

# 4

# LA DIFFUSION E<sup>-</sup>-P

- Ce chapitre couvre la diffusion profondément inélastique d'un électron sur un proton, et plus généralement d'un lepton chargé sur un nucléon.
- Les mesures relatives à ce sujet constituent le test le plus contraint et le plus probant de QCD.

## 4.1 De l'atome au nucléon

- Passons en revue les mises en évidence des structures de plus en plus petites dans le noyau atomique.

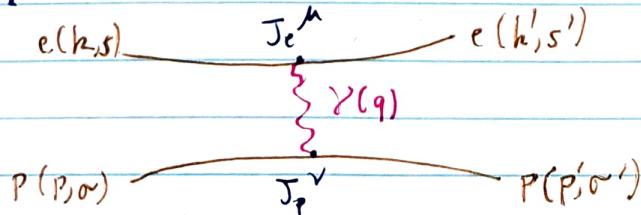
### 4.1.1 Les noyaux atomiques : l'expérience de Rutherford

- En 1909, Geiger et Marsden sous la direction de Rutherford découvrent l'existence de noyaux atomiques en bombardant des feuilles de métal par des rayons  $\alpha$ , en observant un nombre plus important que prévu de particules  $\alpha$  diffusées à grand angle.
- La section efficace diff. pour la diffusion d'un particule de spin 0 sur un noyau de spin 0 est (recul du noyau négligeable) :

$$\text{d}\sigma_{\text{Ruth}} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4 E_\alpha^2} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad \text{avec } \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \text{ pour un noyau de charge } Z \cdot e$$

### 4.1.2 Section efficace de Dirac :

- Commençons par envisager le cas simplifié de la diffusion d'un  $e^-$  sur une cible ponctuelle de spin 1/2 et de charge unitaire. La section efficace correspondante est appelée section efficace de Dirac.



### ① Calcul de la section efficace du Dirac :

$$\rightarrow M = \langle k', s' | J_\mu e | k, s \rangle \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \langle p', \sigma' | J_\nu p | p, \sigma \rangle$$

où  $s, s', \sigma, \sigma'$  sont les états d'hélicité.

→ Soit  $u(k, s)$  et  $u(k', s')$  les spinors des électrons et  $u(p, \sigma)$ ,  $u(p', \sigma')$  ceux des protons.

→ Le courant leptonnique :

$$\langle k', s' | J_\mu e | k, s \rangle = -ie \bar{u}(k', s') \gamma_\mu u(k, s)$$

→ Le courant hadronique :

$$\langle p', \sigma' | J_\nu p | p, \sigma \rangle = -ie \bar{u}(p', \sigma') \gamma_\nu u(p, \sigma)$$

$$\hookrightarrow M = \frac{e^2}{q^2} \bar{u}(k', s') \gamma_\mu u(k, s) \cdot \bar{u}(p', \sigma') \gamma_\nu u(p, \sigma)$$

**DEF** On introduit le tenseur leptonnique  $L^{\mu\nu}$  et le tenseur hadronique  $W^{\mu\nu}$  tels que

$$|M|^2 = \frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \sum_{s, s', \sigma, \sigma'} |M|^2$$

→ Le tenseur leptonnique vaut alors

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{s, s'} J_e^\mu J_e^\nu = \frac{1}{2} \sum_{s, s'} [\bar{u}(k', s') \gamma^\mu u(k, s)] \cdot [\bar{u}(k', s') \gamma^\nu u(k, s)]^* \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s, s'} [\bar{u}(k', s')_\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta} u(k, s)_\beta \bar{u}(k, s)_\gamma \gamma^\nu_{\gamma\delta} u(k', s')_\delta] \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} (\not{k}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu) + \frac{1}{2} m_e^2 \text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu) \\ &= 2 (k'^\mu k^\nu + k^\mu k'^\nu - (k \cdot k' + m_e^2) g^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

→ Le tenseur hadronique vaut

$$W^{\mu\nu} = 2 (p'^\mu p^\nu + p^\mu p'^\nu - (p \cdot p' + m_p^2) g^{\mu\nu})$$

$$\begin{aligned} \rightarrow |M|^2 &= \frac{8e^4}{q^2} [(k \cdot p)(k' \cdot p') + (k' \cdot p)(k \cdot p') - m_e^2 p \cdot p' - m_p^2 k' \cdot k + 2m_e^2 m_p^2] \\ &\stackrel{p=p+k-k'}{=} \frac{8e^4}{q^2} \left[ -\frac{q^2}{2} (k - k') \cdot p + 2(k \cdot p)(k' \cdot p) + \frac{m_p^2 q^2}{2} \right] \end{aligned}$$

Dans le référentiel du laboratoire :  $p = (m_p \vec{v})$ . Ainsi,

$$p \cdot k = m_p E$$

$$p \cdot k' = m_p E'$$

$$k \cdot k' = E E' (1 - \cos \theta)$$

$$\hookrightarrow |CM|^2 = \frac{8e^4}{q^4} \left[ \frac{-q^2}{2} m_p (E - E') + 2EE' m_p^2 + \frac{m_p^2 q^2}{2} \right]$$

$$= \frac{8e^4}{q^4} 2EE' m_p^2 \left[ 1 - \frac{q^2}{m_p} \frac{E - E'}{4EE'} + \frac{q^2}{4EE'} \right]$$

→ Considérons le cas élastique :  $p'^2 = m_p^2 = (p+q)^2 \Rightarrow 2p \cdot q = -q^2 = Q^2$   
 Ainsi,  $E - E' = -\frac{q^2}{2m_p}$

↪ L'électron perd de l'énergie dans l'interaction  $\propto Q^2$ :

$$|CM|^2 = \frac{16e^4}{q^4} EE' m_p^2 \left( \cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2m_p^2} \sin^2(\theta/2) \right)$$

