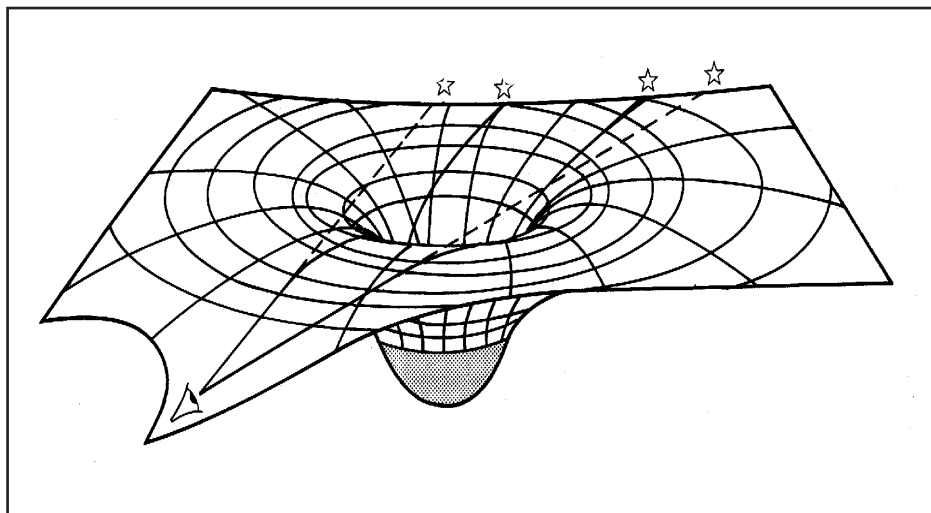


# Introduction à la Relativité Générale

Christiane Schomblond et Glenn Barnich\*

Physique Théorique et Mathématique,  
Université Libre de Bruxelles,  
Campus de la Plaine C.P. 231, B-1050 Bruxelles, Belgique



\*Chercheur Qualifié du FNRS.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Le Principe d'équivalence</b>	<b>5</b>
2.1	Enoncé . . . . .	5
2.2	Forces gravitationnelles . . . . .	6
2.3	Relations entre $g_{\mu\nu}$ et $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ . . . . .	8
2.4	Limite Newtonienne . . . . .	9
2.5	Décalage gravitationnel des fréquences . . . . .	10
2.5.1	Dans un champ de gravitation constant . . . . .	10
2.5.2	Dilatation du temps. Décalage des fréquences dans le champ gravitationnel d'une étoile . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Eléments d'analyse tensorielle</b>	<b>14</b>
3.1	Le principe de covariance générale . . . . .	14
3.2	Tenseurs en un point . . . . .	15
3.2.1	Espace vectoriel $V$ sur $\mathbb{R}$ . . . . .	15
3.2.2	Espace vectoriel dual $V^*$ . . . . .	16
3.2.3	Tenseurs . . . . .	17
3.3	Variétés différentiables et champs de tenseurs . . . . .	21
3.3.1	Variétés différentiables . . . . .	21
3.3.2	Métrique pseudo-riemannienne . . . . .	27
3.4	Dérivée covariante de champs de tenseurs . . . . .	29
3.4.1	Transport parallèle de vecteurs. Connexions . . . . .	29
3.4.2	Transport parallèle de tenseurs . . . . .	31
3.4.3	Dérivées covariantes . . . . .	31
3.4.4	Transport parallèle le long d'une courbe . . . . .	32
3.4.5	Connexion métrique. Symboles de Christoffel . . . . .	33
3.5	Courbure. Tenseur de Riemann . . . . .	34
3.5.1	Propriétés de symétries du tenseur de Riemann . . . . .	35
3.5.2	Gravitation ou coordonnées curvilignes? . . . . .	35
3.5.3	Tenseur de Ricci. Courbure scalaire . . . . .	37
3.5.4	Tenseur d'Einstein . . . . .	37

<b>4</b>	<b>Equations du mouvement dans un champ de gravitation</b>	<b>38</b>
4.1	Géodésiques . . . . .	38
4.1.1	Equation des géodésiques . . . . .	38
4.1.2	Courbe autoparallèle . . . . .	39
4.1.3	Paramètre affin . . . . .	40
4.1.4	Géodésiques et connexion métrique . . . . .	40
4.1.5	Observateurs localement inertiels . . . . .	42
4.2	Déviations des géodésiques . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Les équations d'Einstein</b>	<b>44</b>
5.1	Contraintes sur la théorie de la gravitation . . . . .	44
5.2	Tenseur énergie-impulsion . . . . .	45
5.2.1	$T_{\mu\nu}$ comme source du champ de gravitation . . . . .	45
5.2.2	Conservation de l'énergie et de l'impulsion . . . . .	46
5.3	Equations du champ de gravitation . . . . .	47
5.3.1	Conditions de coordonnées . . . . .	48
5.3.2	Problème des conditions initiales . . . . .	49
5.4	Limite Newtonienne des équations d'Einstein . . . . .	49
<b>6</b>	<b>La solution de Schwarzschild</b>	<b>51</b>
6.1	Champs gravitationnels statiques . . . . .	51
6.2	Solution à symétrie sphérique . . . . .	52
6.2.1	Métrique à symétrie sphérique . . . . .	52
6.2.2	Equations d'Einstein . . . . .	53
6.2.3	Théorème de Birkhoff . . . . .	54
6.3	La solution de Schwarzschild . . . . .	55
6.4	Géodésiques de la métrique de Schwarzschild . . . . .	57
6.4.1	Symétries, constantes du mouvement . . . . .	57
6.4.2	Orbites spatiales (géodésiques de type temps) . . . . .	59
6.4.3	Trajectoires spatiales (géodésiques de type lumière) . . . . .	60
<b>7</b>	<b>Tests classiques de la Relativité Générale</b>	<b>62</b>
7.1	Avance du périhélie de Mercure . . . . .	62
7.1.1	Problème de Kepler . . . . .	62
7.1.2	Correction relativiste . . . . .	64
7.2	Déviations des rayons lumineux . . . . .	66
7.3	Retard de l'écho radar . . . . .	68
<b>A</b>	<b>Calcul du <math>R_{00}</math> de la métrique générale à symétrie sphérique</b>	<b>71</b>
A.1	Rappel des définitions . . . . .	71
A.2	$R_{00}$ pour la métrique (6.2.17) . . . . .	71

<b>B</b>	<b>Géodésiques comme courbes extrémales</b>	<b>73</b>
B.1	Eléments de calcul des variations . . . . .	73
B.2	Géodésiques . . . . .	75
B.3	Cas de la métrique de Schwarzschild . . . . .	75
B.3.1	Constantes du mouvement . . . . .	76
B.3.2	Symboles de Christoffel . . . . .	76

# Chapitre 1

## Introduction

La loi de Newton relative à la gravitation implique une action à distance instantanée qui est incompatible avec la relativité restreinte. Celle-ci introduit une vitesse limite de propagation, la vitesse de la lumière ( $c$ ), et exige que les équations soient invariantes de forme sous les transformations de Lorentz.

Le problème posé au début du XX<sup>ème</sup> siècle était de modifier à la fois l'équation de Poisson du potentiel de gravitation  $\phi$

$$\Delta\phi = 4\pi G\mu \tag{1.0.1}$$

( $\mu$  désigne la densité de masse qui est la source du champ) et les équations du mouvement des particules

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = -\bar{\nabla}\phi \tag{1.0.2}$$

afin d'en faire des équations covariantes sous les transformations de Lorentz, condition imposée à toutes les lois de la Physique par le principe de relativité restreinte.

Déjà à la fin de son long article de 1906 sur "La dynamique de l'électron" [1], Henri Poincaré essaie de construire un modèle relativiste de la gravitation et obtient une loi d'attraction entre deux corps massifs qui "améliore" la loi de Newton en ce sens qu'elle est "retardée" et "covariante relativiste". Cette nouvelle loi n'a cependant jamais réellement trouvé application en astronomie; ce qu'on en retient, c'est une première évaluation de l'avance du périhélie de Mercure: elle a le bon signe mais est trop petite (7" par siècle au lieu des 35" prédits par Le Verrier, corrigés plus tard en 43" par Newcomb). La plupart des tentatives d'obtenir une loi fondamentale pour la force gravitationnelle qui ont vu le jour à l'époque sont désormais passées aux oubliettes.

Dès que les déductions physiques de la Relativité Restreinte ont atteint un certain niveau de développement et de confiance, Einstein s'est attaché à étendre son principe de Relativité à une classe de référentiels plus large que celle des observateurs inertiels privilégiés de la Relativité Restreinte. Cette extension a été rendue possible par l'introduction du "principe d'équivalence". Rappelons que, dans la mécanique

Newtonienne, un système placé dans un champ de gravitation constant et homogène est équivalent à un système uniformément accéléré. Einstein érige en principe que cette équivalence doit pouvoir s'étendre à tous les processus physiques. Ceci est vraiment à la base de la relativité générale. Puisqu'on peut faire les calculs dans un système accéléré, le principe d'équivalence offre la possibilité de calculer les effets d'un champ de gravitation sur tout processus physique. C'est en raisonnant de cette façon qu'Einstein énonce très vite le résultat que le temps s'écoule plus lentement en des points où le champ de gravitation est plus grand; il en déduit immédiatement que, lorsqu'on observe sur terre la lumière émise par le soleil, les fréquences reçues sont décalées vers le rouge par rapport aux fréquences émises [2]. Dans son article de 1911, il suggère une possibilité de vérification expérimentale de ce red shift. Il a fallu attendre 1960 pour voir cette expérience réalisée par Pound et Rebka [3]. Généralement compté parmi les tests classiques de la Relativité Générale, le red shift n'en est pas vraiment un puisqu'il ne requiert pas la connaissance des équations du champ, ni leur résolution.

Dans le même article de 1911, Einstein fait remarquer qu'en passant d'un référentiel inertiel à un référentiel accéléré, une droite dans le premier devient une courbe dans le second. Le principe d'équivalence implique ainsi que la trajectoire des rayons lumineux dans un champ de gravitation est courbée donc que la vitesse de la lumière n'est plus constante. Il en déduit que la courbure des rayons lumineux qui frôlent le bord du soleil doit modifier la position apparente des étoiles fixes. Il calcule l'angle de déviation des rayons lumineux mais à l'époque, la structure du champ n'est pas encore totalement comprise, et la valeur qu'il donne n'est que la moitié de la valeur relativiste correcte qu'il calculera plus tard. Il en propose aussi une vérification expérimentale. Elle fut réalisée en 1919 lors d'une éclipse de soleil par une équipe dirigée par Sir Arthur Eddington. Cette première confirmation expérimentale des prédictions d'Einstein était fort probablement entachée d'erreurs plus importantes que celles réellement reconnues, mais malgré ses défauts, elle a définitivement assis la notoriété d'Einstein.

Einstein réalise que cette théorie du champ de gravitation homogène basée sur le principe d'équivalence rompt le cadre de la relativité restreinte. Parce que la vitesse de la lumière et le taux de variation d'une horloge dépendent du potentiel de gravitation, la définition qu'il a donnée de la simultanéité n'est plus valable et les transformations de Lorentz perdent leur sens. "De ce point de vue, écrit-il, la relativité restreinte ne peut être correcte qu'en l'absence de gravitation". Le champ de gravitation est une quantité physique qui doit être reliée aux autres quantités physiques par des lois. On doit exiger que ces lois soient covariantes pour un groupe plus large de transformations: il reste cependant à définir la variance du potentiel de gravitation. La question qu'il se pose est donc d'élaborer une théorie cohérente, basée sur le principe d'équivalence, mais valable pour un champ non homogène.

En 1912, A. Einstein et M. Abraham essaient de décrire un potentiel de gravitation statique général par un champ scalaire qui caractérise la valeur de la vitesse de la lumière en chaque point de l'espace-temps et proposent aussi des équations

différentielles auxquelles ce potentiel devrait obéir. En plus du fait que seuls des champs statiques pouvaient réellement être pris en compte dans leurs développements, l'abondance des difficultés rencontrées leur fait abandonner cette piste. D'autres tentatives sont aussi proposées par Nordström (1912) et Mie (1913) puis également abandonnées soit parce que leurs conséquences physiques sont erronées (mauvais signe pour l'avance du périhélie de Mercure), soit parce qu'elles n'incorporent pas l'égalité des masses inertielle et gravitationnelle. Einstein ne se laisse pas décourager pour autant.

En collaboration avec M. Grossmann [4], il fait une avancée considérable. Ils montrent qu'en utilisant des coordonnées curvilignes arbitraires dans l'espace-temps le carré de l'élément de longueur devient une forme quadratique en les différentielles avec certains coefficients  $g_{\mu\nu}$ . Ils montrent également que i) bien qu'introduits comme objets géométriques ce sont ces  $g_{\mu\nu}$  qui doivent être vus comme les grandeurs physiques appropriées à la description du potentiel de gravitation dans un système de coordonnées et ii) que l'introduction de ces  $g_{\mu\nu}$  dans les équations du mouvement des particules et dans les équations du champ électromagnétique du vide donne à ces équations une forme covariante générale pour tous les changements de coordonnées. Seules les équations du champ de gravitation lui-même n'ont pas encore la bonne forme.

Entre 1914 et 1915, Einstein se montre plus rigoureux dans la recherche des équations du champ et revient au principe de covariance générale. C'est dans la théorie de Riemann des espaces courbes qu'il puise les éléments géométriques qui lui faisaient défaut; il réussit à écrire des équations covariantes pour les coefficients de la métrique qui obéissent à toutes les contraintes imposées par la physique. Quasi au même moment, Hilbert [5] obtenait les mêmes équations de champ mais en les déduisant d'un principe variationnel, présentation mathématique non totalement appréciée par les physiciens de l'époque. Dans une série d'articles de 1915, publiés dans les comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Berlin, Einstein présente ses équations et les met à l'épreuve: il explique l'avance du périhélie de Mercure et obtient les 43" d'arc par siècle en parfait accord avec les observations astronomiques et prédit une déviation de 1.7" des rayons lumineux dans le champ de gravitation du soleil, double de celle qu'il avait calculée précédemment dans le cadre des champs constants. Ces résultats qu'il dérive en utilisant une solution approchée de ses équations de champ sont rapidement confirmés par ceux de Schwarzschild [6] avec sa solution exacte à symétrie sphérique.

Einstein reprend le tout, en 1916, dans un admirable article de synthèse intitulé "Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie" [7].

# Chapitre 2

## Le Principe d'équivalence

### 2.1 Enoncé

Le principe d'équivalence est fondé sur l'égalité de la masse inertielle et la masse gravitationnelle passive. Cette égalité avait déjà été testée par Newton puis vérifiée de façon plus précise par Bessel en 1830. En 1889, Roland von Eötvös [8], réussit à prouver que le rapport de ces masses ne varie pas d'une substance à l'autre de plus de  $10^{-9}$ . Plus récemment, la précision a été portée à  $10^{-11}$  pour l'aluminium et l'or [9] et même à  $10^{-12}$  pour l'aluminium et le platine [10] dans le champ de gravitation du soleil. Ces mesures sont parmi les plus précises jamais réalisées.

La masse inertielle,  $m^I$ , est celle qui figure dans la loi de Newton  $\bar{F} = m^I \bar{a}$  et qui mesure la résistance d'un corps au mouvement; la masse gravitationnelle passive,  $m^G$ , mesure la force qu'un champ de gravitation exerce sur ce corps: pour un champ de gravitation constant,  $\bar{F} = m^G \bar{g}$ . L'égalité  $m^I = m^G = m$  a pour conséquence, que le mouvement d'un corps soumis à la seule force de gravitation est régi par l'équation

$$m^I \bar{a} = m^G \bar{g} \quad \rightarrow \quad \bar{a} = \bar{g} : \quad (2.1.1)$$

tous les corps tombent avec la même accélération, quelle que soit leur masse. C'est la conclusion à laquelle Galilée était arrivé par ses célèbres expériences réalisées du haut de la tour de Pise. Dans le cadre de la théorie de Newton, on en déduit qu'un observateur en chute libre dans un champ de gravitation homogène et constant  $\bar{g}$  ne peut pas détecter la présence de ce champ. Voyons cela pour un système de  $N$  particules non relativistes soumises à des forces du type  $\bar{F}(\bar{x}_i - \bar{x}_j)$  et à un champ gravitationnel constant  $\bar{g}$ : pour l'observateur  $O$  au repos dans le champ de gravitation, les équations du mouvement de la  $j$ -ème particule sont

$$m_j \frac{d^2 \bar{x}_j}{dt^2} = m_j \bar{g} + \sum_k \bar{F}(\bar{x}_j - \bar{x}_k). \quad (2.1.2)$$

Pour l'observateur  $O'$ , en mouvement uniformément accéléré par rapport à  $O$  dans



la direction du champ,

$$\bar{x} = \bar{x}' + \frac{1}{2}\bar{g}t^2, \quad t = t' \quad (2.1.3)$$

les équations prennent la forme

$$m_j \frac{d^2 \bar{x}'_j}{dt^2} = \sum_k \bar{F}(\bar{x}'_j - \bar{x}'_k); \quad (2.1.4)$$

d'où la force de gravitation a disparu, compensée par une force d'inertie. Inversement, en partant de l'équation (2.1.4) et en y injectant le changement de coordonnées

$$\bar{x}' = \bar{x} - \frac{1}{2}\bar{g}t^2, \quad t' = t, \quad (2.1.5)$$

on reproduit l'équation (2.1.2) avec une force de gravitation. Pour l'observateur  $O$  qui utilise les coordonnées  $(\bar{x}, t)$  et pour l'observateur  $O'$  qui utilise les coordonnées  $(\bar{x}', t')$  les lois de la Mécanique sont inchangées mais pour le premier, il y a un champ de gravitation, pour le second, il n'y en a pas. Puisque les unes peuvent être éliminées par les autres, forces gravitationnelles et forces d'inertie sont équivalentes dans les équations de la mécanique.

Si le champ de gravitation n'est plus, constant  $\bar{g}(\bar{x}, t)$ , il ne peut pas être globalement éliminé par une simple accélération (2.1.3) du référentiel. On doit cependant pouvoir localement (dans des régions de l'espace-temps suffisamment petites pour que les variations spatiales et temporelles du champ de gravitation puissent être négligées) annuler ce champ en se plaçant dans un bon référentiel.

Einstein étend cette équivalence à toutes lois de la physique et l'érige en principe qui s'énonce comme suit: "tous les effets locaux d'un champ de gravitation sont identiques aux effets produits par une accélération du référentiel".

Les référentiels dans lesquels il n'y a, localement, ni force d'inertie ni force gravitationnelle (que l'on ne peut de toute façon pas distinguer) sont appelés "référentiels localement inertiels"; ce sont les référentiels en chute libre. Dans de tels référentiels, les lois locales de la Physique prennent la même forme que celle qu'elles ont dans les référentiels inertiels de l'espace-temps de Minkowski.

## 2.2 Forces gravitationnelles

Considérons le mouvement d'une particule massive soumise à la seule influence d'un champ de gravitation. En vertu du principe d'équivalence, il existe un système de coordonnées localement inertiel  $\xi^\alpha$  dans lequel la trajectoire est une droite de l'espace-temps. Son équation s'écrit

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (2.2.6)$$

où  $\tau$  est le temps propre défini comme

$$c^2 d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \quad (2.2.7)$$

Dans le système de coordonnées  $x^\mu$  qui peut être celui de l'observateur au repos dans le laboratoire ou de tout autre observateur, relié au précédent par

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\mu), \quad \det \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \neq 0, \quad (2.2.8)$$

l'équation de la trajectoire devient

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (2.2.9)$$

En multipliant ceci par  $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ , et en utilisant la relation

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta_\mu^\lambda \quad (2.2.10)$$

on obtient l'équation du mouvement sous la forme

$$0 = \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.2.11)$$

où on a posé

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (2.2.12)$$

Dans ce système de coordonnées, le temps propre s'exprime comme

$$c^2 d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2.13)$$

avec

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (2.2.14)$$

Pour une particule de masse nulle, les équations (2.2.11) restent valables à la condition de remplacer le paramètre  $\tau$  (qui est nul dans ce cas) par un paramètre  $\sigma$  tel que

$$0 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \sigma} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \sigma} = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}. \quad (2.2.15)$$

**Remarque:** Nous montrerons plus loin que les équations (2.2.11) décrivent correctement la dynamique d'une particule soumise à des forces gravitationnelles. Les  $\Gamma$  ne proviennent pas nécessairement d'un changement de coordonnées comme en

(2.2.12), mais sont les coefficients d'une grandeur appelée connexion.

Le changement de coordonnées  $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\mu)$  définit la métrique  $g_{\mu\nu}$  et les coefficients de la connexion  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ ; inversement, on peut montrer que la donnée des  $g_{\mu\nu}$  et des  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  en un point P de coordonnées  $X^\mu$  permet de calculer les coordonnées localement inertielles  $\xi^\alpha(x)$  dans un voisinage de P en résolvant l'équation (2.2.12) ou l'équation équivalente

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda} \quad (2.2.16)$$

ce qui donne

$$\xi^\alpha(x) = a^\alpha + b^\alpha_\mu (x^\mu - X^\mu) + \frac{1}{2} b^\alpha_{\lambda\mu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda (x^\mu - X^\mu)(x^\nu - X^\nu) + \dots \quad (2.2.17)$$

Les constantes  $a^\alpha, b^\alpha_\mu$  ne sont déterminées qu'à une transformation près appartenant au groupe de Poincaré (en effet, si le système de coordonnées  $\xi^\alpha$  est inertiel, il en va de même du système  $\xi'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta \xi^\beta + d^\alpha$  où  $\Lambda$  est la matrice d'une transformation de Lorentz).

## 2.3 Relations entre $g_{\mu\nu}$ et $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$

La forme des équations du mouvement (2.2.11) indique que la force gravitationnelle (vue comme force inertielle) est déterminée par les  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ , tandis que l'intervalle de temps propre entre deux événements infiniment voisins est déterminé par les  $g_{\mu\nu}$ . Nous allons montrer que la métrique  $g_{\mu\nu}$  peut être interprétée comme le potentiel gravitationnel, dans la mesure où ses dérivées définissent les forces  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ .

En dérivant (2.2.14) par rapport à  $x^\lambda$ , on obtient

$$g_{\mu\nu,\lambda} = \xi^\alpha_{,\lambda\mu} \xi^\beta_{,\nu} \eta_{\alpha\beta} + \xi^\alpha_{,\mu} \xi^\beta_{,\lambda\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (2.3.18)$$

qui, avec (2.2.12), (2.2.14) et les symétries  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  et  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ , fournit

$$g_{\mu\nu,\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}. \quad (2.3.19)$$

On en tire

$$g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu} = 2 g_{\rho\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \quad (2.3.20)$$

ou encore, en multipliant les deux membres par la métrique inverse  $g^{\sigma\nu}$ , qui existe en vertu de (2.2.14) et qui satisfait la relation

$$g^{\sigma\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\sigma_\rho, \quad (2.3.21)$$

les  $\Gamma$  en fonction des  $g$

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} (g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu}) \quad (2.3.22)$$

ce qui est bien le résultat annoncé.

**Remarque:** Pour une métrique générale qui n'est pas nécessairement reliée à la métrique Minkowskienne par un changement de coordonnées comme en (2.2.14), la connexion de Levi-Civita associée à cette métrique est définie par (2.3.22). Les  $\Gamma$  sont alors appelés les symboles de Christoffel.

## 2.4 Limite Newtonienne

Considérons le cas d'une particule qui se meut lentement dans un champ de gravitation faible et stationnaire (les  $g_{\mu\nu}$  ne dépendent pas de  $x^0 = ct$ )<sup>1</sup>. Dans ce cas, en négligeant  $dx^k/d\tau$  par rapport à  $dx^0/d\tau$ , l'équation (2.2.11) se réécrit comme

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0, \quad (2.4.23)$$

et

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{00,\nu}. \quad (2.4.24)$$

L'hypothèse du champ faible permet d'introduire l'approximation suivante

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (2.4.25)$$

de sorte que, au premier ordre en les  $h$  et avec  $g^{\mu\nu} \simeq \eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta} \eta^{\beta\nu}$ , on a

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h_{00,\nu}, \quad \text{donc} \quad \Gamma_{00}^k = -\frac{1}{2} h_{00,k}, \quad \Gamma_{00}^0 = 0 \quad (2.4.26)$$

et que l'équation se simplifie en

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \bar{\nabla} h_{00} \quad (2.4.27)$$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0. \quad (2.4.28)$$

L'équation (2.4.28) nous apprend que  $dt/d\tau$  est une constante. En divisant les deux membres de (2.4.27) par le carré de cette constante, il reste

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} c^2 \bar{\nabla} h_{00}. \quad (2.4.29)$$

---

1. Cette hypothèse peut être affaiblie: il suffit que les dérivées temporelles de la métrique soient négligeables devant les dérivées spatiales.

L'équation de Newton correspondante est

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = -\bar{\nabla} \phi \quad (2.4.30)$$

où  $\phi$  est le potentiel gravitationnel. Par exemple, celui que produit un corps sphérique de masse  $M$  est égal à

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r}. \quad (2.4.31)$$

La comparaison des équations du mouvement fournit donc

$$h_{00} = -\frac{2\phi}{c^2} + \text{constante}. \quad (2.4.32)$$

Cette constante doit être choisie nulle si on veut que  $h_{00} \rightarrow 0$  à l'infini. Dans ce cas

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right). \quad (2.4.33)$$

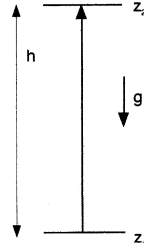
Noter que  $\phi/c^2$  est de l'ordre de  $10^{-39}$  à la surface d'un proton,  $10^{-9}$  à la surface de la terre,  $10^{-6}$  à la surface du soleil,  $10^{-4}$  à la surface d'une naine blanche, ce qui valide l'approximation du champ faible.

**Remarque:** Comme la dérivation de la limite newtonienne ne fait intervenir que les équations (2.2.11) et (2.3.22), elle restera valable pour des métriques plus générales, pour autant qu'elles décrivent des champs faibles et stationnaires.

## 2.5 Décalage gravitationnel des fréquences

### 2.5.1 Dans un champ de gravitation constant

Dans un champ de gravitation constant,  $\bar{g} = -g\bar{1}_z$ , un photon de fréquence  $\nu_1$  est émis en  $z_1 = 0$  dans la direction  $\bar{1}_z$ . Quelle est sa fréquence lorsqu'il arrive en  $z_2 = h$ ?



En vertu du principe d'équivalence, ce champ de gravitation constant est équivalent, dans l'espace-temps de Minkowski, à un observateur uniformément accéléré dans la

direction  $\bar{1}_z$ . A l'instant initial,  $t_0 = 0$ , où le photon est émis, l'observateur accéléré coïncide avec un observateur inertiel  $O$  pour lequel la fréquence du photon est  $\nu_1$ . Le photon arrive en  $z_2 = h$  après un temps  $t$  tel que  $ct = h$ . A cet instant  $t$ , l'observateur accéléré a acquis la vitesse  $\bar{v} = gt\bar{1}_z = gh/c\bar{1}_z$  et il coïncide avec un second observateur inertiel  $O'$  qui lui est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à  $O$  à cette vitesse  $\bar{v} = gh/c\bar{1}_z$ . Pour  $O'$ , la fréquence  $\nu_2$  du photon est donnée par la formule de l'effet Doppler longitudinal, soit par

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{gh}{c^2}}{1 - \frac{gh}{c^2}}} \simeq 1 + \frac{gh}{c^2}. \quad (2.5.34)$$

Il en résulte donc que la fréquence du photon capté en  $z_2 = h$  est plus petite que la fréquence du photon émis en  $z_1 = 0$  et que le rapport des fréquences est donné par

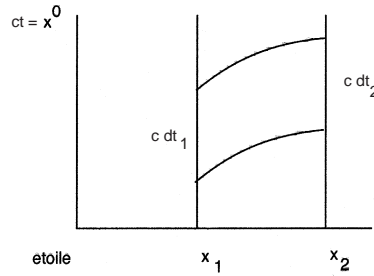
$$\frac{\nu_1}{\nu_2} \simeq 1 + \frac{gh}{c^2} \quad (2.5.35)$$

ou

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1} \simeq -\frac{gh}{c^2}. \quad (2.5.36)$$

La fréquence captée est donc décalée vers le rouge par rapport à la fréquence émise.

## 2.5.2 Dilatation du temps. Décalage des fréquences dans le champ gravitationnel d'une étoile



Considérons deux observateurs au repos, respectivement en  $\bar{x} = \bar{x}_1$  et  $\bar{x} = \bar{x}_2$  dans le champ de gravitation statique d'une étoile. Le premier envoie au second une impulsion électromagnétique de  $N$  cycles dans l'intervalle de temps propre  $d\tau_1$ , qui en termes du temps de coordonnées vaut

$$c d\tau_1 = \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{-g_{00}(\bar{x}_1)} dx_1^0. \quad (2.5.37)$$

Le second observateur reçoit ces  $N$  cycles de l'impulsion électromagnétique dans l'intervalle de temps propre  $d\tau_2$ , qui lui est relié à l'intervalle de temps de coordonnées  $dt_2$  par

$$c d\tau_2 = \sqrt{-g_{00}(\bar{x}_2)} dx_2^0. \quad (2.5.38)$$

Puisque le champ de gravitation est supposé statique donc invariant par translation de temps,

$$dx_1^0 = dx_2^0 \quad (2.5.39)$$

on en déduit que le rapport des intervalles de temps propres est donné par

$$\frac{d\tau_2}{d\tau_1} = \sqrt{\frac{g_{00}(\bar{x}_2)}{g_{00}(\bar{x}_1)}} \quad (2.5.40)$$

et, en particulier, que l'intervalle de temps propre est plus grand là où le champ de gravitation est plus grand, autrement dit que temps propre s'y écoule plus lentement. De plus, puisque

$$d\tau_1 = \frac{N}{\nu_1}, \quad d\tau_2 = \frac{N}{\nu_2}, \quad (2.5.41)$$

on obtient aussi

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{g_{00}(\bar{x}_2)}{g_{00}(\bar{x}_1)}}. \quad (2.5.42)$$

Pour un champ faible,  $g_{00} = -(1 + 2\phi/c^2)$ ,  $\phi/c^2 \ll 1$ , on en tire

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} \simeq 1 + \frac{1}{c^2} [\phi(\bar{x}_2) - \phi(\bar{x}_1)]. \quad (2.5.43)$$

Avec  $\phi(r) = -\frac{GM}{r}$ ,

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1} \simeq \frac{\phi_1 - \phi_2}{c^2} = -\frac{GM}{c^2} \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]. \quad (2.5.44)$$

Pour  $r_1 < r_2$ ,  $\Delta\nu < 0$  et la fréquence est décalée vers le rouge.

Si  $r_1$  est de l'ordre du rayon apparent du soleil et  $r_2$  de l'ordre du rayon de l'orbite terrestre autour du soleil, en négligeant le champ gravitationnel de la terre, on obtient

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq -2.12 \times 10^{-6}. \quad (2.5.45)$$

Les observations du spectre solaire près du bord donnent des résultats de cet ordre, mais leur interprétation reste difficile par manque d'information sur les détails de la structure du soleil et de son atmosphère. Les difficultés associées aux mesures astronomiques de décalage vers le rouge ont accru l'intérêt des tests réalisés sur terre. C'est aussi une tâche ardue, car le décalage prédit pour une différence de hauteur de  $30m$  est de l'ordre de  $10^{-15}$ . La découverte, en 1958, de l'effet Mössbauer a fourni une méthode pour produire et pour détecter des rayons gamma monochromatiques

jusqu'à 1 pour  $10^{12}$ , rendant ainsi possible l'expérience sur terre. Pound et Rebka [3] ont réalisé une telle expérience, en 1960, en plaçant un émetteur de rayons gamma au pied d'une tour de  $22.5m$  à Harvard et un absorbeur au sommet. Leur résultat expérimental correspond à  $.997 \pm .009$  de la valeur théorique qui est de  $4.92 \times 10^{-15}$ . L'expérience a été répétée et affinée par Pound et Snider en 1965. Depuis lors, de nombreuses expériences ont été réalisées pour mesurer le taux de variation d'horloges atomiques transportées par des avions ou des satellites, confirmant les prédictions théoriques: par exemple, la mesure du décalage subi par des signaux radio émis par Voyager I près de Saturne en 1980, a amélioré de deux ordres de grandeurs la précision par rapport à celle des années 1960.

### L'argument de Schild

Si on analyse réellement la situation décrite ci-dessus dans la géométrie de l'espace-temps de Minkowski, puisque les deux observateurs sont au repos dans le champ de gravitation statique, les intervalles de temps propres sont égaux aux intervalles de temps de coordonnées

$$dx_1^0 = c d\tau_1, \quad dx_2^0 = c d\tau_2 \quad (2.5.46)$$

par conséquent le rapport des fréquences est égal à 1. A. Schild [11] en déduit que le "red shift" est incompatible avec l'hypothèse de espace-temps plat. Son argument ne précise pas quelle doit en être la courbure, il dit seulement de façon non ambiguë que l'espace-temps de Minkowski n'est pas approprié. Ceci constitue une motivation sérieuse à l'étude des variétés avec courbure.



# Chapitre 3

## Eléments d'analyse tensorielle

### 3.1 Le principe de covariance générale

Dans le chapitre précédent, nous avons montré comment l'utilisation du principe d'équivalence définit l'action de la gravitation sur les systèmes physiques: en partant des équations de la relativité restreinte dans un référentiel localement inertiel, par un changement de coordonnées, nous avons obtenu de nouvelles équations incluant les effets gravitationnels. On pourrait continuer de cette façon, mais les calculs deviendraient rapidement fastidieux. Il existe une méthode équivalente mais beaucoup plus élégante basée sur le "principe de covariance générale". Celui-ci établit qu'une équation physique est valable dans un champ gravitationnel quelconque si

1) L'équation est valable en l'absence de gravitation: elle est en accord avec les lois de la relativité restreinte lorsque  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$  et que les  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$ .

2) L'équation est généralement covariante: elle garde la même forme sous une transformation générale de coordonnées.

La seconde condition revient à demander que l'équation exprime qu'un certain tenseur est nul. On se satisfait si l'équation exprime que les composantes (dans un système de coordonnées) de ce tenseur sont nulles. Les composantes d'un tenseur dans deux systèmes de coordonnées étant des combinaisons linéaires homogènes et inversibles les unes des autres, si elles sont nulles dans un référentiel, elles sont nulles dans tout référentiel qui se déduit du premier par changement de coordonnées.

La seule validité locale du principe d'équivalence amène aussi à envisager le fait que l'espace-temps plat de Minkowski n'est pas approprié à la description d'un champ de gravitation. Nous sommes donc assez naturellement conduits à considérer l'espace-temps comme une variété métrique courbe et à étudier les champs de tenseurs définis sur une telle variété.

## 3.2 Tenseurs en un point

### 3.2.1 Espace vectoriel $V$ sur $\mathbb{R}$

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{R}$  : les éléments de  $V$  sont des vecteurs, notés  $\{\bar{v}, \bar{w}, \dots\}$ , les nombres réels sont notés  $a, b, \dots$ .  $V$  est un groupe additif muni d'une multiplication par les nombres réels satisfaisant à des axiomes bien connus, tels que toute combinaison linéaire d'éléments de  $V$  est dans  $V$  :

$$\bar{v}_\mu a^\mu \in V. \quad (3.2.1)$$

Ici et par la suite, la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés est utilisée. Explicitement, pour  $\mu = 1, \dots, \nu$ , on a  $\bar{v}_\mu a^\mu = \sum_{\mu=1}^{\nu} \bar{v}_\mu a^\mu$ . Les vecteurs  $\bar{v}_\mu$  sont dits linéairement indépendants si

$$\bar{v}_\mu a^\mu = 0 \quad \text{implique} \quad a^\mu = 0, \forall \mu. \quad (3.2.2)$$

La dimension  $n$  de  $V$  est égale au nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants.

On appelle base de  $V$  tout ensemble  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  de  $n$  vecteurs linéairement indépendants. Tout vecteur  $\bar{v}$  peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base

$$\bar{v} = \bar{e}_\mu v^\mu = (\bar{e}_1 \quad \dots \quad \bar{e}_n) \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}. \quad (3.2.3)$$

Les nombres réels  $v^\mu$  sont les composantes contravariantes du vecteur  $\bar{v}$  dans la base  $\{\bar{e}_\mu\}$ .

Soit  $\{\bar{e}'_\mu\}$  une deuxième base de  $V$ . Chacun de ses vecteurs est une combinaison linéaire des vecteurs de la base  $\{\bar{e}_\mu\}$  (et inversement) donc

$$\bar{e}'_\mu = \bar{e}_\nu B^\nu_\mu \quad (3.2.4)$$

où  $B^\nu_\mu$  est la  $\nu$ -ième composante contravariante du vecteur  $\bar{e}'_\mu$  dans la base "e". La forme matricielle de (3.2.4) est

$$(\bar{e}'_1 \quad \dots \quad \bar{e}'_n) = (\bar{e}_1 \quad \dots \quad \bar{e}_n) \begin{pmatrix} B^1_1 & \dots & B^1_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ B^n_1 & \dots & B^n_n \end{pmatrix} \quad (3.2.5)$$

où  $B^\nu_\mu$  est l'élément de la ligne  $\nu$ , colonne  $\mu$  de la matrice  $B$ . La relation inverse de (3.2.4) est

$$\bar{e}_\mu = \bar{e}'_\nu B^{-1\nu}_\mu \quad (3.2.6)$$

elle fait intervenir les éléments de la matrice  $B^{-1}$  inverse de  $B$  (telle que  $B B^{-1} = I$ ).

Les composantes contravariantes du vecteur  $\bar{v}$  dans les deux bases sont reliées entre elles par

$$\bar{v} = \bar{e}_\nu v^\nu = \bar{e}'_\mu v'^\mu = \bar{e}_\nu v'^\mu B^\nu_\mu \quad (3.2.7)$$

$$v^\nu = B^\nu_\mu v'^\mu \quad \text{ou} \quad v'^\nu = B^{-1\nu}_\mu v^\mu \quad (3.2.8)$$

### 3.2.2 Espace vectoriel dual $V^*$

$V^*$  est par définition l'ensemble des formes linéaires sur  $V$ , c'est-à-dire, des applications linéaires de  $V$  dans  $\mathbb{R}$ . Les éléments de  $V^*$  sont notés  $\{\underline{u}, \underline{v}, \dots\}$ :

$$\begin{aligned} \underline{u} : V &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \bar{v} &\mapsto \underline{u}(\bar{v}) \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

$$\underline{u}(a\bar{v} + b\bar{w}) = a\underline{u}(\bar{v}) + b\underline{u}(\bar{w}). \quad (3.2.10)$$

Avec la décomposition  $\bar{v} = \bar{e}_\nu v^\nu$ ,

$$\underline{u}(\bar{v}) = \underline{u}(\bar{e}_\nu v^\nu) = \underline{u}(\bar{e}_\nu) v^\nu. \quad (3.2.11)$$

L'action de la forme linéaire  $\underline{u}$  sur un vecteur est donc entièrement définie par son action sur les vecteurs d'une base, soit par les  $n$  nombres réels  $u_\nu = \underline{u}(\bar{e}_\nu)$ . Avec les définitions habituelles

$$(a\underline{u})(\bar{v}) = a\underline{u}(\bar{v}) \quad (3.2.12)$$

$$(\underline{u}^1 + \underline{u}^2)(\bar{v}) = \underline{u}^1(\bar{v}) + \underline{u}^2(\bar{v}), \quad (3.2.13)$$

$V^*$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de même dimension  $n$  que  $V$  (pour  $n$  fini); les formes linéaires sont aussi appelées covecteurs.

A la base  $\{\bar{e}_\nu\}$  de  $V$ , est associée, dans  $V^*$ , la base duale  $\{\underline{e}^1, \underline{e}^2, \dots, \underline{e}^n\}$  définie par

$$\underline{e}^\nu(\bar{e}_\lambda) = \delta^\nu_\lambda = \begin{cases} 1 & \nu = \lambda \\ 0 & \nu \neq \lambda. \end{cases} \quad (3.2.14)$$

Les nombres réels  $u_\nu = \underline{u}(\bar{e}_\nu)$  sont les composantes du covecteur  $\underline{u}$  dans la base duale; en effet, si on pose  $\underline{u} = \hat{u}_\lambda \underline{e}^\lambda$ , il vient

$$u_\nu = \underline{u}(\bar{e}_\nu) = \hat{u}_\lambda \underline{e}^\lambda(\bar{e}_\nu) = \hat{u}_\lambda \delta^\lambda_\nu = \hat{u}_\nu. \quad (3.2.15)$$

Si les bases  $\{\bar{e}_\nu\}$  et  $\{\bar{e}'_\nu\}$  sont reliées par (3.2.4), (3.2.6) on vérifie aisément que leurs bases duales respectives sont reliées par

$$\underline{e}^\lambda = B^\lambda_\nu \underline{e}'^\nu \quad \underline{e}'^\mu = B^{-1\mu}_\nu \underline{e}^\nu \quad (3.2.16)$$

et que les composantes du covecteur  $\underline{u}$  dans les bases duales respectives sont reliées par

$$u'_\nu = u_\lambda B^\lambda_\nu \quad u_\lambda = u'_\mu B^{-1\mu}_\lambda. \quad (3.2.17)$$

### 3.2.3 Tenseurs

**Définition 1.** Un tenseur  $T$  de type  $\binom{p}{q}$  est une application multilinéaire

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_p \times \underbrace{V \times \dots \times V}_q \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.2.18)$$

$$(\underline{u}^1, \dots, \underline{u}^p, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q) \rightarrow T(\underline{u}^1, \dots, \underline{u}^p, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q) \in \mathbb{R} \quad (3.2.19)$$

linéaire en chacune des variables.

Par définition, les tenseurs  $\binom{0}{0}$  sont les scalaires de  $\mathbb{R}$ .

Les tenseurs de type  $\binom{0}{1}$  sont les covecteurs, éléments de  $V^*$ .

Les tenseurs de type  $\binom{1}{0}$  sont les éléments de  $V^{**}$ , mais comme  $V^{**}$  est isomorphe à  $V$ , on identifie le vecteur  $\bar{v}$  au tenseur  $\binom{1}{0}$  dont l'action sur un covecteur  $\underline{u}$  est définie par la relation de dualité

$$\bar{v}(\underline{u}) = \underline{u}(\bar{v}). \quad (3.2.20)$$

Le tenseur  $T$  de type  $\binom{p}{q}$  est entièrement défini comme application multilinéaire si son action est définie sur les vecteurs et covecteurs d'une base et de la base duale, soit par les nombres

$$T^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu_1 \dots \mu_q} = T(\underline{e}^{\nu_1}, \dots, \underline{e}^{\nu_p}, \bar{e}_{\mu_1}, \dots, \bar{e}_{\mu_q}), \quad (3.2.21)$$

qui sont les composantes du tenseur dans la base "e". Ses composantes dans la base "e'" sont reliées aux précédentes par les relations linéaires homogènes suivantes

$$T'^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu_1 \dots \mu_q} = T^{\beta_1 \dots \beta_p}_{\alpha_1 \dots \alpha_q} B^{\alpha_1}_{\mu_1} \dots B^{\alpha_q}_{\mu_q} B^{-1 \nu_1}_{\beta_1} \dots B^{-1 \nu_p}_{\beta_p}. \quad (3.2.22)$$

Avec les définitions habituelles de la somme de deux tenseurs de même type et de leur multiplication par des réels, on voit aisément que les tenseurs  $\binom{p}{q}$  forment un espace vectoriel  $\mathcal{I}(p, q)$  de dimension  $n^{p+q}$ .

#### Contraction d'un tenseur

La contraction entre le  $i$ -ème covecteur et le  $j$ -ème vecteur est définie comme l'application de  $\mathcal{I}(p, q) \rightarrow \mathcal{I}(p-1, q-1)$

$$T \rightarrow C_{[i]}^j T = T(\dots, \underbrace{\underline{e}^\lambda}_i, \dots, \dots, \underbrace{\bar{e}_\lambda}_j, \dots, \dots). \quad (3.2.23)$$

On vérifie aisément que la contraction ne dépend pas de la base impliquée dans la définition. Les composantes du tenseur contracté sont données par exemple par

$$[C_{[i]}^j T]^{\nu_1 \dots \nu_{p-1}}_{\mu_1 \dots \mu_{q-1}} = T^{\nu_1 \dots \nu_{p-1} \lambda}_{\mu_1 \dots \mu_{q-1} \lambda}. \quad (3.2.24)$$

## Produit tensoriel de tenseurs

Soit  $S$  un tenseur de type  $\binom{p}{q}$  et  $T$  un tenseur de type  $\binom{n}{m}$ , on définit le tenseur  $S \otimes T$  de type  $\binom{p+n}{q+m}$  par

$$(S \otimes T)(\underline{u}^1, \dots, \underline{u}^{p+n}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{q+m}) = S(\underline{u}^1, \dots, \underline{u}^p, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q) T(\underline{u}^{p+1}, \dots, \underline{u}^{p+n}, \bar{v}_{q+1}, \dots, \bar{v}_{q+m}). \quad (3.2.25)$$

Ses composantes sont données par les produits

$$S^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu_1 \dots \mu_p} T^{\nu_{p+1} \dots \nu_{p+n}}_{\mu_{q+1} \dots \mu_{q+m}}. \quad (3.2.26)$$

En général,  $S \otimes T \neq T \otimes S$ . Le produit tensoriel est associatif: pour trois tenseurs  $S, T, U$ ,

$$S \otimes (T \otimes U) = (S \otimes T) \otimes U \equiv S \otimes T \otimes U. \quad (3.2.27)$$

On en déduit une manière de construire des tenseurs par produits tensoriels de vecteurs et de covecteurs. Un tenseur défini par un tel produit est appelé tenseur simple. Si  $\{\bar{e}_\mu\}$  est une base de  $V$  et  $\{\underline{e}^\mu\}$  est sa base duale, on montre aisément que les  $n^{q+p}$  tenseurs simples

$$\bar{e}_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{\nu_p} \otimes \underline{e}^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \underline{e}^{\mu_q} \quad (3.2.28)$$

sont linéairement indépendants donc aussi qu'ils fournissent une base de  $\mathcal{I}(p, q)$ . Dans cette base, le tenseur  $T$  s'exprime comme

$$T = T^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu_1 \dots \mu_q} \bar{e}_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{\nu_p} \otimes \underline{e}^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \underline{e}^{\mu_q}. \quad (3.2.29)$$

Les coefficients  $T^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu_1 \dots \mu_q}$  sont les composantes du tenseur  $T$  dans la base "e" définies en (3.2.21). La loi de transformation (3.2.22) de ses composantes lors d'un changement de base (3.2.4) nous assure que

$$T = T'^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu_1 \dots \mu_q} \bar{e}'_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}'_{\nu_p} \otimes \underline{e}'^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \underline{e}'^{\mu_q}. \quad (3.2.30)$$

Remarque: On définit souvent un tenseur par ses composantes dans une base et par la loi de transformation (3.2.22) de ses composantes.

Exemples:

1) Le tenseur de type  $\binom{1}{1}$  défini sur le produit  $V^* \times V$  a pour composantes dans la base "e" les nombres

$$T^\nu_\mu = T(\underline{e}^\nu, \bar{e}_\mu). \quad (3.2.31)$$

Dans le changement de base (3.2.4) elles deviennent

$$T'^\nu_\mu = T^\beta_\alpha B^\alpha_\mu B^{-1\nu}_\beta. \quad (3.2.32)$$

Le tenseur unité  $I$  est de ce type:

$$I = \bar{e}_\mu \otimes \underline{e}^\mu = \bar{e}'_\mu \otimes \underline{e}'^\mu \quad (3.2.33)$$

$$I^\mu_\nu = I'^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu. \quad (3.2.34)$$

2) Un tenseur de type  $\binom{0}{2}$  ou tenseur deux fois covariant est une application bilinéaire

$$T : V \times V : (\bar{v}, \bar{w}) \rightarrow T(\bar{v}, \bar{w}) \in \mathbb{R} \quad (3.2.35)$$

Ses composantes dans la base "e" sont données par les  $n^2$  nombres réels

$$T_{\mu\nu} = T(\bar{e}_\mu, \bar{e}_\nu). \quad (3.2.36)$$

Le tenseur  $T^t$  transposé de  $T$  est défini par l'égalité,  $\forall \bar{v}, \bar{w}$ ,

$$T^t(\bar{v}, \bar{w}) = T(\bar{w}, \bar{v}). \quad (3.2.37)$$

Le tenseur  $T$  est dit symétrique si

$$T^t = T. \quad (3.2.38)$$

Dans ce cas

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}. \quad (3.2.39)$$

Le tenseur  $T$  est dit antisymétrique si

$$T^t = -T. \quad (3.2.40)$$

Dans ce cas

$$T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}. \quad (3.2.41)$$

### Le tenseur métrique

On appelle produit scalaire sur  $V$  une application bilinéaire symétrique non dégénérée

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (\bar{v}, \bar{w}) &\mapsto \bar{v} \cdot \bar{w} \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = 0, \forall \bar{w} \implies \bar{v} = 0. \quad (3.2.43)$$

Ce produit scalaire définit le tenseur  $g$  de type  $\binom{0}{2}$ , symétrique, appelé tenseur métrique, par l'égalité

$$g(\bar{v}, \bar{w}) = \bar{v} \cdot \bar{w} \quad \forall \bar{v}, \bar{w}. \quad (3.2.44)$$

Ses composantes dans la base "e" sont données par les  $\frac{n(n+1)}{2}$  nombres

$$g_{\mu\nu} = g(\bar{e}_\mu, \bar{e}_\nu) = \bar{e}_\mu \cdot \bar{e}_\nu = g(\bar{e}_\nu, \bar{e}_\mu) = g_{\nu\mu} \quad (3.2.45)$$

qui entrent dans l'expression du produit scalaire par

$$g(\bar{v}, \bar{w}) = g(v^\mu \bar{e}_\mu, w^\nu \bar{e}_\nu) = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu. \quad (3.2.46)$$

La non dégénérescence de la métrique assure l'existence de la matrice inverse de la matrice  $(g_{\mu\nu})$ ; ses éléments, notés  $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$ , satisfont

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda. \quad (3.2.47)$$

Cette dernière relation assure que les  $g^{\mu\nu}$  sont les composantes d'un tenseur  $\binom{2}{0}$ , car dans le changement de base (3.2.4),

$$g^{\mu\nu} = B^\mu_\alpha B^\nu_\beta g'^{\alpha\beta}. \quad (3.2.48)$$

La métrique établit un isomorphisme entre  $V$  et  $V^*$ : au vecteur  $\bar{v} \in V$ , correspond une forme linéaire  $\underline{v} \in V^*$  telle que,  $\forall w \in V$ ,

$$\underline{v}(\bar{w}) = g(\bar{v}, \bar{w}); \quad (3.2.49)$$

et réciproquement. Cette correspondance est un isomorphisme de vectoriels. En composantes, (3.2.49) se récrit comme

$$\underline{v}(w^\mu \bar{e}_\mu) = v_\mu w^\mu = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu, \quad \forall w^\mu. \quad (3.2.50)$$

D'où

$$v_\nu = g_{\nu\mu} v^\mu \quad \text{ou inversément} \quad v^\mu = g^{\mu\nu} v_\nu. \quad (3.2.51)$$

On en déduit que tout  $\bar{v}$  de  $V$  peut aussi s'écrire comme

$$\bar{v} = \bar{e}_\mu g^{\mu\nu} v_\nu = \bar{e}_\star^\nu v_\nu, \quad (3.2.52)$$

dans la base des vecteurs  $\{\bar{e}_\star^1, \dots, \bar{e}_\star^n\}$  définie par

$$\{\bar{e}_\star^\nu = \bar{e}_\mu g^{\mu\nu}\} \quad (3.2.53)$$

et appelée base réciproque de la base "e". Les composantes  $v_\nu$  de  $\bar{v}$  dans la base réciproque sont les composantes covariantes de ce vecteur.

## 3.3 Variétés différentiables et champs de tenseurs

### 3.3.1 Variétés différentiables

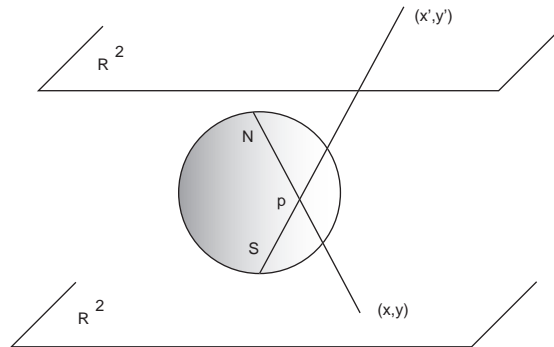
Avant de donner une définition formelle, considérons un exemple simple, la sphère  $S^2$  à deux dimensions. On peut recouvrir la sphère par deux ouverts homéomorphes à  $\mathbb{R}^2$  à savoir

$$U_1 = S^2 \setminus \{N\} \quad \text{et} \quad U_2 = S^2 \setminus \{S\}. \quad (3.3.54)$$

Les projections stéréographiques  $\psi_1$  à partir du pôle nord,  $\psi_2$  à partir du pôle sud, sont des applications

$$\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad i = 1, 2 \quad (3.3.55)$$

bicontinues et bijectives qui permettent d'introduire des coordonnées  $(x, y)$  sur  $U_1$ ,  $(x', y')$  sur  $U_2$ . Dans l'intersection  $U_1 \cap U_2$ , le changement de coordonnées  $x(x', y'), y(x', y')$  est de classe  $C^\infty$ .



### Espace topologique

Un espace topologique est un ensemble  $E$  sur lequel a été défini un ensemble de parties de  $E$ , les ouverts, tels que

- 1) toute réunion (finie ou dénombrable) d'ouverts est un ouvert
- 2) toute intersection finie d'ouverts est un ouvert
- 3) l'ensemble  $E$  et l'ensemble vide  $\phi$  sont des ouverts

Un ensemble  $A$  est fermé si  $E \setminus A$  est ouvert.

$U \subset E$  est un voisinage de  $p \in E$  si et seulement si (= ssi)  $U$  contient un ouvert contenant  $p$ . L'espace  $E$  est dit "séparé" si deux points quelconques possèdent des voisinages disjoints.

Si  $E$  et  $E'$  sont deux espaces topologiques, l'application  $\psi : E \rightarrow E'$  est continue ssi  $\psi^{-1}(O)$  est un ouvert de  $E$  pour tout ouvert  $O$  de  $E'$ .  $\psi$  est un homéomorphisme ssi  $\psi$  est bijective et bicontinue.



## Variété topologique

Une variété topologique  $M$  de dimension  $n$  est un espace topologique séparé dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ , càd, qui est réunion d'une famille d'ouverts  $U_i$  homéomorphes à  $\mathbb{R}^n$ . Chaque couple  $(U_i, \psi_i)$  où  $U_i$  est l'un de ces ouverts et  $\psi_i$  l'homéomorphisme  $U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  est appelé "carte locale" par les mathématiciens, "système de coordonnées locales" par les physiciens. Les coordonnées  $x^1, x^2, \dots, x^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  du point  $\psi_i(p), p \in U_i$  sont appelées coordonnées locales de  $p$ . L'ouvert  $U_i$  est le "domaine" de la carte. Dans la suite, les coordonnées seront souvent interprétées comme des fonctions,

$$\begin{aligned} x^1 : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} &\mapsto a^1. \end{aligned} \quad (3.3.56)$$

## Variété différentiable

Un atlas de classe  $C^q$  sur une variété topologique  $M_n$  est un recouvrement de  $M_n$  par des ouverts  $U_i$  homéomorphes à  $\mathbb{R}^n$  qui satisfont la condition de compatibilité suivante:

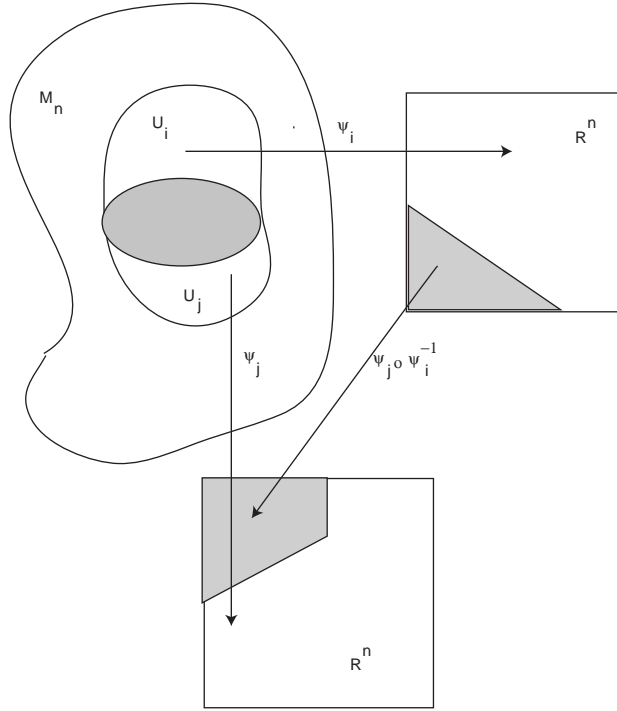
$$\forall i, j, \quad \psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \psi_j(U_i \cap U_j) \quad (3.3.57)$$

est un difféomorphisme de classe  $C^q$ . En d'autres termes: les coordonnées locales d'un point  $p \in U_i \cap U_j$  dans les deux systèmes de coordonnées sont des fonctions inversibles,  $C^q$ , les unes des autres. Dans la suite, nous exigerons que les changements de coordonnées soient  $C^\infty$ .

La donnée d'un atlas  $C^q$  munit la variété  $M_n$  d'une structure de variété différentiable.

## Espace vectoriel tangent en un point de $M_n$

Pour une variété comme la sphère  $S^2$  que l'on voit naturellement plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , la notion de vecteur tangent en un point est assez intuitive: il s'agit d'un vecteur du plan tangent en ce point. En relativité générale, comme déjà en relativité restreinte l'espace-temps ne se conçoit pas comme une variété plongée dans un espace réel de dimension supérieure. La notion de vecteur tangent doit pouvoir être définie de façon intrinsèque, sans référence à un espace de plongement. Les mathématiciens proposent de faire de ce vecteur une dérivée directionnelle agissant sur des fonctions  $f : M_n \rightarrow \mathbb{R}$ , à l'instar de ce qui se fait dans  $\mathbb{R}^n$  où le vecteur  $\bar{v} = (v^1, v^2, \dots, v^n)$  définit la dérivée directionnelle par  $v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  et réciproquement. Un tel opérateur est caractérisé par le fait que son action sur des fonctions  $f$  est linéaire et satisfait la règle de Leibniz.



On considère les courbes sur  $M_n$  passant par le point  $p_0$ . Une courbe sur  $M_n$  est une application de l'intervalle  $(a,b) \subset \mathbb{R}$  dans  $M_n$  qui, à toute valeur du paramètre  $\lambda \in (a,b)$  fait correspondre un point  $p$  de la variété. Dans un système de coordonnées, la courbe est décrite par ses équations paramétriques

$$x^\mu = x^\mu(\lambda); \quad (3.3.58)$$

pour  $\lambda = 0$ ,  $x^\mu(0) = x_0^\mu$  sont les coordonnées de  $p_0$ . On suppose que les courbes sont au moins de classe  $C^1$ .

Soit  $f$  une fonction sur la variété<sup>1</sup>  $M_n$ :  $f(x^\mu)$ . Elle induit une fonction  $f(x^\mu(\lambda))$  sur la courbe.

On définit en  $p_0$  l'opérateur différentiel  $v$  par

$$v(f) = \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}. \quad (3.3.59)$$

C'est la dérivée de  $f$  le long de la courbe, au point  $p_0$ . On a évidemment les propriétés

- i)  $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$
- ii)  $v(c) = 0$ ,  $c = \text{constante}$
- iii)  $v(fg) = f(x_0)v(g) + v(f)g(x_0)$ .

Inversément, si  $v$  est un opérateur différentiel qui satisfait les trois conditions ci-dessus, il existe une courbe telle que  $v = \frac{d}{d\lambda}$  le long de la courbe, en  $p_0$ . En effet,

---

1. Dans une carte locale, l'utilisation de l'homéomorphisme  $\psi_i$  permet d'identifier les points de la variété et les points de  $\mathbb{R}^n$ .

en coordonnées locales, en vertu du théorème des accroissements finis, pour  $p$  dans un voisinage de  $p_0$ , il existe  $\theta^\alpha = \theta^\alpha(x^\beta)$  avec  $\theta^\alpha(x_0^\beta) = 0$  tel que

$$f(x^\mu) = f(x_0^\mu) + (x^\nu - x_0^\nu) \frac{\partial f}{\partial x^\nu} (x_0^\mu + \theta^\mu). \quad (3.3.60)$$

Donc, avec i), ii) et iii),

$$v(f) = 0 + v(x^\nu) \frac{\partial f}{\partial x^\nu} |_{x_0} + 0. \quad (3.3.61)$$

Soit la courbe

$$x^\mu(\lambda) = x_0^\mu + \lambda v(x^\mu) \quad (3.3.62)$$

et soit

$$f(\lambda) = f(x^\mu(\lambda)) = f[x_0^\mu + \lambda v(x^\mu)] \quad (3.3.63)$$

donc

$$\frac{df}{d\lambda} |_{\lambda=0} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x^\nu} v(x^\nu) \right] |_{x_0}. \quad \square \quad (3.3.64)$$

On définit l'espace vectoriel tangent en  $p$ ,  $V_p$ , comme l'espace des opérateurs différentiels sur les fonctions  $f$  qui obéissent i), ii) et iii). Avec les définitions habituelles de la somme de deux opérateurs différentiels et de leur multiplication par des nombres réels, il apparaît clairement que l'espace vectoriel tangent ainsi défini est

- i) un espace vectoriel réel
- ii) de dimension  $n$  car tout vecteur tangent  $v$  peut s'écrire comme

$$v = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{avec} \quad v^\mu = v(x^\mu) = \frac{dx^\mu}{d\lambda} |_\lambda. \quad (3.3.65)$$

Les  $v^\mu$  sont les composantes du vecteur en  $p$  et les vecteurs  $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} |_x$  sont les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées en  $p$ ; ils forment la base naturelle des coordonnées en  $p$ .

Pour le changement de coordonnées

$$x^\mu = x^\mu(x'^\nu), \quad (3.3.66)$$

la règle de dérivation de fonctions de fonctions fournit le changement de base naturelle correspondante par

$$\frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (3.3.67)$$

La matrice  $B$  du changement de base est la matrice jacobienne du changement de coordonnées, calculée en  $p$ :

$$B^\mu{}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \big|_p. \quad (3.3.68)$$

Pour les composantes du vecteur en  $p$  on a la loi de transformation

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} v'^\nu. \quad (3.3.69)$$

Un champ de vecteurs sur  $M_n$  consiste en la donnée, en chaque point de  $M_n$ , d'un élément de l'espace tangent en ce point.

Bien que  $V_p$  et  $V_q$  soient des vectoriels différents, on peut cependant donner un sens au fait qu'un vecteur varie de façon "douce" d'un point à un autre. Si  $f$  est  $C^\infty$ , en chaque point  $p \in M_n$ ,  $v(f) \big|_p$  est un nombre réel, càd  $v(f)$  est une fonction sur la variété. Un champ de vecteurs tangents est dit  $C^\infty$  si, pour toute fonction  $f, C^\infty$ , la fonction  $v(f)$  est aussi  $C^\infty$ . Dans un système de coordonnées, ceci revient à dire que les composantes  $v^\mu = v(x^\mu)$  sont des fonctions  $C^\infty$ .

**Définition 2.** *Crochet de Lie: Soient  $v$  et  $w$  deux champs de vecteurs  $C^\infty$ , on définit un nouveau champ de vecteurs,  $[v, w]$ , appelé commutateur ou crochet de Lie de  $v$  et  $w$  par*

$$[v, w](f) = v[w(f)] - w[v(f)]. \quad (3.3.70)$$

Dans un système de coordonnées, le crochet de Lie se récrit comme

$$\begin{aligned} [v, w](f) &= v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} [w^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu}] - w^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} [v^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu}] = \\ &= [v^\mu \frac{\partial w^\nu}{\partial x^\mu} - w^\mu \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu}] \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \end{aligned} \quad (3.3.71)$$

où on a utilisé

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\nu \partial x^\mu}. \quad (3.3.72)$$

Ses composantes dans la base naturelle sont donc données par

$$[v, w]^\nu = v^\mu \frac{\partial w^\nu}{\partial x^\mu} - w^\mu \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu}. \quad (3.3.73)$$

On voit immédiatement que les crochets de Lie des vecteurs de la base naturelle de coordonnées sont nuls.

### Espace vectoriel cotangent $V_p^*$

$V_p^*$  est le vectoriel dual de  $V_p$ . Ses éléments sont les covecteurs aussi appelés 1-formes, càd les applications linéaires de  $V_p$  dans les réels:

$$\omega \in V_p^* : v \mapsto \omega(v) \in \mathbb{R}. \quad (3.3.74)$$

L'action sur la base naturelle de la 1-forme  $\omega$

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \omega_\mu \quad (3.3.75)$$

définit ses composantes dans la base duale.

A toute fonction  $f$ , on associe la 1-forme  $df$  où  $d$  est la différentielle extérieure. L'action de  $df$  sur un vecteur  $v$  est définie par la relation de dualité

$$df(v) = v(f) = v^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}. \quad (3.3.76)$$

Pour la fonction  $f = x^\mu$ , on a donc

$$dx^\mu(v) = v(x^\mu) = v^\mu \quad (3.3.77)$$

et aussi

$$dx^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (3.3.78)$$

Les 1-formes  $dx^1, \dots, dx^n$  constituent donc les éléments de la base  $\{e^\alpha = dx^\alpha\}$  duale de la base naturelle  $\{e_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\}$ . En composantes, avec

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu \quad \text{et} \quad v = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (3.3.79)$$

on a

$$\omega(v) = \omega_\mu v^\mu \quad (3.3.80)$$

et, en particulier,

$$df = dx^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}. \quad (3.3.81)$$

Dans le changement de coordonnées  $x^\mu = x'^\nu$ ,

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \omega'_\mu dx'^\mu \quad (3.3.82)$$

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu \rightarrow \omega'_\nu = \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}. \quad (3.3.83)$$

Un champ de 1-formes est la donnée d'une 1-forme en chaque point de la variété.

### Tenseurs. Champs de tenseurs

Un tenseur de type  $\binom{k}{\ell}$  en un point  $p$  de  $M_n$  est défini comme en (3.2.19) avec  $V$  et  $V^*$  remplacés par  $V_p$  et  $V_p^*$ . C'est un élément du produit tensoriel de

$$\underbrace{V_p \otimes \dots \otimes V_p}_k \otimes \underbrace{V_p^* \otimes \dots \otimes V_p^*}_\ell. \quad (3.3.84)$$

Ses composantes dans la base naturelle des coordonnées et sa base duale sont les nombres

$$T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_\ell}. \quad (3.3.85)$$

Dans un changement de base, elles se transforment comme

$$T'^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_\ell} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_\ell} \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_\ell}}{\partial x'^{\beta_\ell}}. \quad (3.3.86)$$

Un champ de tenseurs est la donnée d'un tenseur en chaque point. Dans ce cas, les composantes sont des fonctions sur la variété

$$T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_\ell}(x). \quad (3.3.87)$$

Les champs de tenseurs  $\binom{0}{0}$  sont les fonctions  $f$  aussi appelées champs scalaires

$$f'(x') = f(x(x')). \quad (3.3.88)$$

### 3.3.2 Métrique pseudo-riemannienne

La métrique  $g$  sur  $M_n$  est définie par la donnée d'un champ de tenseurs  $\binom{0}{2}$  symétriques et non dégénérés. Dans la base naturelle de coordonnées en un point, ce tenseur s'écrit comme

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (3.3.89)$$

On remplace souvent cette expression par

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.3.90)$$

où on omet le signe de produit tensoriel et où  $dx^\mu$  représente un déplacement infinitésimal. Cette notation rappelle que la métrique sert à calculer le carré de la distance entre des points infinitésimalement proches ou aussi, par exemple, le carré de la norme des vecteurs tangents par

$$\|v\|^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}. \quad (3.3.91)$$

Dans tout système de coordonnées, la matrice  $(g_{\mu\nu})$  en  $p$  est symétrique et inversible; il existe une base orthonormée de  $V_p$ , formée de vecteurs  $h_1, \dots, h_n$  tels que

$$g(h_\mu, h_\nu) = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu \\ \pm 1 & \mu = \nu \end{cases} . \quad (3.3.92)$$

En fait, il existe une infinité de bases orthonormées dans lesquelles la matrice est diagonale avec des  $(+1)$  et des  $(-1)$  sur sa diagonale principale. Le nombre de  $" +1 "$  et le nombre de  $" -1 "$  sur la diagonale ne dépend pas de la base orthonormée choisie. S'il n'y a que des  $" + "$ , la métrique est dite riemannienne.

La métrique de l'espace-temps à 4 dimensions de la relativité générale est choisie de signature  $(-, +, +, +)$ , càd dans une base orthonormée de  $V_p$ , elle est égale à  $\eta_{\mu\nu}$ . Elle est dite Lorentzienne ou pseudo-riemannienne. Dans une base quelconque de  $V_p$ , elle prend la forme

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} K^\alpha_\mu K^\beta_\nu. \quad (3.3.93)$$

Les  $K^\alpha_\mu$  sont les éléments de la matrice du changement de base en  $p$ . Noter qu'en général, s'il y a de la courbure (voir plus loin),

$$K^\alpha_\mu(x) \neq \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}, \quad (3.3.94)$$

autrement dit,  $K$  n'est pas la matrice jacobienne d'un changement de coordonnées.

La signature minkowskienne de la métrique permet en chaque point  $p$  de distinguer des vecteurs de genre temps, espace ou lumière. On a donc un cône de lumière en chaque point, défini par la métrique.

## 3.4 Dérivée covariante de champs de tenseurs

### 3.4.1 Transport parallèle de vecteurs. Connexions

Puisque les espaces tangents en des points distincts sont des espaces vectoriels différents, on doit se donner une structure supplémentaire pour transporter des vecteurs d'un point à un autre et pouvoir ainsi les comparer: cette structure est la donnée d'une connexion. Le transport des vecteurs est supposé linéaire, càd

$$\overline{av + bw} = a\bar{v} + b\bar{w}. \quad (3.4.95)$$

Soient  $p$  et  $p_\epsilon$  deux points infinitésimalement voisins appartenant à une même carte locale. Dans cette carte,  $p$  a les coordonnées  $x^\alpha$ ,  $p_\epsilon$  a les coordonnées  $x^\alpha + \epsilon^\alpha$ . Soient  $v^\alpha$  les composantes d'un vecteur tangent en  $p$ .

La connexion  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  est une grandeur qui permet de transporter le vecteur tangent  $v \in V_p$  en un vecteur tangent  $\bar{v} \in V_{p_\epsilon}$  de composantes

$$\bar{v}^\alpha = v^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^\beta \epsilon^\gamma. \quad (3.4.96)$$

**Théorème 1.**  $\bar{v}$  est un vecteur en  $p_\epsilon$  ssi, dans le changement de coordonnées, les coefficients de la connexion  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  se transforment comme

$$\Gamma'_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\gamma} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\beta \partial x'^\gamma}. \quad (3.4.97)$$

En effet, on veut que

$$\bar{v}'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \Big|_{p_\epsilon} \bar{v}^\rho \quad (3.4.98)$$

$$= \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \Big|_p \bar{v}^\rho + \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \bar{v}^\rho \epsilon^\sigma \quad (3.4.99)$$

$$= \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \Big|_p (v^\rho - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho v^\lambda \epsilon^\mu) + \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} v^\rho \epsilon^\sigma \quad (3.4.100)$$

en négligeant des termes d'ordre  $\epsilon^2$ . D'autre part, par définition du transport parallèle, on a dans la base naturelle des coordonnées  $x'$

$$\bar{v}'^\alpha = v'^\alpha - \Gamma'_{\beta\gamma}^\alpha v'^\beta \epsilon'^\gamma \quad (3.4.101)$$

$$= \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \Big|_p \bar{v}^\rho - \Gamma'_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\lambda} v^\lambda \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} \epsilon^\mu. \quad (3.4.102)$$

L'égalité des deux expressions (3.4.100) et (3.4.102), pour tout  $v^\lambda, \epsilon^\mu$  implique

$$\Gamma'_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \Gamma_{\lambda\mu}^\rho - \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \quad (3.4.103)$$



d'où l'on tire

$$\Gamma'_{\beta\gamma}{}^\alpha = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \Gamma_{\lambda\mu}^\rho - \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}. \quad (3.4.104)$$

Le dernier terme est encore égal à

$$\begin{aligned} -\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left( \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \right) &= -\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \right) + \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\gamma} \right) \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\beta \partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}, \end{aligned} \quad (3.4.105)$$

où on a utilisé l'égalité

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta_\gamma^\alpha. \quad (3.4.106)$$

A cause de la présence du second terme dans le membre de droite de (3.4.97), les composantes de la connexion ne se transforment pas comme les composantes d'un tenseur.

Remarque: les dérivées secondes disparaissent pour des changements de coordonnées linéaires.

Par contre

1) la partie antisymétrique des  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ , càd

$$T_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha - \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \quad (3.4.107)$$

forme les composantes d'un tenseur ( $\frac{1}{2}$ ) appelé "torsion". On n'utilisera dans la suite que des connexions sans torsion, càd telles que

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha. \quad (3.4.108)$$

2) Si  $\Gamma_{(1)}$  et  $\Gamma_{(2)}$  sont deux connexions, leur différence est un tenseur ( $\frac{1}{2}$ ).

**Théorème 2.** *Si la connexion n'a pas de torsion, on peut toujours annuler les  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  en un point, par un changement de coordonnées approprié.*

Effectuons le changement de coordonnées suivant

$$x^\alpha = x'^\alpha + \frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha x'^\beta x'^\gamma \quad (3.4.109)$$

et montrons que les nouvelles composantes de la connexion peuvent être annulées en  $x' = 0$ . En  $x'^\mu = 0 = x^\mu$ , on a

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\alpha \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\beta \partial x'^\gamma} = C_{\beta\gamma}^\alpha. \quad (3.4.110)$$

Dans ce cas (3.4.97) donne

$$\Gamma'_{\beta\gamma}{}^\alpha|_{x'=0} = \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha|_{x=0} + C_{\beta\gamma}^\alpha. \quad (3.4.111)$$

On obtient le résultat annoncé en choisissant

$$C_{\beta\gamma}^\alpha = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha|_{x=0}. \quad (3.4.112)$$

Noter que, par construction,

$$C_{\beta\gamma}^\alpha = C_{\gamma\beta}^\alpha. \quad (3.4.113)$$

### 3.4.2 Transport parallèle de tenseurs

On étend la loi de transport des vecteurs de  $p$  à  $p_\epsilon$  aux tenseurs en exigeant

1) qu'elle soit compatible avec le transport naturel des scalaires pour lesquels

$$\bar{f} = f \quad (3.4.114)$$

2) qu'elle préserve toutes les opérations tensorielles.

Pour une 1-forme: Soient  $v^\alpha$  les composantes du vecteur tangent  $v$  en  $p$ , et  $\theta_\alpha$  les composantes de la 1-forme  $\theta$  en  $p$ . Alors

$$\theta(v) = \theta_\alpha v^\alpha \quad (3.4.115)$$

est un scalaire. On a donc les égalités

$$\theta_\alpha v^\alpha = \overline{\theta_\alpha v^\alpha} = \overline{\theta_\alpha} \overline{v^\alpha} = \overline{\theta_\alpha} (v^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^\beta \epsilon^\gamma) = (\overline{\theta_\alpha} - \theta_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta \epsilon^\gamma) v^\alpha, \quad (3.4.116)$$

au premier ordre en  $\epsilon$ . On en extrait, pour tout  $v^\alpha$ , que

$$\overline{\theta_\alpha} = \theta_\alpha + \theta_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta \epsilon^\gamma. \quad (3.4.117)$$

Pour un tenseur, cette loi se généralise en

$$\begin{aligned} \overline{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_\ell} &= T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_\ell} \\ &\quad - T^{\lambda \alpha_2 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_\ell} \Gamma_{\lambda\gamma}^{\alpha_1} \epsilon^\gamma - T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \lambda}_{\beta_1 \dots \beta_\ell} \Gamma_{\lambda\gamma}^{\alpha_k} \epsilon^\gamma \\ &\quad + T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\lambda \dots \beta_\ell} \Gamma_{\beta_1\gamma}^\lambda \epsilon^\gamma + \dots + T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_{\ell-1} \lambda} \Gamma_{\beta_\ell\gamma}^\lambda \epsilon^\gamma. \end{aligned} \quad (3.4.118)$$

### 3.4.3 Dérivées covariantes

Soit  $T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_\ell}(x^\lambda)$  les composantes d'un champ de tenseurs. En  $(x^\gamma + \epsilon^\gamma)$  sont définies les composantes de deux tenseurs, qui sont respectivement

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_\ell}(x^\gamma + \epsilon^\gamma) = T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_\ell}(x^\gamma) + \epsilon^\gamma T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_\ell, \gamma} \quad (3.4.119)$$

et

$$\overline{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_\ell}(x^\gamma + \epsilon^\gamma) \quad (3.4.120)$$

qui résulte du transport parallèle de  $T$  de  $x$  en  $x + \epsilon$ . Ces deux tenseurs, définis au même point, peuvent être comparés.

**Définition 3.** La dérivée covariante dans la direction  $u$ , du tenseur  $\binom{k}{\ell}$  au point de coordonnées  $x$ ,  $(\nabla_u T)(x)$ , est le tenseur  $\binom{k}{\ell}$  défini par

$$(\nabla_u T)^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_\ell} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_\ell}(x^\gamma + \epsilon u^\gamma) - \overline{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_\ell}(x^\gamma + \epsilon u^\gamma)] \quad (3.4.121)$$

$$= (T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_\ell, \gamma} + T^{\lambda \alpha_2 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_\ell} \Gamma_{\lambda \gamma}^{\alpha_1} + \dots - T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\lambda \dots \beta_\ell} \Gamma_{\beta_1 \gamma}^\lambda - \dots) u^\gamma. \quad (3.4.122)$$

Cette définition est valable en tout point. La dérivée covariante  $\nabla_u T$  est donc un champ de tenseurs  $\binom{k}{\ell}$ . Comme  $\nabla_u T$  est linéaire en  $u$ , on peut ajouter la définition suivante

**Définition 4.** La dérivée covariante du champ de tenseurs  $\binom{k}{\ell}$  est le champ de tenseurs  $\binom{k}{\ell+1}$  dont les composantes sont les coefficients de  $u^\gamma$  dans (3.4.122).

Les notations utilisées sont

$$(\nabla_u T)^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_\ell} = (\nabla T)^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_\ell \gamma} u^\gamma \quad (3.4.123)$$

$$(\nabla T)^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_\ell \gamma} = T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_\ell ; \gamma} = \nabla_\gamma T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_\ell} \quad (3.4.124)$$

$$\nabla_u T = u^\gamma \nabla_\gamma T \quad (3.4.125)$$

$\nabla_\gamma T$  désigne la dérivée covariante de  $T$  dans la direction du vecteur de base  $e_\gamma = \delta_\gamma^\alpha e_\alpha$ .

Exemples:

- 1) pour les scalaires:  $f_{;\gamma} = f_{,\gamma}$
- 2) pour les vecteurs:  $v^\alpha_{;\gamma} = v^\alpha_{,\gamma} + v^\lambda \Gamma_{\lambda \gamma}^\alpha$
- 3) pour les 1-formes:  $\theta_{\alpha;\gamma} = \theta_{\alpha,\gamma} - \theta_\lambda \Gamma_{\alpha \gamma}^\lambda$ .

### 3.4.4 Transport parallèle le long d'une courbe

Soit  $T$  un champ de tenseurs défini le long de la courbe  $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$  de vecteur tangent  $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ .

**Définition 5.** Ce champ  $T$  est transporté parallèlement à lui-même le long de la courbe si et seulement si

$$\nabla_u T = 0. \quad (3.4.126)$$

Par construction, cette équation a un sens invariant, càd indépendant du choix de coordonnées: tout y est tensoriel.

$\nabla_u T = 0$  signifie que les tenseurs  $T$  en  $x + \epsilon u$  et  $\overline{T}$  en  $x + \epsilon u$  coïncident.

### 3.4.5 Connexion métrique. Symboles de Christoffel

La connexion métrique est celle qui, dans le transport parallèle des vecteurs, préserve leurs produits scalaires.

Soient  $v$  et  $w$  deux vecteurs tangents en  $p$ , leur produit scalaire est  $g_p(v, w)$ . On transporte  $v$  et  $w$  de  $p$  en  $p_\epsilon$ . On a donc, en  $p_\epsilon$  les deux vecteurs  $\bar{v}$  et  $\bar{w}$ . On demande que leur produit scalaire en  $p_\epsilon$ , calculé avec la métrique en  $p_\epsilon$ , soit égal à  $g_p(v, w)$ , ou encore que

$$g_p(v, w) = g_{p_\epsilon}(\bar{v}, \bar{w}) = \bar{g}(\bar{v}, \bar{w}) \quad (3.4.127)$$

la dernière égalité est vraie par définition du transport parallèle. On doit donc avoir

$$\bar{g} = g_{p_\epsilon} \quad (3.4.128)$$

autrement dit, la métrique doit être invariante par transport parallèle, ce qui équivaut, étant donnée la définition de la dérivée covariante, à demander que

$$g_{\mu\nu;\alpha} = 0, \quad (3.4.129)$$

ou que

$$g_{\mu\nu,\gamma} = \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda g_{\lambda\nu} + \Gamma_{\nu\gamma}^\lambda g_{\mu\lambda} \quad (3.4.130)$$

ou, en posant

$$\Gamma_{\alpha|\beta\gamma} = g_{\alpha\lambda} \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda \quad (3.4.131)$$

que

$$g_{\mu\nu,\gamma} = \Gamma_{\nu|\mu\gamma} + \Gamma_{\mu|\nu\gamma}. \quad (3.4.132)$$

On en tire (voir chapitre 2) que la connexion métrique est définie par les symboles de Christoffel

$$\Gamma_{\alpha|\beta\gamma} = \frac{1}{2} [g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha}] \quad (3.4.133)$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\lambda = g^{\lambda\alpha} \Gamma_{\alpha|\beta\gamma} = \{\lambda_{\beta\gamma}\}. \quad (3.4.134)$$

La connexion métrique n'a pas de torsion, c'est la connexion de Levi-Civita; c'est cette connexion qui sera utilisée dans la suite.

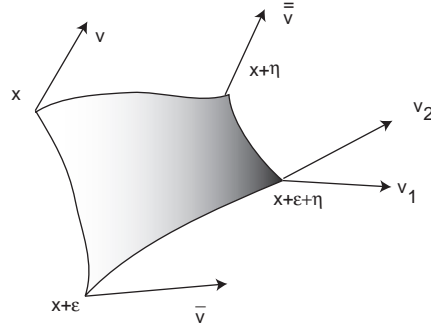
**Théorème 3.** *On peut toujours, dans un système de coordonnées approprié, annuler les dérivées  $g_{\alpha\gamma,\beta}$  en un point.*

Ceci découle des relations ci-dessus entre les dérivées de la métrique et les symboles de Christoffel et du fait que l'on peut toujours, en un point, trouver un système de coordonnées dans lequel la connexion est nulle.

### 3.5 Courbure. Tenseur de Riemann

Dans l'espace-temps de Minkowski, si on transporte un vecteur parallèlement à lui-même le long d'une courbe fermée, on revient au point de départ avec le même vecteur. Cette propriété n'est plus vraie dans un espace-temps courbe: la différence entre le vecteur de départ et le vecteur transporté le long d'une la boucle est mesurée par le tenseur de courbure ou tenseur de Riemann.

Au lieu de considérer le transport parallèle d'un vecteur le long d'une boucle, nous considérons le transport de ce vecteur du point  $p$  vers  $p_{\epsilon+\eta}$  en suivant deux chemins distincts: le premier de  $p$  de coordonnées  $x$  en  $p_\epsilon$  de coordonnées  $x+\epsilon$  puis en  $p_{\epsilon+\eta}$  de coordonnées  $x+\epsilon+\eta$ ; le second de  $p$  de coordonnées  $x$  en  $p_\eta$  de coordonnées  $x+\eta$  puis en  $p_{\epsilon+\eta}$  de coordonnées  $x+\epsilon+\eta$ .  $\eta^\gamma$  et  $\epsilon^\gamma$  sont supposés constants dans le système de coordonnées de sorte que leur crochet de Lie est trivialement nul:  $[\epsilon, \eta] = 0$ .



1) En  $p_\epsilon$ , on a le vecteur

$$\bar{v}^\alpha = v^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) v^\beta \epsilon^\gamma \quad (3.5.135)$$

puis en  $p_{\epsilon+\eta}$ , on obtient le vecteur

$$v_1^\alpha = \bar{v}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x+\epsilon) \bar{v}^\beta \eta^\gamma. \quad (3.5.136)$$

2) En  $p_\eta$ , on a le vecteur

$$\bar{v}^\alpha = v^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) v^\beta \eta^\gamma \quad (3.5.137)$$

puis en  $p_{\epsilon+\eta}$ , on obtient le vecteur

$$v_2^\alpha = \bar{v}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x+\eta) \bar{v}^\beta \epsilon^\gamma. \quad (3.5.138)$$

La différence entre (3.5.136) et (3.5.138) est un vecteur en  $p_{\epsilon+\eta}$  par construction; il vaut

$$\delta v^\alpha = [\Gamma_{\beta\gamma,\sigma}^\alpha - \Gamma_{\beta\sigma,\gamma}^\alpha + \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\rho - \Gamma_{\rho\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\sigma}^\rho] v^\beta \epsilon^\gamma \eta^\sigma \quad (3.5.139)$$

$$= -R_{\beta\gamma\sigma}^\alpha v^\beta \epsilon^\gamma \eta^\sigma \quad (3.5.140)$$

avec

$$R^\alpha_{\beta\gamma\sigma} = \Gamma^\alpha_{\beta\sigma,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\sigma} + \Gamma^\alpha_{\rho\gamma}\Gamma^\rho_{\beta\sigma} - \Gamma^\alpha_{\rho\sigma}\Gamma^\rho_{\beta\gamma}. \quad (3.5.141)$$

Par construction, les quantités  $R^\alpha_{\beta\gamma\sigma}$  sont les composantes d'un tenseur  $(\frac{1}{3})$ . C'est le tenseur de Riemann.

On en déduit le commutateur des dérivées covariantes d'un champ de vecteurs:

$$v^\alpha_{;\gamma;\sigma} - v^\alpha_{;\sigma;\gamma} = -R^\alpha_{\beta\gamma\sigma} v^\beta. \quad (3.5.142)$$

Des formules analogues existent pour les champs de covecteurs et les champs de tenseurs en général.

### 3.5.1 Propriétés de symétries du tenseur de Riemann

$$i) R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = -R^\alpha_{\delta\gamma\beta} \quad (3.5.143)$$

$$ii) R^\alpha_{\beta\gamma\delta} + R^\alpha_{\gamma\delta\beta} + R^\alpha_{\delta\beta\gamma} = 0 \quad (3.5.144)$$

$$iii) R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \quad (3.5.145)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} \quad (3.5.146)$$

$$iv) R_{\alpha\beta\gamma\delta;\epsilon} + R_{\alpha\beta\delta\epsilon;\gamma} + R_{\alpha\beta\epsilon\gamma;\delta} = 0. \quad \text{Identité de Bianchi} \quad (3.5.147)$$

La propriété i) est vraie, par construction; les autres se vérifient sans problème dans un système de coordonnées où les  $\Gamma$  sont nuls en un point.

A quatre dimensions d'espace-temps, le tenseur de Riemann possède 20 composantes indépendantes.

### 3.5.2 Gravitation ou coordonnées curvilignes?

Supposons disposer d'une métrique lorentzienne dont les composantes  $g_{\mu\nu}(x)$  ne sont pas constantes. Comment savoir si les  $g_{\mu\nu}$  décrivent un vrai champ de gravitation ou s'ils représentent la métrique minkowskienne en coordonnées curvilignes? La réponse se trouve dans le

**Théorème 4.** *La condition nécessaire et suffisante pour que la métrique lorentzienne  $g_{\mu\nu}$  puisse, partout dans un voisinage de  $x_0$ , se ramener à la métrique Minkowskienne  $\eta_{\alpha\beta}$  par un changement de coordonnées est que le tenseur de courbure soit nul dans ce voisinage,*

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = 0 \quad (3.5.148)$$

*donc que l'espace-temps soit plat partout dans ce voisinage.*

La démonstration de la condition nécessaire est immédiate: si, dans un système de coordonnées, la métrique est  $\eta_{\alpha\beta}$ , la connexion de Levi-Civita et ses dérivées sont nulles et il en est de même de la courbure. Pour démontrer que la condition est suffisante, on utilise d'abord le fait qu'en un point donné  $x_0$ , il existe un changement de base tel que les matrices  $g_{\mu\nu}$  et  $\eta_{\alpha\beta}$  sont reliées par (3.3.93) ou, de manière équivalente, que

$$\eta^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}(x_0) K_\mu^\alpha K_\nu^\beta. \quad (3.5.149)$$

Pour chaque valeur de  $\alpha$ , les  $K_\mu^\alpha$  sont les composantes d'un covecteur en  $x_0$ ; les 4 covecteurs correspondant à  $\alpha = 0,1,2,3$  forment une base de  $V_{x_0}^*$ . On transporte ensuite ces 4 covecteurs  $K_\mu^\alpha$ , en chaque point  $x$  d'un voisinage de  $x_0$ , par transport parallèle selon un chemin quelconque. La condition que la courbure est nulle garantit bien que tout champ de tenseurs transporté en  $x$  ne dépend pas du chemin suivi entre  $x_0$  et  $x$ . Plus précisément, ici, les 4 champs de covecteurs  $k_\mu^\alpha$  sont définis en chaque point du chemin choisi par l'équation

$$k_{\mu;\nu}^\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad k_{\mu,\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda k_\lambda^\alpha \quad (3.5.150)$$

et la condition initiale  $k_\mu^\alpha(x_0) = K_\mu^\alpha$ . Puisque la connexion de Levi-Civita est symétrique, on en déduit que

$$k_{\mu,\nu}^\alpha - k_{\nu,\mu}^\alpha = 0. \quad (3.5.151)$$

Ceci est précisément la condition d'intégrabilité qui garantit que, localement, il existe 4 fonctions  $\xi^\alpha(x)$ , telles que

$$k_\mu^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}. \quad (3.5.152)$$

En utilisant la définition de la connexion de Levi-Civita et la relation de transport parallèle (3.5.150), on vérifie ensuite par calcul direct que

$$\frac{\partial}{\partial x^\rho} (g^{\mu\nu} k_\mu^\alpha k_\nu^\beta) = 0. \quad (3.5.153)$$

L'expression  $g^{\mu\nu} k_\mu^\alpha k_\nu^\beta$  est donc constante, égale en tout point  $x$  à sa valeur en  $x_0$  qui est  $\eta^{\alpha\beta}$ . Finalement, en combinant ceci avec (3.5.152), on déduit que

$$\eta^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}, \quad (3.5.154)$$

En inversant cette relation, on trouve effectivement que la métrique peut être ramenée partout dans un voisinage de  $x_0$  à la métrique Minkowskienne par le changement de coordonnées  $\xi^\alpha(x)$ .

Remarque: L'espace est plat ssi le tenseur de Riemann est nul; ceci n'implique pas que sa topologie est celle de l'espace de Minkowski.

### 3.5.3 Tenseur de Ricci. Courbure scalaire

Le tenseur de Ricci est le tenseur  $(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix})$  obtenu par contraction du tenseur de Riemann. Ses composantes sont

$$R_{\alpha\beta} = R^\lambda_{\alpha\lambda\beta}. \quad (3.5.155)$$

Il est symétrique

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}. \quad (3.5.156)$$

La courbure scalaire est la trace du tenseur de Ricci

$$R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}. \quad (3.5.157)$$

### 3.5.4 Tenseur d'Einstein

Le tenseur d'Einstein est défini comme

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}. \quad (3.5.158)$$

Il est symétrique

$$G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha} \quad (3.5.159)$$

et vérifie les identités de Bianchi contractées

$$G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0. \quad (3.5.160)$$

Ceci découle des identités de Bianchi pour le tenseur de Riemann et du fait que les dérivées covariantes de la métrique sont nulles.

Noter que le tenseur

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} \quad (3.5.161)$$

où  $\Lambda$  est une constante est aussi symétrique et qu'il vérifie aussi les identités de Bianchi contractées.



# Chapitre 4

## Equations du mouvement dans un champ de gravitation

Dans ce chapitre, on considère le mouvement d'une particule "test" dans un champ de gravitation extérieur fixé, en négligeant la modification du champ de gravitation due à la présence de la particule et à son mouvement. Dans le chapitre suivant, par contre, on établira les équations d'Einstein qui décrivent comment une distribution de matière détermine le champ de gravitation.

### 4.1 Géodésiques

#### 4.1.1 Equation des géodésiques

En Relativité Restreinte dans l'espace-temps de Minkowski, les trajectoires des particules libres sont des droites, de type temps pour les particules massives, de type lumière pour les particules sans masse. Ces droites sont les géodésiques de l'espace plat: le long de leur trajectoire, le vecteur énergie-impulsion  $p^\alpha$  des particules libres est conservé. Puisque ce vecteur est proportionnel au vecteur tangent  $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ , dans la paramétrisation  $\lambda$ , le long de la trajectoire, le vecteur tangent reste parallèle à lui-même. On a donc

$$\nabla_u u = 0 \quad (4.1.1)$$

ou

$$u^\mu u^\nu_{;\mu} = u^\mu (u^\nu_{,\mu} + \Gamma^\nu_{\gamma\mu} u^\gamma) = 0 \quad (4.1.2)$$

ou encore, dans un système de coordonnées arbitraires de l'espace-temps de Minkowski,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (4.1.3)$$

Ce sont les équations (2.2.11) du chapitre 2.

Par le principe d'équivalence, la trajectoire  $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$  d'une particule "test" qui se meut dans un champ de gravitation doit aussi être une géodésique: elle doit obéir à l'équation

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla_u u = 0 \quad \text{où} \quad u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}, \quad (4.1.4)$$

où les  $\Gamma$  sont les coefficients d'une connexion affine arbitraire.

### 4.1.2 Courbe autoparallèle

Soit  $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$  une géodésique paramétrisée par  $\lambda$ . Effectuons un changement de paramétrisation

$$\lambda = \lambda(\lambda'), \quad \frac{d\lambda}{d\lambda'} \neq 0. \quad (4.1.5)$$

Lorsque  $d\lambda/d\lambda' > 0$ , le sens de parcours de la courbe est conservé.

Alors

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda'} = \frac{d\lambda}{d\lambda'} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \quad (4.1.6)$$

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda'^2} = \frac{d^2 \lambda}{d\lambda'^2} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} + \left(\frac{d\lambda}{d\lambda'}\right)^2 \frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} \quad (4.1.7)$$

$$= \frac{d^2 \lambda}{d\lambda'^2} \frac{d\lambda'}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda'} - \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \frac{dx^\rho}{d\lambda'} \frac{dx^\sigma}{d\lambda'}. \quad (4.1.8)$$

On en déduit que l'équation à laquelle obéit  $x^\alpha(\lambda')$ , est

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda'^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \frac{dx^\rho}{d\lambda'} \frac{dx^\sigma}{d\lambda'} = f(\lambda') \frac{dx^\alpha}{d\lambda'} \quad (4.1.9)$$

avec

$$f(\lambda') = \frac{d^2 \lambda}{d\lambda'^2} \frac{d\lambda'}{d\lambda}. \quad (4.1.10)$$

Ainsi, le changement de paramètre,  $\lambda \rightarrow \lambda'$ , transforme l'équation de la géodésique (4.1.4) en l'équation d'une courbe autoparallèle (4.1.9)

$$\nabla_{u'} u' = f(\lambda') u' \quad \text{avec} \quad u'^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda'}. \quad (4.1.11)$$

Elle exprime que le vecteur tangent  $u'$  reste parallèle à lui-même le long de la courbe. Cette équation n'est pas fondamentalement différente de l'équation (4.1.4), car on a le

**Théorème 5.** *Toute courbe  $x^\alpha(\lambda')$  solution de l'équation des courbes autoparallèles (4.1.9) avec  $f$  fixé peut être reparamétrisée pour satisfaire l'équation des géodésiques (4.1.4).*

En effet, partons de l'équation (4.1.9) et injectons-y le changement de paramètre  $\lambda' = \lambda'(\rho)$ , avec  $d\lambda'/d\rho \neq 0$ ; par un calcul analogue au précédent, l'équation pour  $x^\alpha(\rho)$  est à présent

$$\left[ \frac{d^2 x^\alpha}{d\rho^2} + \Gamma_{\tau\sigma}^\alpha \frac{dx^\tau}{d\rho} \frac{dx^\sigma}{d\rho} \right] \left( \frac{d\rho}{d\lambda'} \right)^2 + \frac{dx^\alpha}{d\rho} \frac{d^2 \rho}{d\lambda'^2} = f(\lambda') \frac{dx^\alpha}{d\rho} \frac{d\rho}{d\lambda'}. \quad (4.1.12)$$

Elle se réduit à l'équation des géodésiques (4.1.4) si les termes linéaires en  $dx^\alpha/d\rho$  disparaissent, càd pour

$$\frac{d^2 \rho}{d\lambda'^2} = f(\lambda') \frac{d\rho}{d\lambda'}. \quad (4.1.13)$$

C'est une équation différentielle du second ordre pour  $\rho(\lambda')$  qui admet la solution particulière  $\rho = \text{constante}$ ; celle-ci n'est pas intéressante car elle ne fournit pas un paramètre utile. Pour  $\sigma(\lambda') = d\rho/d\lambda' \neq 0$  l'équation devient  $d \ln \sigma = f(\lambda') d\lambda'$  qui donne

$$\sigma(\lambda') = \sigma_0 + \exp\left(\int_{\lambda'_0}^{\lambda'} f(\lambda'') d\lambda''\right) \quad (4.1.14)$$

$$\rho(\lambda') = \rho_0 + \int_{\lambda'_0}^{\lambda'} d\mu \sigma(\mu). \quad (4.1.15)$$

### 4.1.3 Paramètre affin

**Définition 6.** *Un paramètre pour lequel l'équation des courbes autoparallèles prend la forme de l'équation des géodésiques est appelé paramètre affin.*

**Théorème 6.** *Soit  $\lambda'$  un paramètre affin; tous les autres paramètres affins s'en déduisent par*

$$\rho = a\lambda' + b, \quad \text{avec } a \neq 0. \quad (4.1.16)$$

En effet,  $\lambda'$  étant un paramètre affin, on a  $f(\lambda') = 0$  et il ne reste de (4.1.13) que

$$\frac{d^2 \rho}{d\lambda'^2} = 0 \iff \rho = a\lambda' + b. \quad (4.1.17)$$

### 4.1.4 Géodésiques et connexion métrique

**Théorème 7.** *Soit  $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$  une géodésique de paramètre affin  $\lambda$  et  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  la connexion de Levi-Civita. Alors, la longueur du vecteur tangent est constante le long de la géodésique.*

En effet, le carré de la longueur du vecteur tangent

$$A(\lambda) = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \quad (4.1.18)$$

est bien une constante du mouvement

$$\frac{dA}{d\lambda} = u^\gamma A_{;\gamma} = 2 u^\gamma u_{;\gamma}^\alpha g_{\alpha\beta} u^\beta = 0 \quad (4.1.19)$$

car i) les dérivées covariantes de la métrique sont nulles et ii) la courbe est une géodésique ( $u^\gamma u_{;\gamma}^\alpha = 0$ ).

Si  $\lambda'$  n'est pas un paramètre affiné de la géodésique, la longueur du vecteur tangent  $u'$  varie de point en point: si on dénote par  $A'(\lambda')$  le carré de sa longueur

$$A'(\lambda') = g_{\alpha\beta} u'^\alpha u'^\beta, \quad (4.1.20)$$

alors, en utilisant l'équation des courbes autoparallèles réécrite comme

$$u'^\alpha_{;\mu} u'^\mu = 2 f(\lambda') u'^\alpha \quad (4.1.21)$$

et la définition de la connexion de Levi-Civita (2.3.22), on trouve

$$\frac{dA'}{d\lambda'} = [g_{\alpha\beta} u'^\alpha u'^\beta]_{;\mu} u'^\mu = 2 g_{\alpha\beta} (u'^\alpha_{;\mu} u'^\mu) u'^\beta = 2 f(\lambda') A'. \quad (4.1.22)$$

**Théorème 8.** *La distance  $s$  définie par la métrique*

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (4.1.23)$$

*est un paramètre affiné pour les géodésiques de type temps ou espace.*

En effet, la distance  $s$  est explicitement donnée par

$$s(\lambda') = s_0 + \int_{\lambda'_0}^{\lambda'} d\lambda'' \sqrt{\pm A'(\lambda'')} \quad (4.1.24)$$

avec le signe  $+$  pour une géodésique de type espace et le signe  $-$  pour une géodésique de type temps. Alors

$$\frac{ds}{d\lambda'} = \sqrt{\pm A'(\lambda')} \quad (4.1.25)$$

et

$$A(s) = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda'} \frac{dx^\beta}{d\lambda'} \left(\frac{d\lambda'}{ds}\right)^2 = \pm 1. \quad (4.1.26)$$

Donc  $dA(s)/ds = 0$  et puisque  $A'(\lambda') \neq 0$  pour des géodésiques de type temps ou espace, on déduit de (4.1.22) que  $f(s) = 0$ .

**Remarque:** Le long d'une géodésique de type lumière,  $s$  ne constitue plus un bon paramètre car  $ds = 0$ . L'équation (4.1.4) ou l'équation

$$\frac{du^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0 \quad (4.1.27)$$

sert alors aussi à définir le paramètre affín  $\lambda$ .

Les équations des géodésiques (4.1.4) forment un système d'équations différentielles du second ordre: les données initiales qui assurent l'unicité de la solution sont la position et le vecteur tangent.

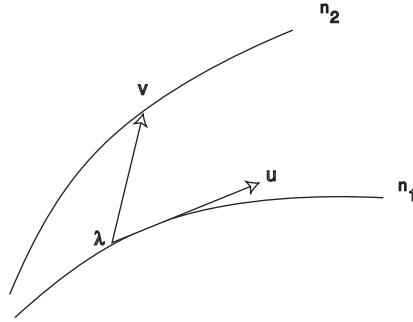
#### 4.1.5 Observateurs localement inertiels

**Définition 7.** *Les observateurs localement inertiels sont les observateurs en chute libre, càd ceux dont la ligne d'univers est une géodésique de type temps.*

### 4.2 Déviation des géodésiques

Ce paragraphe est valable pour une connexion arbitraire sans torsion.

Considérons une famille à un paramètre de géodésiques  $x^\alpha(\lambda, n)$  qui balaie une surface.  $\lambda$  est le paramètre affín le long de chaque géodésique.



On définit les champs de vecteurs

$$v^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial n} \Big|_\lambda \quad \text{et} \quad u^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \lambda} \Big|_n. \quad (4.2.28)$$

Pour chaque valeur de  $n$  on a une géodésique

$$u^\alpha u^\beta_{;\alpha} = 0; \quad (4.2.29)$$

les champs de vecteurs  $v$  et  $u$  sont partout tangents à la surface définie paramétriquement par  $x^\alpha = x^\alpha(\lambda, n)$  et leur crochet de Lie est nul

$$[v, u]^\beta = v^\alpha u^\beta_{;\alpha} - u^\alpha v^\beta_{;\alpha} = \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial n \partial \lambda} - \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial \lambda \partial n} = 0, \quad (4.2.30)$$

et, puisque la torsion est nulle, on peut, dans le crochet de Lie, remplacer les dérivées ordinaires par des dérivées covariantes

$$[v, u]^\beta = v^\alpha u^\beta_{;\alpha} - u^\alpha v^\beta_{;\alpha} = 0. \quad (4.2.31)$$

Dans l'espace-temps plat de Minkowski, pour différentes valeurs de  $n$ , les géodésiques sont des droites et le vecteur  $v^\alpha$  dépend linéairement de  $\lambda$ :

$$\frac{d^2 v^\alpha}{d\lambda^2} = 0 \iff \nabla_u \nabla_u v = 0. \quad (4.2.32)$$

Dans un espace-temps général, le vecteur  $\nabla_u \nabla_u v$  mesure l'accélération relative des géodésiques. Celle-ci est déterminée par la courbure: en effet

$$\frac{D^2 v^\gamma}{d\lambda^2} = [\nabla_u \nabla_u v]^\gamma \quad (4.2.33)$$

$$= u^\alpha (u^\beta v^\gamma_{;\beta})_{;\alpha} = u^\alpha (v^\beta u^\gamma_{;\beta})_{;\alpha} \quad \text{par (4.2.31)} \quad (4.2.34)$$

$$= u^\alpha v^\beta_{;\alpha} u^\gamma_{;\beta} + u^\alpha v^\beta u^\gamma_{;\beta;\alpha} = v^\alpha u^\beta_{;\alpha} u^\gamma_{;\beta} + u^\alpha v^\beta u^\gamma_{;\beta;\alpha} \quad (4.2.35)$$

$$= -v^\alpha u^\beta u^\gamma_{;\beta;\alpha} + u^\alpha v^\beta u^\gamma_{;\beta;\alpha} = -v^\beta u^\alpha u^\gamma_{;\alpha;\beta} + u^\alpha v^\beta u^\gamma_{;\beta;\alpha} \quad (4.2.36)$$

$$= R^\gamma_{\lambda\alpha\beta} u^\lambda u^\alpha v^\beta. \quad (4.2.37)$$

Pour passer de la troisième à la quatrième ligne, on utilise la règle de Leibniz sur le premier terme et l'équation des géodésiques; pour obtenir la dernière ligne, on fait usage du commutateur de deux dérivées covariantes (3.5.142).

D'un point de vue physique, la détection d'un vrai champ de gravitation ( $R^\gamma_{\lambda\alpha\beta} \neq 0$ ) peut donc se faire par la mesure de l'accélération relative de géodésiques voisines. A première vue, la mesure de (4.2.37), pour tout  $u$  et  $v$ , ne donne accès qu'au seul tenseur de Jacobi défini par

$$J^\gamma_{\beta\lambda\alpha} = J^\gamma_{\beta\alpha\lambda} = \frac{1}{2} [R^\gamma_{\lambda\alpha\beta} + R^\gamma_{\alpha\lambda\beta}]. \quad (4.2.38)$$

Celui-ci permet cependant de reconstruire toutes les composantes du tenseur de Riemann: en effet

$$R^\mu_{\alpha\beta\nu} = \frac{2}{3} [J^\mu_{\nu\alpha\beta} - J^\mu_{\beta\alpha\nu}]. \quad (4.2.39)$$

Ceci se démontre en utilisant les propriétés de symétrie du tenseur de Riemann.

# Chapitre 5

## Les équations d'Einstein

### 5.1 Contraintes sur la théorie de la gravitation

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, la théorie de Newton a connu de très nombreux succès dans la description et la compréhension du système planétaire. Elle ne peut cependant pas être gardée telle quelle, car elle n'est pas relativiste. La théorie par laquelle elle doit être remplacée doit satisfaire deux critères essentiels:

- 1) en première approximation, pour des champs gravitationnels faibles, elle doit se réduire à la théorie de Newton et reproduire les résultats connus en ce qui concerne les mouvements planétaires;
- 2) au delà de cette approximation, les déviations par rapport à la théorie newtonienne prédites par la nouvelle théorie doivent pouvoir être vérifiées expérimentalement.

Rappelons les caractéristiques de la théorie de Newton:

- 1) Il s'agit d'une théorie scalaire: i) le potentiel de gravitation  $\phi$  est une fonction scalaire et ii) la source du champ est un scalaire, c'est la densité de masse de la distribution de matière  $\mu$ .
- 2) L'équation du potentiel est une équation aux dérivées partielles du second ordre, à savoir l'équation de Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi G \mu \quad (5.1.1)$$

où  $G$  est la constante gravitationnelle qui entre dans l'expression de la force d'attraction entre deux masses par

$$F = \frac{Gmm'}{r^2} \quad (5.1.2)$$

et dont la valeur est donnée par

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}. \quad (5.1.3)$$

## 5.2 Tenseur énergie-impulsion

En Relativité Restreinte, on caractérise une distribution continue de matière ou d'énergie par un tenseur symétrique  $T^{\mu\nu}$ , le tenseur densité d'énergie-impulsion. En électrodynamique classique, par exemple, le système constitué du champ électromagnétique et du fluide de matière électrisée qui est sa source, possède un tenseur d'énergie-impulsion qui est la somme

$$T^{\mu\nu} = T_{mat}^{\mu\nu} + T_{em}^{\mu\nu}; \quad (5.2.4)$$

la conservation de l'énergie et de l'impulsion totale s'exprime, au niveau local, par la loi

$$T^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0. \quad (5.2.5)$$

Dans la théorie de Maxwell, le tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique est quadratique en les composantes du tenseur de Faraday:

$$T_{em}^{\alpha\beta} = \epsilon_0 c^2 [F^\alpha_\gamma F^{\beta\gamma} - \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} F_{\delta\gamma} F^{\delta\gamma}]; \quad (5.2.6)$$

sa composante

$$T_{em}^{00} = \frac{1}{2} \epsilon_0 [\bar{E}^2 + c^2 \bar{B}^2] \quad (5.2.7)$$

est la densité d'énergie ém;

$$T_{em}^{0k} = \epsilon_0 c (\bar{E} \times \bar{B})_k \quad (5.2.8)$$

est la k-ième composante de la densité d'impulsion ém multipliée par c ou la k-ième composante du flux d'énergie ém divisée par c; les composantes  $T_{em}^{k\ell}$  représentent les tensions ém. Les composantes du tenseur complet conservent évidemment la même interprétation.

### 5.2.1 $T_{\mu\nu}$ comme source du champ de gravitation

Comme on le sait par la Relativité Restreinte, masse et énergie sont équivalentes. Dans le système du centre de masse d'un élément de fluide, la densité d'énergie  $T_{00}$  se réduit à la densité de masse  $\mu$ , ou plus précisément à

$$T_{00} = \mu c^2. \quad (5.2.9)$$

Si on se souvient que pour un champ faible statique, on a

$$g_{00} = -(1 + \frac{2\phi}{c^2}), \quad (5.2.10)$$



on peut réécrire (5.1.1) sous la forme

$$-\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \quad (5.2.11)$$

dont on se sert comme guide dans la recherche de l'équation correcte du champ.

