

8

VERS LE TROU NOIR

→ On va étudier des sources gravitationnelles où $r=2m$ se trouve à l'extérieur du corps gravitant.

p35 8.1 Orientation des cônes de lumière

→ Étudions les cônes de lumière dans le demi-plan (t, r) , limités par des géodésiques radiales ($\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$) nulles ($ds^2 = 0$):

$$ds^2 = 0 = -(1-2m/r)dt^2 + (1-2m/r)^{-1}dr^2$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm (1-2m/r)$$

↳ À r fixé, c'est l'équation de 2 demi-droites de pente $\pm (1-2m/r)$

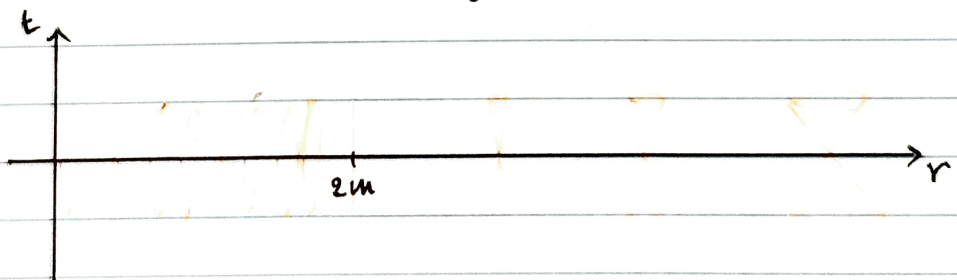
① Pour $r \rightarrow \infty$: $\frac{dr}{dt} = \pm 1$ cônes à 45° comme en n-t plat

② Pour $r \rightarrow 2m$: $\frac{dr}{dt} = 0$ L'ouverture des cônes tend vers 0

↳ Au delà de $r=2m$, les trajectoires à $r=\text{cst}$ ont pour équation $ds^2 = -(1-2m/r)dt^2 \Rightarrow$ de genre temps pour $r > 2m$, mais de genre espace pour $r < 2m$.

③ Pour $r < 2m$: $ds^2 > 0 \Leftrightarrow r > c \nexists$

↳ r est une coordonnée de genre temps pour $r < 2m$



8.2 Observateurs statiques près de $r=2m$

→ Un observateur statique dans la métrique de Schwarzschild se trouve à des valeurs fixes de (r, θ, φ) . Il s'agit d'un observateur accéléré :

$$\hookrightarrow u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = (u^0, \vec{0}) \rightarrow g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -(1-2m/r)(u^0)^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow u^\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{1-2m/r}}, \vec{0} \right)$$

$$a^\alpha = \frac{Du^\alpha}{d\lambda}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow a^\alpha &= (\nabla_u u)^\alpha = u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = u^\beta (\partial_\beta u^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\gamma) \\ &= u^0 (\partial_0 u^\alpha + \Gamma_{00}^\alpha u^0) \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \Gamma_{00}^\alpha u^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, on sait que } \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} e^{m/r} = \frac{1}{2} e^{2u} \\ &= (1-2m/r)^{-1/2} \cdot \frac{-2m}{1-2m/r} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} \\ &= \frac{m}{r^2} (1-2m/r) \end{aligned}$$

$$m = \frac{GM}{c^2}$$

$$a^\alpha = (0, m/r^2, 0, 0)$$

→ Pour maintenir un objet de masse m statique dans un champ de gravitation, il faut lui appliquer une force : $F = \mu \frac{m}{r^2}$ dans la direction radiale.

→ Calculons la norme de a^α , une qté invariante :

$$\|a\|^2 = g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = (1-2m/r)^{-1} m^2/r^4$$

$$\Rightarrow \|a\| = \frac{m}{r^2 \sqrt{1-2m/r}} \rightarrow \text{diverge pour } r \rightarrow 2m$$

8.3 Redshift gravitationnel

→ On avait calculé : $\frac{T_E}{T_R} = \frac{d\tau_E}{d\tau_R} = \sqrt{\frac{-g_{00}(z_E)}{-g_{00}(z_R)}} = \sqrt{\frac{1-2m/z_E}{1-2m/z_R}} = \frac{\lambda_E}{\lambda_R}$

↳ A la limite Newtonienne :

$$\frac{m}{z} = \frac{GM}{zc^2} \ll 1, \text{ on avait } \frac{\lambda_E}{\lambda_R} = 1 - \frac{\Delta\Phi}{c^2} \text{ avec } \Phi = -GM/r \quad \Delta\Phi \approx g z$$

→ Supposons qu'on ait un émetteur proche de $r=2m$. Alors

$$\frac{v_E}{v_R} = \frac{\lambda_R}{\lambda_E} = \infty \text{ pour } r=2m$$

Lorsque l'émetteur s'approche de $r=2m$, la fréquence perçue par l'observateur à l'infini $\rightarrow 0$: le signal n'arrive plus.