→ La section efficace de Dirac  $\sigma_{\text{Dirac}}$  est

$$\frac{d^2\sigma_{\text{Dirac}}}{dE' d\Omega} = \frac{4\alpha^2}{Q^4} E'^2 \left( \cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2m_p^2} \sin^2(\theta/2) \right) \delta(E - E' + q^2/2m_p^2)$$

$$= \frac{\alpha^2}{4E^2} \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} \left( 1 - \frac{q^2}{2m_p^2} \tan^2(\theta/2) \right) f(E - E' + q^2/2m_p^2)$$

condition d'élasticité

DEF On retrouve la formule de Mott qui correspond au 1<sup>e</sup> terme :

$$\frac{d\sigma_{\text{Mott}}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}$$

↪ Le second terme provient de la contribution des photons virtuels avec une polarisation longitudinale

Photon réel :  $q^2 = 0$ . Photon virtuel :  $q^2 < 0$

DEF On a introduit ci-dessus la virtualité du boson médiateur  $Q^2$  définie comme  $Q^2 = -q^2$  où  $q^2$  est l'impulsion échangée.

### 4.1.3 Diffusion spin 1/2 sur cible nucléaire

→ On s'intéresse à la diffusion  $e^- + N \rightarrow e^- + \text{hadrons}$ . Pour des énergies  $\sim 125 \text{ MeV}$  (Klystron), la diffusion d'électrons permet d'étudier la structure de la cible.

DEF On introduit le facteur de forme électrique  $G_E$ , interprété comme  $\mathcal{F}$  (distribution de charges électriques de la cible):

$$G_E(Q) = \int d^3r p(r) e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}} \quad \text{avec } G_E(0) = 1$$

On a:

↳ normalisation

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{d\sigma_{\text{Dirac}}}{dQ^2} |G_E(Q)|^2$$

↳ Pour  $|Q| = |q| \ll 1$ , on a  $G_E(Q) \approx \int (1 + iQ \cdot r - \frac{(Q \cdot r)^2}{2}) p(r) d^3r$

$$p(r) = p(-r)$$

De plus,  $\langle r^2 \rangle = \int r^2 p(r) d^3r$ .

Alors,  $G_E \approx 1 - \frac{Q^2}{6} \langle r^2 \rangle$

↳ On peut donc estimer le rayon typique de la cible. Ici,  $\sqrt{\langle r^2 \rangle} \sim 10^{-15} \text{ m}$

→ Lorsque  $Q \rightarrow \infty$ , il faut que  $\langle r^2 \rangle \rightarrow 0$ . Pour une extension spatiale finie, le facteur de forme décroît et tend vers une constante.

#### ② Remarque sur la résolution spatiale :

→ Pour sonder une distance  $\Delta r$ , on utilise la longueur d'onde de de Broglie  $\lambda$  du particule qui interagit :

$$\lambda = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\Delta r}{2\pi} = \frac{hc}{p} \Rightarrow \Delta r = hc/p$$

$$\text{et } \lambda = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}$$

→ Dans la limite  $E \gg m$ , on retrouve  $\lambda = hc/E$ . Dans la limite des hautes virtualités ( $E^2 \ll m^2 c^4$ ), on a

$$\lambda = \frac{hc}{Q} \Rightarrow \Delta r = \frac{hc}{Q}$$

## ① Effet du spin de la cible :

→ L'interaction entre le spin du lepton incident et celui de la cible donne lieu à une interaction magnétique.

→ En imposant les symétries P et T, la  $\sigma(eN \rightarrow eN)$  non polarisés est:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \left( \frac{\alpha^2 \cos^2(\theta/2)}{4E^2 \sin^2(\theta/2)} \right) \frac{E'}{E} \left( \frac{|G_E(Q)|^2 + Z|G_M(Q)|^2 + 2Z|G_M(Q)|^2 \tan^2 \theta/2}{1 + Z} \right)$$

où  $Z \equiv Q^2/4M_N^2$  et  $M_N$  la masse du proton, et  $G_E(Q)$  et  $G_M(Q)$  sont les facteurs de forme électriques et magnétiques.

## 4.1.4 Mise en évidence de la structure des noyaux

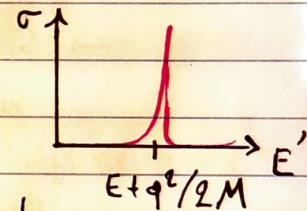
→ Soit  $R$  le rayon du noyau et  $M$  sa masse. On distingue 3 régimes dans l'évolution de  $\sigma$  en fonction de  $E'$

① Faible transferts :  $q \ll 1/R$

→ diffusion élastique

→ pic en  $E' = E + q^2/2M$

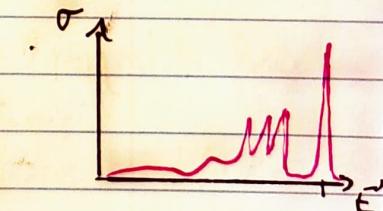
→ noyau = objet rigide qu'on mesure via son facteur de forme dans l'état fondamental :  $F(q) = 1 - q^2 R^2 / 6 + \dots$



② Transferts moyens :  $q \approx 1/R$

→ plusieurs états du noyau à basse énergie

→ transitions inélastiques à 1 particule



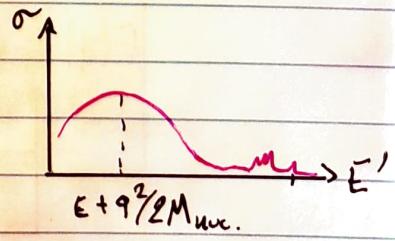
③ Grand transferts :  $q \gg 1/R$

→ Apparition d'une base très large à

$$E' = E + q^2/2M_{\text{nucleon}}$$

→ Dans cette région, l'énergie du noyau est entièrement absorbée par le nucléon comme s'il était quasiment libre.

→ Le mouvement de Fermi du nucléon provoque un élargissement du pic.