D'abord, la condition de covariance générale imposée aux équations suggère de faire non seulement de  $T_{00}$  mais de l'ensemble des composantes du tenseur  $T_{\mu\nu}$  la source du champ de gravitation. La généralisation relativiste de (5.2.11) devrait être de la forme

$$E_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (5.2.12)$$

où  $\kappa$  est une constante et où les  $E_{\mu\nu}$  sont les composantes d'un tenseur  $\binom{0}{2}$ , symétrique, formé à l'aide de la métrique et de ses dérivées premières et secondes, de sorte que les équations du champ soient encore des équations aux dérivées partielles du second ordre.

Puisque la présence d'un vrai champ de gravitation se traduit par la courbure de l'espace-temps et puisque la courbure est décrite par le tenseur de Riemann, les équations (5.2.12) doivent établir un lien entre la courbure de l'espace-temps et la source matérielle de celle-ci. On doit donc s'attendre à ce que  $E_{\mu\nu}$  soit relié au tenseur de Riemann. La relation recherchée découle du théorème suivant:

**Théorème 9.** *Les seuls tenseurs que l'on peut construire à partir de la métrique, de ses dérivées premières et secondes, qui soient linéaires en les dérivées secondes et quadratiques en les dérivées premières des  $g_{\mu\nu}$  sont le tenseur de Riemann et ses contractions.*

La démonstration en est donnée par Weinberg, p. 133.

La forme la plus générale du membre de gauche de (5.2.12) est donnée par la combinaison

$$E_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \alpha R g_{\mu\nu} \quad (5.2.13)$$

où  $\alpha$  est une constante arbitraire.

Si on admet aussi des termes sans dérivées de la métrique, (5.2.13) peut être généralisée en

$$E_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \alpha R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (5.2.14)$$

où  $\Lambda$  est une constante qui a les dimensions de l'inverse du carré d'une longueur. La constante  $\kappa$  n'étant pas encore définie, nous avons mis égal à 1 le coefficient du tenseur de Ricci.

## 5.2.2 Conservation de l'énergie et de l'impulsion

L'équation de conservation  $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$  établie dans un référentiel inertiel ne peut plus être vraie dans un référentiel arbitraire car l'énergie n'y est en général pas conservée.

L'équation (5.2.5) doit donc être modifiée par des termes qui tiennent compte de la présence de forces inertielles, c'est à dire par des termes en les  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ . Puisqu'on passe d'un référentiel inertiel à un référentiel accéléré par changement de coordonnées, l'équation cherchée est

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0. \quad (5.2.15)$$

En vertu du principe d'équivalence, c'est aussi l'expression de la loi de conservation locale de l'énergie et de l'impulsion dans un champ de gravitation.

### 5.3 Equations du champ de gravitation

Du fait de (5.2.15), les équations (5.2.12) avec (5.2.13) ou (5.2.14) ne seront cohérentes que si le tenseur  $E_{\mu\nu}$  est lui aussi à divergence covariante nulle. Ceci impose la condition  $\alpha = -\frac{1}{2}$ . Les seuls candidats qui obéissent à tous les critères imposés sont donc

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} \quad \text{ou} \\ E_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \end{array} \right. \quad (5.3.16)$$

Les équations d'Einstein de 1915 sont

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (5.3.17)$$

La constante  $\kappa$  est déterminée par la limite newtonienne; on verra plus loin qu'elle vaut

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (5.3.18)$$

Les équations d'Einstein de 1917 s'écrivent

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (5.3.19)$$

La constante  $\Lambda$  est connue sous le nom de constante cosmologique. Si elle est non nulle, l'espace plat de Minkowski n'est pas solution des équations du vide (sans sources). Einstein a introduit ce terme cosmologique, en 1917, après avoir constaté que les seules solutions cosmologiques de ses équations décrivaient des univers en expansion ou en contraction; la présence du terme en  $\Lambda$  permettait d'obtenir une solution cosmologique statique. Lorsqu'en 1929, Hubble a vérifié l'expansion de l'univers prédite par la relativité générale, Einstein a abandonné ce terme en le qualifiant de "the biggest blunder of my life" (la plus grande bêtise de ma vie). Théoriquement on ne peut cependant pas l'éliminer et l'expérience lui fournit comme borne supérieure

$$\Lambda \leq 10^{-52} m^{-2}. \quad (5.3.20)$$

Sauf dans certains problèmes de cosmologie, on utilise les équations d'Einstein sous la forme (5.3.19) ou

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (5.3.21)$$

**Remarques:**

1) en prenant la trace des deux membres de (5.3.21), on obtient

$$-R = \kappa T; \quad (5.3.22)$$

en réinjectant ceci dans l'équation (5.3.21) puis en regroupant dans le membre de droite tous les termes relatifs aux composantes du tenseur d'énergie-impulsion, on met l'équation d'Einstein sous la forme

$$R_{\mu\nu} = \kappa (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}) \quad (5.3.23)$$

totalelement équivalente à (5.3.21).

2) En dehors des sources, les équations (5.3.23) se réduisent à

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (5.3.24)$$

### 5.3.1 Conditions de coordonnées

Le tenseur d'Einstein est symétrique; il possède 10 composantes algébriquement indépendantes. La métrique possède aussi 10 composantes indépendantes et on pourrait croire, a priori, qu'on a exactement le bon nombre d'équations pour définir univoquement une solution (en précisant les conditions initiales ou limites). Ce n'est pas le cas; les composantes du tenseur d'Einstein sont reliées entre elles par les identités de Bianchi

$$G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (5.3.25)$$

Le nombre d'équations (fonctionnellement) indépendantes est égal à  $10 - 4 = 6$ . Ceci traduit le fait que si  $g_{\mu\nu}$  est solution des équations d'Einstein, il en va de même de  $g'_{\mu\nu}$  qui se déduit de  $g_{\mu\nu}$  par un changement de coordonnées général. Un tel changement de coordonnées introduit 4 fonctions arbitraires  $x^\mu(x'^\alpha)$ . Lever cette indétermination revient à imposer des conditions de coordonnées. Un choix qui s'avère souvent utile est celui des "coordonnées harmoniques" définies par la condition

$$\Gamma^\lambda = g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0. \quad (5.3.26)$$

Le qualificatif utilisé pour caractériser ces coordonnées vient du fait que si  $\Gamma^\lambda = 0$ , alors les coordonnées sont des fonctions harmoniques, solutions des équations

$$\square x^\mu = 0. \quad (5.3.27)$$

En l'absence de gravitation, les coordonnées harmoniques sont les coordonnées habituelles de l'espace-temps de Minkowski, pour lesquelles  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  et  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$  donc aussi  $\Gamma^\lambda = 0$ .

### 5.3.2 Problème des conditions initiales

Les équations de la mécanique Newtonienne sont des équations différentielles du second ordre en le temps; leurs solutions sont entièrement déterminées par les données de Cauchy càd par les positions et les vitesses à l'instant initial. Qu'en est-il ici? Les équations d'Einstein peuvent-elles être mises sous la forme d'équations de Newton, explicites en les  $\partial^2 g_{\mu\nu}/\partial(x^0)^2$ ? Si oui, elles fourniraient une solution unique pour chaque ensemble de données initiales  $g_{\mu\nu}|_0$  et  $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^0|_0$ . Ceci n'est pas possible pour la raison que seules 6 des équations d'Einstein contiennent les dérivées secondes par rapport au temps de la métrique. En effet, les identités de Bianchi (5.3.25) impliquent que

$$\frac{\partial}{\partial x^0} G^{\mu 0} = -\frac{\partial}{\partial x^k} G^{\mu k} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} G^{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\nu} G^{\mu\lambda}. \quad (5.3.28)$$

Le membre de droite ne contient pas de dérivée temporelle d'ordre supérieur à 2, il en va donc de même du membre de gauche. On en conclut que  $G^{\mu 0}$  ne contient aucune dérivée temporelle d'ordre plus élevé que 1. Les équations d'Einstein

$$G^{\mu 0} = \kappa T^{\mu 0} \quad (5.3.29)$$

n'apportent donc aucune information quant à l'évolution temporelle du potentiel de gravitation. Ce sont des contraintes que doivent vérifier les variables dynamiques et leurs dérivées premières par rapport au temps, à tout instant et en particulier à l'instant initial.

## 5.4 Limite Newtonienne des équations d'Einstein

Pour une distribution de matière au repos, la seule composante non nulle du tenseur d'énergie impulsion est

$$T_{00} = \mu c^2. \quad (5.4.30)$$

Si la matière se déplace à faible vitesse,  $T_{00}$  reste la composante dominante du tenseur d'énergie-impulsion. L'équation (5.3.21) pour  $\mu = \nu = 0$  est

$$R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00} = \kappa T_{00}. \quad (5.4.31)$$

L'égalité  $R = -\kappa T$  devient ici

$$R = -\kappa T_{\mu}^{\mu} = -\kappa T_0^0 = -\kappa T_{00} g^{00}. \quad (5.4.32)$$

Pour un champ gravitationnel faible,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (5.4.33)$$

$$g^{\mu\nu} \simeq \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (5.4.34)$$

où les composantes de  $h$  sont d'ordre  $\epsilon$ . Au premier ordre en  $\epsilon$ , (5.4.32) se simplifie en  $R \simeq \kappa T_{00}$  et l'équation (5.4.31) devient

$$R_{00} = \frac{\kappa}{2} T_{00} = \frac{\kappa c^2}{2} \mu \quad (5.4.35)$$

dans laquelle  $R_{00}$  doit être relié au potentiel gravitationnel Newtonien. Rappelons qu'au chapitre 2, on a obtenu

$$g_{00} = -1 + h_{00} = -1 - \frac{2\phi}{c^2}. \quad (5.4.36)$$

A l'approximation du champ faible lentement variable dans le temps, les symboles de Christoffel sont d'ordre  $\epsilon$ , leurs produits sont d'ordre  $\epsilon^2$  et les dérivées temporelles sont négligeables devant les dérivées spatiales. Il reste donc, à l'ordre  $\epsilon$ ,

$$R_{00} = R^\mu_{0\mu 0} = R^i_{0i0} \simeq \partial_i \Gamma^i_{00} \quad (5.4.37)$$

$$\simeq \partial_i \left( -\frac{1}{2} g_{00,i} \right) = \frac{1}{c^2} \Delta \phi. \quad (5.4.38)$$

L'égalité entre (5.4.35) et (5.4.38) reproduit l'équation de Poisson du potentiel Newtonien à la condition que

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (5.4.39)$$

comme annoncé.

# Chapitre 6

## La solution de Schwarzschild

Il s'agit d'une solution à symétrie sphérique des équations d'Einstein du vide, qui décrit le champ gravitationnel à l'extérieur d'une étoile sphérique de masse  $M$ , au repos.

### 6.1 Champs gravitationnels statiques

**Définition 8.** *Un champ gravitationnel est dit stationnaire s'il existe un système de coordonnées dans lequel la métrique est invariante par translation de temps, càd*

$$g_{\mu\nu}(x^0 + a^0, x^k) = g_{\mu\nu}(x^0, x^k) \quad \rightarrow \quad g_{\mu\nu,0} = 0 \quad (6.1.1)$$

La forme générale d'une métrique stationnaire est donc

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \text{avec} \quad g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^k). \quad (6.1.2)$$

**Définition 9.** *Un champ gravitationnel est dit statique s'il est stationnaire et si, de plus, la métrique est invariante sous le renversement du temps:  $x^0 \rightarrow -x^0$ .*

Par renversement du temps,  $dx^0 \rightarrow -dx^0$ ; donc, une métrique invariante par renversement du temps ne peut pas contenir de terme linéaire en  $dx^0$ . Une métrique statique est donc caractérisée par les conditions<sup>1</sup>

$$g_{\mu\nu,0} = 0 \quad \text{et} \quad g_{0k} = 0 = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right). \quad (6.1.3)$$

A partir d'un système de coordonnées statiques, on en génère une infinité d'autres par les changements de coordonnées de la forme

$$x^0 = a x'^0 + b, \quad a \neq 0 \quad (6.1.4)$$

$$x^k = x'^k(x'^\ell). \quad (6.1.5)$$

---

1. Le champ de vecteurs  $\partial/\partial x^0$  est orthogonal à la famille de surfaces  $x^0 = \text{constante}$ .

## 6.2 Solution à symétrie sphérique

### 6.2.1 Métrique à symétrie sphérique

**Définition 10.** Une métrique est à symétrie sphérique s'il existe un système de coordonnées

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \varphi) = (t, r, \theta, \varphi) \quad (6.2.6)$$

(où  $\theta$  et  $\varphi$  sont les coordonnées angulaires sur la sphère) dans lequel la métrique est invariante sous le groupe des rotations, càd pour des transformations du type

$$t = t', \quad r = r', \quad (\theta, \varphi) \xrightarrow{\text{rotation}} (\theta', \varphi'). \quad (6.2.7)$$

Nous utiliserons désormais des unités dans lesquelles  $c = 1$ .

Les fonctions invariantes par rotation sont celles qui ne dépendent que de  $r$  et  $t$ . Les expressions différentielles invariantes par rotation sont  $dt, dr$  et  $(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$  qui est le carré de l'élément de longueur sur la sphère de rayon  $r = 1$  à  $t = \text{constante}$ . La métrique la plus générale à symétrie sphérique est de la forme

$$ds^2 = -\alpha(r, t) dt^2 + \beta(r, t) dr^2 + 2\gamma(r, t) dr dt + \delta(r, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (6.2.8)$$

Elle dépend, a priori, de quatre fonctions arbitraires<sup>2</sup>, mais elle peut encore être simplifiée par une redéfinition appropriée des variables radiale et temporelle.

i) En choisissant comme nouvelle coordonnée radiale

$$r' = \sqrt{\delta(r, t)}, \quad \text{d'où} \quad r = r(r', t) \quad (6.2.9)$$

(6.2.8) se met sous la forme

$$ds^2 = -\alpha'(r', t) dt^2 + \beta'(r', t) dr'^2 + 2\gamma'(r', t) dr' dt + r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (6.2.10)$$

qui ne contient déjà plus que trois fonctions.

ii) Considérons à présent la combinaison des deux termes suivants

$$\alpha'(r', t) dt - \gamma'(r', t) dr'. \quad (6.2.11)$$

La géométrie différentielle nous apprend qu'il existe un facteur intégrant  $\sigma(r', t)$  par lequel on peut multiplier (6.2.11) pour en faire la différentielle d'une fonction, càd, tel que

$$dt' = \sigma(r', t) [\alpha'(r', t) dt - \gamma'(r', t) dr'] \quad (6.2.12)$$

---

2. Ces fonctions sont soumises à des conditions de positivité pour que la métrique soit de signature +2. Leur comportement asymptotique doit être supposé suffisamment régulier pour qu'à grande distance de l'étoile la métrique se réduise à la métrique Minkowskienne.

ce qui offre la possibilité de choisir  $t'$  comme nouvelle coordonnée de temps. Le carré de (6.2.12) donne

$$dt'^2 = \sigma^2 [\alpha'^2 dt^2 - 2 \alpha' \gamma' dr' dt + \gamma'^2 dr'^2] \quad (6.2.13)$$

de sorte que

$$\alpha' dt^2 - 2 \gamma' dr' dt = \alpha'^{-1} \sigma^{-2} dt'^2 - \alpha'^{-1} \gamma'^2 dr'^2 \quad (6.2.14)$$

donc que la métrique devient

$$ds^2 = -\alpha'^{-1} \sigma^{-2} dt'^2 + (\beta' + \alpha'^{-1} \gamma'^2) dr'^2 + r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (6.2.15)$$

En définissant deux nouvelles fonctions  $\nu$  et  $\mu$  par

$$e^\nu = \alpha'^{-1} \sigma^{-2}, \quad \text{et} \quad e^\mu = \beta' + \alpha'^{-1} \gamma'^2 \quad (6.2.16)$$

et en supprimant les primes, on obtient la forme générale d'une métrique à symétrie sphérique de signature +2

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\mu dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (6.2.17)$$

dans laquelle

$$\mu = \mu(r, t), \quad \nu = \nu(r, t). \quad (6.2.18)$$

Les composantes de la métrique sont donc

$$g_{00} = -e^\nu, \quad g_{11} = e^\mu, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta \quad (6.2.19)$$

$$g^{00} = -e^{-\nu}, \quad g^{11} = e^{-\mu}, \quad g_{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (6.2.20)$$

### 6.2.2 Equations d'Einstein

En dehors de l'étoile,  $T_{\mu\nu} = 0$ , les équations d'Einstein se réduisent à

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (6.2.21)$$

Avec les notations:

$$f' = \frac{\partial f}{\partial r} \quad \text{et} \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (6.2.22)$$

les seuls symboles de Christoffel non nuls sont [voir Appendice B]

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} \dot{\nu}, \quad \Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} \nu', \quad \Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2} \dot{\mu} e^{\mu-\nu} \quad (6.2.23)$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} \nu' e^{\nu-\mu}, \quad \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2} \dot{\mu}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \mu' \quad (6.2.24)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r e^{-\mu}, \quad \Gamma_{33}^1 = -r \sin \theta e^{-\mu} \quad (6.2.25)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \quad (6.2.26)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (6.2.27)$$



On en déduit par (3.5.141) les composantes du tenseur de Ricci [le calcul de  $R_{00}$  est donné en exemple dans l'Appendice A]

$$R_{00} = -\left[\frac{\dot{\mu}}{4}(\dot{\mu} - \dot{\nu}) + \frac{\ddot{\mu}}{2}\right] + e^{\nu-\mu} \left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\mu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'}{r}\right] \quad (6.2.28)$$

$$R_{01} = \frac{\dot{\mu}}{r} \quad (6.2.29)$$

$$R_{02} = R_{03} = 0 \quad (6.2.30)$$

$$R_{11} = \left[\frac{\dot{\mu}}{4}(\dot{\mu} - \dot{\nu}) + \frac{\ddot{\mu}}{2}\right] e^{\mu-\nu} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\mu'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\mu'}{r} \quad (6.2.31)$$

$$R_{12} = R_{13} = 0 \quad (6.2.32)$$

$$R_{22} = e^{-\mu} \left[e^{\mu} - 1 + \frac{r}{2}(\mu' - \nu')\right] \quad (6.2.33)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22} \quad (6.2.34)$$

$$R_{23} = 0. \quad (6.2.35)$$

### 6.2.3 Théorème de Birkhoff

**Théorème 10.** *Toute solution à symétrie sphérique des équations d'Einstein du vide est nécessairement statique.*

En effet, l'équation  $R_{01} = 0$  impose

$$\dot{\mu} = 0 \longrightarrow \mu = \mu(r). \quad (6.2.36)$$

De plus, avec  $\dot{\mu} = 0$  donc aussi  $\ddot{\mu} = 0$ , l'équation

$$R_{00} + e^{\nu-\mu} R_{11} = 0 = \frac{e^{\nu-\mu}}{r} [\nu' + \mu'] \quad (6.2.37)$$

fournit

$$\nu' + \mu' = 0 \longrightarrow \nu + \mu = \lambda(t) \quad (6.2.38)$$

d'où

$$\nu(r, t) = \lambda(t) - \mu(r) \quad (6.2.39)$$

donc

$$e^{\nu} = e^{-\mu(r)} e^{\lambda(t)} \quad (6.2.40)$$

et dans la métrique,

$$e^{\nu} dt^2 = e^{-\mu} [e^{\frac{\lambda}{2}} dt]^2 = e^{-\mu} dt'^2. \quad (6.2.41)$$

Si on redéfinit la coordonnée de temps par

$$dt' = e^{\frac{\lambda}{2}} dt, \quad (6.2.42)$$

la métrique n'en dépend plus; le champ de gravitation est donc bien statique.

Il résulte de ce théorème que le champ de gravitation extérieur produit par une étoile sphérique pulsante (dont le rayon est une fonction périodique du temps) ou par une étoile sphérique qui s'effondre en un trou noir (en maintenant sa symétrie sphérique) est le même champ gravitationnel statique que celui produit par une étoile sphérique, immobile, de même masse.

### 6.3 La solution de Schwarzschild

Dans ce qui suit, nous supposons que c'est ce nouveau temps qui est utilisé dans les équations d'Einstein (6.2.28) à (6.2.35) et que  $\mu$  et  $\nu$  n'en dépendent pas. Il reste de (6.2.39), avec  $\lambda(t) = 0$ ,

$$\mu + \nu = 0, \quad (6.3.43)$$

tandis que l'équation  $R_{22} = 0 = R_{33}$  fournit

$$e^\mu - 1 + r \mu' = 0 \quad (6.3.44)$$

qui se réécrit comme

$$(r e^{-\mu})' = 1 \quad (6.3.45)$$

et d'où on extrait

$$e^{-\mu} = 1 - \frac{2m}{r} \quad \text{où } m \text{ est la constante d'intégration.} \quad (6.3.46)$$

Finalement

$$e^\nu = e^{-\mu} = 1 - \frac{2m}{r}. \quad (6.3.47)$$

La seule équation restante  $R_{00} = 0$  est identiquement vérifiée.

La solution de Schwarzschild est donc

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (6.3.48)$$

1) Pour  $m = 0$  ou  $r \rightarrow \infty$ , la métrique de Schwarzschild se réduit à la métrique de l'espace-temps de Minkowski en coordonnées sphériques

$$ds^2 \rightarrow ds_{Mink}^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (6.3.49)$$

2) La comparaison du  $g_{00}$  de Schwarzschild avec le  $g_{00}$  de l'approximation Newtonienne fournit

$$\frac{2m}{r} = -\frac{2\phi}{c^2} = \frac{2GM}{c^2 r} \quad (6.3.50)$$

soit encore

$$m = \frac{GM}{c^2}. \quad (6.3.51)$$

3) La constante  $m$  a les dimensions d'une longueur et est proportionnelle à la masse de l'étoile.  $m$  est appelée "rayon gravitationnel" de l'étoile.

Pour le soleil,  $m \simeq 1.5km$ ; pour la terre,  $m \simeq 0.5cm$ .

4) Au premier ordre en  $\frac{m}{r}$ , la métrique se réduit à

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (6.3.52)$$

5) A priori,  $m$  est une constante d'intégration; elle pourrait aussi bien être négative. Le cas  $m < 0$  doit cependant être rejeté.

6) Pour  $m > 0$ , la composante  $g_{00}$  s'annule et la composante  $g_{11}$  est singulière en  $r = 2m$ . Cette singularité est seulement due à un mauvais choix de coordonnées. En effet, la quantité scalaire

$$R_{\lambda\mu\alpha\beta} R^{\lambda\mu\alpha\beta} = 48 \frac{m^2}{r^6} \quad (6.3.53)$$

et les autres scalaires formés avec la courbure sont parfaitement réguliers en  $r = 2m$ , par contre, la quantité (6.3.53) est singulière en  $r = 0$ , et ceci quel que soit le système de coordonnées utilisé. C'est la géométrie qui est singulière en  $r = 0$ .

7) Le changement de variable radiale défini par

$$r = \rho \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2 \quad (6.3.54)$$

met la métrique de Schwarzschild sous sa forme "isotrope"

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2} dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^4 [d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad (6.3.55)$$

$$= -\frac{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2} dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^4 [dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (6.3.56)$$

avec

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta. \quad (6.3.57)$$

Dans ces coordonnées, la métrique spatiale est régulière pour  $\rho \neq 0$ , mais la composante  $g_{00}$  s'annule pour  $\rho = \frac{m}{2}$  qui correspond à  $r = 2m$ .

Si on ne garde dans la métrique (6.3.56) que les termes linéaires en  $\frac{m}{\rho}$ , celle-ci devient

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{\rho}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2m}{\rho}\right) [dx^2 + dy^2 + dz^2]. \quad (6.3.58)$$

Elle coïncide avec la solution des équations d'Einstein linéarisées:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33} = \frac{2m}{\rho}. \quad (6.3.59)$$

Nous supposerons, dans la suite, que la surface de l'étoile se situe bien au-delà de  $r = 2m$ . La métrique de Schwarzschild est donc valable en dehors de l'étoile, pour  $r \geq r_{surf} > 2m$ . A l'intérieur de l'étoile, pour  $r < r_{surf}$ , la géométrie de l'espace-temps est différente; pour l'analyser, il faut se donner un modèle pour le tenseur d'énergie-impulsion matériel.

## 6.4 Géodésiques de la métrique de Schwarzschild

### 6.4.1 Symétries, constantes du mouvement

L'équation des géodésiques  $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$ ,

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0 \quad (6.4.60)$$

possède des constantes du mouvement associées aux symétries de la métrique. Les symboles de Christoffel  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  sont explicitement donnés par (6.2.23)-(6.2.27) avec la solution de Schwarzschild:  $e^\nu = e^{-\mu} = 1 - 2m/r$ .

i) la métrique est statique: il en résulte la conservation de l'énergie de la particule

$$\frac{du_0}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}(g_{00} u^0) = 0 \quad (6.4.61)$$

où  $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ . Ceci se voit immédiatement si on met l'équation des géodésiques (6.4.60) sous la forme

$$\frac{du_\mu}{d\lambda} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu} u^\alpha u^\beta, \quad (6.4.62)$$

en utilisant la définition des symboles de Christoffel. On obtient immédiatement le résultat annoncé, pour  $\mu = 0$  tenant compte du fait que les dérivées temporelles de la métrique sont nulles. Il en résulte donc que

$$e^\nu \frac{dt}{d\lambda} = \text{constante} = b. \quad (6.4.63)$$

ii) la métrique est à symétrie sphérique: les trois constantes du mouvement associées à cette symétrie sont les composantes du moment angulaire  $\bar{J}$  de la particule:

$$\frac{d\bar{J}}{d\lambda} = 0 \quad (6.4.64)$$

où, avec la notation  $\dot{f} = df/d\lambda$ ,

$$\begin{aligned} \bar{J} = -r^2 [\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi] \bar{I}_x + r^2 [\dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi] \bar{I}_y + \\ + r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta \bar{I}_z. \end{aligned} \quad (6.4.65)$$

Comme dans le cas de l'espace plat, lorsque le moment angulaire est non nul, le mouvement est plan; on peut toujours faire tourner le repère spatial pour que ce plan soit le plan équatorial  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Avec ce choix,  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\sin \theta = 1$ ,  $\cos \theta = 0$ ,

$$\bar{J} = r^2 \dot{\varphi} \bar{I}_z \quad (6.4.66)$$

et l'équation (6.4.60) pour  $\alpha = 2$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{\theta} \dot{r} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0 \quad (6.4.67)$$

est identiquement satisfaite; les autres équations des géodésiques deviennent

$$\ddot{r} - \frac{1}{2} \nu' \dot{r}^2 - r e^\nu \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} e^{2\nu} \nu' \dot{t}^2 = 0 \quad (6.4.68)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} = 0 \quad (6.4.69)$$

$$\ddot{t} + \nu' \dot{r} \dot{t} = 0. \quad (6.4.70)$$

et la conservation de  $J_z$  permet de remplacer (6.4.69) par

$$r^2 \dot{\varphi} = \text{constante} = a. \quad (6.4.71)$$

iii) La dernière constante du mouvement dont nous ferons usage est la longueur du vecteur tangent.

Pour une géodésique de type temps, le carré de la longueur du vecteur tangent est fixé à

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1 \quad \text{soit} \quad e^\nu \dot{t}^2 - e^{-\nu} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 = 1 \quad (6.4.72)$$

Pour une géodésique de genre lumière, la longueur du vecteur tangent est nulle

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0 \quad \text{soit} \quad e^\nu \dot{t}^2 - e^{-\nu} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 = 0. \quad (6.4.73)$$

Les constantes du mouvement permettent de remplacer les équations du second ordre par des équations du premier ordre, équivalentes aux premières à la condition que  $\dot{r} \neq 0$ :

$$e^\nu \dot{t}^2 - e^{-\nu} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 = 1 \quad (\text{ou} = 0) \quad (6.4.74)$$

$$r^2 \dot{\varphi} = a \quad (6.4.75)$$

$$e^\nu \dot{t} = b. \quad (6.4.76)$$

Si  $\dot{r} = 0$ , il faut rajouter la première équation, soit, en simplifiant:

$$r \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} e^\nu \nu' \dot{t}^2. \quad (6.4.77)$$

### 6.4.2 Orbites spatiales (géodésiques de type temps)

Nous nous intéressons ici à la trajectoire spatiale  $r = r(\varphi)$ . Dans ce cas,

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\varphi} \rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi}, \quad (6.4.78)$$

si  $a \neq 0, \dot{\varphi} \neq 0$ , ce que nous supposons ici. Les équations (6.4.74) et (6.4.76) donnent

$$\dot{t} = b e^{-\nu} \quad (6.4.79)$$

$$b^2 e^{-\nu} - e^{-\nu} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 = 1. \quad (6.4.80)$$

Avec (6.4.75) et (6.4.78), on obtient

$$e^{-\nu} b^2 - \left[ \frac{e^{-\nu}}{r^2} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + 1 \right] \frac{a^2}{r^2} = 1 \quad (6.4.81)$$

ou

$$\left[ \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{e^\nu}{r} = \frac{b^2 - e^\nu}{a^2}. \quad (6.4.82)$$

En injectant  $e^\nu = 1 - 2m/r$ , il vient

$$\left[ \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) \right]^2 + \left( \frac{1}{r} \right)^2 = \frac{b^2 - 1}{a^2} + \frac{2m}{a^2 r} + \frac{2m}{r^3}. \quad (6.4.83)$$

Pour pouvoir comparer cette équation à l'équation Newtonienne du problème de Kepler, on dérive une fois de plus. On obtient alors soit

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} = 0 \quad (6.4.84)$$

dont la solution est le mouvement circulaire, comme en théorie classique

$$r = \text{const} \quad (6.4.85)$$

soit, pour  $\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} \neq 0$ ,

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{m}{a^2} + \frac{3m}{r^2}. \quad (6.4.86)$$

Avec

$$u = \frac{1}{r}, \quad (6.4.87)$$

elle se récrit comme

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{a^2} + 3mu^2. \quad (6.4.88)$$

C'est la version relativiste de l'équation de Binet du problème de Kepler (rappelé au chapitre 7)

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{a^2}. \quad (6.4.89)$$

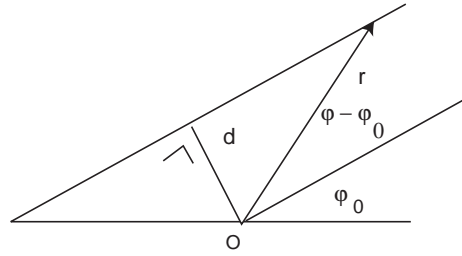
Les équations (6.4.88) et (6.4.89) diffèrent par le terme  $3mu^2$  qui est la correction relativiste. Comparée au terme constant  $m/a^2$ ,

$$3mu^2 / \frac{m}{a^2} = 3a^2u^2 = 3a^2/r^2 \quad (6.4.90)$$

cette correction est d'autant plus grande que  $u$  est plus grand ou que  $r$  est plus petit. Elle est donc la plus importante pour la planète Mercure dont l'orbite est la plus proche du soleil

$$r \simeq 5 \times 10^{10}m, \quad \frac{3a^2}{r^2} \simeq 10^{-7} \quad (c = 1). \quad (6.4.91)$$

### 6.4.3 Trajectoires spatiales (géodésiques de type lumière)



Par les mêmes manipulations que celles faites au paragraphe précédent, on obtient, pour la trajectoire spatiale d'un rayon lumineux  $u(\varphi)$ , l'équation suivante

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3mu^2. \quad (6.4.92)$$

L'équation correspondante de l'espace-temps de Minkowski s'en déduit pour  $m = 0$  (pour  $m = 0$ , la métrique de Schwarzschild se réduit à la métrique de Minkowski!)

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}u + u = 0. \quad (6.4.93)$$

Cette dernière est du même type que celle d'un oscillateur linéaire harmonique, de fréquence propre  $\omega = 1$ , dont la solution générale est

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{d} \sin(\varphi - \varphi_0) \quad (6.4.94)$$

où  $d$  et  $\varphi_0$  sont des constantes. C'est l'équation d'une droite en coordonnées polaires, pour  $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + \pi$ . On constate que  $u = u_{max} = 1/d$ , donc aussi que  $r = r_{min} = d$  pour  $(\varphi - \varphi_0) = \frac{\pi}{2}$ .



# Chapitre 7

## Tests classiques de la Relativité Générale

### 7.1 Avance du périhélie de Mercure

#### 7.1.1 Problème de Kepler

Rappelons brièvement comment on obtient l'équation de Binet pour la trajectoire d'une particule de masse  $\mu$  dans un champ de force central dérivant d'un potentiel  $\mu \phi(r)$ . Les équations de Newton divisées par la masse sont

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{d\phi}{dr} \bar{\mathbf{1}}_r. \quad (7.1.1)$$

La conservation du moment angulaire

$$\bar{\mathbf{L}} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad \rightarrow \quad \frac{d\bar{\mathbf{L}}}{dt} = \mu \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \mu \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = -\mu \vec{r} \times \frac{d\phi}{dr} \bar{\mathbf{1}}_r = 0 \quad (7.1.2)$$

a pour conséquence, si  $\bar{\mathbf{L}} \neq 0$ , que le mouvement se passe dans le plan orthogonal à  $\bar{\mathbf{L}}$ ; on adapte les coordonnées de sorte que ce plan soit le plan équatorial  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . En utilisant  $r$  et  $\varphi$  comme coordonnées polaires dans ce plan,

$$\vec{r} = r \bar{\mathbf{1}}_r, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r} \bar{\mathbf{1}}_r + r \dot{\varphi} \bar{\mathbf{1}}_\varphi, \quad \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \bar{\mathbf{1}}_r + (r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi}) \bar{\mathbf{1}}_\varphi \quad (7.1.3)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{1}}}_r = \dot{\varphi} \bar{\mathbf{1}}_\varphi, \quad \dot{\bar{\mathbf{1}}}_\varphi = -\dot{\varphi} \bar{\mathbf{1}}_r \quad (7.1.4)$$

les équations de Newton s'explicitent comme

$$(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \bar{\mathbf{1}}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) \bar{\mathbf{1}}_\varphi = -\frac{d\phi}{dr} \bar{\mathbf{1}}_r. \quad (7.1.5)$$

La composante angulaire fournit

$$\frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) = 0, \quad \rightarrow \quad r^2 \dot{\varphi} = a \quad (7.1.6)$$

qui équivaut à la conservation de  $L_z = \mu r^2 \dot{\varphi}$  (loi des aires) et la composante radiale de l'équation du mouvement devient

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -\frac{d\phi}{dr}. \quad (7.1.7)$$

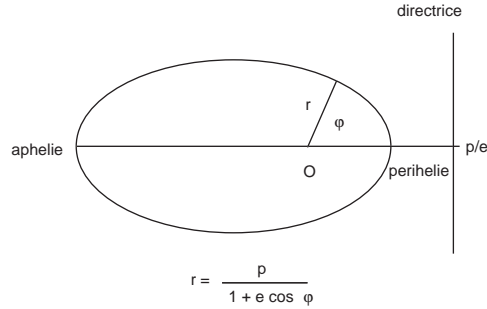
En éliminant le temps, comme en (6.4.78), on obtient l'équation pour la trajectoire  $r = r(\varphi)$ , sous la forme

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{r^2}{a^2} \frac{d\phi}{dr} \quad (7.1.8)$$

qui reproduit bien l'équation de Binet (6.4.89) pour  $\phi = -m/r$  et  $u = 1/r$

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{a^2}. \quad (7.1.9)$$

**Remarque:** Elle reproduit aussi l'équation relativiste (6.4.88) pour le potentiel  $\phi \rightarrow \phi_{eff} = -m/r - 3ma^2/r^3$ . La correction relativiste peut donc être vue comme résultant d'une force effective attractive supplémentaire en  $r^{-4}$ .



La solution générale de l'équation (6.4.89) de Binet est la somme d'une solution particulière de l'équation inhomogène (soit la constante  $\frac{m}{a^2}$ ) et de la solution générale de l'équation homogène qui est du type oscillateur harmonique d'où

$$u = \frac{m}{a^2} + C \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (7.1.10)$$

où  $C$  et  $\varphi_0$  sont des constantes. On peut la récrire sous la forme

$$\frac{1}{r} = \frac{m}{a^2} (1 + e \cos \varphi) \quad (7.1.11)$$

où

$$e = \frac{Ca^2}{m}, \quad (7.1.12)$$

est l'excentricité et où l'origine des angles a été choisie de sorte que  $\varphi_0 = 0$ . C'est l'équation d'une conique en coordonnées polaires. Pour  $e = 0$ , c'est un cercle; pour  $0 < e < 1$ , c'est une ellipse. Le point de l'ellipse le plus proche du soleil (pris comme origine des coordonnées) est appelé périhélie;  $r$  est minimum ou  $u$  est maximum pour  $\cos \varphi = 1$  soit pour  $\varphi = 0 + 2\pi n$  :

$$r_{min} = \frac{a^2}{m(1+e)}. \quad (7.1.13)$$

### 7.1.2 Correction relativiste

Rappelons l'équation relativiste (6.4.88)

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{a^2} + 3mu^2. \quad (7.1.14)$$

Nous allons en rechercher la solution par un calcul perturbatif. A cette fin, on modifie l'équation en multipliant le terme correctif par un traceur  $\epsilon$

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{a^2} + \epsilon 3mu^2 \quad (7.1.15)$$

et on recherche la solution sous la forme d'un développement formel en puissances du traceur

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + O(\epsilon^2) \quad (7.1.16)$$

La solution à laquelle on s'intéresse s'en déduit alors pour  $\epsilon = 1$ . En injectant (7.1.16) dans (7.1.15) et en égalant les coefficients des mêmes puissances de  $\epsilon$  dans les deux membres, on obtient le système d'équations

$$\epsilon^0 : \quad \frac{d^2 u_0}{d\varphi^2} + u_0 = \frac{m}{a^2} \quad (7.1.17)$$

$$\epsilon^1 : \quad \frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + u_1 = 3mu_0^2 \quad (7.1.18)$$

...

L'équation (7.1.17) est l'équation de Binet dont la solution est

$$u_0 = \frac{m}{a^2} (1 + e \cos \varphi). \quad (7.1.19)$$

En remplaçant  $u_0$  par sa valeur dans le membre de droite de (7.1.18), il vient,

$$\frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + u_1 = 3m \left[ \frac{m}{a^2} (1 + e \cos \varphi) \right]^2 \quad (7.1.20)$$

$$\simeq \frac{3m^3}{a^4} (1 + 2e \cos \varphi) + O(e^2) \quad (7.1.21)$$

Planete	Prediction RG	Observation
Mercure	43.0	$43.1 \pm 0.5$
Venus	8.6	$8.4 \pm 4.8$
Terre	3.8	$5.0 \pm 1.2$
Icare	10.3	$9.8 \pm 0.8$

en ne gardant que les termes dominants pour  $e \ll 1$ . Une solution particulière de cette équation est

$$u_1 = \frac{3m^3}{a^4} (1 + e \varphi \sin \varphi). \quad (7.1.22)$$

Limité au premier ordre, le développement (7.1.16) fournit, pour  $\epsilon = 1$ ,

$$u \simeq u_0 + \frac{3m^3}{a^4} (1 + e \varphi \sin \varphi) + \dots \quad (7.1.23)$$

$$\simeq \frac{m}{a^2} \left[ 1 + e \cos \varphi + e \frac{3m^2}{a^2} \varphi \sin \varphi \right] \quad (7.1.24)$$

$$\simeq \frac{m}{a^2} \left\{ 1 + e \cos \left[ \varphi \left( 1 - \frac{3m^2}{a^2} \right) \right] \right\} \quad (7.1.25)$$

L'orbite n'est plus tout à fait une ellipse. La trajectoire est toujours périodique, mais la période n'est plus  $2\pi$  comme dans le cas non relativiste, elle vaut ici

$$\frac{2\pi}{\left(1 - \frac{3m^2}{a^2}\right)} \simeq 2\pi \left(1 + \frac{3m^2}{a^2}\right). \quad (7.1.26)$$

Autrement dit, le minimum de  $r$  (le périhélie) est atteint pour

$$\cos \left[ \varphi \left( 1 - \frac{3m^2}{a^2} \right) \right] = 1 \quad (7.1.27)$$

soit encore

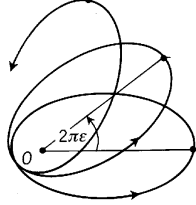
$$\varphi = 0, \quad \varphi = \varphi_1 = \frac{2\pi}{\left(1 - \frac{3m^2}{a^2}\right)} > 2\pi, \quad \text{ou} \quad \varphi = n \varphi_1. \quad (7.1.28)$$

Il faut plus qu'un tour complet pour repasser au périhélie. L'avance du périhélie est donnée par

$$\delta\varphi = \varphi_1 - 2\pi \simeq \frac{6\pi m^2}{a^2}. \quad (7.1.29)$$

Pour la planète Mercure, ceci correspond à  $0,1''$  d'arc par révolution ou à  $43''$  d'arc par siècle.

L'avance du périhélie est expliquée en grande partie dans la théorie de Newton. De fait, le mouvement des planètes n'est pas régi seulement par le soleil mais aussi



par les autres planètes du système solaire: le champ de gravitation du soleil s'en trouve ainsi perturbé et les orbites des planètes subissent une précession. A la fin du XIXème siècle, on découvrit que l'orbite de Mercure changeait d'orientation à raison de 575 secondes d'arc par siècle. La théorie Newtonienne prévoyait cependant une précession de 532 secondes, soit une différence de 43" d'arc par siècle. L'écart n'avait rien de terriblement dramatique, mais il perturbait les astronomes depuis plus d'un demi-siècle. Plusieurs types de corrections avaient été envisagées, même l'existence d'une planète supplémentaire placée entre Mercure et le soleil.

### Le "pulsar binaire"

est un autre système dont l'avance du "péri-astre" est observable. Les étoiles ont une séparation moyenne de  $1.2 \times 10^6 km$  et  $M = 1.4M_{\odot}$  correspondant à  $m = 2.07km$ . Une évaluation grossière donne un  $\delta\varphi \simeq 3.3 \times 10^{-5}$  radians par orbite, soit  $2.1^\circ$  par an. Ce qui est nettement plus facile à mesurer que l'avance du périhélie de Mercure. Un calcul plus élaboré que celui-ci, qui tient compte de la grande excentricité de l'orbite et du fait que les deux étoiles ont des masses comparables prédit une avance de  $4.2^\circ$  par an. Dans le cadre de cet exposé, nous avons calculé le shift en supposant connue la masse de l'étoile qui produit le champ gravitationnel; en fait, dans l'astronomie actuelle, c'est le shift observé ( $4.2261^\circ \pm 0.0007$  par an) qui est utilisé pour obtenir une estimation des masses. [21]

## 7.2 Déviation des rayons lumineux

Par rapport à ce qui se passe dans l'espace vide de Minkowski où les rayons lumineux se propagent en ligne droite (voir paragraphe 6.4.3), la trajectoire des rayons lumineux dans l'espace-temps de Schwarzschild est courbe; elle peut être calculée perturbativement par rapport à la droite Minkowskienne, en supposant le rapport  $m/r \ll 1$ . En procédant comme au paragraphe précédent, on a, pour solution de

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3mu^2, \quad (7.2.30)$$

à l'ordre zéro

$$u_0 = \frac{1}{d} \sin \varphi. \quad (7.2.31)$$

A l'ordre un, on doit résoudre l'équation

$$\frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + u_1 = 3mu_0^2 = \frac{3m \sin^2 \varphi}{d^2} \quad (7.2.32)$$

dont on peut aisément trouver une solution. La trajectoire approchée est ainsi donnée par

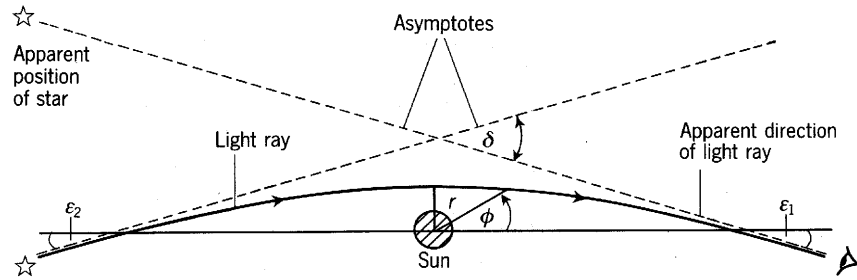
$$u = \frac{1}{r} \simeq \frac{\sin \varphi}{d} + \frac{m}{d^2} [1 + \cos^2 \varphi]. \quad (7.2.33)$$

Les points à l'infini ( $r \rightarrow \infty$ ) sont obtenus lorsque le membre de droite de (7.2.33) s'annule. On note  $-\epsilon_1$  et  $\pi + \epsilon_2$  les valeurs de  $\varphi$  pour lesquelles  $r \rightarrow \infty$ . En utilisant les approximations des sinus et cosinus valables pour des petits angles, on obtient

$$-\frac{\epsilon_1}{d} + \frac{2m}{d^2} = 0, \quad \text{et} \quad -\frac{\epsilon_2}{d} + \frac{2m}{d^2} = 0 \quad (7.2.34)$$

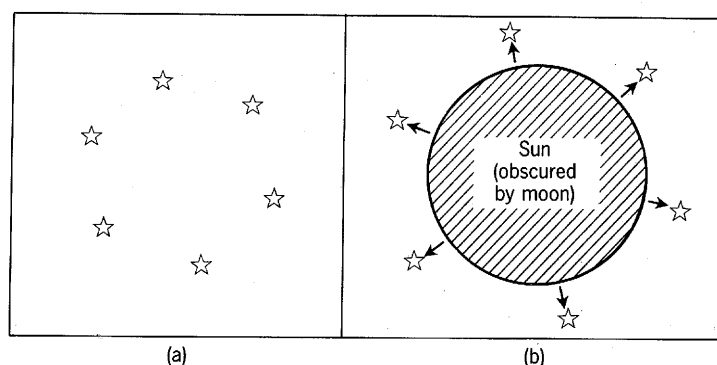
et pour la somme

$$\delta = \epsilon_1 + \epsilon_2 = \frac{4m}{d}. \quad (7.2.35)$$



La déviation prédite pour un rayon lumineux qui frôle le soleil est de  $1.75''$  d'arc. De nombreux essais de mesure de cette déviation ont eu lieu pendant des éclipses totales du soleil. Si l'on compare la photographie d'un ensemble d'étoiles proches du soleil pendant une éclipse totale à la photo du même ensemble d'étoiles prise 6 mois auparavant lorsque le soleil est de l'autre côté du ciel, on constate un déplacement de leur position apparente dans le ciel (déplacement radial), à cause de la déviation de la lumière.