8.4 Chute libre perçue par un obs. distant

→ Un observateur distant observe une chute libre radiale (géodésique radiale). L'objet en chute libre obéit à :

$$\begin{aligned} & -(1-2m/r)\dot{t}^2 + (1-2m/r)^{-1}\dot{r}^2 = -1 \quad b = (1-2m/r)\dot{t} \\ \Leftrightarrow & (1-2m/r)^{-1}b^2 + (1-2m/r)^{-1}\dot{r}^2 = -1 \quad a = r^2\dot{\phi} \\ \Rightarrow & \dot{r}^2 = b^2 - (1-2m/r) \Rightarrow \frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{b^2 - (1-2m/r)} \text{ car } r \text{ décroît} \end{aligned}$$

Or $b = \dot{t}(1-2m/r) \Rightarrow \dot{t} = b(1-2m/r)^{-1}$. Ainsi,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{t}} = \frac{-\sqrt{b^2 - (1-2m/r)}}{b(1-2m/r)^{-1}} = -\frac{\sqrt{b^2 - (1-2m/r)}}{b} (1-2m/r)$$

→ Lorsque $r=2m$, on a :

$$\frac{dr}{dt} \approx -b^{-1} \left(\frac{r-2m}{r} \right) \sqrt{b^2} \approx -\frac{1}{2m} (r-2m)$$

$$\Rightarrow \frac{d(r-2m)}{dt} \approx -\frac{1}{2m} (r-2m) \Rightarrow (r-2m)(t) \propto e^{-t/2m}$$

Du point de l'observateur extérieur, le corps en chute libre atteint $r=2m$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

\Rightarrow Corps "figé" à la surface du trou noir.

2.5 Structure globale de la métrique de Schwarzschild.

→ La métrique de Schwarzschild n'est pas adaptée pour décrire le passage de $r > 2m$ à $r < 2m$. Il faut introduire de nouvelles coord.

② Coordonnées d'Eddington-Finkelstein (EF):

→ On avait vu que les géodésiques radiales nulles étaient données par $dr/dt = \pm (1 - 2m/r)$

↳ On définit une nouvelle coord. radiale :

$$dr^* \equiv \pm dt = \frac{dr}{1 - 2m/r} = \frac{r dr}{r - 2m} = \left(1 + \frac{2m}{r - 2m}\right) dr$$

$$\Rightarrow r^* = r + 2m \log\left(\frac{r}{2m} - 1\right) \text{ appelée "Tortoise coordinate"}$$

Δ changement de coord. seulement valable pour $r > 2m$

→ La métrique se réécrit : $ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)(-dt^2 + dr^{*2}) + r^2(r^*) d\Omega^2$

↳ Les cônes de lumière sont donnés par $dt = \pm dr^*$

→ ouverture constante ! (dans le plan (t, r^*))

↳ La métrique est tj. dégénérée en $r = 2m \Leftrightarrow r^* = -\infty$. On introduit de nouvelles coord. adaptées aux géodésiques nulles :

$$\text{On a } dt = \pm dr^* \Leftrightarrow t = \pm r^* + c$$

→ si $r^* \nearrow$ lorsque $t \nearrow$: géodésique nulle sortante

→ si $r^* \searrow$ lorsque $t \nearrow$: géodésique nulle entrante

$$\text{On pose : } \begin{cases} v = t + r^* \Rightarrow v = \text{cte} \Leftrightarrow \text{sortante} \\ u = t - r^* \Rightarrow u = \text{cte} \Leftrightarrow \text{entrante} \end{cases}$$

→ La métrique devient alors : $dt = dv - dr^* = dv - \frac{dr}{1 - 2m/r}$
 $\Rightarrow ds^2 = -(1 - 2m/r)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2m/r} + r^2 d\Omega^2$

$$\begin{aligned} &= -(1 - 2m/r)(dv^2 + dr^2(1 - 2m/r)^{-2} - 2(1 - 2m/r)^{-1}dv dr) \\ &\quad + dr^2(1 - 2m/r)^{-1} + r^2 d\Omega^2 \\ &= -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dv^2 + 2dv dr + r^2 d\Omega^2 \end{aligned}$$

