# Cosmologie

ULB MA | 2023–2024 | Prof. Thomas HAMBYE

## Chapitre 1: Univers homotrope: géométrie, distance et horizon

### Notes manuscrites (scannées)

Antoine Dierckx • ant.dierckx@gmail.com

**Attention: uniquement le chapitre 1 ici.** Ce document DocHub contient **uniquement le premier chapitre**. L'ensemble des chapitres, des notes personnelles, des corrections d'exercices et une liste d'ouvrages de référence se trouvent sur mon site web.

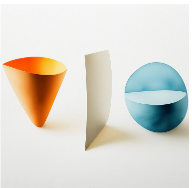
— **Tous les chapitres :** voir la page du cours

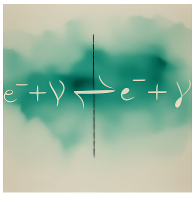
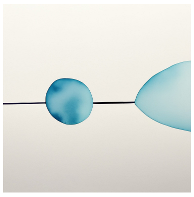
— **Corrections d'exercices & travaux personnels :** voir la page principale.

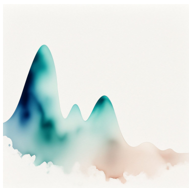
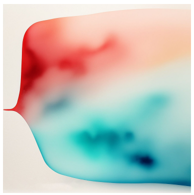
— **Ouvrages de référence :** voir la section bouquin.

**Accéder au reste :** scannez ou cliquez ici

https://adierckx.github.io/NotesAndSummaries/Master/MA1/PHYS-F-415



*Avertissement.* Les notes publiées ici sont basées sur ma compréhension des cours et n'ont pas fait l'objet d'un examen ou d'une vérification indépendante. J'espère qu'elles sont utiles, mais il peut y avoir des erreurs ou des inexactitudes. Si vous trouvez des erreurs ou si vous avez des suggestions d'amélioration, n'hésitez pas à me contacter à l'adresse suivante : ant.dierckx@gmail.com. Merci !

# COSMOLOGY

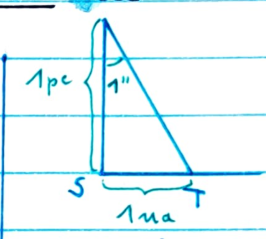
PHYS-F-415 ~ Thomas Hambye

# CH1 UNIVERS HOMOGENE ET ISOTROPE : GEOMETRIE, DISTANCE ET HORIZON

## 1.0 Echelles de grandeurs

DEF Une unité astronomique ua est la distance moyenne entre le soleil et la Terre. $1\,ua \simeq 1{,}5 \cdot 10^{11}\,m$

Un parsec pc est définit comme $1pc = \frac{180 \cdot 3600}{\pi}\,ua$




→ Par rapport à une année-lumière al, on a

$$1pc \sim 3{,}26\,al \simeq 3 \cdot 10^{16}\,m$$

→ L'étoile la plus proche, $\alpha$ Cen (Alpha du Centaure), se situe à 1,3 pc

→ La voie lactée est un disque de dimension $(300 \times 25 \cdot 10^3)\,pc$

→ La distance de la galaxie la plus proche, Andromède, est $\sim 10^6\,pc = 1\,Mpc$

→ La taille du superamas de la Vierge est $\sim 17\,Mpc$

→ Le rayon de Hubble (échelle de longueur caractéristique de la portion observable d'un univers en expansion) est de l'ordre de $\sim 3000\,Mpc\,h^{-1}$

# 1.1 Principe cosmologique et loi de Hubble

DEF | Le principe cosmologique postule que l'univers est homogène et isotrope (homotrope).

Prop | L'isotropie autour de 2 points $\Rightarrow$ homogénéité.

↳ exemple d'un univers homogène non isotrope : 

⊙ **Observations :**

→ L'univers est homotrope à des échelles $> 100$ Mpc, au delà des superamas

→ Le fond diffus cosmologique est isotrope à $10^{-5} \sim \Delta T/T$

⊙ **Loi de Hubble :**

→ Un univers homotrope $\neq$ statique

↳ en $t = t_0$, la distance entre 2 points peut s'écrire

$$d_p(t_0) = x \cdot a(t_0)$$

où $a(t_0)$ prend une valeur conventionelle, qui définit l'unité de longueur, et $x$ dépend des points considérés.