La première vérification expérimentale a eu lieu en 1919 lors de deux expéditions britanniques (mises sur pied par Sir Arthur Eddington) en vue d'observer une éclipse

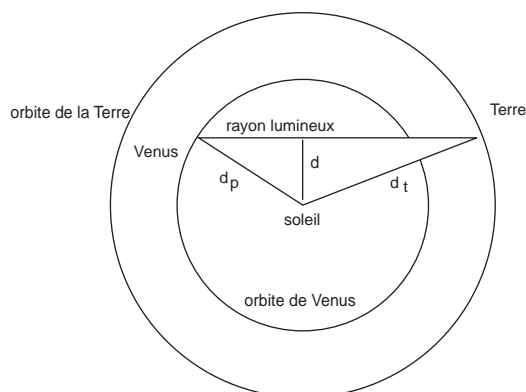


solaire depuis deux îles de l'Atlantique, l'une au large du Brésil, l'autre dans le golfe de Guinée. La confirmation des prédictions de la théorie d'Einstein était peut-être un peu hâtive à l'époque, mais cela valut une célébrité universelle à la Relativité Générale. L'arrivée des grands radio télescopes et la découverte de ces sources ponctuelles émettrices de fort rayonnement électromagnétique que sont les quasars ont permis la mesure de la déviation de la lumière par des méthodes d'interférométrie: les résultats s'étendent de  $1.57''$  à  $1.82''$  d'arc et peuvent encore être affinés.

La déviation des rayons lumineux permet aussi de comprendre l'effet de lentille gravitationnelle que peut produire un corps très massif (une galaxie, par exemple) dans l'observation de sources ponctuelles très éloignées.

### 7.3 Retard de l'écho radar

Ce test a été proposé par Shapiro en 1964. Il est basé sur l'utilisation de radars pour mesurer le temps de parcours d'un signal lumineux dans un champ gravitationnel. Parce que, dans un champ de gravitation, la trajectoire des rayons lumineux est courbée, ce temps est plus long que ce qu'il serait dans l'espace plat.



La trajectoire d'un rayon lumineux dans le plan  $\theta = \frac{\pi}{2}$  de l'espace-temps de

Schwarzschild satisfait

$$(1 - \frac{2m}{r}) dt^2 - (1 - \frac{2m}{r})^{-1} dr^2 - r^2 d\varphi^2 = 0. \quad (7.3.36)$$

Pour trouver le temps de parcours, il faut cette fois éliminer  $\varphi$  et obtenir une équation différentielle pour  $t = t(r)$ . Au premier ordre en  $m/r$ , on peut approximer la trajectoire par la droite

$$r \sin \varphi = d. \quad (7.3.37)$$

La différentielle vaut

$$r \cos \varphi d\varphi + dr \sin \varphi = 0 \quad (7.3.38)$$

d'où

$$r d\varphi = - \tan \varphi dr \quad (7.3.39)$$

et

$$r^2 d\varphi^2 = \tan^2 \varphi dr^2 = \frac{\sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} dr^2 = \frac{d^2}{r^2 - d^2} dr^2. \quad (7.3.40)$$

En substituant ceci dans (7.3.36), on trouve

$$dt^2 = [(1 - \frac{2m}{r})^{-2} + (1 - \frac{2m}{r})^{-1} \frac{d^2}{r^2 - d^2}] dr^2 \quad (7.3.41)$$

puis, en développant en puissances de  $m/r$ , on trouve, au premier ordre

$$dt^2 \simeq \frac{r^2}{r^2 - d^2} (1 + \frac{4m}{r} - \frac{2md^2}{r^3}) dr^2. \quad (7.3.42)$$

En extrayant les racines carrées, on a

$$dt \simeq \frac{\pm r}{(r^2 - d^2)^{\frac{1}{2}}} (1 + \frac{4m}{r} - \frac{2md^2}{r^3})^{\frac{1}{2}} dr \quad (7.3.43)$$

et, au premier ordre,

$$dt \simeq \frac{\pm r}{(r^2 - d^2)^{\frac{1}{2}}} (1 + \frac{2m}{r} - \frac{md^2}{r^3}) dr. \quad (7.3.44)$$

Si on s'intéresse au temps de parcours du signal lumineux de la terre à une planète, il suffit d'intégrer. On trouve

$$T = \int_d^{d_t} \frac{r dr}{(r^2 - d^2)^{\frac{1}{2}}} (1 + \frac{2m}{r} - \frac{md^2}{r^3}) + \int_d^{d_p} \frac{r dr}{(r^2 - d^2)^{\frac{1}{2}}} (1 + \frac{2m}{r} - \frac{md^2}{r^3}) \quad (7.3.45)$$

$$= [\sqrt{d_p^2 - d^2} + \sqrt{d_t^2 - d^2}] \quad (7.3.46)$$

$$+ 2m \ln \frac{(\sqrt{d_p^2 - d^2} + d_p)(\sqrt{d_t^2 - d^2} + d_t)}{d^2} \quad (7.3.47)$$

$$- m [\frac{\sqrt{d_p^2 - d^2}}{d_p} + \frac{\sqrt{d_t^2 - d^2}}{d_t}]. \quad (7.3.48)$$



Ici,  $d$  est la distance la plus rapprochée du soleil,  $d_p$  est le rayon de l'orbite de la planète,  $d_t$  est le rayon de l'orbite de la terre. Le terme qui subsiste pour  $m = 0$ , est le résultat de l'espace plat. La contribution principale à l'accroissement du temps de parcours provient de la partie de la trajectoire la plus proche du soleil, càd pour les petites valeurs de  $r$  comme l'indiquent les termes proportionnels à  $m$  sous l'intégrale.

Les vérifications expérimentales de ce retard ont été faites en envoyant des signaux radar pulsés de la terre vers Vénus ou Mercure et en comparant les échos pour différentes positions relatives terre-soleil-planète. Pour Vénus, le retard mesuré est d'environ  $200\mu s$ , à moins de 5% des prédictions théoriques. Ces mesures ont constitué le premier test entièrement nouveau de la relativité générale après un demi siècle.

## Annexe A

# Calcul du $R_{00}$ de la métrique générale à symétrie sphérique

### A.1 Rappel des définitions

Les composantes du tenseur de Riemann sont définies par

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\rho\alpha} \Gamma^\rho_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\rho\beta} \Gamma^\rho_{\nu\alpha} \quad (\text{A.1.1})$$

Les composantes du tenseur de Ricci s'en déduisent par contraction:

$$R_{\nu\beta} = R^\mu{}_{\nu\mu\beta} \quad (\text{A.1.2})$$

La composante  $R_{00}$  s'obtient pour  $\nu = 0, \beta = 0$  donc

$$R_{00} = R^\mu{}_{0\mu 0} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{00} - \partial_0 \Gamma^\mu_{0\mu} + \Gamma^\mu_{\rho\mu} \Gamma^\rho_{00} - \Gamma^\mu_{\rho 0} \Gamma^\rho_{0\mu} \quad (\text{A.1.3})$$

Chaque terme du membre de droite doit être calculé séparément.

### A.2 $R_{00}$ pour la métrique (6.2.17)

$$a = \partial_\mu \Gamma^\mu_{00} = \partial_0 \Gamma^0_{00} + \partial_1 \Gamma^1_{00} + \partial_2 \Gamma^2_{00} + \partial_3 \Gamma^3_{00} \quad (\text{A.2.4})$$

En consultant le tableau des symboles de Christoffel non nuls, on voit qu'il ne subsiste que les deux premiers termes, donc

$$\partial_\mu \Gamma^\mu_{00} = \partial_0 \Gamma^0_{00} + \partial_1 \Gamma^1_{00} \quad (\text{A.2.5})$$

$$= \frac{1}{2} \ddot{\nu} + \frac{1}{2} e^{\nu-\mu} [(\nu' - \mu')\nu' + \nu'']. \quad (\text{A.2.6})$$

$$b = -\partial_0 \Gamma_{0\mu}^\mu = -\partial_0 \Gamma_{00}^0 - \partial_0 \Gamma_{01}^1 - \partial_0 \Gamma_{02}^2 - \partial_0 \Gamma_{03}^3 \quad (\text{A.2.7})$$

$$= -\partial_0 \Gamma_{00}^0 - \partial_0 \Gamma_{01}^1 \quad (\text{A.2.8})$$

$$= -\frac{1}{2}\ddot{\nu} - \frac{1}{2}\ddot{\mu} \quad (\text{A.2.9})$$

$$c = \Gamma_{\rho\mu}^\mu \Gamma_{00}^\rho = \Gamma_{0\mu}^\mu \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{1\mu}^\mu \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{2\mu}^\mu \Gamma_{00}^2 + \Gamma_{3\mu}^\mu \Gamma_{00}^3 \quad (\text{A.2.10})$$

$$= \Gamma_{0\mu}^\mu \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{1\mu}^\mu \Gamma_{00}^1 \quad (\text{A.2.11})$$

$$= (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) \Gamma_{00}^0 + (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \Gamma_{00}^1 \quad (\text{A.2.12})$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\nu}(\frac{1}{2}\dot{\nu} + \frac{1}{2}\dot{\mu}) + e^{\nu-\mu} [(\frac{\nu'}{2} + \frac{\mu'}{2} + \frac{2}{r})\frac{\nu'}{2}]. \quad (\text{A.2.13})$$

$$d = -\Gamma_{\rho 0}^\mu \Gamma_{0\mu}^\rho = -\Gamma_{00}^\mu \Gamma_{0\mu}^0 - \Gamma_{10}^\mu \Gamma_{0\mu}^1 - \Gamma_{20}^\mu \Gamma_{0\mu}^2 - \Gamma_{30}^\mu \Gamma_{0\mu}^3 \quad (\text{A.2.14})$$

$$= -\Gamma_{00}^0 \Gamma_{00}^0 - 2\Gamma_{00}^1 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{01}^1 \quad (\text{A.2.15})$$

$$= -\frac{1}{4}(\dot{\nu}^2 + \dot{\mu}^2) - \frac{1}{2}\nu'^2 e^{\nu-\mu}. \quad (\text{A.2.16})$$

Ainsi

$$R_{00} = a + b + c + d \quad (\text{A.2.17})$$

$$= -\frac{\ddot{\mu}}{2} + \frac{\dot{\mu}\dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\mu}^2}{4} + e^{\nu-\mu} \left( \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\mu'\nu'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right). \quad (\text{A.2.18})$$

## Annexe B

# Géodésiques comme courbes extrémales

### B.1 Eléments de calcul des variations

Supposons donnée une fonction de classe  $C^2$

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{B.1.1})$$

notée  $L(x^\alpha, u^\alpha)$  et appelée "lagrangien". Soit  $E$  l'ensemble des courbes de classe  $C^1$  dans  $\mathbb{R}^n$

$$x^\alpha = x^\alpha(\lambda) \quad (\text{B.1.2})$$

d'une variable réelle  $\lambda$  parcourant l'intervalle  $[\lambda_0, \lambda_1]$ , et satisfaisant les conditions limites

$$x^\alpha(\lambda_0) = x_0^\alpha \quad x^\alpha(\lambda_1) = x_1^\alpha, \quad (\text{B.1.3})$$

A chaque courbe de  $E$ , on associe un nombre réel au moyen de l'intégrale

$$S_L[x^\alpha] = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda L(x^\alpha(\lambda), \dot{x}^\alpha(\lambda)) \quad \text{où} \quad \dot{x}^\alpha(\lambda) = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = u^\alpha(\lambda). \quad (\text{B.1.4})$$

$S_L$  définit une fonction de  $E \rightarrow \mathbb{R} : x^\alpha \mapsto S[x^\alpha]$ ; comme il s'agit d'une application définie sur un espace de fonctions,  $S_L$  est appelée "fonctionnelle".

Le calcul des variations s'intéresse à la question de savoir s'il existe une fonction de  $E$  qui rend ce nombre maximum ou minimum ou simplement extrémum.

**Définition 11.** *Si la courbe  $x^\alpha(\lambda) \in E$  réalise un extrémum de  $S_L$ , elle est appelée courbe extrémale de  $S_L$*

Choisissons des fonctions  $\eta^\alpha(\lambda)$  de classe  $C^1$ , nulles en  $\lambda_0$  et en  $\lambda_1$ ; les fonctions de la forme

$$\bar{x}^\alpha(\lambda) = x^\alpha(\lambda) + \epsilon \eta^\alpha(\lambda), \quad (\text{B.1.5})$$

où  $\epsilon \in \mathbb{R}$  est un infiniment petit du premier ordre, sont dans  $E$ .

**Définition 12.** La variation première de  $S_L$  est définie par

$$\delta S_L = S_L[\bar{x}^\alpha] - S_L[x^\alpha] = S_L[x^\alpha + \epsilon \eta^\alpha] - S_L[x^\alpha] = \epsilon \frac{\delta S_L}{\delta \epsilon} \Big|_{\epsilon=0}. \quad (\text{B.1.6})$$

Supposons que la courbe  $x^\alpha$  réalise un extrémum de  $S_L$ . Ceci signifie que

$$\frac{\delta S_L}{\delta \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0, \quad \forall \eta^\alpha \quad \text{nulles aux limites.} \quad (\text{B.1.7})$$

Or,

$$\frac{\delta S_L}{\delta \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \frac{\partial L}{\partial \epsilon} (x^\alpha(\lambda) + \epsilon \eta^\alpha(\lambda), \dot{x}^\alpha(\lambda) + \epsilon \dot{\eta}^\alpha(\lambda)) \Big|_{\epsilon=0} \quad (\text{B.1.8})$$

$$= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \left[ \eta^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} + \dot{\eta}^\alpha(\lambda) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right] \quad (\text{B.1.9})$$

**Lemme 1.** Lemme fondamental du calcul des variations

Soient  $M_\alpha(\lambda)$  des fonctions continues sur  $[\lambda_0, \lambda_1]$  telles que  $\forall \eta^\alpha(\lambda)$  de classe  $C^1$ , nulles aux limites on ait

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \eta^\alpha(\lambda) M_\alpha(\lambda) = 0. \quad (\text{B.1.10})$$

Alors,  $M_\alpha(\lambda) = 0, \forall \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$ .

**Théorème 11.** La courbe  $x^\alpha(\lambda)$  est une extrémale de  $S_L$  ssi elle satisfait le système d'équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = 0. \quad (\text{B.1.11})$$

Démonstration:  $x^\alpha$  est une extrémale de  $S_L$  ssi,  $\forall \eta^\alpha$  de classe  $C^1$  nulles aux limites on a

$$\frac{\delta S}{\delta \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0 = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \left[ \eta^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} + \dot{\eta}^\alpha(\lambda) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right] \quad (\text{B.1.12})$$

En intégrant par parties le dernier terme du membre de droite et en tenant compte du fait que les  $\eta^\alpha$  s'annulent aux limites, il vient

$$0 = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \eta^\alpha(\lambda) \left[ \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right] \quad (\text{B.1.13})$$

qui, par le lemme ci-dessus est équivalent à

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = 0. \quad (\text{B.1.14})$$

**Corollaire 1.** *Corollaire: Si  $L$  ne dépend pas de la fonction  $x^\beta$ , ( $\beta$  fixé), alors*

$$\frac{\partial L}{\partial x^\beta} = 0 \quad (\text{B.1.15})$$

*donc, le long de la courbe extrémale*

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\beta} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\beta} = \text{constante} \quad (\text{B.1.16})$$

*càd  $\partial L / \partial \dot{x}^\beta$  est une constante du mouvement.*

## B.2 Géodésiques

**Théorème 12.** *Les géodésiques sont les courbes extrémales de  $S_L$  pour le lagrangien*

$$L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = g_{\mu\nu}(x^\alpha) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (\text{B.2.17})$$

Démonstration: elle consiste à montrer que les équations d'Euler-Lagrange sont équivalents aux équations des géodésiques. Les équations d'Euler-Lagrange sont

$$g_{\mu\nu,\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \frac{d}{d\lambda} [2 g_{\mu\alpha} \dot{x}^\mu] = 0 \quad (\text{B.2.18})$$

ou, plus explicitement,

$$g_{\mu\nu,\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - 2 g_{\mu\alpha,\nu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu - 2 g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\mu = 0 \quad (\text{B.2.19})$$

ou encore, en changeant tous les signes, en divisant par 2, en regroupant les termes bilinéaires en les "vitesses" et en exploitant la symétrie en les indices  $(\mu, \nu)$

$$\left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha} + g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} \right] \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu + g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\mu = 0 \quad (\text{B.2.20})$$

ou

$$g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha,\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (\text{B.2.21})$$

En multipliant par  $g^{\beta\alpha}$  et en sommant sur  $\alpha$ , on obtient bien les équations des géodésiques

$$\ddot{x}^\beta + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (\text{B.2.22})$$

Remarque: Ce théorème offre une méthode de calcul des symboles de Christoffel.

## B.3 Cas de la métrique de Schwarzschild

Dans ce cas, le lagrangien vaut

$$L(t, r, \theta, \varphi, \dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = -e^\nu \dot{t}^2 + e^{-\nu} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \quad (\text{B.3.23})$$

avec

$$e^\nu = 1 - \frac{2m}{r}. \quad (\text{B.3.24})$$

### B.3.1 Constantes du mouvement

Puisqu'il ne dépend ni de  $t$  ni de  $\varphi$ , on en déduit immédiatement l'existence des deux constantes du mouvement suivantes

$$e^\nu \dot{t} = b \quad (\text{B.3.25})$$

$$r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = a. \quad (\text{B.3.26})$$

### B.3.2 Symboles de Christoffel

L'équation d'Euler-Lagrange (B.2.18) pour  $\alpha = 0$

$$2 \frac{d}{d\lambda} (e^\nu \dot{t}) = 0 \quad (\text{B.3.27})$$

$$= 2 e^\nu (\ddot{t} + \nu' \dot{r} \dot{t}) \quad (\text{B.3.28})$$

se ramène à

$$\ddot{t} + \nu' \dot{r} \dot{t} = 0. \quad (\text{B.3.29})$$

Si on l'identifie à l'équation

$$\ddot{x}^0 + \Gamma_{\mu\nu}^0 \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (\text{B.3.30})$$

on voit que les seuls symboles de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^0$  non nuls sont

$$\Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \frac{\nu'}{2}. \quad (\text{B.3.31})$$

# Bibliographie

- [1] Henri Poincaré. Sur la dynamique de l'électron. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 21:129–175, 1906.
- [2] Albert Einstein. On the influence of gravitation on the propagation of light. *Annalen Phys.*, 35:898–908, 1911.
- [3] R.V. Pound and G.A. Rebka. *Phys. Rev. Letters*, 4: 337, 1960; R.V. Pound and J.L. Snider. *Phys. Rev. Letters*, 13: 539, 1964.
- [4] A. Einstein and M. Grossmann. *Z. Math. Phys.*, 62: 225, 1913; Albert Einstein. Covariance properties of the field equations of the theory of gravitation based on the generalized theory of relativity. *Z. Math. Phys.*, 63:215–225, 1914.
- [5] David Hilbert *Nachshr. Ges. Wiss. Göttingen*, 20 novembre 1915, p. 395.
- [6] Karl Schwarzschild *Sitz. K. Pr. Akad. Wiss. Berlin*, Phys. Math. 189-196, 1916.
- [7] Albert Einstein. The foundation of the general theory of relativity. *Annalen Phys.*, 49:769–822, 1916 aussi, en Anglais dans *The Principle of Relativity*, Dover Publ.
- [8] R.v. Eötvös. *Math. nat. Ber. Ungarn*, 8: 65, 1890.
- [9] P.G. Roll, R. Krotkov and R.H. Dicke. *Ann. Phys.(USA)*, 26: 442, 1964.
- [10] V.B. Braginsky and V.I. Panov. *Sov. Phys. J.E.T.P.*, 34: 464, 1971.
- [11] Alfred Schild. *Texas Quarterly*, 3(3): 42, 1960.
- [12] W. Pauli. *Theory of Relativity*. Pergamon Press, Oxford, 1958.
- [13] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman, New York, 1973.
- [14] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, 1972.
- [15] A. Papapetrou. *Lectures on General Relativity*. D. Reidel Publishing Compagny, 1974.
- [16] P.A.M. Dirac. *General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, 1975.
- [17] M. Henneaux. Relativité générale. Notes de cours, Université Libre de Bruxelles.
- [18] R.M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [19] R. Penrose and W. Rindler. *Spinors and Space-Time: Volume 1, Two-spinor Calculus and Relativistic Fields*. Cambridge University Press, 1984.
- [20] R. d'Inverno. *Introducing Einstein's relativity*. Oxford University Press, 1992.



- [21] B. Schutz. *A first course in General Relativity*. Cambridge University Press, 1985 (reprinted 2000)