OEF

On trouve aussi la métrique de Schwarzschild en coordonnées Eddington-Finkelstein entrantes (v):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 + 2 dv dr + r^2 d\Omega^2$$

et en coordonnées E-F sortantes (u):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) du^2 - 2 du dr + r^2 d\Omega^2$$

→ En $r=2m$, la métrique est finie et non-dégénérée ($\det g_{\mu\nu} \neq 0$)

① Cônes de lumière en coord. E-F:

① E-T sortantes:

$$\rightarrow ds^2 = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 = 2 dv dr$$

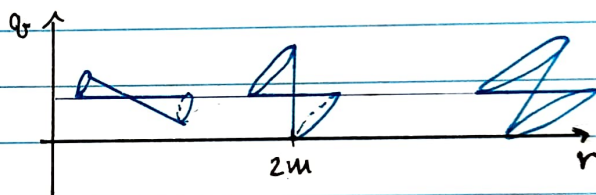
$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{dv}{dr}\right)^2 = 2 \frac{dv}{dr}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dr} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dr} = 2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}$$

→ En $r=2m$, les cônes de lumière basculent

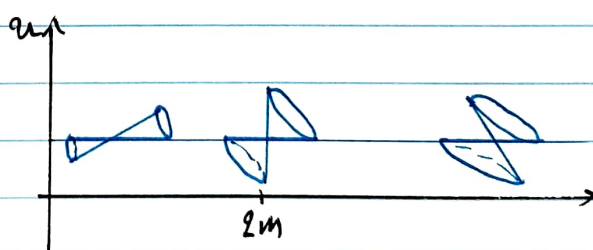
⇒ toutes les trajectoires

causales (genre temps / lumière vers le futur) se font dans la direction des r décroissants. La surface $r=2m$ fonctionne comme une surface de non-retour. Elle constitue un horizon des événements



② E-T entrantes:

→ $r=2m$ peut être atteint par des courbes causales dirigées vers le passé.



③ Conclusion: puisqu'une \tilde{m} surface ne se trouve dans le futur et dans le passé d'un observateur P , à partir de celui-ci, on peut suivre des courbes dirigées vers le futur ou le passé, mais on arrivera à des régions différentes.

③ Coordonnées de Kruskal-Szekeres :

→ On peut continuer à étendre la géométrie de Schwarzschild, que nous venons d'étendre déjà vers le futur et le passé le long des géodésiques nulles. L'extension analytique maximale de la métrique de Schwarzschild est l'extension de Kruskal-Szekeres.

→ On définit en premier lieu de nouvelles coordonnées (u, v) selon :

DEF ① Pour $r > 2m$ (région I) :

$$\begin{cases} u = \sqrt{\frac{r}{2m} - 1} e^{r/4m} \cosh\left(\frac{t}{4m}\right) \\ v = \sqrt{\frac{r}{2m} - 1} e^{r/4m} \sinh\left(\frac{t}{4m}\right) \end{cases}$$

② Pour $r < 2m$ (région II) :

$$\begin{cases} u = \sqrt{1 - \frac{r}{2m}} e^{r/4m} \sinh\left(\frac{t}{4m}\right) \\ v = \sqrt{1 - \frac{r}{2m}} e^{r/4m} \cosh\left(\frac{t}{4m}\right) \end{cases}$$

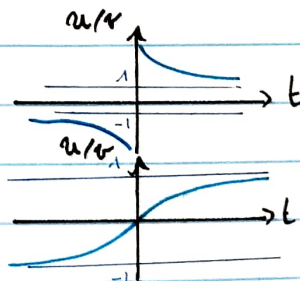
On note que ce changement de coordonnée n'est pas défini en $r = 2m$.

