

Modèle standard des interactions fondamentales

ULB MA | 2023–2024 | Prof. Thomas HAMBYE

Chapitre 1: Champs élémentaires

Notes manuscrites (scannées)

Antoine Dierckx • ant.dierckx@gmail.com

Attention: uniquement le chapitre 1 ici. Ce document DocHub contient **uniquement le premier chapitre**. L'ensemble des chapitres, des notes personnelles, des corrections d'exercices et une liste d'ouvrages de référence se trouvent sur mon site web.

- **Tous les chapitres :** voir la page du cours
- **Corrections d'exercices & travaux personnels :** voir la page principale.
- **Ouvrages de référence :** voir la section bouquin.

Accéder au reste : scannez ou cliquez ici



<https://adierckx.github.io/NotesAndSummaries/Master/MA1/PHYS-F-422>



Avertissement. Les notes publiées ici sont basées sur ma compréhension des cours et n'ont pas fait l'objet d'un examen ou d'une vérification indépendante. J'espère qu'elles sont utiles, mais il peut y avoir des erreurs ou des inexactitudes. Si vous trouvez des erreurs ou si vous avez des suggestions d'amélioration, n'hésitez pas à me contacter à l'adresse suivante : ant.dierckx@gmail.com. Merci !

MODELE STANDARD DES INTERACTIONS FONDAMENTALES

CH1 CHAMPS ELEMENTAIRES

- Théorie quantique des champs nécessaire pour décrire des comportements quantiques et relativistes. Les champs de particules sont classifiés selon leur transformation sous le groupe de Lorentz. Ce sont des irreprs du ce groupe.

1.1 Champ scalaire réel φ

- Se transforme selon $\varphi(x) \mapsto \varphi'(x') \quad \varphi(x) = \varphi(\Lambda^{-1}x')$
C'est un champ de spin 0, avec 1 dof (1 fct de x^a)
- Les invariants bilinéaires du Lorentz possibles sont:
 $\partial_n \varphi \partial^n \varphi$ et φ^2

↳ Le Lagrangien libre est donné par:

$$L = \frac{1}{2} \partial_n \varphi \partial^n \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

avec $[m] = E$

↳ Les EOM sont $\{\partial^2 + m^2\} \varphi = 0$. C'est l'eq. de Klein-Gordon.
Sa solution est donnée par:

$$\varphi(x) = \int d^3k \left\{ \alpha(k) e^{-ikx} + \alpha^\dagger(k) e^{ikx} \right\}$$

- Le champ est auto conjugué $\varphi^*(x) = \varphi(x)$

1.2 Champ scalaire complexe φ

→ Se transforme selon $\varphi'(x') = \varphi(x) = \varphi(\Lambda^{-1}x)$.

↳ spin 0, mais 2 dof. En effet, on a

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{Re} \varphi}{\sqrt{2}} + i \frac{\operatorname{Im} \varphi}{\sqrt{2}} \quad \varphi^+(x) = \frac{\operatorname{Re} \varphi}{\sqrt{2}} - i \frac{\operatorname{Im} \varphi}{\sqrt{2}}$$

→ Ses invariants bilinéaires de Lorentz sont

$$\partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi \text{ et } \varphi^+ \varphi \quad (\text{hermitic pour conserver la probabilité})$$

↳ Le Lagrangien libre est donné par

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^+ \varphi \quad (\text{plus les facteurs } 1/2)$$

On remarque que la norme du $\operatorname{Re} \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$ est dégénérée :

$$m^2 \varphi^+ \varphi = \frac{m^2}{2} (\operatorname{Re} \varphi)^2 + (\operatorname{Im} \varphi)^2$$

↳ Les EOM sont données par :

$$(\partial^2 + m^2) \varphi = 0 \text{ et } (\partial^2 + m^2) \varphi^+ = 0$$

Les solutions des EOM sont :

$$\varphi(x) = \int d^3k \left\{ a(k) e^{-ikx} + b^+(k) e^{ikx} \right\}$$

$$\varphi^+(x) = \int d^3k \left\{ b(k) e^{-ikx} + a^+(k) e^{ikx} \right\}$$

→ Le champ n'est pas autoconjugué (2 dof) :

$$\varphi(x) \neq \varphi^*(x)$$

1.3 Champ vectoriel A^μ

→ Se transforme sous $A^\mu(x) \mapsto A'^\mu(x') = A^\nu \nu A^\mu(x) = A^\mu \nu A^\nu(A^{-1}x')$
 ↳ C'est un champ de spin 1

→ Ses bilinéaires invariants de Lorentz sont :

$$A^\mu A_\mu, \partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu, \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu.$$

Pour les termes dérivatifs, seule la combinaison $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ permet d'obtenir un hamiltonien définit positif.

↳ Le Lagrangien est donné par :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu$$

↳ Les EOM sont $\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$

Les EOM doivent donner K-G car A^μ est un boson $\Rightarrow \partial_\mu A^\mu = 0$

Si $m \neq 0$, c'est tjs le cas : $\partial_\mu \partial^\mu F^{\mu\nu} = 0$

Si $m = 0$, c'est un choix de jauge, celle de Lorentz.

↳ Les solutions des EOM sont :

$$A_\mu(x) = \int d^3 k \sum_{\lambda=1}^3 \left\{ a^\lambda(t_k) \epsilon_\mu^\lambda(t_k) e^{-ikx} + a^{\lambda\dagger}(t_k) \epsilon_\mu^{\lambda\dagger}(t_k) e^{ikx} \right\}$$

où $\epsilon_\mu^\lambda(t_k)$ est le vecteur de polarisation

Cependant, il faut que $\partial^\mu A_\mu = 0 \Leftrightarrow \epsilon_\mu^\lambda k^\mu = 0 \sim 3$ dof

On a 2 mode transverses :

$$\epsilon_\mu^{1,2} = (0, \vec{e}_{1,2}(t_k)) \text{ tels que } \vec{e}_{1,2} \cdot \vec{k} = 0$$

Et 1 mode longitudinal :

$$\epsilon_\mu^3 = \left(\frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{E}{m} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right), \text{ non physique pour } m=0$$

En fait, ne couplé pas au courant $A_\mu J^\mu$ dans \mathcal{L}_I . En effet, $\partial_\mu J^\mu = 0$

$$\Leftrightarrow k_\mu J^\mu = 0 \Leftrightarrow E J^0 = |\vec{k}| \vec{J} \text{ et donc}$$

$$\epsilon_\mu^3 J^\mu = \frac{|\vec{k}|}{m} J^0 - \frac{E}{m} \frac{\vec{k} \cdot \vec{J}}{|\vec{k}|} = \frac{|\vec{k}| \vec{J}}{m} \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{m} \frac{1}{|\vec{k}|} \right)$$

$$= J^0 \left(\frac{1}{m} - \frac{E^2}{m} \frac{1}{|\vec{k}|} \right) = \frac{J^0}{|\vec{k}|} \left(\frac{|\vec{k}|^2 - E^2}{m} \right) = \frac{J^0 m}{|\vec{k}|} = 0 \text{ si } m=0$$

1.4 Spineur de Dirac ψ

→ Se transforme selon $\psi(x) \mapsto \psi'(x') = \exp\left\{-\frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}\right\} \psi(1^{-1}x)$
avec

$S^{\alpha\beta} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$ les générateurs de l'algèbre de Lorentz
pour la représentation de spin 1/2
et $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ est le paramètre de Lorentz associé.

↳ Les $\psi(x)$ sont des bispinors $\in \text{Mat}_{4 \times 1}(\mathbb{C})$

↳ En composante ψ_L, ψ_R , on peut écrire $\psi = P_L \psi + P_R \psi \equiv \psi_L + \psi_R$

En représentation de Weyl, un spinor de Weyl se transforme
selon $x_{L,R}(x) \mapsto x'_{L,R}(x') = \exp\left\{\pm \frac{1}{2} \omega_{\alpha i} \sigma_i - \frac{i}{4} \omega_{ij} \epsilon^{ijk} \sigma_k\right\} x_{L,R}(1^{-1}x)$

Ainsi, on voit que ψ est un objet composite sous Lorentz.

Prop

Un spinor du Dirac ψ est la somme de 2 irrep de Lorentz:
 $L+R$, c'est à dire la somme de 2 spinors de Weyl.

→ Ses bilinéaires invariants de Lorentz sont

$$(\bar{\psi} \not{D} \psi) = (\bar{\psi}_L \not{D} \psi_L + \bar{\psi}_R \not{D} \psi_R) \text{ et } (\bar{\psi} \psi) = \bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L$$

↳ Le Lagrangien libre est le Lagrangien du Dirac:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\not{D} - m) \psi$$

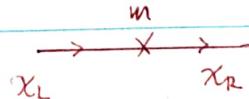
↳ Les EOM sont donnés par: $(i\not{D} - m) \psi = 0$

En spinor de Weyl, ce sont les éq. de Weyl:

$$\begin{cases} i(\not{\partial}_L - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \psi_L = m \psi_R \\ i(\not{\partial}_R + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \psi_R = m \psi_L \end{cases}$$

→ Les équations sont couplées si $m \neq 0$. Ainsi, un spinor du Dirac
est un seul objet physique: son terme de masse mélange

ψ_L et ψ_R :



→ Ainsi, le spinor de Dirac (superposition quantique de 2 spineurs du Weyl à 2 composantes) est une quantité physique : il "reste lui-même" lors de sa propagation.