## A.2 Diffusion Spin 1/2 sur nucléon

### 4.2.1 Prémisses expérimentales.

→ En 1950, un groupe du SLAC utilise le faisceau d'électrons de 125 MeV pour étudier les distributions électriques et magnétiques du nucéon.

→ Une déviation aux grands angles de diffusion est observée p/r aux prédictions pour une particule ponctuelle de spin 1/2 : la décroissance en  $Q^2$  est plus importante que prévue.

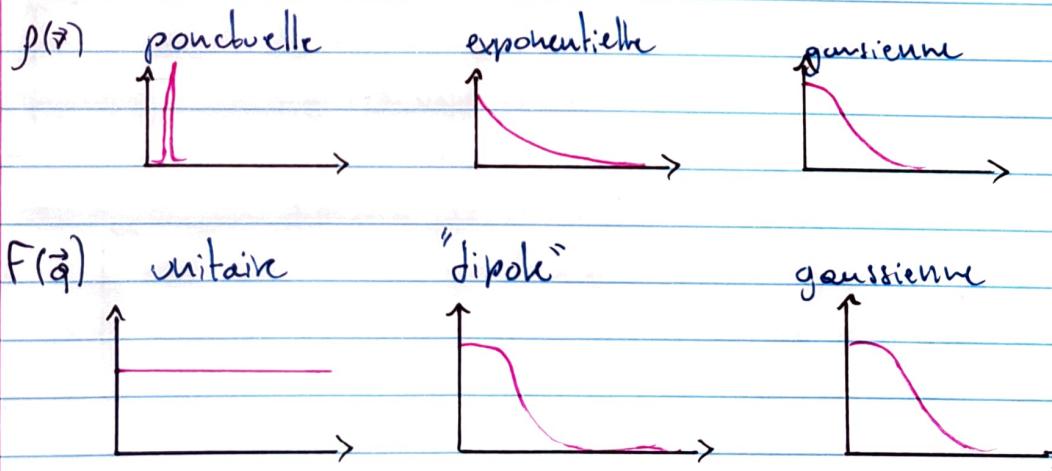
↳ On paramétrise les facteurs de forme sous la forme du dipôle:

$$1G(Q^2) \sim \frac{1}{(1 + Q^2/\mu_0^2)^2} \leftrightarrow g(r) = g_0 e^{-\mu_0 r}$$

→ suggère la présence d'une sous-structure (distribution étendue)

→ Si on augmente l'énergie, les collisions sont de moins en moins élastique

→ Liens entre les facteurs de forme  $F(q^2)$  et la distribution de densité de charge :



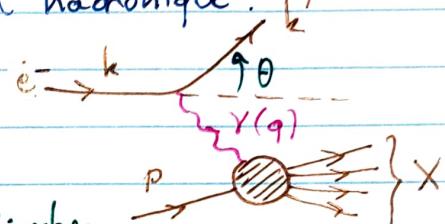
## 4.3 Diffusion profondément inélastique

### 4.3.1 Premières mesures au SLAC :

→ En 1967 au SLAC commença une série d'expériences de diffusion profondément inélastiques: de l'hydrogène / deutérium bombardé par un faisceau d'électrons allant jusqu'à 21 GeV

→ Dans ce type d'expérience, seul l'électron diffusé est observé: on n'a pas directement accès à l'état final hadronique. Cependant, on peut calculer:

$$W^2 = (q+p)^2 = X^2 = q^2 + 2 p \cdot q + m_p^2$$



DEF |

On introduit les variables d'échelle du Bjorken

$x$  et  $y$  sans dimension et  $\in [0, 1]$  définies selon:

$$x = \frac{Q^2}{2 p \cdot q}$$

$$y \equiv \frac{p \cdot q}{p \cdot k}$$

→ La masse invariante de l'état final hadronique  $W$  s'exprime alors comme:  $W^2 = m_p^2 + \underbrace{\frac{1-x}{x}}_{\text{élastique}} Q^2 + \underbrace{x}_{\text{inélastique}}$

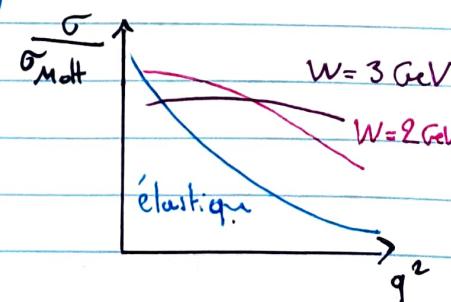
→ Dans le ref. où le proton est au repos,  $y = (E - E')/E$  est la fraction d'énergie que l'électron a cédé au boson échangé.  
↳  $y$  est une mesure de l'inélasticité du processus de diffusion

PROB Les invariants cinétiques sont liés par la relation

$$Q^2 = x \cdot y \cdot S$$

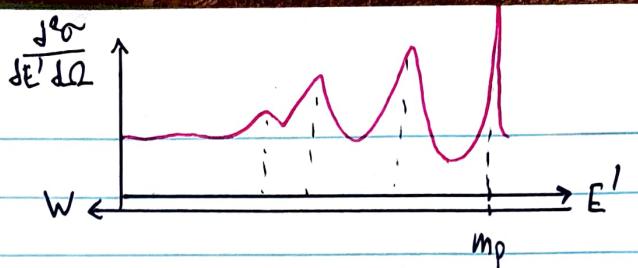
$$x \cdot y \cdot S = \frac{Q^2}{2 p \cdot q} \cdot \frac{p \cdot q \cdot S}{p \cdot k} = Q^2 \cdot \frac{S}{2 p \cdot k} = Q^2 \cdot \frac{S}{(p+k)^2} = Q^2$$

→ A grand  $Q^2$ , il est de plus en plus difficile d'obtenir un "œil élastique".



→ Inélasticité de  $\sigma$

$$\rightarrow W^e = \frac{E - E'}{E} s$$



PROP La condition d'élasticité  $\delta(E - E' + q^2/2m_p) = 0$  se réexprime comme

$$W^e = m_p^2 + \frac{1-x}{x} Q^2 \stackrel{!}{=} m_p^2 \Leftrightarrow x = 1$$

→ Pour traiter les diffusions inélastiques, il faut remplacer le  $s$  par des fonctions inconnues qui rendront compte de la complexité de la structure cible.

DEF

On introduit les fonctions de structures  $W_1$  et  $W_2$  qui dépendent à priori de 2 dof. On choisit  $W_i = W_i(x, Q^2)$ . La section efficace  $d\sigma_{\text{Dirac}}/dE' d\Omega$  devient:

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \left( \frac{\alpha^2}{2SE \sin^4(\theta/2)} \right) (2 \sin^2(\theta/2) W_1(x, Q^2) + \cos^2(\theta/2) W_2(x, Q^2))$$

## 4.4. Les fonctions de structure

→ Pour accéder à la structure du proton, il faut varier le caractère élastique de la réaction, et donc augmenter la virtualité du  $\gamma$  échangé. Environs le tenseur  $W_{\mu\nu}$  en toute généralité, pour des analyses non polarisées (pas de terme  $\alpha \gamma^\mu$ ):

$$W_{\mu\nu} = -W_1 g_{\mu\nu} + W_2 \frac{p_\mu p_\nu}{m_p^2} + W_3 \frac{p_\mu p_\nu + p_\nu p_\mu}{m_p^2} + W_4 \frac{p_\mu p_\nu - p_\nu p_\mu}{m_p^2} + W_5 \frac{q_\mu q_\nu}{m_p^2} + W_6 \frac{g_{\mu\nu} p_\mu p_\nu}{m_p^2}$$

à chaque  $W_i = W_i(x, Q^2)$

↪ La contraction avec  $L_{\mu\nu} = L_{(\mu\nu)}$  fait tomber  $W_4$  et  $W_6$ .

→ Comme tout courant, le courant hadronique est conservé:

$$\partial_\mu W^{\mu\nu} = \partial_\nu W^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow q^\mu W_{\mu\nu} = 0 = q^\nu W_{\mu\nu}$$

Ainsi, on obtient:

$$-W_1 q_\nu + W_2 \frac{(p \cdot q) p_\nu}{m_p^2} + W_3 \left( \frac{(p \cdot q) q_\nu + q^2 p_\nu}{m_p^2} \right) + W_5 \frac{q^2 q_\nu}{m_p^2} = 0$$

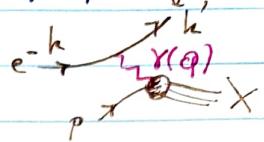
$$\Leftrightarrow -W_1 + W_3 (p \cdot q)/m_p^2 + W_5 q^2/m_p^2 = 0$$

$$\} W_2 (p \cdot q)/m_p^2 + W_5 q^2/m_p^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow W_3 = -\frac{q \cdot p}{q^2} W_2 \quad \text{et} \quad W_r = \frac{(q \cdot p)^2}{q^4} W_2 + \frac{m_p^2}{q^2} W_1$$

Le courant hadronique se réécrit sous la forme

$$W_{\mu\nu} = \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1(x, Q^2) + \left( p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left( p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \frac{W_2(x, Q^2)}{m_p^2}$$



$\rightarrow$  Contractons  $L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$  en négligeant  $m_p$

$$\hookrightarrow k \cdot k' = k \cdot (k - q) \approx -k \cdot q = -\frac{1}{2} q^2$$

$$\hookrightarrow L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = 2(k'^\mu k^\nu + k^\mu k'^\nu + \frac{1}{2} q^\mu g^{\mu\nu}) W_{\mu\nu}$$

$$= 4 k \cdot k' W_1(x, Q^2) + (4(p \cdot k)(p \cdot k') - 2 m_p^2 k \cdot k') \frac{W_2(x, Q^2)}{m_p^2}$$

$$= 2 Q^2 W_1(x, Q^2) - (u_S + m_p^2 Q^2) \frac{W_2(x, Q^2)}{m_p^2}$$

$\rightarrow$  Plaçons nous dans le ref. du proton au repos. On retrouve le résultat ps6 :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dE' dQ^2} &= \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^2} \left( 2 \sin^2(\theta/2) W_1 + \cos^2(\theta/2) W_2 \right) \\ &= \frac{\alpha^2}{2s \sin^4(\theta/2)} \left( 2 \sin^2(\theta/2) W_1 + \cos^2(\theta/2) W_2 \right) \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$  On effectue alors le changement de variable  $(E', \cos\theta) \mapsto (x, Q^2)$   
 $dx dQ^2 = \frac{2x E' dE' d\cos\theta}{y}$  et par ailleurs  $y E' \sin^2(\theta/2) = m_p x y^2 / 2$

DEF On introduit de nouvelles fonctions de structures  $F_1(x, Q^2)$  et  $F_2(x, Q^2)$  définies par :  $F_1 = \frac{W_1}{4\pi}$  et  $F_2 = W_2 \cdot \frac{v}{4\pi m_p}$

où  $v \equiv E - E' = p \cdot q / m_p$  est l'énergie du photon.

$\rightarrow$  En prenant la limite  $s, v \rightarrow \infty ; Q^2 \rightarrow \infty$  et  $x$  fixé, on obtient

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi \alpha^2}{x Q^4} \left\{ x y^2 F_1 + (1-y) F_2 \right\} \text{ pour } ep \rightarrow eX$$

$\rightarrow$  Dans le cas élastique, le facteur de form factor introduit revient à écrire  
 $W_{\mu\nu} = 4 p_\mu p_\nu G_F(Q^2)$

## ② Sections efficaces longitudinale et transverse

→ Intéressons-nous aux contributions à la section efficace issus des photons virtuels polarisés longitudinalement et transversalement.

→ Composantes transverses :  $E^{\pm 1}$

→ Composante longitudinale :  $E^0$

voir eq 8.53

Haben und Martin

On obtient :

$$\frac{d^2\sigma_T}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{x Q^4} \times (1 + (1-y)^2) F_1$$

$$\frac{d^2\sigma_L}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{x Q^4} (1-y)(F_2 - 2 \times F_1) = \frac{4\pi\alpha^2}{x Q^4} (1-y) F_L$$

DEF |

On introduit les fonctions de structure transverse et longitudinale  $F_T$  et  $F_L$  définies selon

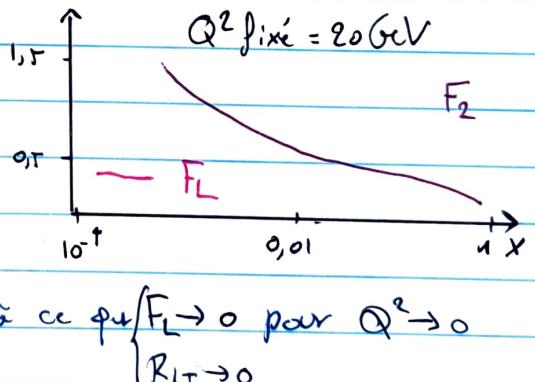
$$F_T \equiv F_1 \quad \text{et} \quad F_L \equiv F_2 - 2 \times F_1$$

$$\text{Leur rapport est noté } R_{LT} \equiv \frac{\sigma_L}{\sigma_T} = \frac{F_L}{2 \times F_T} = \frac{\sigma_L (\gamma^* p \rightarrow X)}{\sigma_T (\gamma^* p \rightarrow X)}$$

## ③ Nouvelle vision des données SLAC :

→ la fonction de structure  $F_2$  semble être indépendante de  $Q^2$ .

→ A  $Q^2=0$ , le jet échangé est purement transverse. On s'attend à ce que  $F_L \rightarrow 0$  pour  $Q^2 \rightarrow 0$   
 $R_{LT} \rightarrow 0$



## 4.5 Le modèle des partons

- Le modèle des partons proposé par Feynman est motivé par l'absence de dépendance en  $Q^2$  pour  $F_L$ . Il postule que l'interaction a lieu sur des objets ponctuels constitutants du proton : les partons.
  - les partons n'interagissent pas entre eux
  - Ils ont une charge électrique
  - Ils ont un spin 1/2.

DEF | Le référentiel de Breit ou infinite momentum frame est le référentiel dans lequel le proton est ultra-relativiste :  $p \gg m_p \Rightarrow p = (p, 0, 0, p)$

- Le modèle considère que le photon interagit avec un parton chargé (quark) ponctuel portant une fraction d'impulsion du proton et se déplaçant // à lui :
 
$$p'^\mu = S p^\mu$$

- Les quarks étant de spin 1/2, la section efficace est donnée par  $\sigma_{\text{Dirac}}$  avec  $p'^\mu \rightarrow S p^\mu$  et en utilisant la charge électrique du quark  $e_q$  :
$$\frac{d^2\hat{\sigma}_{ep \rightarrow e\gamma}}{dx dQ^2} (s) = \frac{8\pi \alpha^2}{Q^4} \kappa^2 (1 + (1-y)^2) \delta(x-s) \quad (x=1)$$

- La  $\sigma$  inclusive de la diffusion profondément inélastique  $e p \rightarrow e X$  s'écrit comme

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{ep \rightarrow eX}}{dx dQ^2} &= \int_0^1 ds \sum_q f_q(s) \frac{d^2\hat{\sigma}_{ep \rightarrow e\gamma}}{dx dQ^2}(s, Q^2) \\ &= \frac{8\pi \alpha^2}{Q^4} \int_0^1 ds \sum_q e_q^2 f_q(s) \{ y^2 - 2(1-y) \} \delta(x-s) \end{aligned}$$

Comparer avec  $\frac{4\pi \alpha^2}{x Q^4} \left[ x y^2 F_1(x, Q^2) + (1-y) F_2(x, Q^2) \right]$

↳ On a introduit  $f_q(s)$  les densités partoniques

→ On obtient :

$$F_1(x, Q^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 ds \sum_q e_q^2 f_q(s) f(x-s) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 f_q(x) = F_1(x)$$

$$F_2(x, Q^2) = \int_0^1 ds \sum_q e_q^2 \times f_q(s) f(x-s) = \sum_q e_q^2 \times f_q(x) = F_2(x)$$

On peut écrire  $f_q(x) = q(x) + \bar{q}(x)$  pour séparer les quarks des anti-quarks.

↳ La seule dépendance en  $Q^2$  ne trouvant dans le propagateur du photon, les fonctions de structures  $F_1$  et  $F_2$  sont indépendantes de  $Q^2$  (dans le modèle naïf des partons libres).

→ En résumé :  $F_1(x) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 (q(x) + \bar{q}(x))$

et  $F_2(x) = \sum_q e_q^2 x (q(x) + \bar{q}(x))$

PROP On trouve la relation de Callan-Gross :

$F_2 = 2 \times F_1 \Rightarrow F_L = F_2 - 2 \times F_1 = 0$  qui reflète la conservation de l'hélicité des quarks de spin  $1/2$ .

### ① La valence et le ner:

→ La spectroscopie des hadrons, qui a amené le modèle des quarks, définit les quarks composant le  $n$  et le  $p$  de façon à satisfaire le  $\neq \#$  quantiques :

$$p = (u u d) \quad \text{et} \quad n = (u d d)$$

DÉF On suppose la symétrie d'isospin fort  $SU(2)$ :

$$\cdot \quad u(x) \equiv \underbrace{u_p(x)}_{=2/3} = \underbrace{d_n(x)}_{=1/3} \quad \text{et} \quad d(x) \equiv \underbrace{d_p(x)}_{=1/3} = \underbrace{u_n(x)}_{=-1/3}$$

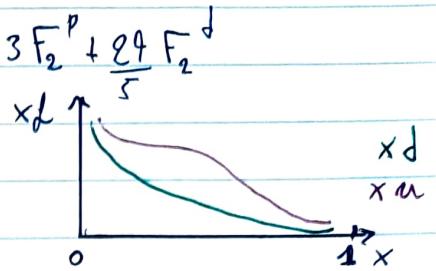
→ Les fonctions de structure du proton et neutron sont alors :

$$F_2^p = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times u_p(x) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times d_p(x) = 4/9 \cdot x \cdot u + 1/9 \cdot x \cdot d$$

$$\text{et } F_2^n = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times u_n(x) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times d_n(x) = 4/9 \cdot x \cdot d + 1/9 \cdot x \cdot u$$

→ Experimentalement, on extrait  $F_2^n$  de l'interaction avec du deuteron :  $F_2^d = \frac{1}{2} (F_2^p + F_2^n)$

↳ On a :  $x \cdot u = 3F_2^p - \frac{6}{5} F_2^d$  et  $x \bar{d} = -3F_2^p + \frac{84}{5} F_2^d$



→ On observe effectivement  $u > d$   
Cependant, il faudrait

$$U = \int u(x) dx = 2 \text{ et } D = \int d(x) dx = 1,$$

et on trouve des divergences à la place.

DEF On décompose alors les densités de quarks en quarks et antiquarks pour rendre compte des fluctuations (les quarks de la mer). On définit alors la distribution de valence  $u_V$  et de la mer  $S$  selon :

$$u_V \equiv u(x) - \bar{u}(x) \quad \text{et} \quad S \equiv \bar{u}(x) = \bar{d}(x)$$

↳ On peut alors écrire :  $\int u(x) = u_V + S(x)$

$$\int d(x) = \bar{d}_V(x) + S(x)$$

avec  $\int dx (u + \bar{u}) = \infty$  mais  $\int dx (u - \bar{u}) = 2$

$$\int dx (\bar{d} - \bar{d}_V) = 1$$

→ Comparons à nouveau les fonctions de structures :

$$F_2^p/x = \frac{1}{3} (4u_V + d_V) + \frac{4}{3} S \text{ et } F_2^n/x = \frac{1}{3} (u_V + 4\bar{d}_V) + \frac{4}{3} S$$

↳ On a :  $\frac{F_2^n}{F_2^p} \rightarrow \begin{cases} 1/4 \text{ pour } x \rightarrow 1 & \text{valence domine} \\ 1 \text{ pour } x \rightarrow 0 & \text{mer domine} \end{cases}$

→ Confirmé par les mesures.

### ○ Momentum sum rule :

→ Experimentalement, on trouve que

$$\sum q \int_0^1 x (q + \bar{q}) dx = \int_0^1 x (u_V + d_V + \delta S) dx \approx 0,5$$

↳ Seule la moitié de l'impulsion est portée par les quarks !  
Il faut alors prendre en compte les gluons, et QCD.

## 62

## 4.6 Mesure étendue des fonctions de structure

→ Le seul collisionneur e+p de l'histoire était HERA, situé à DESY à Hambourg.

→ Pour accéder aux fonctions de structure, il faut mesurer

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi x^2}{x Q^4} (xy^2 F_1 + (1-y) F_2)$$

En mesurant à chaque événement  $E_e$  (énergie de e- diffusé) et  $\theta_e$  (l'angle polaire du e- diffusé), on peut reconstruire  $x$  et  $Q^2$ :

$$\begin{cases} x = \frac{E_e}{E_p} \frac{E_e (1 + \cos \theta_e)}{2 E_e - E_p (1 - \cos \theta_e)} \\ Q^2 = 2 E_e^2 E_p (1 + \cos \theta_e) \end{cases}$$

→ On choisit un pavage du plan ( $x, Q^2$ ) et on compte le nombre d'événements par bin:  $\frac{d\sigma_{\text{bin}}}{dx dQ^2} = \frac{N_{\text{bin}} - N_{\text{BG}}}{L \cdot \text{Acc. } \epsilon}$

où  $N_{\text{bin}} = \# \text{ événent / bin} / \text{taille du bin}$

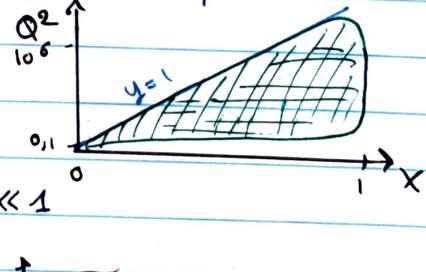
$N_{\text{BG}} = \# \text{ événement dûs au bruit de fond}$

$L$  = luminosité intégrée

$\text{Acc.}$  = l'acceptance (corrige les pertes  $\Leftarrow$  géométrie du détecteur)

$\epsilon$  = efficacité (corrige les pertes  $\Leftarrow$  imperfections)

→ Le domaine kinétique sondé par les différentes expériences d'interaction e+N est



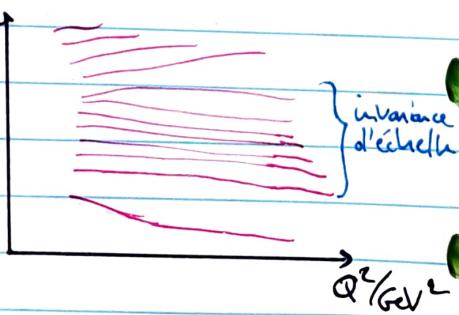
→ Par facilité, on définit la section eff.

$$\text{réduite } \sigma_T = F_2 - \frac{y^2}{1+(y)^2} F_L \approx F_2 \text{ si } F_L \ll 1$$

On mesure:

→ pour des valeurs de  $x$  de 0,15, on a bien invariance d'échelle.

→ pour des grandes et petites valeurs de  $x$ , l'invariance d'échelle est brisée.



## ② Effet de l'échange de $Z^0$ :

→ Lorsque  $Q^2 \gg m_Z^2$ , le terme d'échange d'un  $Z$  et son interaction avec l'échange d'un  $\gamma$  deviennent négligeable. Apparaît alors une 3<sup>e</sup> fonction de structure,  $F_3(x, Q^2)$ .

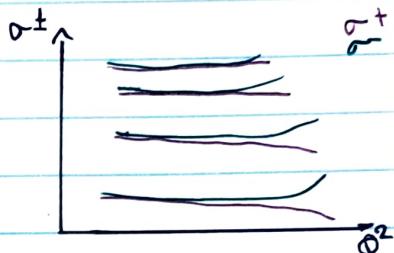
→ La section efficace pour l'échange par courant neutre s'écrit :

$$\frac{d^2\sigma^\pm(e^\pm p \rightarrow e^\pm X)}{dx dQ^2} = \frac{4\pi x^2}{x Q^2} \left\{ x y^2 F_1^{NC} + (1-y) F_2^{NC} + y(1-y/2) F_3^{NC} \right\}$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{cases} F_2^{NC} \sim \sum_x x (q(x) + \bar{q}(x)) \\ x F_3^{NC} \sim \sum_x x (q(x) - \bar{q}(x)) \end{cases}$$

↳ On peut séparer la valence et la mer !



## ③ Mesure de $F_L$ :

→ Pour mesurer  $F_L$ , on effectue des mesures à différents  $\sqrt{s}$ . Puisque  $Q^2 = 5 \times y$  et puisque seule une variation de  $y$  peut départager les 2 jets (à  $x$  et  $Q^2$  donnés), cela revient à changer  $s$  en prenant des données à des énergies de faisceaux différentes.

## ④ Limite sur la taille des quarks:

→ Les diffusions profondes inélastiques permettent de sonder la taille des quarks. En comparant les données avec la mesure attendue pour des partons de taille nulle, l'accord est suffisamment bon pour qu'il ne soit pas nécessaire d'introduire des facteurs de forme pour les quarks.

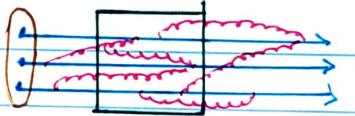
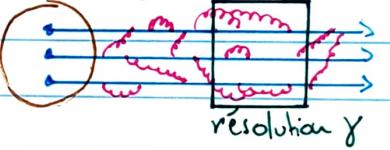
→ On peut établir une limite sur la taille des quarks :  $R_q < 0,65 \cdot 10^{-18} \text{ m}$   
Pour comparaison,  $R_e < 0,3 \cdot 10^{-18} \text{ m}$

## 4.7 La violation d'échelle et les eq. DGLAP

- Dans QCD, les quarks sont liés entre eux par des gluons. On devrait donc s'attendre à voir apparaître la limite de validité du modèle naïf des partons.

### ① Approche intuitive:

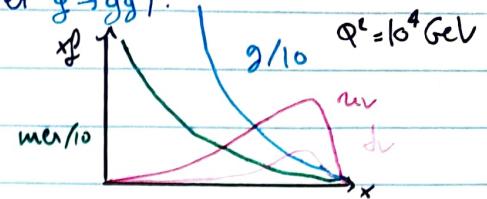
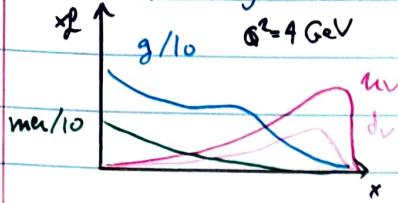
- Les quarks peuvent émettre des gluons qui eux-mêmes peuvent émettre des gluons, être réabsorbés ou créer une paire  $q\bar{q}$ . En l'absence d'interaction, toutes ces émissions sont réabsorbées.
- Ces fluctuations peuvent exister durant une échelle d'é-t < 1 fm
- Dans une interaction DIS (deep inelastic scattering), le photon virtuel saute le proton dans une direction transverse, avec une certaine résolution.  
⇒ Toute fluctuation avec  $\gtrsim$  fluctuation < résolution γ ne peut être vue par le photon.
- Si le proton subit un boost, les fluctuations ont une échelle de temps dilatée  
⇒ Un # plus important de fluctuations pourront être vus par le photon.
- Dans le modèle naïf des partons,  $\ell^\mu = \xi p^\mu$ : l'impulsion des partons est // à celle du proton. Cependant, l'émission d'un gluon peut provoquer des impulsions transverses, et la proba d'émission  $\propto ds$ . De plus, plus  $Q^2$ , plus l'espace des phases libres pour émettre un gluon est grand  
⇒ On s'attend à ce que la densité des quarks de la mer augmente aux petites valeurs de  $x$  lorsque  $Q^2$ .



DÉF La violation de l'invariance d'échelle est le fait qu'aux hautes énergies,  $Q^2 \rightarrow$  ouverture d'un espace plus grand aux migrations des grands vers les petits  $x \Leftrightarrow$  densité de quark  $\propto$  aux petits  $x$  grand  $Q^2$ .

→ Le pic de valence reste inchangé  $\propto Q^2$  (c'est l'invariance d'échelle).

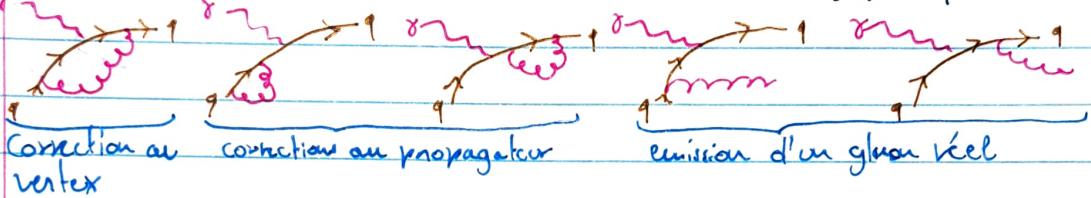
↪  $Q^2 > \Rightarrow$  migration vers les petits  $x$ , mais le nombre de parton n'est pas conservé (il augmente via  $q \rightarrow qg$ ,  $g \rightarrow g\bar{g}$  et  $g \rightarrow gg$ ).