→ Analysons ces coordonnées :

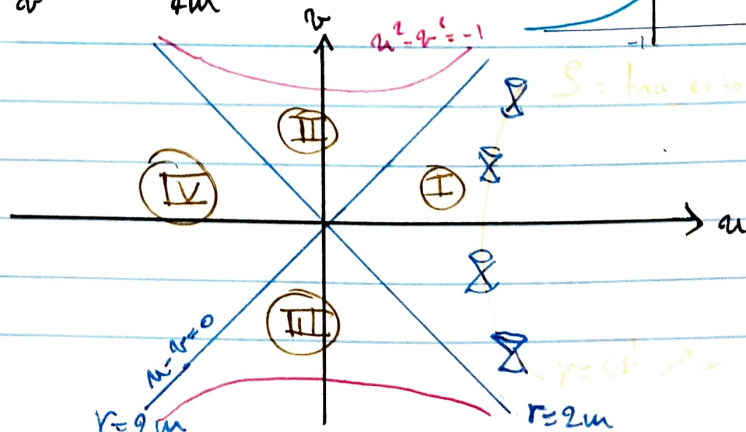
$$\rightarrow u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{r/2m} \geq -1$$

$$\hookrightarrow r = 2m \Leftrightarrow u = \pm v$$

$$\rightarrow \text{De plus : } \begin{cases} \frac{u}{v} = \coth \frac{t}{4m} & \text{pour } r > 2m \\ \frac{u}{v} = \tanh \frac{t}{4m} & \text{pour } r < 2m \end{cases}$$



région



① Métrique de Schwarzschild en coord. KS :

→ Puisque $u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{r/2m}$, on a :

$$d(u^2 - v^2) = 2u du - 2v dv = \left(\frac{e^{r/2m}}{2m} + \left(\frac{r}{2m} - 1\right) \frac{1}{2m} e^{r/2m}\right) dr$$

$$= \frac{r}{2m} \frac{e^{r/2m}}{2m} dr \Leftrightarrow dr = \frac{8m^2}{r} e^{-r/2m} (u du - v dv)$$

→ En $r > 2m$: $\frac{u}{v} = \coth \frac{t}{4m}$

$$\hookrightarrow \frac{du \cdot v - dv \cdot u}{v^2} = \frac{-dt}{4m} \frac{-1}{\sinh^2(t/4m)} = \frac{-dt}{4m} \left(\frac{r}{2m} - 1\right) \frac{e^{r/2m}}{v^2}$$

$$= \frac{-dt}{4m} (u^2 - v^2) e^{-r/2m} \frac{e^{r/2m}}{v^2}$$

$$\Rightarrow v du - u dv = \frac{-dt}{4m} (u^2 - v^2) \Rightarrow dt = \frac{(u dv - v du) 4m}{u^2 - v^2}$$

→ En $r < 2m$: $dt = - \frac{u dv - v du}{u^2 - v^2} \cdot 4m$

→ La métrique s'écrit donc :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$= - (u^2 - v^2) e^{-r/2m} \cdot \frac{16m^2 (u dv - v du)^2}{(u^2 - v^2)^2}$$

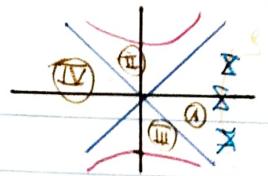
$$+ \frac{r e^{-r/2m}}{2m (u^2 - v^2)} \cdot \frac{64m^4 e^{-r/2m}}{r^2} (u du - v dv)^2$$

$$= ds^2 = \frac{32m^3}{r} e^{-r/2m} (du^2 - dv^2) + r^2 d\Omega^2$$

→ métrique régulière en $r = 2m$

→ Dans le plan (u, v) , les rayons lumineux sont donnés par $du = \pm dv$ comme pour Minkowski à 2d (pratique pour étudier la structure causale de l'espace-temps).

② Remarques:



- ① On peut se rendre compte de l'existence de **IV** en étudiant les géodésiques spatiales et en demandant qu'elles soit complètes (\exists une valeur de paramètre affine). C'est aussi une région asymptotiquement plate. Elle est connectée à **I** par le "Einstein-Rosen bridge".
- ② La région **III** n'est pas physique non plus : si on part de **I**, on ne peut l'atteindre que par des géodésiques temporelles. La région **III** constitue un trou blanc.
- ③ On définit l'extension analytique maximale de Schwarzschild la région **I \cup II \cup III \cup IV** de topologie $\mathbb{R}^2 \times S^2$ $((u,v) \times (\theta, \varphi))$.

② Horizons - trou noir:

- Un observateur $r = \text{const} > 2m$ dans la géométrie de KS ressemble bcp à l'observateur accéléré en e-t plat
- Son futur causal est **I \cup II** = $J^+(\xi)$
- Son horizon passé des événements est $\partial J^+(\xi) = \mathcal{H}^-$
- La région **II** est l'intérieur du trou noir

8.6 Effondrement gravitationnel

② Effondrement gravitationnel et formation des trous noirs: