un courant I . Si ce circuit est entraîné par une force électromotrice dépendant du temps $\mathcal{E}(t)$, l'équation d'évolution s'obtient en lui égalant la somme des différences de potentiel électrique des trois éléments du circuit: $\Phi_L + \Phi_C + \Phi_R = \mathcal{E}(t)$. Nous obtenons alors une équation d'évolution en tout point analogue à l'équation de Newton de l'oscillateur mécanique où la charge électrique $q(t)$ sur les plaques du condensateur correspond à la position du point matériel et le courant $I = \frac{dq}{dt}$ à la vitesse :

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}(t) \quad (4.84)$$

Cet oscillateur électrique peut être sous-amorti ou sur-amorti. On constate que l'auto-inductance L joue le rôle d'une masse, la résistance R celui d'un coefficient de frottement et l'inverse de la capacité C^{-1} celui d'une constante de rappel.

4.5 Modes normaux de vibration

De nombreux systèmes naturels effectuent de petites oscillations autour de leur configuration d'équilibre que ce soit des molécules quasi-isolées en phase gazeuse à l'échelle microscopique, des solides élastiques parcourus par des ondes sonores, ou encore des structures artificielles comme des ponts, des bâtiments, des machines, ou des instruments de musique. Pareils systèmes se composent de plusieurs degrés de liberté et leur mise en mouvement par une force extérieure périodique révèle souvent des résonances à plusieurs fréquences intrinsèques du système. C'est le cas pour une corde de guitare ou de piano qui peut vibrer non seulement à sa fréquence fondamentale mais aussi à des multiples entiers de la fréquence fondamentale formant les harmoniques de la corde. Un autre exemple est donné par la molécule de CO₂ qui est linéaire et présente quatre modes propres de vibration: les modes d'elongation symétrique et asymétrique et deux modes de pliages orthogonaux (voir fig. 4.9).

Ces petits mouvements périodiques à des fréquences intrinsèques du système sont appelés *les modes normaux de vibration* et il y a lieu de les mettre en évidence.

Pour fixer les idées, considérons plusieurs corps matériels attachés les uns aux autres par des ressorts, le tout étant fixé à des points d'attache (voir fig. 4.10). On suppose que les forces de frottement sont négligeables de sorte que l'énergie totale est conservée:

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \mathbf{v}_i^2 + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \text{cst} \quad (4.85)$$

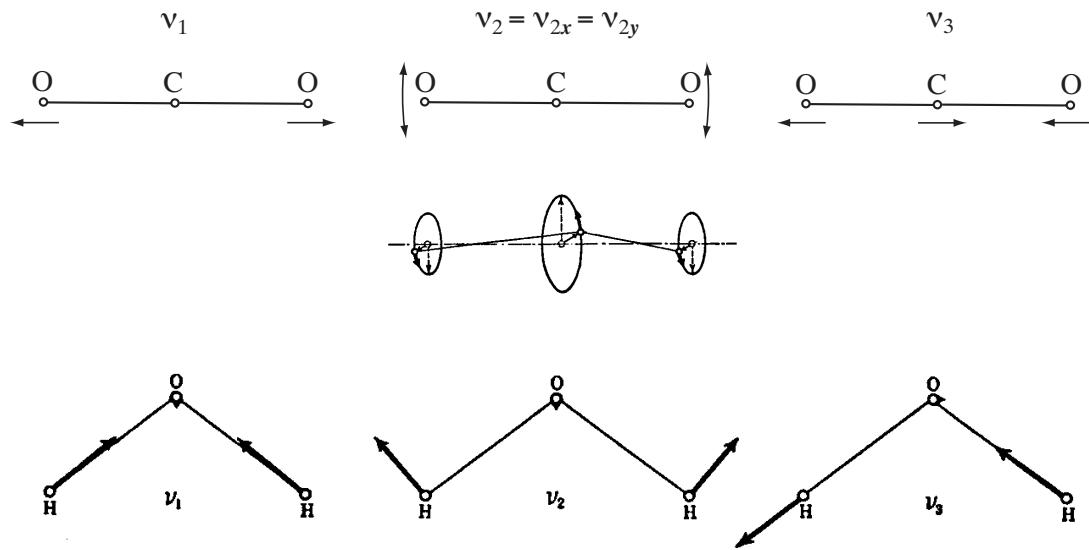


Figure 4.9: Modes normaux de vibrations de la molécule linéaire de dioxyde de carbone CO_2 et de la molécule non-linéaire d'eau H_2O .

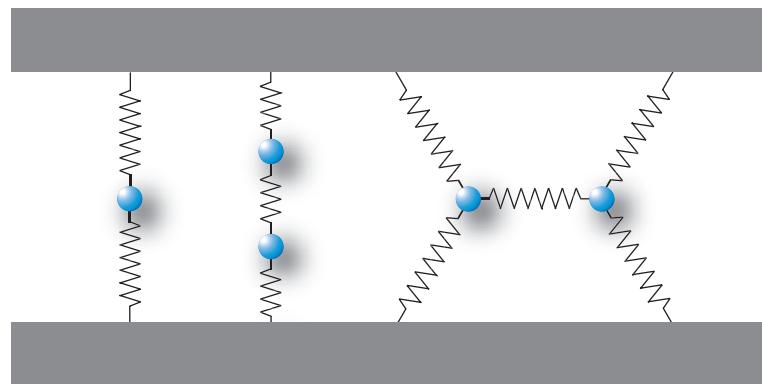


Figure 4.10: Exemples de systèmes mécaniques composés de corps matériels reliés par des ressorts et attachés à des parois.

Dans le cas du système à ressorts, l'énergie potentielle est la somme des énergies élastiques dues à l'élargissement des R ressorts:

$$U = \sum_{r=1}^R \frac{1}{2} k_r (l_r - l_{r0})^2 \quad (4.86)$$

où $l_r = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|$ et la longueur du r^{e} ressort et l_{r0} sa longueur au repos. Le mouvement des corps matériels est régi par les équations de Newton:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (4.87)$$

où les forces sont dues aux ressorts et dépendent des positions des corps matériels avec lesquels le corps en question est relié. Si le système est faiblement excité, il effectue de petites oscillations autour de sa configuration d'équilibre $\{\mathbf{r}_{i0}\}_{i=1}^N$:

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_{i0} + \delta\mathbf{r}_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (4.88)$$

Les forces peuvent alors se développer en série de Taylor des écarts $\{\delta\mathbf{r}_i\}_{i=1}^N$ par rapport aux positions d'équilibre

$$m_i \delta\ddot{\mathbf{r}}_i = \underbrace{\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_{10}, \mathbf{r}_{20}, \dots, \mathbf{r}_{N0})}_{=0} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{r}_j}(\mathbf{r}_{10}, \mathbf{r}_{20}, \dots, \mathbf{r}_{N0}) \cdot \delta\mathbf{r}_j + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (4.89)$$

où les forces statiques s'annulent dans la configuration d'équilibre. Les petits points désignent des termes de degré deux ou plus en les écarts. Si ceux-ci restent petits tout au long de l'évolution temporelle, les effets des termes non-linéaires peuvent être négligés et une bonne première approximation est fournie par les équations de Newton linéarisées. Si l'on rassemble toutes les coordonnées de position dans un grand vecteur de dimension $f = 3N$,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{3N}) = (\delta\mathbf{r}_1, \delta\mathbf{r}_2, \dots, \delta\mathbf{r}_N) \quad (4.90)$$

le système des équations de Newton (4.89) peut s'écrire:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (4.91)$$

en termes de la matrice des masses $M_{\alpha\beta} = m_\alpha \delta_{\alpha\beta}$ et la matrice des constantes de rappel $K_{\alpha\beta} = -\frac{\partial F_{ip}}{\partial r_{jq}}|_0$ avec les indices $\alpha = (i, p)$ et $\beta = (j, q)$ pour $i, j = 1, 2, \dots, N$ et $p, q = x, y, z$. En notations indicielles, l'éq. (4.91) s'écrit:

$$M_{\alpha\beta} \ddot{x}_\beta + K_{\alpha\beta} x_\beta = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 3N) \quad (4.92)$$

Tout d'abord, il faut noter que la matrice des masses est réelle symétrique et toujours positive parce qu'elle est diagonale et que toutes les masses sont positives:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^T > 0 \quad (4.93)$$

Par conséquent, on peut en prendre la racine carrée

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \quad (4.94)$$

avec $(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}})_{\alpha\beta} = \sqrt{m_\alpha} \delta_{\alpha\beta}$. De plus, la matrice des masses et sa racine carrée sont inversibles puisque $\det \mathbf{M} \neq 0$.

Par ailleurs, la matrice des constantes de rappel est réelle symétrique $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$ parce que les forces dérivent d'un potentiel et que les dérivées partielles secondes commutent:

$$K_{\alpha\beta} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right|_0 = K_{\beta\alpha} \quad (4.95)$$

Pour trouver les solutions de l'éq. (4.91), supposons qu'elles soient périodiques:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \exp(i\omega t) \quad (4.96)$$

Dans ce cas, le vecteur des amplitudes \mathbf{A} doit satisfaire

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{A} = \omega^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{A} \quad (4.97)$$

et ce système admet des solutions non-triviales $\mathbf{A} \neq 0$ sous la condition

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (4.98)$$

dont les racines sont les carrés des fréquences propres $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^f$ du système. L'équation (4.97) diffère cependant d'une équation aux valeurs propres habituelle à cause de la présence d'une matrice agissant sur le vecteur \mathbf{A} dans les *deux* membres de l'équation. Pour pallier à cet inconvénient, nous multiplions les deux membres par $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ et nous réécrivons l'équation sous la forme

$$\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{A} = \omega^2 \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{A} \quad (4.99)$$

ce qui montre que le vecteur $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{A}$ est le vecteur propre de la matrice réelle symétrique $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ de valeur propre ω^2 . Par conséquent, il existe une transformation orthogonale \mathbf{O} qui diagonalise cette matrice réelle symétrique et qui s'écrit alors

$$\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{O}^T \cdot \Omega^2 \cdot \mathbf{O} \quad (4.100)$$

en termes de la matrice diagonale contenant toutes les fréquences propres: $(\Omega)_{\alpha\beta} = \omega_\alpha \delta_{\alpha\beta}$. Nous pouvons donc introduire les nouvelles variables

$$\mathbf{z} \equiv \mathbf{O} \cdot \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{x} \quad (4.101)$$

et celles-ci obéissent aux équations

$$\ddot{\mathbf{z}} + \Omega^2 \cdot \mathbf{z} = 0 \quad (4.102)$$

Comme la matrice Ω est diagonale, toutes les éqs. (4.102) sont découplées les unes des autres de sorte que chacune des variables z_α se comporte comme la position d'un oscillateur harmonique de fréquence ω_α :

$$\ddot{z}_\alpha + \omega_\alpha^2 z_\alpha = 0 \quad (4.103)$$

Ces variables sont les amplitudes des modes normaux de vibration du système. Les carrés de leur fréquence sont donc donnés par les f racines de

$$\det \left(\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} - \omega^2 \mathbf{1} \right) = 0 \quad (4.104)$$

ce qui revient à diagonaliser la matrice réelle symétrique $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$. Le vecteur propre correspondant à ω_α^2 est placé sur la ligne α de la matrice orthogonale $\mathbf{O} = (O_{\alpha\beta})$. La solution générale du système s'écrit alors

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{z} \quad (4.105)$$

où $\mathbf{z} = (z_\alpha)$ est le vecteur des solutions

$$z_\alpha(t) = C_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha) \quad \text{si } \omega_\alpha \neq 0 \quad (4.106)$$

des équations (4.103). On obtient donc

$$x_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{m_\alpha}} \sum_\beta O_{\beta\alpha} z_\beta(t) \quad (4.107)$$

c'est-à-dire

$$x_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{m_\alpha}} \sum_\beta O_{\beta\alpha} C_\beta \cos(\omega_\beta t + \varphi_\beta) \quad (4.108)$$

Cette solution montre que la composante α du mode normal β est proportionnelle à $O_{\beta\alpha}/\sqrt{m_\alpha}$ et s'exprime donc en termes de la ligne β de la matrice orthogonale, c'est-à-dire en termes du vecteur propre associé à la valeur propre ω_β^2 . Ce résultat montre qu'un corps matériel de grande masse a tendance à moins vibrer qu'un autre de petite masse si le système évolue dans un de ses modes normaux. Il est cependant possible que $O_{\beta\alpha} = 0$ indépendamment de la masse de sorte que $x_\alpha(t) = 0$, ce qui est appelé un *noeud du mode normal*.

Pour un système oscillant attaché à des parois, on peut s'attendre à trouver autant de fréquences propres non-nulles $\omega_\alpha > 0$ que de degré de liberté $f = 3N$ car le système n'est pas libre de partir en mouvement rectiligne uniforme ou de tourner sur lui-même. Par contre, si le système est isolé comme une molécule, son centre de masse n'est soumis à aucune force de rappel et elle peut tourner sur elle-même. Par conséquent, on doit s'attendre à l'annulation de plusieurs fréquences propres. Dans l'espace tridimensionnel, les trois composantes de la position du centre de masse peuvent être changées sans modifier l'énergie potentielle élastique de la molécule. De plus, cette énergie ne change pas sous l'effet de rotations de la molécule dans son ensemble. Si la molécule est non-linéaire comme une molécule de méthane CH₄, elle peut être tournée dans trois directions angulaires. Par conséquent, le nombre de modes normaux de vibration d'une *molécule non-linéaire* de N atomes est égal à

$$f = 3N - 6 \quad (4.109)$$

Si la molécule est linéaire comme une molécule diatomique (par exemple H₂, O₂, N₂, CO,...) ou CO₂, une rotation autour de son axe ne constitue pas un changement d'orientation effectif permettant de savoir si une modification de l'énergie potentielle se produit. Seules deux directions angulaires parmi les trois déplacent physiquement les atomes de la molécule sans changer son énergie potentielle. Par conséquent, le nombre de modes normaux de vibrations d'une *molécule linéaire* de N atomes vaut

$$f = 3N - 5 \quad (4.110)$$

Une molécule diatomique pour laquelle $N = 2$ ne présente donc qu'un seul mode de vibration qui est celui de l'élargissement du lien entre ses atomes. Une molécule triatomique linéaire pour laquelle $N = 3$ comme le dioxyde de carbone CO₂ présente quatre modes normaux de vibrations: les élargissements symétrique ($\nu_1 = 4,2 \times 10^{13}$ Hz, $T_1 = 24$ fs) et asymétrique ($\nu_3 = 7 \times 10^{13}$ Hz, $T_3 = 14$ fs) et des deux modes de pliage de même fréquence dans les deux directions perpendiculaires à l'axe de la molécule ($\nu_2 = 2 \times 10^{13}$ Hz, $T_2 = 50$ fs). Par contre, une molécule triatomique non-linéaire comme l'eau H₂O ne présente que trois modes normaux: les élargissements symétrique ($\nu_1 = 10,9 \times 10^{13}$ Hz, $T_1 = 9,1$ fs) et asymétrique ($\nu_3 = 11,3 \times 10^{13}$ Hz, $T_3 = 8,9$ fs) et un seul mode de pliage ($\nu_2 = 4,8 \times 10^{13}$ Hz, $T_2 = 21$ fs). Comme on peut s'y attendre intuitivement les modes de pliage ont des fréquences plus petites que les modes d'élargissement. Les fréquences en cycle par seconde, c'est-à-dire en Hertz, sont données par

$$\nu_\alpha = \frac{\omega_\alpha}{2\pi} \quad [\nu_\alpha] = \text{Hz} \quad (4.111)$$

et les périodes par

$$T_\alpha = \frac{1}{\nu_\alpha} = \frac{2\pi}{\omega_\alpha} \quad [T_\alpha] = \text{s} \quad (4.112)$$

en termes de fréquences angulaires ω_α en radian par seconde.

4.6 Chaînes d'oscillateurs harmoniques couplés et ondes

La propagation des ondes sonores dans un solide cristallin peut se comprendre en termes de la vibration des atomes dans la très grande molécule formée par le solide. Si les mouvements des atomes sont de petites oscillations autour de leur position d'équilibre, les vibrations du solide peuvent se décrire comme un système mécanique d'énergie $E = T + U$ où T est l'énergie cinétique des atomes et U est l'énergie potentielle élastique contenue dans les liaisons chimiques entre les atomes. Pour de petites oscillations, on peut ne retenir que les termes quadratiques en les écarts des atomes vis-à-vis des positions d'équilibre de sorte que les équations de Newton pour leurs mouvements font intervenir des forces de rappel linéaires en les écarts.

Pour fixer les idées, considérons une chaîne unidimensionnelle d'atomes se déplaçant sur la droite Ox sous l'effet par des liaisons élastiques qui les retiennent, d'une part, les uns aux autres et, d'autre part, à un socle (voir fig. 4.11a).

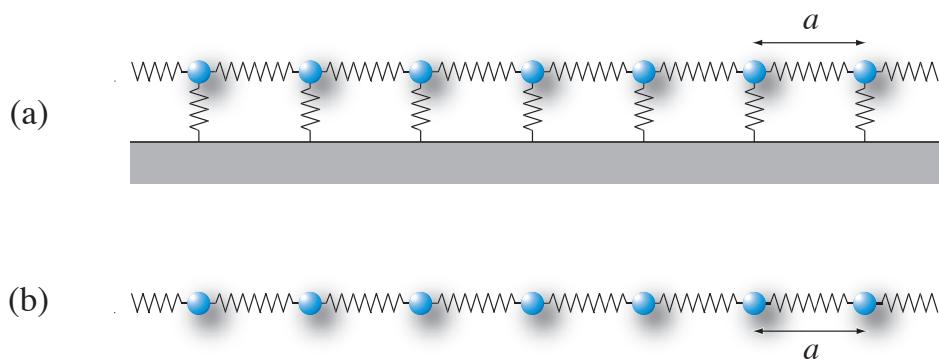


Figure 4.11: (a) Chaîne unidimensionnelle d'oscillateurs couplés les uns aux autres et à un socle. (b) La même chaîne mais découpée du socle. La distance d'équilibre entre les atomes est égale à a . On désigne par κ la constante de rappel des liaisons des atomes entre eux et par κ_0 celles des liaisons des atomes au socle.

Un modèle simple est défini par l'énergie totale donnée par la fonction hamiltonienne $E = H$ suivante:

$$H = \sum_l \left[\frac{p_l^2}{2m} + \frac{\kappa_0}{2} x_l^2 + \frac{\kappa}{2} (x_l - x_{l+1})^2 \right] \quad (4.113)$$

La somme s'étend sur $-\infty < l < +\infty$ si la chaîne est infinie. Autrement, on peut considérer que la chaîne forme un anneau refermé sur lui-même et contenant un nombre fini N d'atomes. Ceci revient à prendre des conditions aux bords périodiques en identifiant $x_{N+1} = x_1$. On

remarquera que les variables x_l sont les écarts vis-à-vis des positions d'équilibres $r_{l,\text{eq}} = al$ où a est la longueur d'équilibre des liaisons chimiques (voir fig. 4.11).

L'équation de Newton du l^{e} atome est obtenue en dérivant l'énergie potentielle par rapport à la variable x_l . Dans la série (4.113), cette position apparaît dans les deux termes successifs correspondant à $l - 1$ et l . On trouve

$$m \frac{d^2 x_l}{dt^2} = -\kappa_0 x_l - \kappa (-x_{l+1} + 2x_l - x_{l-1}) \quad (4.114)$$

Toutes les équations de Newton sont couplées les unes aux autres et forment un système infini d'équations différentielles ordinaires linéaires et homogènes. Pour résoudre ce système, on suppose que les écarts varient de façon périodique dans le temps et aussi le long de la chaîne:

$$x_l = C e^{iqal} e^{i\omega t} \quad (4.115)$$

avec une fréquence angulaire ω et son équivalent spatial q qui est appelé le nombre d'onde. Le nombre d'onde varie dans l'intervalle $-\frac{\pi}{a} < q \leq +\frac{\pi}{a}$. Au-delà de cet intervalle, on retrouve les mêmes solutions. Il s'agit donc d'une solution de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et de longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{q}$. Il nous faut déterminer la relation entre la période et la longueur d'onde ou, de manière équivalente, entre la fréquence angulaire et le nombre d'onde. C'est cette relation, appelée *relation de dispersion*, reliant les dépendances spatiales et temporelles de la solution qui détermine les propriétés de propagation des ondes le long de la chaîne. En introduisant, l'hypothèse (4.115) dans les équations de Newton (4.114), on obtient la relation suivante

$$-m\omega^2 = -\kappa_0 - \kappa (-e^{+iqa} + 2 - e^{-iqa}) \quad (4.116)$$

ce qui se réécrit sous la forme

$$-m\omega^2 = -\kappa_0 + 4\kappa \sin^2 \frac{qa}{2} \quad (4.117)$$

Par conséquent, la fréquence angulaire d'une onde de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/q$ est donnée par

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa_0}{m} + 4 \frac{\kappa}{m} \sin^2 \frac{qa}{2}} \quad \left(-\frac{\pi}{a} < q \leq +\frac{\pi}{a} \right) \quad (4.118)$$

Cette relation de dispersion est représentée sur la fig. 4.11 pour différentes valeurs de κ_0 .

Ces solutions sont en fait des modes normaux de vibration de la chaîne d'oscillateurs. Il existe une infinité car la chaîne est infinie. Si la chaîne forme un anneau avec des conditions aux bords périodiques, on retrouve un nombre fini de modes normaux égal au nombre de degrés de liberté, à savoir ici le nombre N d'atomes puisque le système est unidimensionnel. En

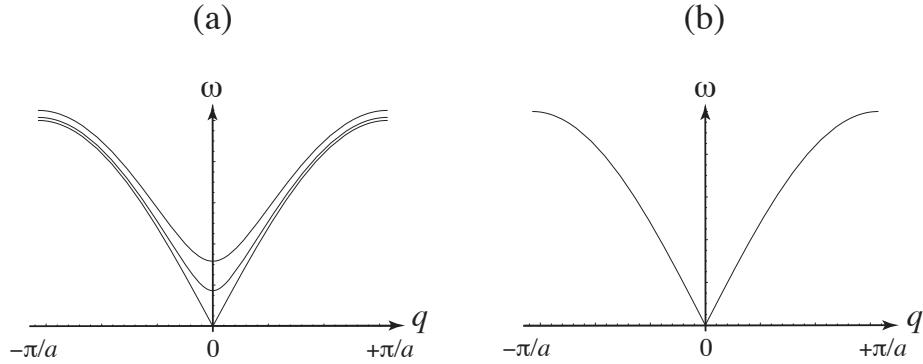


Figure 4.12: (a) Relation de dispersion des ondes se propageant le long d'une chaîne d'oscillateurs harmoniques couplés pour différentes valeurs de κ_0 . (b) Relation de dispersion pour une chaîne libre avec $\kappa_0 = 0$.

effet, imposant la condition aux bords $x_{N+1} = x_1$ à la solution (4.115), on trouve la contrainte $e^{iqaN} = 1$ de sorte que les valeurs sélectionnées du nombre d'onde sont discrètes $q = \frac{2\pi j}{Na}$. Comme le nombre d'onde varie dans l'intervalle $-\frac{\pi}{a} < q \leq +\frac{\pi}{a}$ ou de manière équivalente $0 \leq q < \frac{2\pi}{a}$, en dehors duquel on retrouve les mêmes solutions, l'entier j prend les valeurs $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ou encore $-\frac{N}{2} < j \leq +\frac{N}{2}$ si N est pair et $-\frac{N-1}{2} < j \leq +\frac{N-1}{2}$ si N est impair, c'est-à-dire N valeurs dans tous les cas. Si la chaîne n'est plus attachée au socle, $\kappa_0 = 0$, la relation de dispersion devient

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \left| \sin \frac{qa}{2} \right| \quad \left(-\frac{\pi}{a} < q \leq +\frac{\pi}{a} \right) \quad (4.119)$$

représentée à la fig. 4.12b. Dans ce cas, la relation de dispersion s'annule avec le nombre d'onde selon

$$\omega = v_s |q| + O(|q|^3) \quad \text{avec} \quad v_s = \frac{\partial \omega}{\partial q}(q=0) = a \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \quad (4.120)$$

de sorte que la fréquence est de plus en plus petite lorsque la longueur d'onde devient infinie. Ce comportement caractérise les ondes acoustiques. En effet si la relation de dispersion était strictement linéaire $\omega = v_s |q|$ la solution (4.115) serait pour $q < 0$ une onde de la forme $x_l = C e^{iq(al-v_s t)}$ se déplaçant à la vitesse v_s . Cette vitesse est donnée par la pente de la relation de dispersion en $q = 0$ et $\omega = 0$. Elle représente donc la vitesse de propagation des ondes sonores le long de la chaîne. En termes de la fréquence $\nu = \omega/2\pi$ et de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/q$, la relation de dispersion s'écrirait $\nu = v_s/\lambda$. Il faut remarquer que cette relation n'est valable que pour des longueurs d'onde suffisamment grandes de sorte que les termes cubiques sont négligeables. La condition de validité de cette approximation est $|qa| \ll 1$ ou encore $\lambda \gg 2\pi a$. Comme la distance a entre les atomes dans un solide est de l'ordre de l'Ångström, soit 10^{-10} m, cette condition est fort bien satisfaite pour les ondes sonores des

fréquences $20 \text{ Hz} < \nu < 20000 \text{ Hz}$ perceptibles à l'oreille humaine. La vitesse du son dans le fer est de 5130 m/s et seulement de 1230 m/s dans un métal ductile comme le plomb. Les longueurs d'onde acoustique correspondantes se situent donc dans la gamme $0,26 \text{ m} < \lambda < 260 \text{ m}$ pour le fer et $0,062 \text{ m} < \lambda < 62 \text{ m}$ pour le plomb. Dans ces deux exemples, les longueurs d'onde acoustique sont bien plus grandes que l'échelle atomique $2\pi a \sim 10^{-9} \text{ m}$, ce qui justifie l'utilisation pratique de la relation de dispersion $\omega = v_s |q|$ pour les ondes sonores.

Dans cette limite des grandes longueurs d'onde, le système infini d'équations de Newton couplées tend vers un milieu continu décrit par une équation aux dérivées partielles. Si l'on introduit une fonction $\varphi(r, t)$ décrivant les écarts des atomes vis-à-vis de leur position d'équilibre:

$$x_l(t) = \varphi(r, t) \quad \text{en } r = a l \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (4.121)$$

nous avons le développement

$$x_{l+1}(t) = \varphi(r + a, t) = \varphi(r, t) + a \partial_r \varphi(r, t) + \frac{a^2}{2} \partial_r^2 \varphi(r, t) + O(a^3) \quad (4.122)$$

En introduisant ce développement dans les équations de Newton (4.114), nous trouvons l'équation aux dérivées partielles

$$m \partial_t^2 \varphi = -\kappa_0 \varphi + \kappa a^2 \partial_r^2 \varphi \quad (4.123)$$

après avoir tronqué les termes en a^4 qui sont supposés négligeables pour des longueurs d'onde macroscopiques. Si le milieu n'est pas attaché à un socle, $\kappa_0 = 0$, on retrouve bien l'équation d'onde

$$\partial_t^2 \varphi = v_s^2 \partial_r^2 \varphi \quad (4.124)$$

avec la vitesse de propagation $v_s = a \sqrt{\kappa/m}$.

4.7 Pendule simple

Considérons à présent un exemple d'oscillateur anharmonique avec un seul degré de liberté. Il s'agit du pendule simple formé par un corps de masse m suspendu à un point d'attache par une tige rigide de longueur l et de masse négligeable, le tout oscillant dans le champ de gravité terrestre (voir fig. 4.13).

Le corps matériel se déplace sur un cercle de rayon l dans un plan vertical Oxz . Sa position est donc univoquement déterminée par l'angle θ de la tige vis-à-vis de la direction verticale descendante. Le corps est soumis à deux forces: d'une part la force de gravité verticale $\mathbf{F}_g =$

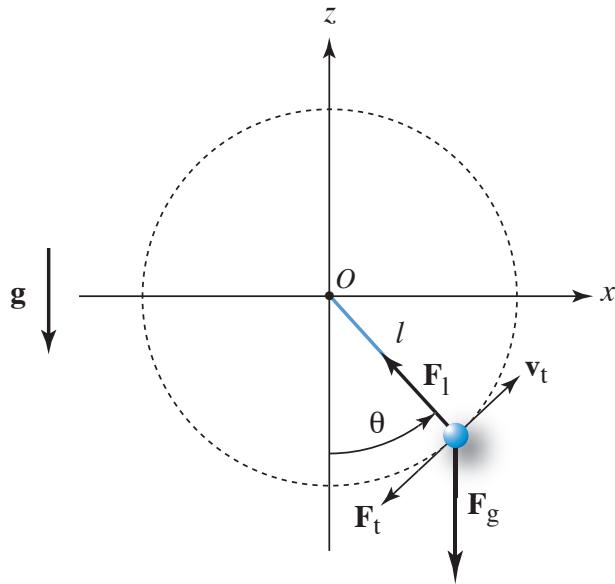


Figure 4.13: Schéma du pendule simple.

$m\mathbf{g} = -mg\mathbf{u}_z$ et, d'autre part, la force de réaction \mathbf{F}_l de la liaison au point d'attache O et qui s'exerce au travers de la tige. L'équation de Newton est donc

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_l \quad (4.125)$$

La force de réaction est toujours perpendiculaire au déplacement du corps matériel et, en particulier, à sa vitesse

$$\mathbf{F}_l \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0 \quad (4.126)$$

On néglige ici les forces de frottement de sorte que l'on parle dans ce cas de liaisons polies. En multipliant les deux membres de l'équation de Newton par la vitesse, on élimine donc la force de réaction de la liaison. En intégrant sur le temps, nous obtenons la relation de conservation de l'énergie

$$E = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} \quad (4.127)$$

Comme le vecteur de position est contraint de se déplacer sur un cercle de rayon l dans le plan vertical Oxz , nous avons que

$$\mathbf{r} = l \sin \theta \mathbf{u}_x - l \cos \theta \mathbf{u}_z \quad (4.128)$$

et

$$\dot{\mathbf{r}} = l \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{u}_x + l \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{u}_z \quad (4.129)$$

de sorte que l'énergie devient

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l \cos \theta \quad (4.130)$$

En décrivant par rapport au temps, nous trouvons l'équation différentielle ordinaire à laquelle obéit l'angle θ :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (4.131)$$

qui est l'équation du mouvement du pendule simple. L'énergie potentielle $U = -mgl \cos \theta$ est représentée sur la fig. 4.14a.

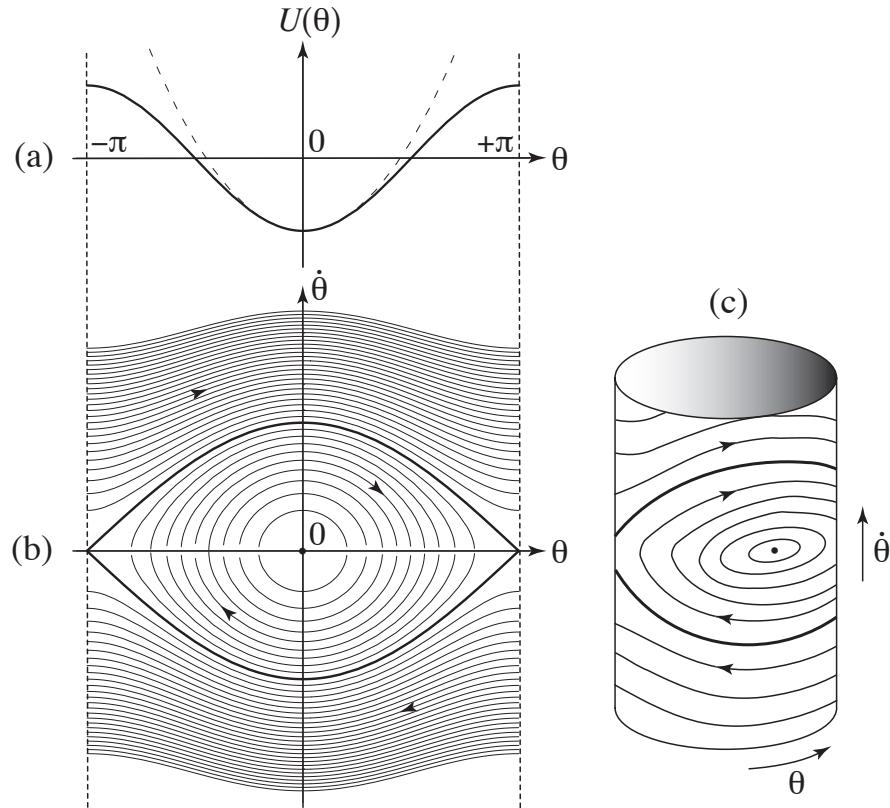


Figure 4.14: (a) Energie potentielle du pendule simple. (b) Portrait de phase du pendule simple dans le plan $(\theta, \dot{\theta})$. (c) Schéma du portrait de phase sur le cylindre $(\theta, \dot{\theta})$ avec $-\pi < \theta \leq +\pi$.

On remarquera que l'éq. (4.131) peut être directement obtenue en projetant l'équation de Newton (4.125) sur la droite tangente au cercle sur la fig. 4.13, ce qui élimine la force de réaction de la liaison: $m \frac{dv_t}{dt} = F_t = -mg \sin \theta$ avec la vitesse tangentielle $v_t = l\dot{\theta}$.

On doit s'attendre à des oscillations harmoniques seulement si l'angle θ varie peu autour du point d'équilibre stable $\theta = 0$. En effet, une approximation du sinus est dans ce cas donnée par

$\sin \theta \simeq \theta$ et l'on retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ avec la fréquence angulaire

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (4.132)$$

Cependant, si l'amplitude du mouvement est plus importante, les effets des termes non-linéaires commencent à se faire sentir.

Une méthode pour comprendre qualitativement ces effets passe par l'établissement du portrait de phase comme expliqué à la section 4.1. Comme l'éq. (4.131) est périodique en l'angle θ , l'espace des phases est un cylindre avec $-\pi < \theta \leq +\pi$ et $-\infty < \dot{\theta} < +\infty$. Déterminons tout d'abord les points d'équilibre mécanique où les forces s'annulent, c'est-à-dire où l'accélération est nulle $\ddot{\theta} = 0$. Ces points d'équilibre doivent donc satisfaire $\sin \theta = 0$. Il y a ainsi deux points d'équilibre: le point d'équilibre stable du pendule en $\theta = 0$ et le point d'équilibre instable en $\theta = \pi$ (équivalent à $\theta = -\pi$) où le pendule est inversé. Dans l'espace des phases, ces deux points d'équilibre sont situés à vitesse nulle $\dot{\theta} = 0$. Si l'énergie du pendule est comprise entre le minimum et le maximum de son énergie potentielle, $U_{\min} = -mgl < E < U_{\max} = +mgl$, le pendule effectue un mouvement périodique de va-et-vient dans le puits de potentiel. Ce mouvement d'oscillation est aussi appelé mouvement de libration. Par contre, si l'énergie du pendule excède l'énergie potentielle maximum $E > U_{\max} = +mgl$, le pendule effectue un mouvement périodique de rotation autour de son point d'attache. Ces deux types de mouvement sont séparés par une paire de trajectoires non-périodiques particulières appelées des séparatrices et dont l'énergie vaut $E = U_{\max} = +mgl$ (voir fig. 4.13b). Ces séparatrices sont les trajectoires qui connectent dans un sens ou l'autre le point d'équilibre instable à lui-même après un tour complet du pendule et sont aussi appelées des orbites homoclines pour cette raison. Le temps mis pour parcourir chacune de ces trajectoires est infini car il faut un temps arbitrairement long pour quitter le point d'équilibre ou y revenir si l'énergie est juste égale à l'énergie du point en question. On doit donc s'attendre à ce que la période augmente indéfiniment à mesure que l'énergie augmente pour diminuer ensuite au-delà de l'énergie du point d'équilibre instable.

Pour obtenir analytiquement la période et la solution du pendule simple, nous introduisons le paramètre

$$k^2 \equiv \frac{E + mgl}{2mgl} \quad (4.133)$$

qui représente une mesure de l'énergie relative vis-à-vis du minimum de l'énergie potentielle. Ce paramètre vaut $0 < k^2 < 1$ pour les mouvements de libration, $k^2 = 1$ pour les séparatrices et $k^2 > 1$ pour les mouvements de rotation. Par ailleurs, si le cosinus est développé en termes

du sinus de l'angle demi, $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, l'énergie (4.130) devient

$$k^2 = \left(\frac{\dot{\theta}}{2\omega} \right)^2 + \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \quad (4.134)$$

et la solution est donnée par

$$\frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\sqrt{k^2 - (\sin \frac{\theta'}{2})^2}} = \pm \omega(t - t_0) \quad (4.135)$$

Deux cas se présentent:

(1) Mouvement de libration ($0 < k < 1$)

Dans ce cas, l'angle θ oscille dans l'intervalle $-\theta_0 \leq \theta(t) \leq +\theta_0$ avec

$$\sin \frac{\theta_0}{2} \equiv k \quad (4.136)$$

C'est l'angle d'amplitude maximale des oscillations où la vitesse s'annule $\dot{\theta} = 0$. La période de ces oscillations est alors donnée par

$$T = \frac{1}{\omega} \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - (\sin \frac{\theta}{2})^2}} = \frac{2}{\omega} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{(\sin \frac{\theta_0}{2})^2 - (\sin \frac{\theta}{2})^2}} \quad (4.137)$$

Si nous introduisons une variable alternative φ d'après

$$\sin \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi \quad (4.138)$$

la période s'écrit sous la forme:

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4.139)$$

Cette intégrale est appelée une *intégrale elliptique complète de 1^e espèce* et notée

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (0 \leq k < 1) \quad (4.140)$$

Cette fonction du paramètre k est tabulée [1, 2, 3, 4]. Elle admet le développement de Taylor suivant

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 k^6 + \dots \right] \quad (4.141)$$

Par ailleurs, elle diverge comme

$$K(k) \simeq \ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \quad \text{pour } k \simeq 1 \quad (4.142)$$

En termes de cette fonction, la période des mouvements de libration s'écrit

$$T = \frac{4}{\omega} K(k) \quad (0 < k < 1) \quad (4.143)$$

Pour des oscillations de petite amplitude θ_0 , on retrouve bien la période de l'oscillateur harmonique puisque

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 + \dots \right) \quad (4.144)$$

Par contre, la période diverge à l'approche de l'énergie des mouvements de rotation comme

$$T \simeq \frac{4}{\omega} \ln \frac{8}{\pi - \theta_0} \quad \text{pour } \theta_0 \gtrsim \pi \quad (4.145)$$

c'est-à-dire comme

$$T \simeq \frac{2}{\omega} \ln \frac{32mgl}{mgl - E} \quad \text{pour } E \gtrsim mgl \quad (4.146)$$

La trajectoire elle-même peut s'exprimer en termes de *fonctions elliptiques de Jacobi*. En utilisant le nouvel angle φ introduit dans l'éq. (4.138), l'éq. (4.134) s'écrit sous la forme

$$1 = \frac{\dot{\varphi}^2}{\omega^2} + k^2 \sin^2 \varphi \quad \text{pour } 0 < k < 1 \quad (4.147)$$

Cette équation s'intègre pour donner une *intégrale elliptique incomplète de 1^e espèce*:

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi'}} \equiv F(\varphi|k) \quad \text{avec } u = \omega(t - t_0) \quad (4.148)$$

L'inversion de cette fonction définit l'*amplitude de Jacobi*:

$$\operatorname{am} u \equiv F^{-1}(u|k) = \varphi \quad (4.149)$$

Les fonctions elliptiques de Jacobi sont alors définies par

$$\operatorname{sn} u \equiv \sin(\operatorname{am} u) \quad (4.150)$$

$$\operatorname{cn} u \equiv \cos(\operatorname{am} u) \quad (4.151)$$

$$\operatorname{dn} u \equiv \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u} \quad (4.152)$$

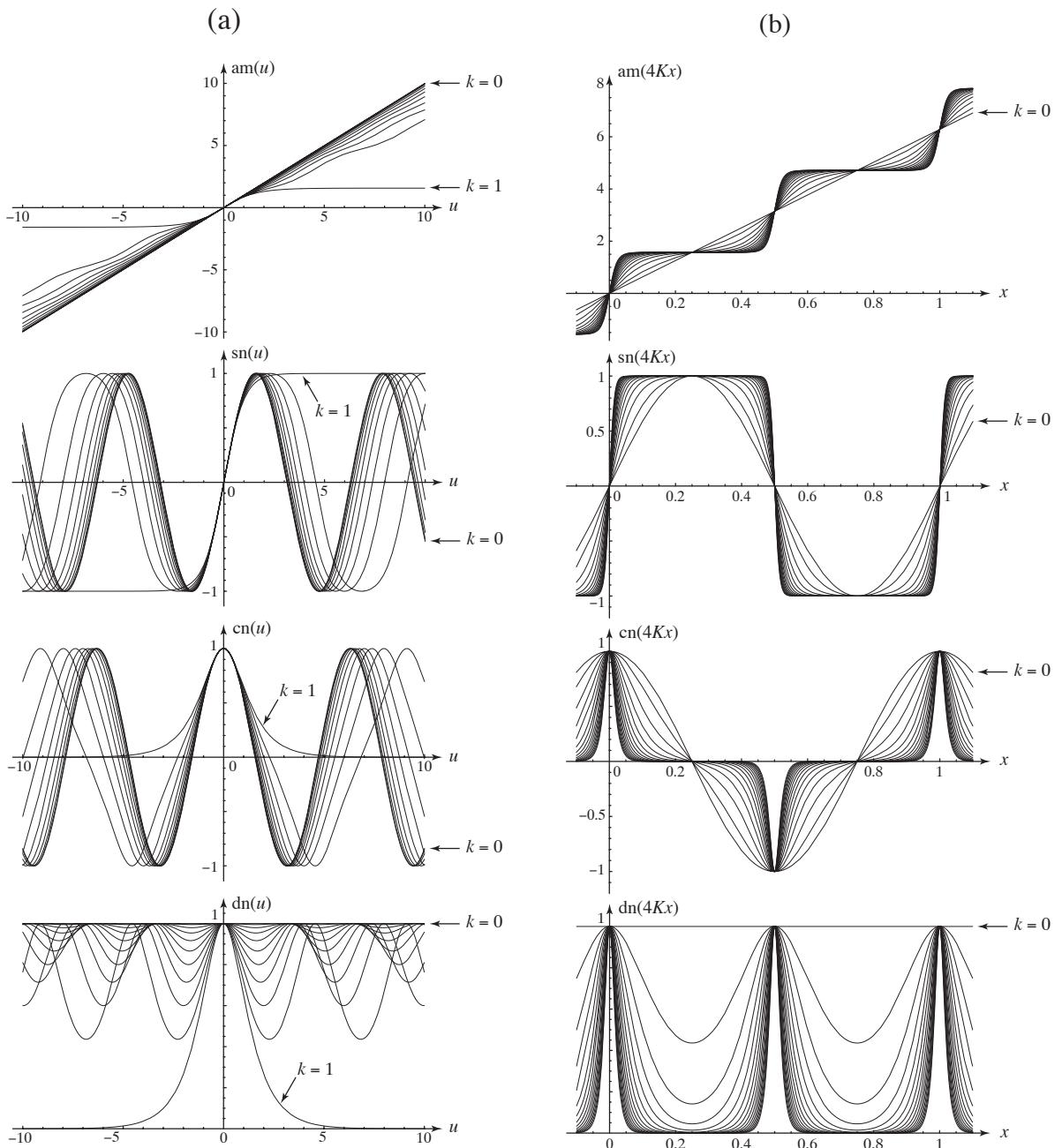


Figure 4.15: Fonctions elliptiques de Jacobi: (a) Les fonctions $\text{am}(u)$, $\text{sn}(u)$, $\text{cn}(u)$ et $\text{dn}(u)$ versus u , pour des valeurs du module allant de $k = 0$ à $k = 1$ par pas de 0,1. (b) Les fonctions $\text{am}(4Kx)$, $\text{sn}(4Kx)$, $\text{cn}(4Kx)$ et $\text{dn}(4Kx)$ versus x où $K = K(k)$ est l'intégrale elliptique complète de 1^e espèce, pour un module valant $k = 1 - 10^{-n}$ avec $n = 0, 1, 2, \dots, 15$.

Ces fonctions spéciales ont les propriétés suivantes qui découlent de leur définition ci-dessus en termes des fonctions trigonométriques:

$$\operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u = 1 \quad (4.153)$$

$$\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1 \quad (4.154)$$

et

$$\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u \quad (4.155)$$

$$\operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u \quad (4.156)$$

$$\operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn} u \quad (4.157)$$

Il s'agit de fonctions périodiques de leur argument u . En effet, cet argument prend la valeur $u = K$ lorsque $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et donc la valeur $u = 4K$ lorsque $\varphi = 2\pi$. L'intégrale elliptique complète de 1^e espèce représente donc le quart de période des fonctions elliptiques de Jacobi:

$$\operatorname{sn}(u + 4K) = \operatorname{sn} u \quad (4.158)$$

$$\operatorname{cn}(u + 4K) = \operatorname{cn} u \quad (4.159)$$

$$\operatorname{dn}(u + 4K) = \operatorname{dn}(u + 2K) = \operatorname{dn} u \quad (4.160)$$

Ces fonctions sont représentées pour des valeurs particulières du *module de Jacobi* k sur la fig. 4.15.

Lorsque le module de Jacobi s'annule, $k = 0$, les fonctions elliptiques se réduisent aux fonctions trigonométriques:

$$\text{Si } k = 0 : \quad \operatorname{am} u = u \quad (4.161)$$

$$\operatorname{sn} u = \sin u \quad (4.162)$$

$$\operatorname{cn} u = \cos u \quad (4.163)$$

$$\operatorname{dn} u = 1 \quad (4.164)$$

Lorsque le module de Jacobi tend vers l'unité, $k = 1$, elles se transforment en les fonctions hyperboliques suivantes:

$$\text{Si } k = 1 : \quad \operatorname{am} u = \arcsin \tanh u \quad (4.165)$$

$$\operatorname{sn} u = \tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u} \quad (4.166)$$

$$\operatorname{cn} u = \operatorname{sech} u = \frac{1}{\cosh u} \quad (4.167)$$

$$\operatorname{dn} u = \operatorname{sech} u = \frac{1}{\cosh u} \quad (4.168)$$

et leur période diverge. Ce résultat découle du fait que

$$u = F(\varphi|k=1) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\cos \varphi'} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \ln \sqrt{\frac{1+\sin \varphi}{1-\sin \varphi}} \quad (4.169)$$

de sorte que $\sin \varphi = \tanh u$. Etant donné que $u = \omega(t-t_0)$, nous obtenons la solution oscillante du pendule simple sous la forme:

$$\sin \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi = k \operatorname{sn} [\omega(t-t_0)|k] \quad (0 < k < 1) \quad (4.170)$$

de sorte que

$$\theta(t) = 2 \arcsin \{k \operatorname{sn} [\omega(t-t_0)|k]\} \quad (0 < k < 1) \quad (4.171)$$

Remarque: Dans le cas critique où $k = 1$, nous obtenons

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \varphi = \tanh \omega(t-t_0) \quad (k = 1) \quad (4.172)$$

ou encore

$$\theta(t) = 2 \arcsin [\tanh \omega(t-t_0)] \quad (4.173)$$

Comme la tangente hyperbolique tend vers -1 pour $t \rightarrow -\infty$ et $+1$ pour $t \rightarrow +\infty$, cette solution connecte $\theta = -\pi$ pour $t \rightarrow -\infty$ à $\theta = +\pi$ pour $t \rightarrow +\infty$ à vitesse angulaire positive $\dot{\theta} > 0$. Il s'agit donc de la séparatrice à vitesse positive sur la fig. 4.14b. Sa symétrique à vitesse négative est obtenue en considérant l'autre signe devant la racine carrée.

(2) Mouvement de rotation ($k > 1$)

Lorsque l'énergie est suffisante pour que le pendule puisse faire des tours complets, l'angle $\theta(t)$ ne rencontre pas de point de rebroussement et une période est accomplie lorsque $\theta(t)$ varie de $-\pi$ à $+\pi$ (ou vice versa) de sorte qu'elle est égale à

$$T = \frac{1}{2\omega} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - (\sin \frac{\theta}{2})^2}} \quad (4.174)$$

On posera ici simplement $\varphi = \theta/2$ pour obtenir

$$T = \frac{2}{\omega k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^{-2} \sin^2 \varphi}} \quad (4.175)$$

ce qui montre que la période s'exprime ici aussi en termes de l'intégrale elliptique complète de 1^e espèce mais dont le module de Jacobi est l'inverse du précédent:

$$T = \frac{2}{\omega k} K(k^{-1}) \quad (4.176)$$

Lorsque l'énergie augmente indéfiniment la période diminue puisque la vitesse de rotation augmente:

$$T \simeq_{E \rightarrow \infty} \pi l \sqrt{\frac{2m}{E}} \quad (4.177)$$

et l'on retrouve la période d'une rotation libre à l'énergie purement cinétique $E \simeq \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \gg mgl$. Par contre, la période diverge lorsque l'énergie approche la valeur critique du maximum de potentiel:

$$T \simeq \frac{1}{\omega} \ln \frac{32mgl}{E - mgl} \quad E \gtrsim mgl \quad (4.178)$$

La comparaison avec l'expression (4.146) montre que la période diffère d'un facteur 2 de part et d'autre de la divergence. Ce rapport de période s'explique par le fait que l'orbite périodique pour $k \lesssim 1$ doit effectuer un chemin double de celui pour $k \gtrsim 1$ comme on le voit sur le portrait de phase à la fig. 4.14b pour les orbites de part et d'autre de la séparatrice. Le comportement global de la période est représenté sur la fig. 4.16.

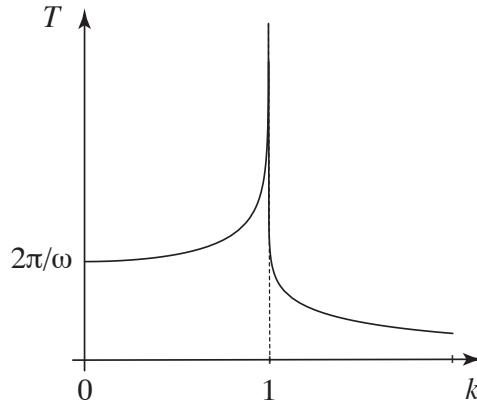


Figure 4.16: Période du pendule simple en fonction du paramètre $k = \sqrt{\frac{E+mgl}{2mgl}}$.

En posant $\varphi = \theta/2$, l'équation (4.134) devient

$$1 = \left(\frac{\dot{\varphi}}{k\omega} \right)^2 + \frac{1}{k^2} \sin^2 \varphi \quad (4.179)$$

qui s'intègre pour donner

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k^{-2} \sin^2 \varphi'}} = F(\varphi|k^{-1}) \quad \text{avec } u = k\omega(t - t_0) \quad (4.180)$$

En inversant pour obtenir $\varphi = \theta/2$ en fonction de u , nous obtenons

$$\theta(t) = 2 \operatorname{am} [k\omega(t - t_0)|k^{-1}] \quad (4.181)$$

ou encore

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \varphi = \operatorname{sn} [k\omega(t - t_0)|k^{-1}] \quad (4.182)$$

Dans la limite $k = 1$, on retrouve bien la tangente hyperbolique ce qui est consistant avec la limite précédente.

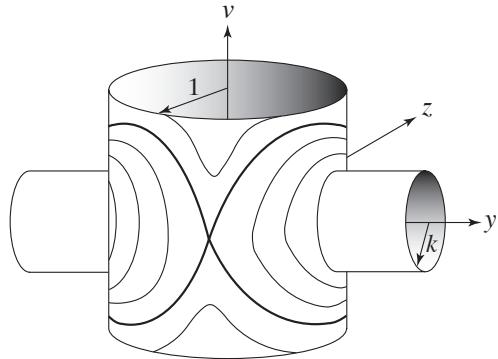


Figure 4.17: Portrait de phase du pendule simple dans l'espace (y, z, v) où les trajectoires sont à l'intersection des deux cylindres (4.186). On remarquera que le cylindre de phase $y^2 + z^2 = 1$ est le double de celui sur la fig. 4.14c.

Les résultats ci-dessus admettent une interprétation géométrique si l'on pose:

$$y = \cos \frac{\theta}{2} \quad (4.183)$$

$$z = \sin \frac{\theta}{2} \quad (4.184)$$

$$v = \frac{\dot{\theta}}{2\omega} \quad (4.185)$$

L'équation (4.134) et les variables introduites vérifient

$$\begin{cases} v^2 + z^2 = k^2 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad (4.186)$$

Les trajectoires se trouvent donc à l'intersection de deux cylindres dans l'espace tridimensionnel (y, z, v) . Le premier cylindre est d'axe Oy et de rayon k , tandis que le second est d'axe Ov et de rayon unité (voir fig. 4.17) [5]. Lorsque $k < 1$, le cylindre de l'énergie coupe le cylindre de phase pour former deux orbites en boucles correspondant au même mouvement de libration. Pour $k = 1$, les deux cylindres ont le même rayon et leurs intersections se rejoignent pour former les séparatrices. Si $k > 1$, les intersections correspondent aux deux mouvements de rotation en sens opposés de vitesses $v > 0$ et $v < 0$ [5].

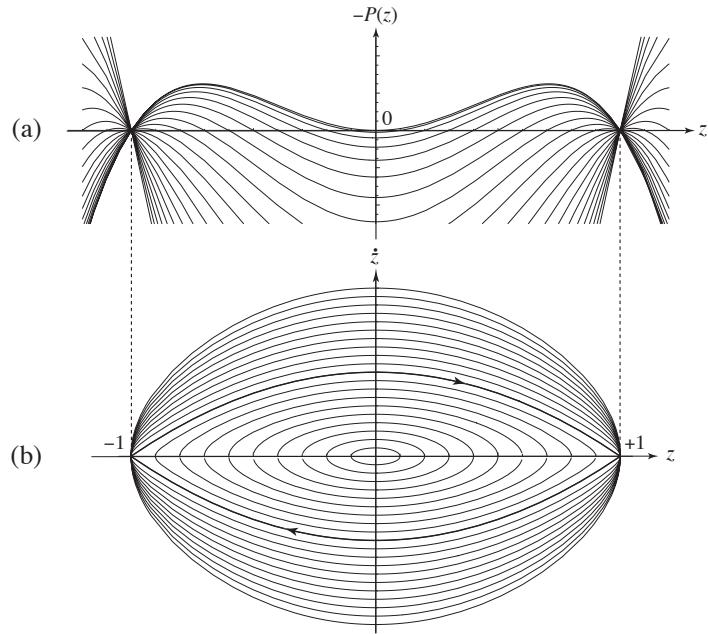


Figure 4.18: (a) La fonction $-P(z)$ donnée par l'éq. (4.187) pour différentes valeurs du module $k = 0, 1 \times n$ avec $n = 0, 1, 2, \dots, 20$. Les orbites y circulent dans l'intervalle $[-a, +a]$ avec $a = \min\{1, k\}$. (b) Portrait de phase du système défini par l'équation de Newton (4.189) pour les mêmes valeurs du module k .