↳ puisque l'univers est homotrope, $a$ ne peut dépendre des points considérés.

DEF | On définit la distance propre $d_p$, la coordonnée comobile $x$ et le facteur d'échelle $a$ selon :

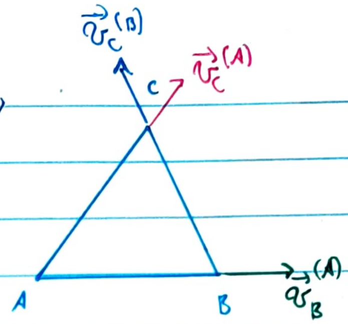
$$d_p(t) = a(t) \cdot x$$

Loi | La loi de Hubble stipule que $v = H(t)\, d_p(t)$ où $H = \dot{a}/a$ est le paramètre de Hubble

$\boxed{\text{DEMO}}$

$$v = \dot{d}_p = \dot{a} x = \frac{\dot{a}}{a} \cdot a x = H d_p$$

∎




→ La loi de Hubble est valable partout. En effet,

$$\vec{v}_C^{(B)} + \vec{v}_B^{(A)} = H(t).(\vec{r}_{BC} + \vec{r}_{AB})$$
$$= H(t).\vec{r}_{AC} = v_C^{(A)}$$

## ⊙ Mesure de la constante de Hubble :

DEF On définit le redshift $z$ selon

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \Leftrightarrow 1+z = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\nu_0}{\nu}$$

← initiale
← observée

→ On peut interpréter l'expansion comme un effet Doppler :

$$1+z = \frac{\lambda_f}{\lambda_i} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \simeq 1+\beta$$

$$\Rightarrow zc = v = H(t_0)\, d_p$$

→ Mesure par Hubble (1929) : $H_0 \simeq 550$ km $s^{-1}$ $Mpc^{-1}$
Lemaître (1927) : $H_0 \simeq 650$ km $s^{-1}$ $Mpc^{-1}$
Aujourd'hui, via les chandelles standards : $H = 0,67.100$ km $s^{-1}$ $Mpc^{-1}$
et via la structure des anisotropie du CMB.

## ⊙ Age de l'univers :

→ Si la vitesse est constante $cst = v = \dot{a}.d_p \Rightarrow \dot{a} = cst$
$\Leftrightarrow a(t) = cst.t$. En $t=0$, $a(0) = 0$ : big bang
Or, $H = \frac{\dot{a}}{a} = 1/t \Leftrightarrow H_0^{-1} = t_0 = h^{-1}.\, 9,78.10^9$ ans.

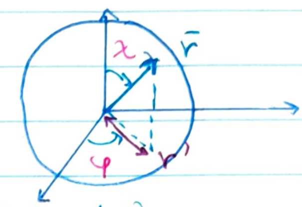
# 1.2 Géométrie d'un espace homotrope

$\boxed{1}$ → L'espace est plat si sa métrique est euclidienne :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$\boxed{2}$ → Espace sphérique : surface de dimension d-1 d'une sphère de dimension d.

↳ ex : $S_2$ la 2-sphère. Son équation est :



$$\{(x,y,z) \,/\, x^2+y^2+z^2 = a^2\}$$

En coordonnées sphériques,

$$\begin{cases} x = a \sin\chi \cos\varphi \\ y = a \sin\chi \sin\varphi \\ z = a \cos\chi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = a\,(c\chi\, c\varphi\, d\chi - s\chi\, s\varphi\, d\varphi) \\ dy = a\,(c\chi\, s\varphi\, d\chi + s\chi\, c\varphi\, d\varphi) \\ dz = -a\, s\chi\, d\chi \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx^2 = a^2(c^2\chi\, c^2\varphi\, d\chi^2 + s^2\chi\, s^2\varphi\, d\varphi^2 - 2\, c\chi\, c\varphi\, s\chi\, s\varphi\, d\chi\, d\varphi) \\ dy^2 = a^2(c^2\chi\, s^2\varphi\, d\chi^2 + s^2\chi\, c^2\varphi\, d\varphi^2 + 2\, c\chi\, s\varphi\, s\chi\, c\varphi\, d\chi\, d\varphi) \\ dz^2 = a^2\, s^2\chi\, d\chi^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow dx^2 + dy^2 + dz^2 = a^2\big(d\varphi^2\{s^2\chi\, s^2\varphi + s^2\chi\, c^2\varphi\} + d\chi^2\{c^2\chi\, c^2\varphi + c^2\chi\, s^2\varphi + s^2\chi\}\big)$$