↪ Il faut que la densité de gluon décroisse un moment, sinon l'unité de la matrice S serait bousillée.

### 9.7.1 Développement à l'ordre $\alpha_s$ :

→ On regarde les corrections en  $\alpha_s$  à la diffusion  $gq \rightarrow q$ :



↪ Les divergences IR des émissions réelles sont compensées par les corrections au vertex et aux propagateurs.

### ③ Emission d'un gluon réel:

→ On regarde la contribution de l'émission réelle à la contribution totale  $|U(k')|^2$  :

$$\text{On a : } |U(k')|^2 = 32 \pi^2 (e_q^2 \alpha_s) \frac{C_F}{3} \left\{ \frac{-\hat{t}}{\hat{s}} - \frac{\hat{s}}{\hat{t}} + \frac{2 \hat{u} Q^2}{\hat{s} \hat{t}} \right\}$$

$$\text{où } \hat{t} \equiv (k-p)^2 = (k'-q)^2 = -2 p \cdot k (1 - \cos \theta_{qg})$$

$$\hat{s} \equiv (k+q)^2 = (k'+p)^2 = 2 p \cdot k' (1 - \cos \theta_{qg})$$

$$\hat{u} \equiv (q-p)^2 = (k-k')^2$$

→ On introduit un "pôle" ou  $\frac{1}{(k-p)^2} = \frac{1}{(k'-q)^2} = \frac{1}{\hat{t}}$  du la propagation du quark,

idem en  $\frac{1}{\hat{s}}$  et leur interférence.

→ Comportement à haute énergie:

→ on n'oublie que la composante dominante, tq.  $-\vec{E} \ll \hat{s}$  ( $k \ll k'$ ),  
on obtient en notant  $p_T = k' \sin \theta$  et  $\gamma = \frac{\vec{Q}^2}{2k \cdot q}$  la fraction d'impulsion  
longitudinale:

DEF On introduit la fonction de splitting  $P_{qq}(z)$  selon:

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{1-z}$$

Elle représente la probabilité qu'un quark se retrouve avec une fraction  $z$  de son impulsion longitudinale après émission d'un gluon.

$$\hookrightarrow \frac{d\sigma}{dR^2}(z) = \frac{4\pi^2 \alpha \epsilon p_T^2}{s} \frac{1}{p_T^2} \frac{\alpha s}{2\pi} P_{qq}(z)$$



→ Sans radiation de gluon à l'ordre le plus bas, on a:

$$q_b(x) = \int_0^1 dS q(S) f(x-S) = \int_0^1 dS/S q(S) f(1-x/S) \\ = \int_x^1 dS/S q(S)$$

En incluant la radiation, on a:

$$q(x, Q^2) = \int_x^1 dS/S \left\{ q(S) + \alpha_s/2\pi \int dP_T^2 q(S) P_{qq}(x/S)/p_T^2 \right\} \\ = q_b(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dS}{S} \int dP_T^2 q(S) \frac{1}{p_T^2} P_{qq}\left(\frac{x}{S}\right) \\ = q_b(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 dS/S P_{qq} \ln(Q^2/\mu^2)$$

DEF

On introduit l'échelle de factorisation  $\mu_F$  permettant d'exprimer la densité du parton habillée  $q(x, Q^2)$  à une certaine échelle  $Q^2$  à partir de la densité nue  $q_b(x)$  et y absorber la dépendance en  $\mu$ .

$$\hookrightarrow q(x, Q^2) = q_b(x, \mu_F^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dS}{S} q_b(S) P_{qq}\left(\frac{x}{S}\right) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu_F^2}\right) \\ = q(x, \mu_F^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dS}{S} q(S, \mu_F^2) P_{qq}\left(\frac{x}{S}\right) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu_F^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$$

PROP L'invariance d'échelle est brisée logarithmiquement.

→ La densité de partons habillée  $q(x, Q^2)$  étant une observable physique, elle ne peut dépendre de l'échelle de factorisation  $\mu_F^2$ . On impose alors

$$\frac{dq(x, Q^2)}{d \ln \mu_F^2} = 0$$

**Prop** On trouve l'équation Dokshitzer - Gribov - Lipatov - Altarelli - Parisi ou équation d'évolution DGLAP :

$$\frac{dq(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{ds}{s} q(s, Q^2) P_{qq}(x/s)$$

### ① Les autres termes :

→ Considérons le processus de fusion gluon-photon :  $g \gamma^* \rightarrow g\bar{q}$

Ce processus permet de relier la densité de gluons  $g(x, \mu^2)$  définie à  $\mu^2$  l'échelle de factorisation, à la fonction de structure  $F_2(x, Q^2)$  du proton :

$$q(x, Q^2) = g(x, \mu_F^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{ds}{s} q(s, \mu_F^2) P_{qg}(x/s) \ln(Q^2/\mu_F^2)$$

$$+ \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{ds}{s} g(s, \mu_F^2) P_{gg}(x/s) \ln(Q^2/\mu_F^2)$$

$$\text{où } P_{qg}(z) \equiv \frac{1}{2} (z^2 + (1-z)^2)$$

→ Ainsi, mesurer  $F_2$  donne accès à la densité de gluons.

### ② Effets de l'évolution DGLAP :

- Lorsque  $Q^2 \uparrow$ , les partons perdent de l'impulsion long.  $\Rightarrow$  shift vers petits  $x$ .
- Les gluons mènent l'évolution des quarks.
- La distribution des gluons est énorme p/r aux quarks.

### 4.7.2 Saturation :

- Pour des valeurs de  $x$  suffisamment petites, il faut que  $g(x, \mu^2)$  s'arrête (saturation).
  - La question de la saturation reste ouverte
- Lorsque  $x \downarrow, Q^2 \downarrow \Rightarrow$  on sort du domaine perturbatif!  
Il faudrait se placer à bcp + grande énergie