En termes de la variable z , l'équation (4.134) s'écrit

$$\dot{z}^2 = \omega^2(1 - z^2)(k^2 - z^2) \quad (4.187)$$

qui est de la forme

$$\dot{z}^2 = P(z) \quad (4.188)$$

avec un polynôme $P(z)$ de degré quatre sous forme factorisée. L'équation du mouvement correspondant est

$$\ddot{z} = \omega^2 z(2z^2 - k^2 - 1) \quad (4.189)$$

Cette forme montre que le pendule simple est équivalent au mouvement d'une particule dans un potentiel en double puits inversé $U(z) = -\frac{1}{2}m\omega^2(1 - z^2)(k^2 - z^2)$ (voir fig. 4.18). Ce potentiel présente une cuvette où des mouvements oscillants se produisent qui correspondent tout à la fois aux mouvements de libration et de rotation du pendule simple. Les solutions sont:

$$k < 1 : \quad z = k \operatorname{sn}(\omega\tau|k) \quad (4.190)$$

$$k = 1 : \quad z = \tanh(\omega\tau) \quad (4.191)$$

$$k < 1 : \quad z = \operatorname{sn}(k\omega\tau|k^{-1}) \quad (4.192)$$

avec $\tau = t - t_0$.

4.8 Potentiel quartique à double puits

Les résultats ci-dessus suggèrent que le mouvement unidimensionnel dans un potentiel quartique à double puits

$$U(x) = -\frac{\mu}{2}x^2 + \frac{\lambda}{4}x^4 \quad (4.193)$$

avec $\mu > 0$ et $\lambda > 0$ est intégrable en termes de fonctions elliptiques de Jacobi. Ce potentiel et son portrait de phase sont représentés sur la fig. 4.19.

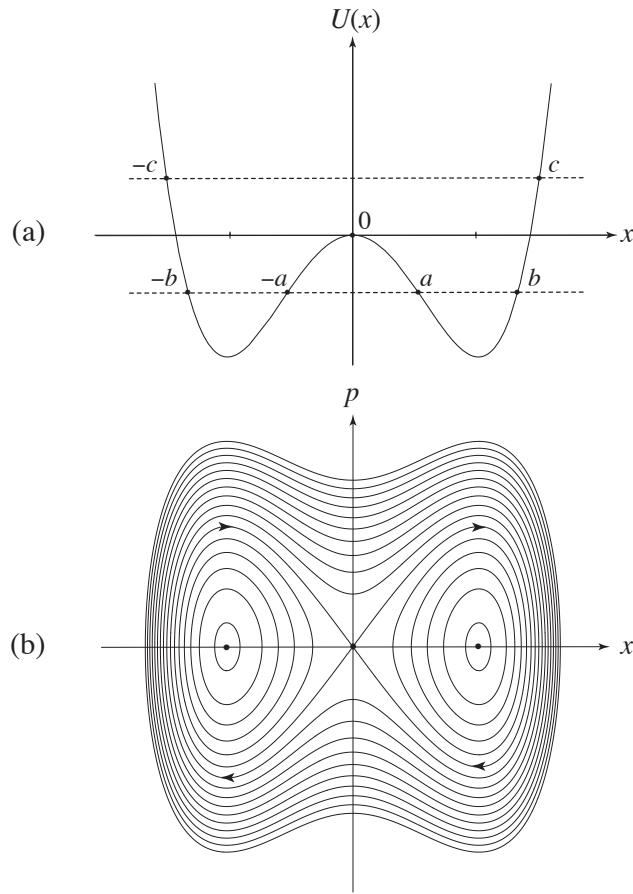


Figure 4.19: (a) Potentiel quartique en double puits. (b) Portrait de phase correspondant.

Le potentiel présente deux puits de minima situés en $x_{\min} = \pm\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$ où $U(x_{\min}) = -\frac{\mu^2}{4\lambda^2}$ et séparés pour une barrière de potentiel culminant au point d'équilibre instable $x_{\max} = 0$ où $U(x_{\max}) = 0$. Pour une énergie négative telle que $-\frac{\mu^2}{4\lambda^2} < E < 0$, la particule effectue des oscillations soit dans le puits de gauche, soit dans celui de droite selon ses conditions initiales qui brisent la symétrie de parité $x \rightarrow -x$. Si l'équation de Newton $m\ddot{x} = -U'(x)$ est symétrique

sous la parité, il n'en est pas nécessairement de même pour ses solutions puisque les oscillations dans un puits sont physiquement distinctes de celles dans l'autre puits. Par contre, pour des énergies positives, la particule passe d'un puits à l'autre par-dessus la barrière en un mouvement périodique qui est identique à sa symétrique sous la transformation de parité $x \rightarrow -x$.

Pour résoudre l'équation du mouvement en termes de fonctions elliptiques de Jacobi, il est nécessaire de factoriser l'expression sous la racine carrée dans l'impulsion

$$p = m\dot{x} = \pm \sqrt{2m \left(E + \frac{\mu}{2}x^2 - \frac{\lambda}{4}x^4 \right)} \quad (4.194)$$

Celle-ci a pour racines:

$$x^2 = \frac{\mu}{\lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 + \frac{4E}{\lambda}} \quad (4.195)$$

(1) Mouvements au fond des puits ($-\frac{\mu^2}{4\lambda} < E < 0$)

Lorsque l'énergie est négative, il existe quatre points de rebroussement, deux pour chaque puits:

$$x = \pm a, \pm b \quad (4.196)$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{\mu}{\lambda} - \sqrt{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 + \frac{4E}{\lambda}}} \\ b &= \sqrt{\frac{\mu}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 + \frac{4E}{\lambda}}} \end{aligned} \quad (4.197)$$

tels que $a < b$. L'impulsion s'écrit alors

$$p = m\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{m\lambda}{2}} \sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)} \quad (4.198)$$

Comme les mouvements oscillants sont compris dans les intervalles $a^2 \leq x^2 \leq b^2$, on pose

$$x^2 = b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi \quad (4.199)$$

et l'intégrale devient

$$\int_b^x \frac{dx'}{\sqrt{(x'^2 - a^2)(b^2 - x'^2)}} = -\frac{1}{b} \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi'}} = -\frac{1}{b} F(\varphi|k) = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2m}} (t - t_0) \quad (4.200)$$

avec le module de Jacobi

$$k^2 \equiv \frac{b^2 - a^2}{b^2} = \frac{2\sqrt{\mu^2 + 4E\lambda}}{\mu + \sqrt{\mu^2 + 4E\lambda}} \quad (4.201)$$

tel que $0 < k^2 \leq 1$. En inversant l'intégrale elliptique incomplète, on trouve que $\varphi = \operatorname{am} u$ avec $u = \pm b \sqrt{\frac{\lambda}{2m}}(t - t_0)$ et $x = b \operatorname{dn} u$ de sorte que la solution est donnée par

$$x(t) = b \operatorname{dn} \left[b \sqrt{\frac{\lambda}{2m}}(t - t_0) \left| \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \right. \right] \quad (4.202)$$

Sa période est égale à $T = \sqrt{\frac{2m}{\lambda}} \frac{2}{b} K \left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \right)$.

Si l'on pose $y^2 = x^2 - a^2$ et $v = \sqrt{\frac{2m}{\lambda}} \frac{\dot{x}}{y}$, on trouve que les trajectoires vérifient dans l'espace tridimensionnel (x, y, v) les conditions

$$\begin{cases} v^2 + x^2 = b^2 \\ x^2 - y^2 = a^2 \end{cases} \quad (4.203)$$

Les trajectoires sont donc les intersections d'un cylindre de base circulaire de rayon b et d'axe Oy et d'un autre de base hyperbolique parallèle à Ov (voir fig. 4.20). Les oscillateurs sont limités aux deux intervalles $-b \leq x \leq -a$ et $a \leq x \leq b$.

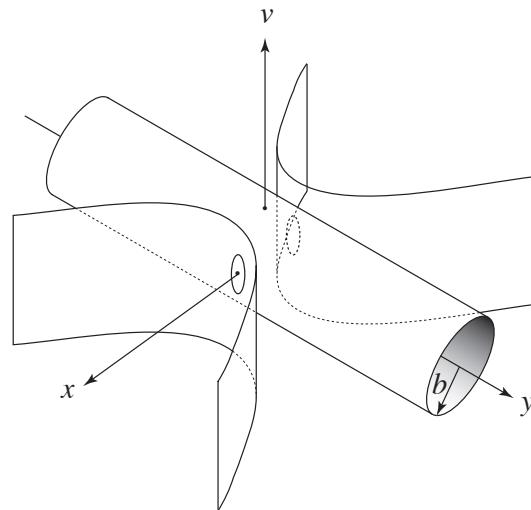


Figure 4.20: Portrait de phase des mouvements oscillants au fond des puits donnés par les intersections des cylindres (4.203).

Remarque: Pour $k = 1$, la fonction $\operatorname{dn} u$ tend vers $(\cosh u)^{-1}$ alors que $a = 0$ et $b = \sqrt{2\mu/\lambda}$ et l'on trouve l'orbite homocline ou séparatrice

$$x(t) = \frac{\sqrt{2\mu/\lambda}}{\cosh [\sqrt{\frac{\mu}{m}}(t - t_0)]} \quad (4.204)$$

et sa symétrique de signe opposé pour l'autre puits.

(2) Mouvement au-dessus des puits ($E > 0$)

Pour des énergies positives, la particule passe au-dessus de la barrière et oscille entre les deux points de rebroussement $x = \pm c$ qui correspondent aux deux racines réelles de polynôme quartique de l'énergie cinétique. Nous avons

$$p = m\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{m\lambda}{2}} \sqrt{(c^2 - x^2)(d^2 + x^2)} \quad (4.205)$$

avec

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\sqrt{(\frac{\mu}{\lambda})^2 + \frac{4E}{\lambda}} + \frac{\mu}{\lambda}} \\ d &= \sqrt{\sqrt{(\frac{\mu}{\lambda})^2 + \frac{4E}{\lambda}} - \frac{\mu}{\lambda}} \end{aligned} \quad (4.206)$$

Si nous posons

$$x = c \cos \varphi \quad (4.207)$$

l'intégrale devient

$$\begin{aligned} \int_c^x \frac{dx'}{\sqrt{(c^2 - x'^2)(d^2 + x'^2)}} &= -\frac{1}{\sqrt{c^2 + d^2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi'}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{c^2 + d^2}} F(\varphi|k) = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2m}}(t - t_0) \end{aligned} \quad (4.208)$$

avec le module de Jacobi

$$k^2 = \frac{c^2}{c^2 + d^2} = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 4E\lambda}}{2\sqrt{\mu^2 + 4E\lambda}} \quad (4.209)$$

En posant $u = F(\varphi|k)$, on trouve que $\varphi = \text{am } u$ et donc $x = c \cos(\text{am } u) = c \operatorname{cn} u$ de sorte que

$$x(t) = c \operatorname{cn} \left[\sqrt{\frac{\lambda}{2m}}(c^2 + d^2)(t - t_0) \left| \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} \right. \right] \quad (4.210)$$

Sa période est donnée par $T = 4\sqrt{\frac{2m}{\lambda(c^2+d^2)}}K\left(\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}\right)$. Dans la limite $k = 1$, on retrouve bien la solution homocline (4.204).

L'interprétation géométrique est ici la suivante. Nous posons $y = \sqrt{x^2 + d^2}$ et $v = \sqrt{\frac{2m}{\lambda}} \frac{\dot{x}}{y}$. Dans l'espace (x, y, v) , les trajectoires sont donc les intersections

$$\begin{cases} v^2 + x^2 = c^2 \\ y^2 - x^2 = d^2 \end{cases} \quad (4.211)$$

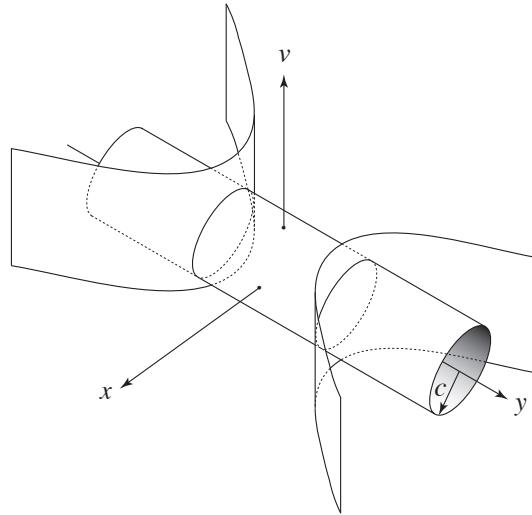


Figure 4.21: Portrait de phase des mouvements oscillants au-dessus des puits donnés par les intersections des cylindres (4.211). Les oscillations s'effectuent ici sur tout l'intervalle $-c \leq x \leq +c$.

d'un cylindre de base circulaire de rayon c est d'axe Oy avec un autre de base hyperbolique et parallèle à Ov (voir fig. 4.21).

La figure 4.22 montre la période en fonction de l'énergie. Elle présente une divergence à l'énergie $E = 0$ de la séparatrice entre les oscillations dans chacun des puits et celles au-dessus

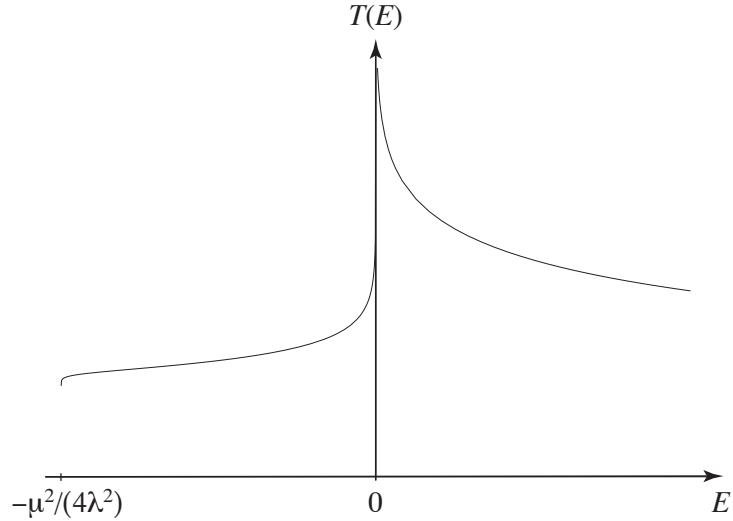


Figure 4.22: Période de l'oscillateur à double puits en fonction de l'énergie.

des puits. A l'énergie du fond des puits, $E = -\frac{\mu^2}{4\lambda^2}$, l'approximation harmonique montre que la

période tend vers $T \simeq \pi\sqrt{2m/\mu}$. Ensuite, la période diverge comme

$$T(E) \simeq \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{\mu}} \ln \left(\frac{16\mu^2}{-E\lambda} \right) & \text{pour } E \lesssim 0 \\ 2\sqrt{\frac{m}{\mu}} \ln \left(\frac{16\mu^2}{E\lambda} \right) & \text{pour } E \gtrsim 0 \end{cases} \quad (4.212)$$

avec un temps double au-dessus de la barrière pour des raisons évidentes. La période diminue aux grandes énergies comme

$$T(E) \simeq 2\sqrt{2} K(1/2) \left(\frac{m^2}{\lambda E} \right)^{\frac{1}{4}} \simeq 5,2441 \times \left(\frac{m^2}{\lambda E} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{pour } E \rightarrow \infty \quad (4.213)$$

4.9 Pendule sphérique

Comme le pendule simple, ce pendule est formé par un corps de masse m suspendu à un point d'attache par une tige rigide de longueur l (et masse négligeable) se mouvant dans le champ de gravité terrestre. Cependant, dans le pendule sphérique, le corps matériel est libre de se mouvoir sur une sphère de rayon l (voir fig. 4.23).

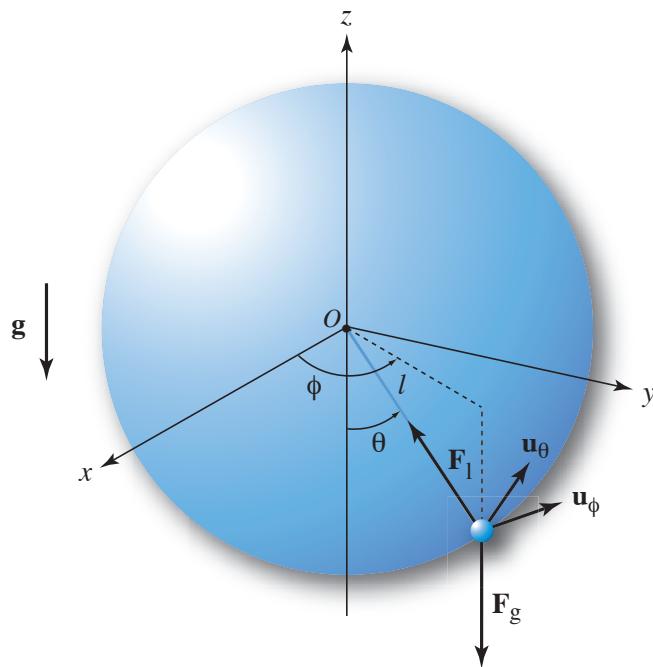


Figure 4.23: Schéma du pendule sphérique.

Sa position est ici déterminée par deux angles: l'angle $0 \leq \theta \leq \pi$ que fait la tige avec la verticale et l'angle azimuthal $0 \leq \varphi < 2\pi$. Si l'origine d'un repère cartésien est placée au point

d'attache de la tige, le vecteur de position est donné par

$$\mathbf{r} = l(\sin \theta \cos \varphi \mathbf{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{u}_y - \cos \theta \mathbf{u}_z) = l \mathbf{u}_r \quad (4.214)$$

et le vecteur de sa vitesse par

$$\dot{\mathbf{r}} = l(\dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{u}_\varphi) \quad (4.215)$$

en termes des vecteurs unitaires \mathbf{u}_θ et \mathbf{u}_φ dans les directions d'accroissement des angles θ et φ . Comme dans le pendule simple, le corps matériel est soumis à deux forces: la force de gravité $\mathbf{F}_g = mg = -mg\mathbf{u}_z$ et la force de réaction à la liaison au point d'attache $\mathbf{F}_l = -F_l \mathbf{u}_r$ qui reste toujours perpendiculaire à la sphère, les forces de frottement étant supposées négligeables: $\mathbf{F}_l \cdot \mathbf{u}_\theta = 0$ et $\mathbf{F}_l \cdot \mathbf{u}_\varphi = 0$, de sorte que $\mathbf{F}_l \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$. En prenant le produit scalaire de l'équation de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_l \quad (4.216)$$

avec le vecteur vitesse et en intégrant sur le temps, nous obtenons la propriété de conservation de l'énergie

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + U_g \quad \text{avec} \quad U_g = mgz = -mgl \cos \theta \quad (4.217)$$

qui s'écrit encore

$$E = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta \quad (4.218)$$

Par ailleurs, le système présente une symétrie cylindrique autour de son axe vertical Oz . Cette symétrie suggère que la composante verticale $L_z = m(xy - yx)$ du moment cinétique est une constante du mouvement. En effet, la projection de la force $\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_l$ subie par le corps matériel sur le plan Oxy ,

$$(\mathbf{F}_l \cdot \mathbf{u}_x)\mathbf{u}_x + (\mathbf{F}_l \cdot \mathbf{u}_y)\mathbf{u}_y \quad (4.219)$$

est centrale et dirigée perpendiculairement à l'axe Oz de sorte que son couple de force s'annule:

$$\frac{dL_z}{dt} = [\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_l)] \cdot \mathbf{u}_z = 0 \quad (4.220)$$

Il s'agit donc bien d'une constante du mouvement qui a pour expression

$$L_z = ml^2\dot{\varphi} \sin^2 \theta \quad (4.221)$$

En la substituant dans l'énergie, nous obtenons une équation différentielle du 1^{er} ordre pour l'angle θ :

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta \quad (4.222)$$

Par rapport à l'énergie (4.130) du pendule simple, nous avons ici un terme supplémentaire qui décrit l'effet centrifuge dû au mouvement de rotation du pendule autour de l'axe vertical. Lorsque le moment cinétique s'annule, $L_z = 0$, nous retrouvons l'énergie du pendule simple. Cependant, pour des valeurs non nulles du moment cinétique, une barrière de potentiel empêche le corps de se trouver près de l'axe vertical Oz (voir fig. 4.24).

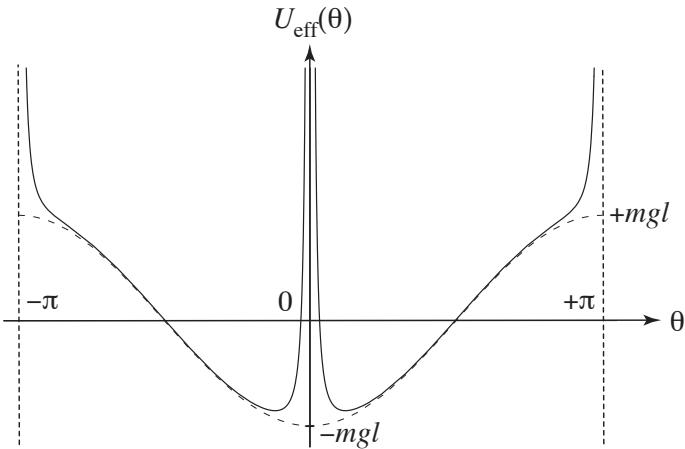


Figure 4.24: Potentiel effectif $U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta$ du pendule sphérique lorsque son moment cinétique est différent de zéro (courbe continue) ou égal à zéro (courbe pointillée).

Pour procéder à l'analyse de l'équation d'énergie, nous introduisons les paramètres sans dimension du problème mathématique. Nous avons tout d'abord la fréquence

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (4.223)$$

des petites oscillations du pendule autour de sa position d'équilibre stable en $\theta = 0$. Ensuite, nous avons

$$\epsilon \equiv \frac{E}{mgl} \quad (4.224)$$

qui mesure l'énergie en unité de mgl . La valeur minimum est $\epsilon = -1$ correspondant à un pendule au repos à l'énergie $E = -mgl$. Enfin, nous avons

$$\lambda \equiv \frac{L_z}{ml^2 \omega} \quad (4.225)$$

qui mesure la composante verticale du moment cinétique en unité de $ml^2 \omega$. Les équations de l'énergie et du moment cinétique prennent alors la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon = \frac{\dot{\theta}^2}{2\omega^2} + \frac{\lambda^2}{2 \sin^2 \theta} - \cos \theta \\ \dot{\varphi} \sin^2 \theta = \lambda \end{array} \right. \quad (4.226)$$

d'un système de deux équations différentielles du 1^{er} ordre pour les deux angles θ et φ , la solution $\theta(t)$ de la première permettant ensuite d'obtenir la solution $\varphi(t)$ de la seconde.

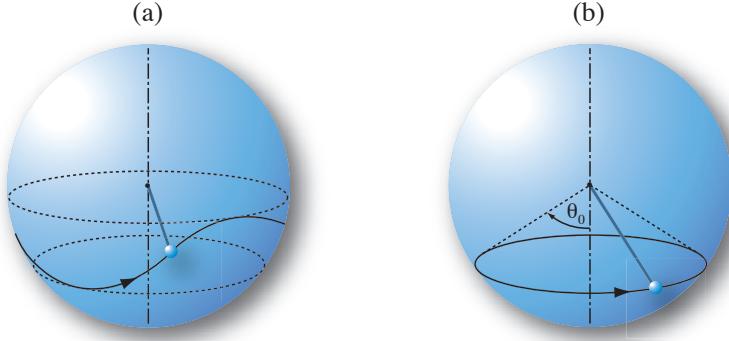


Figure 4.25: (a) Trajectoire typique du pendule sphérique avec $L_z \neq 0$. (b) Trajectoire particulière à angle θ_0 fixe. Sous cette condition, le système porte le nom de pendule conique.

Lorsque le moment cinétique est non nul, le pendule tourne dans un sens autour de l'axe vertical et effectue des oscillations autour d'un angle moyen (voir fig. 4.25).

Par l'effet de la force centrifuge, le pendule peut tourner à l'angle fixe θ_0 satisfaisant la condition

$$\sin^4 \theta_0 = \lambda^2 \cos \theta_0 \quad (4.227)$$

et décrivant un cône. La vitesse angulaire du pendule autour de l'axe vertical est $\dot{\varphi} = \lambda / (\sin^2 \theta_0)$. La période de révolution est donc égale à $T_0 = 2\pi \sin^2 \theta_0 / (\omega \lambda)$. Pour de petites perturbations autour de l'angle θ_0 , le pendule présentent de petites oscillations

$$\theta \simeq \theta_0 + A \cos(\Omega t + \alpha) \quad (4.228)$$

de fréquence

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{1}{\cos \theta_0} + 3 \cos \theta_0} \quad (4.229)$$

Pour traiter du mouvement général, nous introduisons la variable

$$z \equiv -\cos \theta \quad (4.230)$$

qui mesure la hauteur du pendule en unités de sa longueur l . De plus, le temps est mesuré en unité de sa fréquence ω en définissant

$$\tau \equiv \omega t \quad (4.231)$$

L'équation de l'énergie devient alors

$$\dot{z}^2 = 2(z - \epsilon)(z^2 - 1) - \lambda^2 \equiv P(z) \quad (4.232)$$

avec $\dot{z} \equiv \frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{\omega}\dot{z}$. Le polynôme $P(z)$ est cubique et il est représenté sur la fig. 4.26. Ce polynôme tend vers $\pm\infty$ lorsque z tend vers $\pm\infty$. Il admet une ou trois racines réelles. Comme z est toujours borné $-1 \leq z \leq +1$, le minimum en z_+ est toujours négatif $P(z_+) < 0$ empêchant z de devenir non borné. Le mouvement s'effectue donc entre la plus petite racine z_1 et la racine du milieu z_2 :

$$z_1 \leq z \leq z_2 \quad (4.233)$$

Le mouvement n'est plus possible si ces deux racines disparaissent lorsque la valeur du polynôme à son maximum en z_- devient négatif: $P(z_-) < 0$.

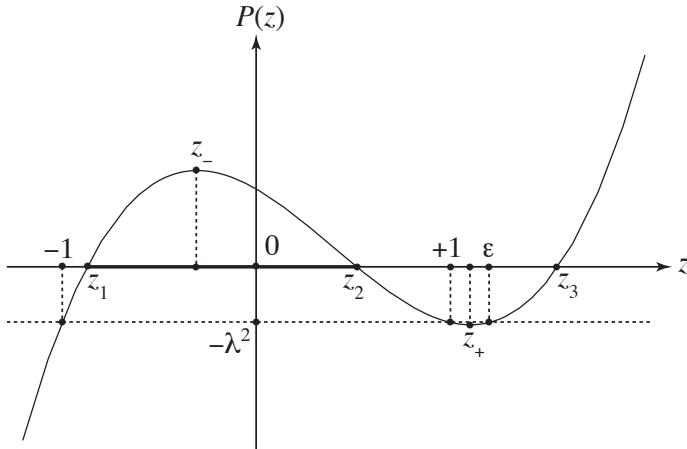


Figure 4.26: Forme typique du polynôme $P(z) = z^2$ dans le cas où $\epsilon > 1$. Les extrema du polynôme où $P'(z_{\pm}) = 0$ sont $z_{\pm} = \frac{1}{3}(\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 + 3})$. On remarquera que $z_- < 0$.

Par conséquent, nous considérons le cas où le polynôme admet trois racines réelles:

$$\dot{z}^2 = 2(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = P(z) \quad (4.234)$$

telles que $z_1 \leq z_2 \leq z_3$. La formule de Cardan¹ permet de calculer analytiquement ces racines [1]. On élimine d'abord le terme quadratique du polynôme cubique en posant

$$z \equiv \zeta + \frac{\epsilon}{3} \quad (4.235)$$

¹Jérôme Cardan, mathématicien né à Pavie en Italie (1501-1576).

L'équation cubique devient

$$\zeta^3 + 3q\zeta - 2r = 0 \quad (4.236)$$

avec

$$q = -\frac{\epsilon^2 + 3}{9} \quad (4.237)$$

$$r = \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon^3}{27} \quad (4.238)$$

Les trois racines ont alors une moyenne nulle: $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 0$. On suppose que ces racines s'écrivent comme la somme de deux nombres:

$$\zeta = u + v \quad (4.239)$$

En substituant cette hypothèse dans l'équation cubique, on trouve:

$$u^3 + v^3 + 3(uv + q)(u + v) - 2r = 0 \quad (4.240)$$

qui serait résolu si les deux nombres u et v satisfaisaient

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 2r \\ uv = -q \end{cases} \text{ ou } u^3 v^3 = -q^3 \quad (4.241)$$

Ces équations montrent que u^3 et v^3 sont les racines de l'équation quadratique

$$x^2 - 2rx - q^3 = 0 \quad (4.242)$$

de sorte que

$$x_{\pm} = r \pm \sqrt{r^2 + q^3} = \begin{cases} u^3 \\ v^3 \end{cases} \quad (4.243)$$

On trouve donc que

$$\begin{cases} u = e^{i\frac{2\pi}{3}k} \left(r + \sqrt{r^2 + q^3} \right)^{\frac{1}{3}} \\ v = e^{-i\frac{2\pi}{3}k} \left(r - \sqrt{r^2 + q^3} \right)^{\frac{1}{3}} \end{cases} \quad k = 0, 1, 2 \quad (4.244)$$

les trois racines sont donc données par

$$\begin{cases} z_1 = \frac{\epsilon}{3} + u + v \\ z_2 = \frac{\epsilon}{3} - \frac{1}{2}(u + v) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u - v) \\ z_3 = \frac{\epsilon}{3} - \frac{1}{2}(u + v) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u - v) \end{cases} \quad (4.245)$$

Les trois racines sont réelles sous la condition:

$$q^3 + r^2 < 0 \quad (4.246)$$

qui se traduit en la condition:

$$\frac{\lambda^2}{4} \leq \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon^3}{27} + \frac{1}{27}(\epsilon^2 + 3)^{\frac{3}{2}} \quad (4.247)$$

ce qui signifie que le moment cinétique ne peut excéder une valeur critique déterminée par l'énergie. Les valeurs admissibles de l'énergie et de la composante verticale du moment cinétique sont représentées sur la fig. 4.27.

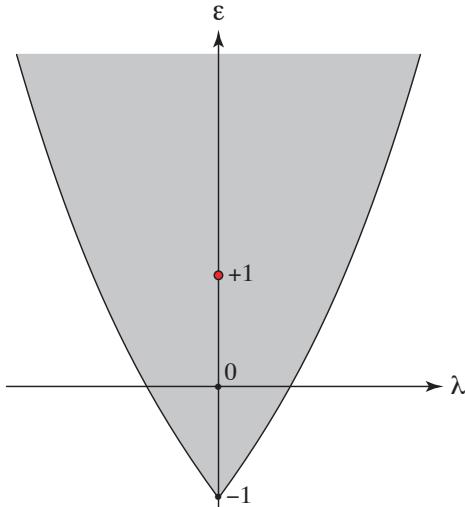


Figure 4.27: Valeurs admissibles de l'énergie et de la composante verticale du moment cinétique pour le pendule sphérique. Le point en $\epsilon = +1$ et $\lambda = 0$ correspond à l'orbite homocline montrée sur la fig. 4.28b.

En $\lambda = 0$, on retrouve le pendule simple et l'énergie atteint sa valeur minimum en $\epsilon = -1$. L'énergie $\epsilon = +1$ correspond aux séparatrices du pendule simple et représente une singularité pour le pendule sphérique. Tout d'abord, les deux plus grandes racines du polynôme coïncident en $\epsilon = +1$ et $\lambda = 0$, $z_2 = z_3 = \epsilon = 1$ alors que $z_1 = -1$. Le portrait de phase y présente alors un point d'équilibre auquel est attaché une orbite homocline (voir fig. 4.28).

Pour intégrer l'équation de l'énergie:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{2(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}} = \pm \int d\tau = \pm(\tau - \tau_0) \quad (4.248)$$

on pose

$$z \equiv \frac{z_1 + z_2}{2} - \frac{z_2 - z_1}{2} \cos 2\varphi \quad (4.249)$$

de sorte que

$$\begin{cases} z - z_1 = (z_2 - z_1) \sin^2 \varphi \\ z - z_2 = -(z_2 - z_1) \cos^2 \varphi \\ z - z_3 = -(z_3 - z_1)(1 - k^2 \sin^2 \varphi) \end{cases} \quad (4.250)$$

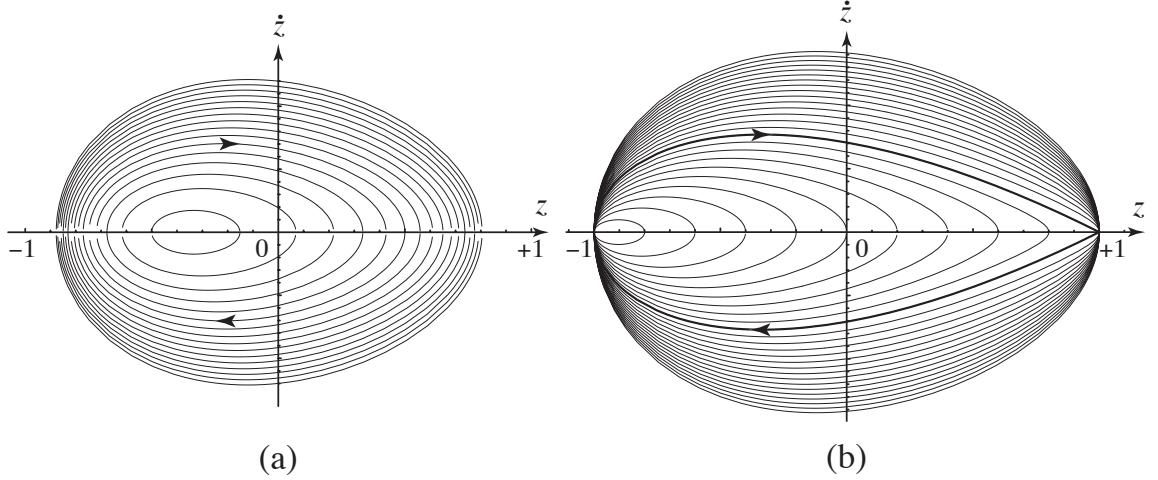


Figure 4.28: (a) Portraits de phase du pendule sphérique en $\lambda \neq 0$. (b) Portraits de phase en $\lambda = 0$. Lorsque $\epsilon = +1$, il existe une orbite homocline qui est attachée au point d'équilibre $(z = +1, \dot{z} = 0)$.

avec le module de Jacobi

$$k^2 = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \quad (4.251)$$

Par conséquent, l'intégrale devient

$$\int \frac{dz}{\sqrt{2(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}} = \sqrt{\frac{2}{z_3 - z_1}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4.252)$$

qui est une intégrale elliptique de 1^e espèce:

$$u \equiv F(\varphi|k) = \pm \omega \sqrt{\frac{z_3 - z_1}{2}} (t - t_0) \quad (4.253)$$

On trouve donc une solution en termes de fonctions elliptiques de Jacobi:

$$\varphi = \operatorname{am} u \quad (4.254)$$

$$z - z_1 = (z_2 - z_1) \operatorname{sn}^2 u = (z_2 - z_1) \operatorname{sn}^2 \left[\omega \sqrt{\frac{z_3 - z_1}{2}} (t - t_0) \middle| k \right] \quad (4.255)$$

La période est donc donnée par

$$T = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{2}{z_3 - z_1}} K(k) \quad (4.256)$$

en termes de l'intégrale elliptique complète de 1^e espèce. L'équation du moment cinétique s'intègre ensuite pour obtenir

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \lambda \int \frac{dz}{(1 - z^2) \sqrt{2(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}} \quad (4.257)$$

ce qui permet en principe d'obtenir la seconde période du mouvement.

Remarque: Le traitement analytique du pendule sphérique montre aussi que le mouvement unidimensionnel dans un potentiel cubique est également soluble en termes des fonctions elliptiques de Jacobi.

Références

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1972).
- [2] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 1980).
- [3] S. Wolfram, *Mathematica*, 2nd edition (Addison-Wesley, Redwood City, 1991).
- [4] MapleTM, <http://www.maplesoft.com/>.
- [5] A. Chenciner, *Connaissez-vous le pendule?* Gazette des mathématiques **86** (2000) pp. 21-27, <http://smf.emath.fr/Publication/Gazette/2000/86>.

Chapitre 5

Mouvement dans un potentiel central

5.1 Problème à deux corps

Ce chapitre est consacré à l'étude du mouvement de deux corps matériels soumis à l'action d'une force mutuelle dérivant d'une énergie potentielle qui ne dépend que de la distance séparant les deux corps. De tels problèmes se rencontrent en mécanique céleste dans les systèmes formés d'une planète en orbite autour d'une étoile comme le Soleil ou dans les systèmes binaires d'étoiles. Des problèmes à deux corps existent aussi dans le monde microscopique par exemple dans le cas de molécules diatomiques comme les molécules de dioxygène O_2 ou de diazote N_2 de l'air que nous respirons. Ces systèmes microscopiques peuvent être décrits classiquement dans la mesure où les effets quantiques sont ignorés.

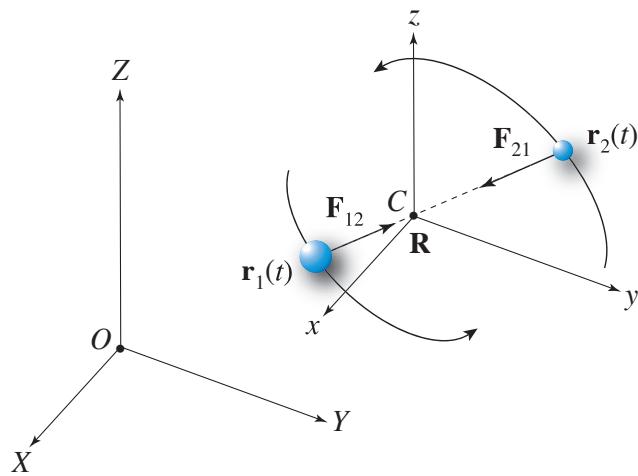


Figure 5.1: Système de deux corps matériels se déplaçant sous l'effet d'une force mutuelle. Le repère (X, Y, Z) est fixé par rapport à l'observateur. Le repère (x, y, z) se déplace avec le centre de masse \mathbf{R} .

On suppose que la force \mathbf{F}_{12} exercée sur la particule No. 1 par la particule No. 2 dérive de l'énergie potentielle $U = U(\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|)$ selon $\mathbf{F}_{12} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1}$. De même, la force agissant sur la particule No. 2 est donnée par $\mathbf{F}_{21} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_2}$. Par conséquent, la 3e loi de Newton est satisfaite car $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ et $\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{F}_{12} = 0$ avec $\mathbf{r}_{12} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Les masses des corps étant respectivement m_1 et m_2 , le mouvement du système est régi par les équations de Newton suivantes:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12} = -\frac{dU}{dr}(\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} \quad (5.1)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21} = +\frac{dU}{dr}(\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} \quad (5.2)$$

On notera qu'aucune force extérieure au système ne s'exerce sur les deux corps matériels. En conséquence, ce système obéit aux théorèmes de conservation de la quantité de mouvement totale, du moment cinétique total et de l'énergie totale:

$$\mathbf{P}_{\text{tot}} = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 \quad (5.3)$$

$$\mathbf{L}_{\text{tot}} = m_1 \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2 \quad (5.4)$$

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 + U(\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|) \quad (5.5)$$

ce que l'on vérifie en utilisant les équations de Newton.

5.2 Séparation du centre de masse

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, la conservation de la quantité de mouvement totale signifie que la position du centre de masse

$$\mathbf{R} \equiv \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (5.6)$$

suit un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\mathbf{V} = \mathbf{P}_{\text{tot}}/M$. Par conséquent, le centre de masse se comporte comme un corps matériel de masse totale:

$$M \equiv m_1 + m_2 \quad (5.7)$$

ne subissant aucune force extérieure. Son équation de Newton prend donc la forme

$$M \ddot{\mathbf{R}} = 0 \quad (5.8)$$

que l'on obtient en additionnant les équations (5.1) et (5.2).

Si nous introduisons la position relative de la particule No. 1 par rapport à la particule No. 2

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (5.9)$$

nous pouvons déduire des éqs. (5.1) et (5.2) que

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{1}{m_1} \mathbf{F}_{12} - \frac{1}{m_2} \mathbf{F}_{21} = - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{dU}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (5.10)$$

avec $r = \|\mathbf{r}\|$, ce qui peut s'écrire sous la forme

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = - \frac{dU}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (5.11)$$

en termes de la *masse réduite* définie alternativement par

$$\frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (5.12)$$

ou

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (5.13)$$

L'équation (5.11) montre que la position relative se déplace comme un corps fictif de masse égale à la masse réduite (5.13) dans un champ de force central dont l'origine coïncide avec le centre de masse du système binaire. La masse réduite n'excède jamais les masses des deux particules: $\mu \leq m_1, m_2$. Si la masse de la particule No. 1 est sensiblement plus petite que l'autre, $m_1 < m_2$, la masse réduite peut se développer en série de Taylor

$$\mu = \frac{m_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} = m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_1^2}{m_2^2} - \dots \right) = m_1 + O(m_1^2) \quad (5.14)$$

Dans la limite où m_1/m_2 s'annule, la masse réduite devient égale à la masse de la particule No. 1 tandis que la particule No. 2 la plus lourde coïncide avec le centre de masse.

En termes des nouvelles positions (5.6) et (5.9), les grandeurs conservées (5.3)-(5.5) deviennent

$$\mathbf{P}_{\text{tot}} = M \dot{\mathbf{R}} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{L}_{\text{tot}} = M \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (5.16)$$

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + U(r) \quad (5.17)$$

En particulier, l'énergie totale se compose de l'énergie du centre de masse qui se réduit à sa seule énergie cinétique puisqu'il n'y a pas de force extérieure et à l'énergie du mouvement relatif

qui est la somme de son énergie cinétique $\mu\dot{\mathbf{r}}/2$ et de l'énergie potentielle $U(r)$ de l'interaction entre les deux corps.

Une fois connue les positions (5.6) et (5.9) en fonction du temps, les positions des deux corps matériels seront données par les relations inverses:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \end{cases} \quad (5.18)$$

Des relations semblables pour les vitesses sont obtenues en dérivant par rapport au temps.

5.3 Le mouvement relatif

Le champ de force qui s'exerce sur la particule fictive étant central, $\mathbf{F} = -\frac{dU}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r}$, le couple de force qu'elle engendre est nul, $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ et le moment cinétique correspondant $\mathbf{L} = \mu\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ est conservé (puisque $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$). Par conséquent, le vecteur \mathbf{r} de la position relative et le vecteur vitesse associé $\dot{\mathbf{r}}$ sont tous les deux perpendiculaires au vecteur du moment cinétique au cours du mouvement (voir fig. 5.2).

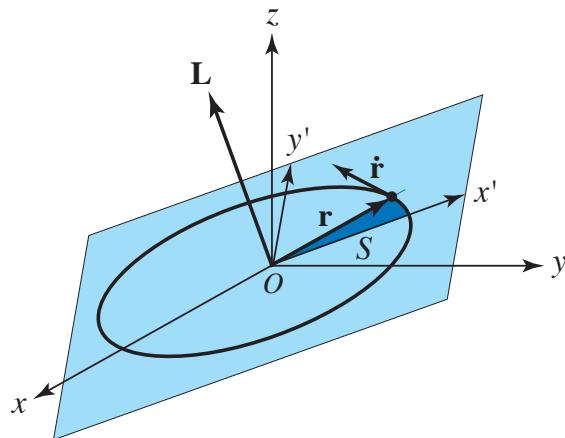


Figure 5.2: Dans le repère du centre de masse, diagramme montrant le plan perpendiculaire au vecteur du moment cinétique \mathbf{L} et contenant la trajectoire.

De plus, le module de ce moment cinétique est aussi une constante du mouvement, ce qui établit la *loi des aires*:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\| = \frac{\|\mathbf{L}\|}{2\mu} = \frac{L}{2\mu} \quad (5.19)$$

selon laquelle l'aire S balayée par le vecteur \mathbf{r} augmente proportionnellement au temps. En introduisant des coordonnées polaires (r, θ) dans le plan normal au moment cinétique \mathbf{L} , la loi des aires s'écrit

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{L}{2\mu} \quad (5.20)$$

ce qui montre que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est inversement proportionnelle au carré de la distance entre les corps:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \quad (5.21)$$

Avec la convention choisie à la fig. 5.2, l'angle θ ne décroît jamais. On notera que l'angle θ reste fixe si le moment cinétique est nul. Dans ce cas, le mouvement est rectiligne et passe par le centre de force.

L'énergie du mouvement relatif est aussi conservée car la force est positionnelle, centrale et indépendante du temps. Dans les coordonnées polaires, le carré du vecteur de vitesse est donné par

$$\mathbf{r}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \quad (5.22)$$

de sorte que l'énergie du mouvement relatif vaut

$$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) \quad (5.23)$$

Comme la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est donnée par (5.21), nous trouvons que

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \quad (5.24)$$

Le mouvement du vecteur de position relative se réduit donc au mouvement unidimensionnel d'une masse μ dans le *potentiel effectif*

$$U_{\text{eff}}(r) \equiv U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (5.25)$$

Le terme qui s'ajoute à l'énergie potentielle $U(r)$ est dû à la force centrifuge répulsive engendrée par le mouvement tournant autour du centre du potentiel:

$$F_{\text{eff}}(r) = -\frac{dU_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{dU}{dr} + \frac{L^2}{\mu r^3} \quad (5.26)$$

La vitesse radiale se déduit de l'éq. (5.24) comme pour un système unidimensionnel:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U_{\text{eff}}(r)]} \quad (5.27)$$

Après avoir rassemblé les facteurs dépendant de la distance radiale r dans le membre de gauche et placé dt à droite, on peut intégrer les deux membres de l'équation:

$$\pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left[E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right]}} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0 \quad (5.28)$$

En inversant la fonction obtenue dans le membre de gauche, on trouve comment la distance radiale varie dans le temps: $r = r(t - t_0; r_0)$. Ensuite, on transforme l'éq. (5.21) en utilisant $\dot{\theta} = \dot{r} \frac{d\theta}{dr}$ pour obtenir l'angle polaire:

$$\theta - \theta_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \pm \int_{r_0}^r \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2\mu \left[E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right]}} \quad (5.29)$$

comme une fonction de la distance radiale, $\theta = \theta(r; r_0, \theta_0)$. En combinant avec le résultat précédent, on détermine finalement la dépendance temporelle de l'angle: $\theta = \theta[r(t - t_0; r_0); r_0, \theta_0] = \tilde{\theta}(t - t_0; r_0, \theta_0)$.

On remarquera que des points de rebroussement où $\dot{r} = 0$ peuvent exister ou non selon la forme du potentiel effectif $U_{\text{eff}}(r)$ et la valeur de l'énergie. Dans le cas où le mouvement radial est borné $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ par deux points de rebroussement (voir fig. 5.3), la distance radiale oscille dans le temps à la période:

$$T = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U_{\text{eff}}(r)]}} \quad (5.30)$$

Lors d'une période, l'angle augmente d'une valeur égale à

$$\Theta = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2\mu [E - U_{\text{eff}}(r)]}} \quad (5.31)$$

L'orbite se ferme sur elle-même si l'angle Θ est un multiple rationnel d'une révolution complète:

$$\Theta = 2\pi \frac{p}{q} \quad \text{avec} \quad p, q \in \mathbb{N}_0 \quad (5.32)$$

Il existe de nombreux exemples de mouvement dans un potentiel central autre le cas de la force de gravité

$$U(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r} \quad (5.33)$$

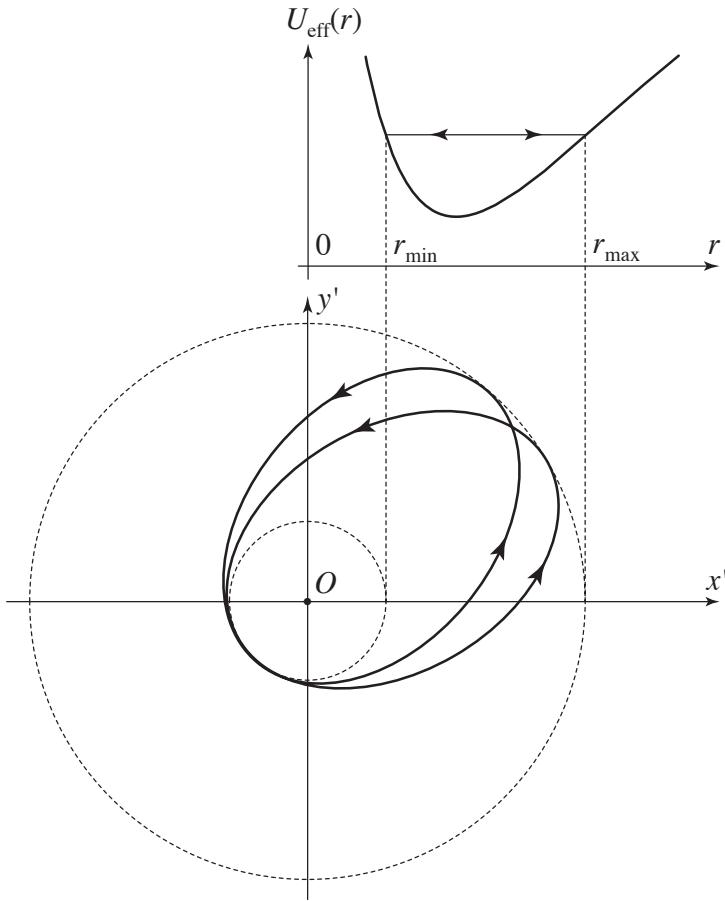


Figure 5.3: Exemple d'orbite dans le plan $Ox'y'$ pour le cas d'un mouvement borné.

qui est toujours attractif. Un potentiel semblable se rencontre pour la force de Coulomb s'exerçant entre deux charges électriques q_1 et q_2 :

$$U(r) = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5.34)$$

qui est attractif si les charges sont de signes opposés et répulsif si les charges sont de même signe. Le potentiel de la force moléculaire entre les deux atomes composant une molécule diatomique est souvent approché par le potentiel de Lennard-Jones

$$U(\mathbf{r}) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] = -\epsilon + \frac{k}{2}(r - r_{\text{eq}})^2 + \dots \quad (5.35)$$

qui présente un minimum quadratique autour de la distance d'équilibre $r_{\text{eq}} = 2^{\frac{1}{6}}\sigma$ entre les atomes. Par ailleurs, un corps se déplaçant dans un puits foré à l'intérieur de la Terre (supposée

de densité uniforme) serait soumis à un potentiel de gravité harmonique et isotrope:

$$U(r) = -\epsilon + \frac{k}{2} r^2 \quad (5.36)$$

qui est aussi central. Le mouvement dans chacun de ces potentiels centraux se détermine comme expliqué ci-dessus.

5.4 Le problème de Képler

Dans le problème de Képler, la question est de déterminer le mouvement d'une planète autour du Soleil. Par extension, le problème de Képler désigne le problème mathématique qui consiste à résoudre les équations de Newton de deux corps matériels soumis à la force de gravité. Comme mentionné ci-dessus, un problème analogue se rencontre dans les systèmes formés de deux particules chargées électriquement qui se meuvent sous l'effet de la force coulombienne. Dans pareils systèmes, le potentiel d'interaction est inversement proportionnel à la distance entre les deux corps matériels:

$$U(r) = -\frac{k}{r} \quad (5.37)$$

Le potentiel effectif correspondant

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (5.38)$$

est représenté sur la fig. 5.4.

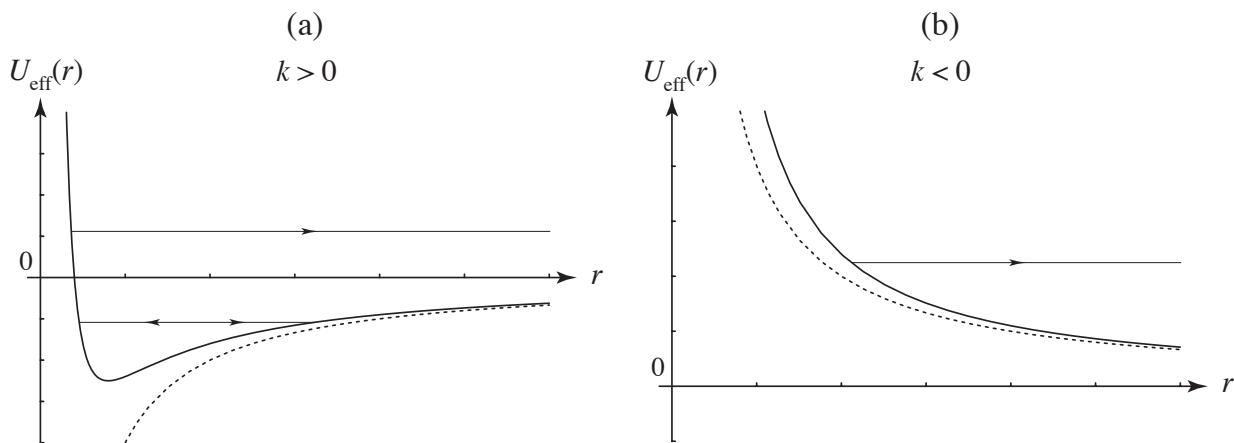


Figure 5.4: Potentiel effectif (5.38) associé au potentiel (5.37) dans les cas: (a) attractif si $k > 0$; (b) répulsif si $k < 0$.

Dans le cas répulsif $k < 0$, le mouvement est toujours non borné. Par contre, dans le cas attractif $k > 0$, le mouvement est non borné si l'énergie est positive ou nulle $E \geq 0$ et borné si elle est négative $E \leq 0$. Dans ce dernier cas, les deux particules restent liées tout au long du mouvement car les orbites oscillent entre deux points de rebroussement appelés péricentre et apocentre

$$r_p \leq r \leq r_a \quad (5.39)$$

(encore appelés périgée et apogée pour les satellites terrestres, périhélie et aphélie dans le cas du système solaire ou périastre et apoastre dans le cas d'une exoplanète).

Nous introduisons une nouvelle variable définie comme l'inverse de la distance radiale:

$$u \equiv \frac{1}{r} \quad (5.40)$$

La dérivée de cette variable par rapport à l'angle θ est proportionnelle à la vitesse radiale car

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = -\frac{\mu}{L} \dot{r} \quad (5.41)$$

d'après la loi des aires et sa conséquence (5.21). Par conséquent, l'énergie du mouvement relatif peut s'écrire

$$E = \frac{L^2}{2\mu} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 - ku + \frac{L^2}{2\mu} u^2 \quad (5.42)$$

ce qui établit une analogie avec un oscillateur harmonique. En effet, cette équation se transforme en

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2}(u - u_0)^2 = \frac{\mu E}{L^2} + \frac{\mu^2 k^2}{2L^4} \quad (5.43)$$

où

$$u_0 \equiv \frac{\mu k}{L^2} \quad (5.44)$$

est le minimum d'un potentiel quadratique. En dérivant par rapport à l'angle, on trouve l'équation

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = u_0 - u \quad (5.45)$$

dont la solution est donnée par

$$u = u_0 + u_0 e \cos(\theta - \theta_0) \quad (5.46)$$

en termes de la grandeur qui est appelée l'*excentricité*:

$$e \equiv \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} \quad (5.47)$$

Par conséquent, la distance radiale varie avec l'angle selon

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (5.48)$$

où

$$p \equiv \frac{1}{u_0} = \frac{L^2}{\mu k} \quad (5.49)$$

Dans le plan perpendiculaire au moment cinétique, l'équation (5.48) décrit une courbe dont l'équation est donnée par une forme quadratique. En effet, si on passe aux coordonnées cartésiennes:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta - \theta_0) \\ y = r \sin(\theta - \theta_0) \end{cases} \quad (5.50)$$

l'éq. (5.48) prend la forme quadratique suivante:

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2epx - p^2 = 0 \quad (5.51)$$

Il s'agit donc d'un(e)

$$\begin{aligned} & \text{ cercle} && \text{ si } e = 0 && \text{ ou } E = -\frac{\mu k^2}{2L^2}, \\ & \text{ ellipse} && \text{ si } 0 < e < 1 && \text{ ou } -\frac{\mu k^2}{2L^2} < E < 0, \\ & \text{ parabole} && \text{ si } e = 1 && \text{ ou } E = 0, \\ & \text{ hyperbole} && \text{ si } 1 < e && \text{ ou } E > 0. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Etudions plus en détail chacun des cas.

5.4.1 Orbite circulaire ($e = 0$):

Si l'excentricité s'annule, la distance radiale reste constante et égale à

$$r = p = \frac{L^2}{\mu k} \quad (5.53)$$

de sorte que le mouvement est circulaire. La vitesse angulaire vaut

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} = \frac{\mu k^2}{L^3} \quad (5.54)$$

Ces résultats sont la conséquence de la parfaite opposition entre la force de gravité $F_g = -\frac{k}{r^2}$ et la force centrifuge $F_c = \mu r \dot{\theta}^2$ étant donné que le moment cinétique $L = \mu r^2 \dot{\theta}$ est conservé. La période de révolution vaut donc

$$T = 2\pi \frac{L^3}{\mu k^2} = 2\pi \left(\frac{\mu}{k} r^3 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.55)$$

Cette orbite circulaire se trouve au minimum du potentiel effectif (5.38) où l'énergie prend en effet la valeur $E = -\mu k^2/(2L^2)$ correspondant à une excentricité nulle, $e = 0$.

5.4.2 Orbites elliptiques ($0 < e < 1$):

Si nous introduisons les nouvelles coordonnées:

$$\begin{cases} \bar{x} = x + \frac{ep}{1-e^2} \\ \bar{y} = y \end{cases} \quad (5.56)$$

la forme quadratique (5.51) se réécrit dans le cas où $0 < e < 1$ comme

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1 \quad (5.57)$$

qui est l'équation d'une ellipse de demi-grand axe

$$a = \frac{p}{1-e^2} \quad (5.58)$$

et de demi-petit axe

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = a\sqrt{1-e^2} \quad (5.59)$$

(voir fig. 5.5).

Dans les coordonnées (5.56), les foyers de l'ellipse sont situés en $O = (f, 0)$ et $O' = (-f, 0)$ avec $f = ea$, tels que la distance des foyers au point $(\bar{x} = 0, \bar{y} = b)$ est égale au demi-grand axe. La distance radiale r est la distance du point matériel P à l'un des deux foyers de l'ellipse $r = \|\vec{OP}\|$, ce qui établit la *1e loi de Képler* du mouvement planétaire. On remarquera que l'ellipse peut se construire alternativement en supposant que $\|\vec{OP}\| + \|\vec{O'P}\| = 2a$, ou que la distance du point P à la droite perpendiculaire à l'axe \bar{x} au point $D = (a/e, 0)$, appelée la directrice, soit égale à la distance $\|\vec{OP}\|$ divisée par l'excentricité (voir fig. 5.5).

Nous pouvons introduire un angle χ entre l'axe horizontal \bar{x} et un point situé sur un cercle de rayon a à l'intersection avec une droite passant par le point P et perpendiculaire à l'axe \bar{x} . La distance radiale est déterminée par cet angle d'après

$$r = a(1 - e \cos \chi) \quad (5.60)$$

En introduisant ce changement de variable dans l'équation (5.28) pour le temps, nous obtenons

$$t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}}(\chi - e \sin \chi) + t_0 \quad (5.61)$$

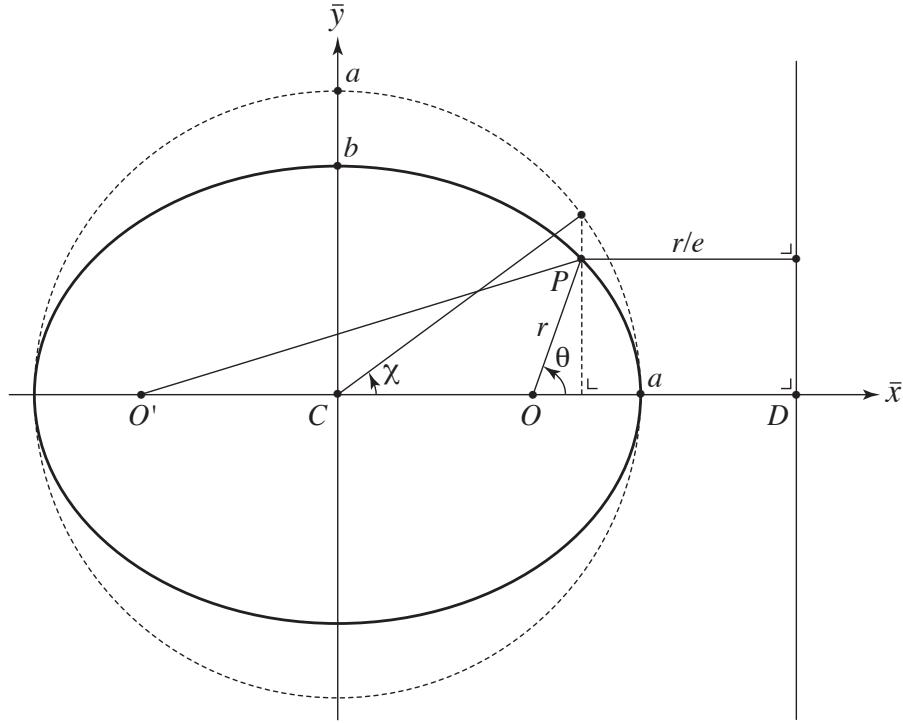


Figure 5.5: Différentes constructions d'une ellipse de centre C . Les foyers se trouvent en $O = (f, 0) = (ea, 0)$ et $O' = (-f, 0) = (-ea, 0)$. La directrice est la droite perpendiculaire à l'axe \bar{x} au point $D = (a/e, 0)$. La distance radiale r est la longueur du segment joignant le foyer O au point P . La distance du point P à la directrice reste toujours égale à r/e où e désigne l'excentricité qui vaut ici $e \simeq 0,66$.

compte tenu de la définition (5.47) de l'excentricité et de l'expression

$$a = \frac{L^2}{\mu k(1 - e^2)} \quad (5.62)$$

du demi-grand axe.

Les grandeurs mécaniques peuvent être reliées aux caractéristiques géométriques de l'orbite. En utilisant les définitions (5.49) du paramètre p et (5.58) du demi-grand axe, le module du moment cinétique s'exprime comme

$$L = \sqrt{\mu ka(1 - e^2)} \quad (5.63)$$

et l'énergie selon

$$E = -\frac{k}{2a} \quad (5.64)$$

On notera que cette forme de l'énergie du mouvement relatif sur une orbite elliptique est

analogue à celle du potentiel (5.37). Le facteur $\frac{1}{2}$ provient du fait que l'énergie totale (5.64) est la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique.

La *2e loi de Képler* est établie par la loi des aires provenant du caractère central du potentiel de gravitation et associée à la conservation du moment cinétique. Comme l'aire balayée par le vecteur radial croît proportionnellement au temps d'après l'équation (5.20), la période de révolution T sera reliée à l'aire de l'ellipse d'après

$$\frac{S}{T} = \frac{L}{2\mu} \quad (5.65)$$

En utilisant le fait que l'aire de l'ellipse est égale à

$$S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} \quad (5.66)$$

et que le module du moment cinétique est donné par l'éq. (5.63), la période de révolution est reliée au demi-grand axe de l'ellipse d'après

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}} \quad (5.67)$$

Ce résultat est confirmé par l'éq. (5.61) avec $t = T + t_0$ pour $\chi = 2\pi$. Comme $k = Gm_1m_2$ et que la masse réduite est définie par l'éq. (5.13), nous obtenons la *3e loi de Képler* sous la forme:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \quad \text{avec} \quad M = m_1 + m_2 \quad (5.68)$$

Le carré de la période de révolution est donc proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse.

L'intégration des équations de Newton pour le problème à deux corps a donc permis de déduire **les lois du mouvement planétaire de Képler**:

1e loi de Képler: La trajectoire de chaque planète est une ellipse dont le Soleil constitue un des foyers.

2e loi de Képler: Chaque planète se déplace de telle manière qu'une ligne imaginaire, allant du Soleil à cette planète, balaie des aires égales dans des périodes de temps égales.

3e loi de Képler: Le rapport du carré des périodes T et T' de deux planètes quelconques est égal au rapport du cube des demi-grands axes a et a' de leur orbite elliptique respective:

$$\left(\frac{T}{T'}\right)^2 \simeq \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \quad (5.69)$$

pour autant que la masse de la planète soit négligeable par rapport à la masse de son étoile, $m_1 \ll m_2$.

Ces lois s'appliquent aussi bien au système des planètes et des comètes tournant autour du Soleil qu'aux systèmes de satellites associés à chacune des plus grandes planètes du système solaire. Si la valeur de la constante de Newton G est connue, la 3e loi de Képler permet de déterminer la masse de l'étoile ou de la planète autour de laquelle tournent les autres corps célestes d'après

$$m_2 \simeq \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{T^2} \simeq \frac{4\pi^2}{G} \frac{a'^3}{T'^2} \simeq \dots \quad (5.70)$$

Cette masse sera confirmée si plusieurs planètes, comètes ou satellites gravitent autour du même centre attractif. Ces relations sont valables dans l'approximation où la masse de l'étoile (ou de la planète) domine celle des autres corps matériels, $m_2 \gg m_1$. Si cette approximation n'est pas d'application, c'est la relation générale (5.68) qui sera utilisée.

5.4.3 Orbite parabolique ($e = 1$):

Dans ce cas, la forme quadratique (5.51) est celle d'une parabole

$$x = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p} \quad (5.71)$$

Les distances du point P au foyer de la parabole est alors égale à sa distance à la directrice. Il s'agit d'un mouvement non borné lorsque l'énergie du mouvement relatif s'annule précisément. A cet égard, il s'agit d'un cas marginal séparant les cas elliptiques et hyperboliques qui sont génériques.

5.4.4 Orbites hyperboliques ($e > 1$):

Dans les coordonnées (5.56), l'éq. (5.51) de l'orbite devient

$$\frac{\bar{x}^2}{\tilde{a}^2} - \frac{\bar{y}^2}{\tilde{b}^2} = 1 \quad (5.72)$$

avec

$$\tilde{a} = \frac{p}{e^2 - 1} \quad (5.73)$$

$$\tilde{b} = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} \quad (5.74)$$

parce que l'excentricité est plus grande que l'unité, $e > 1$. Il s'agit donc bien d'une hyperbole (voir fig. 5.6).

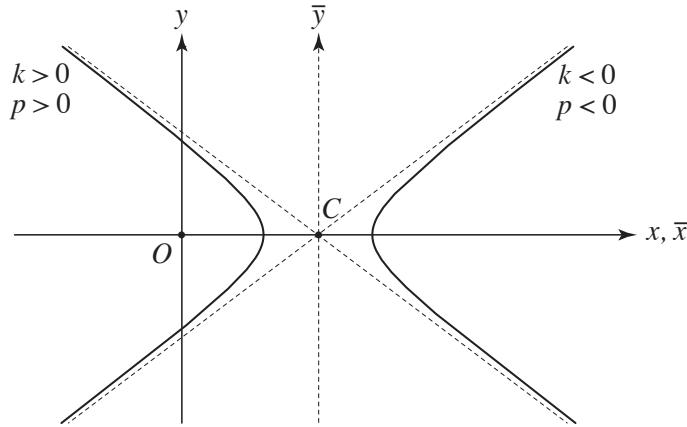


Figure 5.6: Orbite hyperbolique dans le cas où $e > 1$. Le centre du potentiel est situé en O . Les deux asymptotes de l'hyperbole passent par le point C qui est l'origine des coordonnées (\bar{x}, \bar{y}) où l'hyperbole est définie par l'éq. (5.72). L'orbite est donnée par la branche de gauche si le potentiel est attractif ($k, p > 0$) ou la branche de droite si le potentiel est répulsif ($k, p < 0$). L'excentricité vaut ici $e = 2,5$.

Cette hyperbole se compose de deux branches. Si le potentiel est attractif, l'orbite suit la branche dont le foyer est le centre attracteur. Par contre, si le potentiel est répulsif, c'est la branche dont le foyer est opposé au centre du potentiel qui constitue l'orbite suivie par le point matériel. Le mouvement est non borné à énergie positive. Le point matériel arrive vers le centre du potentiel en suivant la branche d'hyperbole. Il est défléchi à courte distance et repart vers l'infini comme dans une collision. A grande distance du centre du potentiel, le mouvement tend vers un mouvement rectiligne uniforme proche des asymptotes entrante et sortante de l'orbite hyperbolique et l'énergie du point matériel tend vers l'énergie cinétique à grande distance.

On notera que le changement de variable

$$r = \tilde{a}(-1 + e \operatorname{ch} \eta) \quad (5.75)$$

permet d'obtenir le temps écoulé d'après

$$t = \sqrt{\frac{\mu \tilde{a}^3}{k}}(-\eta + e \operatorname{sh} \mu) + t_0 \quad (5.76)$$

Par ailleurs, en utilisant les définitions (5.49) et (5.73), le module du moment cinétique et l'énergie d'une orbite hyperbolique s'expriment selon

$$L = \sqrt{\mu k \tilde{a}(e^2 - 1)} \quad (5.77)$$

$$E = +\frac{k}{2\tilde{a}} \quad (5.78)$$

L'énergie totale (5.78) est ici positive car k et \tilde{a} ont le même signe puisque le paramètre p est inversement proportionnel à la constante k d'après l'éq. (5.49) et la constante \tilde{a} est proportionnelle à p par l'éq. (5.73), les autres grandeurs étant positives pour $e > 1$.

En résumé, les différents types d'orbites du problème à deux corps de Képler sont tous des sections coniques, c'est-à-dire des courbes obtenues par l'intersection d'un plan avec un cône. En effet, dans un espace euclidien tridimensionnel (X, Y, Z) , un cône centré sur l'origine $X = Y = Z = 0$ et d'axe $X = Y = 0$ a pour équation

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (5.79)$$

et un plan quelconque est défini par

$$Z = \alpha X + \beta \quad (5.80)$$

compte tenu de la symétrie cylindrique du cône qui permet d'éliminer le terme linéaire en Y . L'intersection du cône et de ce plan est donnée par la forme quantique

$$(1 - \alpha^2)X^2 + Y^2 - 2\alpha\beta X - \beta^2 = 0 \quad (5.81)$$

après projection dans le plan (X, Y) (voir fig. 5.7). Il s'agit d'un cercle si $\alpha = 0$, d'une ellipse si $0 < |\alpha| < 1$, d'une parabole si $|\alpha| = 1$ et d'une hyperbole si $|\alpha| > 1$. Dans le cas parabolique, le plan est parallèle au bord du cône.

On remarquera que ces coniques (sauf le cercle) s'obtiennent par la construction basée sur un foyer et une directrice (voir fig. 5.8). Un point P de la courbe à une distance r du foyer O

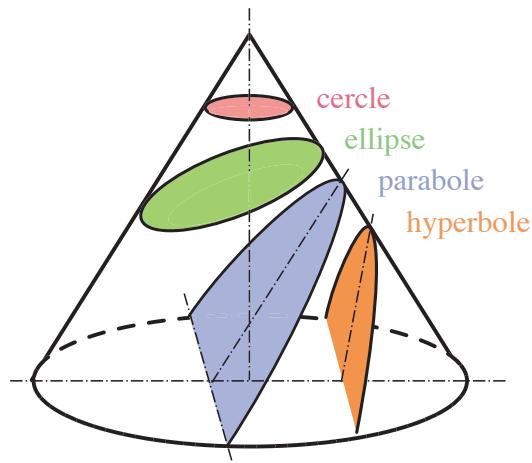


Figure 5.7: Intersections d'un cône et de plans définissant les coniques: cercle, ellipse, parabole et hyperbole.

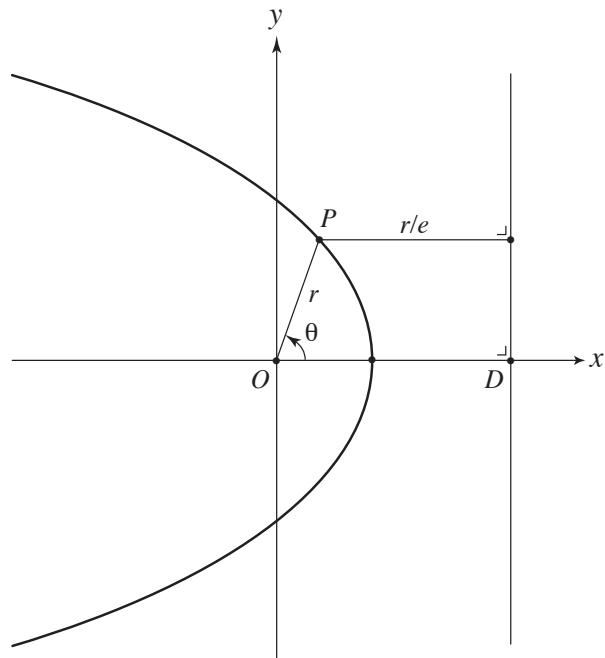


Figure 5.8: Construction d'une conique à partir de son foyer $O = (0, 0)$ situé à l'origine du repère Oxy et d'une directrice perpendiculaire à l'axe Ox au point $D = (p/e, 0)$. La distance du point courant P à la directrice reste toujours égale à la distance radiale $r = \|\overrightarrow{OP}\|$ divisée par l'excentricité e .

est toujours maintenu à une distance r/e de la directrice D où e est l'excentricité. Si la distance entre le foyer et la directrice est égale à p/e , nous retrouvons l'équation des orbites car

$$r \cos \theta + \frac{r}{e} = \frac{p}{e} \quad (5.82)$$

ce qui implique l'éq. (5.48) avec $\theta_0 = 0$.

Le problème de Képler est remarquable à bien des égards. Comme nous pouvons le constater, la direction entre le périhélie et le centre attractif reste fixe dans l'espace. C'est toujours le cas si aucune perturbation ne s'ajoute au potentiel en r^{-1} . Si le potentiel dévie de sa dépendance en r^{-1} , soit à cause des potentiels des autres planètes, soit à cause de corrections de relativité restreinte ou générale, soit pour des potentiels non-gravitationnels en $U(r) \sim r^{-\alpha}$ avec $\alpha \neq 1$, le phénomène de précession du périhélie se produit (voir fig. 5.3): la direction joignant le centre du potentiel au périhélie évolue alors dans le temps. Cependant pour un potentiel en $U(r) \sim r^{-\alpha}$, l'énergie totale et le vecteur du moment cinétique restent des constantes du mouvement de sorte que la précession du périhélie se déroule dans le plan perpendiculaire au moment cinétique. La direction allant du centre de force vers le périhélie constitue donc une constante du mouvement supplémentaire pour le problème de Képler. Cette constante du mouvement est à caractère vectoriel et porte le nom de vecteur de Laplace-Lenz-Runge [1]:

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (5.83)$$

avec $\mathbf{p} = \mu \dot{\mathbf{r}}$ et $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. On vérifie par calcul direct que $\dot{\mathbf{A}} = 0$ pour l'équation de Newton du problème de Képler:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{k}{r^3} \mathbf{r} \quad (5.84)$$

On notera que le vecteur (5.83) est perpendiculaire au moment cinétique

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0 \quad (5.85)$$

et que son module vaut

$$A^2 = 2\mu E L^2 + \mu^2 k^2 \quad (5.86)$$

où E est l'énergie totale

$$E = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{k}{r} \quad (5.87)$$

Les sept grandeurs $\{E, \mathbf{L}, \mathbf{A}\}$ sont des constantes du mouvement du problème de Képler. Cependant, elles ne sont pas toutes indépendantes. A cause des deux relations (5.85) et (5.86) entre le vecteur (5.83) et les autres constantes du mouvement E et \mathbf{L} , le problème de Képler possède en

fait cinq constantes du mouvement indépendantes. Avec l'instant initial t_0 comme sixième constante, nous retrouvons donc bien le nombre de six constantes du mouvement indépendantes correspondant aux trois composantes de la position initiale et aux trois composantes de la vitesse initiale du problème de Cauchy. Le problème de Képler est complètement intégrable à cet égard. Enfin, dans un repère cartésien dans lequel $\mathbf{L} = L\mathbf{u}_z$, le vecteur de Laplace-Lenz-Runge de l'orbite (5.48) est donné par

$$\mathbf{A} = e\mu k(\mathbf{u}_x \cos \theta_0 + \mathbf{u}_y \sin \theta_0) \quad (5.88)$$

ce qui confirme que ce vecteur pointe vers le périhélie de l'orbite situé en $\theta = \theta_0$. Si nous prenons le produit scalaire du vecteur Laplace-Lenz-Runge avec le vecteur de position, nous retrouvons l'éq. (5.82) des orbites. En effet, étant donné que $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = L^2$, nous avons

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = L^2 - \mu kr \quad (5.89)$$

Si θ désigne l'angle entre \mathbf{r} et \mathbf{A} , nous trouvons que

$$r = \frac{L^2}{\mu k + A \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (5.90)$$

puisque $A = e\mu k$ et $p = L^2/\mu k$. Le vecteur de Laplace-Lenz-Runge est donc intimement lié au fait que les orbites du problème de Képler sont des sections coniques.

5.5 Le problème de Képler et l'astronomie contemporaine

Depuis les travaux de Képler, les orbites de nombreux corps célestes ont été déterminées incluant non seulement les planètes, leurs satellites ou les comètes, mais aussi des étoiles doubles et, plus récemment, des exoplanètes.

La figure 5.9 illustre la détermination des masses du centre attracteur à l'aide de la 3e loi de Képler. D'une part, la masse du Soleil peut être déterminée par les périodes et les demi-grands axes des orbites des planètes et, d'autre part, de nombreux satellites ont été découverts grâce aux sondes spatiales autour des grandes planètes gazeuses du système solaire, à savoir Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Sur la fig. 5.9, le cube du demi-grand axe est porté en fonction du carré de la période. Le coefficient de proportionnalité entre les deux permet d'obtenir la masse du centre attracteur d'après l'éq. (5.70) pour autant que celle-ci domine largement toutes les autres masses du système.

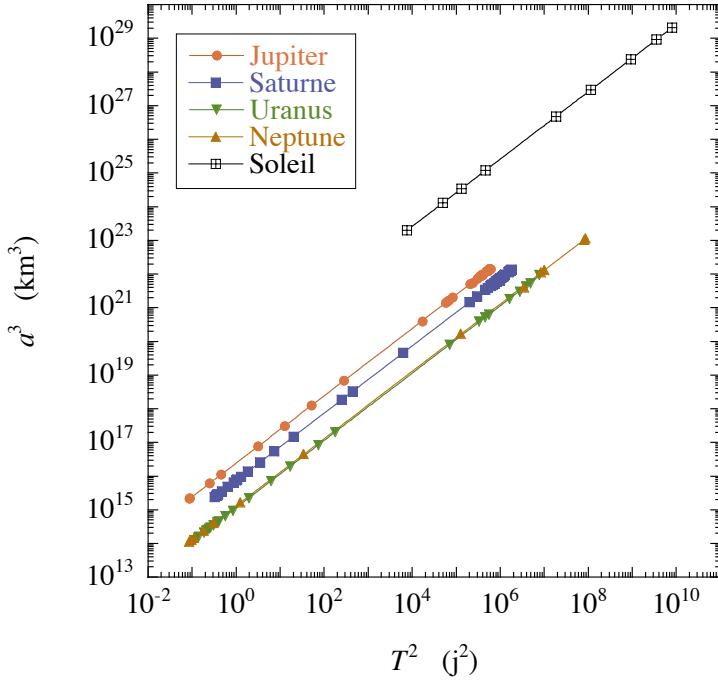


Figure 5.9: Illustration de la 3e loi de Képler. Le cube a^3 des demi-grands axes des orbites est porté en fonction du carré T^2 de leur période pour les 8 planètes et Pluton en orbite autour du Soleil, ainsi que pour les satellites de Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. La 3e loi de Képler (5.70) permet de déterminer la masse du centre attracteur, à savoir, $M_{\text{Soleil}} = 1,99 \times 10^{30}$ kg, $M_{\text{Jupiter}} = 1,90 \times 10^{27}$ kg, $M_{\text{Saturne}} = 5,68 \times 10^{26}$ kg, $M_{\text{Uranus}} = 8,68 \times 10^{25}$ kg et $M_{\text{Neptune}} = 1,02 \times 10^{26}$ kg [2].

Depuis 1995, plus de 400 exoplanètes ont été découvertes en orbite autour d'étoiles proches du système solaire [3]. La plupart de ces exoplanètes ont été observées de manière indirecte par l'attraction qu'elles exercent sur leur étoile. En effet, d'après les éqs. (5.18), le mouvement orbital de la position relative \mathbf{r} implique le mouvement périodique non seulement de la planète de masse m_1 mais aussi de l'étoile de masse m_2 puisque les vitesses sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \end{array} \right. \quad (5.91)$$

Par conséquent, la vitesse $\dot{\mathbf{r}}_2$ de l'étoile présente une composante oscillante qui peut être détectée grâce à la spectroscopie Doppler [4]. Le spectre de lumière émise par l'étoile présente en général des raies caractéristiques des éléments (hydrogène ou autre) qui composent son atmosphère. Lorsque l'étoile se déplace vers nous, la fréquence est déplacée vers le bleu. Si elle s'éloigne, la fréquence vire au rouge. Ce phénomène appelé effet Doppler se manifeste également pour les

ondes acoustiques: le son de la corne d'un train arrivant à un passage à niveau est toujours plus aigu que lorsque le train s'éloigne. Le décalage de fréquence $\Delta\nu$ est donné par

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} \simeq \frac{v}{c} \quad (5.92)$$

ou ν_0 est la fréquence de l'onde, v la vitesse radiale de la source de l'onde dans la direction de l'observateur et c la vitesse de la lumière (ou de l'onde acoustique). La détermination d'une vitesse radiale constante du centre de masse peut être difficile sinon impossible, mais la détection d'une composante oscillante dans le décalage Doppler est plus aisée par comparaison entre des observations successives. La différence entre la vitesse radiale maximum et la vitesse radiale minimum de l'étoile nous offre ainsi une mesure de la composante radiale de la vitesse de l'exoplanète d'après

$$\Delta v_2 \simeq -\frac{m_1}{m_2} \Delta v \quad (5.93)$$

où $v_2 = \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{r}}_2$ et $v = \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{r}}$, \mathbf{n} étant le vecteur unitaire de la ligne de visée. La masse de m_2 de l'étoile peut être estimée par des méthodes astrophysiques grâce à sa luminosité absolue. Celle-ci se détermine par la magnitude apparente de l'étoile et une estimation de la distance de l'étoile obtenue par la mesure de sa parallaxe (c'est-à-dire son déplacement sur le fond du ciel mesuré à six mois d'intervalle offrant une base de triangulation égale au diamètre de l'orbite de la Terre autour du Soleil, soit deux unités astronomiques, 1 u.a. = $1,496 \times 10^{11}$ m). Il reste la détermination de l'inclinaison i du plan de l'orbite par rapport à la sphère céleste. En effet, si l'orbite est perpendiculaire à la ligne de visée, la vitesse radiale s'annule. Par exemple, pour une orbite circulaire de rayon a , la différence de vitesse radiale est donnée par $\Delta v = 2a\omega \sin i = 4\pi(a/T)\sin i$. D'après la 3e loi de Képler, on peut éliminer le rayon a qui n'est pas directement observable pour obtenir

$$\Delta v \simeq \left(\frac{4\pi G m_2}{T} \right)^{\frac{1}{3}} \sin i \quad (5.94)$$

et

$$\Delta v_2 \simeq - \left(\frac{4\pi G m_2}{T} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{m_1 \sin i}{m_2} \quad (5.95)$$

La période T est directement mesurable par la périodicité du décalage Doppler, la masse m_2 de l'étoile pouvant être estimée, la méthode de spectroscopie Doppler permet d'obtenir la masse de l'exoplanète multipliée par le sinus de l'inclinaison: $m_1 \sin i$.

Certains systèmes ont une inclinaison proche de 90° de sorte que l'exoplanète passe en transit devant le disque de l'étoile dont la luminosité diminue comme dans une éclipse. Dans

ces cas favorables, l'inclinaison i de l'orbite permet d'être déterminée ainsi que la masse m_1 . Dans les autres cas, seule une estimation de l'ordre de grandeur de la masse de l'exoplanète peut être obtenue mais ceci est déjà assez fantastique. Ainsi des systèmes d'exoplanètes ont été découverts comme autour de Gliese 581 (voir table 5.1). Si les premières exoplanètes découvertes en 1995 ou 1996 ont des masses de l'ordre de celle de Jupiter [5], les dernières en date ont des masses de l'ordre de la masse terrestre. Nos connaissances sur les équations d'état de la matière nous permettent d'affirmer que les exoplanètes de la masse de Jupiter sont gazeuses alors que les exoplanètes de masse comparable à celle de la Terre sont rocheuses. Le grand espoir est de détecter de l'oxygène dans l'atmosphère de l'une des ces exoplanètes. Dans ce but, des télescopes spatiaux sont envisagés.

Table 5.1. Caractéristiques des six exoplanètes découvertes autour de l'étoile Gliese 581 [6, 7]. Cette étoile est une naine rouge de masse estimée à $0.31 \times M_{\text{Soleil}}$ située à 20 années-lumière dans la constellation de la Balance. La masse de la Terre est égale à $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$.

Une unité astronomique vaut $1 \text{ u.a.} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$.

Exoplanète	Masse (M_T)	Demi-grand axe (u.a.)	Période orbitale (jours)	Excentricité
e	$\geq 1,7 \pm 0,2$	$0,0284533 \pm 0,0000023$	$3,14867 \pm 0,00039$	~ 0
b	$\geq 15,6 \pm 0,3$	$0,0406163 \pm 0,0000013$	$5,36841 \pm 0,00026$	~ 0
c	$\geq 5,6 \pm 0,3$	$0,072993 \pm 0,000022$	$12,9191 \pm 0,0058$	~ 0
g	$\geq 3,1 \pm 0,4$	$0,14601 \pm 0,00014$	$36,562 \pm 0,052$	~ 0
d	$\geq 5,6 \pm 0,6$	$0,21847 \pm 0,00028$	$66,87 \pm 0,13$	~ 0
f	$\geq 7,0 \pm 1,2$	$0,758 \pm 0,015$	433 ± 13	~ 0

De nombreuses questions se posent à propos de la formation de ces systèmes planétaires. On peut être frappé de constater que les excentricités des planètes et des satellites sont toutes très petites, ce qui semble assurer la stabilité de ces orbites. Dans le système solaire, les comètes ont par contre des excentricités souvent proches de l'unité. Dans cet ordre d'idées, on peut imaginer que les corps célestes ayant eu une excentricité plus grande que l'unité ont quitté le système solaire depuis sa formation il y a plus de $4,6 \times 10^9$ ans. La question de la stabilité des systèmes planétaires reste un sujet de recherche difficile sur lequel des avancées significatives ont néanmoins été réalisées [1, 2].

Par ailleurs, la découverte des systèmes d'exoplanètes permet de progresser dans nos connaissances sur la formation des systèmes planétaires. Leur étude porte sur la mécanique des fluides qui préexistent à la formation de corps célestes bien définis. Ces fluides se comportent de façon hautement non-linéaire et leur évolution temporelle rencontre une singularité lorsque les masses gazeuses dispersées dans l'espace se condensent en un ou plusieurs corps sphériques

liquides ou solides. Ce n'est qu'après la formation d'un nombre fini de corps de masses fixées que les équations différentielles ordinaires de Newton peuvent s'appliquer. Avant ou en cours de formation, ce sont les équations aux dérivées partielles de la mécanique des fluides et des milieux continus qui interviennent. La difficulté des théories de formation des systèmes planétaires est en grande partie due à ce passage d'un schéma de description à un autre par la présence d'échelles multiples dans ces phénomènes hautement non-linéaires.

5.6 Collision dans un potentiel central

Nous considérons ici un système de deux particules en interaction dans un potentiel central, comme le potentiel coulombien entre deux particules chargées électriquement. Les deux particules arrivent de l'infini avec leur vitesse respective, entrent en collision à distance finie et repartent vers l'infini dans de nouvelles directions déterminées par la collision. L'énergie totale du système est ici positive et elle est conservée au cours de la collision. Par conséquent, l'énergie totale est égale à la somme des énergies cinétiques des vitesses incidentes ou de sortie lorsque les particules sont suffisamment éloignées l'une de l'autre pour que l'énergie potentielle d'interaction soit négligeable.

De tels processus de collision sont utilisés pour sonder les propriétés de la matière jusqu'aux échelles les plus microscopiques en physique moléculaire, atomique, nucléaire et subnucléaire. En particulier, pareilles collisions sont provoquées dans les grands accélérateurs de particules comme au LHC (Large Hadron Collider) du CERN. Les premières expériences du genre furent effectuées dans le laboratoire de Rutherford vers 1911 à Cambridge [8, 9]. Il s'agissait de déterminer la répartition des charges électriques dans les atomes en bombardant une fine feuille métallique avec des particules de radioactivité α , c'est-à-dire des noyaux d'hélium 4. Ceux-ci interagissent avec les charges électriques à l'intérieur des atomes d'or. La dispersion des trajectoires provoquée par la collision porte la signature de la distribution des constituants de l'atome, ce qui permet de montrer que la masse des atomes et leur charge positive sont concentrées dans un très petit volume qui fut appelé le noyau de l'atome. Les électrons beaucoup plus légers forment un nuage d'un diamètre de l'ordre de 10^{-10} m autour d'un noyau quasi ponctuel. Le diamètre du nuage électronique est donc celui de l'atome. Bien qu'un tel processus microscopique devrait être conçu en termes de la mécanique quantique, l'approximation qui consiste à le traiter par la mécanique classique s'avère judicieuse. Comme les noyaux de métal sont beaucoup plus lourds que ceux d'hélium 4, le centre de masse est proche du centre du noyau sondé par la particule α .

Un repère cartésien peut être placé autour du centre de masse comme montré à la fig. 5.10.

Un point dans cet espace représente la position relative $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ entre la particule α située en \mathbf{r}_1 et le noyau métallique en \mathbf{r}_2 . Le potentiel d'interaction coulombienne est répulsif puisque les charges sont toutes les deux positives:

$$U(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{k}{r} \quad (5.96)$$

Ce potentiel s'exprime en termes de la charge électrique $e = 1,602 \times 10^{-19}$ C et de la permittivité du vide $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ C² J⁻¹m⁻¹ (le Coulomb C étant l'unité de charge électrique). Comme l'énergie est positive, les trajectoires sont des orbites hyperboliques puisque l'on retrouve un problème képlérien.

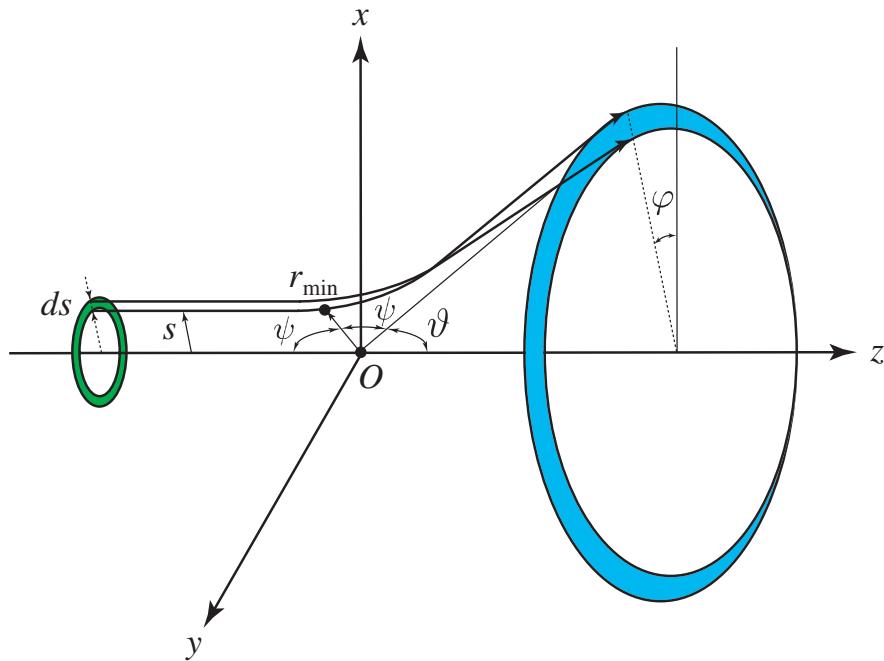


Figure 5.10: Collision entre deux particules vue dans le repère du centre de masse.

Traitons d'abord le cas d'un potentiel central quelconque. La signature de ce potentiel apparaît dans la dispersion des angles ϑ de sortie des particules après la collision. Comme les particules arrivent au hasard, les positions dans le plan P perpendiculaire à la direction incidente sont distribuées uniformément. Dans ces expériences de collisions, le paramètre d'impact s n'est pas contrôlable, ce dernier étant la distance entre la trajectoire rectiligne incidente et la droite parallèle passant par le centre du potentiel (l'axe Oz sur la fig. 5.10). Or c'est ce paramètre d'impact qui détermine l'angle de sortie. Comme le potentiel est central, le moment cinétique

du mouvement relatif est conservé et la trajectoire est contenue dans le plan perpendiculaire au vecteur du moment cinétique et qui inclut le centre de force. Il s'agit du plan contenant l'axe Oz sur la fig. 5.10 et faisant un angle φ avec l'axe Ox . Cet angle φ reste invariant tout au long de la trajectoire comme dans la formulation du problème à la section 5.3. Le module du moment cinétique est proportionnel au paramètre d'impact. En effet, loin dans le passé, la vitesse de la trajectoire est quasi constante et vaut $v_0 = \sqrt{2E/\mu}$. Le module du moment cinétique est alors égal à

$$L = \|\mathbf{r} \times \mathbf{p}\| = \mu sv_0 = s\sqrt{2\mu E} \quad (5.97)$$

Par ailleurs, l'angle polaire θ varie avec la distance radiale r entre la particule et le centre de force d'après l'éq. (5.29) depuis $\theta = \pi$ lorsque $t = -\infty$ jusqu'à $\theta = \vartheta$ lorsque $t = +\infty$, en passant par la valeur $\theta = \vartheta + \psi = \pi - \psi$ quand la distance radiale est minimum. ψ est l'angle entre la direction du péricentre où $r = r_{\min}$ et la direction incidente où $r = +\infty$. En utilisant les éqs. (5.29) et (5.97), l'angle de sortie est donc donné par l'intégrale

$$\vartheta = \pi - 2\psi = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{s dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{U(r)}{E} - \frac{s^2}{r^2}}} \quad (5.98)$$

où la distance radiale minimum est déterminée par la condition $U(r_{\min}) = E(1 - s^2/r_{\min}^2)$. L'intégrale (5.98) nous fournit ainsi la relation $\vartheta = \vartheta(s)$ entre le paramètre d'impact s et l'angle ϑ de déflexion. Il s'agit d'une fonction à variation très rapide puisque, sur un centre répulsif, $\vartheta = \pi$ lorsque $s = 0$, et l'angle ϑ s'annule pratiquement dès que le paramètre d'impact dépasse la portée de l'interaction à savoir environ 10^{-10} m, le cortège électronique faisant écran à la charge du noyau.

Dans le cas du potentiel coulombien, cette relation peut être obtenue plus directement en utilisant l'expression (5.48) des trajectoires hyperboliques où l'excentricité est reliée au paramètre d'impact d'après

$$e = \sqrt{1 + \left(\frac{2Es}{k}\right)^2} > 1 \quad (5.99)$$

Dans le cas présent du potentiel répulsif (5.96), la constante k est négative, ainsi que le paramètre

$$p = -\frac{L^2}{\mu|k|} = -\frac{2s^2E}{|k|} \quad (5.100)$$

Par conséquent, l'orbite hyperbolique de la fig. 5.10 a pour équation

$$r = \frac{2s^2E}{|k|} \frac{1}{e \sin(\theta - \frac{\vartheta}{2}) - 1} \quad (5.101)$$

où l'angle varie de $\theta = \pi$ à $\theta = \vartheta$ d'une asymptote à l'autre. Comme la distance radiale tend vers l'infini dans les directions des asymptotes, on déduit de l'éq. (5.101) que

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \sin \left(\pi - \frac{\vartheta}{2} \right) = \frac{1}{e} \quad (5.102)$$

c'est-à-dire $\cos \psi = 1/e$. Par ailleurs, la distance radiale est minimum en $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta}{2} = \pi - \psi$ où elle vaut

$$r_{\min} = \frac{2s^2 E}{|k|} \frac{1}{e-1} \quad (5.103)$$

Comme l'excentricité dépend du paramètre d'impact d'après l'éq. (5.99), l'éq. (5.102) fournit la relation entre ce dernier et l'angle de déflexion:

$$s = \frac{|k|}{2E} \cotg \frac{\vartheta}{2} \quad (5.104)$$

Cependant, une grandeur comme le paramètre d'impact s n'est pas directement observable dans une expérience où la distribution des particules incidentes est aléatoire et uniforme sur le plan P parallèle à la feuille métallique contenant les atomes à sonder. La signature du potentiel d'interaction doit se trouver dans la distribution statistique des angles ϑ de déflexion. En effet, l'uniformité de la distribution statistique des trajectoires incidentes perpendiculaires au plan P se traduit en une distribution statistique des directions de sortie. Les positions des trajectoires incidentes vis-à-vis du centre d'interaction sont fixées par le paramètre d'impact s et l'angle φ du plan de l'orbite (s, φ) . Les directions de sortie sont fixées par les angles (ϑ, φ) . Comme une relation est établie entre l'angle de déflexion ϑ et le paramètre d'impact s , les trajectoires incidentes déterminent univoquement les directions de sortie. Tous les points (s, φ) du plan P se retrouvent sur la sphère (ϑ, φ) d'angle solide

$$\int \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \int d \cos \vartheta d\varphi = 4\pi \quad (5.105)$$

Toutes les trajectoires traversant un anneau de rayon s , de largeur ds et d'aire $d\sigma = 2\pi s ds$ dans le plan P sortent de la collision dans l'anneau d'angle solide

$$d\Omega = \int \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta \quad (5.106)$$

sur la fig. 5.10. On définit la *section efficace différentielle* comme le rapport entre l'aire $d\sigma$ et l'angle $d\Omega$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{s}{\sin \vartheta} \left| \frac{ds}{d\vartheta} \right| \quad (5.107)$$

Il s'agit d'une grandeur positive ayant les unités d'une aire divisée par l'unité d'angle solide et représentant l'aire effective des trajectoires défléchies dans l'angle solide $d\Omega$ correspondant à l'angle de déflection ϑ . La section efficace différentielle est une fonction de l'angle de déflection ϑ qui porte la signature du potentiel d'interaction puisque celui-ci détermine la relation $\vartheta = \vartheta(s)$ d'après l'éq. (5.98).

Pour l'interaction coulombienne, la relation (5.104) permet ainsi d'obtenir la section efficace différentielle

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^2}{16E^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \quad (5.108)$$

qui est appelée la formule de Rutherford [8]. Sa dépendance caractéristique fut confirmée dans les expériences de Geiger et Marsden en 1913 [9]. Un modèle alternatif par Thompson supposait une distribution plus ou moins uniforme des charges positives et négatives à l'intérieur de l'atome ce qui aurait impliqué une probabilité plus petite pour les grandes déflections. Les observations au laboratoire de Rutherford ouvrirent la voie vers l'établissement du modèle planétaire de l'atome où les électrons de masse faible et de charge négative sont en orbite autour d'un noyau lourd qui les attire par sa charge positive, un peu comme le Soleil attire les planètes sauf que l'interaction est électrique dans l'atome alors qu'elle est gravitationnelle dans le système solaire. La compréhension détaillée du mouvement des électrons dans les atomes attendit néanmoins le remplacement de la mécanique classique par la mécanique quantique vers 1926. Remarquablement, la formule de Rutherford est exactement la même en mécanique quantique qu'en mécanique classique.

Il faut noter que l'on peut introduire la *section efficace totale*

$$\sigma_{\text{tot}} \equiv \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (5.109)$$

qui est définie comme l'intégrale de la section efficace différentielle sur tous les angles solides. La section efficace totale d'un type de collisions s'interprète comme l'aire effective où ces collisions se réalisent. La section efficace totale correspondant à la formule de Rutherford est infinie à cause de la longue portée de l'interaction coulombienne. En fait, le cortège électronique fait écran à l'interaction coulombienne du noyau à des distances plus grandes que le rayon de l'atome. Cet effet d'écran modifie la formule de Rutherford en une section efficace différentielle correspondant à une section efficace totale qui est finie et de l'ordre de la surface d'un disque de rayon égal à la taille de l'atome.

Dans le cas de la collision élastique d'une particule ponctuelle sur une sphère de rayon a et de masse infinie, la section efficace différentielle est donnée par

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4} \quad (5.110)$$

indépendamment de l'angle de déflexion, de sorte que la section efficace totale est bien égale à l'aire du disque de rayon a offert par la sphère aux collisions de la particule incidente:

$$\sigma_{\text{tot}} = \pi a^2 \quad (5.111)$$

Références

- [1] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd edition (Addison-Wesley, Reading MA, 1980).
- [2] C. D. Murray and S. F. Dermott, *Solar System Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge UK, 1999).
- [3] J. Schneider, *L'Encyclopédie des Planètes Extrasolaires* (Observatoire de Paris, <http://exoplanet.eu/catalog.php>).
- [4] M. Mayor et P.-Y. Frei, *Les nouveaux mondes du cosmos. A la découverte des exoplanètes* (Seuil, Paris, 2001).
- [5] M. Mayor and D. Queloz, *A Jupiter-mass companion to a Solar-type star*, Nature **378** (1995) 355-359.
- [6] M. Mayor et al., *The HARPS search for Southern extra-Solar planets. XVIII. an Earth-mass planet in the GJ 581 planetary system*, Astronomy & Astrophysics **507** (2009) 487-494.
- [7] Steven S. Vogt et al., *The Lick-Carnegie Exoplanet Survey: A $3.1 M_{\oplus}$ Planet in the Habitable Zone of the Nearby M3V Star Gliese 581*, The Astrophysical Journal **723** (2010) 954-965.
- [8] E. Rutherford, *The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom*, Philosophical Magazine, Series 6, **21** (1911) 669.
- [9] H. Geiger and E. Marsden, *The laws of deflection of α -particles through large angles*, Philosophical Magazine, Series 6, **25** (1913) 604.

Chapitre 6

Formulation lagrangienne de la mécanique

Dans le siècle qui suivit la parution des Principia, les méthodes d'analyse mathématique se développèrent considérablement et on découvrit que les équations de Newton peuvent être déduites de principes variationnels pour nombre de systèmes. Maupertuis (1698-1759) énonça le “principe de moindre action” qui fut repris et développé par Euler (1707-1783) et Lagrange (1736-1813). Ces derniers obtinrent la forme analytique des équations différentielles, appelées aujourd’hui équations d’Euler-Lagrange, permettant de trouver les solutions de problèmes variationnels comme la recherche d’une surface d’aire minimale, du plus court chemin entre deux points à travers un milieu hétérogène ou encore la trajectoire d’un système mécanique. Un siècle après la parution des Principia, Lagrange publie en 1788 son traité de “Mécanique Analytique” [1] où la mécanique est exposée en termes d’expressions algébriques et analytiques dans le style des livres que nous connaissons aujourd’hui. Dans cet ouvrage, Lagrange reformule la mécanique sur la base des nouvelles méthodes d’analyse et ébauche le lien avec les principes variationnels au travers notamment des travaux de d’Alembert (1717-1783) [2]. La formulation lagrangienne de la mécanique est très puissante et permet d’aborder l’étude de systèmes avec liaisons sans devoir prendre en compte toutes les forces agissant dans le système.

6.1 Systèmes à liaisons et sans liaison

Quelques exemples vont nous permettre de se faire une idée sur ce dont il s’agit.

6.1.1 Pendule simple

Nous avons déjà rencontré un exemple de système à liaison avec le pendule simple où un corps matériel est tenu de se déplacer sur un cercle S^1 à une distance fixe d'un point d'attache dans le champ de gravité terrestre (voir fig. 6.1).

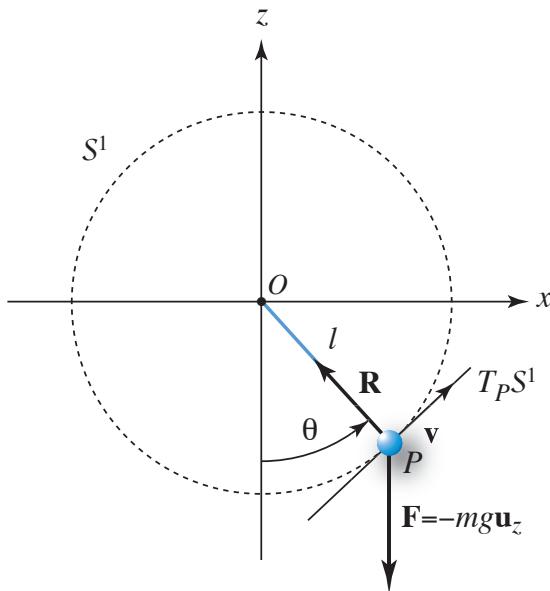


Figure 6.1: Pendule simple dans lequel le point matériel P est contraint de se déplacer sur le cercle S^1 de rayon égal à la longueur l de la tige reliant P au point d'attache O . Le vecteur de vitesse \mathbf{v} se trouve sur la droite tangente au cercle, $T_P S^1$, au point P .

Dans cet exemple, le point matériel est soumis à la contrainte

$$\text{cercle } S^1 : \quad x^2 + z^2 = l^2 \quad (6.1)$$

provenant de la rigidité de la tige de longueur l qui le lie au point d'attache. Il faut remarquer que la tige doit être rigide pour réaliser une pareille contrainte. Si la liaison était établie au travers d'une corde de longueur l , la contrainte ne serait donnée que par l'inégalité $x^2 + z^2 \leq l^2$. Plutôt que de se déplacer dans le plan Oxz bidimensionnel, le point matériel est contraint par l'éq. (6.1) de se déplacer sur un cercle S^1 , c'est-à-dire sur une courbe unidimensionnelle. Sa position y est déterminée par un angle θ . Par conséquent, la contrainte (6.1) peut également s'exprimer par les équations paramétriques de ce même cercle:

$$S^1 \left\{ \begin{array}{l} x = l \sin \theta \\ z = -l \cos \theta \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (6.2)$$

ou encore

$$\mathcal{S}^1 : \quad \mathbf{r} = l(\mathbf{u}_x \sin \theta - \mathbf{u}_z \cos \theta) \quad (6.3)$$

La formulation newtonienne du pendule simple passe par l'établissement de l'équation de Newton dans le plan Oxz . L'accélération et les forces qui agissent sur le point matériel y sont des grandeurs vectorielles. Si l'on néglige les frottements, deux forces agissent sur le point matériel: (1) la force de gravité $\mathbf{F} = -mg\mathbf{u}_z$ et (2) la force de liaison \mathbf{R} provenant de la tige. Comme la tige est rigide et droite, cette dernière est dirigée vers le point d'attache et provient des liaisons moléculaires à l'intérieur de la tige: $\mathbf{R} = -(R/l)\mathbf{r} = R(-\mathbf{u}_x \sin \theta + \mathbf{u}_z \cos \theta)$. Son amplitude R doit être telle que l'accélération donnée par l'équation de Newton

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R} \quad (6.4)$$

garantissons que la trajectoire se maintienne sur le cercle (6.1). Il est clair que les deux composantes de l'équation vectorielle de Newton (6.4) doivent nous servir à déterminer les deux inconnues, à savoir, d'une part, cette amplitude $R(t)$ qui reste autrement indéterminée et, d'autre part, l'angle $\theta(t)$ qui évolue dans le temps comme l'amplitude. La connaissance de l'amplitude $R(t)$ peut être importante dans le problème de résistance des matériaux pour savoir si la tige est suffisamment résistante pour ne pas casser ou ne pas se plier au cours du mouvement. Néanmoins, la grandeur qui est directement observable dans un mode de fonctionnement normal du pendule est l'angle $\theta(t)$ et le problème serait simplifié si nous disposions d'une méthode pour en obtenir l'équation sans devoir prendre explicitement en compte la force de liaison \mathbf{R} . Au chapitre 4, nous avions utilisé l'équation de conservation de l'énergie qui résulte du fait que la dissipation d'énergie peut être négligée. En effet, lors d'un déplacement infinitésimal $\delta\mathbf{r} = l\delta\theta(\mathbf{u}_x \cos \theta + \mathbf{u}_z \sin \theta)$ du point matériel, la force de liaison ne travaille pas

$$\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} = 0 \quad (6.5)$$

puisque le déplacement est perpendiculaire à la force de liaison par définition de celle-ci. Notons que lorsque la force de frottement ne peut être négligée, la force de liaison \mathbf{R} ne reprend que la composante perpendiculaire au déplacement et l'éq. (6.5) devient une condition sur la force de liaison \mathbf{R} . La force de frottement doit alors être ajoutée à la force de gravité dans le vecteur \mathbf{F} . Cette condition d'absence de travail de la force de liaison est naturelle dans la mesure où les liaisons moléculaires dans la tige sont si rigides qu'elles limitent les mouvements à l'intérieur de la tige pouvant entraîner de la dissipation d'énergie.

Cependant, la conservation de l'énergie n'offre qu'une seule équation. Par conséquent, cette méthode ne peut s'étendre à des systèmes à plusieurs variables.

6.1.2 Pendule sphérique

Dans ce système, le point matériel est contraint de se déplacer sur une sphère

$$\text{sphère } S^2 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \quad (6.6)$$

dont les équations paramétriques font intervenir deux paramètres

$$S^2 \left\{ \begin{array}{l} x = l \sin \theta \cos \phi \\ y = l \sin \theta \sin \phi \\ z = -l \cos \theta \end{array} \right. \quad (6.7)$$

(voir fig. 6.2).

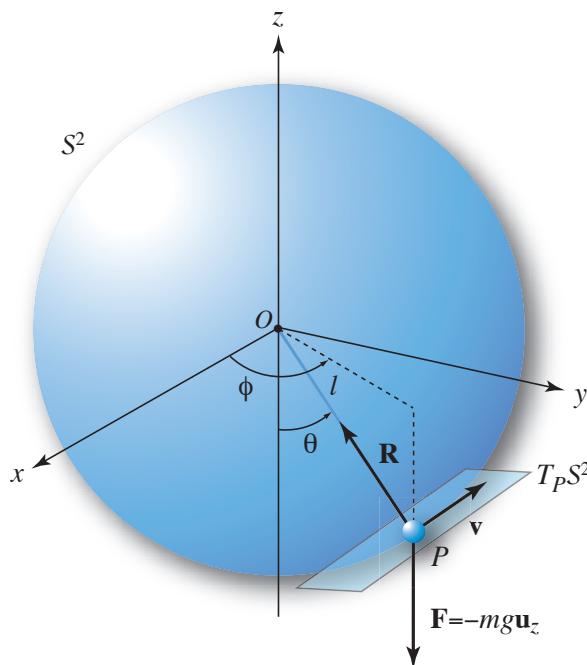


Figure 6.2: Pendule sphérique.

Dans ce cas, les vecteurs figurant dans l'équation de Newton

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R} \quad (6.8)$$

sont tridimensionnels. Deux de ces équations servent à déterminer les deux angles $\theta(t)$ et $\phi(t)$ et la troisième l'amplitude $R(t)$ de la force de liaison. Si les frottements sont négligeables ou repris dans le vecteur \mathbf{F} au côté de la force de gravité, nous pouvons affirmer que la force de

liaison n'effectue aucun travail sous un déplacement infinitésimal $\delta\mathbf{r}$ du point matériel P sur la sphère:

$$\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} = 0 \quad (6.9)$$

Ce déplacement dit “virtuel” peut se faire dans les deux directions du plan tangent à la sphère \mathcal{S}^2 au point P . Ce plan tangent est un espace vectoriel appelé espace tangent dont la dimension est égale au nombre de paramètres intervenant dans la définition de l'ensemble des points admis par les contraintes. Le déplacement virtuel $\delta\mathbf{r}$ est un vecteur appartenant à ce plan tangent $T_P\mathcal{S}^2$. Au chapitre 4, nous avions résolu le problème du pendule sphérique en utilisant la conservation de l'énergie et la conservation de la composante verticale du moment cinétique, ce pendule ayant une symétrie cylindrique autour de la direction du champ de gravité. Cependant, ces lois de conservation sont en nombre trop limité et d'aucun secours pour déterminer le mouvement lorsque le nombre de variables excède le nombre de constantes du mouvement. Ceci est le cas pour le pendule multiple.

6.1.3 Pendule multiple

Dans ce pendule, plusieurs points matériels de masses $\{m_i\}_{i=1}^f$ sont liés successivement les uns aux autres pour des tiges de longueurs $\{l_i\}_{i=1}^f$, la première étant attachée à un point d'appui qui est fixe dans l'espace (voir fig. 6.3a). Tous les points se déplacent dans le plan vertical Oxz sous l'effet de la gravité.

La configuration du pendule multiple est univoquement déterminée par la donnée des angles $\{\theta_i\}_{i=1}^f$ que font les tiges avec la direction de l'accélération de gravité. Les contraintes sont ici données par les f équations

$$\mathcal{T}^f \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + y_1^2 = l_1^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_2^2 \\ \vdots \\ (x_f - x_{f-1})^2 + (z_f - z_{f-1})^2 = l_f^2 \end{array} \right. \quad (6.10)$$

dont les équations paramétriques sont

$$\mathcal{T}^f \left\{ \begin{array}{l} x_1 = l_1 \sin \theta_1 \\ z_1 = -l_1 \cos \theta_1 \\ x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ z_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \\ \vdots \\ x_f = l_1 \sin \theta_1 + \cdots + l_f \sin \theta_f \\ z_f = -l_1 \cos \theta_1 - \cdots - l_f \cos \theta_f \end{array} \right. \quad (6.11)$$

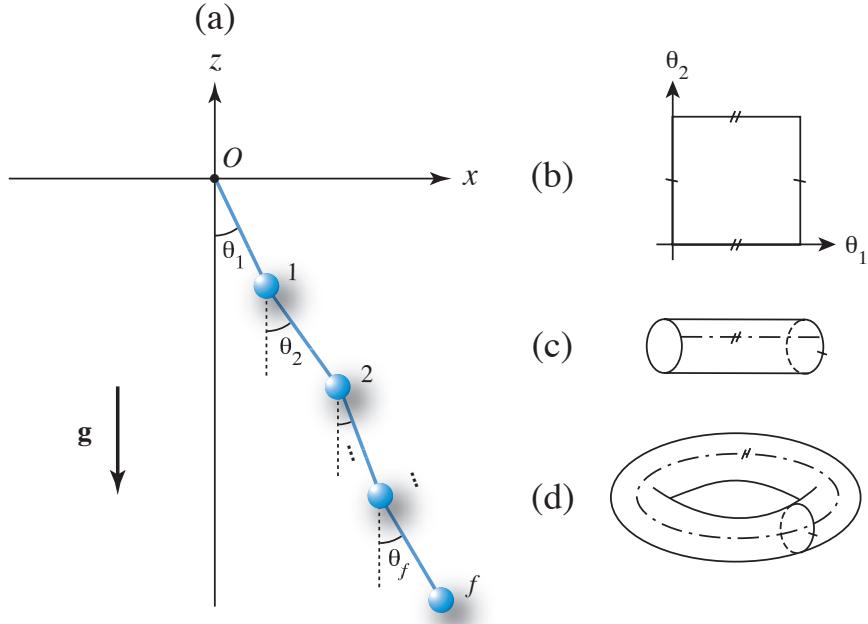


Figure 6.3: (a) Pendule multiple. La construction topologique (b)-(d) montre que l'espace des configurations du pendule double est un tore \mathcal{T}^2 .

ces angles variant de 0 à 2π : $0 \leq \theta_1 < 2\pi, \dots, 0 \leq \theta_f < 2\pi$. L'espace des configurations est ici donné par le produit direct de f cercles \mathcal{S}^1 . Il s'agit d'un tore de dimension f :

$$\mathcal{T}^f = \underbrace{\mathcal{S}^1 \otimes \mathcal{S}^1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{S}^1}_{f \text{ fois}} \quad (6.12)$$

qui est une hypersurface dans l'espace \mathbb{R}^{2f} des coordonnées cartésiennes de tous les points matériels: $\mathcal{T}^f \subset \mathbb{R}^{2f}$. Cette référence au tore est de nature topologique. Dans le cas du pendule double, l'espace des configurations est de dimension deux, les angles θ_1 et θ_2 correspondant à un point P dans un carré de côté 2π (voir fig. 6.3b). Si le point P se déplace virtuellement au-delà de $\theta_2 = 2\pi$, la configuration du pendule est la même que pour l'angle $\theta_2 - 2\pi$. Par conséquent, les points des côtés opposés du carré correspondent à des configurations identiques et nous pouvons les coller ensemble. Sur la fig. 6.3c, les bords horizontaux ont ainsi été collés ensemble. Ensuite, nous obtenons le tore de la fig. 6.3d après avoir collé ensemble les bords restants. Cette construction de nature topologique se généralise à n'importe quelle dimension f et définit un tore \mathcal{T}^f .

Le mouvement du système est décrit par $2f$ équations différentielles ordinaires newtoniennes

pour les f angles θ_i et les amplitudes des f vecteurs \mathbf{R}_i des forces de liaisons:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, f \quad (6.13)$$

avec $\mathbf{R}_{f+1} = 0$, les forces de gravité étant explicitement connues, $\mathbf{F}_i = -m_i g \mathbf{u}_z$. Les équations de Newton peuvent donc nous servir à résoudre le problème mécanique mais une simplification de la formulation serait la bienvenue.

6.1.4 Point matériel lié à une surface

Imaginons un galet glissant sur une surface glacée dans le champ de gravité. La hauteur de la surface est donnée par

$$\Sigma : \quad z = h(x, y) \quad (6.14)$$

(voir fig. 6.4). Les équations paramétriques de cette surface dépendent de deux paramètre (q^1, q^2) qui représentent des coordonnées intrinsèques à la surface elle-même:

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{l} x = x(q^1, q^2) \\ y = y(q^1, q^2) \\ z = z(q^1, q^2) \end{array} \right. \quad (6.15)$$

Dans le pendule sphérique, ces deux coordonnées sont les angles (θ, ϕ) de colatitude et de longitude sur la sphère. Le vecteur de vitesse du galet appartient au plan tangent à la surface au point P où se trouve le galet: $T_P \Sigma$. Ce plan tangent est bien un espace vectoriel où un vecteur comme la vitesse peut être défini.

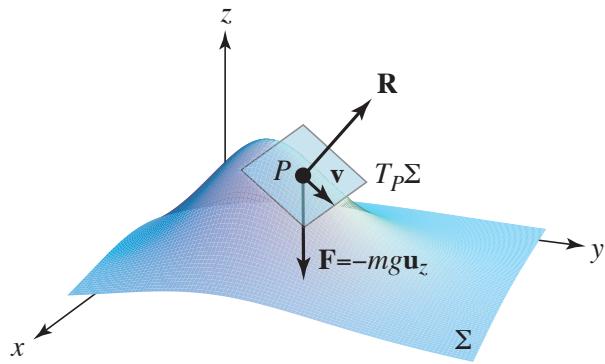


Figure 6.4: Point matériel lié à une surface.

Par ailleurs, les équations de Newton décrivent le mouvement dans l'espace euclidien tridimensionnel

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R} \quad \text{avec} \quad \mathbf{F} = -mg \mathbf{u}_z \quad (6.16)$$

Les trois vecteurs étant tridimensionnels, la force de liaison \mathbf{R} permet à la contrainte (6.14) d'être satisfaite. Il faut ici remarquer que, si le galet prend trop de vitesse, il décolle de la surface car la surface n'établit que l'inégalité $z \geq h(x, y)$. Ce phénomène se manifeste pour un skieur en descente rapide. Lorsque le galet ou le skieur décolle, il poursuit un vol parabolique jusqu'au moment du choc avec la surface. A ce moment, il amortit le choc et poursuit sa descente sur la surface ou il rebondit en conservant tout ou une partie de son énergie. Bien qu'il s'agisse d'autant de problèmes mécaniques intéressants, nous nous focaliserons dans ce cours sur le cas d'une liaison stricte à la surface. Comme précédemment, le travail de la force de liaison lors d'un déplacement virtuel $\delta\mathbf{r}$ est nul, $\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} = 0$, car la force de liaison est par définition perpendiculaire à la surface.

6.1.5 Point matériel lié à un cerceau en rotation

Imaginons une masselotte en forme de perle coulissant sur un cerceau en rotation autour d'un axe vertical à une vitesse angulaire ω (voir fig. 6.5).

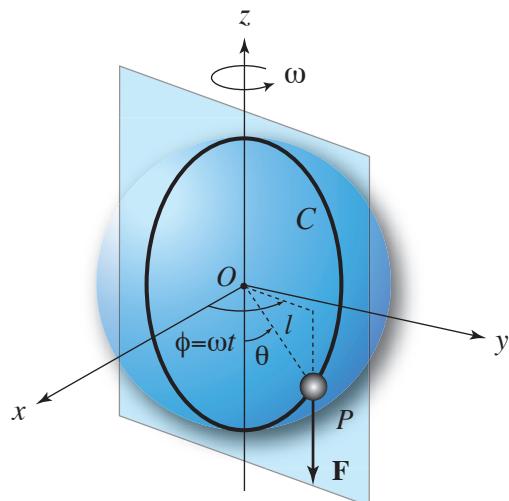


Figure 6.5: Cerceau en rotation.

Dans l'espace euclidien tridimensionnel, les contraintes mécaniques venant du cerceau de rayon l s'exprime par deux équations

$$C \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \\ x \sin \omega t - y \cos \omega t = 0 \end{array} \right. \quad (6.17)$$

équivalentes aux équations paramétriques

$$C \quad \begin{cases} x = l \sin \theta \cos \omega t \\ y = l \sin \theta \sin \omega t \\ z = -l \cos \theta \end{cases} \quad (6.18)$$

donnant la position de la masselotte: $\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z$. Comme dans le pendule simple, la configuration du système est déterminée par une seule variable qui est l'angle θ , mais les contraintes dépendent ici du temps, ce qui complique encore le problème. En principe, l'équation vectorielle de Newton est la même que précédemment

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R} \quad (6.19)$$

dans l'espace tridimensionnel avec la force de gravité $\mathbf{F} = -mg\mathbf{u}_z$ et la force de liaison \mathbf{R} telle que les contraintes (6.17) soient toujours satisfaites car son travail virtuel s'annule: $\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} = 0$ où le déplacement virtuel $\delta\mathbf{r}$ est ici pris à temps t fixé.

6.1.6 Point matériel lié à une courbe mobile

De manière plus générale, le point matériel peut être lié à une courbe quelconque en mouvement, $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Dans l'espace tridimensionnel, cette courbe est déterminée par les deux contraintes:

$$\Gamma \quad \begin{cases} G_1(x, y, z, t) = 0 \\ G_2(x, y, z, t) = 0 \end{cases} \quad (6.20)$$

équivalentes aux équations paramétriques

$$\mathbf{r} = x(q, t) \mathbf{u}_x + y(q, t) \mathbf{u}_y + z(q, t) \mathbf{u}_z \quad (6.21)$$

dépendant d'une seule coordonnée q (voir fig. 6.6).

La trajectoire du point matériel obéit à l'équation de Newton tridimensionnelle

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R} \quad \text{avec} \quad \mathbf{F} = -mg\mathbf{u}_z \quad (6.22)$$

où la force de liaison a un travail virtuel nul à un temps fixé

$$\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} = 0 \quad (6.23)$$

avec

$$\delta\mathbf{r} = \left(\frac{\partial x}{\partial q} \mathbf{u}_x + \frac{\partial y}{\partial q} \mathbf{u}_y + \frac{\partial z}{\partial q} \mathbf{u}_z \right) \delta q \quad (6.24)$$

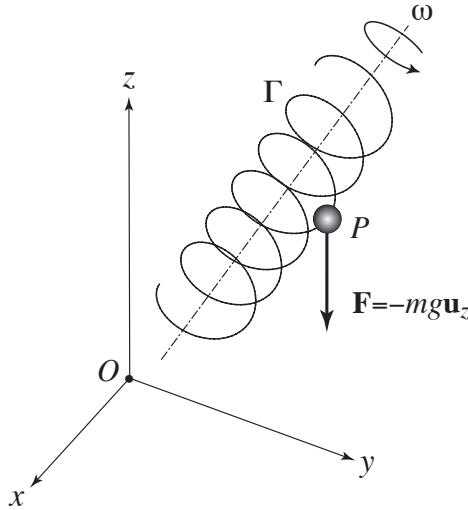


Figure 6.6: Point matériel lié à une courbe mobile comme une hélice en rotation autour de son axe.

Cette condition signifie que la force de liaison est perpendiculaire à la tangente instantanée à la courbe Γ au point P : $T_P\Gamma$. Cependant, comme la courbe est mobile, la force de liaison effectue un travail

$$W = \int \mathbf{R} \cdot d\mathbf{r} = \int \mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int \underbrace{\mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \dot{q}}_{=0} dt + \int \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt = \int \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt \quad (6.25)$$

En effet, un travail doit être effectué par un moteur extérieur pour maintenir la courbe dans son déplacement prédéterminé lors du mouvement de la masselotte. L'énergie de la masselotte, $E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + mgz$ varie dans le temps selon

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \quad (6.26)$$

de sorte que le travail est égal à la variation d'énergie

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = E(t_2) - E(t_1) \quad (6.27)$$

6.1.7 Point matériel lié à une surface mobile

Les considérations précédentes s'appliquent mutatis mutandis à un point matériel lié à une surface mobile. La contrainte est fixée par une seule équation

$$\Sigma : \quad G(x, y, z, t) = 0 \quad (6.28)$$

tandis que les équations paramétriques dépendent de deux coordonnées :

$$\mathbf{r} = x(q^1, q^2, t) \mathbf{u}_x + y(q^1, q^2, t) \mathbf{u}_y + z(q^1, q^2, t) \mathbf{u}_z \quad (6.29)$$

(voir fig. 6.7).

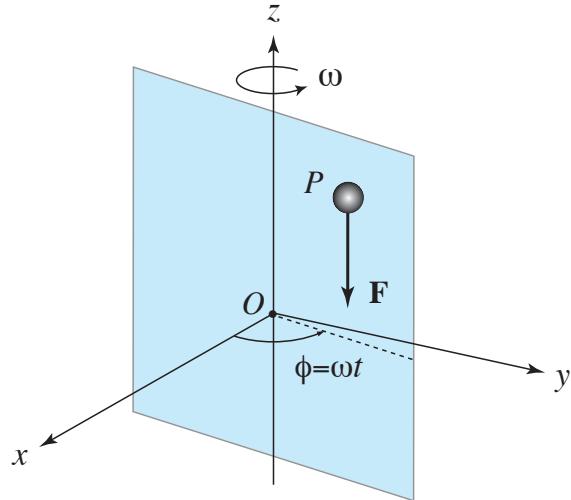


Figure 6.7: Point matériel lié à une surface mobile comme un plan tournant autour de la direction de la gravité.

6.1.8 Corps solide

Tous les atomes dans un corps solide en mouvement suivent des trajectoires déterminées par les coordonnées donnant la position et l'orientation du solide dans l'espace euclidien (voir fig. 6.8).

Le centre de masse du solide est déterminé par les trois coordonnées cartésiennes de position $(X, Y, Z) \in \mathcal{E}^3$ ou \mathbb{R}^3 . L'orientation du solide à un instant donné peut se définir vis-à-vis d'une orientation de référence grâce à la rotation tridimensionnelle qui amène le solide de son orientation de référence à son orientation courante. Trois angles sont nécessaires pour définir une orientation tridimensionnelle: deux angles pour fixer la direction de l'axe de rotation (θ, ϕ) et l'angle ψ de la rotation autour de cet axe. Ces rotations sont des transformations orthogonales qui ne sont ni des inversions, ni de réflexions dans un miroir. Les rotations sont données par des matrices orthogonales dont le déterminant est égal à l'unité, appartenant donc au groupe spécial orthogonal $\text{SO}(3)$. Les configurations du solide sont donc déterminées par six coordonnées

$$(X, Y, Z, \theta, \phi, \psi) \in \mathbb{R}^3 \otimes \text{SO}(3) \quad (6.30)$$

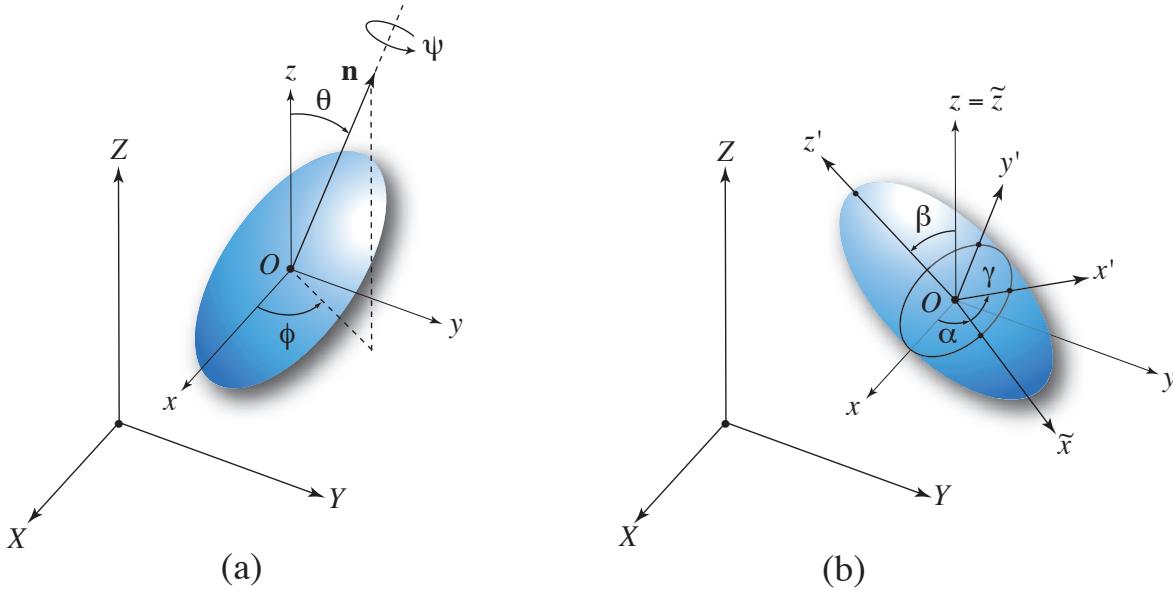


Figure 6.8: Corps solide dans l'espace euclidien \mathcal{E}^3 . Représentation de sa rotation vis-à-vis de sa configuration de référence en termes: (a) des trois angles $(\theta, \phi; \psi)$ fixant la direction \mathbf{n} de l'axe de rotation et l'angle de rotation lui-même ψ ; (b) des trois angles d'Euler (α, β, γ) .

Une rotation de l'espace tridimensionnel peut s'exprimer de manière équivalente en termes des trois angles d'Euler (α, β, γ) qui déterminent d'abord une rotation d'un angle α autour de l'axe vertical Oz , une rotation d'un angle β autour de l'axe $O\tilde{x}$ intermédiaire et, enfin une rotation d'un angle γ autour du nouvel axe Oz' , les trois rotations amenant le repère $Oxyz$ de l'orientation de référence du solide sur le nouveau repère $Ox'y'z'$ correspondant à l'orientation du solide à un instant donné t . On a de même que

$$(X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \otimes \text{SO}(3) \quad (6.31)$$

6.1.9 Molécules

Dans la mesure où les vibrations d'une molécule autour de sa configuration de repos sont d'amplitude négligeable, la molécule peut être considérée comme un corps rigide (voir fig. 6.9).

Dans le cas d'une molécule non-linéaire comme la molécule d'eau, il faut trois coordonnées cartésiennes pour déterminer son centre de masse et trois angles pour son orientation. En tout, six coordonnées sont nécessaires pour déterminer sa configuration rigide: $(X, Y, Z, \theta, \phi, \psi) \in \mathbb{R}^3 \otimes \text{SO}(3)$. Comme la molécule d'eau possède trois atomes, il faut un total de neuf coordonnées pour fixer sa configuration si les atomes peuvent se déplacer les uns par rapport aux autres. Par conséquent, trois de ces coordonnées décrivent des mouvements de vibration autour de

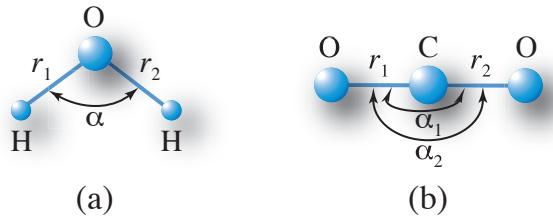


Figure 6.9: (a) Molécule d'eau H₂O. Au repos, $r_1 = r_2 = 0,96 \text{ \AA}$ et $\alpha = 104,5^\circ$. (b) Molécule de dioxyde de carbone. Au repos, $r_1 = r_2 = 1,16 \text{ \AA}$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = 180^\circ$.

la configuration de repos. Il s'agit des distances interatomiques (r_1, r_2) des deux liaisons OH et de l'angle α entre ces liaisons. Les coordonnées naturelles pour décrire les mouvements de translation, de rotation et de vibration d'une molécule d'eau sont donc les neuf coordonnées ($X, Y, Z, \theta, \phi, r_1, r_2, \alpha$) plutôt que les neuf coordonnées cartésiennes des trois atomes. Même si la contrainte de la rigidité de la molécule n'est qu'approximative, il est utile de pouvoir formuler la mécanique des molécules en termes de coordonnées appropriées à la géométrie de la molécule et d'éviter les complications provenant du caractère vectoriel des équations de Newton.

Dans le cas d'une molécule linéaire comme le dioxyde de carbone CO₂, toutes les rotations autour de l'axe de la molécule ne modifie en rien sa configuration au repos. Par conséquent, seules cinq coordonnées sont nécessaires pour déterminer sa configuration: $(X, Y, Z, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathcal{S}^2$. Parmi les neuf coordonnées cartésiennes des trois atomes, il reste donc quatre coordonnées décrivant des mouvements de vibration. S'agit en effet des deux distances interatomiques CO et, cette fois-ci, de deux angles α_1 et α_2 correspondant au pliage de la molécule dans l'un ou l'autre des deux plans perpendiculaires à l'axe de la molécule (voir fig. 6.9b). Ici aussi, on souhaiterait disposer d'une formulation de la mécanique directement en termes des neufs coordonnées ($X, Y, Z, \theta, \phi, r_1, r_2, \alpha_1, \alpha_2$) qui sont bien adaptées pour décrire les mouvements de translation, de rotation et de vibration. Retenons que le nombre de degrés de liberté de vibration d'une molécule contenant N atomes est égal à $f = 3N - 6$ pour une molécule non-linéaire et $f = 3N - 5$ pour une molécule linéaire. Les six ou cinq autres degrés de liberté correspondent aux trois translations possibles du centre de masse et aux trois ou deux angles de rotation.

6.1.10 Machines ou robots articulés

Des liaisons qui limitent les mouvements possibles de pièces mécaniques existent dans de nombreuses machines ou robots articulés (voir fig. 6.10). Dans le cas du piston, une seule variable

détermine sa configuration, à savoir l'angle θ de la roue qu'il entraîne. En effet, cet angle détermine la position linéaire du piston. Pour le gyroscope monté en suspension de Cardan, il faut trois angles pour fixer sa configuration. Des problèmes analogues se posent pour toutes les machines.

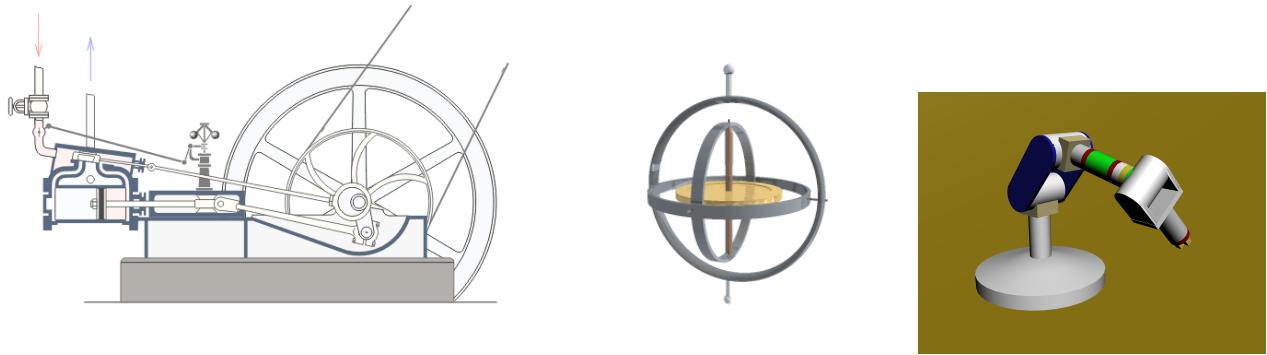


Figure 6.10: (a) Piston entraînant une roue. (b) Gyroscope monté dans une suspension de Cardan. (c) Schéma de robot articulé.

En résumé, les systèmes mécaniques présentent souvent des liaisons qui réduisent le nombre de coordonnées ou variables déterminant leur configuration. Ces liaisons se maintiennent tout au long du mouvement grâce à des forces de liaison qui proviennent de la rigidité des pièces mécaniques imposant ces contraintes. Le travail de ces forces de liaison reste nul lors de déplacements virtuels, de sorte que les forces à caractère dissipatif doivent être ajoutées aux forces de liaison si elles se manifestent dans le système mécanique considéré. Par ailleurs, de nouvelles coordonnées souvent très différentes des coordonnées cartésiennes peuvent s'avérer plus appropriées pour étudier les mouvements de systèmes subissant des déformations autour d'une configuration caractéristique.

6.2 Contraintes holonômes et coordonnées de Lagrange

On appelle *contraintes holonômes* (ou *liaisons holonômes*) des relations liant entre elles les coordonnées cartésiennes des N points matériels d'un système mécanique

$$G_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (6.32)$$

Pareilles contraintes réduisent le nombre de variables qui déterminent la configuration du système depuis le nombre $3N$ des coordonnées cartésiennes des positions des points matériels

jusqu'à

$$f \equiv 3N - K \quad (6.33)$$

qui représente le *nombre de degrés de liberté* du système. Dans le cas particulier où aucune contrainte holonôme ne s'applique $K = 0$, le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de coordonnées cartésiennes de position, $f = 3N$.

Remarque: Il existe des systèmes où les contraintes ne peuvent pas s'exprimer en termes de relations comme les éqs. (6.32). Par exemple, des contraintes sous la forme d'inégalités $G_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) \geq 0$ se rencontrent dans des systèmes où des collisions élastiques se produisent entre des corps solides. Dans d'autres systèmes, les contraintes font intervenir non seulement les positions mais aussi les vitesses. C'est le cas pour un disque cylindrique roulant et tournant sur une surface dans le champ de gravité (voir fig. 6.11). Les contraintes sont alors non-holonômes.

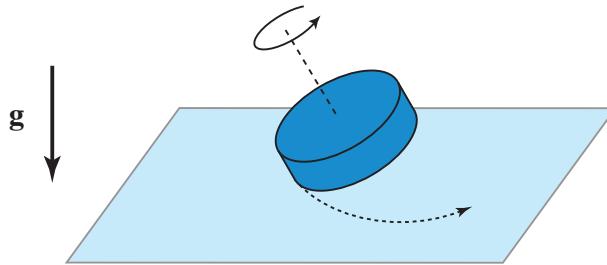


Figure 6.11: Disque cylindrique roulant et tournant sur une surface plate dans le champ de gravité. Les contraintes sont ici non-holonômes car elles font intervenir les vitesses.

Comme nous l'avons remarqué dans les exemples de la section 6.1, les contraintes holonômes peuvent s'exprimer de façon équivalente en termes d'équations paramétriques

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q^1, q^2, \dots, q^f, t) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.34)$$

qui satisfont identiquement l'annulation des contraintes (6.32). Les paramètres sont les coordonnées qui déterminent univoquement la configuration du système. Elles sont appelées les *coordonnées de Lagrange*:

$$\mathbf{q} = (q^1, q^2, \dots, q^f) \in \mathcal{Q} \quad (6.35)$$

Elles varient dans l'espace des configurations \mathcal{Q} dont la dimension est égale au nombre de degrés de liberté

$$\dim \mathcal{Q} = f \quad (6.36)$$

Comme le montrent les exemples de la section 6.1, l'espace des configurations est un espace courbe encore appelé variété différentiable qui est plongée dans l'espace \mathbb{R}^{3N} des positions des N points matériels, $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^{3N}$. En général, il ne s'agit donc pas d'un espace vectoriel contrairement à l'espace euclidien tridimensionnel. Sur une telle variété différentiable, on peut envisager un changement de coordonnées au travers de fonctions quelconques et, éventuellement, non-linéaires

$$\mathbf{q}' = \psi(\mathbf{q}) \quad (6.37)$$

pour autant que ces fonctions soient inversibles

$$\mathbf{q} = \psi^{-1}(\mathbf{q}') \quad (6.38)$$

La condition est ici que le déterminant jacobien du changement de variables ne s'annule pas ou ne diverge pas

$$\frac{\partial(q'^1, q'^2, \dots, q'^f)}{\partial(q^1, q^2, \dots, q^f)} \neq 0, \infty \quad (6.39)$$

dans le domaine de définition des coordonnées de Lagrange.

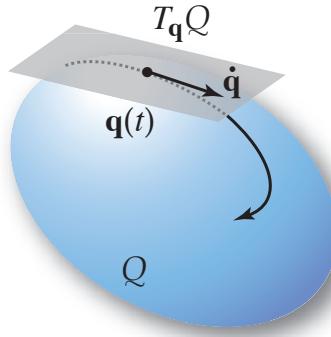


Figure 6.12: Schéma d'une variété différentielle \mathcal{Q} formant l'espace des configurations. Cette variété est plongée dans l'espace \mathbb{R}^{3N} des positions des N corps matériels composent le système. Un exemple est donné d'un espace vectoriel tangent $T_{\mathbf{q}}\mathcal{Q}$ au point de configuration \mathbf{q} avec un vecteur de vitesse généralisée $\dot{\mathbf{q}}(t)$ d'une trajectoire $\mathbf{q}(t)$ passant par ce point.

En chaque point \mathbf{q} de l'espace des configurations, il existe un espace vectoriel qui est tangent à la variété différentiable en ce point, $T_{\mathbf{q}}\mathcal{Q}$ (voir fig. 6.12). Chaque espace tangent est un espace vectoriel de dimension égale à la dimension de la variété différentiable:

$$\dim T_{\mathbf{q}}\mathcal{Q} = \dim \mathcal{Q} = f \quad (6.40)$$

La variété différentiable munie de l'ensemble de ses espaces tangents forme ce que l'on appelle un fibré tangent, chaque espace tangent formant une fibre.

L'espace tangent au point \mathbf{q} contient tous les déplacements virtuels $\delta\mathbf{q} \in T_{\mathbf{q}}\mathcal{Q}$, ainsi que le vecteur de la vitesse généralisée

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)}{\Delta t} \in T_{\mathbf{q}}\mathcal{Q} \quad \text{en } \mathbf{q} = \mathbf{q}(t) \quad (6.41)$$

La vitesse généralisée est la dérivée par rapport au temps des coordonnées de Lagrange. Il est à noter que ces dernières ne forment pas un vecteur mais simplement un f -uple de nombres réels déterminant un point sur la variété différentiable ou espace “courbe” définissant l'espace des configurations. La variété différentiable de l'espace des configurations est un cercle \mathcal{S}^1 pour le pendule simple, une sphère \mathcal{S}^2 pour le pendule sphérique, un tore \mathcal{T}^f pour le pendule multiple, une courbe Γ pour un point lié à cette courbe, une surface Σ pour un point matériel lié à cette surface, le produit direct $\mathbb{R}^3 \otimes \text{SO}(3)$ pour un corps solide ou une molécule rigide non-linéaire, le produit direct $\mathbb{R}^3 \otimes \mathcal{S}^2$ pour une aiguille de diamètre nul ou une molécule rigide linéaire, ou encore \mathcal{V}^N pour un gaz d'atomes de diamètre négligeable se déplaçant dans un domaine de volume tridimensionnel \mathcal{V} . Dans une simulation de dynamique moléculaire utilisant des conditions aux bords périodiques où les positions $(x_i, y_i, z_i)_{i=1}^N$ sont définies modulo L , l'espace des configurations est un tore \mathcal{T}^{3N} de longueur L pour les $3N$ positions.

6.3 Théorème des travaux virtuels

Comme le montre les exemples de la section 6.1, le mouvement des points matériels des systèmes à liaisons obéit aux équations de Newton

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.42)$$

où les vecteurs tridimensionnels \mathbf{F}_i représentent les forces explicitement connues et les vecteurs \mathbf{R}_i les forces de liaisons (encore appelées forces de contact ou réactions de liaison) qui garantissent que les contraintes holonômes (6.32) soient satisfaites tout au long du mouvement, mais qui ne sont pas connues explicitement. Les positions des points matériels s'expriment de manière paramétrique en termes des coordonnées de Lagrange

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t) \quad \text{avec } \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \quad (6.43)$$

On définit les *déplacements virtuels* comme les déplacements infinitésimaux des points matériels sous l'effet de changements infinitésimaux des coordonnées de Lagrange à temps t fixé:

$$\delta\mathbf{r}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha \quad (6.44)$$

avec une somme sur les indices $\alpha = 1, 2, \dots, f$ répétés.

Les forces de liaisons satisfont l'hypothèse suivante:

Hypothèse des liaisons parfaites:

Le travail total des forces de liaisons est nul dans tout déplacement virtuel

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (6.45)$$

Cette hypothèse revient à supposer que les forces de liaisons ne tiennent en compte que les forces nécessaires à maintenir les contraintes holonômes mais ne reprennent pas les forces de frottement dissipatives pouvant résulter de ces contraintes. Les liaisons sont parfaites dans ce sens. On notera que les forces dissipatives peuvent toujours être reprises dans les forces \mathbf{F}_i des éqs. (6.42). En utilisant l'expression (6.44) des déplacements virtuels en termes de coordonnées de Lagrange, l'hypothèse des liaisons parfaites (6.45) se réécrit

$$\sum_{\alpha=1}^f \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \right) \delta q^\alpha = 0 \quad (6.46)$$

Comme les coordonnées de Lagrange sont indépendantes les unes des autres, le travail total des forces de liaisons s'annule si chacun des coefficients des termes en δq^α est égal à zéro:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, f \quad (6.47)$$

Il est essentiel d'observer que l'hypothèse ci-dessus fournit un nombre d'équations juste égal au nombre des coordonnées de Lagrange, c'est-à-dire à la dimension de l'espace des configurations. On peut donc espérer en déduire autant d'équations pour l'évolution temporelle de toutes les coordonnées de Lagrange. C'est en effet le cas car l'hypothèse des liaisons parfaites implique le résultat suivant qui est connu sous le nom de *principe de d'Alembert* [2] mais qui est en fait un théorème.

Théorème des travaux virtuels ou principe de d'Alembert:

Sous l'hypothèse des liaisons parfaites (6.45), les équations de Newton (6.42) impliquent que les déplacements virtuels obéissent aux relations

$$\sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (6.48)$$

Etant donné que les déplacements virtuels s'expriment en termes de changements infinitésimaux des coordonnées de Lagrange d'après les éqs. (6.44), la relation (6.48) du principe de d'Alembert se réécrit sous la forme des f équations suivantes

$$\sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, f \quad (6.49)$$

6.4 Equations de Lagrange

6.4.1 Systèmes généraux

On définit tout d'abord les *forces généralisées*

$$Q_\alpha \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \quad \alpha = 1, 2, \dots, f \quad (6.50)$$

à la place du terme de force dans les éqs. (6.49). Comme les accélérations sont des dérivées par rapport au temps des vitesses $\mathbf{a}_i = d\mathbf{v}_i/dt$, les éqs. (6.49) deviennent

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, f \quad (6.51)$$

ou encore

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, f \quad (6.52)$$

Nous avons le

Lemme:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^\alpha} \quad (6.53)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q^\alpha} \quad (6.54)$$

Démonstration: En effet, comme les positions dépendent des coordonnées de Lagrange selon les éqs. (6.43), les vitesses sont données par

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (6.55)$$

Les vitesses sont des fonctions $\mathbf{v}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ qui sont donc linéaires en les vitesses généralisées d'après l'éq. (6.55). Par conséquent, nous trouvons que

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \quad (6.56)$$

ce qui démontre les éqs. (6.53). D'autre part, si nous dérivons partiellement les vitesses (6.55) par rapport à une coordonnée de Lagrange, nous avons

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \dot{q}^\beta + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha \partial t} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \quad (6.57)$$

qui n'est rien d'autre que le résultat de la dérivée totale de $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha}$ par rapport au temps t . Dès lors, les éqs. (6.54) sont aussi démontrées. C.Q.F.D.

Revenons aux éqs. (6.52). Nous constatons que nous pouvons les réécrire sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q^\alpha} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, f \quad (6.58)$$

Nous introduisons ici la fonction d'énergie cinétique exprimée en termes des coordonnées de Lagrange et de leurs dérivées par rapport au temps

$$T \equiv \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \quad (6.59)$$

Par conséquent, les éqs. (6.58) s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, f \quad (6.60)$$

qui représentent la première forme des *équations de Lagrange*, valable en général sous l'hypothèse des liaisons parfaites, ce qui n'exclut pas la possibilité de forces (généralisées) à caractère dissipatif.

6.4.2 Systèmes à forces dérivant d'un potentiel

Considérons un système à forces positionnelles, éventuellement dépendant du temps, et dérivant d'un potentiel

$$\mathbf{F}_i = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (6.61)$$

Le potentiel est donc une fonction des positions et du temps

$$U = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) \quad (6.62)$$

En exprimant les positions en fonction des coordonnées de Lagrange d'après les éqs. (6.43), nous obtenons le potentiel comme une fonction des coordonnées de Lagrange et du temps

$$U = U(q^1, q^2, \dots, q^f, t) \quad (6.63)$$

On utilise ici par commodité un abus de notation puisque les fonctions (6.62) et (6.63) ne sont pas les mêmes fonctions à moins que le système soit sans liaison avec $f = 3N$ et que les coordonnées de Lagrange soient identiques aux coordonnées cartésiennes de positions. Sous les hypothèses précédentes, les forces généralisées deviennent

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} = - \frac{\partial U}{\partial q^\alpha} \quad (6.64)$$

ce qui est une forme analogue à celle des éqs. (6.61) et, par ailleurs, le potentiel ne dépend pas des vitesses généralisées

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^\alpha} = 0 \quad (6.65)$$

On introduit ici la *fonction de Lagrange*:

$$L \equiv T - U \quad (6.66)$$

comme la différence entre l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle U , toutes les deux exprimées en termes des coordonnées de Lagrange, des vitesses généralisées (pour T) et du temps. Les éqs. (6.60) peuvent alors s'écrire sous la seconde et principale forme des *équations de Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, f \quad (6.67)$$

Dans la fonction de Lagrange, les coordonnées et les vitesses généralisées sont des variables indépendantes vis-à-vis desquelles des dérivées partielles sont prises lorsque l'on forme les équations de Lagrange (6.67). Comme la fonction de Lagrange sert à établir les équations du mouvement pour toutes les trajectoires possibles du système, les vitesses généralisées $\{q^\alpha\}$ peuvent prendre des valeurs qui sont indépendantes des valeurs des coordonnées de Lagrange $\{q^\alpha\}$. Différentes valeurs des vitesses correspondent à différentes trajectoires possibles passant par une même configuration $\{q^\alpha\}$. Comme les équations de Lagrange (6.67) sont des équations différentielles du second ordre en le temps, l'unicité d'une solution est garantie par la donnée des $2f$ conditions initiales $\{q^\alpha(t_0), \dot{q}^\alpha(t_0)\}_{\alpha=1}^f$ au temps t_0 . Cet argument basé sur le théorème de Cauchy confirme que les f vitesses généralisées et les f coordonnées de Lagrange doivent être considérées comme des variables indépendantes.

Remarque: Les équations du mouvement prennent aussi de la forme (6.67) avec la fonction lagrangienne (6.66) sous l'hypothèse plus générale que le potentiel dépende aussi des vitesses

généralisées et que les forces généralisées soient de la forme

$$Q_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial q^\alpha} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \quad (6.68)$$

Alors les équations de Lagrange (6.60) prennent la même forme (6.67) avec la fonction lagrangienne (6.66). Nous verrons dans un chapitre ultérieur que la formulation lagrangienne du problème mécanique d'une particule chargée dans un champ magnétique demande de faire appel à une pareille généralisation.

6.4.3 Systèmes dissipatifs

Dans de nombreux systèmes mécaniques macroscopiques, des forces de frottement à caractère dissipatif se manifestent. Supposons qu'une telle force soit proportionnelle à la vitesse \mathbf{v} et s'ajoute à une force positionnelle dérivant d'un potentiel U dans un système comportant une seule particule soumise à une contrainte holonôme:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - \zeta \mathbf{v} \quad (6.69)$$

où ζ est un coefficient de frottement indépendant de la vitesse, de la position et du temps. Dans ce cas, les forces généralisées s'écrivent

$$Q_\alpha = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} - \zeta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}^\alpha} \quad (6.70)$$

où l'on a utilisé l'éq. (6.53) et introduit la *fonction de dissipation de Rayleigh*

$$D = \frac{1}{2} \zeta \mathbf{v}^2 \quad (6.71)$$

Les équations de Lagrange (6.60) deviennent alors

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}^\alpha} \quad \alpha = 1, 2, \dots, f \quad (6.72)$$

toujours avec la fonction lagrangienne $L = T - U$. Le nouveau terme figurant dans le membre de droite provient des forces dissipatives qui ne peuvent s'exprimer sous la forme (6.67) restreinte aux forces dérivant d'un potentiel.

Comme autre exemple, considérons une masselotte se déplaçant sur une courbe mobile ou fixe. La masselotte est semblable à une perle et coulisse avec frottement sur un fil de fer dont la forme est identique à la courbe en question. Soit q la coordonnée de déplacement le long de

la courbe. Dans un pareil cas, la force de frottement est parallèle à la courbe et proportionnelle à la vitesse généralisée \dot{q} :

$$\mathbf{F}_f = -\zeta \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \dot{q} \quad (6.73)$$

La fonction de dissipation prend alors la forme

$$D = \frac{1}{2} \zeta \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \right)^2 \dot{q}^2 \quad (6.74)$$

Par contre, si la masselotte coulissait sans frottement le long de la courbe mais subissait la force de résistance d'un fluide environnant dans lequel elle se déplacerait, la fonction de dissipation aurait la forme (6.71) avec la vitesse $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$.

6.5 Fonctions lagrangiennes

6.5.1 Forme générale

Considérons un système où les forces sont positionnelles et dérivent d'un potentiel qui dépend éventuellement du temps comme à la sous-section 6.4.2. Notre but est ici d'obtenir la forme explicite de la fonction lagrangienne (6.66) qui entre dans les équations de Lagrange (6.67). L'énergie cinétique (6.59) est donnée explicitement par

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta} \right)}_{M_{\alpha\beta}} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)}_{A_\alpha} \dot{q}^\alpha + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2}_{T_0} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta}_{T_2} + \underbrace{\sum_\alpha A_\alpha(\mathbf{q}, t) \dot{q}^\alpha}_{T_1} + T_0(\mathbf{q}, t) \end{aligned} \quad (6.75)$$

où l'on a introduit la matrice ou tenseur des masses généralisées $M_{\alpha\beta}$ et les coefficients A_α des termes linéaires en les vitesses. La fonction lagrangienne prend donc la forme

$$L = T_2 + T_1 + T_0 - U \quad (6.76)$$

ou

$$L = \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + A_\alpha \dot{q}^\alpha - U \quad (6.77)$$

avec $\tilde{U} = U - T_0$. La nouveauté est l'apparition des termes linéaires en les vitesses généralisées qui viennent s'ajouter aux termes quadratiques en les vitesses. De plus, il apparaît une correction au potentiel provenant, comme les coefficients A_α , de la dépendance explicite des contraintes holonômes en le temps.

6.5.2 Le pendule double

Nous décrivons ici la fonction lagrangienne du pendule double (voir fig. 6.13). Les équations paramétriques des contraintes holonômes sont ici

$$\mathcal{T}^2 \left\{ \begin{array}{l} x_1 = l_1 \sin \theta_1 \\ z_1 = -l_1 \cos \theta_1 \\ x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ z_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \end{array} \right. \quad (6.78)$$

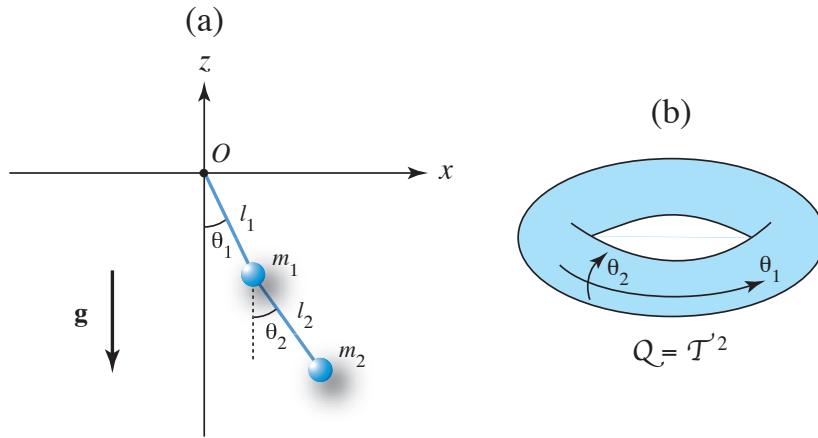


Figure 6.13: (a) Pendule double. (b) Son espace des configurations (θ_1, θ_2) en forme de tore.

Dans les coordonnées cartésiennes, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) \\ U = m_1gz_1 + m_2gz_2 \end{array} \right. \quad (6.79)$$

En y remplaçant par les expressions (6.78) en termes des coordonnées de Lagrange (θ_1, θ_2) , la fonction lagrangienne $L = T - U$ devient

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cos \theta_2 \quad (6.80)$$

On trouve la fonction lagrangienne d'un pendule simple de masse m_1 dans la limite où $m_2 = 0$, ou encore un autre de masse $(m_1 + m_2)$ dans la limite où $l_2 = 0$. Les équations du mouvement sont données par les équations de Lagrange (6.67).

Si de plus les masselottes subissaient la résistance de l'air, il faudrait prendre les éqs. (6.72) avec la fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\zeta_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}\zeta_2\mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\zeta_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + \zeta_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (6.81)$$

Par contre, si le frottement provenait des roulements au point d'attache et à la jonction entre les deux tiges, la fonction de dissipation dépendrait directement des vitesses angulaires $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1$ des rotations des tiges les unes par rapport aux autres:

$$D = \frac{1}{2}\zeta_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\zeta_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2 \quad (6.82)$$

Une autre forme serait à considérer si le frottement provenait de la résistance de l'air des tiges elles-mêmes.

6.5.3 Cerceau en rotation

Dans le cas d'une masselotte liée à un cerceau en rotation autour de la direction du champ de gravité, la coordonnée de Lagrange est l'angle θ par rapport à la direction du champ de gravité et la position de la masselotte est donnée par les éqs. (6.18). Comme les énergies cinétique et potentielle sont ici

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) \\ U = mgz = -mgl \cos \theta \end{cases} \quad (6.83)$$

la fonction lagrangienne est égale à

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta \quad (6.84)$$

On retrouve celle du pendule simple dans la limite $\omega = 0$ où le cerceau ne tourne pas.

Si un frottement se manifestait entre la masselotte et le cerceau, la fonction de dissipation de Rayleigh serait donnée par

$$D = \frac{1}{2}\zeta\dot{\theta}^2 \quad (6.85)$$

6.5.4 Circuit électrique LRC

Soit un circuit électrique comportant en série une résistance R , une capacité de capacitance C , une bobine d'induction d'inductance notée ici M , le tout soumis à une force électromotrice $\mathcal{E}(t)$. Nous savons que l'équation d'évolution de la charge électrique q aux bornes de la capacitance est donnée par

$$M\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}(t) \quad (6.86)$$

la courant électrique dans la résistance ou la bobine d'induction étant $I = \dot{q}$ (voir fig. 6.14).

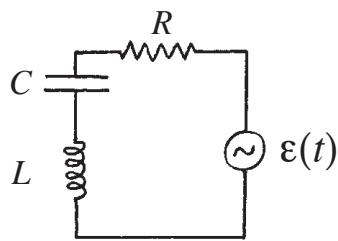


Figure 6.14: Circuit électrique LRC .

Cette équation peut se mettre sous la forme d'une équation de Lagrange (6.71) avec la fonction lagrangienne

$$L = \frac{1}{2}M\dot{q}^2 - \frac{q^2}{2C} + \mathcal{E}(t)q \quad (6.87)$$

et la fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}R\dot{q}^2 \quad (6.88)$$

comme nous pouvons le vérifier. Le formalisme lagrangien peut donc s'utiliser au-delà du cadre de la mécanique.

6.6 Intégrales premières des équations de Lagrange

Comme pour les équations de Newton, il existe dans certains systèmes des constantes du mouvement encore appelées des intégrales premières. Elles font l'objet des théorèmes suivants.

Théorème 1:

Si la fonction lagrangienne ne dépend pas explicitement du temps t , $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, et que la fonction de dissipation est nulle, alors la grandeur

$$h = \dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - L \quad (6.89)$$

est une intégrale première, c'est-à-dire une constante du mouvement.

Démonstration: Si nous dérivons la grandeur (6.89) par rapport au temps et que nous utilisons l'équation de Lagrange dans sa forme (6.72), nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \ddot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} + \dot{q}^\alpha \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \ddot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \dot{q}^\alpha \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \right] - \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= -\dot{q}^\alpha \frac{\partial D}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.90)$$

Par conséquent, la grandeur (6.89) est conservée si la fonction lagrangienne est indépendante du temps, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, et si la fonction de dissipation s'annule, $D = 0$. C.Q.F.D.

Remarque: Pour une fonction lagrangienne de la forme générale (6.76) ou (6.77) et indépendante du temps, la grandeur conservée (6.89) est égale à

$$h = T_2 - T_0 + U \quad (6.91)$$

où le terme linéaire en les vitesses a disparu. Si les liaisons elles-mêmes sont indépendantes du temps, $T = T_2$ et $T_1 = T_0 = 0$, nous retrouvons l'énergie totale du système donnée par la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle,

$$h = T + U = E \quad (6.92)$$

comme il se doit. Cependant, il faut noter que la grandeur h diffère en général de l'énergie totale E du système.

Théorème 2:

Si la fonction lagrangienne ne dépend pas explicitement d'une des coordonnées de Lagrange, par exemple q^1 que l'on appelle alors une variable cachée ou cyclique, $L = L(q^2, \dots, q^f, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^f, t)$, et si la fonction de dissipation est nulle, alors la grandeur

$$p_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} \quad (6.93)$$

est une intégrale première ou constante du mouvement.

Démonstration: Comme $\frac{\partial L}{\partial q^1} = 0$ et $D = 0$, l'équation de Lagrange correspondant à cette coordonnée devient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} \right) = 0 \quad (6.94)$$

de sorte que la grandeur (6.93) reste constante dans le temps. C.Q.F.D.

De façon générale, nous avons le

Théorème 3: Théorème de Noether [3]

Si la fonction lagrangienne est invariante sous un groupe continu de transformations à un paramètre s , $\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, s)$,

$$L(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (6.95)$$

et si la fonction de dissipation s'annule, alors le système admet la grandeur

$$c \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \left(\frac{d\tilde{q}^\alpha}{ds} \right)_{s=0} \quad (6.96)$$

comme intégrale première ou constante du mouvement.

Démonstration: Un groupe continu de transformations est appelé un groupe de Lie. Les fonctions

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, s) \quad (6.97)$$

définissent des changements de coordonnées de Lagrange, $\mathbf{q} \xrightarrow{s} \tilde{\mathbf{q}}$, qui dépendent continûment du paramètre s . On peut éventuellement déterminer ces fonctions grâce à un système d'équations différentielles

$$\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{ds} = \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{q}}) \quad (6.98)$$

dont les solutions de conditions initiales $\tilde{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{q}$ seraient les fonctions (6.97). Les vitesses généralisées se transforment alors selon

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (6.99)$$

D'après l'hypothèse (6.95) d'invariance de la fonction lagrangienne, celle-ci est indépendante du paramètre s même après la transformation (6.97) vers les nouvelles coordonnées de Lagrange $\tilde{\mathbf{q}}$ de sorte que

$$\frac{dL}{ds} = \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}^\alpha} \frac{\partial \tilde{q}^\alpha}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}^\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{q}^\alpha}{\partial s \partial q^\beta} \dot{q}^\beta = 0 \quad (6.100)$$

où nous avons utilisé l'éq. (6.99). Par les équations de Lagrange (6.67) et le fait que la transformation (6.97) est indépendante du temps, nous trouvons

$$\frac{dL}{ds} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \frac{\partial \tilde{q}^\alpha}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{q}^\alpha}{\partial s} \right) = 0 \quad (6.101)$$

et, par conséquent,

$$\frac{dL}{ds} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial \tilde{q}^\alpha}{\partial s} \right) = 0 \quad (6.102)$$

Ceci démontre que la grandeur

$$c \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial \tilde{q}^\alpha}{\partial s} \quad (6.103)$$

reste constante au cours du temps pour toutes les valeurs du paramètre s et, en particulier, pour $s = 0$ où

$$c = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \left(\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{ds} \right)_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (6.104)$$

Le résultat annoncé (6.96) est donc démontré. La constante du mouvement peut s'exprimer en termes du champ de vecteurs (6.98) qui engendre les transformations continues du groupe de Lie. C.Q.F.D.

Remarque: Le théorème 2 est le cas particulier du théorème de Noether où le groupe à un paramètre est le groupe des translations de la coordonnée q^1 :

$$\begin{aligned} \tilde{q}^1 &= q^1 + s, & \tilde{q}^2 &= q^2, \dots & \tilde{q}^f &= q^f, \\ G^1 &= 1, & G^2 &= 0, \dots & G^f &= 0, \end{aligned} \quad (6.105)$$

de sorte que

$$c \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} G^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} = p_1. \quad (6.106)$$

6.7 Principe variationnel

Un résultat remarquable remontant aux travaux de Maupertuis, d'Euler et de Lagrange est que les équations lagrangiennes de la mécanique peuvent se déduire d'un principe variationnel qui suppose qu'une certaine grandeur appelée *l'action* soit extrémale le long des courbes qui sont les solutions des équations du mouvement. Dans l'esprit de Maupertuis, cet extrémum est un minimum d'où le nom de "principe de moindre action" qui trouve son origine dans le principe de Fermat (1601-1665) selon lequel un rayon lumineux suit la trajectoire qui minimise le temps de parcours de la lumière dans le phénomène de réfraction en optique. Cependant, il existe aussi des trajectoires qui ne réalisent pas le minimum de l'action de sorte que l'on parle aujourd'hui d'extrémales [4].

L'*action* se définit comme la fonctionnelle

$$S[\mathbf{q}(t)] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt \quad (6.107)$$

égale à l'intégrale de la fonction lagrangienne le long d'un arc de courbe *a priori* quelconque $\mathbf{q}(t)$ dans l'espace des configurations et sur l'intervalle de temps $t \in [t_1, t_2]$. Comme la fonction lagrangienne a pour unité le Joule (unité d'énergie), les unités d'une action sont des Joules multipliés par des secondes (une énergie par un temps).

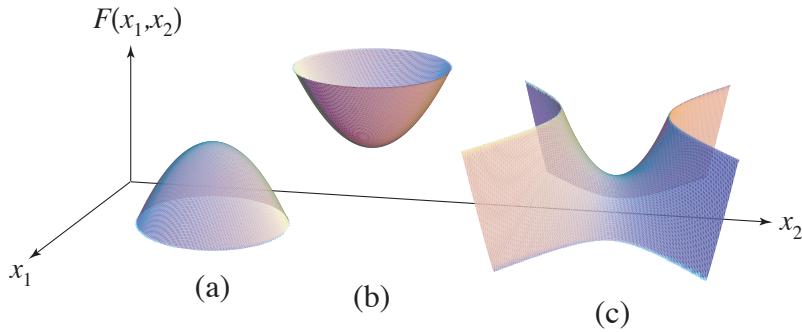


Figure 6.15: Exemples d'extréma pour une fonction de deux variables: (a) maximum; (b) minimum; (c) col.

Une fonctionnelle est une application d'un espace de fonctions [ici les courbes $\mathbf{q}(t)$ qui sont des f -uples de fonctions différentiables du temps] sur les nombres réels. Il s'agit d'une généralisation de la notion de fonction (qui est une application d'un espace de points sur les nombres réels). Les extréma d'une fonction $F(\mathbf{x})$ de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ sur les nombres réels sont les points \mathbf{x} où sa différentielle s'annule

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} = 0 \quad (6.108)$$

ce qui donne bien les conditions que toutes les dérivées partielles s'annulent à l'extrémum, $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} = 0$. Ces extréma sont des minima, des maxima ou des points de selle (encore appelés des cols), ces derniers étant possibles pour les fonctions de plusieurs variables (voir fig. 6.15).

La notion de différentielle d'une fonction se généralise en celle de variation première d'une fonctionnelle. La prise de la variation première consiste à comparer les valeurs de la fonctionnelle entre une courbe de référence $\mathbf{q}(t)$ telle que $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ et $\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_2$ et une courbe voisine $\mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t)$ qui n'en diffère que par une perturbation infinitésimale $\delta\mathbf{q}(t)$, elle-même une fonction du temps. Cette perturbation peut être choisie comme un f -uple de fonctions du temps $\boldsymbol{\eta}(t) = \{\eta^\alpha(t)\}_{\alpha=1}^f$, dont les dérivées premières $\{\dot{\eta}^\alpha(t)\}_{\alpha=1}^f$ existent, fonctions multipliées par un petit paramètre ϵ dont on prendra la limite $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t) + \epsilon \boldsymbol{\eta}(t) \quad (6.109)$$

Les vitesses généralisées sont données par

$$\dot{\mathbf{q}}(t) + \delta\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \epsilon \frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} \quad (6.110)$$

le long de la courbe perturbée de sorte que, par construction, la perturbation des vitesses généralisées est égale à la dérivée par rapport au temps de la perturbation sur les coordonnées de Lagrange

$$\delta\dot{\mathbf{q}} = \delta \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{d}{dt} \delta\mathbf{q} \quad (6.111)$$

Par ailleurs, on impose que les perturbations s'annulent à l'instant initial $t = t_1$ et à l'instant final $t = t_2$:

$$\delta\mathbf{q}(t_1) = \delta\mathbf{q}(t_2) = 0 \quad (6.112)$$

ce qui est équivalent aux conditions:

$$\boldsymbol{\eta}(t_1) = \boldsymbol{\eta}(t_2) = 0 \quad (6.113)$$

Ces conditions garantissent que la courbe de référence et toutes ses variations que nous considérons ici vérifient les conditions aux bords:

$$\mathbf{q}(t_1) + \delta\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{q}(t_2) + \delta\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_2 \quad (6.114)$$

(voir fig. 6.16).

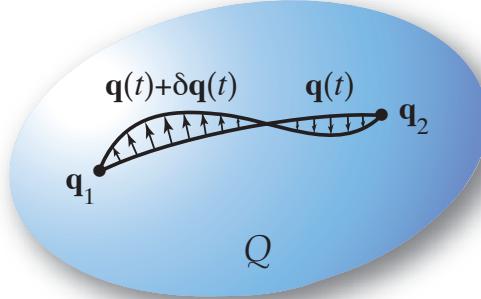


Figure 6.16: Courbe de référence $\mathbf{q}(t)$ et une de ses variations $\mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t)$ dans l'espace des configurations.

La variation première de l'action est alors donnée par la différence

$$\delta S \equiv S[\mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t)] - S[\mathbf{q}(t)] \quad (6.115)$$

dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$ ou $\delta\mathbf{q}(t) \rightarrow 0$. Dans cette limite, les carrés de grandeurs infinitésimales comme ϵ et $\delta\mathbf{q}(t)$ sont négligés, comme c'est le cas dans une différentielle définie par $dF \equiv F(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - F(\mathbf{x})$ où les termes non-linéaires en $d\mathbf{x}$ sont négligés dans la limite $d\mathbf{x} \rightarrow 0$. Si l'on suppose que la fonction L est différentiable par rapport à \mathbf{q} et $\dot{\mathbf{q}}$, nous trouvons que

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt [L(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta\dot{\mathbf{q}}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta \dot{q}^\alpha \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \delta q^\alpha \right] \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right] \delta q^\alpha \end{aligned} \quad (6.116)$$

où l'on a utilisé l'éq. (6.111), à savoir $\delta\dot{q}^\alpha = d(\delta q^\alpha)/dt$. En vertu des conditions aux bords (6.114), le premier terme s'annule et la variation première est alors donnée par

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) \right] \delta q^\alpha = 0 \quad (6.117)$$

Si l'on recherche les courbes qui sont les extrémales de l'action, il faut demander que sa variation première s'annule $\delta S = 0$. Cette condition généralise à la fonctionnelle d'action la condition (6.108) d'annulation d'une différentielle pour la recherche de ses extréma. Dans cette comparaison, il est naturel de trouver une intégrale dans l'éq. (6.117) en plus de la somme sur toutes les variables \mathbf{x} dans l'éq. (6.108) car les valeurs des fonctions $\{q^\alpha(t)\}_{\alpha=1}^f$ en tous les points de l'intervalle de temps $t_1 \leq t \leq t_2$ jouent le rôle des variables \mathbf{x} .

Nous avons ici le

Lemme fondamental du calcul des variations: Si l'intégrale $\int_{t_1}^{t_2} g(t)\eta(t)dt$, où $g(t)$ est une fonction donnée qui est continue dans l'intervalle $t_1 \leq t \leq t_2$, s'annule pour toute fonction $\eta(t)$ continue avec sa dérivée première et nulle aux extrémités $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$, alors la fonction $g(t)$ est identiquement nulle dans l'intervalle $t_1 \leq t \leq t_2$.

Démonstration: Ce lemme se démontre par l'absurde. Supposons que l'intervalle $[t_1, t_2]$ contienne un point $t = \tau$ en lequel la fonction $g(t)$ n'est pas nulle et, par exemple, positive $g(\tau) > c > 0$ (où c est une constante positive). Etant continue, la fonction $g(t)$ sera également

positive $g(t) > c > 0$ dans un certain voisinage $t \in [\tau_1, \tau_2]$ du point τ , voisinage entièrement contenu dans l'intervalle $[t_1, t_2]$. Définissons maintenant la fonction:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t_1 \leq t \leq \tau_1 \\ (t - \tau_1)^2(t - \tau_2)^2 & \text{si } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ 0 & \text{si } \tau_2 \leq t \leq t_2 \end{cases} \quad (6.118)$$

Cette fonction satisfait toutes les conditions du lemme car elle est continue, sa dérivée première existe et est aussi continue sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ tout entier et, de plus, $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. Par conséquent, nous avons que l'intégrale est strictement positive puisque

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)\eta(t)dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} g(t)\eta(t)dt > c \int_{\tau_1}^{\tau_2} \eta(t)dt > 0 \quad (6.119)$$

Or l'intégrale est nulle par hypothèse. Cette contradiction démontre le lemme. Ce lemme se généralise à des intégrales de sommes telles que $\sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} g_{\alpha}(t)\eta^{\alpha}(t)dt = 0$ pour toutes fonctions $\eta^{\alpha}(t)$ continues avec leur dérivée première et nulles aux extrémités. C.Q.F.D.

En utilisant le lemme ci-dessus, on conclut que l'intégrale (6.117) s'annule identiquement pour toutes les perturbations continues

$$\{\delta q^{\alpha}(t)\}_{\alpha=1}^f \quad \text{sur } t_1 \leq t \leq t_2 \quad (6.120)$$

avec leur dérivée première et vérifiant les conditions aux bords (6.112), si et seulement si les courbes $\mathbf{q}(t)$ satisfont les équations

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}} = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, f \quad (6.121)$$

où $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ est une fonction différentiable quelconque qui n'est pas nécessairement de la forme mécanique (6.66). Dans le contexte du calcul des variations, les éqs. (6.121) sont appelées *les équations d'Euler-Lagrange*.

On remarque qu'il est naturel que les extrémales $\mathbf{q}(t)$ d'un problème variationnel soient les solutions d'équations différentielles ordinaires, car il s'agit de la généralisation de la recherche des extréma d'une fonction où s'annulent les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ (voir table 6.1).

Nous avons ainsi démontré le

Théorème: principe variationnel

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe $\mathbf{q}(t)$ soit une extrémale de la fonctionnelle d'action (6.107) vérifiant les conditions aux bords, $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ et $\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_2$, est qu'elle soit solution des équations d'Euler-Lagrange (6.121).

Table 6.1. Analogie entre la recherche des extréma d'une fonction et des extrémales d'une fonctionnelle.

Extréma d'une fonction	Extrémales d'une fonctionnelle
espace de points \mathbf{x}	espace des fonctions $\mathbf{q}(t)$
fonction $F(\mathbf{x})$	fonctionnelle $S[\mathbf{q}(t)]$
défferentielle dF	variation première δS
annulation des dérivées aux extréma:	équation différentielle pour les extrémales:
$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} = 0$	$\frac{\delta S}{\delta \mathbf{q}} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = 0$

Nous retrouvons avec les éqs. (6.121) les équations de Lagrange d'un système mécanique sans force dissipative et dont les forces dérivent d'un potentiel U , si la fonction lagrangienne est choisie dans l'action (6.107) comme la différence $L = T - U$ entre les énergies cinétique T et potentielle U . Les équations d'Euler-Lagrange n'ont donc pas la forme plus générale (6.72) des équations de Lagrange en présence de forces dissipatives. De ce point de vue, les équations d'Euler-Lagrange décrivent des systèmes mécaniques idéaux où la dissipation peut être considérée comme négligeable.

Les principes variationnels sont aussi utilisés en dehors du cadre de la mécanique. Par exemple, on peut obtenir les surfaces de révolution dont l'aire est minimale en recherchant les extrémales de la fonctionnelle

$$S[\rho(z)] \equiv 2\pi \int_{z_1}^{z_2} \rho \sqrt{1 + \left(\frac{d\rho}{dz} \right)^2} dz \quad (6.122)$$

qui donne l'aire de la surface définie en coordonnées cylindriques par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = \rho(z) \cos \phi \\ y = \rho(z) \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad (6.123)$$

Par ailleurs, les principes variationnels se rencontrent dans la théorie du contrôle optimal dont le but est de déterminer la dépendance temporelle des paramètres de contrôle d'un système pour optimiser une certaine grandeur intégrée sur le temps de fonctionnement du système. Cette grandeur peut être un coût à minimiser (par exemple, la consommation de carburant) ou un gain à maximiser (par exemple, les bénéfices de transactions financières). En présence de faible bruit, la solution du problème variationnel décrira typiquement l'évolution la plus probable du système considéré.

Références

- [1] J. L. Lagrange, *Mécanique analytique* (Paris, 1788); reprod. fac-sim. (J. Gabay, Sceaux, 1989).
- [2] Jean d'Alembert, *Traité de dynamique* (Paris, 1743); reprod. fac-sim. (J. Gabay, Sceaux, 1990).
- [3] E. Noether, Nachrichten Gesell. Wissenschaft Göttingen **2** (1918) 235.
- [4] T. Gowers, Editor, *The Princeton Companion to Mathematics* (Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2008).

Chapitre 7

Formulation hamiltonienne de la mécanique

7.1 Equations d'Hamilton

Cette formulation de la mécanique est due à William Rowan Hamilton né à Dublin (1805-1865) [1]. Elle s'introduit sur la base des équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, f \quad (7.1)$$

qui forment un système de f équations différentielles du second ordre en le temps pour les f variables de Lagrange $\{q^\alpha(t)\}_{\alpha=1}^f$. Les dérivées premières et seconde de ces variables apparaissent donc dans ces équations dont les solutions du problème de Cauchy sont déterminées univoquement par la donnée de $2f$ conditions initiales, à savoir, f valeurs initiales pour les variables de Lagrange et f valeurs initiales pour les vitesses généralisées: $\{q^\alpha(t_0), \dot{q}^\alpha(t_0)\}_{\alpha=1}^f$.

L'idée des équations d'Hamilton est de formuler le problème en termes d'un système de $2f$ équations du premier ordre en le temps en introduisant f nouvelles variables liées aux dérivées premières des variables de Lagrange. Une possibilité serait d'utiliser les vitesses généralisées $\{v^\alpha = \dot{q}^\alpha\}_{\alpha=1}^f$ elles-mêmes. Cependant, ce choix ne mènerait pas à des équations plus remarquables que les équations d'Euler-Lagrange. Une autre possibilité est d'utiliser les *impulsions généralisées* définies par

$$p_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \quad \alpha = 1, 2, \dots, f \quad (7.2)$$

On peut s'attendre à ce que ces variables jouent un rôle particulier par le fait qu'elles sont des constantes du mouvement pour les variables de Lagrange qui sont cycliques (cf. théorème 2 du

chapitre 6). De plus, les équations d'Euler-Lagrange (7.1) nous fournissent déjà leur équation d'évolution:

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \quad (7.3)$$

On remarquera que les impulsions généralisées sont des vecteurs covariants alors que les vitesses généralisées sont des vecteurs contravariants de l'espace tangent à l'espace des configurations.

Si les impulsions sont définies en termes des vitesses par les relations (7.2), $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$, réciproquement, on peut exprimer les vitesses en termes des impulsions, $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$. En effet, le système des fonctions (7.2) peut être inversé grâce au théorème des fonctions implicites sous la condition d'existence que le hessien de la fonction lagrangienne vis-à-vis des vitesses soit différent de zéro:

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2} = \det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} \right) \neq 0 \quad (7.4)$$

Cette condition est satisfaite pour les systèmes qui nous intéressent dans ce cours puisque les vitesses apparaissent dans la fonction lagrangienne par l'énergie cinétique qui est une forme quadratique positive des vitesses. Grâce à l'inversion des éqs. (7.2), nous pouvons effectuer le remplacement des vitesses par les impulsions partout dans la formulation de la mécanique et, en particulier, dans les éqs. (7.3). Néanmoins, ces f équations ne forment pas un système fermé car il manque des équations pour les dérivées temporelles $\frac{dq^\alpha}{dt}$ des variables de Lagrange.

Pour trouver les f équations manquantes et former un système fermé de $2f$ équations différentielles ordinaires du premier ordre en le temps, on introduit la *fonction hamiltonienne*:

$$H \equiv p_\alpha \dot{q}^\alpha - L \quad (7.5)$$

définie comme une fonction des variables de Lagrange, des impulsions généralisées et éventuellement du temps. Dans ce but, il est nécessaire de remplacer partout où elles apparaissent les vitesses par les impulsions en utilisant les relations $\dot{q}^\alpha = \dot{q}^\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ obtenues par l'inversion des éqs. (7.2) comme expliqué ci-dessus:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) - L[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), t] \quad (7.6)$$

Nous obtenons alors la fonction hamiltonienne où les impulsions ont remplacé les vitesses. Nous prenons les dérivées partielles de la fonction hamiltonienne par rapport à chacune de ses

variables pour obtenir:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} &= \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\left(\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)}_{=0} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{p}} = \dot{\mathbf{q}} \\
 \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} &= -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \underbrace{\left(\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)}_{=0} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \\
 \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t} + \underbrace{\left(\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)}_{=0} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

où l'on a utilisé la définition (7.2) des impulsions généralisées.

Une autre façon d'obtenir ces relations est de prendre la différentielle de la fonction hamiltonienne sachant, d'une part qu'elle est une fonction des impulsions généralisées, des variables de Lagrange et du temps et, d'autre part, de l'expression (7.5) qui la définit:

$$\begin{aligned}
 dH &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} dq^\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\
 &= \dot{q}^\alpha dp_\alpha + \underbrace{\left(p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right)}_{=0} dq^\alpha - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} dq^\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

où les termes avec les différentielles des vitesses s'annulent en vertu de la définition (7.2) des impulsions. Ce résultat confirme que la fonction hamiltonienne sera toujours une fonction qui ne dépend que des impulsions et non plus des vitesses. En identifiant les coefficients des différentielles des variables indépendantes (p_α, q^α, t) entre les deux membres de l'éq. (7.8) nous retrouvons bien les relations:

$$\text{coefficient de } dp_\alpha : \quad \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}^\alpha \tag{7.9a}$$

$$\text{coefficient de } dq^\alpha : \quad \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \tag{7.9b}$$

$$\text{coefficient de } dt : \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{7.9c}$$

Les relations (7.9a) nous fournissent les équations manquantes pour fermer le système tandis que les relations (7.9b) nous permettent de réécrire les éqs. (7.3) en termes de la fonction hamiltonienne. Nous obtenons ainsi le

Théorème: Equations d'Hamilton

Le système des f équations différentielles du second ordre d'Euler-Lagrange (7.1) est l'équivalent aux *équations d'Hamilton* qui forment un système de $2f$ équations différentielles du premier ordre en le temps:

$$\begin{cases} \frac{dq^\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \dots, f \quad (7.10)$$

Démonstration: Le problème de Cauchy des équations d'Hamilton admet une solution unique si l'on se donne les $2f$ conditions initiales sur les variables de position et d'impulsion $\{q^\alpha(t_0), p_\alpha(t_0)\}$. Sous la condition (7.4), le théorème des fonctions implicites permet de trouver les valeurs des vitesses généralisées qui correspondent aux impulsions (7.2) de sorte que l'on obtient univoquement les conditions initiales $\{q^\alpha(t_0), \dot{q}^\alpha(t_0)\}$ des équations d'Euler-Lagrange (7.1). Comme les considérations précédentes ont permis de déduire les équations d'Hamilton à partir des équations d'Euler-Lagrange, ces systèmes d'équations différentielles sont bien équivalents. C.Q.F.D.

L'espace où les $2f$ variables de position et d'impulsion prennent leurs valeurs est appelé l'*espace des phases*:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M} \quad (7.11)$$

Il s'agit d'une variété différentielle de dimension $\dim \mathcal{M} = 2f$. Dans cet espace, les équations d'Hamilton ont la forme vectorielle suivante:

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{q}}{dt} \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

où $\mathbf{1}$ désigne une matrice unité $f \times f$. On introduit ici le *tenseur symplectique fondamental* comme la matrice $2f \times 2f$ définie par

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

Ce tenseur est antisymétrique et il est égal à moins son inverse:

$$\mathbf{J} = -\mathbf{J}^T = -\mathbf{J}^{-1} \quad (7.14)$$

Son déterminant est égal à l'unité, $\det \mathbf{J} = 1$. Il permet d'écrire les équations d'Hamilton sous la forme

$$\boxed{\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{J} \cdot \text{grad } H} \quad (7.15)$$

en termes du gradient de la fonction hamiltonienne dans l'espace des phases:

$$\text{grad } H = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} \quad (7.16)$$

Remarque: Un système dynamique général est défini dans un espace de dimension d par la donnée de d fonctions $\{C_i(\mathbf{X}, t)\}_{i=1}^d$ des d variables $\mathbf{X} = \{X_i\}_{i=1}^d$ (et éventuellement du temps t) à la base du champ de vecteurs définissant le système:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{C}(\mathbf{X}, t) \quad (7.17)$$

Par contre, dans un système hamiltonien, ces $d = 2f$ fonctions se déduisent toutes d'une et une seule fonction qui est la fonction hamiltonienne d'après l'éq. (7.15). Ce constat montre que les systèmes hamiltoniens forment un sous-ensemble très restreint parmi tous les systèmes dynamiques possibles et suggère que les systèmes hamiltoniens jouissent de propriétés remarquables. Une autre classe de systèmes où les d fonctions du champ de vecteurs se déduisent d'une seule fonction U sont les systèmes potentiels où $\mathbf{C} = \text{grad } U$ et

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \text{grad } U \quad (7.18)$$

Dans ces systèmes, le tenseur symplectique fondamental est remplacé par le tenseur identité.

La structure remarquable des équations d'Hamilton est appellée la *structure symplectique*. Cette structure apparaît dans différents contextes et, notamment en théorie des groupes où on définit le groupe symplectique $\text{Sp}(2f)$ des transformations linéaires réelles données par les matrices $2f \times 2f$ satisfaisant les relations

$$\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{J} \quad (7.19)$$

On notera l'analogie avec le groupe orthogonal $O(d)$ des transformations linéaires réelles de matrices $d \times d$ satisfaisant

$$\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{1} \quad (7.20)$$

Les éqs. (7.20) s'obtiennent à partir des éqs. (7.19) si le tenseur symplectique fondamental est remplacé par le tenseur unité de la même manière que les systèmes potentiels (7.18) sont reliés aux systèmes hamiltoniens (7.15). Cependant, les systèmes hamiltoniens de même que les groupes symplectiques sont toujours définis sur des espaces de dimension paire.

Le *flot hamiltonien* est défini dans l'espace des phases comme l'application qui envoie les conditions initiales au temps t_0 sur les phases du système au temps courant t :

$$\mathbf{X} = \Phi_{t_0}^t(\mathbf{X}_0) \quad (7.21)$$

Cette application est unique grâce au théorème de Cauchy. Un flot hamiltonien a une structure de groupe si le système est autonome, c'est-à-dire si ses équations sont indépendantes du temps. Dans ce cas, l'application (7.21) ne dépend que de l'intervalle de temps, $t - t_0$, qui s'est écoulé entre le temps initial et le temps courant:

$$\mathbf{X} = \Phi^{t-t_0}(\mathbf{X}_0) \quad (7.22)$$

L'ensemble des applications $\{\Phi^t : t \in \mathbb{R}\}$ forment un groupe continu à un paramètre, c'est-à-dire un groupe de Lie où le paramètre est le temps. Ce groupe est isomorphe au groupe additif sur les nombres réels car

$$\Phi^{t_2} \circ \Phi^{t_1} = \Phi^{t_1+t_2} \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} \quad (7.23)$$

$$(\Phi^t)^{-1} = \Phi^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (7.24)$$

$$\Phi^0 = \mathbf{1} \quad (7.25)$$

où **1** désigne l'application identité, $\mathbf{1}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$. Le groupe du flot hamiltonien traduit le déterminisme de l'évolution temporelle en mécanique (ici, hamiltonienne).

7.2 Fonctions hamiltoniennes

Nous donnons ici quelques exemples.

7.2.1 Mouvement unidimensionnel

Soit une particule matérielle se déplaçant à une dimension dans un potentiel $U(x)$. La fonction lagrangienne de ce système s'écrit

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x) \quad (7.26)$$

L'impulsion de la particule est définie par

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (7.27)$$

et la fonction hamiltonienne par

$$H = p\dot{x} - L \quad (7.28)$$

où l'on exprime la vitesse en termes de l'impulsion par $\dot{x} = p/m$ pour obtenir

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(x) \quad (7.29)$$

Pour ce système-ci, la fonction hamiltonienne est égale à l'énergie totale. Les équations d'Hamilton sont alors données par

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \end{cases} \quad (7.30)$$

en éliminant l'impulsion entre ces deux équations, on retrouve bien l'équation de Newton

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F \quad (7.31)$$

ce qui montre l'équivalence des formulations newtonniennes, lagrangienne et hamiltonienne pour ce système.

7.2.2 Cerceau en rotation

La fonction lagrangienne de ce système est donnée par l'éq. (6.84). L'impulsion généralisée est donc définie par

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \quad (7.32)$$

de sorte que la vitesse angulaire s'exprime en termes de l'impulsion par $\dot{\theta} = p/(ml^2)$. D'après sa définition, $H \equiv p\dot{\theta} - L$, la fonction hamiltonienne du système est donnée par

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} - \frac{1}{2}ml^2\omega^2 \sin^2 \theta - mgl \cos \theta \quad (7.33)$$

On remarque que la fonction hamiltonienne n'est pas ici identique à l'énergie totale du système $H \neq T + U$ parce que les contraintes holonômes (6.17) dépendent explicitement du temps dans ce système-ci. Pour ce système à un degré de liberté, la fonction hamiltonienne peut néanmoins s'écrire sous la forme $H = \frac{p^2}{2m} + U_{\text{eff}}(\theta)$ avec un potentiel effectif $U_{\text{eff}} = U + U_c$ qui se compose du potentiel de gravité, $U(\theta) = -mgl \cos \theta$, et d'un potentiel centrifuge dû à la rotation du cerceau à la vitesse angulaire ω , $U_c(\theta) = -\frac{1}{2}ml^2\omega^2 \sin^2 \theta$.

7.2.3 Particule dans un potentiel central

Après séparation du centre de masse, la position relative entre deux corps matériels se comporte comme une particule fictive de masse réduite μ se déplaçant dans le potentiel d'interaction $U(r)$ entre les deux corps. En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , la fonction lagrangienne de ce système prend la forme

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - U(r) \quad (7.34)$$

Par conséquent, les impulsions généralisées sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r} \\ p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} \\ p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \end{array} \right. \quad (7.35)$$

et la fonction hamiltonienne est définie par

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - L \quad (7.36)$$

Après substitution des vitesses généralisées $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ par les impulsions correspondantes, nous obtenons la fonction hamiltonienne

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r) \quad (7.37)$$

Comme il n'y a pas de contrainte holonôme dépendant du temps dans ce système, la fonction hamiltonienne est ici identique à l'énergie totale du mouvement relatif, $H = T + U$.

7.2.4 Forme générale

Considérons ici un système avec des contraintes holonômes dépendant du temps. En utilisant les notations rassemblant les vitesses généralisées en une matrice colonne la fonction lagrangienne (6.76) s'écrit:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{A}^T \cdot \dot{\mathbf{q}} - \tilde{U} \quad (7.38)$$

où $\dot{\mathbf{q}}^T$ est une matrice ligne dont les éléments sont les vitesses et qui est contractée à gauche avec la matrice carrée des masses \mathbf{M} , elle-même contractée à gauche avec la matrice colonne

des vitesses. De même, \mathbf{A}^T est une matrice ligne formant un produit scalaire avec les vitesses généralisées $\dot{\mathbf{q}}$. Les impulsions généralisées sont donc données par

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{A} \quad (7.39)$$

En composantes, nous aurions à partir de l'éq. (6.77):

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \left(\frac{1}{2} M_{\beta\gamma} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma + A_\beta \dot{q}^\beta \right) \\ &= \frac{1}{2} M_{\beta\gamma} (\delta_\alpha^\beta \dot{q}^\gamma + \dot{q}^\beta \delta_\alpha^\gamma) + A_\beta S_\alpha^\beta \\ &= \frac{1}{2} (M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}) \dot{q}^\beta + A_\alpha \\ &= M_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta + A_\alpha \end{aligned} \quad (7.40)$$

où l'on a utilisé le fait que l'on peut changer la lettre désignant un indice répété sur lequel une sommation est effectuée. Comme la matrice des masses est définie positive, elle est inversible et les éqs. (7.39) peuvent être inversées pour obtenir les vitesses en fonction des impulsions sous la forme

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{A}) \quad (7.41)$$

Par conséquent, la fonction hamiltonienne s'obtient comme suit:

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p}^T \cdot \dot{\mathbf{q}} - L \\ &= \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{A}) - \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{A})^T \cdot \mathbf{M}^{-1T} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{A}) - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{A}) + \tilde{U} \end{aligned} \quad (7.42)$$

le premier et le troisième termes se rassemblent pour donner une expression proportionnelle au deuxième terme. Comme la matrice des masses est symétrique, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$, on trouve que

$$H = \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{A})^T \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{A}) + \tilde{U} \quad (7.43)$$

ou en composantes

$$H = \frac{1}{2} M^{\alpha\beta} (p_\alpha - A_\alpha)(p_\beta - A_\beta) + \tilde{U} \quad (7.44)$$

où $M^{\alpha\beta} = (\mathbf{M}^{-1})^{\alpha\beta}$ désigne l'inverse de la matrice des masses. Tant que les contraintes holonômes dépendent du temps, la fonction hamiltonienne ne coïncide pas avec l'énergie totale du système:

$$H = T_2 - T_0 + U \neq E = T_2 + T_1 + T_0 + U \quad (7.45)$$

avec $U = \tilde{U} + T_0$. Cependant les deux coïncident lorsque les contraintes holonômes deviennent indépendantes du temps de sorte que $\mathbf{A} = 0$, $T_1 = T_0 = 0$, $T = T_2$ et $H = T + U = E$, avec

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{p} + U \quad (7.46)$$

7.3 Transformée de Legendre

La transformation de la fonction lagrangienne en fonction hamiltonienne a l'interprétation géométrique suivante. Pour simplifier, considérons la fonction lagrangienne $L = \frac{1}{2}mv^2 - U(x)$. Pour une valeur quelconque de la position x , cette fonction est représentée en fonction de la vitesse v sur la fig. 7.1.

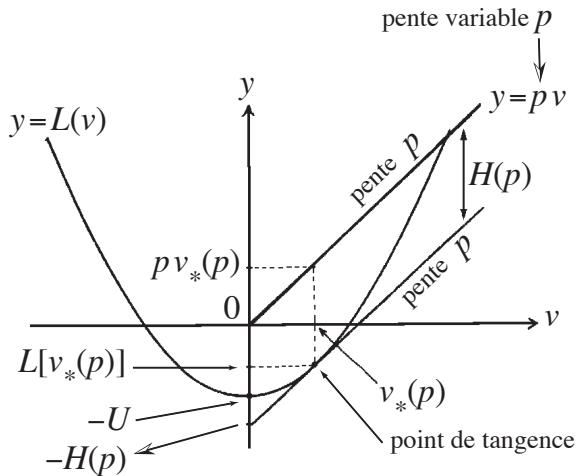


Figure 7.1: Construction géométrique à la base de la transformée de Legendre d'une fonction lagrangienne en la fonction hamiltonienne associée.

Soit la droite $y = pv$ de pente égale à une impulsion p et passant par l'origine. On déplace cette droite parallèlement à elle-même pour l'amener à être tangente à la fonction lagrangienne. Ceci se produit à une vitesse particulière $v_*(p)$ où la relation

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} [v_*(p)] \quad (7.47)$$

est satisfaite. Cette valeur de la vitesse est la solution de l'inversion de la relation définissant l'impulsion. L'équation de la droite tangente s'écrit:

$$y = p [v - v_*(p)] + L [v_*(p)] \quad (7.48)$$

Le point d'intersection de cette droite avec l'axe vertical Oy , $v = 0$, a pour ordonnée

$$y = -pv_*(p) + L[v_*(p)] = -H(p) \quad (7.49)$$

qui n'est rien d'autre que la valeur de la fonction hamiltonienne changée de signe. La construction précédente permet donc d'engendrer géométriquement la fonction hamiltonienne en changeant progressivement la pente de la droite tangente de $p = -\infty$ jusqu'à $p = +\infty$. La construction ci-dessus porte le nom de *transformée de Legendre*:

$$H = \mathcal{L}e[L] \quad (7.50)$$

On remarquera l'importance de la condition $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2} \neq 0$ à la base de l'utilisation du théorème des fonctions implicites. En effet, si la fonction lagrangienne présentait un point d'inflexion où $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2} = 0$, la construction ci-dessus ne serait plus univoque car plusieurs tangentes pourraient exister.

Il faut noter qu'une semblable transformée de Legendre permet de retrouver la fonction lagrangienne à partir de la fonction hamiltonienne:

$$L = \mathcal{L}e[H] \quad (7.51)$$

En effet, les vitesses généralisées sont données par les relations

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad (7.52)$$

qui sont inversibles sous la condition

$$\det \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \right) \neq 0 \quad (7.53)$$

permettant de retrouver les impulsions en termes des vitesses, ainsi que la fonction lagrangienne d'après

$$L = p_\alpha \dot{q}^\alpha - H \quad (7.54)$$

Par conséquent, la transformée de Legendre est une involution $\mathcal{L}e^2 = \mathcal{I}$.

7.4 Crochet de Poisson

Considérons l'évolution temporelle d'une observable d'un système mécanique hamiltonien définie comme une fonction des variables de l'espace des phases et éventuellement du temps: $A =$

$A(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. La dérivée par rapport au temps de cette observable évaluée le long d'une trajectoire hamiltonienne, $A(t) = A[\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t]$, est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial A}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \frac{\partial A}{\partial q^\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial A}{\partial t}\end{aligned}\quad (7.55)$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (7.56)$$

si nous introduisons le *crochet de Poisson* entre deux observables A et B selon

$$\{A, B\} \equiv \frac{\partial A}{\partial q^\alpha} \frac{\partial B}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial p_\alpha} \frac{\partial B}{\partial q^\alpha} \quad (7.57)$$

Le crochet de Poisson peut s'écrire en terme du tenseur symplectique fondamental comme

$$\{A, B\} = (\text{grad } A)^T \cdot \mathbf{J} \cdot (\text{grad } B) \quad (7.58)$$

car

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \mathbf{J} \cdot \left(\frac{\partial B}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial A}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial B}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial B}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix} = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial B}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial A}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial B}{\partial \mathbf{q}} = \{A, B\} \quad (7.59)$$

Le crochet de Poisson possède les propriétés suivantes:

- (1) Linéarité à gauche: $\{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, B\} = \lambda_1 \{A_1, B\} + \lambda_2 \{A_2, B\}$
- (2) Linéarité à droite: $\{A, \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2\} = \mu_1 \{A, B_1\} + \mu_2 \{A, B_2\}$
- (3) Antisymétrie: $\{A, B\} = -\{B, A\}$ (7.60)
- (4) Formule d'explosion: $\{A, B_1 B_2\} = \{A, B_1\} B_2 + B_1 \{A, B_2\}$
- (5) Identité de Jacobi: $\{\{A, B\}, C\} + \{\{C, A\}, B\} + \{\{B, C\}, A\} = 0$

La linéarité à droite est une conséquence de la linéarité à gauche et de l'antisymétrie. La formule d'explosion découle de la règle de dérivation d'un produit de deux fonctions, $(fg)' = f'g + fg'$.

L'identité de Jacobi se démontre en notant que son expression est linéaire en les dérivées secondes de A, B et C . Si l'on considère par exemple les dérivées secondes de A , on trouve

$$\begin{aligned}
 & \{\{A, B\}, C\} + \{\{C, A\}, B\} + \{\{B, C\}, A\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\frac{\partial A}{\partial X_i} J_{ij} \frac{\partial B}{\partial X_j} \right) J_{kl} \frac{\partial C}{\partial X_l} + \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\frac{\partial C}{\partial X_i} J_{ij} \frac{\partial A}{\partial X_j} \right) J_{kl} \frac{\partial B}{\partial X_l} + \dots \\
 &= J_{ij} \frac{\partial B}{\partial X_j} J_{kl} \frac{\partial C}{\partial X_l} \frac{\partial^2 A}{\partial X_k \partial X_i} + J_{kl} \frac{\partial B}{\partial X_l} J_{ij} \frac{\partial C}{\partial X_i} \frac{\partial^2 A}{\partial X_j \partial X_k} + \dots \\
 &= J_{ij} \frac{\partial B}{\partial X_j} (J_{kl} + J_{lk}) \frac{\partial C}{\partial X_l} \frac{\partial^2 A}{\partial X_k \partial X_i} + \dots \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{7.61}$$

par l'antisymétrie du tenseur symplectique fondamental, le même raisonnement s'appliquant aux dérivées secondes de B et de C . C.Q.F.D.

7.5 Intégrales premières des équations d'Hamilton

Nous avons une série de théorèmes analogues à ceux obtenus pour les systèmes lagrangiens.

Théorème 1: Si la fonction hamiltonienne H ne dépend pas explicitement du temps, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, alors il s'agit d'une constante du mouvement:

$$H [\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)] = \text{constante.} \tag{7.62}$$

Démonstration: En prenant $A = H$ dans l'éq. (7.56), nous trouvons que

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{7.63}$$

car $\{H, H\} = 0$ par l'antisymétrie du crochet de Poisson. C.Q.F.D.

Remarque: C'est le même résultat que le théorème 1 du chapitre 6 car $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$ et

$$h = \dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - L = \dot{q}^\alpha p_\alpha - L = H \tag{7.64}$$

Théorème 2: Si la fonction hamiltonienne ne dépend pas explicitement de q^1 (variable cachée ou cyclique), $H = H(p_1, p_2, \dots, p_f, q^2, \dots, q^f, t)$, alors le système admet l'impulsion correspondante comme constante du mouvement:

$$p_1(t) = \text{constante.} \quad (7.65)$$

Démonstration: L'impulsion canoniquement conjuguée à la variable cyclique a pour équation d'Hamilton

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^1} = 0 \quad (7.66)$$

qui s'annule puisque la fonction hamiltonienne n'en dépend pas. C.Q.F.D.

Remarque: Il s'agit du même résultat que celui du théorème 2 au chapitre 6.

Théorème 3: Si F est une fonction définie dans l'espace des phases, indépendante du temps et telle que $\{F, H\} = 0$, alors il s'agit d'une constante du mouvement:

$$F[\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)] = \text{constante.} \quad (7.67)$$

Démonstration: En utilisant l'éq. (7.56) avec $A = F$ nous avons que

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (7.68)$$

de sorte que la fonction F est une constante du mouvement. C.Q.F.D.

Remarque: Ce théorème est l'analogue du théorème de Noether (théorème 3 du chapitre 6). En effet, si la fonction F est utilisée comme une fonction hamiltonienne selon

$$\begin{cases} \frac{dq^\alpha}{ds} = \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \\ \frac{dp_\alpha}{ds} = -\frac{\partial F}{\partial q^\alpha} \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \dots, f \quad (7.69)$$

elle engendre un groupe de symétries dont les transformations sont les solutions des éqs. (7.69)

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{q}(s; \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \\ \mathbf{p} = \mathbf{p}(s; \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \end{cases} \quad (7.70)$$

de paramètre s . La fonction hamiltonienne H est invariante sous ces transformations

$$H[\mathbf{q}(s; \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0), \mathbf{p}(s; \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0), t] = H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t) \quad (7.71)$$

car nous avons que

$$\frac{dH}{ds} = \{H, F\} + \frac{\partial H}{\partial s} \quad (7.72)$$

par analogie avec l'éq. (7.56) mais pour l'évolution (7.69). Comme $\{H, F\} = 0$ par hypothèse et que H ne dépend pas explicitement du paramètre s , $\frac{\partial H}{\partial s} = 0$, nous trouvons que $\frac{dH}{ds} = 0$, ce qui démontre que les transformations (7.70) engendrées par la fonction F forment bien un groupe de symétries de la fonction hamiltonienne.

7.6 Théorème de Liouville

Different types d'objets peuvent évoluer dans l'espace de phases sous l'effet d'un flot hamiltonien: des points de dimension nulle, des arcs de courbe de dimension unité ou des domaines de surfaces ou d'hypersurfaces de dimensions allant jusqu'à la dimension $2f$ de l'espace des phases. Si les points composant ces objets forment des trajectoires qui sont solutions des équations d'Hamilton, on peut se demander quelles sont les propriétés de l'évolution temporelle de ces objets de dimension quelconque. Il se fait que le caractère symplectique des équations d'Hamilton confère des propriétés tout à fait remarquables à ces évolutions temporelles. En particulier, le théorème de Liouville concerne l'évolution hamiltonienne des domaines de dimension égale à la dimension $2f$ de l'espace des phases.

Ce théorème joue un rôle fondamental en mécanique statistique qui est concernée par l'évolution temporelle d'une densité de probabilité définie dans l'espace des phases, $\rho(\mathbf{X}, t)$. Il s'agit de la densité de probabilité de trouver le système au point \mathbf{X} au temps t . La probabilité que le système se trouve au temps t dans un domaine D de l'espace des phases, $\mathbf{X} \in D$, est donnée par l'intégrale de la densité sur ce domaine

$$P(t) = \int_D \rho(\mathbf{X}, t) d^{2f} X \quad (7.73)$$

Cette probabilité évolue dans le temps car les points \mathbf{X} se déplacent sous l'effet du flot engendré par les équations du mouvement. La probabilité totale est toujours conservée

$$\int_{\mathcal{M}} \rho(\mathbf{X}, t) d^{2f} X = 1 \quad (7.74)$$

mais la probabilité (7.73) change dans le temps parce que les trajectoires entrent et sortent du domaine D (voir fig. 7.2).

La densité de courant de probabilité est donnée par la densité de probabilité multipliée par la vitesse d'avancement des trajectoires dans l'espace des phases:

$$\mathbf{j} = \rho \dot{\mathbf{X}} \quad (7.75)$$

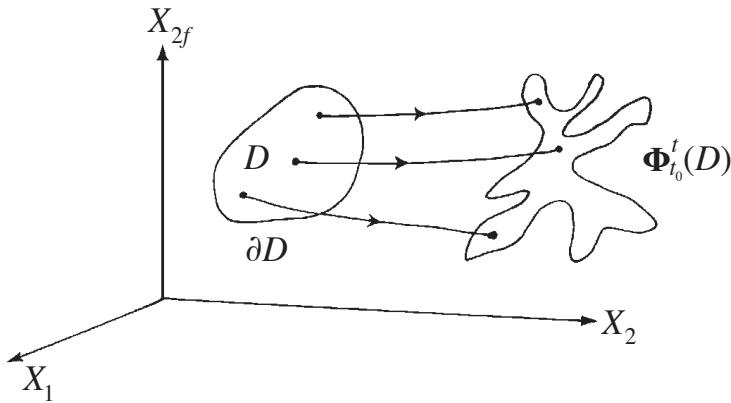


Figure 7.2: Les trajectoires d'un flot hamiltonien peuvent entrer et sortir d'un domaine D de l'espace des phases. Elles peuvent aussi entraîner le domaine D en une évolution temporelle sous l'effet du flot hamiltonien: $\Phi_{t_0}^t(D)$.

Ces vitesses d'avancement sont ici données par le champ de vecteurs des équations d'Hamilton (7.15). Le flux de probabilité à travers le bord ∂D du domaine D est l'intégrale de surface de la densité de courant

$$\phi = \int_{\partial D} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (7.76)$$

où $d\mathbf{S}$ est un vecteur donnant l'élément d'aire de l'hypersurface ∂D de dimension $2f - 1$ dans l'espace des phases. Si ce flux de probabilité est positif, la probabilité diminue dans le domaine D selon

$$\frac{dP(t)}{dt} = - \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (7.77)$$

D'après le théorème de la divergence, l'intégrale de surface de la densité de courant est égale à l'intégrale de volume de sa divergence

$$\int_{\partial D} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_D \operatorname{div} \mathbf{j} d^{2f} X \quad (7.78)$$

de sorte que l'on obtient

$$\frac{dP(t)}{dt} = \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} d^{2f} X = - \int_D \operatorname{div} \mathbf{j} d^{2f} X \quad (7.79)$$

Par le fait que ce résultat tient quelque soit le domaine D , nous en déduisons l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \dot{\mathbf{X}}) = 0 \quad (7.80)$$

qui exprime la conservation locale de la probabilité dans l'espace des phases. Comme

$$\operatorname{div}(\rho \dot{\mathbf{X}}) = \frac{\partial}{\partial X_i} (\rho \dot{X}_i) = \dot{X}_i \frac{\partial \rho}{\partial X_i} + \rho \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial X_i} = \dot{\mathbf{X}} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} \quad (7.81)$$

l'équation de continuité s'écrit de manière équivalente sous la forme

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}}} \quad (7.82)$$

où la dérivée temporelle

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \dot{\mathbf{X}} \cdot \operatorname{grad} \rho \quad (7.83)$$

est prise le long des trajectoires du système. L'éq. (7.82) s'intègre sur le temps pour donner

$$\boxed{\rho[\mathbf{X}(t), t] = \rho(\mathbf{X}_0, t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t dt \operatorname{div} \dot{\mathbf{X}}\right)} \quad (7.84)$$

Par conséquent, la densité de probabilité diminue ou augmente si la divergence est respectivement positive ou négative.

La densité reste constante si la divergence s'annule ce qui est le cas pour les systèmes hamiltoniens. En effet, d'après les équations d'Hamilton (7.15), nous trouvons que

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial X_i} \left(J_{ij} \frac{\partial H}{\partial X_j} \right) = J_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial X_i \partial X_j} = 0 \quad (7.85)$$

car la divergence est donnée par la contraction du tenseur symplectique fondamental qui est antisymétrique avec le tenseur symétrique des dérivées secondes de la fonction hamiltonienne.

En conséquence, la densité de probabilité reste constante le long des trajectoires d'un système hamiltonien. Si la densité prend initialement une valeur constante dans le domaine D_0 et s'annule ailleurs

$$\rho(\mathbf{X}_0, t_0) = \begin{cases} \frac{1}{V} & \text{si } \mathbf{X}_0 \in D_0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{X}_0 \notin D_0 \end{cases} \quad (7.86)$$

elle continuera de prendre ces valeurs sur l'évolué D_t du domaine D_0 par le flot hamiltonien, $D_t = \Phi_{t_0}^t(D_0)$,

$$\rho(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} \frac{1}{V} & \text{si } \mathbf{X} \in D_t \\ 0 & \text{si } \mathbf{X} \notin D_t \end{cases} \quad (7.87)$$

Comme la densité de probabilité reste toujours normalisée à l'unité, le volume du domaine D_t reste le même tout au long de l'évolution temporelle d'un système hamiltonien, $V = \operatorname{Vol}(D_t) = \operatorname{Vol}(D_0)$. Nous avons donc le

Théorème de Liouville:

L'évolution temporelle d'un système hamiltonien préserve les volumes dans l'espace des phases.

Il existe des systèmes non-hamiltoniens qui préservent néanmoins les volumes. C'est le cas pour les lignes de courant d'un fluide incompressible dans l'espace tridimensionnel, $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, car $\text{div } \mathbf{v} = 0$ pour un tel fluide. Cependant, dans les systèmes dynamiques à caractère dissipatif, les volumes se contractent typiquement dans l'espace des phases de sorte que les densités de probabilité deviennent singulières d'après l'éq. (7.82).

Pour les systèmes hamiltoniens, l'équation de continuité (7.80) prend la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \dot{\mathbf{X}} \cdot \text{grad } \rho = 0 \quad (7.88)$$

en vertu de l'éq. (7.85). Or, les équations d'Hamilton (7.15) impliquent que

$$\dot{\mathbf{X}} \cdot \text{grad } \rho = \dot{X}_i \frac{\partial \rho}{\partial X_i} = \frac{\partial \rho}{\partial X_i} J_{ij} \frac{\partial H}{\partial X_j} = \{\rho, H\} \quad (7.89)$$

en utilisant la définition (7.57) du crochet de Poisson. Pour les systèmes hamiltoniens, l'équation de continuité s'écrit donc sous la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{H, \rho\} \quad (7.90)$$

qui est appelée l'*équation de Liouville* en mécanique statistique. Il s'agit de l'équation fondamentale pour l'évolution temporelle des densités de probabilité d'un système d'atomes ou de molécules dans la matière. Les solutions de cette équation fondamentale permettent de prédire les propriétés de la matière comme la pression des gaz ou des liquides ou encore leur viscosité ou leur conductivité calorifique. Pareilles considérations sont aussi à la base de la théorie ergodique [2].

7.7 Invariants intégraux de Poincaré-Cartan

La structure symplectique des équations d'Hamilton est remarquable car elle assure l'invariance temporelle d'intégrales de dimensions plus basses que le volume. Les systèmes hamiltoniens obéissent donc non seulement au théorème de Liouville mais aussi à d'autres théorèmes d'invariance d'intégrales dont le premier est le suivant:

Théorème de Poincaré-Cartan:

L'évolution temporelle d'un système hamiltonien préserve les aires canoniques, $\oint_{\gamma} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}$, des courbes fermées γ définies dans l'espace des phases.

Démonstration: Considérons une courbe γ fermée sur elle-même dans l'espace des phases et qui évolue dans le temps entraînée par le flot hamiltonien:

$$\gamma \quad \begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{q}(\lambda, t) \\ \mathbf{p} = \mathbf{p}(\lambda, t) \end{cases} \quad (7.91)$$

avec $0 \leq \lambda < 1$,

$$\mathbf{q}(\lambda, t) = \mathbf{q}(\lambda + 1, t) \quad \text{et} \quad \mathbf{p}(\lambda, t) = \mathbf{p}(\lambda + 1, t) \quad (7.92)$$

L'aire canonique de cette courbe est définie par

$$\oint_{\gamma} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \oint_{\gamma} \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} d\lambda \quad (7.93)$$

Comme la courbe est fermée sur elle-même, nous avons que

$$\oint_{\gamma} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot d\mathbf{p}) = \oint_{\gamma} d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) = 0 \quad (7.94)$$

de sorte que l'aire canonique s'écrit aussi,

$$\oint_{\gamma} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{q} \cdot d\mathbf{p}) \quad (7.95)$$

Si l'on dérive l'aire canonique par rapport au temps et que l'on utilise les équations d'Hamilton, nous trouvons que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint_{\gamma} \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} d\lambda &= \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \left(\dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} + \mathbf{p} \cdot \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{d\lambda} - \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\lambda} - \mathbf{q} \cdot \frac{d\dot{\mathbf{p}}}{d\lambda} \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} + \mathbf{p} \cdot \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\lambda} + \mathbf{q} \cdot \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \left[-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\lambda} + \frac{d}{d\lambda} \left(\mathbf{p} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{q} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\lambda} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} \right] d\lambda \\ &= - \oint_{\gamma} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\lambda} \right) d\lambda \\ &= - \oint_{\gamma} \frac{dH}{d\lambda} d\lambda = 0 \end{aligned} \quad (7.96)$$

A la troisième ligne et la dernière, on a utilisé le fait que l'intégrale d'une différentielle totale s'annule sur une courbe fermée. De la quatrième à la dernière, nous avons que

$$\frac{dH}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\lambda} \quad (7.97)$$

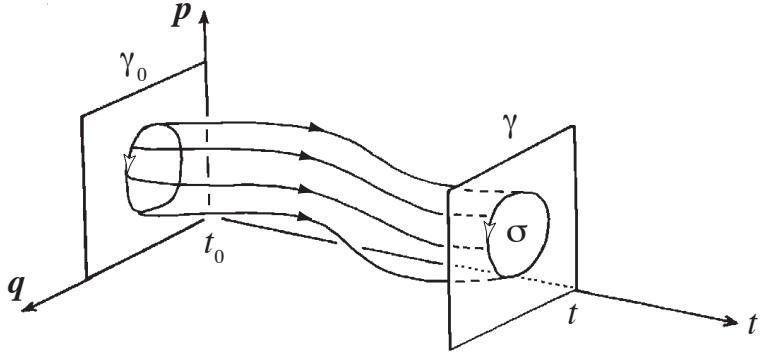


Figure 7.3: Evolution temporelle d'une courbe fermée γ dans l'espace des phases étendu $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ en incluant le temps t .

puisque la courbe fermée suit le flot hamiltonien $H = H[\mathbf{q}(\lambda, t), \mathbf{p}(\lambda, t), t]$. La dérivée temporelle de l'aire canonique s'annule donc. C.Q.F.D.

Il s'agit bien d'une aire car elle se transforme selon

$$\oint_{\gamma} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \sum_{\alpha} \oint_{\gamma} p_{\alpha} dq^{\alpha} = \sum_{\alpha} \iint_{\sigma} dp_{\alpha} dq^{\alpha} \quad (7.98)$$

en une intégrale double sur la surface σ de dimension deux sous-tendue par la courbe fermée γ . Dans un système à un seul degré de liberté, l'aire canonique est égale au volume de l'espace des phases de sorte que ce dernier théorème coïncide avec le théorème de Liouville. Par contre, il s'en distingue dans les systèmes à plusieurs degrés de liberté. Par exemple, dans les systèmes hamiltoniens à deux degrés de liberté, ces deux théorèmes assurent l'invariance des invariants intégraux

$$\oint_{\gamma} (p_1 dq^1 + p_2 dq^2) = \iint_{\sigma} (dp_1 dq^1 + dp_2 dq^2) \quad (7.99)$$

et

$$\iiint_D dp_1 dq^1 dp_2 dq^2 \quad (7.100)$$

ce dernier étant l'hypervolume d'un domaine D de l'espace des phases quadridimensionnel.

Dans les systèmes hamiltoniens à plus de deux degrés de liberté, il existe aussi des invariants intégraux intermédiaires entre l'aire canonique $\sum_{\alpha} dp_{\alpha} dq^{\alpha}$ et le volume de l'espace des phases $\prod_{\alpha=1}^f dp_{\alpha} dq^{\alpha}$. Ces invariants intégraux trouvent une forme mathématique compacte et élégante dans la théorie des formes différentielles [3].

7.8 Symétrie et brisure spontanée de symétrie

Un système mécanique peut présenter des symétries discrètes sous l'inversion spatiale ou le renversement du temps. Un aspect fondamental est que la symétrie des équations du mouvement n'implique pas nécessairement la symétrie des solutions de ces équations.

7.8.1 Symétrie sous inversion spatiale

Tout d'abord, il faut noter que la notion de solution d'une équation est définie par le théorème de Cauchy qui en assure l'unicité si toutes les positions et les impulsions du système sont fixées à l'instant initial. Par conséquent, l'ensemble des états distincts du système est formé par l'espace des phases (et non l'espace des configurations qui en est une projection où les impulsions se confondent).

L'inversion spatiale, encore appelée la parité, est l'opération qui consiste à changer le signe des positions dans un repère d'origine donnée: $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, $\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. Comme le signe du temps ne change pas, les vitesses changent aussi de signe: $\dot{\mathbf{r}} \rightarrow -\dot{\mathbf{r}}$. L'impulsion s'inverse de même pour une particule non-relativiste puisque son impulsion est reliée à sa vitesse par $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$. L'opération d'inversion spatiale est donc la transformation suivante:

$$\Pi \left\{ \begin{array}{l} t \rightarrow t \\ \mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r} \\ \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p} \end{array} \right. \quad (7.101)$$

Il s'agit d'une involution car $\Pi^2 = \mathbf{1}$ de sorte qu'elle engendre le groupe $G = \{\mathbf{1}, \Pi\}$ qui est isomorphe au groupe \mathbb{Z}_2 . L'inversion spatiale est une symétrie du système si les équations du mouvement sont invariantes sous son effet.

C'est le cas pour une particule non-relativiste se déplaçant dans un potentiel qui est symétrique sous l'inversion spatiale, c'est-à-dire tel que

$$U(\mathbf{r}) = U(-\mathbf{r}) \quad (7.102)$$

En effet, la fonction hamiltonienne de ce système

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \quad (7.103)$$

est symétrique sous l'inversion spatiale

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = H(-\mathbf{p}, -\mathbf{r}) \quad (7.104)$$

de sorte que les équations d'Hamilton

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \end{cases} \quad (7.105)$$

restent invariantes sous l'effet de la transformation (7.101).

Un exemple simple est celui d'un point matériel non-relativiste en mouvement dans le potentiel quartique à double puits (4.193) qui est symétrique sous l'inversion $x \rightarrow -x$. Les orbites sont définies par les courbes décrites dans l'espace des phases par les solutions des équations d'Hamilton. Les orbites de ce système sont représentées sur le portrait de phase de la figure 4.19. Ce système présente des orbites d'énergie négative qui oscillent dans l'un *ou* l'autre des deux puits et des orbites d'énergie positive qui passent périodiquement d'un puits à l'autre. Ces deux familles d'orbites se rejoignent le long des séparatrices qui sont les deux orbites d'énergie nulle connectées au point instable en $x = p = 0$. A chaque valeur positive de l'énergie $E > 0$ correspond une et une seule orbite \mathcal{C}_E . Cependant, deux orbites situées respectivement dans le puits de droite $\mathcal{C}_E^{(+)}$ ou celui de gauche $\mathcal{C}_E^{(-)}$ correspondent à chaque valeur négative ou nulle de l'énergie $E \leq 0$. On note que l'orbite dans le puits de gauche est distincte de celle dans l'autre puits: $\mathcal{C}_E^{(-)} \neq \mathcal{C}_E^{(+)}$

La question qui se pose est de savoir si ces orbites sont elles-mêmes symétriques sous l'inversion spatiale, $\Pi(x, p) = (-x, -p)$. La figure 4.19 nous montre que c'est le cas pour chaque orbite d'énergie positive qui est envoyée sur elle-même par l'inversion spatiale, mais ce n'est plus le cas pour les orbites d'énergie négative ou nulle qui sont soit à gauche, soit à droite:

$$\Pi\mathcal{C}_E = \mathcal{C}_E \quad \text{si } E > 0 \quad (7.106)$$

$$\Pi\mathcal{C}_E^{(+)} = \mathcal{C}_E^{(-)} \neq \mathcal{C}_E^{(+)} \quad \text{si } E \leq 0 \quad (7.107)$$

Par conséquent, les orbites d'énergie négative brisent la symétrie d'inversion spatiale de ce système hamiltonien.

La conclusion fondamentale est que les solutions d'une équation n'héritent pas nécessairement des symétries de l'équation. Qu'une équation présente une symétrie signifie seulement qu'à toute orbite \mathcal{C} qui est une solution de l'équation, il correspond une orbite $\Pi\mathcal{C}$ qui est aussi une solution de l'équation, mais cette dernière ne coïncide pas nécessairement avec la première. Lorsque ce phénomène se produit, on parle de brisure spontanée de symétrie.

7.8.2 Symétrie sous renversement du temps

La conclusion ci-dessus concerne également la symétrie des équations du mouvement sous l'opération de renversement du temps qui change le signe du temps, des vitesses et des impulsions sans modifier celui des positions:

$$\Theta \left\{ \begin{array}{l} t \rightarrow -t \\ \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p} \end{array} \right. \quad (7.108)$$

Comme pour l'inversion spatiale, le renversement du temps est une involution car $\Theta^2 = \mathbf{1}$ et il engendre donc le groupe discret $G = \{\mathbf{1}, \Theta\}$ qui est isomorphe au groupe \mathbb{Z}_2 .

La fonction hamiltonienne (7.103) d'une particule non-relativiste dans un potentiel dépendant de sa position est symétrique sous le renversement du temps:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = H(-\mathbf{p}, \mathbf{r}) \quad (7.109)$$

car l'énergie cinétique est une fonction quadratique des vitesses. En conséquence, les équations d'Hamilton (7.105) restent invariantes sous le renversement du temps. Cette symétrie signifie que, si une trajectoire \mathcal{C} de l'espace des phases est une solution des équations d'Hamilton, alors la trajectoire réverse $\Theta\mathcal{C}$ est aussi une solution de ces équations. Dans certains cas, la trajectoire coïncide avec sa réverse, $\Theta\mathcal{C} = \mathcal{C}$, mais la symétrie est brisée dans d'autres cas, $\Theta\mathcal{C} \neq \mathcal{C}$, ce qui se manifeste souvent.

Si nous reprenons l'exemple de la particule en mouvement dans le potentiel à double puits, nous observons que chaque orbite coïncide avec sa réverse dans ce système. Néanmoins, cette propriété n'est pas générale comme nous le révèle l'exemple du pendule simple dont le portrait de phase est représenté à la figure 4.14. Comme le montre cette figure, les seules orbites qui coïncident avec leur réverse sont celles de libration qui oscillent autour de la configuration d'équilibre stable sans atteindre le point d'équilibre instable et dont l'énergie est limitée selon $U_{\min} \leq E < U_{\max}$. Par contre, les orbites de rotation dont l'énergie dépasse celle du point d'équilibre instable, $E > U_{\max}$, tournent de manière distincte soit dans un sens, soit dans l'autre. Par conséquent, elles brisent la symétrie sous renversement du temps, de même que les séparatrices à l'énergie $E = U_{\max}$:

$$\Theta\mathcal{C}_E = \mathcal{C}_E \quad \text{si } U_{\min} \leq E < U_{\max} \quad (7.110)$$

$$\Theta\mathcal{C}_E^{(+)} = \mathcal{C}_E^{(-)} \neq \mathcal{C}_E^{(+)} \quad \text{si } E \geq U_{\max} \quad (7.111)$$

La simplicité de cet exemple montre que la brisure spontanée de la symétrie sous renversement du temps est un phénomène commun en mécanique.

Comme les phénomènes naturels que nous observons sont la manifestation de solutions particulières des équations du mouvement issues de certaines conditions initiales, il ne faut pas s'attendre à ce que ces phénomènes soient nécessairement symétriques sous le renversement du temps. La symétrie des équations du mouvement tient au fait que ces équations décrivent l'ensemble de toutes les histoires possibles d'un système. Cependant, l'histoire réellement suivie par un système est celle qui a été sélectionnée par un choix de conditions initiales. Si l'histoire sélectionnée par les conditions initiales n'est pas symétrique, l'histoire réverse figure parmi les autres histoires qui ne se réalisent pas. L'irréversibilité de nombreux phénomènes naturels n'est donc pas incompatible avec la réversibilité des équations du mouvement des atomes et des autres particules composant la matière. Le raisonnement fondamental ci-dessus nous montre que l'existence de processus irréversibles comme la diffusion d'encre dans de l'eau, la conduction de la chaleur, ou la viscosité des fluides n'invalide pas la réversibilité des équations du mouvement microscopique. Ce paradoxe apparent n'existe pas avant l'avènement du schéma newtonien dont la nouveauté a été d'introduire une équation décrivant l'ensemble des histoires possibles d'un système parmi lesquelles une seule se réalise.

Références

- [1] W. R. Hamilton, *Second Essay on a General Method in Dynamics*, Phil. Trans. Roy. Soc. (1835) 95.
- [2] V. I. Arnold et A. Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique* (Gauthier-Villars, Paris, 1967).
- [3] V. I. Arnold, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique* (Editions MIR, Moscou, 1976).

Chapitre 8

Mouvement dans un référentiel non-inertiel

Il existe de nombreux référentiels qui ne sont pas inertiels. C'est le cas pour celui formé par des axes fixés au sol terrestre qui subit des accélérations à cause de la rotation de la Terre et, éventuellement, des séismes. C'est seulement dans un référentiel inertiel que l'équation de Newton prend sa forme standard. Dans un référentiel non-inertiel, elle est modifiée à cause des accélérations vis-à-vis des référentiels inertiels comme nous le montrons dans ce chapitre.

8.1 Equation de Newton dans un repère non-inertiel

Soit \mathcal{R}_i un repère inertiel d'origine O_i et de base orthonormée $\{\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z\}$ (voir fig. 8.1). Ces vecteurs de base sont fixes dans l'espace tridimensionnel puisque tous les repères inertiels se déplacent en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres. Par conséquent, même si le repère \mathcal{R}_i se déplace, les vecteurs de sa base restent parallèles à eux-mêmes. Dans cette base, un point matériel P a pour coordonnées (x_i, y_i, z_i) et sa position est donnée par le vecteur $\overrightarrow{O_i P}$ défini par

$$\overrightarrow{O_i P} = (\mathbf{i}_x \ \mathbf{i}_y \ \mathbf{i}_z) \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = (\mathbf{i}_x \ \mathbf{i}_y \ \mathbf{i}_z) \cdot \mathbf{r}_i \quad (8.1)$$

avec la matrice colonne

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

Soit un autre repère \mathcal{R} en mouvement quelconque vis-à-vis du repère inertiel. Si ce mouvement diffère d'un simple mouvement rectiligne uniforme, on parlera de repère non-inertiel. L'origine

O de ce repère a une position dans le repère inertiel donnée par le vecteur

$$\overrightarrow{O_i O} = (\mathbf{i}_x \ \mathbf{i}_y \ \mathbf{i}_z) \cdot \begin{pmatrix} X_i(t) \\ Y_i(t) \\ Z_i(t) \end{pmatrix} = (\mathbf{i}_x \ \mathbf{i}_y \ \mathbf{i}_z) \cdot \mathbf{R}_i(t) \quad (8.3)$$

avec la matrice colonne

$$\mathbf{R}_i(t) = \begin{pmatrix} X_i(t) \\ Y_i(t) \\ Z_i(t) \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

qui dépend explicitement du temps.

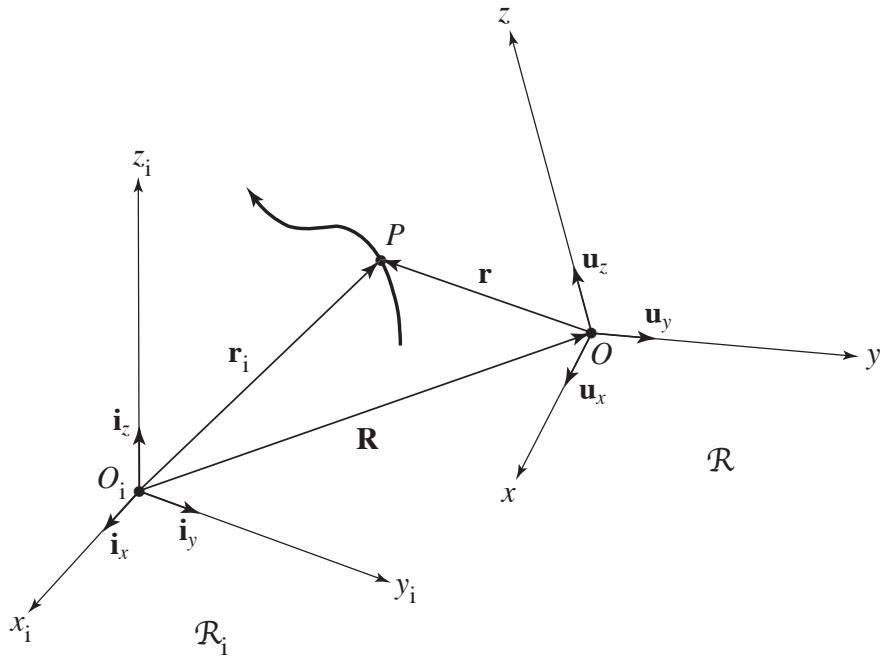


Figure 8.1: Repère non-inertiel \mathcal{R} d'origine O et de base orthonormée $\{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z\}$ se déplaçant vis-à-vis du repère inertiel \mathcal{R}_i d'origine O_i et de base orthonormée $\{\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z\}$. Le point matériel P est observé dans chaque repère.

La base orthonormée $\{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z\}$ du repère non-inertiel \mathcal{R} tourne par rapport à la base du repère inertiel selon

$$(\mathbf{u}_x \ \mathbf{u}_y \ \mathbf{u}_z) = (\mathbf{i}_x \ \mathbf{i}_y \ \mathbf{i}_z) \cdot \begin{pmatrix} O_{xx}(t) & O_{xy}(t) & O_{xz}(t) \\ O_{yx}(t) & O_{yy}(t) & O_{yz}(t) \\ O_{zx}(t) & O_{zy}(t) & O_{zz}(t) \end{pmatrix} = (\mathbf{i}_x \ \mathbf{i}_y \ \mathbf{i}_z) \cdot \mathbf{O}(t) \quad (8.5)$$

où $\mathbf{O}(t)$ est une matrice orthogonale qui est une fonction du temps. Les vecteurs $\{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z\}$ sont donc mobiles vis-à-vis des vecteurs $\{\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z\}$ qui sont fixes. Dans le repère non-inertiel, le

point matériel P a pour coordonnées (x, y, z) et sa position est donnée par le vecteur

$$\overrightarrow{OP} = (\mathbf{u}_x \ \mathbf{u}_y \ \mathbf{u}_z) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mathbf{u}_x \ \mathbf{u}_y \ \mathbf{u}_z) \cdot \mathbf{r} \quad (8.6)$$

avec la matrice colonne

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

Les coordonnées de position dans les deux repères sont reliées entre elles d'après

$$\overrightarrow{O_i P} = \overrightarrow{O_i O} + \overrightarrow{O P} \quad (8.8)$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{R}_i(t) \quad (8.9)$$

Comme nous l'avions vu dans le chapitre 2, la vitesse et l'accélération dans les deux repères sont alors reliées par

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{R}}_i \\ \mathbf{a}_i &= \mathbf{a} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \ddot{\mathbf{R}}_i \end{aligned} \quad (8.10)$$

avec la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ du repère non-inertiel.

Si l'équation de Newton s'écrit dans un repère inertiel sous la forme

$$m \mathbf{a}_i = \mathbf{F} \quad (8.11)$$

où \mathbf{F} désigne la force réelle qui agit sur le point de masse m , elle se modifie dans un repère non-inertiel selon

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - m\ddot{\mathbf{R}}_i \quad (8.12)$$

On constate que des pseudo-forces s'ajoutent à la force réelle à cause des effets d'accélération du repère non-inertiel vis-à-vis du repère inertiel. L'interprétation de ces termes est la suivante:

Le terme, $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$, porte le nom de *force de Coriolis*. Cette pseudo-force se manifeste dans un repère tournant lorsque le point matériel y est en mouvement. Cette pseudo-force est perpendiculaire à la vitesse \mathbf{v} et au vecteur $\boldsymbol{\omega}$ de vitesse angulaire du repère tournant. Cette pseudo-force nous est familière pour l'avoir ressentie en nous déplaçant sur un manège tournant à la foire. Lorsque nous y avançons d'un pas notre pied qui se pose sur la plateforme nous entraîne dans la direction de rotation et, pour ne pas perdre l'équilibre, nous devons compenser

par une force opposée. La force de Coriolis se manifeste aussi au niveau de la circulation atmosphérique à cause de la rotation terrestre. Les cyclones sont des zones de basse pression vers lesquelles se déplacent les masses d'air. Dans l'hémisphère nord, les vents sont défléchis sur leur droite à cause de la force de Coriolis. Par rapport au sol, les vents tournent donc dans le sens anti-horlogique en spiralant vers l'oeil du cyclone dans l'hémisphère nord (voir fig. 8.2). Dans l'hémisphère sud, le sens de rotation des vents est inversé.



Figure 8.2: Vue satellitaire de l'ouragan Isabel le 18 septembre 2003 montrant que les vents convergent vers son oeil dans le sens anti-horlogique dans l'hémisphère nord.

Le terme, $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, s'appelle la *force centrifuge*. Elle provient de l'accélération radiale d'un objet situé à une certaine distance d'un axe et tournant autour de celui-ci. Elle est dirigée vers l'extérieur. Si le vecteur de vitesse angulaire est vertical et ρ désigne la distance à cet axe, le module de la force centrifuge vaut $m\omega^2\rho$. Elle est d'autant plus forte que le repère tourne vite et que l'objet est situé loin de l'axe. Pour se tenir debout sur un manège tournant, il est nécessaire de se pencher vers le centre de la plateforme pour compenser la forme centrifuge qui est radiale et s'ajoute à la force de gravité verticale.

Le terme, $-m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$, qui est appelé la *force d'Euler*, est dû à la variation temporelle de la rotation du repère non-inertiel.

Enfin, le dernier terme, $-m\ddot{\mathbf{R}}_i$, provient de l'accélération du repère non-inertiel vis-à-vis du repère inertiel. C'est la force que nous ressentons dans un véhicule qui accélère ou qui freine.

Dans un repère non-inertiel qui tourne à vitesse angulaire constante, ces deux derniers termes s'annulent puisque $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$ et $\ddot{\mathbf{R}}_i = 0$ et l'équation de Newton devient

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (8.13)$$

que l'on a écrit sous la forme d'une équation différentielle ordinaire avec $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ et $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$.

8.2 Formulation lagrangienne

Nous choisissons comme coordonnées de Lagrange les positions (x, y, z) du point matériel dans le repère non-inertiel. Pour obtenir la fonction lagrangienne, nous devons exprimer l'énergie cinétique dans ces coordonnées.

Dans ce but, exprimons le vecteur $\vec{O_i O}$ joignant les origines des repères inertiel et non-inertiel dans la base du repère non-inertiel:

$$\vec{O_i O} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \end{pmatrix} \cdot \mathbf{R}(t) \quad (8.14)$$

avec la matrice colonne

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \mathbf{O}(t)^T \cdot \mathbf{R}_i(t) \quad (8.15)$$

Dans ce cas, la rotation (8.9) s'écrit

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{O}(t) \cdot [\mathbf{r} + \mathbf{R}(t)] \quad (8.16)$$

Pour obtenir la vitesse, nous en prenons la dérivée par rapport au temps

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{O} \cdot (\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{V}) \quad (8.17)$$

où le vecteur de la vitesse angulaire est donné par

$$\mathbf{O}^T \cdot \dot{\mathbf{O}} = \boldsymbol{\omega} \times \quad (8.18)$$

et

$$\mathbf{V} \equiv \dot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = \mathbf{O}^T \cdot \dot{\mathbf{R}}_i \quad (8.19)$$

Par conséquent, l'énergie cinétique s'écrit

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{V})^2 \quad (8.20)$$

Si le point matériel se déplace dans un potentiel U , la fonction lagrangienne est donc donnée par

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{V})^2 - U(\mathbf{r}, t) \quad (8.21)$$

dans le repère non-inertiel.

Les équations de Lagrange s'écrivent alors

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{V}) + m\boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{V}) + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (8.22)$$

c'est-à-dire

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - m\dot{\mathbf{V}} - m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \quad (8.23)$$

On retrouve bien l'équation de Newton (8.12) car, d'une part, la force réelle dérive ici du potentiel

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \quad (8.24)$$

et, d'autre part, l'accélération de l'origine du repère non-inertiel est ici évaluée dans ce dernier alors qu'elle l'était dans le repère inertiel dans l'éq. (8.12) et elles sont reliées par

$$\ddot{\mathbf{R}}_i = \dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \quad (8.25)$$

si toutes les deux sont exprimées dans la base $\{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z\}$. Si les origines ne se déplacent pas l'une par rapport à l'autre, $\mathbf{V} = 0$, la fonction lagrangienne s'écrit

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 - U(\mathbf{r}, t) \quad (8.26)$$

On remarquera la présence d'un terme linéaire en la vitesse dans cette fonction lagrangienne.

8.3 Formulation hamiltonienne

D'après la fonction lagrangienne (8.21), l'impulsion du point matériel est définie par

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{V}) \quad (8.27)$$

dans le repère non-inertiel. Réciproquement, la vitesse s'exprime en fonction de l'impulsion d'après

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m}\mathbf{p} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} - \mathbf{V} \quad (8.28)$$

Par conséquent, la fonction hamiltonienne est définie par

$$H \equiv \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L = \mathbf{p} \cdot \left(\frac{1}{m}\mathbf{p} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} - \mathbf{V} \right) - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U \quad (8.29)$$

et elle peut s'écrire sous la forme

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U - \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{V} \quad (8.30)$$

Alternativement, nous avons

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} - m\mathbf{V})^2 + U - \frac{m}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{V})^2 \quad (8.31)$$

qui est de la forme

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \mathbf{A})^2 + \tilde{U} \quad (8.32)$$

avec le vecteur

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \equiv m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{V}) \quad (8.33)$$

qui ne dépend que de la position et du temps et le potentiel

$$\tilde{U}(\mathbf{r}, t) \equiv U(\mathbf{r}, t) - \frac{m}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{V})^2 \quad (8.34)$$

modifié par l'ajout d'un potentiel reprenant les effets de la force centrifuge et du déplacement de l'origine du repère non-inertiel.

Dans le cas particulier où les origines ne se déplacent pas l'une vis-à-vis de l'autre, $\mathbf{V} = 0$, l'hamiltonien (8.31) se simplifie en

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 + U - \frac{m}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 \quad (8.35)$$

où un potentiel dû à la force centrifuge vient s'ajouter au potentiel de la force réelle dans

$$\tilde{U} = U - \frac{m}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = U - \frac{m}{2}\omega^2\rho^2 \quad (8.36)$$

où ρ est la distance radiale par rapport à l'axe de rotation $\mathbf{n} = \boldsymbol{\omega}/\|\boldsymbol{\omega}\|$ puisque

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \boldsymbol{\omega}^2\mathbf{r}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2 = \omega^2 [\mathbf{r}^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})^2] = \omega^2\rho^2 \quad (8.37)$$

avec $\omega = \|\boldsymbol{\omega}\|$. Par ailleurs, la présence du vecteur $\mathbf{A} = m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ au côté de l'impulsion dans l'énergie cinétique permet d'exprimer la force de Coriolis dans la formulation hamiltonienne comme on peut s'en convaincre en écrivant les équations d'Hamilton.

Toujours dans le cas particulier où $\mathbf{V} = 0$, la première forme (8.30) de la fonction hamiltonienne s'exprime sous la forme

$$H = H_i - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} \quad (8.38)$$

en termes du hamiltonien sous sa forme standard dans le repère inertiel

$$H_i \equiv \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U \quad (8.39)$$

et du moment cinétique

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (8.40)$$

Pareilles considérations s'étendent à des systèmes de points matériels.

8.4 Pendule de Foucault

En 1851, Léon Foucault (1819-1868) réalisa une expérience impressionnante à Paris pour démontrer de façon dynamique la rotation terrestre. Il s'agit d'un pendule composé d'un poids de 28 kg suspendu par un fil de 67 m sous le dôme du Panthéon (voir fig. 8.3). Le plan d'oscillation du pendule tourne dans le sens horlogique de 11° par heure faisant un tour complet en 32 heures environ [1]. Comment expliquer une pareille rotation alors que la Terre tourne en 24 heures?



Figure 8.3: Pendule de Foucault dans le Panthéon à Paris.

Soient (x_i, y_i, z_i) les coordonnées du point matériel dans un repère inertiel dont l'origine se trouve au centre de la Terre. Soient (x, y, z) les coordonnées de ce même point par rapport à une origine située à une latitude λ sur le globe terrestre et à une hauteur l du sol. Cette origine

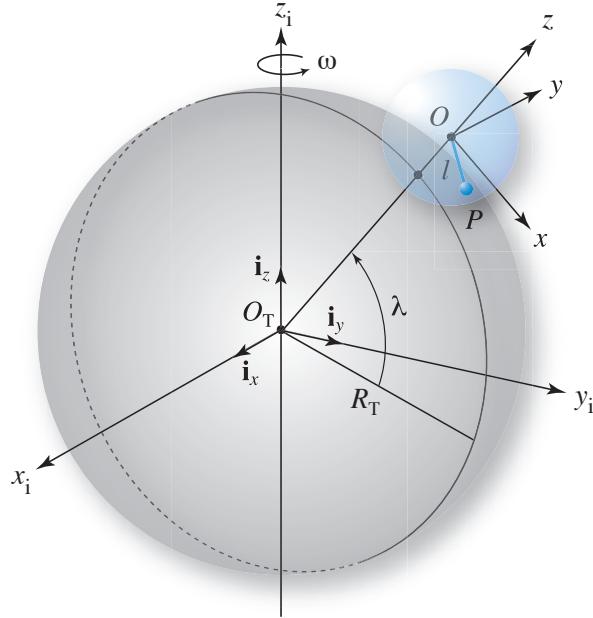


Figure 8.4: Schéma d'un pendule sphérique à la surface terrestre dont le point d'attache est entraîné par la rotation de la Terre. Le point d'attache O est à la distance $R = R_T + l$ du centre de la Terre O_T où $R_T = 6378 \text{ km}$ est le rayon terrestre et l la longueur du pendule.

tourne autour de l'axe \mathbf{i}_z à une vitesse angulaire ω dirigée vers le pôle nord de la Terre:

$$\overrightarrow{O_T O} = (\mathbf{i}_x \ \mathbf{i}_y \ \mathbf{i}_z) \cdot \begin{pmatrix} R \cos \lambda \cos \omega t \\ R \cos \lambda \sin \omega t \\ R \sin \lambda \end{pmatrix} = (\mathbf{i}_x \ \mathbf{i}_y \ \mathbf{i}_z) \cdot \mathbf{R}_i(t) \quad (8.41)$$

La base du repère est choisie avec \mathbf{u}_x horizontal vers le sud, \mathbf{u}_y horizontal dirigé vers l'est et \mathbf{u}_z vertical ascendant dans le potentiel de gravité. La matrice de rotation de ces vecteurs de base est donnée par

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_x \ \mathbf{u}_y \ \mathbf{u}_z) &= (\mathbf{i}_x \ \mathbf{i}_y \ \mathbf{i}_z) \cdot \begin{pmatrix} \sin \lambda \cos \omega t & -\sin \omega t & \cos \lambda \cos \omega t \\ \sin \lambda \sin \omega t & \cos \omega t & \cos \lambda \sin \omega t \\ -\cos \lambda & 0 & \sin \lambda \end{pmatrix} \\ &\equiv (\mathbf{i}_x \ \mathbf{i}_y \ \mathbf{i}_z) \cdot \mathbf{O}(t) \end{aligned} \quad (8.42)$$

Par conséquent, le vecteur de la vitesse de l'origine du repère non-inertiel s'obtient d'après

$$\begin{aligned} (\mathbf{i}_x \ \mathbf{i}_y \ \mathbf{i}_z) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i &= (\mathbf{i}_x \ \mathbf{i}_y \ \mathbf{i}_z) \cdot \begin{pmatrix} -R\omega \cos \lambda \sin \omega t \\ R\omega \cos \lambda \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{u}_x \ \mathbf{u}_y \ \mathbf{u}_z) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ R\omega \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{u}_x \ \mathbf{u}_y \ \mathbf{u}_z) \cdot \mathbf{V} \end{aligned} \quad (8.43)$$

Dans le repère tournant, le pendule est attaché à l'origine par une tige de longueur l et le poids est situé à la position

$$\overrightarrow{OP} = (\mathbf{u}_x \ \mathbf{u}_y \ \mathbf{u}_z) \cdot \mathbf{r} \quad (8.44)$$

avec les coordonnées

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \sin \theta \cos \phi \\ l \sin \theta \sin \phi \\ -l \cos \phi \end{pmatrix} \quad (8.45)$$

Par ailleurs, le vecteur de la vitesse angulaire dans le repère non-inertiel $Oxyz$ est donné par

$$\mathbf{O}^T \cdot \dot{\mathbf{O}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \sin \lambda & 0 \\ \omega \sin \lambda & 0 & \omega \cos \lambda \\ 0 & -\omega \cos \lambda & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \quad (8.46)$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega \cos \lambda \mathbf{u}_x + \omega \sin \lambda \mathbf{u}_z \quad (8.47)$$

La fonction lagrangienne dans le repère tournant à la latitude λ est donc donnée d'après l'éq. (8.21) par

$$L = \frac{1}{2}m [(\dot{x} - y\omega \sin \lambda)^2 + (\dot{y} + x\omega \sin \lambda + z\omega \cos \lambda + R\omega \cos \lambda)^2 + (\dot{z} - y\omega \cos \lambda)^2] - mgz \quad (8.48)$$

Par ailleurs, le système présente la contrainte holonôme que le point matériel se déplace au bout d'une tige de longueur l :

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \quad (8.49)$$

Si les oscillations du pendule sont de petites amplitudes, la coordonnée z et la vitesse correspondante peuvent s'exprimer en termes des deux coordonnées x et y selon

$$z = -l + \frac{1}{2l}(x^2 + y^2) + O(4) \quad (8.50)$$

$$\dot{z} = \frac{1}{l}(x\dot{x} + y\dot{y}) + O(4) \quad (8.51)$$

où $O(4)$ désigne des termes de degré quatre ou plus en les variables $\{x, y, \dot{x}, \dot{y}\}$. Ces relations peuvent être substituées dans la fonction lagrangienne pour en éliminer la variable z . Pour décrire les oscillations de petites amplitudes, on ne retient que les termes qui sont au plus quadratiques en $\{x, y, \dot{x}, \dot{y}\}$ dans la fonction lagrangienne.

On note de plus que le terme en $R\omega \cos \lambda$ est responsable de la force centrifuge agissant sur le pendule car $R \cos \lambda$ est la distance entre le pendule et l'axe de la Terre. Or l'accélération centrifuge est négligeable par rapport à l'accélération de gravité car

$$\frac{R_T \omega^2}{g} = \frac{6378000 \text{ m}}{9,81 \text{ m/s}^2} \left(\frac{2\pi}{86400 \text{ s}} \right)^2 \simeq 3,4 \times 10^{-3} \quad (8.52)$$

de sorte que $g \gg R_T \omega^2 \gg l\omega^2$. En conséquence, les termes quadratiques en les positions qui ne sont pas proportionnels à l'accélération g sont négligeables dans la fonction lagrangienne.

Dans ces approximations, les oscillations de petites amplitudes sont décrites par la fonction lagrangienne:

$$L_{(2)} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\omega \sin \lambda(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{mg}{2l}(x^2 + y^2) \quad (8.53)$$

où les termes constants ont été omis car ils n'apparaissent pas dans les équations de Lagrange. Celles-ci donnent les équations du mouvement suivantes:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\Omega\dot{y} + \frac{g}{l}x = 0 \\ \ddot{y} + 2\Omega\dot{x} + \frac{g}{l}y = 0 \end{cases} \quad (8.54)$$

avec la fréquence

$$\Omega \equiv \omega \sin \lambda \quad (8.55)$$

Cette fréquence est la projection du vecteur de la vitesse angulaire terrestre $\boldsymbol{\omega}$ sur l'axe vertical Oz à la latitude λ : $\Omega = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u}_z$. Par conséquent, les termes associés à cette fréquence dans les éqs. (8.54) représentent les effets de la force de Coriolis engendrée par la rotation du repère $Oxyz$ situé à la latitude λ (voir fig. 8.4).

En introduisant le nombre complexe

$$\zeta \equiv x + iy \quad (8.56)$$

les deux équations (8.54) deviennent ensemble

$$\ddot{\zeta} + 2i\Omega\dot{\zeta} + \frac{g}{l}\zeta = 0 \quad (8.57)$$

qui admet des solutions particulières de la forme $\zeta = C \exp(st)$. En substituant dans l'éq. (8.57), nous obtenons les exposants caractéristiques

$$s = -i\Omega \pm i\sqrt{\frac{g}{l} + \Omega^2} \quad (8.58)$$

Comme le pendule oscille plus vite que la Terre ne tourne, $\Omega \ll \sqrt{g/l}$, des solutions approchées sont données par

$$\zeta = x + iy \simeq e^{-i\Omega t} \left(C_+ e^{+i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + C_- e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} \right) \quad (8.59)$$

ce qui décrit des oscillations à la fréquence

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (8.60)$$

du pendule simple dans un plan tournant à la vitesse angulaire $\Omega = \omega \sin \lambda$ dans le sens anti-horlogique. La latitude du Panthéon à Paris étant égale à $\lambda = 48^\circ 51'$ nord, un tour complet du pendule de Foucault s'effectue en

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{24^h}{\sin \lambda} = 31^h 52^{\text{min}} \quad (8.61)$$

comme observé [1]. Cette période de rotation est d'autant plus longue que le pendule est proche de l'équateur où elle diverge. Par contre, le plan du pendule tourne précisément d'un tour en 24^h aux pôles comme on peut s'y attendre. Le pendule de Foucault permet ainsi de démontrer la rotation terrestre dans un lieu clos sans voir le ciel.

Références

[1] Pendule de Foucault. Wikipedia français.

La période d'oscillation de ce pendule est de $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 16,4\text{s}$.

Chapitre 9

Particule chargée dans un champ électromagnétique

9.1 Le champ électromagnétique et les équations de Maxwell

Les particules chargées électriquement comme les électrons, les protons ou les noyaux des atomes interagissent, d'une part, avec le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et, d'autre part, avec le champ magnétique, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, les deux formant ce qui est appelé le champ électromagnétique. Ces champs remplissent tout l'espace physique tridimensionnel et changent dans le temps en obéissant aux équations de Maxwell de l'électromagnétisme. Ces équations aux dérivées partielles sont de la forme suivante [1]:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & c_0^2 \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\tag{9.1}$$

où ρ et \mathbf{j} sont respectivement la densité des charges électriques et la densité de courant correspondante, $c_0 = 299792458$ m/s est la vitesse de la lumière dans le vide et $\epsilon_0 = (4\pi \times 10^{-7} c_0^2)^{-1}$ est la permittivité électrique du vide dans les unités MKSA du système international. La conservation locale de la charge électrique

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0\tag{9.2}$$

est une conséquence des deux premières équations de Maxwell qui expriment comment les charges électriques sont des sources du champ électromagnétique. Les deux dernières équations de Maxwell sont des contraintes qui sont automatiquement satisfaites si les champs électrique

et magnétique s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \partial_t \mathbf{A} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}\end{aligned}\tag{9.3}$$

en termes du *potentiel électrique* $\Phi(\mathbf{r}, t)$ (encore appelé le potentiel scalaire qui a pour unité physique le Volt) et le *potentiel vecteur* $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, tous les deux étant eux-mêmes des champs remplissant tout l'espace [1, 2]. On peut vérifier par calcul direct que les deux dernières équations de Maxwell sont alors toujours satisfaites. On notera que les potentiels scalaire et vecteur sont définis modulo une transformation

$$\begin{aligned}\Phi &\rightarrow \Phi - \partial_t \chi \\ \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi\end{aligned}\tag{9.4}$$

en termes d'une fonction $\chi(\mathbf{r}, t)$. Une telle transformation est appelée une *transformation de jauge*.

9.2 Formulation newtonienne

Comme nous l'avions mentionné dans un chapitre précédent, une particule de charge électrique q et de masse m plongée dans un champ électromagnétique subit la *force de Lorentz*:

$$\mathbf{F} = q [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]\tag{9.5}$$

où \mathbf{r} est la position de la particule au temps t et \mathbf{v} sa vitesse. Pour une particule chargée se déplaçant à une vitesse bien plus petite que la vitesse de la lumière, les équations de Newton s'écrivent donc

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]\tag{9.6}$$

qui constitue un ensemble de trois équations différentielles couplées déterminant la trajectoire à partir des conditions initiales: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t; \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, t_0)$.

9.3 Formulation lagrangienne

C'est en termes des potentiels scalaire et vecteur que s'exprime la fonction lagrangienne du système d'une particule non-relativiste de charge q et de masse m dans le champ électromagnétique:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - q\Phi(\mathbf{r}, t) + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\tag{9.7}$$

Pour s'en convaincre, il nous faut vérifier que les équations d'Euler-Lagrange redonnent bien les équations de Newton (9.6) avec la force de Lorentz. Considérons l'équation d'Euler-Lagrange pour la i^e composante:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial r_i} = \frac{d}{dt} (m\ddot{r}_i + qA_i) + q \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} - q\dot{r}_j \frac{\partial A_i}{\partial r_j} = 0 \quad (9.8)$$

Comme le potentiel vecteur change dans le temps d'après $A_i[\mathbf{r}(t), t]$ le long d'une trajectoire $\mathbf{r}(t)$, nous avons que

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \dot{r}_j \frac{\partial A_i}{\partial r_j} \quad (9.9)$$

de sorte que l'équation d'Euler-Lagrange devient

$$m\ddot{r}_i + q \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} + q \frac{\partial A_i}{\partial t} + q\dot{r}_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial r_j} - \frac{\partial A_j}{\partial r_i} \right) = 0 \quad (9.10)$$

Comme le champ magnétique est égal au rotationnel du potentiel vecteur, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, la contribution du champ magnétique à la force de Lorentz vaut

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i &= \epsilon_{ijk} v_j B_k = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} v_j \partial_l A_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) v_j \partial_l A_m \\ &= v_j (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \end{aligned} \quad (9.11)$$

qui apparaît au dernier terme de l'équation d'Euler-Lagrange. Puisque le champ électrique vaut $E_i = -\partial_i \Phi - \partial_t A_i$, nous retrouvons bien la i^e composante des équations de Newton (9.6):

$$m\ddot{r}_i = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})_i \quad (9.12)$$

C.Q.F.D.

9.4 Formulation hamiltonienne

L'impulsion associée à la particule chargée est définie par

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A} \quad (9.13)$$

de sorte que la vitesse est donnée par

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \quad (9.14)$$

La vitesse est une grandeur physique invariante de jauge car elle est déterminée d'après l'éq. (2.6) en termes de la trajectoire comme fonction du temps. Par contre, l'impulsion (9.13) dépend du choix de jauge et n'est donc pas une grandeur physique. En utilisant la définition $H \equiv \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L$, nous trouvons que la fonction hamiltonienne du système d'une particule chargée dans un champ électromagnétique est donnée par

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\Phi \quad (9.15)$$

Les équations d'Hamilton correspondantes redonnent bien les équations de Newton (9.6) comme on peut le vérifier.

Remarque: Par la présence du potentiel vecteur \mathbf{A} , la fonction hamiltonienne (9.15) porte la signature de la structure de jauge fondamentale des interactions électromagnétiques. Cette structure rappelle celle de la fonction hamiltonienne (8.32) où le vecteur (8.33) tient compte des effets de la pseudo-force de Coriolis qui apparaît dans des repères non-inertIELS. Dans ce cas, il s'agit d'une structure de jauge émergeant lors de changements de coordonnées depuis un repère inertiel vers un autre qui ne l'est plus. Il y a donc lieu de faire la distinction entre des structures de jauge fondamentales responsables de forces qui se manifestent même dans les repères inertIELS et les structures de jauge émergentes responsables de pseudo-forces existant seulement dans les repères non-inertIELS.

9.5 Système à plusieurs particules chargées

Considérons ici un système de N particules de charges $\{q_a\}_{a=1}^N$ et de masses $\{m_a\}_{a=1}^N$ évoluant dans le champ électromagnétique. Les équations de Newton sont alors

$$m_a \ddot{\mathbf{r}}_a = q_a [\mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t) + \dot{\mathbf{r}}_a \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_a, t)] \quad a = 1, 2, \dots, N \quad (9.16)$$

où la force de Lorentz agissant sur une particule est déterminée par le champ électrique et le champ magnétique à la position \mathbf{r}_a où se trouve la particule au temps t considéré. Ces équations de Newton forment ici un système de $3N$ équations différentielles couplées du deuxième ordre en le temps. Il s'agit des équations d'Euler-Lagrange que l'on déduit de la fonction lagrangienne

$$L = \sum_{a=1}^N \left[\frac{1}{2} m_a \dot{\mathbf{r}}_a^2 - q_a \Phi(\mathbf{r}_a, t) + q_a \dot{\mathbf{r}}_a \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_a, t) \right] \quad (9.17)$$

Elles peuvent ainsi se déduire des équations d'Hamilton associées à la fonction hamiltonienne

$$H = \sum_{a=1}^N \left\{ \frac{1}{2m_a} [\mathbf{p}_a - q_a \mathbf{A}(\mathbf{r}_a, t)]^2 + q_a \Phi(\mathbf{r}_a, t) \right\} \quad (9.18)$$

comme le montre le calcul.

Remarque: Lorsque les particules se déplacent à des vitesses proches de la vitesse de la lumière, l'énergie cinétique doit être remplacée par sa forme relativiste dans les fonctions lagrangienne et hamiltonienne, mais les équations d'Euler-Lagrange et les équations d'Hamilton gardent la même forme [2].

Références

- [1] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd edition (Wiley, Hoboken, 1999).
- [2] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd edition (Addison Wesley, Reading MA, 1980).

Chapitre 10

Mouvement du corps rigide

On appelle un corps rigide ou solide un ensemble de points matériels $\{\mathbf{r}_a\}_{a=1}^N$ dont les distances mutuelles restent constantes au cours du temps:

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b\| = 0 \quad \forall a, b = 1, 2, \dots, N \quad (10.1)$$

C'est le cas des objets solides pour autant que l'on néglige leurs mouvements de vibration souvent de très petites amplitudes. La configuration d'un corps rigide se réduit à trois angles qui déterminent son orientation et les trois positions du centre de masse comme nous l'avions évoqué dans un chapitre précédent. Les trois angles sont ceux d'une rotation d'ensemble du corps rigide amenant une orientation de référence sur son orientation au temps courant. L'espace des configurations du corps rigide est donc le produit direct de l'ensemble des rotations $\text{SO}(3)$ et de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 : $\mathbb{R}^3 \otimes \text{SO}(3)$.

10.1 Formulation newtonienne et tenseur d'inertie

10.1.1 Séparation des mouvements du centre de masse et de rotation

Le mouvement d'un corps rigide peut être considéré tout d'abord dans le repère inertiel d'un observateur d'origine O_i et de base $\{\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z\}$. Or, nous avions vu que le mouvement du centre de masse se découple des mouvements propres du système. Nous pouvons donc considérer un autre repère dont l'origine O coïncide avec le centre de masse et dont les vecteurs unitaires de base $\{\mathbf{u}'_x, \mathbf{u}'_y, \mathbf{u}'_z\}$ restent parallèles aux vecteurs unitaires du repère inertiel. Enfin, on peut considérer un repère de même origine O mais qui est attaché au corps rigide et qui tourne avec lui. Ses vecteurs de base $\{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z\}$ sont reliés aux précédents par une rotation:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_x & \mathbf{u}'_y & \mathbf{u}'_z \end{pmatrix} \cdot \mathbf{O}(t) \quad (10.2)$$

avec $\mathbf{O}(t) \in \text{SO}(3)$ (voir fig. 10.1).

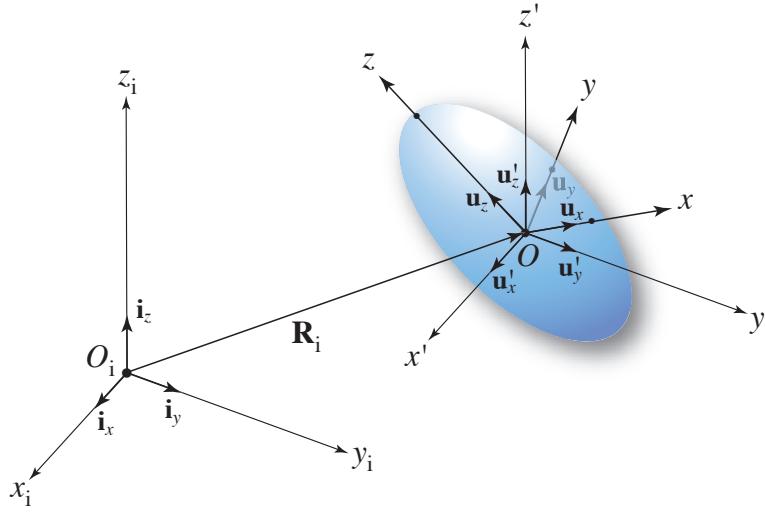


Figure 10.1: Trois repères pour décrire le mouvement d'un corps rigide: le repère inertiel $O_i x_i y_i z_i$ de base $\{\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z\}$, le repère $Ox'y'z'$ de base $\{\mathbf{u}'_x, \mathbf{u}'_y, \mathbf{u}'_z\}$ translaté au centre de masse O du corps rigide et le repère $Oxyz$ attaché au corps rigide de base $\{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z\}$.

Les points matériels composant le corps rigide ont un mouvement régi par les équations de Newton

$$m_a \frac{d^2 \mathbf{r}_{ai}}{dt^2} = \mathbf{F}_a^{(\text{ext})} + \sum_{b(b \neq a)} \mathbf{F}_{ab} \quad (10.3)$$

où \mathbf{F}_{ab} sont les forces de liaisons.

Au chapitre 3, nous avions vu que le centre de masse

$$\mathbf{R}_i \equiv \frac{1}{M} \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_{ai} \quad (10.4)$$

où $M = \sum_{a=1}^N m_a$ est la masse totale du corps rigide obéit à l'équation de Newton

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}_i}{dt^2} = \mathbf{F}^{(\text{ext})} \quad (10.5)$$

où $\mathbf{F}^{(\text{ext})} \equiv \sum_{a=1}^N \mathbf{F}_a^{(\text{ext})}$ est la force extérieure totale qui s'exerce sur le corps rigide. Par ailleurs, le moment cinétique total $\mathbf{L}_{\text{tot}} \equiv \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_{ai} \times \dot{\mathbf{r}}_{ai}$ obéit à l'équation

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{tot}}}{dt} = \mathbf{N}^{(\text{ext})} \quad (10.6)$$

où $\mathbf{N}^{(\text{ext})} \equiv \sum_{a=1}^N \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a^{(\text{ext})}$ est le couple de force total des forces extérieures.

Si l'on se place dans le repère du centre de masse,

$$\mathbf{r}' \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_i \quad (10.7)$$

le moment cinétique total se décompose selon

$$\mathbf{L}_{\text{tot}} = \mathbf{L}_{\text{c.m.}} + \mathbf{L}' \quad (10.8)$$

en le moment cinétique du centre de masse vis-à-vis de l'origine O_i du repère inertiel:

$$\mathbf{L}_{\text{c.m.}} \equiv M\mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i \quad (10.9)$$

et le moment cinétique du corps rigide vis-à-vis de son centre de masse

$$\mathbf{L}' \equiv \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}'_a \times \dot{\mathbf{r}}'_a \quad (10.10)$$

Ces moments cinétiques obéissent aux équations

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{c.m.}}}{dt} = \mathbf{R}_i \times \mathbf{F}^{(\text{ext})} \quad (10.11)$$

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{N}'^{(\text{ext})} \quad (10.12)$$

où $\mathbf{N}'^{(\text{ext})} = \sum_{a=1}^N \mathbf{r}'_a \times \mathbf{F}_a^{(\text{ext})}$ est le couple des forces extérieures vis-à-vis du centre de masse O . Ces résultats découlent du fait que $\sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}'_a = 0$ puisque le centre de masse est à l'origine du repère $Ox'y'z'$. Pour la même raison, l'énergie cinétique totale se sépare d'après

$$T_{\text{tot}} = \sum_{a=1}^N \frac{1}{2} m_a \dot{\mathbf{r}}_{ai}^2 = T_{\text{c.m.}} + T \quad (10.13)$$

en l'énergie cinétique du centre de masse

$$T_{\text{c.m.}} = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}_i^2 \quad (10.14)$$

et l'énergie cinétique de rotation du corps rigide autour de son centre de masse

$$T = \sum_{a=1}^N \frac{1}{2} m_a \dot{\mathbf{r}}_a'^2 \quad (10.15)$$

10.1.2 Le tenseur d'inertie et ses propriétés

Ensuite, nous passons au repère qui est attaché au corps rigide et qui tourne avec lui. Dans ce repère, les positions des points matériels composant le corps rigide sont fixes de sorte que

$$\mathbf{r}'_a(t) = \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{r}_a \quad \text{avec} \quad \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} = 0 \quad (10.16)$$

Dans le repère $Ox'y'z'$, les vitesses des points matériels peuvent alors s'écrire

$$\dot{\mathbf{r}}'_a = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{r}_a = \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{r}_a = \mathbf{O} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_a) \quad (10.17)$$

où l'on a introduit le vecteur de la vitesse angulaire du corps rigide dans repère tournant:

$$\mathbf{O}^T \cdot \dot{\mathbf{O}} \equiv \boldsymbol{\omega} \times \quad (10.18)$$

En conséquence, l'énergie cinétique de rotation s'exprime en termes de la vitesse angulaire selon

$$T = \sum_{a=1}^N \frac{1}{2} m_a [\mathbf{O} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_a)]^2 = \sum_{a=1}^N \frac{1}{2} m_a (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_a)^2 \quad (10.19)$$

puisque une rotation laisse invariante le produit scalaire et donc le carré des vitesses. Comme le carré du produit vectoriel s'écrit

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_a)^2 = \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}_a^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_a)^2 \quad (10.20)$$

l'énergie cinétique de rotation devient

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (10.21)$$

où l'on introduit le *tenseur d'inertie*

$$\mathbf{I} \equiv \sum_{a=1}^N m_a (\mathbf{r}_a^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_a \otimes \mathbf{r}_a) \quad (10.22)$$

qui caractérise l'inertie du corps rigide sous l'effet de rotations. Il est ici défini dans le repère attaché au corps rigide de sorte qu'il est constant dans le temps, $d\mathbf{I}/dt = 0$. Ses éléments sont les *moments d'inertie*

$$I_{jk} = \sum_{a=1}^N m_a (\mathbf{r}_a^2 \delta_{jk} - r_{aj} r_{ak}) \quad (10.23)$$

Il s'agit d'un tenseur symétrique

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}^T \quad (10.24)$$

car $I_{jk} = I_{kj}$. De plus, il est non-négatif $\mathbf{I} \geq 0$, en conséquence de la non-négativité de l'énergie cinétique de rotation (10.21). En effet, nous avons que

$$|\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_a| \leq \|\boldsymbol{\omega}\| \|\mathbf{r}_a\| \quad (10.25)$$

par l'inégalité de Schwarz de sorte que

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum_{a=1}^N m_a [\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}_a^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_a)^2] \geq 0 \quad (10.26)$$

Ce tenseur d'inertie est donc diagonalisable par une rotation vers un nouveau repère où le tenseur d'inertie prend la forme matricielle

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad \text{avec } I_1 \geq I_2 \geq I_3 \geq 0 \quad (10.27)$$

Les vecteurs propres définissent les axes principaux d'inertie. On peut toujours choisir le repère $Oxyz$ comme celui formé par les axes principaux d'inertie du corps rigide.

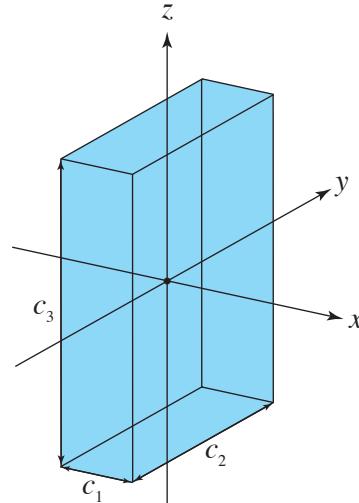


Figure 10.2: Corps rigide parallélépipédique dans le repère de ses axes principaux d'inertie.

Exemple: Considérons un corps rigide parallélépipédique de côté $c_1 \leq c_2 \leq c_3$ (voir fig. 10.2). Ses moments d'inertie sont donnés par les intégrales

$$I_{jk} = \int_V d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r}^2 \delta_{jk} - r_j r_k) \quad (10.28)$$

où la densité de masse $\rho(\mathbf{r})$ est supposée constante. Par symétrie, les éléments non-diagonaux s'annulent, $I_{jk} = 0$ pour $j \neq k$ et les éléments diagonaux sont donnés par

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{M}{12}(c_2^2 + c_3^2) \\ I_2 &= \frac{M}{12}(c_3^2 + c_1^2) \\ I_3 &= \frac{M}{12}(c_1^2 + c_2^2) \end{aligned} \quad (10.29)$$

et ils sont ordonnés selon $I_1 \geq I_2 \geq I_3$. Le plus grand des moments d'inertie est celui dont l'axe principal correspond à la plus petite épaisseur et autour duquel la masse du corps solide s'étale sur la plus grande étendue.

Les corps rigides étant caractérisés par leur tenseur d'inertie, leur classification peut être effectuée en termes de leurs valeurs propres, appelés les moments principaux d'inertie: on parle de

- toupie asymétrique si $I_1 > I_2 > I_3 > 0$
 - toupie symétrique allongée si $I_1 = I_2 > I_3 > 0$
 - toupie symétrique aplatie si $I_1 > I_2 = I_3 > 0$
 - toupie symétrique sphérique si $I_1 = I_2 = I_3 > 0$
 - rotateur si $I_1 = I_2 > I_3 = 0$
- (10.30)

Les moments d'inertie s'annulent $I_1 = I_2 = I_3 = 0$ pour un corps rigide réduit à un point matériel. On remarque qu'un moment principal d'inertie ne peut être plus grand que la somme des deux autres car

$$I_1 + I_2 = \sum_a m_a(x_a^2 + y_a^2 + 2z_a^2) \geq I_3 = \sum_a m_a(x_a^2 + y_a^2) \quad (10.31)$$

Par conséquent, il n'existe pas de corps rigide dont deux moments principaux d'inertie s'annulent sans que le troisième le soit aussi.

Remarque: Le tenseur d'inertie peut s'évaluer en un point autre que le centre de masse, par exemple en P situé en $\mathbf{d} = \vec{OP}$. Les points du solide ont alors pour coordonnées $\tilde{\mathbf{r}}_a = \mathbf{r}_a - \mathbf{d}$. Comme $\sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_a = 0$, nous avons que

$$\sum_{a=1}^N m_a \tilde{\mathbf{r}}_a = M\mathbf{d} \quad (10.32)$$

et

$$\mathbf{I}_P = \mathbf{I}_O + M(\mathbf{d}^2 \mathbf{1} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}) \quad (10.33)$$

Par ailleurs, le moment cinétique du corps rigide vis-à-vis de son centre de masse peut aussi s'exprimer en termes du vecteur de vitesse angulaire

$$\begin{aligned}\mathbf{L}' &= \sum_{a=1}^N m_a (\mathbf{O} \cdot \mathbf{r}) \times [\mathbf{O} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_a)] \\ &= \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{O} \cdot [\mathbf{r}_a \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_a)] \\ &\equiv \mathbf{O} \cdot \mathbf{L}\end{aligned}\quad (10.34)$$

où l'on a introduit le moment cinétique du corps rigide dans le repère tournant

$$\mathbf{L} \equiv \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_a \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_a) = \sum_{a=1}^N m_a [\mathbf{r}_a^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_a) \mathbf{r}_a] \quad (10.35)$$

Le résultat remarquable est qu'il s'exprime aussi en termes du tenseur d'inertie :

$$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}} \quad (10.36)$$

10.1.3 Les équations d'Euler

L'équation d'évolution (10.12) peut s'écrire dans le repère tournant

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{O} \cdot \mathbf{L}) = \mathbf{O} \cdot \mathbf{N}^{(\text{ext})} \quad (10.37)$$

où $\mathbf{N}^{(\text{ext})} \equiv \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{N}'^{(\text{ext})}$ est le couple des forces extérieures agissant sur le centre de masse mais évalué dans le repère tournant. En dérivant par rapport au temps, nous trouvons

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N}^{(\text{ext})} \quad (10.38)$$

En utilisant l'éq. (10.36), nous obtenons l'équation d'évolution de la vitesse angulaire

$$\mathbf{I} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{N}^{(\text{ext})} \quad (10.39)$$

Dans le repère des axes principaux d'inertie où $I_{jk} = I_j \delta_{jk}$, elle s'écrit en composantes sous la forme:

$$\begin{aligned}I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= N_1^{(\text{ext})} \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 &= N_2^{(\text{ext})} \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= N_3^{(\text{ext})}\end{aligned}\quad (10.40)$$

qui constituent les *équations d'Euler du corps rigide*.

10.2 Toupie libre

10.2.1 Les équations d'Euler et ses constantes du mouvement

Soit un corps rigide lancé dans le champ de gravité terrestre. Son énergie cinétique se scinde comme montré ci-dessus en la contribution du centre de masse et celle de la rotation du corps sur lui-même, tandis que l'énergie potentielle se réduit à celle du centre de masse en conséquence de la définition (10.4) de celui-ci: $U = \sum_a m_a g z_{ai} = MgZ_i$. L'énergie totale se sépare donc entre l'énergie du centre de masse qui se comporte comme un point matériel de masse totale M et l'énergie cinétique de rotation du corps rigide autour de son centre de masse:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}_i^2 + MgZ_i}_{E_{c.m.}} + \underbrace{\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}}_T \quad (10.41)$$

Le centre de masse suit donc une trajectoire parabolique, alors que le couple de force totale agissant sur le corps solide est nul: $\mathbf{N}^{(ext)} = 0$. Les équations d'Euler ont donc la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{array} \right. \quad (10.42)$$

Ces équations admettent deux constantes du mouvement: d'une part, l'énergie cinétique (10.21) et, d'autre part, le module ou le carré du moment cinétique. En effet, d'après l'équation d'évolution (10.38) de ce dernier, nous avons que

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}^2 = -2\mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}) = 0 \quad (10.43)$$

si $\mathbf{N}^{(ext)} = 0$, car le vecteur $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$ est toujours perpendiculaire au vecteur du moment cinétique lui-même. En conséquence, le carré du moment cinétique est une constante du mouvement: $\mathbf{L}^2 = L^2$.

Dans le repère des axes principaux d'inertie, les deux constantes du mouvement s'écrivent

$$2T = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 \quad (10.44)$$

$$L^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 \quad (10.45)$$

en termes des trois composantes de la vitesse angulaire où l'on a utilisé l'éq. (10.36).

10.2.2 Solutions générales de la toupie asymétrique

Grâce aux deux intégrales premières (10.44) et (10.45), les trois équations d'Euler (10.42) sont intégrables par quadratures. En effet, les deux intégrales premières permettent d'exprimer les composantes ω_1 et ω_3 de la vitesse angulaire en termes de la seule composante ω_2

$$\omega_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{I_1(I_1 - I_3)}} \sqrt{\gamma^2 - I_2(I_2 - I_3)\omega_2^2} \quad (10.46)$$

$$\omega_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{I_3(I_1 - I_3)}} \sqrt{\alpha^2 - I_2(I_1 - I_2)\omega_2^2} \quad (10.47)$$

avec les constantes

$$\alpha^2 \equiv 2I_1T - L^2 \geq 0 \quad (10.48)$$

$$\gamma^2 \equiv L^2 - 2I_3T \geq 0 \quad (10.49)$$

qui sont non-négatives comme on peut le vérifier en utilisant les éqs. (10.44)-(10.45) et l'hypothèse que $I_1 > I_2 > I_3 > 0$. En conséquent, la deuxième équation d'Euler devient

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \pm \frac{1}{I_2\sqrt{I_1I_3}} \sqrt{\alpha^2 - I_2(I_1 - I_2)\omega_2^2} \sqrt{\gamma^2 - I_2(I_2 - I_3)\omega_2^2} \quad (10.50)$$

qui est intégrable. Les équations d'Euler de la toupie libre sont donc intégrables par quadratures. Deux cas se présentent:

$$(I) \quad \frac{\gamma^2}{I_2 - I_3} \geq \frac{\alpha^2}{I_1 - I_2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad L^2 \geq 2I_2T \quad (10.51)$$

$$(II) \quad \frac{\gamma^2}{I_2 - I_3} \leq \frac{\alpha^2}{I_1 - I_2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad L^2 \leq 2I_2T \quad (10.52)$$

Dans les deux cas, les solutions sont données par des fonctions elliptiques de Jacobi.

Mouvement de type I: Dans ce cas, le module de Jacobi est pris égal à

$$0 \leq k \equiv \frac{\alpha}{\gamma} \sqrt{\frac{I_2 - I_3}{I_1 - I_2}} \leq 1 \quad (10.53)$$

avec $\alpha = \sqrt{\alpha^2}$ et $\gamma = \sqrt{\gamma^2}$. En posant,

$$\Omega \equiv \gamma \sqrt{\frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2 I_3}} \quad (10.54)$$

et

$$z \equiv \sqrt{I_2(I_1 - I_2)} \frac{\omega_2}{\alpha} \quad (10.55)$$

la deuxième équation d'Euler s'écrit

$$\dot{z} = \pm \Omega \sqrt{1 - z^2} \sqrt{1 - k^2 z^2} \quad (10.56)$$

dont la solution est donnée par une intégrale elliptique incomplète de 1e espèce et s'exprime en termes de fonctions elliptiques de Jacobi de module k :

$$z = \sin \varphi = \operatorname{sn} [\Omega(t - t_0)|k] \quad (10.57)$$

Les solutions générales sont donc de la forme

$$\begin{cases} \omega_1 = \pm \frac{\gamma}{\sqrt{I_1(I_1 - I_3)}} \operatorname{dn} \Omega(t - t_0) \\ \omega_2 = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{I_2(I_1 - I_2)}} \operatorname{sn} \Omega(t - t_0) \\ \omega_3 = \mp \frac{\alpha}{\sqrt{I_3(I_1 - I_3)}} \operatorname{cn} \Omega(t - t_0) \end{cases} \quad (10.58)$$

où les deux signes correspondent à deux familles de mouvements dont la composante de la vitesse angulaire du plus grand moment principal d'inertie est soit positive, $\omega_1 > 0$, soit négative, $\omega_1 < 0$.

Mouvements de type II: Dans cet autre cas, le module de Jacobi est choisi comme

$$0 \leq k \equiv \frac{\gamma}{\alpha} \sqrt{\frac{I_1 - I_2}{I_2 - I_3}} \leq 1 \quad (10.59)$$

et la fréquence

$$\Omega \equiv \alpha \sqrt{\frac{I_2 - I_3}{I_1 I_2 I_3}} \quad (10.60)$$

Ici, c'est en posant

$$z \equiv \sqrt{I_2(I_2 - I_3)} \frac{\omega_2}{\gamma} \quad (10.61)$$

que la deuxième équation d'Euler prend la forme (10.56). Les solutions générales sont ici les suivantes :

$$\begin{cases} \omega_1 = \mp \frac{\gamma}{\sqrt{I_1(I_1 - I_3)}} \operatorname{cn} \Omega(t - t_0) \\ \omega_2 = \pm \frac{\gamma}{\sqrt{I_2(I_2 - I_3)}} \operatorname{sn} \Omega(t - t_0) \\ \omega_3 = \pm \frac{\gamma}{\sqrt{I_3(I_1 - I_3)}} \operatorname{dn} \Omega(t - t_0) \end{cases} \quad (10.62)$$

pour lesquelles c'est la troisième composante de la vitesse angulaire qui garde son signe positif, $\omega_3 > 0$, ou négatif, $\omega_3 < 0$.

On peut vérifier que les équations d'Euler sont bien satisfaites en utilisant les règles de dérivations des fonctions elliptiques de Jacobi :

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \quad (10.63)$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{cn} u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \quad (10.64)$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{dn} u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \quad (10.65)$$

Des solutions particulières remarquables sont les suivantes:

Rotations autour des axes principaux d'inertie: Ces solutions particulières se caractérisent par l'annulation de deux des trois composantes de la vitesse angulaire. Leur stabilité peut être directement déterminée en linéarisant les équations d'Euler pour étudier les mouvements de petites amplitudes ($\delta\omega_1, \delta\omega_2, \delta\omega_3$) autour de ces solutions particulières:

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{\omega}_1 \\ \delta\dot{\omega}_2 \\ \delta\dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{I_2-I_3}{I_1}\omega_3 & \frac{I_2-I_3}{I_1}\omega_2 \\ -\frac{I_1-I_3}{I_2}\omega_3 & 0 & -\frac{I_1-I_3}{I_2}\omega_1 \\ \frac{I_1-I_2}{I_3}\omega_2 & \frac{I_1-I_2}{I_3}\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \end{pmatrix} \quad (10.66)$$

avec $I_1, I_2, I_3 \neq 0$.

La rotation autour du plus grand des axes principaux d'inertie

$$\omega_1 = \pm \frac{L}{I_1} = \pm \sqrt{\frac{2T}{I_1}} \quad \omega_2 = \omega_3 = 0 \quad (10.67)$$

avec $L = \sqrt{L^2}$ a des perturbations qui obéissent à

$$\delta\ddot{\omega}_{2,3} = -\Omega_1^2 \delta\omega_{2,3} \quad (10.68)$$

avec

$$\Omega_1^2 = \frac{2T}{I_1 I_2 I_3} (I_1 - I_3)(I_1 - I_2) \geq 0 \quad (10.69)$$

de sorte que la fréquence Ω_1 est réelle. Par conséquent, les perturbations sont des fonctions oscillantes d'amplitude bornée et la rotation dans la direction de I_1 est donc stable.

Autour de l'axe d'inertie intermédiaire I_2 , la rotation

$$\omega_2 = \pm \frac{L}{I_2} = \pm \sqrt{\frac{2T}{I_2}} \quad \omega_1 = \omega_3 = 0 \quad (10.70)$$

a des perturbations obéissent à

$$\delta\ddot{\omega}_{1,3} = -\Omega_2^2 \delta\omega_{1,3} \quad (10.71)$$

avec

$$\Omega_2^2 = -\frac{2T}{I_1 I_2 I_3} (I_1 - I_2)(I_2 - I_3) \leq 0 \quad (10.72)$$

qui est négatif ou nul. Par conséquent, on a ici affaire à une fréquence imaginaire Ω_2 et l'équation linéarisée (10.71) a pour solutions des exponentielles $\exp(\pm |\Omega_2| t)$ qui peuvent croître indéfiniment de sorte que l'amplitude des perturbations ne reste pas bornée en général. Par conséquent, une rotation autour de l'axe principal d'inertie intermédiaire I_2 n'est pas un mouvement stable.

Enfin, la rotation autour du plus petit des axes principaux d'inertie

$$\omega_3 = \pm \frac{L}{I_3} = \pm \sqrt{\frac{2T}{I_3}} \quad \omega_1 = \omega_2 = 0 \quad (10.73)$$

a des perturbations soumises à l'équation linéarisée

$$\delta\ddot{\omega}_{1,2} = -\Omega_3^2 \delta\omega_{1,2} \quad (10.74)$$

avec

$$\Omega_3^2 = \frac{2T}{I_1 I_2 I_3} (I_2 - I_3)(I_1 - I_3) \geq 0 \quad (10.75)$$

qui détermine de nouveau une fréquence réelle Ω_3 . Les perturbations sont donc des oscillations bornées de sorte que la rotation autour du plus petit axe principal d'inertie I_3 est un mouvement stable.

On remarquera que les rotations pures autour du plus grand et du plus petit des axes principaux d'inertie sont les solutions de module de Jacobi nul, $k = 0$, respectivement parmi les trajectoires de type I et de type II.

Par contre, les rotations autour de l'axe d'inertie intermédiaire sont attachées à des solutions particulières appelées les séparatrices.

Séparatrices: Ces trajectoires sont situées à la frontière entre les mouvements des types I et II où le module de Jacobi vaut $k = 1$. Ces solutions limites coïncident car le module de Jacobi

de la famille I est l'inverse de celui de la famille II. Leur forme est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \epsilon_1 \sqrt{\frac{2T(I_2 - I_3)}{I_1(I_1 - I_3)}} \operatorname{sech} \Omega(t - t_0) \\ \omega_2 = \epsilon_2 \sqrt{\frac{2T}{I_2}} \tanh \Omega(t - t_0) \\ \omega_3 = -\epsilon_1 \sqrt{\frac{2T(I_1 - I_2)}{I_3(I_1 - I_3)}} \operatorname{sech} \Omega(t - t_0) \end{array} \right. \quad (10.76)$$

avec $\epsilon_1 = \pm 1$ et $\epsilon_2 = \pm 1$. Elles sont donc au nombre de quatre. Pour $t \rightarrow \pm\infty$, ces solutions sont asymptotiques aux rotations pures instables, $\omega_2 = \pm\sqrt{2T/I_2}$, $\omega_1 = \omega_3 = 0$, autour de l'axe d'inertie intermédiaire.

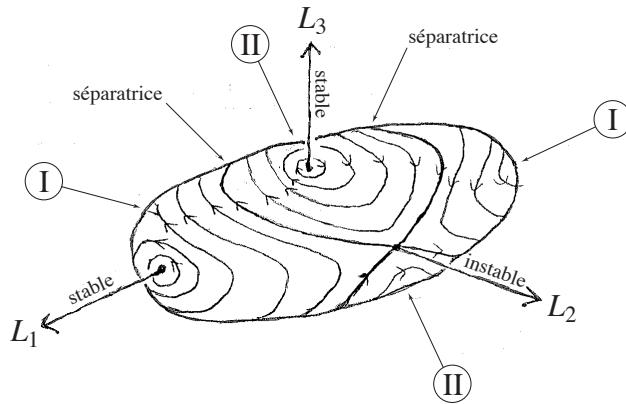


Figure 10.3: Trajectoires de la toupie libre asymétrique $I_1 > I_2 > I_3 > 0$ sur l'ellipsoïde d'énergie constante T dans l'espace des trois composantes du moment cinétique défini dans le repère attaché à la toupie. Ces trajectoires sont aux intersections avec la sphère $\mathbf{L}^2 = L^2$.

Portrait de phases des trajectoires: Toutes les solutions peuvent être visualisées dans l'espace des composantes du moment cinétique dans le repère attaché à la toupie, $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$, où les deux constantes du mouvement s'écrivent

$$T = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3} \quad (10.77)$$

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \quad (10.78)$$

Les trajectoires se trouvent donc aux intersections entre l'ellipsoïde d'énergie constante et la sphère de module du moment cinétique constant (voir fig. 10.3).

Pour $L^2 < 2I_3T$, la sphère n'a pas d'intersection avec l'ellipsoïde. Les premières intersections apparaissent lorsque la sphère est tangente à l'ellipsoïde aux deux points avec $L_3 = \pm\sqrt{2TI_3} = \pm L$ et $L_1 = L_2 = 0$. Pour des rayons légèrement plus grands $L^2 \gtrsim 2I_3T$, les intersections sont deux petites courbes fermées sur elles-mêmes entourant l'axe L_3 correspondant au plus petit moment d'inertie I_3 . Il s'agit des trajectoires décrivant les perturbations oscillantes de petites amplitudes autour de rotations pures d'axe L_3 , ce qui montre la stabilité de celles-ci. Pour $2TI_3 < L^2 < 2TI_2$, les courbes fermées sont les trajectoires de type II.

Lorsque le rayon de la sphère augmente, les courbes fermées s'agrandissent jusqu'à atteindre les points de coordonnées $L_2 = \pm\sqrt{2TI_2} = \pm L$ et $L_1 = L_3 = 0$ sur l'axe principal associés au moment d'inertie intermédiaire I_2 . Lorsque $L^2 = 2TI_2$, les courbes fermées avec $L_3 > 0$ et $L_3 < 0$ se rejoignent au point fixe sur l'axe L_2 pour y former une structure en croix constituée par les quatre séparatrices. Cette structure dite hyperbolique est révélatrice de l'instabilité d'une rotation pure autour de l'axe d'inertie intermédiaire L_2 . Toute perturbation partant d'une condition initiale qui n'est pas strictement sur l'axe de rotation L_2 sera amplifiée par l'instabilité entraînant un basculement rapide de l'axe de rotation, c'est-à-dire du vecteur de moment cinétique et de celui de la vitesse angulaire.

Pour de plus grandes valeurs du module du moment cinétique $2TI_2 < L^2 < 2TI_1$, nous retrouvons des courbes fermées mais tournant autour de l'axe L_1 et correspondant aux solutions générales de type I. Pour $L^2 \lesssim 2TI_1$, les courbes fermées se rétrécissent et décrivent des perturbations oscillantes de petites amplitudes ici autour de l'axe L_1 de rotations pures stables associées au plus grand moment d'inertie I_1 . Les intersections disparaissent après les tangences entre l'ellipsoïde et la sphère en $L = \pm\sqrt{2TI_1}$.

10.2.3 La toupie symétrique libre

Considérons pour fixer les idées une toupie symétrique aplatie de moments d'inertie $I_1 > I_2 = I_3 > 0$, comme c'est le cas pour la Terre. Dans ce cas, les équations d'Euler se réduisent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega_1}{dt} = 0 \\ \frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{I_1 - I_2}{I_2}\omega_1\omega_3 \\ \frac{d\omega_3}{dt} = -\frac{I_1 - I_2}{I_2}\omega_1\omega_2 \end{array} \right. \quad (10.79)$$

de sorte que ω_1 reste constant tandis que ω_2 et ω_3 suivent un mouvement harmonique qui est solution des équations

$$\ddot{\omega}_{2,3} = -\Omega^2 \omega_{2,3} \quad (10.80)$$

Avec la fréquence

$$\Omega = \frac{I_1 - I_2}{I_2} |\omega_1| \quad (10.81)$$

Les solutions sont donc

$$\begin{cases} \omega_2 = A \cos(\Omega t + \varphi) \\ \omega_3 = A \sin(\Omega t + \varphi) \end{cases} \quad (10.82)$$

avec l'amplitude

$$A = \frac{1}{I_2} \sqrt{L^2 - I_1^2 \omega_1^2} = \frac{1}{\sqrt{I_2}} \sqrt{2T - I_1 \omega_1^2} \quad (10.83)$$

et une phase $0 \leq \varphi < 2\pi$.

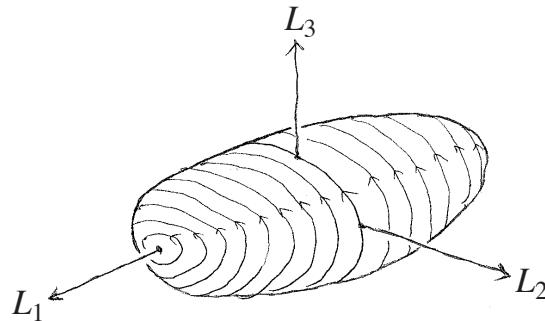


Figure 10.4: Trajectoires de la toupie libre symétrique aplatie $I_1 > I_2 = I_3 > 0$ sur l'ellipsoïde d'énergie constante T dans l'espace $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$.

Dans l'espace des trois composantes du moment cinétique $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$, ces solutions sont à l'intersection des surfaces

$$T = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{1}{2I_2}(L_2^2 + L_3^2) \quad (10.84)$$

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \quad (10.85)$$

qui forment un ellipsoïde de révolution autour de l'axe L_1 et une sphère (voir fig. 10.4).

Par la symétrie de révolution, les intersections de l'ellipsoïde d'énergie avec la sphère de module de moment cinétique correspondent aux intersections de l'ellipsoïde avec les plans à

L_1 constant puisque la composante ω_1 de la vitesse angulaire est constante et que $L_1 = I_1\omega_1$. Comme on le voit sur la fig. 10.4, les mouvements de type I occupent tout l'espace et ceux de type II ont disparu ainsi que l'instabilité et la structure hyperbolique associées aux séparatrices.

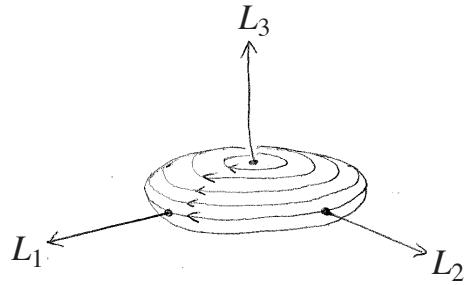


Figure 10.5: Trajectoires de la toupie libre symétrique allongée $I_1 = I_2 > I_3 > 0$ sur l'ellipsoïde d'énergie constante T dans l'espace $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$.

Le comportement est semblable pour une toupie symétrique allongée pour laquelle l'ellipsoïde d'énergie est de révolution et aplatie (voir fig. 10.5). Il ne contient que des trajectoires de type II. Si la toupie est sphérique, les équations d'Euler se réduisent à $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$ de sorte que le vecteur de la vitesse angulaire reste constant au cours du temps de même que le vecteur de moment cinétique.

10.2.4 Le rotateur libre

Un corps rigide linéaire est un exemple de rotateur car le moment d'inertie autour de son axe s'annule et les deux autres sont égaux en conséquence de la propriété (10.31): $I = I_1 = I_2 > I_3 = 0$. Dans ce cas-ci, les équations d'Euler se réduisent à

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \omega_3 \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = -\omega_3 \omega_1 \\ \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} \quad (10.86)$$

et la composante du moment cinétique dans l'axe du rotateur s'annule

$$\begin{cases} L_1 = I \omega_1 \\ L_2 = I \omega_2 \\ L_3 = 0 \end{cases} \quad (10.87)$$

de sorte que les deux constantes du mouvement deviennent

$$T = \frac{I}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) = \frac{1}{2I}(L_1^2 + L_2^2) \quad (10.88)$$

$$L^2 = I^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) = L_1^2 + L_2^2 \quad (10.89)$$

Les solutions des équations d'Euler sont donc

$$\begin{cases} \omega_1 = A \cos(\omega_3 t + \varphi) \\ \omega_2 = A \sin(\omega_3 t + \varphi) \end{cases} \quad (10.90)$$

de fréquence ω_3 , d'amplitude

$$A = \frac{L}{I} = \sqrt{\frac{2T}{I}} \quad (10.91)$$

et de phase $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Il s'agit de la situation limite où l'ellipsoïde d'énergie de la fig. 10.5 se réduit à un disque de rayon $\sqrt{L_1^2 + L_2^2} = \sqrt{2T/I}$ avec pour seule trajectoire le cercle de son périmètre.

10.2.5 L'ellipsoïde de Poinsot

Une autre interprétation géométrique du mouvement de la toupie libre peut s'effectuer dans le repère $Ox'y'z'$ dont la base orthonormée est la même que dans le repère inertiel. D'après les éqs. (10.34) et (10.36), le moment cinétique s'y écrit sous la forme

$$\mathbf{L}' = \mathbf{I}'(t) \cdot \boldsymbol{\omega}'(t) \quad (10.92)$$

en termes du tenseur d'inertie

$$\mathbf{I}'(t) = \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{O}(t)^T \quad (10.93)$$

qui dépend du temps ainsi que la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}'(t)$. Cependant, d'après l'éq. (10.12), le vecteur du moment cinétique est une constante du mouvement

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = 0 \quad (10.94)$$

pour la toupie libre puisque $\mathbf{N}'^{(\text{ext})} = 0$. Par ailleurs, l'énergie cinétique de rotation est conservée de sorte que

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}'(t) \cdot \mathbf{I}'(t) \cdot \boldsymbol{\omega}'(t) \quad (10.95)$$

est une constante du mouvement qui définit un ellipsoïde dans l'espace des trois composantes de la vitesse angulaire dans le repère $Ox'y'z'$: $\omega' = (\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z)$. Cet ellipsoïde est tangent à un plan qui est perpendiculaire à la direction du moment cinétique

$$\frac{\partial T}{\partial \omega'} = \mathbf{I}' \cdot \omega' = \mathbf{L}' \quad (10.96)$$

et qui a pour équation

$$\mathbf{L}' \cdot \omega' = 2T \quad (10.97)$$

Il s'agit donc d'un plan qui est fixe dans l'espace $(\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z)$ et sur lequel l'ellipsoïde de Poinsot (10.95) roule sans glisser comme le montre la fig. 10.6. Le point de contact décrit sur le plan (10.97) une courbe appelée la "herpolhode" et sur l'ellipsoïde une autre courbe appelée la "polhode" qui correspond à une des trajectoires de la fig. 10.3 dans l'espace des composantes du moment cinétique $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$ défini dans le repère attaché au corps rigide d'après la relation

$$\omega'(t) = \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{L}(t) = \mathbf{O}(t) \cdot \begin{pmatrix} L_1(t)/I_1 \\ L_2(t)/I_2 \\ L_3(t)/I_3 \end{pmatrix} \quad (10.98)$$

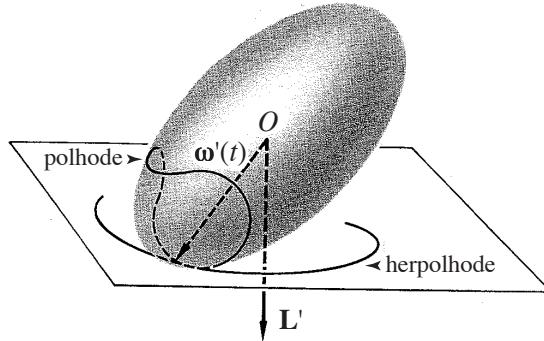


Figure 10.6: Ellipsoïde de Poinsot (10.95) roulant sans glisser sur le plan (10.97) perpendiculaire au vecteur du moment cinétique dans le repère $Ox'y'z'$ d'axes parallèles à ceux du repère inertiel (adapté de la réf. [1]).

10.3 Angles d'Euler

Si la résolution des équations d'Euler permet de déterminer l'évolution temporelle de la vitesse angulaire, il reste à connaître comment l'orientation du corps rigide change dans le temps. Dans ce but, on introduit les trois angles d'Euler qui sont les paramètres d'une rotation de l'espace tridimensionnel amenant une orientation de référence du corps rigide sur son orientation au

temps courant: $\mathbf{O}(t) \in \text{SO}(3)$. La figure 10.7 montre comment définir les trois angles d'Euler. Ces angles sont ceux de trois rotations successives.

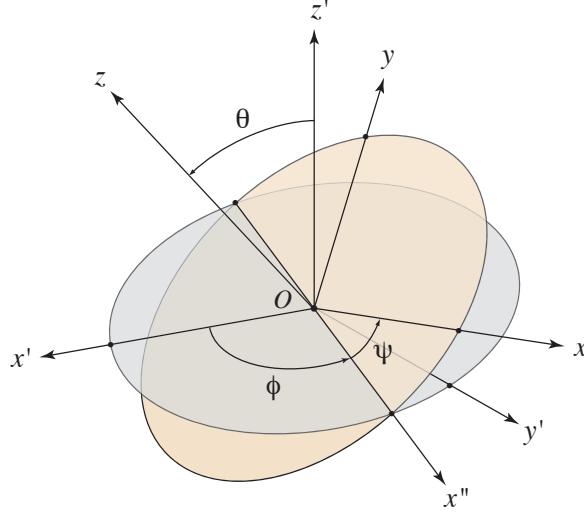


Figure 10.7: Schéma de définition des trois angles d'Euler (ϕ, θ, ψ) par trois rotations successives.

La première rotation d'un angle ϕ , appelé *l'angle de précession*, s'effectue autour de l'axe Oz' d'après

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_x'' & \mathbf{u}_y'' & \mathbf{u}_z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x' & \mathbf{u}_y' & \mathbf{u}_z' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.99)$$

Une deuxième rotation d'un angle θ , appelé *l'angle de nutation*, s'effectue autour de l'axe Ox'' et fait basculer l'axe Oz' vers un nouvel axe Oz''' qui deviendra l'axe Oz :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_x''' & \mathbf{u}_y''' & \mathbf{u}_z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x'' & \mathbf{u}_y'' & \mathbf{u}_z'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (10.100)$$

Enfin, une troisième rotation d'un angle ψ , appelé *l'angle de rotation propre*, s'effectue autour de l'axe $Oz''' = Oz$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x''' & \mathbf{u}_y''' & \mathbf{u}_z''' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.101)$$

Par conséquent, le changement de coordonnées prend la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (10.102)$$

qui définit la rotation en termes de trois matrices de rotation simples:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{O}_\phi \cdot \mathbf{O}_\theta \cdot \mathbf{O}_\psi \cdot \mathbf{r} \equiv \mathbf{O} \cdot \mathbf{r} \quad (10.103)$$

Nous pouvons maintenant obtenir le vecteur de vitesse angulaire dans le repère attaché au corps rigide en termes des dérivées par rapport au temps des trois angles d'Euler, en partant de sa définition (10.18):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}' &= \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{O} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{O} \cdot (\mathbf{O}_\psi^T \cdot \mathbf{O}_\theta^T \cdot \mathbf{O}_\phi^T \cdot \dot{\mathbf{O}}_\phi \cdot \mathbf{O}_\theta \cdot \mathbf{O}_\psi + \mathbf{O}_\psi^T \cdot \mathbf{O}_\theta^T \cdot \dot{\mathbf{O}}_\theta \cdot \mathbf{O}_\psi + \mathbf{O}_\psi^T \cdot \dot{\mathbf{O}}_\psi) \cdot \mathbf{r} \end{aligned} \quad (10.104)$$

Après un calcul systématique des trois termes qui composent cette expression, nous obtenons dans le repère formé par les trois axes principaux d'inertie:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta \end{array} \right. \quad + \dot{\psi} \quad (10.105)$$

Réciproquement, les dérivées temporelles des trois angles d'Euler sont déterminées par les trois composantes de la vitesse angulaire d'après

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} = \omega_1 \cos \psi - \omega_2 \sin \psi \\ \dot{\phi} = \frac{1}{\sin \theta} (\omega_1 \sin \psi + \omega_2 \cos \psi) \\ \dot{\psi} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\omega_1 \sin \psi + \omega_2 \cos \psi) + \omega_3 \end{array} \right. \quad (10.106)$$

qui forment un système de trois équations différentielles couplées pouvant être intégrées une fois que les dépendances temporelles $[\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)]$ sont connues.

Remarque: Dans le cas de la toupie libre asymétrique, on peut utiliser le fait que le moment cinétique est conservé dans le repère $Ox'y'z'$. En le fixant parallèle à l'axe Oz' selon $\mathbf{L}' = (0, 0, L)$, la rotation d'éq. (10.102) nous donne le moment cinétique dans le repère attaché au corps rigide $\mathbf{L} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{L}'$ et l'éq. (10.36) fait le lien avec la vitesse angulaire

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 \omega_1 = L \sin \theta \sin \psi \\ I_2 \omega_2 = L \sin \theta \cos \psi \\ I_3 \omega_3 = L \cos \theta \end{array} \right. \quad (10.107)$$

Ces équations déterminent directement deux des angles d'Euler en termes de la vitesse angulaire

$$\cos \theta = \frac{I_3}{L} \omega_3 \quad (10.108)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{I_1 \omega_1}{I_2 \omega_2} \quad (10.109)$$

tandis que le troisième est obtenu après intégration de l'équation différentielle pour ϕ qui s'écrit

$$\dot{\phi} = L \frac{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2}{I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2} \quad (10.110)$$

Cette dernière s'intègre en termes des fonctions "theta" qui sont intimement liées aux fonctions elliptiques de Jacobi [2, 3].

On peut également obtenir le vecteur de la vitesse angulaire dans le repère $Ox'y'z'$ parallèle au repère inertiel en appliquant la rotation (10.102) pour obtenir

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega'_x = \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi \\ \omega'_y = \dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi \\ \omega'_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{array} \right. \quad (10.111)$$

10.4 Formulations lagrangienne et hamiltonienne

Grâce aux relations (10.105) entre la vitesse angulaire dans le repère des axes principaux d'inertie et les angles d'Euler, nous pouvons obtenir l'expression de la fonction lagrangienne qui détermine le mouvement de rotation du corps rigide. En utilisant l'expression (10.21) de l'énergie cinétique

$$2T = I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 \quad (10.112)$$

nous obtenons

$$2T = (\dot{\theta} \ \dot{\phi} \ \dot{\psi}) \cdot \mathbf{g} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (10.113)$$

en termes de la matrice

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} I_1 \cos^2 \psi + I_2 \sin^2 \psi & (I_1 - I_2) \sin \theta \sin \psi \cos \psi & 0 \\ (I_1 - I_2) \sin \theta \sin \psi \cos \psi & (I_1 \sin^2 \psi + I_2 \cos^2 \psi) \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta & I_3 \cos \theta \\ 0 & I_3 \cos \theta & I_3 \end{pmatrix} \quad (10.114)$$

La fonction lagrangienne décrivant la rotation du corps rigide s'écrit donc

$$L = T - U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\theta} & \dot{\phi} & \dot{\psi} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{g} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} - U(\theta, \phi, \psi) \quad (10.115)$$

où U est l'énergie potentielle due au couple de forces extérieures.

Les impulsions généralisées associées aux trois angles d'Euler se définissent par les relations suivantes:

$$\begin{cases} p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \omega_1 \cos \psi - I_2 \omega_2 \sin \psi \\ p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \omega_1 \sin \theta \sin \psi + I_2 \omega_2 \sin \theta \cos \psi + I_3 \omega_3 \cos \theta \\ p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 \omega_3 \end{cases} \quad (10.116)$$

Réiproquement, les trois composantes du moment cinétique sont données en termes des impulsions généralisées d'après

$$\begin{cases} L_1 = I_1 \omega_1 = p_\theta \cos \psi + \frac{\sin \psi}{\sin \theta} (p_\phi - p_\psi \cos \theta) \\ L_2 = I_2 \omega_2 = -p_\theta \sin \psi + \frac{\cos \psi}{\sin \theta} (p_\phi - p_\psi \cos \theta) \\ L_3 = I_3 \omega_3 = p_\psi \end{cases} \quad (10.117)$$

La fonction hamiltonienne définie par

$$H \equiv \dot{\theta} p_\theta + \dot{\phi} p_\phi + \dot{\psi} p_\psi - L \quad (10.118)$$

prend donc la forme

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_\theta & p_\phi & p_\psi \end{pmatrix} \cdot \mathbf{g}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\phi \\ p_\psi \end{pmatrix} + U(\theta, \phi, \psi) \quad (10.119)$$

avec la matrice inverse

$$\mathbf{g}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 \psi}{I_1} + \frac{\sin^2 \psi}{I_2} & \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \frac{\cos \psi \sin \psi}{\sin \theta} & - \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \frac{\cos \psi \sin \psi \cos \theta}{\sin \theta} \\ \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \frac{\cos \psi \sin \psi}{\sin \theta} & \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\sin^2 \psi}{I_1} + \frac{\cos^2 \psi}{I_2} \right) & - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\sin^2 \psi}{I_1} + \frac{\cos^2 \psi}{I_2} \right) \\ - \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \frac{\cos \psi \sin \psi \cos \theta}{\sin \theta} & - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\sin^2 \psi}{I_1} + \frac{\cos^2 \psi}{I_2} \right) & \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\sin^2 \psi}{I_1} + \frac{\cos^2 \psi}{I_2} \right) + \frac{1}{I_3} \end{pmatrix} \quad (10.120)$$

En principe, l'intégration des équations d'Euler-Lagrange ou des équations d'Hamilton permet alors d'obtenir directement les angles d'Euler en fonction du temps et, par conséquent, la dépendance temporelle de la rotation $\mathbf{O}(t) \in \text{SO}(3)$.

10.5 La toupie symétrique pesante de Lagrange

10.5.1 Formulation du problème et ses constantes du mouvement

Considérons une toupie symétrique dans le champ de gravité terrestre et attaché à un point fixe O (voir fig. 10.8).

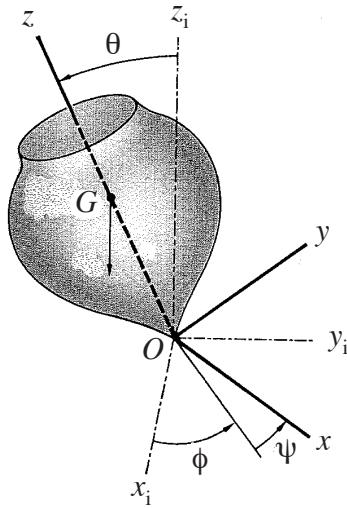


Figure 10.8: Toupie symétrique pesante (adapté de la réf. [1]).

Comme précédemment un repère est attaché à la toupie, mais son origine est ici choisie comme étant le point fixe O . Le tenseur d'inertie \mathbf{I} est donc calculé vis-à-vis du point fixe O à la place du centre de masse. La diagonalisation du tenseur d'inertie permet de déterminer les trois axes principaux d'inertie qui sont choisis comme les trois axes du repère $Oxyz$ attaché à la toupie. Comme celle-ci est symétrique nous aurons $I_1 = I_2$. Par la symétrie de la toupie, son centre de masse (c'est-à-dire de gravité G) se trouve sur le troisième axe principal d'inertie associés à I_3 et choisi comme l'axe Oz . Supposons que le vecteur \overrightarrow{OG} soit de longueur $l = \|\overrightarrow{OG}\|$. D'après les éqs. (10.105), l'énergie cinétique est donnée par

$$T = \frac{1}{2}I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 \quad (10.121)$$

$$= \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (10.122)$$

tandis que l'énergie potentielle vaut

$$U = MgZ_i = Mgl \cos \theta \quad (10.123)$$

La fonction lagrangienne s'écrit alors

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - Mgl \cos \theta \quad (10.124)$$

Elle possède trois intégrales premières:

(1) Comme les liaisons sont indépendantes du temps, la fonction lagrangienne ne dépend pas explicitement au temps $\partial_t L = 0$ et l'énergie totale est conservée

$$E \equiv T + U = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + Mgl \cos \theta \quad (10.125)$$

(2) La fonction lagrangienne ne dépend pas de l'angle ϕ de précession, $\partial_\phi L = 0$, à cause de la symétrie cylindrique du système autour de l'axe vertical Oz_i passant par le point d'attache O . Par conséquent, l'angle ϕ de précession est une variable cyclique et la grandeur

$$L_{z0} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + I_3 \dot{\psi} \cos \theta \quad (10.126)$$

est conservée. Il s'agit de la composante verticale du moment cinétique dans le repère inertiel.

(3) De plus, la fonction lagrangienne ne dépend pas de l'angle ψ de rotation propre, $\partial_\psi L = 0$, qui est donc aussi une variable cyclique. La grandeur conservée est ici

$$I_3 \omega_{30} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \quad (10.127)$$

qui correspond à la vitesse angulaire projetée sur le troisième axe principal d'inertie, ω_3 . Comme le système possède autant d'intégrales premières que de degrés de liberté, il est intégrable par quadratures.

10.5.2 Solutions générales

Tout d'abord, la troisième des constantes du mouvement peut être substituée dans la première et la deuxième qui deviennent:

$$E = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}\omega_{30}^2 + Mgl \cos \theta \quad (10.128)$$

$$L_{z0} = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 \omega_{30} \cos \theta \quad (10.129)$$

En éliminant $\dot{\phi}$ entre ces expressions, l'énergie prend la forme

$$\frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(L_{z0} - I_3 \omega_{30} \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta = E - \frac{I_3}{2} \omega_{30}^2 \quad (10.130)$$

qui constitue une équation différentielle pour l'angle θ . Si l'on définit la variable

$$z \equiv \cos \theta \quad (10.131)$$

qui est la hauteur du centre de gravité G au-dessus du point fixe O , comptée en unité de la longueur l . Si l'on pose

$$\epsilon \equiv \frac{2E - I_3 \omega_{30}^2}{2Mgl} \quad (10.132)$$

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{Mgl}{I_1}} \quad (10.133)$$

$$\lambda \equiv \frac{L_{z0}}{I_1 \omega} \quad (10.134)$$

$$\kappa \equiv \frac{I_3 \omega_{30}}{L_{z0}} \quad (10.135)$$

$$\tau \equiv \omega t \quad (10.136)$$

l'équation (10.130) s'écrit

$$\left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 = 2(\epsilon - z)(1 - z^2) - \lambda^2(1 - \kappa z)^2 \equiv P(z) \quad (10.137)$$

Cette fonction est représentée schématiquement sur la fig. 10.9.

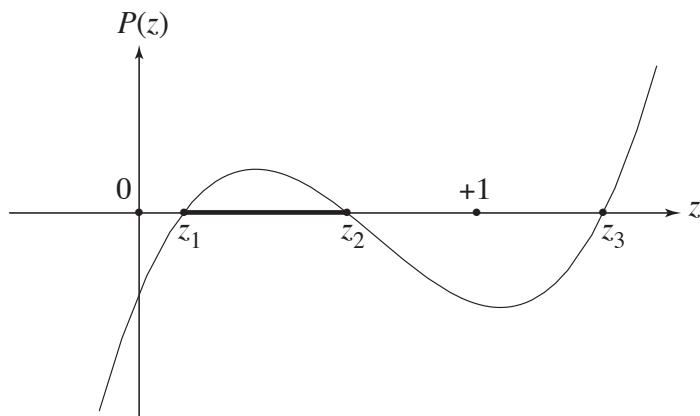


Figure 10.9: Schéma de la fonction $P(z)$ définie par l'éq. (10.137).

Dans les cas où $P(z)$ admet trois racines réelles,

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \quad (10.138)$$

l'équation différentielle s'intègre d'après

$$\int \frac{dz}{\sqrt{2(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}} = \pm \int d\tau = \pm(\tau - \tau_0) \quad (10.139)$$

en termes de fonctions elliptiques de Jacobi en posant

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} - \frac{z_2 - z_1}{2} \cos 2\varphi \quad (10.140)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} z - z_1 &= (z_2 - z_1) \sin^2 \varphi \\ z - z_2 &= -(z_2 - z_1) \cos^2 \varphi \\ z - z_3 &= -(z_3 - z_1)(1 - k^2 \sin^2 \varphi) \end{aligned} \quad (10.141)$$

avec le module de Jacobi:

$$k^2 \equiv \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \quad (10.142)$$

En conséquence, nous avons

$$\int \frac{dz}{\sqrt{2(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}} = \sqrt{\frac{2}{z_3 - z_1}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (10.143)$$

et

$$u \equiv F(\varphi, k) = \pm \omega \sqrt{\frac{z_3 - z_1}{2}} (t - t_0) \quad (10.144)$$

et la solution est donnée par

$$z - z_1 = (z_2 - z_1) \operatorname{sn}^2 \left[\omega \sqrt{\frac{z_3 - z_1}{2}} (t - t_0) \middle| k \right] \quad (10.145)$$

$$z - z_2 = -(z_2 - z_1) \operatorname{cn}^2 \left[\omega \sqrt{\frac{z_3 - z_1}{2}} (t - t_0) \middle| k \right] \quad (10.146)$$

de période

$$T = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{2}{z_3 - z_1}} K(k) \quad (10.147)$$

10.5.3 Discussion des mouvements de précession et de rotation propre

La résolution de l'équation d'évolution pour la variable z détermine les variations temporelles de l'angle θ de nutation. En utilisant l'éq. (10.129), nous constatons que la connaissance de $\theta(t)$ ou de $z(t)$ nous donne le mouvement de l'angle ϕ de précession d'après

$$\dot{\phi} = \frac{L_{z0} - I_3\omega_{30}z}{I_1(1 - z^2)} \quad (10.148)$$

La précession de la toupie s'effectue toujours dans le même sens ou subit des changements de direction selon la valeur de

$$z_* = \frac{L_{z0}}{I_3\omega_{30}} \quad (10.149)$$

vis-à-vis de l'intervalle de variation $z_1 \leq z \leq z_2$. Si $z_* \notin [z_1, z_2]$, le signe de $\dot{\phi}$ ne change pas et la précession se poursuit dans le même sens avec le mouvement de nutation causé par les oscillations de $z(t)$ dans l'intervalle $[z_1, z_2]$ comme montré sur la fig. 10.10a. Par contre, si $z_* \in [z_1, z_2]$, $\dot{\phi}$ change de signe lors d'une oscillation de $z(t)$ et la précession rebrousse chemin durant un intervalle de temps dans chaque période pour continuer ensuite dans le sens de la précession moyenne comme la fig. 10.10b le montre.

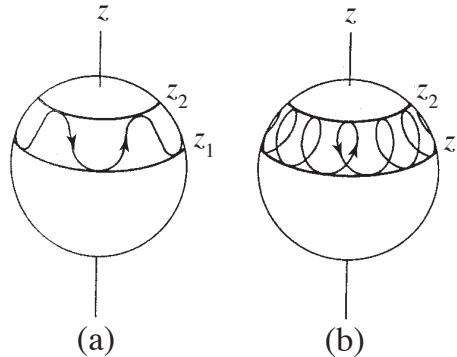


Figure 10.10: Schéma des deux principaux types de mouvements de précession-nutation de la toupie symétrique pesante de Lagrange: (a) si $z_* \notin [z_1, z_2]$, (b) si $z_* \in [z_1, z_2]$ (adapté de la réf. [1]).

Par ailleurs, le mouvement de rotation propre de l'angle ψ est aussi déterminé par l'évolution temporelle de la variable $z(t)$. En effet, les éqs. (10.127) et (10.129) se combinent pour donner

$$\dot{\psi} = \omega_{30} + \frac{z}{I_1(1 - z^2)}(I_3\omega_{30}z - L_{z0}) \quad (10.150)$$

montrant que la rotation propre est également entraînée par l'angle $\theta(t)$ de nutation.

10.5.4 Le cas particulier analogue au pendule simple

Si l'on limite les possibilités de rotation du corps rigide autour de son point fixe O à des mouvements autour d'un axe horizontal, nous trouvons une description plus réaliste d'un pendule simple dans lequel la masse n'est pas concentrée en un point matériel au bout d'une tige rigide de masse négligeable mais distribuée. La figure 10.11 montre un exemple d'un tel corps rigide tournant autour d'un axe horizontal. Il s'agit donc d'un système à un seul degré de liberté qui est l'angle θ que fait le vecteur \overrightarrow{OG} entre l'axe O et le centre de gravité G et la verticale descendante.

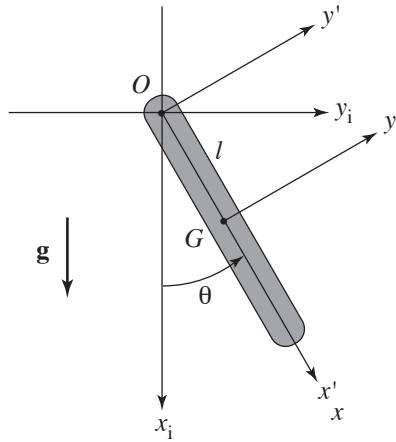


Figure 10.11: Pendule simple formé par un corps rigide de masse distribuée et tournant autour d'un axe O . G désigne le centre de gravité.

D'après les considérations de la section 10.1, l'énergie cinétique de ce système se compose, d'une part, de l'énergie cinétique du centre de masse se comportant comme un point matériel de masse totale M et, d'autre part, de l'énergie cinétique de rotation autour du centre de masse G :

$$T = T_{\text{c.m.}} + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}M(\dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 \quad (10.151)$$

Le moment d'inertie est évalué autour du centre de gravité G dans la direction de l'axe de rotation:

$$I_G = \sum_a m_a(x_a^2 + y_a^2) \quad (10.152)$$

dans le repère Gxy attaché au corps rigide. Or la position du centre de gravité est aussi déterminée par l'angle θ d'après:

$$\begin{cases} X_i = l \cos \theta \\ Y_i = l \sin \theta \end{cases} \quad (10.153)$$

où $l = \|\overrightarrow{OG}\|$ est la distance entre l'axe de rotation et le centre de gravité. Par conséquent, l'énergie cinétique s'écrit

$$T = \frac{1}{2}(Ml^2 + I_G)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 \quad (10.154)$$

où le coefficient n'est rien d'autre que le moment d'inertie I_O évalué autour de l'axe de rotation plutôt que du centre de gravité dans le repère $Ox'y'$ attaché au corps rigide toujours:

$$I_O = \sum_a m_a(x'_a)^2 + y'_a^2 \quad (10.155)$$

En effet, comme $x'_a = l + x_a$ et $y'_a = y_a$, nous avons

$$I_O = \sum_a m_a [(l + x_a)^2 + y_a^2] = Ml^2 + 2l \underbrace{\sum_a m_a x_a}_{=0} + I_G \quad (10.156)$$

où le terme croisé s'annule par la définition même du centre de gravité. Dans le repère Gxy où le centre de gravité se trouve à l'origine, nous avons nécessairement que $\sum_a m_a x_a = \sum_a m_a y_a = 0$. Dès lors, nous trouvons que $I_O = Ml^2 + I_G$ où $M = \sum_a m_a$ est la masse totale.

Par ailleurs, l'énergie potentielle est celle du centre de gravité:

$$U = -MgX_i = -Mgl \cos \theta \quad (10.157)$$

La fonction lagrangienne est donc de la forme

$$L = T - U = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 + Mgl \cos \theta \quad (10.158)$$

Il s'agit d'une fonction lagrangienne analogue à celle du pendule simple (cf. chapitre 4). Cependant, la fréquence d'oscillation est ici donnée par

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgl}{I_O}} \quad (10.159)$$

qui généralise au corps rigide la fréquence $\omega = \sqrt{g/l}$ pour un point matériel se déplaçant au bout d'une tige de masse négligeable. Ici, la fréquence dépend de la distribution de masse autour de l'axe de rotation au travers du moment d'inertie qui peut prendre différentes valeurs pour une masse totale M donnée et une longueur l donnée entre l'axe de rotation et le centre de masse selon la forme du corps rigide et sa densité de masse.

On remarquera que la fonction lagrangienne (10.124) de la toupie symétrique pesante se réduit à celle du pendule simple (10.158) lorsque seule la rotation d'angle de nutation θ est

admise $\dot{\phi} = \dot{\psi} = 0$ (ou si $L_{z0} = 0$ et $\omega_{30} = 0$) et modulo le changement de convention $\theta \rightarrow \pi - \theta$ de cet angle avec $I_1 = I_O$.

On notera de même l'analogie avec le pendule sphérique lorsque $\dot{\psi} = 0$ (ou bien $\omega_{30} = 0$).

Par ailleurs, la fonction lagrangienne d'un pendule multiple composé de corps rigides articulés autour d'axes de rotation parallèles entre eux peut s'écrire par des considérations semblables se basant sur les expressions (10.151) pour l'énergie cinétique et (10.157) pour l'énergie potentielle.

10.6 La toupie pesante en toute généralité

10.6.1 Les équations d'Euler-Poisson

Soit un corps rigide en mouvement autour d'un point d'attache O dans le champ de gravité terrestre (voir fig. 10.12). $Ox_iy_iz_i$ est un repère inertiel dont l'origine est le point d'attache O et $Oxyz$ est un repère orthonormé attaché au corps rigide. Ce dernier est choisi en prenant ses trois axes comme les axes principaux d'inertie de la toupie du tenseur d'inertie calculé par rapport au point fixe O . En effet, comme le tenseur d'inertie vis-à-vis du point d'attache O est un tenseur réel symétrique, il admet trois vecteurs propres formant une base orthonormée

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{u}_j = I_j \mathbf{u}_j \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_k = \delta_{jk} \quad (10.160)$$

qui est choisie pour définir le repère $Oxyz = Ox_1x_2x_3$ tournant avec la toupie.

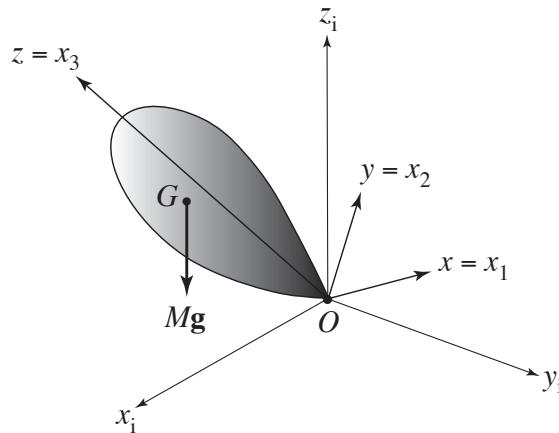


Figure 10.12: Toupie pesante en mouvement autour du point d'attache O . G désigne le centre de gravité.

Dans ce repère tournant, la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ obéit aux équations d'Euler (10.40). Le

couple de force est donné par

$$\mathbf{N}^{(\text{ext})} = \mathbf{R}_0 \times (Mg\boldsymbol{\gamma}) \quad (10.161)$$

où $\mathbf{R}_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$ désigne le vecteur de position du centre de gravité G dans la base $Oxyz$ tandis que $\boldsymbol{\gamma}$ est un vecteur unitaire dans la direction de la force de gravité. Comme ce vecteur est considéré dans le repère tournant, il change dans le temps sous l'effet de la rotation de la toupie selon

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix} = \mathbf{O}^T(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (10.162)$$

En dérivant par rapport au temps, nous trouvons

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{O}}^T \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{O}}^T \cdot \mathbf{O} \cdot \boldsymbol{\gamma} \quad (10.163)$$

Comme la vitesse angulaire dans le repère tournant est donnée par l'éq. (10.18) et que

$$\dot{\mathbf{O}}^T \cdot \mathbf{O} = -\mathbf{O}^T \cdot \dot{\mathbf{O}} \quad (10.164)$$

d'après la définition $\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O} = \mathbf{1}$ d'une matrice orthogonale, nous obtenons l'équation du mouvement

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} \quad (10.165)$$

pour le vecteur unitaire du champ de gravité dans le repère tournant.

