

Physique des interactions fortes

1 Introduction α_s , confinement, lib. asymptotique

1.1 Un bref d'histoire $\mu_N, \gamma, \text{quark}$

p11 2 Bases de la QCD

2.0 Intro L, S

2.1 Invariance du jauge en QED $L_0, D_\mu, F^{\mu\nu}$

2.2 Invariance du jauge non-abélienne et $L_{QCD} \gamma^\mu, \lambda_a, YM, g, F^a_{\mu\nu}$

2.3 Règle de Feynmann pour QCD $G^{(1)}, D^{\mu\nu}, \Gamma^{\mu\nu ab}, \Gamma^{\mu\nu ab...}$

2.4 La liberté asymptotique $\mu_R, \epsilon_0^2, \beta, \Lambda_{QCD}$

2.5 Le potentiel QCD $G_0, \dots, G_8, D, C_F, V_{QCD}$

3 Annihilation e^+e^-

p28 3.1 Section efficace totale $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons } R$

3.2 Crédit d'une paire $q\bar{q}$ t_h, t_p

3.3 La formation de jets

3.4 Le pic du Z et haute énergie b_Z, α_Z, A_{FB}

3.5 Corrections radiatives QED $\Delta_Y, \text{lead term}$

3.6 Au delà du Z

3.7 Production de particules $x_P, s_P, Z, D_q^h(3)$

3.8 $\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q} g) \Delta_Z, P_{qg}, \tau(\epsilon)$

3.9 Algorithmes de reconstruction des jets JADE, $f_{2,3}$,

3.10 Structure de l'état final hadronique $T, n_T^\mu, M_N, B_T, B_W$

3.11 Comparaison des mesures de α_s

3.12 Test de la structure du jauge de QCD $\chi_{BSZ}, (\Box)_{NR*}$

p49 4 La diffusion e^-p

4.1 De l'atome au nucléon $L^{\mu\nu}, W^{\mu\nu}, \sigma_{Mott}, G_E, \chi, \sigma_{Dirac}$

4.2 Diffusion spin $1/2$ sur nucléon

4.3 Diffusion profondément inélastique x, y, M, W

4.4 Les fonctions de structure F_1, F_2, F_T, F_L, R_G

4.5 Le modèle des partons ref de Breit, $f_Q, x_{UV}, S(x)$

4.6 Meilleure étendue des fonctions de structures F_3 ,

4.7 La violation d'échelle et les équations DGLAP $P_{qg}, DGLAP$

p58 5 Interactions proton-proton

5.1 Production de jets τ, y, η

5.2 Remarques sur les factorisations QCD

5.3 Le processus Drell-Yan

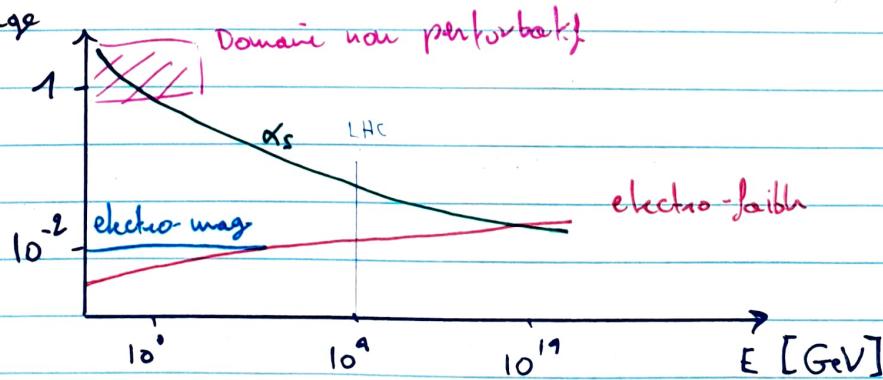
5.4 Conclusion

PHYSIQUE DES INTERACTIONS FORTES - F477

Laurent Favart - IINHE

1 INTRODUCTION

- Apès années 1960, la QCD (quantum chromodynamics) permet de décrire de manière simple la diversité des objets hadroniques et de prédire leurs interactions apd quarks et des gluons.
- 3 difficultés p/r à la QED :
 - ① La constante de couplage associée à la QCD α_s peut atteindre des valeurs supérieures à l'unité (lors d'interactions se déroulant sur un temps long).
 - Si $\alpha_s \sim 1$: confinement des quarks
 - Si $\alpha_s \ll 1$: liberté asymptotique ($\sim \text{GeV}$)
 - ↳ Comment factoriser les phénomènes perturbatifs des non perturbatifs.
 - ② La QCD possède un caractère non abélien qui correspond à l'autocouplage du gluon (champ de jauge de QCD). En effet, les gluons portent une charge de couleur.
 - ③ Les observables sont basées sur la mesure de combinaisons complexes et multiples de quarks et de gluons.



1.1 Un brin d'histoire

1.1.1 1909-1937 : de l'atome au nucléon

① Découverte du noyau atomique

→ 1909 : atomes électriquement neutres, contenant des électrons, chargés négativement et de masse faible

↳ Comment est répartie la matière lourde et chargée positivement au sein de l'atome ?

→ 1909 : Geiger, Marsden et Rutherford bombardent des feuilles de métal par des rayons α ($\sim 10 \text{ MeV}$) issus de ^{214}Po .

↳ Passage du modèle de Thomson ("plum pudding") au modèle de Rutherford (noyau central positif), e⁻ autour.

1911 → Rutherford calcule la dépendance angulaire attendue pour son modèle atomique. La section efficace différentielle en l'angle solide, pour la diffusion d'un particule de spin 0 sur un noyau de spin 0, est donnée par

$$\frac{d\sigma_K}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4 E_\alpha^2} \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad \text{avec } \alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

↳ déduction : noyau 10^{-4} plus petit que l'atome, $\sim 10^{-14} \text{ m}$

→ 1913 : Bohr propose le modèle de Bohr qui reproduit les raies spectroscopiques de l'hydrogène.

① Le proton et le neutron :

- 1911 : Rutherford montre que l'atome contient des protons
- 1932 : Chadwick montre l'existence du proton neutre, le neutron
- Le proton est le seul hadron stable ($Z > 10^{33} \gamma$)

DEF
Le magnétan de Bohr μ_N est donné par $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_N c}$

	Proton	neutron
masse	938,3 MeV	939,6 MeV
temps de vie	stable	900 à
charge	+1	0
spin	1/2	1/2
moment magnétique	$\sim 3 \mu_N$	$\sim -2 \mu_N$

- Le moment magnétique du proton étant éloigné de $1 \mu_N$, on s'attend à une sous-structure.
- Le neutron peut se désintegre de façon faible selon

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (\text{souvent négligé p/r aux IF}).$$
 De plus, $m[{}^2D = (1p, 1n)]$ est stable. On observe

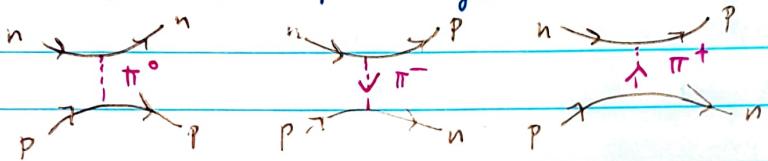
$${}^2\text{He} = (2p, 1n) \rightarrow {}^2D + e^+ + \nu_e$$
- Du pdv des IF, le proton \approx neutron. Neisenberg introduira la notion d'isospin pour rendre compte de ces caractéristiques.

① Théorie du Yukawa :

- 1935 : Yukawa imagine le pion pour expliquer la stabilité du noyau des atomes (qui devrait se désintégrer par répulsion E-M) : le pion est porteur de la force nucléaire forte qui lie protons et neutrons. $m_\pi \sim 200 \text{ MeV}$
- 1947 : pion découvert dans les émulsions nucléaires en bombardant une cible de carbone du particule α . On observe

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu$$

↳ Motif de Yukawa pour les forces nucléaires :



- La portée de l'interaction R est telle que $R = c \Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E} \sim \frac{1}{m}$
- La portée des IF $\sim 10^{-15} \text{ m} \Rightarrow$ masse de la particule échangée est donc $m \sim 100 \text{ MeV}$

DEF Le potentiel de Yukawa $U_y(r) = \frac{g}{4\pi r} e^{-r/R}$ pour $r > 0$

Pour $R \rightarrow \infty$, on retrouve le potentiel coulombien de l'Iem.

1.1.2 1940-1960 : les années folles ou une pléthore de hadrons

→ Au milieu des années 1940, on connaît γ , n , p , e^- , $r^?$.

① Des multiplets de hadrons aux quarks

- 1950-55 : développement des accélérateurs de particules (synchrocyclotron, synchrotron, Bevatron, ...). Découverte de l'antiproton et de résonances (particules à courtes durées du vécu).
- 1960 : découverte d'un certaines de hadrons sensibles à l'IF, classés en baryons de spin demi-entier, et de mesons de spin entier.
- 1962 : la voie octuple "eightfold way" fondée sur $SU(3)$ d'hypercharge
- 1964 : le modèle des quarks

② La "voie octuple" :

→ 1932 : Heisenberg introduit l'isospin fort I avec $p = |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ et $n = |\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle$ (en général, un nucléon est tq $|I I_3\rangle$). L'IF ne peut distinguer ces 2 états \Leftrightarrow invariance par rotation dans l'espace d'isospin \Rightarrow conservation du # quantique d'isospin. Le groupe d'invariance associé est $SU(2)$, et le nucléon appartient à la représentation fondamentale 2. Le pion (π^+ , π^0 , π^-) appartient à la rep. adjointe 3.

→ 1947 : découverte des particules étranges. On définit alors
 $\#$ d'étrangeté $\#$ baryonique

DEF 1 l'hypercharge Y tq $Y = \bar{S} + \bar{B}$ et tq $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$

↳ l'hypercharge est conservée dans les IF.

- Neeman et Gell-Mann introduisent alors le groupe d'invariance $SU(3)$ qui combine la symétrie $SU(2)$ d'isospin et l'étrangeté, et classent les hadrons dans les repr. du ce groupe.
- Les hadrons d'un mⁿ multiplet ont les mⁿ spins, parité et C-parité mais \neq hypercharges Y et I_3 .
- Les hadrons sont dans les repr. 8 et 10, et les mesons dans les repr. 1 et 8.

On peut alors lire des r^o. par ex: $\alpha(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = \alpha(\pi^- n \rightarrow \pi^- n)$
car $|I_3|$ est conservé: $|1 + 1/2| = |-1 - 1/2|$

DEF | La symétrie d'hypercharge est cette symétrie $SU(3)$ non exacte. (particules dans un mⁿ multiplet ont des masses \neq)

DEF | La symétrie d'isospin $SU(2)$ est également brisée par les Iem.

① Le modèle des quarks:

DEF Les quarks sont des particules hypothétiques, membre de la repr. fondamentale 3 de $SU(3)$, appelé alors $SU(3)$ du sareur.

○ Ces quarks ont les #Q suivants:

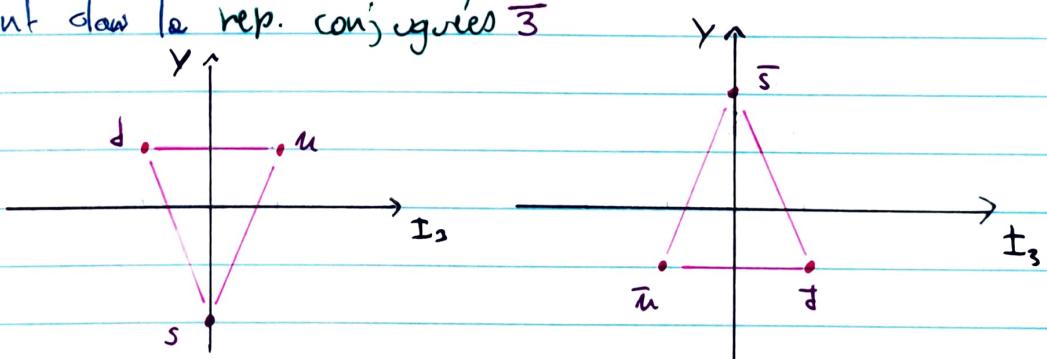
→ charges fractionnaires $(2/3, -1/3, -1/3)$

→ # baryonique $(1/3, 1/3, 1/3)$

→ étrangeté $(0, 0, -1)$

et donc hypercharge $(1/3, 1/3, -2/3)$

○ Ces 3 quarks correspondent à 3 sareurs (u, d, s). Les antiquarks sont dans la repr. conjuguée $\bar{3}$



→ Meson = $(q\bar{q})$ et baryon = (qqq) .

antiquarks

① La structure hadronique :

- 1968 : des expériences de diffusion inélastiques de leptons sur des noyaux montrent que les noyaux sont constitués de particules légères et quasiment libres : les partons.
- En fait, les partons étaient les quarks, en présence d'un potentiel particulier.
- 1970-80 : unification des modèles des hadrons construits après de l'étude du spectroscopie et diffusion à haute énergie et la Chromodynamique Quantique QCD

② La couleur :

- Problème théorique : la ψ d'un baryon était symétrique pour l'échange de 2 quarks (statistique de Fermi - Dirac)
→ Regardons un exemple. Baryons (S, Q, J). On a
 - $\Delta^- (0, -1, 3/2)$, $\Delta^{++} (0, 2, 3/2)$, $\Omega^- (-3, -1, 3/2)$
 - $\Delta^- (\text{ddd}) \quad \Delta^{++} (\text{uuu}) \quad \Omega^- (\text{sss})$
- Ce sont des particules de spin $3/2$, donc J un état particulier où les 3 spins sont alignés, dans l'état $J_z = 3/2$ par ex.
- Pour Δ^{++} , on peut écrire la fonction d'onde comme
$$|\Delta^{++} (J_z = 3/2)\rangle = |uuu\rangle \otimes |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \otimes |\text{orbital}\rangle$$
 - ↳ L'état $|\text{orbital}\rangle$ est associé à $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$ solution d'une éq. d'onde.
 - En général, la solution d'énergie minimale d'une telle éq. ne s'annule pas \Rightarrow pas antisymétrique $\Rightarrow |\Delta^{++}\rangle$ pas antisymétrique pour l'échange des 2 quarks quelconques.

DEF

Le nouveau $\#Q$ de couleur est introduit par Greenberg, Han et Nambu. Chaque quark existe en 3 couleurs $N_c = 3$ tel que
 $n = (n_r \ n_g \ n_b) \quad d = (d_r \ d_g \ d_b) \quad s = (s_r \ s_g \ s_b)$

→ On associe le groupe de symétrie $SU(3)_c$ à ce nouveau $\#Q$.

- Chaque quark est un triplet de couleur, et on postule que les hadrons sont des 1 de couleur (les hadrons sont incolores et la couleur est donc une symétrie cachée).

↳ La fonction d'onde du 1^{++} , de spin $J_z = 3/2$ est donnée par :

$$1^{++} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\bar{u}_r^{\uparrow} u_g^{\uparrow} u_b^{\uparrow} - \bar{u}_r^{\uparrow} u_b^{\uparrow} u_g^{\uparrow} - \bar{u}_g^{\uparrow} u_r^{\uparrow} u_b^{\uparrow} + \bar{u}_g^{\uparrow} u_b^{\uparrow} u_r^{\uparrow} - \bar{u}_b^{\uparrow} u_r^{\uparrow} u_g^{\uparrow} \right)$$

est totalement antisym pour permutation des couleurs.

- La fonction d'onde d'un baryon s'écrit selon :
- $$|\text{hadron}\rangle = |\text{couleur}\rangle \otimes |\text{savours}\rangle \otimes |\text{spin}\rangle \otimes |\text{orbital}\rangle$$
- Il n'existe alors pas de hadrons dans 1 de savour car sa fct d'onde serait globalement symétrique (car antisym dans les couleurs et dans les savours).
- Les mésons sont des singuliers de $SU(3)_c$, et leur fct d'onde du pdv de la couleur s'écrit
- $$\text{meson} = \frac{1}{\sqrt{3}} (q_r \bar{q}'_r + q_g \bar{q}'_g + q_b \bar{q}'_b)$$
- Les états de couleurs sont dégénérés (pas de \neq de niveaux dirigés pour \neq états de couleurs). C'est l'invariance de Jauge par rotation dans l'espace de couleur $SU(3)_c$ qui fait apparaître les champs de Jauge associés aux gluons de QCD.
- Le modèle des quarks s'est enrichi au cours des années avec la découverte de 3 nouveaux éléments.

1.1.3 1968-2015 : Le modèle standard

① Découvertes du charme et de la beauté:

1970 → Un 4^e quark avait été postulé (mécanisme de GIM) pour expliquer que les courants neutres (couplage au Z) conservent la soudure ($Z \rightarrow u\bar{u}$ mais pas $Z \rightarrow d\bar{s}$). De plus, les oscillations $K^0 - \bar{K}^0$ nécessitent d'introduire le charme.

→ 1974 : le méson Ψ ou J/ψ est découvert simultanément par:
 $e^+e^- \rightarrow \Psi \rightarrow \text{hadrons}$ $p\text{Be} \rightarrow \Psi + \text{hadrons}$
 ↳ e^+e^- ↳ e^+e^-
 ↳ $\mu^+\mu^-$

→ Le quark "bottom" ou "beauty" est découvert sous forme d'état lié γ en 1977

② Découverte des gluons:

→ 1978 : A Desy, on obtient $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \text{hadrons}$, qui met en évidence le spin 1 du gluon.