↳ Les solutions des EOM sont

$$\Psi(x) = \int d^3p \sum_{s=1}^2 \left\{ a^s(\vec{p}) u^s(\vec{p}) e^{-ipx} + b^{s\dagger}(\vec{p}) v^s(\vec{p}) e^{ipx} \right\}$$

$$\bar{\Psi}(x) = \int d^3p \sum_{s=1}^2 \left\{ a^{s\dagger}(\vec{p}) \bar{u}^s(\vec{p}) e^{+ipx} + b^s(\vec{p}) \bar{v}^s(\vec{p}) e^{-ipx} \right\}$$

avec : $u^s(\vec{p}) \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{p_0} \xi^s \\ \sqrt{p_0} \xi^s \end{pmatrix}$ et $v^s(\vec{p}) \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{p_0} \xi^s \\ -\sqrt{p_0} \xi^s \end{pmatrix}$

et $\xi^1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \xi \uparrow$
 $\xi^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \xi \downarrow$

Prop Les solutions du spin \uparrow et \downarrow des EOM sont physiques (ne se mêlent pas) par conservation du spin. Dès lors, elles sont la superposition de Ψ_L et Ψ_R (qui ne sont pas physiques si $m \neq 0$).

Il devient clair que l'hélicité $h = \vec{s} \cdot \vec{p} / |\vec{p}|$ n'est pas égale à la chiralité quand $m \neq 0$.

1.5 Spineur de Weyl sans masse $\chi_{L,R}$

→ Si $m_\chi = 0$, les χ_L et χ_R ne se mélangent pas et donc sont indépendants sous transf. de Lorentz. On pourrait avoir des spineurs à 2 dof : soit χ_L , soit χ_R , sans obligatoirement avoir les 2.

DEF La matrice de conjugaison du charge C dans la rep de Weyl est donnée par $C \equiv i\gamma^2\gamma^0$. On définit alors :

? Vérif. χ_L^C

$$\chi_L^C \equiv C\chi_L = -i\sigma^2 \chi_L^*$$

→ Se transform selon :

$$\chi_{L,R}(x) \mapsto \chi'_{L,R}(x') = \exp \left\{ \pm \frac{1}{2} w_{0j} \sigma_j - \frac{i}{4} w_{ij} e^{ik_j} \sigma_k \right\} \chi_{L,R}(x)$$

On peut également utiliser l'écriture suivante :

$$\begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Lambda_L & 0 \\ 0 & \Lambda_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp \left\{ \frac{i}{2} (\Theta_j - i\beta_j) \sigma_j \right\} & 0 \\ 0 & \exp \left\{ \frac{i}{2} (\Theta_j + i\beta_j) \sigma_j \right\} \end{pmatrix}$$

avec $\beta_j = w_{0j}$ (boost selon x_j) et $\Theta_j = w_{ik} e^{ik_j}/2$

→ Ses bilinéaires invariants de Lorentz sont :

$$i\chi_L^C \not{\partial} \chi_L \text{ et } \chi_L^C \chi_L$$

↳ Le Lagrangien est donné par

$$\mathcal{L} = \chi_L^C i\not{\partial} \chi_L$$

↳ Les EOM sont : $i(\not{\partial}_t - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \chi_L = 0$

Les solutions sont les même que pour Dirac, en ne gardant que les particules de spin anti // à \vec{p} :

$$u_{\downarrow}(\vec{p}) = \sqrt{2w_p} \begin{pmatrix} S \downarrow \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_L \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et les antiparticules de spin // à } \vec{p}: \\ v_{\uparrow}(\vec{p}) = -\sqrt{2w_p} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \uparrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_L^C \end{pmatrix}$$

PROP L'hélicité des spineurs de Weyl sans masse est équivalente à leur spin.

1.6 Spineur de Majorana (massif) Ψ_M

→ Peut-on rendre massif les spineurs de Weyl? oui! Il faut construire un terme de masse : non dérivatif, invariant de Lorentz, bilinéaire et hermitien.

