



LA SOLUTION DE SCHWARZSCHILD

- Solution à symétrie sphérique qui correspond à un approximation du champ gravitationnel généré par ex. par le soleil ou la Terre. C'est une solution extérieure (c'est à dire $T_{\mu\nu} = 0$): on considère que l'espace est vide autour d'un corps gravitant à symétrie sphérique.

7.1 Préliminaires

DEF La symétrie sphérique à (3+1)-D consiste en les symétries de la sphère S^2 : les rotations ordinaires de l'espace euclidien à 3-D, qui forment $SO(3)$.

② Rappels: sphère S^2

$$\rightarrow S^2 = \{ (x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1 \} \text{ dans l'espace euclidien } ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

→ Paramétrisation: on choisit (θ, φ) tel que:

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \varphi \\ y = \sin \theta \sin \varphi \\ z = \cos \theta \end{cases} \quad \text{La métrique induite sur } S^2 \text{ est alors:}$$

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

→ Quels sont les isométries de S^2 ? (isométrie = transfo qui préserve g)

Intuitivement, ce sont les isométries de \mathbb{R}^3 qui préserrent $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

↳ Exemple: rotation autour de z :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y \\ -\sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y \\ z \end{pmatrix}$$

→ Le vecteur de Killing associé est:

$$g^\mu = \frac{dx^\mu}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g = g^\mu \partial_\mu = y \partial_x - x \partial_y \in \mathcal{R}$$

Similairement, $S = z \partial_x - y \partial_y$. Et $T = z \partial_y - y \partial_z$.

En coordonnées (θ, φ) , ces vecteurs deviennent:

$$\begin{cases} R = -\partial_\varphi \\ S = -\cos \varphi \partial_\theta + \cot \theta \sin \varphi \partial_\varphi \\ T = \sin \varphi \partial_\theta + \cot \theta \cos \varphi \partial_\varphi \end{cases}$$

En effet, soit $R = -x \partial_y + y \partial_x = \xi^x \partial_x$. Alors sont covecteur associé est :

$$\begin{aligned} \sin \theta &\equiv S \\ \cos \theta &\equiv T \\ \sin \varphi &\equiv S_\varphi \\ \cos \varphi &\equiv C_\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi &= g_{\mu\nu} \xi^\nu. Calculons \xi_x = g_{xx} \xi^x + g_{yx} \xi^y + \dots = \xi^x = y. Aussi, \\ \xi &= -x dy + y dx \\ &= -S C_\varphi (C S_\varphi d\theta + S C_\varphi d\varphi) + S S_\varphi (C C_\varphi d\theta - S S_\varphi d\varphi) \\ &= d\theta (-S C S_\varphi C_\varphi + S C S_\varphi C_\varphi) + d\varphi (-S^2 C_\varphi^2 - S^2 S_\varphi^2) = -S^2 d\varphi \\ \Rightarrow R^M &= g^{MN} R_N \quad \text{et } R_\theta = 0 \Rightarrow R^M = g^{M\varphi} R_\varphi = \frac{-S^2}{S^2} = -1 \\ \Rightarrow R &= -2\varphi \end{aligned}$$

On remarque que les vecteurs $\xi_A = (R, S, T)$ satisfaisent l'algèbre de $so(3)$: $[R, S] = T$, $[S, T] = R$, $[T, R] = S$

$$\Leftrightarrow [\xi_A, \xi_B] = \epsilon_{ABC} \xi_C$$

① Propriétés :

Prop Si une métrique est indépendante qu'une coordonnée y , alors ∂_y est un vecteur de Killing.

DÉMO Supposons $g_{\mu\nu}$ indépendante de y et vérifions que $\xi = \partial_y$ est un VK :

$$\begin{aligned} \text{Lg } g_{\mu\nu} &= (\partial_\mu \xi^\nu) g_{\mu\nu} + (\partial_\nu \xi^\mu) g_{\mu\nu} + \xi^\mu \partial_\mu g_{\mu\nu} = 0 \\ \Rightarrow \partial_y g_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}$$

Prop Si α et β sont 2 vecteurs de Killing, alors leur crochétage Lie (commutateur) est également un VK.

DÉF Une métrique est dite à symétrie sphérique \Leftrightarrow elle possède 3 vecteurs de Killing satisfaisant l'algèbre de $so(3)$

7.2 Construction d'une métrique sphérique

→ On se place dans les coordonnées (t, r, θ, φ) ce qu'on peut toujours faire du par la covariance généralisée de la théorie.

La une métrique générale s'écrit alors :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(t, r, \theta, \varphi) dx^\mu dx^\nu$$

→ On peut montrer que pour que la métrique soit invariante sous $SO(3)$, il faut l'écrire sous la forme :

$$ds^2 = \alpha(r,t) dr^2 + \beta(r,t) \underbrace{(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}_{d\Omega^2} + \gamma(r,t) dt^2 + \delta(r,t) dr dt$$

Justifications : ① à (t,r) fixé, $ds^2 = \beta(r^*, t^*) d\Omega^2$, sphère de rayon $\sqrt{\beta}$

② à (θ, φ) fixé, $ds^2(t, r)$ tout point de la sphère sont équivalents

→ On peut simplifier la métrique en utilisant ses invariances résiduelles.

↪ On définit $\tilde{r}^2 = \beta(r,t)$. Alors la métrique devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{r} \\ \tilde{t} = t \end{array} \right.$$

$$ds^2 = \hat{\alpha}(\tilde{r}, t) d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2 + \tilde{\gamma}(\tilde{r}, t) dt^2 + \tilde{\delta}(\tilde{r}, t) dt d\tilde{r}$$

↪ si $\beta(r,t) < 0$: impossible. Par ailleurs, si on impose que la métrique soit asymptotiquement plat : $\lim_{r \rightarrow \infty} g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, donc

$$ds_{\text{Mink}}^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$= -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \Rightarrow \beta(r \rightarrow \infty, t) = r^2$$

Donc il y a au moins une région de l'espace avec $\beta > 0$ et on peut inverser β .

↪ On a $ds^2 = \alpha(r,t) dr^2 + r^2 d\Omega^2 + \gamma(r,t) dt^2 + \delta(r,t) dr dt$

→ Élimination du terme croisé : $\alpha dt dr$

↪ On pose $\left\{ \begin{array}{l} r = r' \\ t = f(r'; t') \end{array} \right.$ avec $\frac{\partial f}{\partial t'} \neq 0$ relation nécessaire pour avoir $t'(t, r')$

↪ Alors $dr = dr'$ et $dt = \partial_{r'} f dr' + \partial_t f dt'$

↪ $\gamma(r,t) dt^2 + \delta(r,t) dr dt = dt' dr \left(2\gamma \partial_{r'} f \partial_t f + r \partial_{r'}^2 f \right) + \dots$
à annuler

On choisit f telle que $\delta + 2\gamma \partial_t f = 0$

On a alors besoin que $\gamma \neq 0$. On suppose que c'est le cas puisque $\gamma(r \rightarrow \infty) = -1$

→ Ainsi, la symétrie sphérique + condition asymptotique, on a :

$$ds^2 = \alpha(r,t) dr^2 + \gamma(r,t) dt^2 + r^2 d\Omega^2$$

↪ On pose : $\alpha(r,t) = \exp[\mu(r,t)]$ et $\gamma(r,t) = -\exp[\nu(r,t)]$

Le choix de paramétrisation fixe le signe de α et γ afin de la métrique obtenue soit Lorentzienne $(1+\beta)D$ et tendent vers $g_{\mu\nu}$ en $r \rightarrow \infty$.

On a finalement :

$$ds^2 = -e^{\nu(r,t)} dt^2 + e^{\mu(r,t)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Théorème de Birkhoff \rightarrow (sphérique + assympt. plate = statique)

7.3 Méthode solution des EDE dans le vide

- On cherche une métrique qui soit solution des équations d'Einstein dans le vide. Ceci requiert:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = 0 \quad \parallel \text{Tr}(.) \quad (g^{\mu\nu} \cdot)$$

$$\Leftrightarrow R - \frac{R}{2} \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow R = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0$$

On doit donc calculer les symboles de Christoffel pour calculer le Riemann.

○ Symboles de Christoffel à partir l'éq. des géodésiques

- Rappel: $\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0$. Cette équation dérivée du principe variationnel: $S[x^\mu] = \int d\lambda L = \int \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \cdot d\lambda$

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial (\frac{dx^\mu}{d\lambda})} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad g_{\mu\nu} = e^\nu \quad g_{11} = e^M \quad g_{22} = r^2 \\ g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$$

$$\rightarrow \text{On a } L = \frac{1}{2} \left[-e^\nu \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 + e^M \left(\frac{dx^1}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left(\frac{dx^2}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{dx^3}{d\lambda} \right)^2 \right]$$

$(t, r, \theta, \phi) \rightarrow$ Les éq. d'E-L pour $\mu = 0$ deviennent:

$$\mu(x^0, x^1)$$

$$v(x^0, x^1)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{2} (-2 e^\nu) \frac{dx^0}{d\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^0} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{d}{d\lambda} \left(e^\nu \cdot \frac{dx^0}{d\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^0} = 0$$

$$\Leftrightarrow -e^\nu \left(\dot{\nu} \frac{dx^0}{d\lambda} + \nu' \frac{dx^1}{d\lambda} \right) \frac{d\dot{x}^0}{d\lambda} - e^\nu \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} - \frac{1}{2} \left(-\left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 e^\nu \cdot \dot{\nu} + \left(\frac{dx^1}{d\lambda} \right)^2 e^M \cdot \dot{\mu} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} \cdot (-e^\nu) - \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 \frac{e^\nu}{2} \dot{\nu} + \left(\frac{dx^1}{d\lambda} \right)^2 \frac{e^M}{2} \dot{\mu} - \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^0}{d\lambda} e^\nu \nu' = 0 \quad \parallel \cdot e^{-\nu}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} + \frac{\dot{\nu}}{2} \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{2} e^{M-\nu} \cdot \dot{\mu} \left(\frac{dx^1}{d\lambda} \right)^2 + \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^0}{d\lambda} \nu' = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma_{00}^0 = \dot{\nu}/2 \quad \Gamma_{11}^0 = \dot{\mu} e^{M-\nu}/2 \quad \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \nu'/2$$

→ Similairement, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^1 &= e^{v-M} v'/2, \quad \Gamma_{01}^1 = \mu/2, \quad \Gamma_{11}^1 = \mu'/2, \quad \Gamma_{22}^1 = -e^{-\mu} \cdot r \\ \Gamma_{33}^1 &= -e^{-M} \cdot r \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{12}^2 = r^{-1}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{13}^3 &= v^{-1}, \quad \Gamma_{32}^3 = \cot \theta, \quad \text{tous les autres sont nuls.}\end{aligned}$$

③ Calcul du Riemann et du Ricci

→ Le Riemann est donné par $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\alpha - \partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \Gamma_{\gamma\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\mu - \Gamma_{\delta\mu}^\mu \Gamma_{\beta\gamma}^\mu$
avec $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\gamma\delta\beta} = R_{\beta\delta\gamma\alpha}$

↳ Calculons un Riemann :

$$\begin{aligned}R_{0101}^0 &= \partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_1 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{0\mu}^0 \Gamma_{11}^\mu - \Gamma_{1\mu}^0 \Gamma_{01}^\mu \\ &= 2 \left(\frac{\ddot{\mu}}{2} e^{M-v} \right) - 2 \left(v'/2 \right) + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 \\ &= \frac{\ddot{\mu}}{2} e^{M-v} + \frac{\dot{\mu}}{2} (\ddot{\mu} - \dot{v}) e^{M-v} - \frac{v''}{2} + \frac{\dot{v}}{2} \frac{\dot{\mu}}{2} e^{M-v} + \frac{v'}{2} \frac{\mu'}{2} - \frac{v'^2}{4} - \frac{\dot{\mu}}{2} e^{M-v} \cdot \frac{\dot{\mu}}{2} \\ &= e^{M-v} \left[\frac{\ddot{\mu}}{2} - \frac{\dot{\mu} \dot{v}}{2} + \frac{\dot{v} \dot{\mu}}{4} - \frac{\dot{\mu}^2}{4} \right] - \frac{v''}{2} + \frac{\mu' v'}{4} - \frac{v'^2}{4} \\ &= \frac{\ddot{\mu}}{2} e^{M-v} + \frac{\dot{\mu}^2}{4} e^{M-v} - \frac{\dot{\mu} \dot{v}}{4} e^{M-v} - \frac{v''}{2} + \frac{\mu' v'}{4} - \frac{v'^2}{4} = R_{0101}^0\end{aligned}$$

→ Les autres composantes non nulles sont :

$$R_{212}^0 = -\mu' r e^{-v}/2$$

$$R_{212}^1 = \mu' r e^{-\mu}/2$$

$$R_{313}^0 = \mu' r \sin^2 \theta e^{-v}/2$$

$$R_{313}^1 = \mu' r \sin^2 \theta e^{-M}/2$$

$$R_{202}^0 = -r v' e^{-M}/2$$

$$R_{202}^1 = \sin^2 \theta (1 - e^{-\mu})$$

$$R_{303}^0 = r \sin^2 \theta v' e^{-M}/2$$

→ Calculons le Ricci :

$$R_{00} = R_{0\infty 0}^0 = R_{010}^1 + R_{020}^2 + R_{030}^3$$

$$\rightarrow R_{010}^1 = g^{1\mu} R_{\mu 010} = g^{11} R_{010} = g^{11} R_{0101} \cdot \epsilon_{11} = 1$$

$$= g_{00} g^{11} R_{101}^1 = g_{00} g^{11} R_{101}^0 = g_{00}/g^{11} \cdot R_{101}^0$$

$$= -e^v e^{-M} \cdot R_{101}^0 \text{ connu}$$

On trouve :

$$R_{00} = -\frac{\ddot{\mu}}{2} - \frac{1}{4} \dot{\mu}(\ddot{\mu} - \dot{v}) + e^{v-M} \left[v''/2 - \mu' v'/4 + v'^2/4 + v'/2 \right]$$

$$R_{01} = \dot{\mu}/r$$

$$R_{11} = \frac{1}{4}(\ddot{\mu} - \dot{v}) \dot{\mu} e^{M-v} + \frac{1}{2} e^{M-v} \ddot{\mu} - \frac{1}{2} v'' + \frac{1}{4} v' \mu' - \frac{1}{4} v'^2 + \mu'/r$$

$$R_{22} = e^{-M} (e^{M-1} + \frac{v}{2} (\mu' - v'))$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}$$

Or, $R_{\mu\nu} = 0$. Ainsi,

$$\textcircled{1} \quad R_{01} = 0 \Rightarrow \dot{\mu} = 0 \Rightarrow \mu = \mu(r) \text{ et } \ddot{\mu} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad R_{00} = 0 = R_{11} \Rightarrow R_{00} + e^{\nu-\mu} R_{11} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{\nu-\mu} \cdot \nu' / r + e^{\nu-\mu} \mu' / r = 0 \Leftrightarrow \nu' + \mu' = 0 \Rightarrow \nu = \lambda(t) - \mu(r)$$

$$\Rightarrow e^\nu = e^{-\mu(r)} e^{\lambda(t)}$$

$$\text{La métrique devient: } ds^2 = -e^{-\mu(r)} e^{\lambda(t)} dt^2 + e^{\mu(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

En redéfinissant la coord. temporelle $dt^2 \mapsto e^{\lambda(t)} dt^2$, on a:

$$ds^2 = -e^{-\mu} dt^2 + e^{\mu} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

La métrique ne dépend plus du temps!

DEF

Une métrique est statique si il existe un système de coord. tq

① la métrique est indépendante du temps (stationnaire)

② la métrique est invariante sous $t \mapsto -t$

Une telle métrique peut s'écrire $ds^2 = g_{00}(x^i) dt^2 + g_{ij}(x^k) dx^i dx^j$

Thm

(de Birkhoff) Toute solution asymptotiquement plate à symétrie sphérique des équations d'Einstein du vide est statique.

$$\textcircled{3} \quad R_{22} = 0 \Rightarrow e^{-\mu} (e^{\mu} - 1 + \frac{r}{2} (\mu' - \nu')) = 0 \quad \mu' = -\nu'$$

$$\Leftrightarrow e^{\mu} + r\mu' - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\mu} + e^{\mu} (-r e^{-\mu})' = 0$$

$$\Leftrightarrow (r e^{-\mu})' = 1 \Leftrightarrow r e^{-\mu} = r + C \stackrel{!}{=} r - 2m$$

$$\Rightarrow e^{-\mu} = 1 - 2m/r = e^\nu$$

DEF

On trouve la solution du Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - 2m/r} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

③ Interprétation de la constante d'intégration

$$\rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} ds^2 = ds_{\text{Mink}}^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$\text{et } ds^2 \approx -(1 - 2m/r) dt^2 + (1 + 2m/r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 + \mathcal{O}(1/r^2)$$

$$\text{Or, la limite newtonienne donne } g_{00} = -\left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right) \stackrel{!}{=} -1 + \frac{2m}{r}$$

$$\Leftrightarrow -1 + \frac{2GM}{rc^2} \stackrel{!}{=} -1 + \frac{2m}{r} \Leftrightarrow m = GM/c^2$$

$$\Phi = -\frac{GM}{r}$$

DEF

Le rayon gravitationnel d'un corps est $m = \frac{GM}{c^2}$, $[m] = L$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

7.4 Singularités de la métrique

→ La forme de la métrique du Schwarzschild diverge en $r=0$ et $r=2m$. Les coeff. $g_{\mu\nu}$ de la métrique sont des qtés qui dépendent du choix du système de coordonnées \Rightarrow pas de signification intrinsèque.

→ Exemple : la métrique $ds^2 = \frac{dp^2}{(p-2m)^4} + \frac{1}{(p-2m)^2} d\theta^2$ diverge en $p=2m$.

Mais en effectuant $r=(p-2m)^{-1} \Rightarrow dr^2 = (p-2m)^{-4} dp^2$, on retrouve la métrique $ds^2 = dx^2 + dy^2$

→ Pour déterminer si une région représente un véritable pathologie, on doit se fier à des qtés scalaires (une qté scalaire qui diverge dans 1 système de coordonné diverge dans tous).

DEF Un point est appelé une singularité si une quantité scalaire associée à la métrique y devient infinie ET que ce point peut être atteint en voyageant une distance finie le long d'une courbe.

○ Calculs de quantités scalaires :

→ On connaît le scalaire de Ricci R , mais on sait que $R=0$

DEF Le scalaire de Kretschmann est défini comme $R_{\alpha\mu\beta\lambda} R^{\alpha\mu\beta\lambda} = K$

→ Calculons K pour espérer avoir une qté scalaire non triviale :

$$\begin{aligned} K &= R_{\alpha\mu\beta\lambda} R^{\alpha\mu\beta\lambda} + R_{\mu\lambda\alpha\beta} R^{\mu\lambda\alpha\beta} = 2R_{\alpha\mu\beta\lambda} R^{\alpha\mu\beta\lambda} + R_{\mu\lambda\alpha\beta} R^{\mu\lambda\alpha\beta} \\ &= (..) = \frac{48M^2}{r^6} = \frac{48G^2M^2}{c^4 r^6} \end{aligned}$$

→ En $r=0$, $K \rightarrow \infty \Rightarrow$ la métrique est singulière (l'amplitude des forces de maré est ∞ en $r=0$), mais pas en $r=2m$ (pathologie de la métrique)

DEF On définit le rayon de Schwarzschild $R_s \equiv \frac{2GM}{c^2} = 2m$

$$R_s(\text{terre}) = 1\text{ cm}, R_s(\text{soleil}) \approx 3\text{ km}$$

7.5 Géodésiques de la métrique de Schwarzschild

- Des particules -fut vont suivre des géodésiques temporelles de la métrique de Schwarzschild
 ↳ généralisation relativiste du déplacement dans un potentiel central en mécanique Newtonienne.

① Problème de Kepler en mécanique Newtonienne.

→ Soit un planète de masse m dans le champ de gravitation d'un corps de masse M (générant un potentiel central).

Les équations du mouvement sont $\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}\varphi = -\vec{\nabla}(-\frac{GM}{r})$

→ On suppose que le mouvement se fait dans le plan $\Theta = \pi/2$

→ On a 2 intégrales premières :

① Conservation de $|t^*|$ (amplitude du moment angulaire) :

$$r^2\dot{\phi} = a = \text{constante} \quad 2^{\text{e}} \text{ loi de Kepler} \sim \text{loi des aires}$$

② Conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} = E \hat{=} E.m \quad \text{où } E \text{ densité d'énergie}$$

$$\text{Or, } \vec{r} = r\vec{e}_r \quad \vec{r} = \dot{r}\vec{e}_r + r\vec{e}_{\phi} \Rightarrow \dot{r}\vec{e}_r + r\vec{e}_{\phi}\vec{\omega}_{\phi}$$

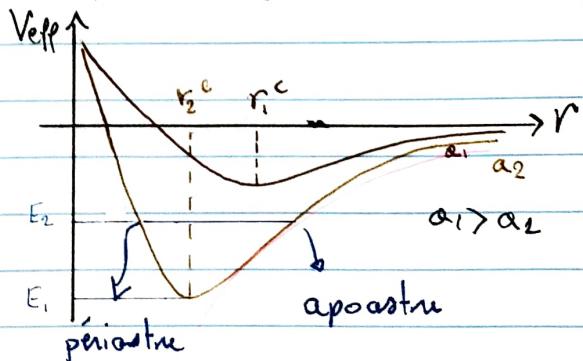
$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{GM}{r} = E \quad \text{Or, } r^2\dot{\phi}^2 = (\frac{r^2\dot{\phi}}{a})^2 = \frac{a^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{a^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} = E \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{r}^2 = E - \left(\frac{a^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} \right)$$

potentiel gravitationnel
potentiel centrifuge

$$\text{On pose } V_{\text{eff}}(r) = \frac{a^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}$$

→ Les trajectoires possibles d'un particule sont obtenues en comparant l'énergie E à V_{eff} , dont la forme dépend de a (si $E < V_{\text{eff}}$, alors $\dot{r}^2 > 0$)



En E_1 : orbite circulaire

E_2 : orbite elliptique

↪ Orbite circulaire lorsque

$$V_{\text{eff}}(r_c) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{a^2}{2}r_c^{-3} + \frac{GM}{r_c} = 0$$

$$\Leftrightarrow r_c = a^2/GM \rightarrow \exists t \text{ pour a to}$$

① Constantes du mouvement pour la géodésique de Schwarzschild :

① Longueur du vecteur tangent : (mais t métrique)

→ Pour une géodésique de genre temps paramétrisée par le temps propre:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2$$

Alors $L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt^2} = -\frac{1}{2}$ constante le long de la géodésique.

Pour une géodésique de genre lumière ($ds^2=0$), on a $L=0$

② Métrique statique :

Si $g_{\mu\nu}(t, x^i) = g_{\mu\nu}(x^i)$, alors $\mathcal{L}(t, x^i) = \mathcal{L}(x^i)$. Par E-L, on a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = \text{cste} = -b$$

$$\text{Or, } \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[-(1-2m/r)\dot{t}^2 + (1-2m/r)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}^2 \right] = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi, } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = - (1-2m/r)\dot{t} = -b \Leftrightarrow (1-2m/r)\dot{t} = b$$

③ Symétrie sphérique :

Si la métrique est indépendante d'un coord (ici t), ça fournit une géo conservée le long des géodésiques gravitationnelles. Ceci se généralise à tout vecteur de Killing de la métrique.

Ici, la symétrie sphérique fournit 3 vecteurs de Killing formant $SO(3) : R, S, T$. Cex-ci fournissent 3 constantes du mvnt supplémentaires. Deux combilis de ces crites $\Rightarrow \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = C \stackrel{!}{=} \pi/2$ (\Leftrightarrow en méca Newtonienne à $\partial L = 0$). La conservation de $|L|$ est une consq de l'indépendance de L en φ : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = r^2 \dot{\varphi} = a$

Prop Soit ξ^A un champ de vecteurs de Killing et u^A le champ des vecteurs tangents à une géodésique. Alors la quantité $\xi^M u_M$ est conservée le long de la géodésique (ie est une constante du mouvement).

$$\begin{aligned} \text{DEMO } \frac{d}{dt} (\xi^A u_M) &= u^\mu \partial_\mu (\xi^A u_M) = u^\mu \nabla_\mu (\xi^A u_M) = u^\mu (\nabla_\mu \xi^A u_M + \xi^A \nabla_\mu u_M) \\ &= (u^\mu \nabla_\mu \xi^A) u_M + (u^\mu \nabla_\mu u_M) \xi^A = u^\mu u^A \underbrace{\nabla_\mu \xi_A}_{\text{sym}} + \xi_A \underbrace{\nabla_\mu u^A}_{\text{antisym}} = 0 \text{ car géodésique} \end{aligned}$$

① Géodésiques de genre temps :

→ Une fois les constantes du mouvement calculées, on peut les injecter dans le Lagrangien :

$$(1-2m/r)\dot{t} = b \\ r^2\dot{\varphi} = a$$

$$\Leftrightarrow -(1-2m/r)^{-1}b^2 + (1-2m/r)^{-1}\dot{r}^2 + \frac{a^2}{r^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow -b^2 + \dot{r}^2 + (1+a^2/r^2)(1-2m/r) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{b^2}{2} - \frac{1}{2}(1-\frac{2m}{r})(1+\frac{a^2}{r^2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{b^2}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{r} + \underbrace{\frac{a^2}{2r^2}}_{\substack{\text{gravitation} \\ \downarrow}} - \underbrace{\frac{ma^2}{r^3}}_{\text{centrifuge}} \right)$$

$$\frac{1}{r}\dot{r}^2 = E + \frac{m}{r} - \frac{a^2}{2r^2}$$

\downarrow correction relativiste

→ Pour $a \neq 0$ ($\dot{\varphi} \neq 0$), la correction relativiste contribue à l'ordre ? $\sim \frac{ma^2/r^3}{a^2/2r} \sim \frac{m}{r} \sim \frac{GM_0}{c^2 R} \sim 10^{-7}$. Effet petit mais observable si cumulatif

② Etude de $V_{eff}(r)$ et des orbites :

$$\rightarrow \text{On a } V_{eff}(r) = \frac{1}{2} - \frac{m}{r} + \frac{a^2}{2r^2} - \frac{ma^2}{r^3}$$

$$\rightarrow V'_{eff}(r) = \frac{m}{r^2} - \frac{a^2}{r^3} + \frac{3ma^2}{r^4}$$

① Lorsque $r=2m$ et $r \rightarrow \infty$:

$$V_{eff}(r \rightarrow \infty) = \frac{1}{2}, \quad V_{eff}(r=2m) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{a^2}{c.4m^2} - \frac{ma^2}{8m^3} = 0$$

② Orbites circulaires :

Il faut $r / V_{eff}(r) = 0$

$$\hookrightarrow mr^2 - a^2r + 3ma^2 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4m \cdot 3ma^2}}{2m}$$

$$r = \frac{a^2 \pm a\sqrt{a^2 - 12m^2}}{2m}$$

→ Si $a^2 < 12m^2$: pas d'orbite circulaire $\quad // a=0 \text{ chez Newton}$

→ Si $a^2 = 12m^2$: orbite circulaire en $r = \frac{a^2}{2m} = 6m$

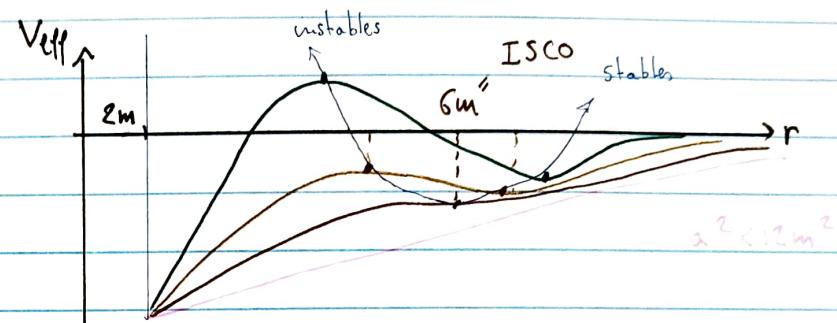
→ Si $a^2 > 12m^2$: V'_{eff} s'annule 2x : 2 orbites circulaires (stable et instable)

On trouve $r_{\text{instable}} < 6m$ et $r_{\text{stable}} > 6m$
 $\Rightarrow r=6m$ est le rayon minimal pour avoir une orbite circulaire stable = ISCO (Innermost stable circular orbit).

② Rayon minimum d'une orbite circulaire (instable):

$$r_{\text{min}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^2 - a \sqrt{a^2 - 12m^2}}{2m} \approx \frac{a^2 - a^2(1 - 12m^2/2a^2)}{2m} = \frac{12m^2}{9m} = 3m$$

Il n'existe pas d'orbite géodésique circulaire pour $r < 3m$. Il existe cependant des trajectoires plongeantes et des trajectoires accélérées.



→ On peut passer d'un orbite circulaire à un autre jusqu'à $r=6m$.

A cet endroit, pour passer à un orbite circulaire plus proche, il faut augmenter a . On peut s'approcher de $r=3m$, mais l'atteindre $a=\infty \Rightarrow$ on plonge.

③ Avance du périhélie de Mercure



→ La précession des ellipses (par ex du Mercure autour du Soleil) ne peut être expliquée par la théorie Newtonienne

Historiquement, on a postulé l'existence d'une nouvelle planète: Vulcain. On va déterminer l'amplitude de cet effet en RG.

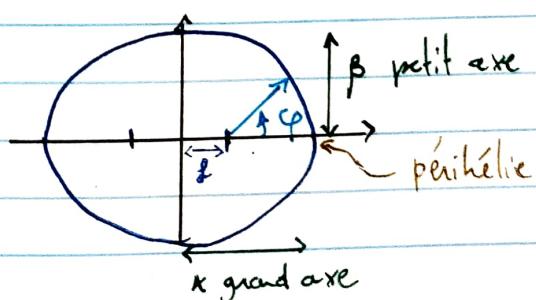
Il faut alors exprimer $r(\varphi)$ à partir de l'équation des géodésiques. Pour une ellipse parfaite $r(\varphi) = r(\varphi + 2\pi)$

$$\rightarrow p = a(1 - e^2); e = d/a^2; f = \sqrt{a^2 - p^2}$$

$$\rightarrow u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)} = \frac{1 + e \cos \varphi}{p}$$

Pour une ellipse, $e < 1$

excentricité



→ En RG, on avait:

$$[\alpha] = L \quad -(1-2m/r)^{-1} b^2 + (1-2m/r)^{-1} \dot{r}^2 + \frac{\alpha^2}{r^2} = -1$$

