

4 THEORIE DE LA PORTANCE

4.1 Introduction

→ Objectif: calculer la portance d'une aile mince ne déplaçant avec un angle d'attaque α et établir la formule

$$\Gamma = -\pi UL \sin \alpha$$

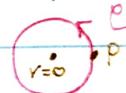
→ Hypothèse: fluide non visqueux ($\nu=0$) et écoulement irrot. ($\bar{\nabla} \times \bar{u} = 0$)

4.2 Potentiel de vitesse et fonction du courant

→ Si $\bar{\nabla} \times \bar{u} = 0$, on peut écrire $\bar{u} = \bar{\nabla} \varphi$ et $\varphi(p) = \varphi(0) + \int_0^P \bar{u} \cdot d\bar{x}$
indépendante du chemin si domaine simplement connexe.

↳ Si le domaine n'est pas simplement connexe, φ est multi-value.

→ Exemple: $\bar{u} = \frac{k}{r} \vec{1}_\theta$



$$\rightarrow \int_0^P \bar{u} \cdot d\bar{x} = \int_0^{2\pi} \frac{k}{r} \vec{1}_\theta \cdot r d\theta \vec{1}_\theta = \int_0^{2\pi} k \cdot dr = 2\pi k \Rightarrow \varphi_- = \varphi_+ + 2\pi k$$

On voit que $\bar{u} = \bar{\nabla} \varphi \Rightarrow \frac{1}{r} \partial_\theta \varphi = \frac{k}{r} \Rightarrow \partial_\theta \varphi = k \Rightarrow \varphi = k\theta$ défini à un multiple de $2\pi k$ près.

DEF La circulation de \bar{u} sur le contour Γ est donnée par

$$\Gamma = \oint_{\Gamma} \bar{u} \cdot d\bar{x}$$

③ Fonction du courant:

→ On fait l'hypothèse d'un écoulement en 2-D et incompressible:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0 \Rightarrow \exists \bar{B} \text{ t.q. } \bar{u} = \bar{\nabla} \times \bar{B} = (\partial_y B_z - \partial_z B_y, \partial_z B_x - \partial_x B_z, \partial_x B_y - \partial_y B_x)$$

On choisit $\bar{B} = \Psi \vec{1}_z$. Alors $\bar{u} = [u, v] = [\partial_y \Psi, -\partial_x \Psi, 0]$

DEF On définit alors la fonction du courant Ψ , liée à \bar{u} par:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

→ Propriété: $(\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) \bar{u} = \partial_y \Psi \cdot \partial_x \Psi + (-\partial_x \Psi) \partial_y \Psi = 0$

⇒ Ψ est constant le long d'une ligne de courant.

4.3 Potentiel complexe

→ Pour un fluide 2-D, incompressible, irrotationnel, on a :

$$u = \partial_x \varphi = \partial_y \psi \quad \text{et} \quad v = \partial_y \varphi = -\partial_x \psi$$

→ Les fcts (φ, ψ) obéissent aux équations de Cauchy-Riemann.
Si leur dérivée est continue, on peut définir :

DEF

On définit le potentiel complexe d'écoulement W mbo :

$$W \equiv \varphi + i\psi$$

qui est une fonction analytique de la variable $z = x+iy$

→ φ et ψ satisfaisant à l'équation de Laplace : $\partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi = 0$

$$\partial_x^2 \psi + \partial_y^2 \psi = 0$$

→ Les composantes de la vitesse peuvent être obtenues à pd w :

$$w'(z) \equiv \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{w(z+\Delta z) - w(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{w(z+\Delta x) - w(z)}{\Delta x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \partial_x \varphi + i \partial_x \psi$$

$$\frac{dw}{dz} = u - i v \quad \text{de norme} \quad \left| \frac{dw}{dz} \right| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

① Exemple: écoulement uniforme sous un angle α p/r à l'axe x

$$\rightarrow \text{On a: } u = U \cos \alpha, \quad v = U \sin \alpha \Rightarrow \frac{dw}{dz} = U \cos \alpha - i U \sin \alpha$$

$$= U e^{-i\alpha}$$

$$\Rightarrow w = U z e^{-i\alpha}$$

② Exemple: vortex linéaire

$$\rightarrow \text{On a } \bar{u} = \frac{1}{2\pi r} \vec{e}_\theta. \quad \text{On a montré (n°4.2) que } \phi = \frac{\Gamma \theta}{2\pi}$$

$$\text{Par ailleurs: } M_r = \frac{1}{r} \partial_\theta \psi = 0 \Rightarrow \partial_\theta \psi = 0$$

$$\text{et } M_\theta = -\partial_r \psi \Rightarrow \partial_r \psi = -\Gamma / 2\pi r \Rightarrow \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

Ainsi:

$$W = \varphi + i\psi = \frac{1}{2\pi} \left(\theta - i \ln r \right) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\ln r + i\theta \right) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

4.4 Méthode des images

① Théorème de Milne-Thomson

→ permet d'obtenir un écoulement autour d'un disque

Thm Soit $W = f(z)$ un potentiel complexe dont toutes les singularités se situent en $|z| > a$.

Alors $W' = f(z) + \overline{f(a^2/\bar{z})} = f(z) + \overline{f}(a^2/z)$ est le potentiel complexe d'un écoulement qui a les mêmes singularités que f pour $|z| > a$ et dont le cercle $|z|=a$ est une ligne de courant

DEMO!

① Comme toutes les singularités de f se trouvent en $|z| > a$, celles de $f(a^2/\bar{z})$ se trouvent en $|a^2/\bar{z}| > a$
 $\Leftrightarrow |z| < a$

Donc $W = f(z) + \overline{f}(a^2/\bar{z})$ ne rajoute pas de singularité en $|z| > a$.

② Sur le cercle de rayon a , on a $z\bar{z} = a^2 \Leftrightarrow \bar{z} = a^2/z$
 $\Rightarrow W(r=a) = f(z) + \overline{f(z)}$

↳ Donc W est réel sur le bord du disque et $\Psi = 0 = \text{cte}$
 Le cercle est donc une ligne de courant



4.5 Ecoulement irrotationnel autour d'un cylindre

→ Soit un écoulement uniforme dans la direction x . On a $W = Uz$
 car on avait $W = Uze^{-i\alpha}$, ici $\alpha=0$.

Par Milne-Thomson, pour que $r=a$ devienne une ligne de courant, $W = Uz + U\overline{(a^2/\bar{z})} = U(z + a^2/z)$

↳ écoulement autour d'un cylindre sans circulation

→ Rajoutons une circulation :

$$W = U(z + a^2/z) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z = U(re^{i\theta} + \frac{a^2}{r} e^{-i\theta}) - \frac{i\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\theta)$$

$$\rightarrow \varphi = U(r + a^2/r) \cos \theta + \Gamma \theta / 2\pi$$

$$\psi = U(r - a^2/r) \sin \theta + \Gamma \ln(r) / 2\pi$$

↳ Le fluide glisse sur le cylindre:

$$u_\theta = -\partial_r \Psi = -U(1 + a^2/r^2) \sin \theta + \Gamma/2\pi r$$

$$u_r = \frac{1}{r} \partial_\theta \Psi = U(r - a^2/r) \cos \theta$$

→ Par Bernoulli: $p + \frac{1}{2} \rho u^2 = \text{const} = C_1$ en $r=a$ (qui est une ligne du courant). Sur le cylindre,

$$\begin{aligned} P/\rho &= C_1/\rho - \frac{1}{2} u^2|_{r=a} \\ &= C_1/\rho - \frac{1}{2} (-2U \sin \theta + \Gamma/2\pi a)^2 \end{aligned}$$

$$= C_2 - 2U^2 \sin^2 \theta + \Gamma U \sin \theta / \pi a$$

Or, par symétrie $\theta \mapsto \pi - \theta$, il ne peut y avoir de force nivaut x . Selon y , on a:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} p \vec{dr}|_y \cdot \hat{a} \cdot d\theta &= a \int_0^{2\pi} p \left(+2U^2 \sin^2 \theta - \frac{\Gamma U}{\pi a} \sin \theta \right) \sin \theta d\theta \\ &= -p U \Gamma \end{aligned}$$

⇒ Il n'y a pas de portance si $\Gamma=0$. Si $\Gamma < 0$, la pression est plus basse au dessus du cylindre → le cylindre monte.

4.6 Transformation conforme

→ On veut transformer le cylindre par des transformations conformes jusqu'à obtenir la forme d'une aile d'avion.

→ Soit $w(z) = \phi(z) + i\Psi(z)$ un potentiel complexe dans le plan complexe z ($dw/dz = u - iz$). On définit $Z \equiv f(z)$ une fonction analytique et son inverse F tq $F(Z) = z$. Alors

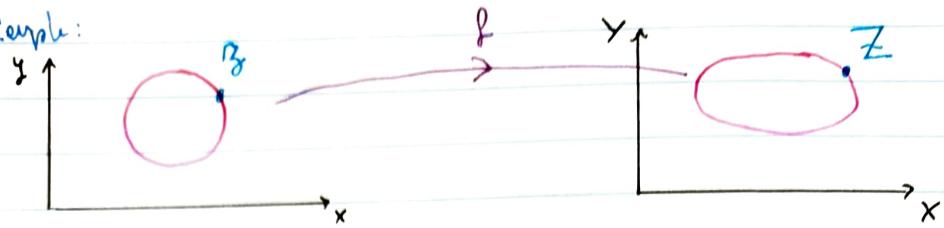
$W(Z) = w(F(Z))$ est une fonction analytique de Z . On note $Z = X + iY$ et $W(Z) = \Phi(X, Y) + i\Psi(X, Y)$

↳ Comme $w \circ F$ est analytique, Φ et Ψ satisfont les équations de Cauchy-Riemann et on définit

$$u_x(X, Y) = \partial_X \Phi = \partial_Y \Psi \quad v_x = \partial_X \Phi = -\partial_Y \Psi \quad \text{à}$$

u_x, v_x sont les composantes d'un écoulement irrotationnel et incompressible dans le plan (X, Y) .

exemple:



→ Par ailleurs, $w(z) = W(Z) \rightarrow \Psi(Z) = \psi(z)$

↳ une ligne de courant dans (x, y) est transformée en ligne de courant dans (X, Y) .

→ De plus $\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dz}$. Ainsi :

$$u_x - i v_x = \frac{u - i v}{|f'(z)|}$$

→ Enfin, on impose que l'écoulement ne soit pas modifié loin de l'obstacle : $\lim_{|z| \rightarrow \infty} u_x - i v_x = u - i v \Rightarrow \lim_{|z| \rightarrow \infty} |f'(z)| = 1$

DEF On définit la transformation de Kutta-Joukowsky qui transforme un disque en aile d'avion :

$$Z = z + c^2/z$$

→ On a $f'(z) = 1 - c^2/z^2$ s'annule en $z = \pm c$

→ La fonction inverse :

$$z^2 + c^2 - 2Zz = 0 \Leftrightarrow z = \frac{Z}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}Z^2 - c^2}$$

22

4.7 Ecoulement irrot. autour d'un cylindre elliptique

→ Soit le bord du disque $z = \alpha e^{i\theta}$. Sous l'action de la transformation de K-T, on a :

$$X+iY = Z = \alpha e^{i\theta} + \frac{c^2}{\alpha} e^{-i\theta} = \left(\alpha + \frac{c^2}{\alpha}\right) \cos\theta + i\left(\alpha - \frac{c^2}{\alpha}\right) \sin\theta$$

$$\Rightarrow X = \left(\alpha + \frac{c^2}{\alpha}\right) \cos\theta \quad \text{et} \quad Y = \left(\alpha - \frac{c^2}{\alpha}\right) \sin\theta$$

On a alors $\frac{X^2}{\alpha + c^2/\alpha} + \frac{Y^2}{\alpha - c^2/\alpha} = 1 \rightarrow \text{une ellipse !}$



→ L'écoulement se transforme selon :

$$w(z) = V \left(z e^{-i\alpha} + \frac{\alpha^2}{z} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$

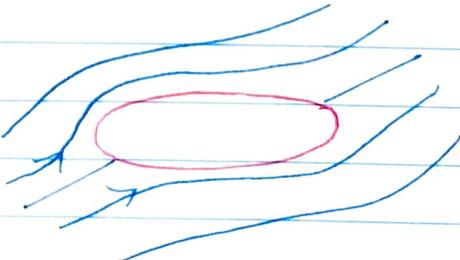
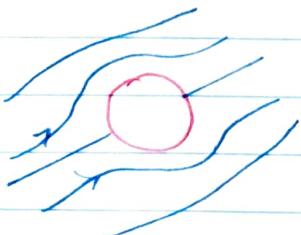
$$\sim W(Z(z)) = V e^{-i\alpha} \left(\frac{1}{2} Z + \sqrt{Z^2/4 - c^2} \right) \\ + V \frac{\alpha^2 e^{i\alpha}}{z} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left[\frac{1}{2} Z + \sqrt{\frac{1}{4} Z^2 - c^2} \right]$$

$$\text{avec } w \sim 1/z: \quad Z = z + c^2/z \rightarrow \frac{Z - z}{c^2} = 1/z$$

$$\Rightarrow Z - \left(\frac{1}{2} Z + \sqrt{Z^2/4 - c^2} \right) / c^2 = \left(\frac{1}{2} Z - \sqrt{Z^2/4 - c^2} \right) / c^2$$

$$\sim W(Z(z)) = V e^{-i\alpha} \left(\frac{1}{2} Z + \sqrt{\frac{1}{4} Z^2 - c^2} \right) + V e^{i\alpha} \frac{\alpha^2}{c^2} \times \\ \left(\frac{1}{2} Z - \sqrt{\frac{1}{4} Z^2 - c^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left[\frac{1}{2} Z + \sqrt{Z^2/4 - c^2} \right]$$

Il s'agit d'un écoulement autour d'un disque elliptique sous un angle d'attaque α . Les lignes de courant sont représentées selon :



4.8 Ecoulement irrotationnel autour d'une plaque mince

→ Dans la transfo de K-J, on prend $c = a$:

$$Z = z + a^2/z \text{ . Le disque } z = a e^{i\theta} \text{ se transforme alors selon } X + iY = Z = a e^{i\theta} + \frac{a^2}{a} e^{-i\theta} = a (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 2a \cos \theta$$

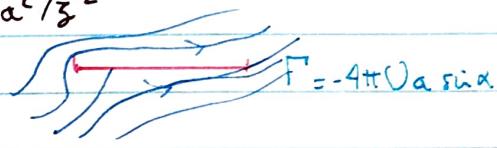
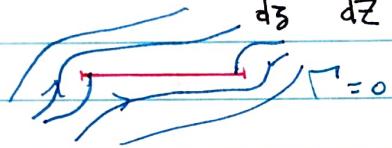
C'est une plaque mince dans le plan X

$$X = 2a \cos \theta, Y = 0$$



→ Pour un écoulement de départ avec un angle d'attaque α dans le plan

$$Z : u_x - i v_x = \frac{dw}{dz} = \frac{U(e^{-i\alpha} - a^2 e^{i\alpha}/z^2) - i\Gamma/2\pi z}{1 - a^2/z^2}$$



↳ Il y a 2 singularités en $z = \pm a$. On doit annuler le dénominateur en $z = a$: on impose

$$U(e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{a^2} e^{i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0 \Leftrightarrow -2iU \sin \alpha - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \Gamma = -4\pi U a \sin \alpha$$

↳ Il reste une singularité en $z = -a$, on ne peut tenir qu'une singularité à la fois.

→ Les approximations utilisées (ex: pas de viscosité) sont mauvaises pour l'avant de l'aile.

Dans les ailes, l'avant de la plaque est plus épaisse, tq la singularité en $z = -a$ se trouve dans l'aile \Rightarrow plus de problème.



4.9 Ecoulement autour d'une aile symétrique

→ On considère un cercle de rayon $a+\lambda$ centré en $x=-\lambda$.

Dans le plan \bar{z} , ce cercle s'écrit $\bar{z} = -\lambda + (a+\lambda)e^{i\alpha}$

On applique la transfo de K-T : $\bar{z} \mapsto z + a^2/\bar{z}$

$$z = -\lambda + (a+\lambda)e^{i\alpha} + \frac{a^2}{-\lambda + (a+\lambda)e^{i\alpha}}$$

Rappel : on avait $w(z) = U \left(\bar{z} e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{\bar{z}} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \bar{z}$

→ L'écoulement autour du cylindre s'écrit

$$w(\bar{z}) = U \left((\bar{z} + \lambda) e^{-i\alpha} + \frac{(a+\lambda)^2}{\bar{z} + \lambda} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(\bar{z} + \lambda)$$

→ L'écoulement autour de l'aile est donné par $w(z) \mapsto \frac{1}{2} z + \sqrt{\frac{z^2 - c^2}{4}}$
les composantes de la vitesse s'écrivent sous la forme :

$$\frac{dW}{dz} = U \left(e^{-i\alpha} - \frac{(a+\lambda)^2 e^{i\alpha}}{(\bar{z} + \lambda)^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi(\bar{z} + \lambda)} = u_x - i v_x$$

$$1 - a^2/\bar{z}^2$$

↳ La seule singularité problématique se situe en $\bar{z} = a$
car $\bar{z} = -a$ se trouve dans l'obstacle.

On choisit alors la circulation de maniére à annuler
le numérateur en la singularité :

$$U \left(1 - \frac{(a+\lambda)^2}{(\bar{z} + \lambda)^2} \cos \alpha - i U \left(1 + \frac{(a+\lambda)^2}{(\bar{z} + \lambda)^2} \right) \sin \alpha - \frac{i\Gamma}{2\pi(\bar{z} + \lambda)} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{i\Gamma}{2\pi(a+\lambda)} = i U 2 \sin \alpha \Rightarrow \Gamma = -4\pi(a+\lambda)U \sin \alpha$$

C'est la condition de Kutta-Joukowski

→ Pour une aile symétrique mince, $\lambda \ll a$ et $L = 4a$

$$\text{On a alors } \Gamma = -\pi L U \sin \alpha$$

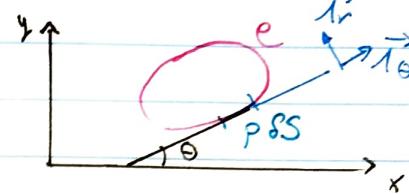
Rappel, thm des résidus

$$\text{Soit } f = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\bar{z} - a)^n. \text{ Alors } \oint f(\bar{z}) d\bar{z} = 2\pi i \cdot C_{-1}$$

4.10 Théorème de Blasius

Thm Soit un écoulement irrotationnel, incompressible et non visqueux autour d'un obstacle dont le contour est C . Alors les composantes de la force qui s'exerce sur l'obstacle sont données par :

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2} i \rho \oint_C \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz$$



Demo:

→ En chaque point du C , la force qui s'exerce sur l'obstacle est normale à la paroi et d'intensité pSS . Si θ est l'angle sur le schéma, on a

$$dF = pSS \vec{T}_r = p(-\sin \theta, \cos \theta) SS$$

$$\hookrightarrow dF_x - i dF_y = -p(\sin \theta + i \cos \theta) SS = -p i e^{-i\theta} SS$$

→ Comme l'écoulement glisse sur l'obstacle :

$$u = |\bar{u}| \cos \theta \text{ et } v = |\bar{u}| \sin \theta \text{ sur } C \text{ avec } |\bar{u}| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\text{Or } \frac{dw}{dz} = u - iv = |\bar{u}| (\cos \theta - i \sin \theta) = |\bar{u}| e^{-i\theta}$$

→ Par Bernoulli, sans pesanteur, on a $P/\rho + \frac{1}{2} \bar{u}^2 = \text{const} \Leftrightarrow P = \left(\text{const} - \frac{\bar{u}^2}{2} \right) \rho$

$$\text{Alors } dF_x - i dF_y = -(-h + \bar{u}^2 \rho) i e^{-i\theta} SS$$

$$= \left(\frac{1}{2} \rho e^{2i\theta} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 - h \right) i e^{-i\theta} SS$$

$$= \frac{1}{2} \rho i \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 e^{i\theta} SS - i h e^{-i\theta} SS$$

$$\Rightarrow F_x - iF_y = \oint_C \frac{1}{2} \rho i \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz \quad \text{avec } dz = e^{i\theta} dS$$



③ Ecoulement uniforme autour d'un cylindre

→ On avait montré que $w = U(z + a^2/z) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$. Par le thm de Blasius,

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2} i \rho \oint_C \left\{ U \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z} \right\}^2 dz$$

$$= \frac{1}{2} i \rho \oint_C \left\{ U^2 \left(1 + \frac{a^4}{z^4} - 2 \frac{a^2}{z^2} \right) - \frac{2iU\Gamma}{2\pi z} \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 z^2} \right\} dz$$

$$= \frac{1}{2} i \rho \cdot 2\pi i \cdot -\frac{iU\Gamma}{2\pi} = i\rho U \Gamma \Rightarrow F_y = -\rho U \Gamma \text{ et } F_x = 0$$

4.11 Théorème de la portance de Kutta - J.

Thm

Soit un écoulement stationnaire autour d'un obstacle dans le plan délimité par le contour simple Γ . Si l'écoulement est uniforme loin de l'obstacle, et que Γ est sa circulation autour de Γ , on a :

$$F_x = 0 \quad \text{et} \quad F_y = -\rho U \Gamma$$

DEMO:

→ Puisque w n'a pas de singularité en dehors de Γ , on écrit :

$$\frac{dw}{dz} = U + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots = n - i\gamma$$

$$\text{Alors } I = \frac{1}{2} i \rho \oint_{\Gamma} \left(U + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots \right)^2 dz = \frac{1}{2} i \rho \oint_{\Gamma} \left(U^2 + 2U \alpha_1 + \dots \right) dz$$

$$= \frac{1}{2} i \rho \cdot 2\pi i \cdot 2U \alpha_1 = -2\pi \rho U \alpha_1$$

→ Par déformation du contour ($\Gamma' \rightarrow \Gamma$), on a

$$F_x - iF_y = -2\pi \rho U \alpha_1$$

$$\rightarrow \text{Trouvons } \alpha_1 : \oint_{\Gamma} \frac{dw}{dz} dz = 2\pi i \cdot \alpha_1 = [w]_{\Gamma} = [\varphi + i\psi]_{\Gamma}$$

= $[\varphi]_{\Gamma}$ car Γ est une ligne de courant

= $\Gamma \rightarrow \alpha_1 = \Gamma / 2\pi i$ et donc

$$F_x - iF_y = -2\pi \rho U \Gamma / 2\pi i = i\rho U \Gamma \rightarrow F_x = 0 \quad \text{et} \quad F_y = -\rho U \Gamma$$