$$dl^2 = a^2\{\sin^2\chi\, d\varphi^2 + d\chi^2\}$$

On pose alors $r' = a\sin\chi \Leftrightarrow \chi = \arcsin(r'/a)$, et

$d\chi = \dfrac{(1-(r'/a)^2)^{-1/2}}{a} \Rightarrow d\chi^2 = \dfrac{1}{a^2(1-(r'/a)^2)}\, dr'^2$. On trouve :

$$dl^2 = a^2\left\{\frac{r'^2}{a^2}\, d\varphi^2 + \frac{1}{1-(r'/a)^2}\, dr'^2\right\}$$

$$= \frac{dr'^2}{1 - r'^2/a^2} + r'^2\, d\varphi^2$$

On pose enfin $r = r'/a$. On a :

$$dl^2 = a^2\left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2\, d\varphi^2\right)$$

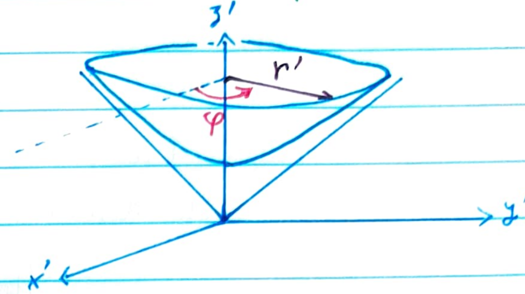
↳ Lorsque $a \nearrow$, $r = \text{cst}$ et $\chi = \text{cst}$

↳ Localement, c'est un espace euclidien :
si $z = \pm a$, $dl^2 = dx^2 + dy^2$. Sinon, rotation.

3 → Espace hyperbolique, d'équation
$\{(x,y,z) / x^2+y^2+z^2 = -a^2\}$

↳ Presque comme le sphérique mais avec $a^2 \mapsto -a^2$. La métrique devient $dl^2 = \dfrac{dr'^2}{1+r'^2/a^2} + r'^2 d\varphi^2$

↳ On peut se représenter cette géométrie dans un espace hyperbolique :




$$\begin{cases} dl^2 = dx'^2 + dy'^2 - dz'^2 \\ x'^2 + y'^2 - z'^2 = -a^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow z'^2 - (x'^2+y'^2) = a^2$

↳ Paramétrisation :

$$\begin{cases} z' = a\cosh\chi \\ x' = a\sinh\chi\cos\varphi \\ y' = a\sinh\chi\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow x'^2+y'^2 = a^2\sinh^2\chi \equiv r'^2$$

Changement de variable :

$$dl^2 = dx'^2+dy'^2-dz'^2 = dr'^2 + r'^2 d\varphi - \frac{r'^2\,dr'^2}{a^2+r'^2}$$

$$= \frac{dr'^2}{1+r'^2/a^2} + r'^2 d\varphi^2 = a^2\left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\varphi^2\right)$$

$$= a^2(d\chi^2 + r^2 d\varphi^2)$$

## ⊙ Géométrie isotrope : un résumé :

→ La métrique s'écrit : $dl^2 = \dfrac{dr'^2}{1+k\,r'^2/a^2} + r'^2 d\varphi^2$

avec $r' \equiv r a$ où $a$ est le facteur d'échelle et $r$ la coord. comobile.

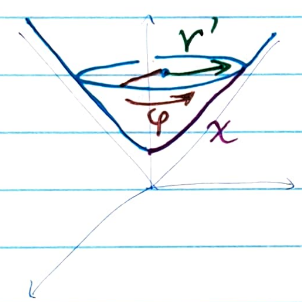
On peut réécrire

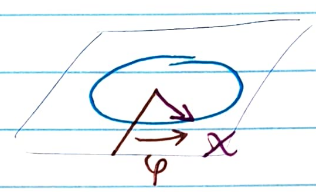
$$dl^2 = a^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\varphi^2\right) = a^2\left(d\chi^2 + r^2 d\varphi^2\right)$$

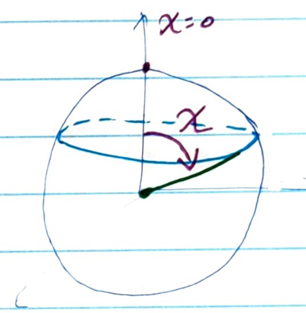
et $k$ est le facteur de courbure, qui prend les valeurs $\{-1, 0, 1\}$.

| Hyperbolique | Euclidien | Sphérique |
|---|---|---|
| $k=-1$ | $k=0$ | $k=+1$ |
| $0<r'<\infty$, $0<r<\infty$ | $0<r'<\infty$, $0<r<\infty$ | $0<r'<a$, $0<r<1$ |
| $r=\sinh\chi$ | $r=\chi$ | $r=\sin\chi$ |
| $\rightarrow dl\|_\varphi = a\,d\chi$ | $\rightarrow dl\|_\varphi = a\,d\chi$ | $\rightarrow dl\|_\varphi = a\,d\chi$ |
| $\rightarrow dl\|_\chi = ar\,d\varphi$ | $\rightarrow dl\|_\chi = ar\,d\varphi$ | $\rightarrow dl\|_\chi = ar\,d\varphi$ |
| $\rightarrow$ After 1 turn: | $\rightarrow$ After 1 turn: | $\rightarrow$ After 1 turn: |
| $\Delta l = r' 2\pi = a\sinh\chi . 2\pi$ | $\Delta l = r' 2\pi = a\chi 2\pi$ | $\Delta l = a\sin\chi\, 2\pi$ |

$$\Delta l|_{k=-1} > \Delta l|_{k=0} > \Delta l|_{k=1}$$




DEF La métrique d'un espace homotrope est la métrique de Robertson-Walker FLRW donnée par :

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2\left\{\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right\}$$

$$= c^2dt^2 - a^2(d\chi^2 + r^2 d\Omega^2)$$

avec $r = \begin{cases} \sin\chi & \text{pour } k=1 \\ \chi & \text{pour } k=0 \\ \sinh\chi & \text{pour } k=-1 \end{cases}$

⊙ Remarques:

① Synchronisation des horloges:

$\rightarrow$ $\tau = N(t)\, d_0 \Leftrightarrow N$ définit le temps dans l'univers. Si $N(t)$ est le même dans 2 points $\neq$, alors $t$ l'est également.

② Distance propre :

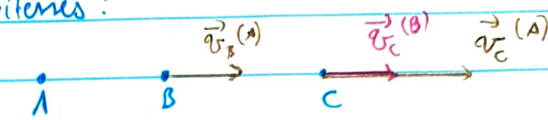
→ On a $d_p = \int dl = a \int d\chi = a\chi$ où l'intégrale sur les $dl$ est effectuée à un même instant $t$.

→ Pour un univers en expansion, on a :

$$d_p(t_{obs}) > \Delta\chi > d_p(t_{em})$$

→ $(t, d_p)$ ne sont pas des coordonnées d'un ref. inertiel

En effet, on a addition des vitesses :




$v_B^{(A)} = H . \vec{d}_{AB}$

$v_C^{(B)} = H \vec{d}_{BC}$

$v_C^{(A)} = H \vec{d}_{AC} = \vec{v}_B^{(A)} + \vec{v}_C^{(B)}$ ≠ avec la relativité restreinte.

# 1.3 Redshift

→ Soit $\gamma_1$ un lumière émise en $(t_{em}, \chi)$ et reçue en $(t_{obs}, \chi = 0)$, et $\gamma_2$ émise en $(t_{em} + \Delta t_{em}, \chi)$ et reçue en $(t_{obs} + \Delta t_{obs}, 0)$.