Or,

$$r\dot{\varphi} = a$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{dz} \cdot \frac{dz}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} \Leftrightarrow \dot{r} = \dot{\varphi} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{a}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \text{. On injecte:}$$

$$-(1-2m/r)^{-1} b^2 + \frac{\alpha^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 (1-2m/r)^{-1} + \frac{\alpha^2}{r^2} = -1$$

$$\Rightarrow -b^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{\alpha^2}{r^4} + \frac{\alpha^2}{r^2} (1-2m/r) = -1 + 2m/r$$

$$\text{On pose } u = 1/r \Rightarrow \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \Rightarrow \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \alpha^2 u^2 = b^2 - 1 + 2mu + 2m\alpha^2 u^3 \quad \text{on pose } a \neq 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 = \frac{b^2 - 1}{\alpha^2} + \frac{2mu}{\alpha^2} + 2m\alpha^2 u^3 \parallel d/d\varphi (\cdot)$$

$$\Rightarrow 2 \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d^2u}{d\varphi^2} + 2u \frac{du}{d\varphi} = \frac{2m}{\alpha^2} \frac{du}{d\varphi} + 6mu \frac{du}{d\varphi}$$

$$\text{On trouve } \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{\alpha^2} + 3mu^2$$

→ Chez Newton, on avait:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{GM}{r} = \text{const} & \text{conservation de l'E} \\ r^2 \ddot{\varphi} = \alpha_N & \text{conservation du L} \end{cases}$$

$$[\alpha_N] = L^2 T^{-1}$$

On trouve l'équation de Binet:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{\alpha^2}$$

→ Comparons les 2 expressions:

→ L'ordre de grandeur de la correction est $\frac{3m/r^2}{1/r} \sim \frac{m}{r} \sim \frac{GMm}{R_0 r^3}$

On va traiter perturbativement la nouvelle eq.

→ Solution Newtonienne: donnée par: $m_0 = \frac{m}{\alpha^2} (1 + e \cos \varphi)$

→ Traitement perturbatif de la solution Newtonienne:

On écrit $u = u_0 + u_1$, avec $u_1 \ll u_0$. On injecte:

$$\frac{d^2 u_0}{d\varphi^2} + \frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + u_0 + u_1 = \frac{m}{a^2} + 3m \left(u_0^2 + u_1^2 + 2u_0 u_1 \right)$$

très petit

$$\Rightarrow \frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + u_1 (1 - 6m u_0) = 3m u_0^2 \quad m u_0 \sim m/R \sim 10^{-7}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + u_1 = 3m (1 + e \cos \varphi)^2 \frac{m^2}{a^4}$$

$\cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1$

$$= \frac{3m^3}{a^4} \left[\left(1 + e^2/2 \right) + 2e \cos \varphi + \frac{e^2}{2} \cos(2\varphi) \right]$$

$\cos^2 \varphi = (1 + \cos(2\varphi))/2$

On s'intéresse à la correction non-périodique. Une solution particulière est donnée par :

$$u_1 = \frac{3m^3}{a^4} \left[\left(1 + e^2/2 \right) - \frac{1}{6} e^2 \cos(2\varphi) + e \varphi \sin \varphi \right]$$

négligeables car c'est une solution périodique

$$\hookrightarrow u \approx \frac{m}{a^2} (1 + e \cos \varphi) + \frac{3m^3}{a^4} e \varphi \sin \varphi$$

$$\approx \frac{m}{a^2} + \frac{me}{a^2} \left(\cos \varphi + \frac{3m^2}{a^2} \varphi \sin \varphi \right)$$

$\cos[\varphi(1 + \varepsilon)] = \cos(\varphi - \varphi\varepsilon)$

$$\approx \frac{m}{a^2} \left(1 + e \cos [\varphi(1 - 3m^2/a^2)] \right)$$

$\approx \cos \varphi + \varphi e \sin \varphi$

→ Le périhélie correspond au $\max \{u = 1/r\}$: atteint lorsque

$$\cos[\varphi(1 - 3m^2/a^2)] = 1 \Rightarrow \varphi_n (1 - 3m^2/a^2) = 2\pi n$$

$$\varphi_n = 2\pi (1 - 3m^2/a^2) > 2\pi$$

$$\hookrightarrow \Delta \varphi = \varphi_n - 2\pi \approx 2\pi (1 + 3m^2/a^2) - 2\pi = \frac{6\pi m^2}{a^2}$$

↪ Application numérique :

$$\Delta \varphi \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ rad/orbite (Mercure-Soleil)}$$