Le mouvement de la toupie pesante est donc régi par les équations couplées

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = -\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) + Mg\mathbf{R}_0 \times \boldsymbol{\gamma} \\ \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} \end{array} \right. \quad (10.166)$$

Il s'agit d'un système de six équations différentielles ordinaires qui portent le nom d'*équations*

d'Euler-Poisson [4]

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + Mg(Y_0\gamma_3 - Z_0\gamma_2) \\ I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 + Mg(Z_0\gamma_1 - X_0\gamma_3) \\ I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + Mg(X_0\gamma_2 - Y_0\gamma_1) \\ \dot{\gamma}_1 = \gamma_2\omega_3 - \gamma_3\omega_2 \\ \dot{\gamma}_2 = \gamma_3\omega_1 - \gamma_1\omega_3 \\ \dot{\gamma}_3 = \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1 \end{array} \right. \quad (10.167)$$

Les six variables du système sont les trois composantes de la vitesse angulaire ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$) et les trois composantes de la direction de la gravité ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$) dans le repère tournant $Ox_1x_2x_3$. Les paramètres qui caractérisent le système sont les trois moments d'inertie (I_1, I_2, I_3) associés aux axes principaux d'inertie vis-à-vis du point fixe O et les trois composantes (X_0, Y_0, Z_0) du centre de gravité G dans le repère $Ox_1x_2x_3$, la masse totale de la toupie M et l'accélération de la gravité g .

Ces équations ont fait l'objet de nombreuses études depuis les travaux d'Euler au XVIII^e siècle. Plusieurs cas d'intégrabilité par quadratures ont été découverts.

10.6.2 Les constantes du mouvement

Tout d'abord, le système possède plusieurs constantes du mouvement valables dans tous les cas.

(1) **Le module du vecteur unitaire** est toujours conservé

$$\gamma^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad (10.168)$$

puisque les trois dernières équations d'Euler-Poisson, c'est-à-dire l'éq. (10.165), ne font qu'exprimer la rotation (10.162) de ce vecteur par une transformation orthogonale qui maintient sa norme constante.

(2) **L'énergie totale de la toupie pesante** est aussi conservée

$$E \equiv \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) - Mg(X_0\gamma_1 + Y_0\gamma_2 + Z_0\gamma_3) \quad (10.169)$$

puisque la rotation autour d'un point d'attache est supposée sans frottement et que la résistance de l'air est négligée.

(3) La composante du moment cinétique dans la direction du champ de gravité est une autre constante du mouvement

$$C \equiv \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\gamma} = I_1\omega_1\gamma_1 + I_2\omega_2\gamma_2 + I_3\omega_3\gamma_3 \quad (10.170)$$

provenant de la symétrie cylindrique du système autour d'un axe vertical passant par le point d'attache O . En effet, nous avons d'après les éqs. (10.38) et (10.165) que

$$\frac{dC}{dt} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{N}^{(\text{ext})} = Mg\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{R}_0 \times \boldsymbol{\gamma}) = 0 \quad (10.171)$$

Dans l'espace des six variables, ces trois constantes du mouvement contraignent les trajectoires de conditions initiales données à se mouvoir dans un sous-espace (une hypersurface) de dimension trois, ce qui ne garantit pas l'intégrabilité complète sans constante du mouvement supplémentaire.

10.6.3 Les cas d'intégrabilité par quadrature

Une quatrième constante du mouvement assurant l'intégrabilité complète n'existe que dans des cas particuliers remarquables qui ont été découverts depuis le XVIIIe siècle [4]:

(1) Le cas d'Euler (1750): C'est le cas où le point d'attache O coïncide avec le centre de gravité $G = O$:

$$X_0 = Y_0 = Z_0 = 0 \quad (10.172)$$

Il s'agit en fait du problème de la toupie libre. La quatrième constante du mouvement est donc le carré du moment cinétique

$$K \equiv \mathbf{L}^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 \quad (10.173)$$

comme nous l'avons vu dans la section 10.2. Dans ce cas, les trois premières équations d'Euler-Poisson (10.167) forment le système autonome des trois équations d'Euler (10.42). Les trois dernières déterminent le mouvement du vecteur unitaire $\boldsymbol{\gamma}(t)$ qui est entraîné par la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}(t)$ obéissant aux trois équations d'Euler seulement.

Des trois constantes du mouvement mentionnées ci-dessus, seule l'énergie est relevante pour les trois équations d'Euler puisque ni le module du vecteur $\boldsymbol{\gamma}$ ni la constante $C = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\gamma}$ ne les concernent directement. L'énergie $E = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$ et le carré du moment cinétique \mathbf{L}^2 sont donc deux constantes du mouvement qui réduisent les trois équations d'Euler à une seule équation différentielle toujours intégrable par quadrature comme nous l'avons vu à la section 10.2.

(2) Le cas de Lagrange (1788): C'est le cas d'une toupie symétrique dont le centre de gravité se trouve sur le troisième axe principal d'inertie :

$$I_1 = I_2 \quad \text{et} \quad X_0 = Y_0 = 0 \quad (10.174)$$

Dans ce cas, la quatrième constante du mouvement est la projection du moment cinétique sur le troisième axe principal d'inertie de la toupie

$$K \equiv \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_3 = I_3 \omega_3 \quad (10.175)$$

proportionnelle à la troisième composante de la vitesse angulaire dans le repère tournant, comme nous l'avons vu à la section 10.5 avec l'éq. (10.127).

Grâce à cette quatrième constante du mouvement, le problème de la toupie symétrique pesante de Lagrange est complètement intégrable par quadratures comme démontré à la section 10.5.

(3) Le cas de Sofia Kovalevskaya (1889): Cet autre cas d'intégrabilité complète a été découvert à la fin du XIXe siècle par une approche novatrice initiée par Sofia Kovalevskaya [5] et basée sur le développement des solutions en séries de la forme

$$\frac{1}{(t - t_0)^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n \quad (10.176)$$

dans le plan complexe du temps. Pareilles fonctions ont une singularité en $t = t_0$ si $\alpha > 0$. En imposant qu'il existe une règle de déduction des coefficients c_n à partir des précédents, Sofia Kovalevskaya obtint les conditions

$$I_1 = I_2 = 2I_3 \quad \text{et} \quad Z_0 = 0 \quad (10.177)$$

et, dans ce cas, la quatrième constante du mouvement

$$K \equiv |(\omega_1 + i\omega_2)^2 + \lambda(\gamma_1 + i\gamma_2)|^2 \quad (10.178)$$

avec $\lambda \equiv 2\frac{Mg}{I_1}\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}$. Ce résultat se démontre en utilisant la symétrie cylindrique autour de l'axe Ox_3 . Le fait que cette grandeur est du 4e degré en les variables ω_1 et ω_2 montre que ce cas d'intégrabilité est qualitativement différent des cas d'Euler et de Lagrange où les constantes du mouvement restent du 2e degré en les variables.

La méthode de résolution inventée par Sofia Kovalevskaya a influencé les travaux de Paul Painlevé sur l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires et continue d'être une source d'inspiration de nos jours [6, 7].

Remarque: En 1900, un cas d'intégrabilité partielle limitée à une hypersurface particulière de l'espace des variables est identifié par Goryachev et Chaplygin sous les conditions $I_1 = I_2 = 4I_3$ et $Z_0 = 0$ [4]. L'hypersurface est $I_1\omega_1\gamma_1 + I_2\omega_2\gamma_2 + I_3\omega_3\gamma_3 = 0$ dans ce cas particulier.

Aucun autre cas d'intégrabilité complète n'est connu. Comme le système possède six variables et trois constantes du mouvement, le flot est restreint à un sous-espace de dimension trois où l'absence de constante du mouvement supplémentaire impliquerait l'existence de comportements chaotiques décrits dans le chapitre suivant.

Références

- [1] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd edition (Addison-Wesley, Reading MA, 1980).
- [2] L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique* (Editions MIR, Moscou, 1982).
- [3] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New-York, 1972).
- [4] V. I. Arnold, Editor, *Dynamical Systems III, Encyclopedia of Mathematical Sciences*, vol. 3 (Springer-Verlag, Berlin, 1988).
- [5] M. Audin, *Souvenirs sur Sofia Kovalevskaya* (Calvage et Mounet, Paris, 2008).
- [6] L. Haine and E. Horozov, *A Lax pair for Kowalevski's top*, Physica D **29** (1987) 173-180.
- [7] M. Adler and P. Van Moerbeke, *The Kowalewski and Hénon-Heiles motions as Manakov geodesic flows on $SO(4)$ - A two-dimensional family of Lax pairs*, Commun. Math. Phys. **113** (1988) 659-700.

Chapitre 11

Systèmes dynamiques et comportements chaotiques

Le but de ce chapitre est de donner un aperçu des développements récents en théorie des systèmes dynamiques, tout spécialement, sur les comportements chaotiques qui se manifestent lorsque le système est non intégrable. Il apparaît en effet que les systèmes complètement intégrables sont exceptionnels et que, typiquement, les systèmes mécaniques à deux degrés de liberté ou plus possèdent moins de constantes du mouvement analytiques que de degrés de liberté. Ce phénomène fut découvert par Henri Poincaré vers la fin du XIXe siècle, mais ce n'est que depuis les années quatre-vingt que l'étude des comportements chaotiques a pris son essor grâce au progrès en technologie des ordinateurs.

L'immense contribution de Poincaré a été de transformer l'étude des systèmes dynamiques en une géométrie des trajectoires dans l'espace des phases.

11.1 Système dynamique et espace des phases

Considérons un système d'équations différentielles ordinaires décrivant l'évolution temporelle d'un système:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{C}(\mathbf{X}) \quad (11.1)$$

Les variables du système $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ évoluent dans un espace \mathcal{M} de dimension égal au nombre de variables $d = \dim \mathcal{M}$ et qui est appelé *l'espace des phases*. On suppose le système autonome de sorte que le champ de vecteurs $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ est indépendant du temps: $\partial_t \mathbf{C}(\mathbf{X}) = 0$. Par conséquent, le champ de vecteurs remplit l'espace des phases et reste constant dans le temps. Ses vecteurs déterminent la direction que suivent les trajectoires et leur vitesse d'avancement.

D'après le théorème de Cauchy, si le champ de vecteurs satisfait la condition de régularité

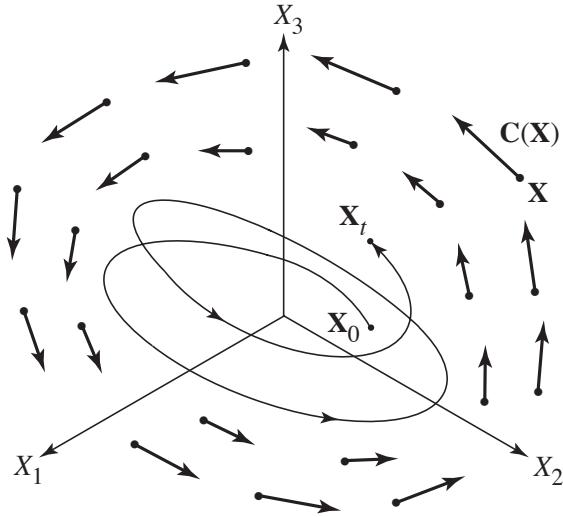


Figure 11.1: Champ de vecteurs dans un espace des phases de dimension trois définissant un système dynamique dont une trajectoire est représentée.

de Lipschitz, la trajectoire issue de conditions initiales choisies comme un point $\mathbf{X}_0 \in \mathcal{M}$ est unique. La solution du système d'équations différentielles (11.1) est donc une fonction univoque du temps et des conditions initiales $\mathbf{X}_0 = (X_{10}, X_{20}, \dots, X_{d0})$:

$$\mathbf{X}_0 \in \mathcal{M} \longrightarrow \mathbf{X}_t = \Phi^t(\mathbf{X}_0) \in \mathcal{M} \quad (11.2)$$

A chaque valeur du temps $t \in \mathbb{R}$, cette fonction est une application de l'espace des phases dans lui-même qui définit ce que l'on appelle un *flot* [1]. Il s'agit d'un groupe continu (groupe de Lie) à un paramètre qui est le temps puisque

$$\Phi^{t_2} \circ \Phi^{t_1} = \Phi^{t_1+t_2}$$

$$(\Phi^t)^{-1} = \Phi^{-t} \quad (11.3)$$

$$\Phi^0 = \mathbf{1}$$

Ce groupe est en correspondance avec le groupe additif des nombres réels sur l'axe du temps.

Une conséquence du théorème de Cauchy est que deux trajectoires distinctes ne peuvent se joindre qu'en des points stationnaires où le champ de vecteurs s'annule:

$$\frac{d\mathbf{X}_*}{dt} = \mathbf{C}(\mathbf{X}_*) = 0 \quad (11.4)$$

Ces points stationnaires jouent donc un rôle spécial et leur identification est primordial pour comprendre la structure de l'ensemble des trajectoires dans l'espace des phases. En dehors

des points stationnaires, des trajectoires voisines voyagent de conserve dans l'espace des phases sans se rejoindre tant que $\|\mathbf{C}(\mathbf{X})\| \neq 0$.

11.2 Stabilité linéaire

Pour se faire une idée du comportement des trajectoires au voisinage d'un état stationnaire, nous pouvons considérer le système linéarisé qui régit l'évolution temporelle des perturbations $\delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_*$. En substituant dans les éqs. (11.1) et en négligeant les termes non-linéaires en $\delta\mathbf{X}$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{X} = \frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\mathbf{X}}(\mathbf{X}_*) \cdot \delta\mathbf{X} = \mathbf{L} \cdot \delta\mathbf{X} \quad (11.5)$$

où \mathbf{L} est la matrice jacobienne du champ de vecteurs évaluée au point stationnaire \mathbf{X}_* .

Si cette matrice admet autant de valeurs propres distinctes qu'il y a de variables, le système linéarisé aura pour solution générale

$$\delta\mathbf{X}(t) = \sum_{j=1}^d c_j e^{s_j t} \mathbf{v}_j \quad (11.6)$$

où les valeurs propres $\{s_j\}$ sont les racines du déterminant caractéristique

$$\det(\mathbf{L} - s \mathbf{1}) = 0 \quad (11.7)$$

correspondant aux vecteurs propres $\{\mathbf{v}_j\}$ tels que

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{v}_j = s_j \mathbf{v}_j \quad (11.8)$$

et les coefficients $\{c_j\}$ sont fixés par les conditions initiales.

Si le système linéarisé admettait des valeurs propres multiples, des solutions particulières de la forme $t^n e^{st}$ pourraient intervenir. Sinon la partie réelle des valeurs propres détermine la stabilité du point stationnaire [1]: si $\operatorname{Re} s_j < 0$ pour toutes les valeurs propres $j = 1, 2, \dots, d$, les perturbations décroissent exponentiellement avec le temps $t \rightarrow +\infty$ et l'état stationnaire est alors *asymptotiquement stable*. Par contre, s'il existe au moins une valeur propre dont la partie réelle est positive, alors la perturbation dans la direction du vecteur propre correspondant sera amplifiée et l'état stationnaire est alors *instable*. Il faut remarquer que l'analyse de stabilité linéaire ne permet pas de conclure lorsque $\operatorname{Re} s_j = 0$ car les termes non-linéaires peuvent tout aussi bien stabiliser ou déstabiliser les perturbations dans pareil cas.

11.3 L'exemple du cerceau en rotation

Considérons le cerceau de rayon l en rotation à la vitesse angulaire ω avec un point matériel de masse m dans le champ de gravité g avec un frottement proportionnel à la vitesse:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta + \omega^2 \sin \theta \cos \theta - \gamma \dot{\theta} \quad (11.9)$$

avec $\gamma > 0$ [1].

Si l'on introduit la variable de vitesse $v \equiv \dot{\theta}$, cette équation différentielle du deuxième ordre peut être remplacée par un système de deux équations du premier ordre de la forme (11.1):

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\frac{g}{l} \sin \theta (1 - \mu \cos \theta) - \gamma v \end{cases} \quad (11.10)$$

avec le paramètre

$$\mu \equiv \frac{l\omega^2}{g} \quad (11.11)$$

qui augmente avec la vitesse de rotation ω . Les états stationnaires sont identifiés dans l'espace des phases (θ, v) comme les points où $\dot{\theta} = \dot{v} = 0$. Ces points se trouvent en $v = 0$. Si $0 \leq \mu < 1$, il existe deux états stationnaires en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Deux nouveaux états stationnaires $\theta = \pm \arccos(1/\mu)$ apparaissent si $\mu > 1$ lorsque la vitesse de rotation est suffisamment grande pour que la force centrifuge stabilise des positions du point matériel en dehors de l'axe de rotation.

Le système linéarisé est de la forme

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{\theta} \\ \delta \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \theta \\ \delta v \end{pmatrix} \quad (11.12)$$

avec $\Delta = -(g/l)(\cos \theta - \mu \cos 2\theta)$. Ce système admet des solutions particulières de la forme $\delta\theta, \delta v \sim \exp(st)$ dont le taux de croissance satisfait

$$s^2 + \gamma s - \Delta = 0. \quad (11.13)$$

Si le frottement est négligeable, $\gamma = 0$, les racines sont données par $s = \pm \sqrt{\Delta}$. Pour $\theta = 0$, $\Delta = -(g/l)(1 - \mu)$ de sorte que $s = \pm i\sqrt{(g/l)(1 - \mu)}$ si $0 \leq \mu \leq 1$, mais $s = \pm \sqrt{(g/l)(\mu - 1)}$ si $\mu \geq 1$. La configuration où le point matériel se trouve sur l'axe de rotation est donc stable si la vitesse de rotation reste inférieure au seuil critique $\omega < \sqrt{g/l}$ car les perturbations sont oscillantes dans ce cas. Par contre, cette configuration devient instable dès que le seuil critique est dépassé $\omega > \sqrt{g/l}$ puisqu'une des racines est alors positive, ce qui implique la croissance

de perturbations. Or, c'est à ce seuil critique que les deux nouveaux états stationnaires $\theta = \pm \text{arc cos}(1/\mu)$ apparaissent pour lesquels $\Delta = -(g/l)(\mu - 1/\mu) < 0$ et $s = \pm i\sqrt{(g/l)(\mu - 1/\mu)}$, de sorte que les perturbations sont oscillantes et ces états sont stables. Par conséquent, les nouveaux états stationnaires reprennent la stabilité perdue par la configuration devenue instable au-delà du seuil critique. Ce phénomène de bifurcation est représenté sur la fig. 11.2.

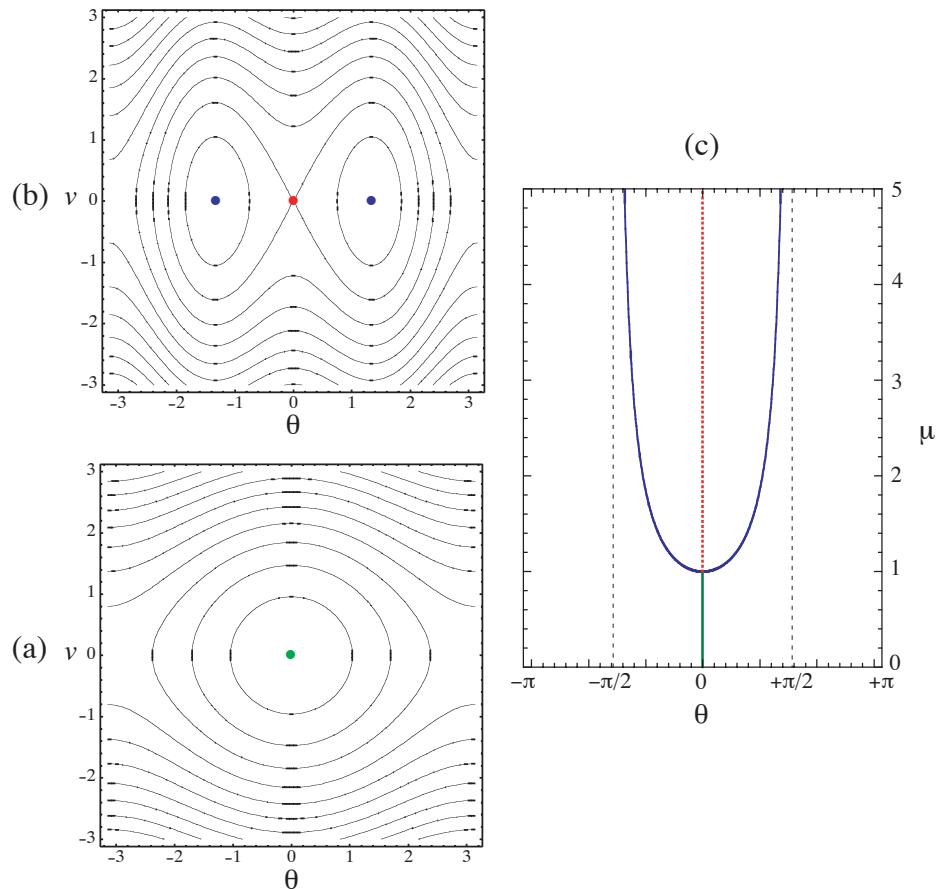


Figure 11.2: Portraits de phases dans le plan (θ, v) pour le cerceau en rotation et sans frottement, $\gamma = 0$: (a) en-dessous du seuil critique pour $\mu = 0,1 < 1$; (b) au-dessus du seuil critique pour $\mu = 4,363 > 1$. (c) Diagramme de bifurcation des états stationnaires en fonction du paramètre de contrôle $\mu = l\omega^2/g$.

En-dessous du seuil critique pour $\mu < 1$, les trajectoires suivent des courbes fermées entourant l'état stationnaire en $\theta = v = 0$ qui est appelé pour cette raison un *point elliptique* ou *centre*. Par contre, les trajectoires forment une structure hyperbolique autour de l'état instable en $\theta = \pm\pi$ et $v = 0$ qui est appelé un *point hyperbolique* ou *col*. Pour $\mu < 1$, le portrait de phases ressemble à celui du pendule simple. Le système admet comme constante du mouvement la

grandeur

$$K = \frac{v^2}{2} + \frac{g}{l} \left(-\cos \theta + \frac{\mu}{4} \cos 2\theta \right) \quad (11.14)$$

Lorsque $K > (g/l)(1 + \mu/4)$, le point matériel effectue un mouvement périodique de rotation complète autour du cerceau soit dans un sens si $v > 0$, soit dans l'autre si $v < 0$.

Au-delà du seuil critique, le point en $\theta = v = 0$ devient lui-même un col et les deux nouveaux points stationnaires sont des centres. Le point peut donc osciller autour de l'un ou l'autre de ces centres en des mouvements périodiques qui brisent la symétrie $\theta \rightarrow -\theta$ du système si $K > (g/l)(-1 + \mu/4)$. Pour $(g/l)(-1 + \mu/4) < K < (g/l)(1 + \mu/4)$, les trajectoires traversent l'axe de rotation sans effectuer de rotation complète autour du cerceau, ce qui ne devient possible que si $K > (g/l)(1 + \mu/4)$.

En présence de frottement si $\gamma > 0$, les mouvements périodiques ne se maintiennent pas et sont amortis puisque K n'est plus une constante du mouvement:

$$\dot{K} = -\gamma v^2 \leq 0 \quad (11.15)$$

Les trajectoires convergent alors vers les états stationnaires en $v = 0$. Si le coefficient de frottement est suffisamment petit, les cols restent des cols tandis que les centres se transforment en états stationnaires asymptotiquement stables avec $s = -(\gamma/2) \pm i\sqrt{|\Delta| - (\gamma/2)^2}$.

11.4 Effets du frottement et de la dissipation

Pour illustrer l'effet de la dissipation, considérons une particule de masse unité en mouvement unidimensionnel en présence de frottement dans le potentiel quartique en double puits (4.193) avec les paramètres $\mu = \lambda > 0$. Les équations de ce système dynamique sont données par

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \gamma v = \mu x(1 - x^2) - \gamma v \end{cases} \quad (11.16)$$

Ce système admet trois états stationnaires en $x = -1$, $x = 0$ et $x = +1$ sur l'axe $v = 0$. Le système linéarisé est de la même forme que dans l'exemple précédent avec $\Delta = \mu(1 - 3x^2)$. Par conséquent, le point à l'origine est un col instable tandis que les points $x = \pm 1$ qui se trouvent au fond des deux puits sont caractérisés par les valeurs propres $s = (-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 8\mu})/2$. Si le frottement est faible, $\gamma < 2\sqrt{2\mu}$, ces points ont des valeurs propres complexes conjuguées avec une partie réelle négative de sorte que les trajectoires voisines convergent asymptotiquement vers chacun d'eux en spiralant et on parle de foyers stables. Ces foyers stables sont des

attracteurs pour la plupart des trajectoires de l'espace des phases à l'exception des trajectoires qui convergeraient vers l'état instable. Le plan de phases (x, v) se divise en deux basins d'attraction associés aux deux états stationnaires en $x = \pm 1$, ce qui est une manifestation du phénomène de brisure de symétrie (voir fig. 11.3).

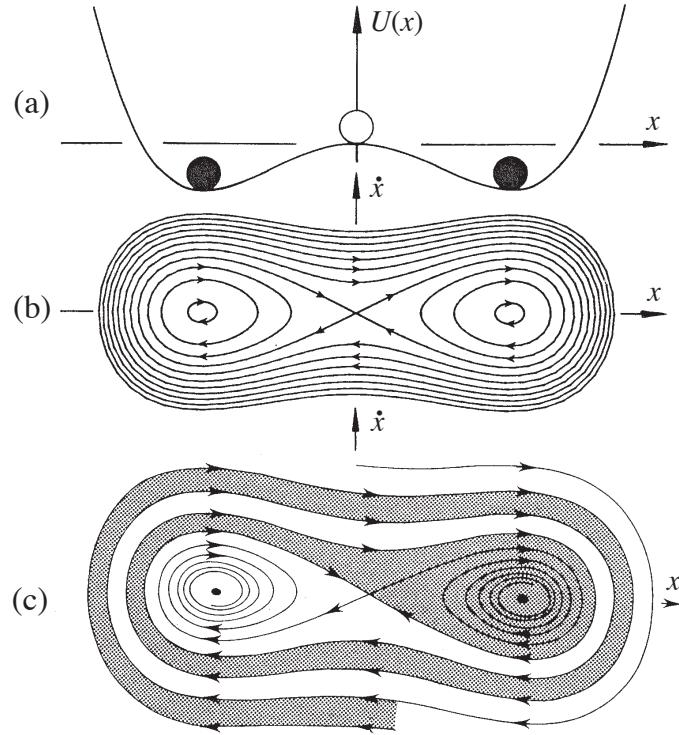


Figure 11.3: (a) Particule dans le potentiel en double puits (4.193). (b) Portrait de phases dans le plan $(x, v = \dot{x})$ en l'absence de frottement pour $\gamma = 0$. (c) Portrait de phases en présence d'un frottement faible tel que $0 < \gamma < 2\sqrt{2\mu}$ (adapté de la réf. [2]).

Lorsque le frottement est fort, $\gamma > 2\sqrt{2\mu}$, les états stationnaires en $x = \pm 1$ ont deux valeurs propres réelles négatives. Ces états sont aussi asymptotiquement stables mais les trajectoires y convergent sans spiraler comme pour l'oscillateur sur-amorti. Dans ce cas, ces attracteurs sont appelés des noeuds stables.

11.5 Systèmes conservatifs et dissipatifs

Une propriété fondamentale de la dynamique concerne l'évolution temporelle des volumes dans l'espace des phases. Nous avions vu que la densité de probabilité

$$\rho_t = \frac{dP_t}{dV_t} \quad (11.17)$$

évolue dans le temps d'après l'équation de continuité qui exprime la conservation locale de la probabilité dans l'espace des phases: $dP_t = dP_0$. Le long des trajectoires du flot du système (11.1), cette densité obéit à l'équation

$$\frac{d}{dt} \ln \rho = -\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} \quad (11.18)$$

dont l'intégrale

$$\rho_t = \rho_0 \exp \left(- \int_0^t \operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} d\tau \right) \quad (11.19)$$

montre qu'un élément de volume change selon

$$dV_t = dV_0 \exp \left(\int_0^t \operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} d\tau \right) \quad (11.20)$$

en conséquence de la conservation de la probabilité $dP_t = dP_0$. Par conséquent, les volumes de l'espace des phases sont conservés si $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} = 0$, ce qui est l'énoncé du théorème de Liouville valable pour les systèmes hamiltoniens. Par contre, les volumes ne sont pas conservés si $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} \neq 0$.

Dans les systèmes entièrement instables comme par exemple $\dot{x} = +x$, la divergence $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}}$ est positive, mais de tels systèmes décrivent des situations explosives tellement éphémères qu'elles sont exceptionnelles car leur temps de vie est limité. Sinon, la plupart des systèmes se rangent dans l'une des deux classes suivantes [1]:

A. les systèmes conservatifs pour lesquels

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} = 0 \quad (11.21)$$

B. les systèmes dissipatifs pour lesquels

$$\frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} d\tau < 0 \quad \forall t > t_0 > 0 \quad (11.22)$$

Dans les systèmes dissipatifs, les volumes de l'espace des phases se contractent sans cesse pour $t \rightarrow +\infty$:

$$dV_t < dV_0 \quad \forall t > t_0 > 0 \quad (11.23)$$

Par conséquent, les systèmes dissipatifs possèdent des attracteurs de volume égal à zéro dans l'espace des phases.

Exemples: Les systèmes hamiltoniens sont des exemples de systèmes conservatifs en vertu du théorème de Liouville. Cependant, il existe des systèmes conservatifs qui ne sont pas hamiltoniens comme le flot des trajectoires suivies par des éléments de fluide dans un fluide incompressible

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad \text{avec } \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (11.24)$$

avec $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$.

Par ailleurs, des systèmes avec des forces de frottement sont typiquement des systèmes dissipatifs. Par exemple, pour le système (11.10),

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} = -\gamma < 0 \quad (11.25)$$

si $\gamma > 0$, ce qui implique que tout domaine évolue dans le plan de phases avec une diminution de son aire au taux de contraction γ . Il en est de même pour le système (11.16).

11.6 Dynamique de population

Une classe importante de systèmes dynamiques est formée par les systèmes d'équations différentielles qui décrivent l'évolution temporelle des nombres d'individus d'une espèce, par exemple, dans un écosystème. Ces nombres changent par une succession d'événements comme les naissances ou les morts ou par les réactions entre molécules dans un système chimique.

Un exemple de tels systèmes est le modèle de Verhulst où la population évolue par

$$\text{les naissances: } X \xrightarrow{k_1} 2X \quad (11.26)$$

$$\text{et les morts: } X \xrightarrow{k_2} \emptyset \quad (11.27)$$

aux taux k_1 et k_2 . Si les ressources sont limitées le taux de croissance diminuera à mesure que la population augmente

$$k_1 = a - bX \quad (11.28)$$

avec $a, b > 0$. L'équation d'évolution appelée *l'équation logistique* est donc donnée par

$$\frac{dX}{dt} = k_1 X - k_2 X = kX \left(1 - \frac{X}{N}\right) \quad (11.29)$$

avec $N = (a/b) - k_2$ et $k = k_1$ [1]. La solution analytique de cette équation

$$X(t) = \frac{NX_0}{X_0 + (N - X_0)e^{-kt}} \quad (11.30)$$

décrit une croissance initiale à caractère exponentiel suivie par une saturation à l'état stationnaire stable $X = N$ (voir fig. 11.4).

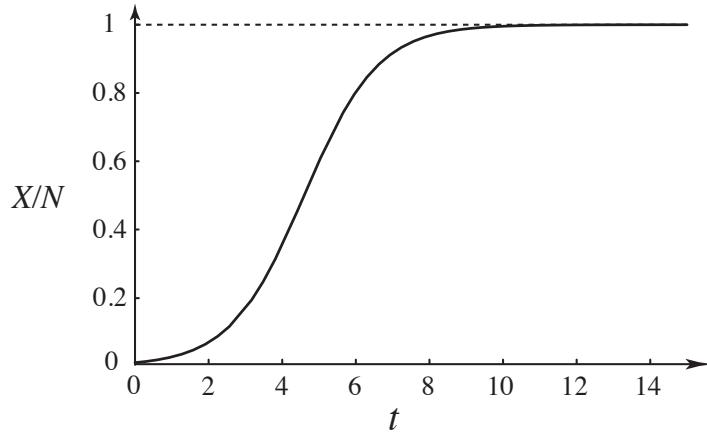


Figure 11.4: Evolution temporelle engendrée par l'équation logistique avec $k = 1$ et partant de la condition initiale $X_0/N = 0,01$.

11.7 Comportements chaotiques

11.7.1 Sensibilité aux conditions initiales

Dans des espaces de phases de dimension trois ou plus, l'évolution temporelle d'un système dynamique dissipatif ou conservatif peut présenter des comportements non-périodiques irréguliers dans le temps qui sont appelés des comportements chaotiques [1, 2, 3, 4, 5]. C'est le cas du cerceau en rotation et en vibration verticale d'équation:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta (1 - \mu \cos \theta - a \sin \Omega t) - \gamma \dot{\theta} \quad (11.31)$$

dont l'équation peut se mettre sous la forme du système autonome suivant:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \Omega \\ \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\frac{g}{l} \sin \theta (1 - \mu \cos \theta - a \sin \phi) - \gamma v \end{cases} \quad (11.32)$$

En conséquence, l'espace des phases est de dimension trois (ϕ, θ, v) avec $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$ et $v \in \mathbb{R}$. Ce système est dissipatif puisque $\text{div } \dot{\mathbf{X}} = -\gamma$. La dissipation d'énergie due au frottement est compensée par un travail effectué par le forçage temporel périodique de sorte que les trajectoires se maintiennent tout le temps en mouvement.

Deux solutions partant de conditions initiales voisines sont montrées sur la fig. 11.5. Nous observons que ces trajectoires restent proches l'une de l'autre pendant un certain laps de temps pour ensuite se séparer et suivre des histoires très différentes. Il s'agit de la propriété de

sensibilité aux conditions initiales. En conséquence de la sensibilité aux conditions initiales, les trajectoires sont aléatoires aux temps longs.

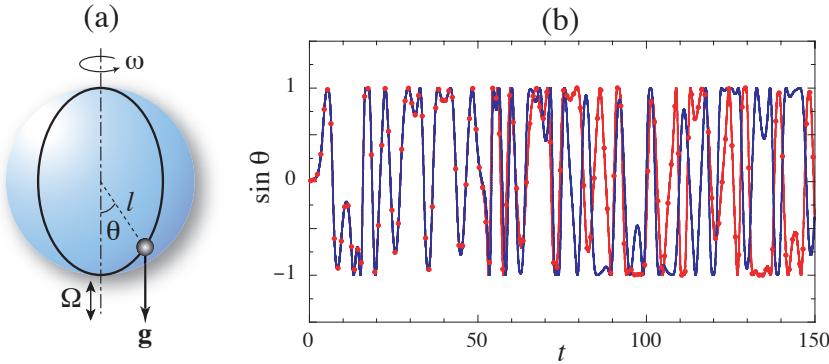


Figure 11.5: (a) Schéma du cerceau en rotation et en vibration. (b) Deux trajectoires de conditions initiales voisines partant d'une même vitesse angulaire nulle et d'angles initiaux $\theta_0 = 0,01$ (en rouge) et $\theta_0 = 0,01 + 10^{-6}$ (en bleu) pour le système (11.31) avec les paramètres $g = l$, $\mu = 1,5$, $a = 1,5$, $\Omega = 2/3$ et $\gamma = 0,1$.

11.7.2 Exposant de Lyapounov

La propriété de sensibilité aux conditions initiales peut se caractériser de la manière suivante. Des trajectoires partant de conditions initiales voisines \mathbf{X}_0 et $\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}_0$ se séparent d'après l'équation linéarisée du système:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{C}(\mathbf{X}) \\ \frac{d\delta\mathbf{X}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}) \cdot \delta\mathbf{X} \end{cases} \quad (11.33)$$

tant que $\|\delta\mathbf{X}\|$ reste suffisamment petit. Typiquement, la croissance de la perturbation infinitésimale est exponentielle, ce qui permet de définir un *exposant de Lyapounov*:

$$\lambda \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta\mathbf{X}_t\|}{\|\delta\mathbf{X}_0\|} \quad (11.34)$$

Un système est chaotique si son exposant de Lyapounov est positif et que ses trajectoires restent bornées au cours du temps.

La sensibilité aux conditions initiales rend toute prévision impossible au-delà d'un certain temps. En effet, la connaissance des conditions est toujours limitée par la résolution ϵ_0 de leur mesure de sorte que l'erreur $\|\delta\mathbf{X}_0\| \simeq \epsilon_0$ sur les conditions initiales s'amplifiera au cours du

temps comme

$$\|\delta \mathbf{X}_t\| \sim \|\delta \mathbf{X}_0\| e^{\lambda t} \quad (11.35)$$

Les prévisions devenant trop incertaines si $\|\delta \mathbf{X}_t\| > \epsilon$, nous constatons que l'intervalle de temps pendant lequel les prévisions restent réalistes est limité selon

$$t < t_{\text{Lyap}} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (11.36)$$

où t_{Lyap} est le temps de Lyapounov qui est de l'ordre de l'inverse de l'exposant caractéristique $\lambda > 0$. Doubler cet intervalle de temps nécessite une amélioration exponentielle sur la connaissance des conditions initiales par un facteur égal à ϵ_0/ϵ , ce qui en montre la difficulté.

Cette sensibilité aux conditions initiales porte le nom d'effet papillon qui se manifeste notamment en météorologie dont les prévisions sont basées sur la résolution des équations de Newton pour les masses d'air atmosphérique. Il se rencontre aussi dans les systèmes hamiltoniens non-intégrables comme le pendule double [6] ou la toupie pesante asymétrique [7].

11.7.3 Comportements chaotiques dans le pendule double

Un des plus petits systèmes mécaniques hamiltoniens qui engendre des comportements chaotiques est le pendule double sans frottement dont la fonction lagrangienne est donnée par l'éq. (6.80). Il s'agit d'un système à deux degrés de liberté dont l'espace des phases est de dimension quatre. Les variables sont les angles que font chacun des deux pendules avec la verticale descendante et les impulsions correspondantes: $(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2)$. Comme l'énergie est conservée, chaque hypersurface d'énergie constante forme un sous-espace des phases de dimension trois où se retrouvent toutes les trajectoires de même énergie. Un flot est défini dans chacun de ces sous-espaces.

Pour mettre en évidence les comportements chaotiques, on effectue une section de Poincaré dans ces flots tridimensionnels en les intersectant par le plan $\theta_2 = 0$ lorsque le second pendule est aligné sur la verticale descendante et lorsque son impulsion est positive $p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} > 0$ [6]. Les intersections des trajectoires avec ce plan sont déterminées par deux coordonnées que l'on peut choisir comme l'angle θ_1 du premier pendule et sa vitesse $\dot{\theta}_1$. On représente alors le mouvement par les intersections successives des trajectoires dans le plan $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$. Pareils portraits de phases sont montrés sur la fig. 11.6 pour différentes valeurs de l'énergie totale du système.

A la plus basse énergie $E = 0,01$, le pendule double effectue des oscillations de petites amplitudes et l'on retrouve des mouvements du type des modes normaux. Sur la fig. 11.6a, on observe deux familles de courbes fermées concentriques centrées chacune sur un point qui correspond à une orbite périodique pour le flot. Ces orbites périodiques correspondent

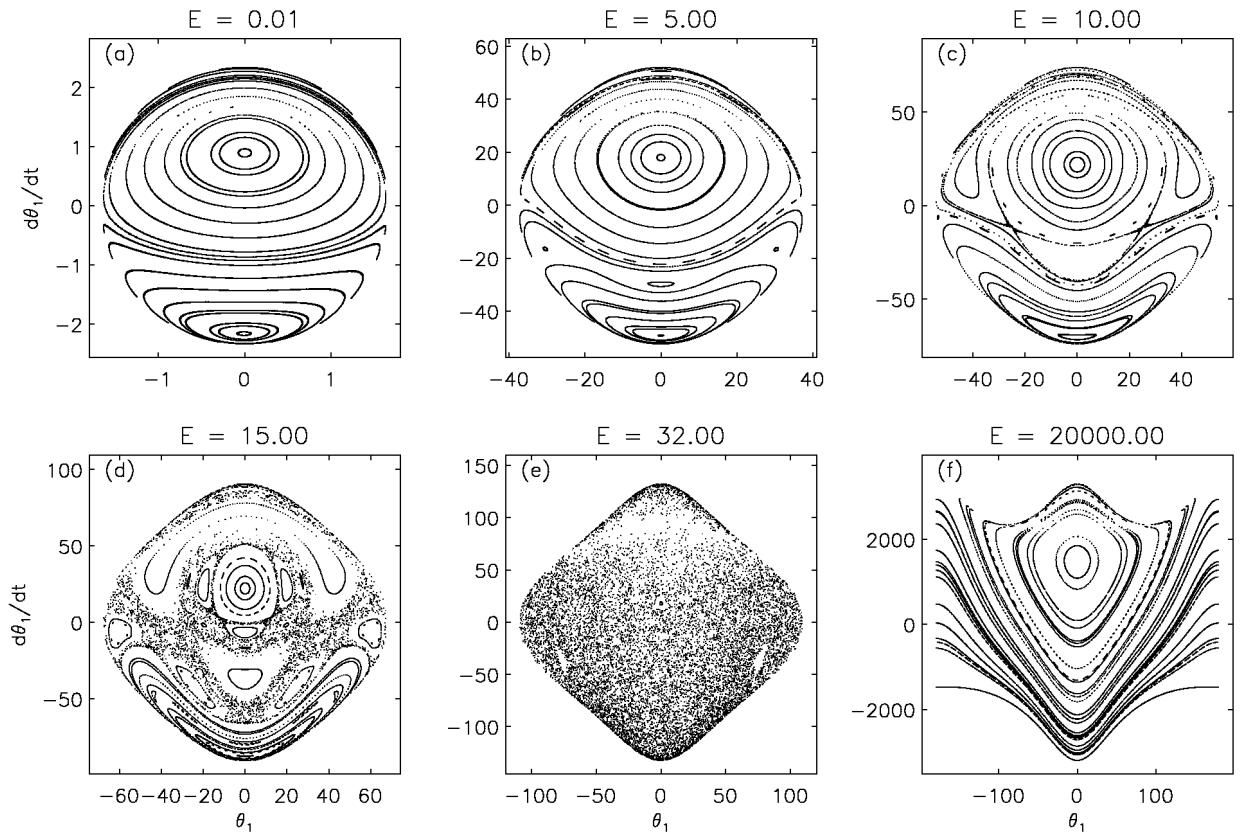


Figure 11.6: Sections de Poincaré du pendule double avec $m_1 = m_2$ et $l_1 = l_2$ pour différentes valeurs de l'énergie totale E comptée en unité égale à $mgl_1/12$. Chacune de ces sections de Poincaré représente les variables $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ du premier pendule lorsque le second pendule passe l'angle $\theta_2 = 0$ avec une impulsion positive $p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} > 0$ (tiré de la réf. [6]).

aux modes normaux pour lesquels les deux pendules oscillent en phase (point supérieur) ou en opposition de phase (point inférieur). Autour des chacun de ces deux points, on trouve des mouvements avec des battements qui sont des combinaisons des deux modes normaux. Comme chacun des modes normaux possède une fréquence caractéristique, les mouvements combinant les deux modes présentent leurs deux fréquences. Si ces fréquences ont incommensurables, les mouvements ne sont pas périodiques tout en restant réguliers. En effet, chacun de ces mouvements engendre une courbe fermée par l'accumulation des intersections successives qui passent et repassent sur la courbe fermée à mesure que le temps s'écoule.

Lorsque l'énergie augmente, le portrait de phases se déforme et il apparaît, notamment à $E = 15$, des zones où les courbes fermées régulières sont détruites. Dans ces zones, les intersections successives d'une trajectoire forment une structure irrégulière qui remplit la zone de manière dense. Il s'agit des zones où les comportements chaotiques se manifestent. Ces

zones chaotiques entourent des îlots de comportements réguliers caractérisées par les courbes fermées concentriques. Les zones chaotiques tendent à grandir avec l'énergie dans les régimes de la fig. 11.6a à la fig. 11.6e.

Tant que l'énergie totale n'excède pas le seuil $E = 24$, les deux pendules oscillent sans effectuer de tour complet. A l'énergie $E = 32$, le premier pendule continue d'osciller dans un intervalle angulaire plus petit que 360° tandis que le second pendule peut effectuer un tour complet à l'occasion. A cette énergie, le portrait de phases est envahi par une zone chaotique dominante et le mouvement est alors chaotique pour la plupart des conditions initiales comme on le voit sur la fig. 11.6e.

A très haute énergie pour $E = 20000$, les deux pendules peuvent effectuer des tours complets et le mouvement d'ensemble est alors principalement rotatif et régulier comme le montre la fig. 11.6f. Les comportements chaotiques ont alors pratiquement disparu.

Loin d'être exceptionnels, les comportements chaotiques existent dans la plupart des systèmes dynamiques hamiltoniens ou dissipatifs [1, 2, 3, 4, 5]. On les rencontrent dans le problème à trois corps de la mécanique céleste et dans le système solaire [4, 5, 8], ainsi que dans les systèmes de particules en interaction de la mécanique statistique [9]. De plus, la théorie du chaos permet aujourd'hui de comprendre l'apparition de la turbulence en mécanique des fluides [10]. De manière générale, la théorie du chaos montre que l'existence de phénomènes aléatoires est compatible avec le déterminisme de la mécanique [11].

Références

- [1] G. Nicolis, *Introduction to Nonlinear Science* (Cambridge University Press, Cambridge UK, 1995).
- [2] J. M. T. Thompson and H. B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Wiley, Chichester, 1986).
- [3] E. Ott, *Chaos in dynamical systems* (Cambridge University Press, Cambridge UK, 1993).
- [4] V. I. Arnold et A. Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique* (Gauthier-Villars, Paris, 1967).
- [5] J. Moser, *Stable and random motions in dynamical systems* (Princeton University Press, Princeton NJ, 1973).
- [6] M. Z. Rafat, M. S. Wheatland, and T. R. Bedding, *Dynamics of a double pendulum with distributed mass*, American Journal of Physics **77** (2009) 216.
- [7] M. Barrientos, A. Perez, and A. F. Ranada, *Weak chaos in the asymmetric heavy top*, European Journal of Physics **16** (1995) 106.
- [8] C. D. Murray and S. F. Dermott, *Solar System Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge UK, 1999).
- [9] J. R. Dorfman, *An Introduction to Chaos in Nonequilibrium Statistical Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge UK, 1999).
- [10] P. Manneville, *Instabilité, Chaos et Turbulence* (Les Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2004).
- [11] A. Dahan Dalmedico, J.-L. Chabert et K. Chemla, Editeurs, *Chaos et déterminisme* (Editions du Seuil, Paris, 1992).

Table des matières

1 Eléments de géométrie et d'analyse vectorielle	13
1.1 Espace vectoriel réel	13
1.2 Produit scalaire	15
1.3 Produit vectoriel	17
1.4 Base réciproque	19
1.5 Composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur	20
1.6 Changement de base	22
1.7 Transformations orthogonales	23
1.8 Rectification d'une base quelconque	25
1.9 Produit vectoriel dans une base quelconque	27
1.10 Tenseurs	27
1.10.1 Tenseurs d'ordre deux	27
1.10.2 Tenseurs d'ordre k	30
1.11 Espace euclidien	32
1.12 Coordonnées curvilignes	34
1.12.1 Définition	34
1.12.2 Base naturelle	34
1.12.3 Coordonnées curvilignes orthogonales	36
1.12.4 Coordonnées sphériques	37
1.12.5 Coordonnées cylindriques	38
1.12.6 Changement de coordonnées curvilignes	39
1.13 La notion de champ	40
1.14 Analyse vectorielle en coordonnées cartésiennes	42
1.14.1 Le gradient	42
1.14.2 La divergence	43
1.14.3 Le rotationnel	44

1.14.4 Intégrale de Riemann	45
1.14.5 Intégrale de ligne	46
1.14.6 Intégrale de surface	46
1.14.7 Intégrale de volume	48
1.14.8 Théorème du gradient	48
1.14.9 Théorème de la divergence	49
1.14.10 Théorème du rotationnel	51
1.15 Analyse vectorielle en coordonnées curvilignes orthogonales	55
1.15.1 Le gradient en coordonnées curvilignes orthogonales	56
1.15.2 La divergence en coordonnées curvilignes orthogonales	56
1.15.3 Le rotationnel en coordonnées curvilignes orthogonales	57
2 Cinématique	61
2.1 Espace physique	61
2.2 Mesure et unité de longueur	62
2.3 Le temps, sa mesure et son unité	63
2.4 Trajectoire	64
2.5 Vitesse	64
2.6 Accélération	65
2.7 Le mouvement rectiligne uniforme	66
2.8 Le mouvement uniformément accéléré	67
2.9 Le mouvement harmonique	68
2.10 Le mouvement circulaire uniforme	69
2.11 Le mouvement hélicoïdal	70
2.12 Repère ou trièdre de Frenet	71
2.13 Espace-temps galiléen	75
2.14 Changement de repère	76
3 Les lois fondamentales de la mécanique	83
3.1 Masse	83
3.2 Force	85
3.3 Les lois du mouvement de Newton	94
3.4 L'équation de Newton comme équation différentielle	97
3.5 Méthodes de résolution	103
3.6 Repères inertIELS	105

3.7 Quantité de mouvement	106
3.8 Moment cinétique	107
3.9 Energie	109
3.9.1 Travail et puissance	109
3.9.2 Energie cinétique	110
3.9.3 Energie potentielle	110
3.9.4 Energie totale	112
3.9.5 Forces conservatives versus forces dissipatives	113
3.10 Systèmes de particules matérielles	115
3.11 Quantité de mouvement totale	118
3.12 Moment cinétique total	120
3.13 Energie totale	123
3.14 Mécanique et thermodynamique	126
3.15 Mouvement des corps à masse variable	130
4 Systèmes d'oscillateurs	135
4.1 Oscillateurs conservatifs à une dimension	135
4.2 Oscillateur harmonique unidimensionnel	141
4.3 Oscillateur harmonique avec amortissement	145
4.3.1 Cas de l'oscillateur sous-amorti ($0 < \zeta < 2\sqrt{mk}$)	146
4.3.2 Cas de l'oscillateur sur-amorti ($2\sqrt{mk} < \zeta$)	147
4.4 Oscillateur harmonique amorti avec forçage temporel	149
4.5 Modes normaux de vibration	156
4.6 Chaînes d'oscillateurs harmoniques couplés et ondes	162
4.7 Pendule simple	165
4.8 Potentiel quartique à double puits	177
4.9 Pendule sphérique	182
5 Mouvement dans un potentiel central	193
5.1 Problème à deux corps	193
5.2 Séparation du centre de masse	194
5.3 Le mouvement relatif	196
5.4 Le problème de Képler	200
5.4.1 Orbite circulaire ($e = 0$):	202
5.4.2 Orbites elliptiques ($0 < e < 1$):	203

5.4.3	Orbite parabolique ($e = 1$):	206
5.4.4	Orbites hyperboliques ($e > 1$):	207
5.5	Le problème de Képler et l'astronomie contemporaine	211
5.6	Collision dans un potentiel central	215
6	Formulation lagrangienne de la mécanique	223
6.1	Systèmes à liaisons et sans liaison	223
6.1.1	Pendule simple	224
6.1.2	Pendule sphérique	226
6.1.3	Pendule multiple	227
6.1.4	Point matériel lié à une surface	229
6.1.5	Point matériel lié à un cerceau en rotation	230
6.1.6	Point matériel lié à une courbe mobile	231
6.1.7	Point matériel lié à une surface mobile	232
6.1.8	Corps solide	233
6.1.9	Molécules	234
6.1.10	Machines ou robots articulés	235
6.2	Contraintes holonômes et coordonnées de Lagrange	236
6.3	Théorème des travaux virtuels	239
6.4	Équations de Lagrange	241
6.4.1	Systèmes généraux	241
6.4.2	Systèmes à forces dérivant d'un potentiel	242
6.4.3	Systèmes dissipatifs	244
6.5	Fonctions lagrangiennes	245
6.5.1	Forme générale	245
6.5.2	Le pendule double	246
6.5.3	Cerceau en rotation	247
6.5.4	Circuit électrique <i>LRC</i>	248
6.6	Intégrales premières des équations de Lagrange	248
6.7	Principe variationnel	251
7	Formulation hamiltonienne de la mécanique	259
7.1	Équations d'Hamilton	259
7.2	Fonctions hamiltoniennes	264
7.2.1	Mouvement unidimensionnel	264

7.2.2	Cerceau en rotation	265
7.2.3	Particule dans un potentiel central	266
7.2.4	Forme générale	266
7.3	Transformée de Legendre	268
7.4	Crochet de Poisson	269
7.5	Intégrales premières des équations d'Hamilton	271
7.6	Théorème de Liouville	273
7.7	Invariants intégraux de Poincaré-Cartan	276
7.8	Symétrie et brisure spontanée de symétrie	279
7.8.1	Symétrie sous inversion spatiale	279
7.8.2	Symétrie sous renversement du temps	281
8	Mouvement dans un référentiel non-inertiel	285
8.1	Equation de Newton dans un repère non-inertiel	285
8.2	Formulation lagrangienne	289
8.3	Formulation hamiltonienne	290
8.4	Pendule de Foucault	292
9	Particule chargée dans un champ électromagnétique	299
9.1	Le champ électromagnétique et les équations de Maxwell	299
9.2	Formulation newtonienne	300
9.3	Formulation lagrangienne	300
9.4	Formulation hamiltonienne	301
9.5	Système à plusieurs particules chargées	302
10	Mouvement du corps rigide	307
10.1	Formulation newtonienne et tenseur d'inertie	307
10.1.1	Séparation des mouvements du centre de masse et de rotation	307
10.1.2	Le tenseur d'inertie et ses propriétés	310
10.1.3	Les équations d'Euler	313
10.2	Toupie libre	314
10.2.1	Les équations d'Euler et ses constantes du mouvement	314
10.2.2	Solutions générales de la toupie asymétrique	315
10.2.3	La toupie symétrique libre	320
10.2.4	Le rotateur libre	322

10.2.5 L'ellipsoïde de Poinsot	323
10.3 Angles d'Euler	324
10.4 Formulations lagrangienne et hamiltonienne	327
10.5 La toupie symétrique pesante de Lagrange	329
10.5.1 Formulation du problème et ses constantes du mouvement	329
10.5.2 Solutions générales	330
10.5.3 Discussion des mouvements de précession et de rotation propre	333
10.5.4 Le cas particulier analogue au pendule simple	334
10.6 La toupie pesante en toute généralité	336
10.6.1 Les équations d'Euler-Poisson	336
10.6.2 Les constantes du mouvement	338
10.6.3 Les cas d'intégrabilité par quadrature	339
11 Systèmes dynamiques et comportements chaotiques	345
11.1 Système dynamique et espace des phases	345
11.2 Stabilité linéaire	347
11.3 L'exemple du cerceau en rotation	348
11.4 Effets du frottement et de la dissipation	350
11.5 Systèmes conservatifs et dissipatifs	351
11.6 Dynamique de population	353
11.7 Comportements chaotiques	354
11.7.1 Sensibilité aux conditions initiales	354
11.7.2 Exposant de Lyapounov	355
11.7.3 Comportements chaotiques dans le pendule double	356