→ Les spineurs de Weyl se transforment selon :

$$x_L \rightarrow x'_L = \exp \{ -\frac{1}{2} \omega_{0i} \sigma^i - \frac{i}{4} \epsilon^{ijk} \omega_{jk} \} x_L \text{ et}$$

$$x_L^c \rightarrow x_L^{c'} = \exp \{ +\frac{1}{2} \omega_{0i} \sigma^i - \frac{i}{4} \epsilon^{ijk} \omega_{ij} \} x_L^c$$

$(x_L^c)^* x_L$ n'est pas invariant, mais $(x_L^c)^+ x_L$ l'est!

→ Le terme de masse de Majorana est donné par

$$\mathcal{L}^{\text{Maj-Mass}} = -\frac{1}{2} m_M (x_L^{c+} x_L + x_L^+ x_L^c)$$

où m_M est la masse de Majorana.

① 2 types de masse :

Dirac:

$$x_L \xrightarrow[m_D]{\times} x_R \text{ ou}$$

$$x_R \xrightarrow[m_D]{\times} x_L$$

mélange L et R

Majorana:

$$x_L \xrightarrow[m_M]{\times} x_L^c \text{ ou}$$

$$x_L^c \xleftarrow[m_M]{\times} x_L$$

transfert part. \leftrightarrow antipart.

② Etat physique :

→ Ψ_L n'est pas un état physique (si $m_M \neq 0$), puisqu'il mixe avec Ψ_L^c

DÉF On définit le spinor de Majorana Ψ_M selon $\Psi_M = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_L^c \end{pmatrix}$

→ On aura alors $\cancel{x_L} \cancel{x_L^c}$. Le terme de masse de Majorana part alors à l'échin:

$$\mathcal{L}_{M-Maj} = -\frac{1}{2} (x_L^+ x_L^{c+}) \begin{pmatrix} 0 & m_M \\ m_M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_L \\ x_L^c \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} m_M \bar{\Psi}_M \Psi_M$$

On peut aussi écrire :

$$\Psi_M = P_L \Psi_M + P_R \Psi_M = \begin{pmatrix} x_L \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_L^c \end{pmatrix}$$

Prop

Les spineurs de Majorana ont leur propre antiparticule (auto-conjugué).

DEF

On définit le spinor de Maj. conjugué Ψ_M^c selon

$$\Psi_M^c = i \gamma^2 \gamma^0 \bar{\Psi}_M^t = C \bar{\Psi}_M^t \quad \text{où } C = i \gamma^4 \gamma^0 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}$$

Prop

Ainsi définis, $\Psi_M^c = \Psi_M$

[DEMO] En effet,

$$\begin{aligned} \Psi_M^c &= i \gamma^2 \gamma^0 \text{rot } \Psi_M^* \\ &= \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_L^* \\ x_L^{c*} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_L^* \\ x_L^{c*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma_2 x_L^{c*} \\ -i\sigma_2 x_L^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_L \\ x_L^c \end{pmatrix} = \Psi_M \end{aligned}$$

Ça ne fonctionne pas avec Ψ_D : $\Psi_D^c = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \chi_0^+ (x_R)^* = \begin{pmatrix} -x_R^* \\ x_L \end{pmatrix} \neq \Psi_D$

→ Le lagrangien libre d'un spinor de Majorana est donné par:

$$L = \bar{\Psi}_L i \not{D} \Psi_L - \frac{m_M}{2} (\bar{\Psi}_L^c \Psi_L + \bar{\Psi}_L \Psi_L^c) \quad (\text{4-comp, chiral})$$

$$= \frac{1}{2} \bar{\Psi}_L i \not{D} \Psi_L - \frac{m_M}{2} \bar{\Psi}_M \Psi_M \quad (\text{4-comp, maj})$$

$$= i x_L^+ \not{\sigma}^M \partial_M x_L - \frac{m_M}{2} (x_L^{c+} x_L + x_L^+ x_L^c) \quad (\text{2-comp})$$

↳ EOM et solution:

$$\rightarrow (i \not{D} - m_M) \Psi_M = 0 \Leftrightarrow i (\not{\partial}_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) x_L = m_M x_L^c$$

→ Solution comme Dirac, en ne gardant seulement les x_L et x_L^c

(c'est à dire en ne gardant que les combinaisons d'étoiles du spin correspondants à x_L et x_L^c).

1. 7 Résumé

→ Le modèle standard basé sur un # limité de champs fondamentaux:

spin 0 ($\varphi, (\varphi, \varphi^*)$), spin 1/2 (Ψ_D, x_L, Ψ_M), spin 1 (A_μ, A_μ^M)

deg: 1 2 4 2 2 2 3