→ Puisque son $ds^2 = 0$, on a $c^2 dt^2 = dl^2 = a^2 d\chi^2$. Ainsi,

$$c\int_{t_{em}}^{t_{obs}} \frac{dt}{a} = \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \chi_{em}$$

$$\text{et} \quad \int_{t_{em}+\Delta t_{em}}^{t_{obs}+\Delta t_{em}} \frac{dt}{a} = \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \chi_{em}$$

$$\Leftrightarrow \int_{t_{obs}}^{t_{obs}+\Delta t_{obs}} dt/a = \int_{t_{em}}^{t_{em}+\Delta t_{em}} dt/a \;(\simeq)\; \frac{\Delta t_{obs}}{a(t_{obs})} = \frac{\Delta t_{em}}{a(t_{em})}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\Delta t_{obs}}{\Delta t_{em}} = \dfrac{a(t_{obs})}{a(t_{em})}$. Or, $\Delta t_{em} = \dfrac{1}{\nu_{em}} = \dfrac{1}{\nu_{rest}}$. Ainsi,

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{rest}}{\lambda_{rest}} = \frac{a(t_{obs})}{a(t_{rest})} - 1$$

↳ Toute longueur est dilatée d'un facteur $a(t)$, la longueurs d'onde également, et donc l'énergie diminuée.

## Relation entre redshift, temps, distance, et coord. comobile :

→ On sait déjà exprimer $z(a) = \frac{a_0}{a(t)} - 1$. Calculons :

$z+1 = \frac{a_0}{a}$

$$dz = -\frac{a_0}{a^2} \cdot da = -\frac{a_0}{a} \cdot \frac{\dot{a}}{a} \cdot dt = -(z+1) \cdot H \cdot dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{z+1} \cdot \frac{1}{H} = -dt \Leftrightarrow t_0 - t = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{H(z+1)}$$

Or, en $t=0$, le redshift $\to \infty$ ($t=0 \Leftrightarrow z=\infty \Leftrightarrow a=0$). Ainsi,

$t_0 = \int_{z_0=0}^{\infty} \frac{dz}{H(z+1)}$. Or, $d_p = a \cdot \chi$. Ainsi,

$$\chi = \int_{t_{em}}^{t_{obs}} \frac{d_p(t)}{a(t)} = \int_{z_{em}}^{z_{obs}=0} \frac{-dz \cdot a}{a_0 \cdot \dot{a}} = \int_{z_0=0}^{z_{em}} \frac{dz}{H(z)} \cdot \frac{1}{a_0}$$

$$\Rightarrow d_p^{em}(t_0) = a_0 \chi^{em} = \int_{z_0=0}^{z_{em}} \frac{dz}{H(z)}$$

## Relation entre luminosité, redshift et distance :

→ Soit une source de luminosité $L$ (avec $\Delta E_{em} = L \Delta t = L \Delta \chi \, a(t_{em})$)
Le flux de lumière observée est :

$$\Phi = \frac{L}{4\pi r^2 a^2} = \frac{L}{4\pi a_0^2 (1+z)^2 r^2}$$

→ Puisque $\chi = \int_{z_0=0}^{z_{em}} \frac{dz}{H(z)} \frac{1}{a_0=1}$, on peut déterminer $H(z)$ car :

$$H(z) \Rightarrow t - t_0 = \int_{z}^{z_0} \frac{dz}{H(z)(1+z)}$$

# 1.4 Horizons

## ⊙ Horizon d'une particule :

→ Pour une lumière, limite du volume accessible si elle a été émise au début de l'univers, et nous ayant atteint :

$$\underset{\overset{\|}{0}}{\chi_{hor} - \chi_0} = \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

et $d_p^{hor} = a(t) \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$ = taille physique de l'horizon de la particule en $t = t_0$.

→ En pratique, il faut attendre la recombinaison en $t = t_r$ pour que la lumière puisse se propager. On a alors l'horizon optique $d_p^{opt} = a(t_0) \int_{t_r}^{t_0} \frac{d\tau}{a(\tau)}$

## ⊙ Horizons des évènements :

→ Limite du volume atteignable pour un signal émis en $t_{em}$ et reçus en $t_{max}$ :

$$d_p(t_{em}) = a(t_{em}) \int_{t_{em}}^{t_{max}} \frac{d\tau}{a(\tau)}$$

→ Horizon des évènements finis dans le cas où
- → Big Crunch
- → Univers en accélération.