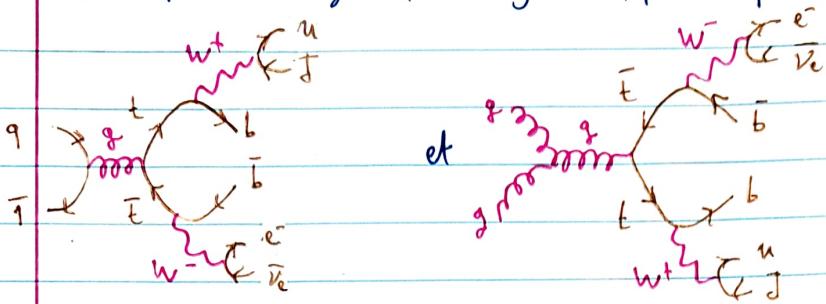
→ Preuve directe : $e^+e^- \rightarrow 3 \text{ jets}$

③ Découverte du top:

→ 1994 : découverte au TeVatron. Il était aussi nécessaire pour expliquer la large fréquence du mé lange $B^0 - \bar{B}^0$

→ Le quark t ne peut pas former un hadron tE car sa longueur de désintégration $\Gamma_t \sim G_F m_t^3 \Rightarrow \tau_t \sim 10^{-25} \text{ s}$ alors que l'hadronisation a pour échelle d'énergie $1_{ACD} \sim 200 \text{ MeV} \Rightarrow \tau_{had} \sim 10^{-23} \text{ s}$

- La mise en évidence d'un signal issu de la production du top est faite en sélectionnant une topologie du type {4 jets, un lepton chargé et un grand p_T manquant ?} :



② Résumé :

- Les quarks apparaissent en 6 savcours, regroupés en 3 générations : (u, d), (c, s) et (t, b). Chaque quark ayant 3 couleurs (r, g, b)

quark	B	Q	I_3	σ	c	b	t	masse
u	$1/3$	$2/3$	$1/2$	0	0	0	0	10^{-3} GeV
d	$1/3$	$-1/3$	$-1/2$	0	0	0	0	10^{-3} GeV
s	$1/3$	$-1/3$	0	-1	0	0	0	10^{-2} GeV
c	$1/3$	$2/3$	0	0	1	0	0	1 GeV
b	$1/3$	$-1/3$	0	0	0	-1	0	4 GeV
t	$1/3$	$2/3$	0	0	0	0	1	10^4 GeV

2

BASES DE LA QCD

- Principe de construction similaire à la QED, mais celle-ci est plus simple à écrire car abélienne. De plus, leur comportement asymptotique est très différent.
- Le principe de base pour la construction du modèle en physique des particules est l'invariance du jauge locale (physique indépendante des phases des champs). La physique est contenue dans la densité lagrangienne $L[\psi(x), \partial_\mu \psi(x)]$, un fonctionnel local du champ $\psi(x)$ et de ses dérivées, apd laquelle on construit l'action $S = \int d^4x \{ L[\psi(x), \partial_\mu \psi(x)] \}$

↳ L'évolution classique du $\psi(x)$ est donnée par les équations d'Euler-Lagrange obtenues en imposant que l'action soit stationnaire sous une variation du champ (principe d'Hamilton):

$$\frac{\delta S}{\delta \psi(x)} - \partial_\mu \frac{\delta S}{\delta \partial_\mu \psi(x)} = 0$$

- L'invariance du jauge local \Rightarrow L'invariant sous symétrie locale des champs. Le champ définissant l'interaction est celui dont les transformations de jauge compensent exactement celles encourues par le champ de matière $\psi(x)$
- La connaissance du groupe de symétrie auquel satisfait un champ de matière et sous lequel L_I doit demeurer invariant permet de déterminer les propriétés du champ porteur de l'interaction ainsi que la forme de son couplage à la matière apd des générateurs et des constantes de structures définissant le groupe de Lie associé.

2.1 Invariance du jauge en QED

- Les équations du mouvement d'une particule chargée libre de spin 1/2 découlent du Lagrangien :

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu - m) \psi(x)$$

où $\psi(x) = u(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}$ représente le spinor de Dirac (particule ($E > 0$), antiparticule ($E < 0$), 2 états d'hélicité $\lambda = \pm 1/2$) qui décrit la particule, et $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ est le spinor adjoint. et où γ^μ sont les matrices de Dirac.

- Le champ de matrice $\psi(x)$ satisfait à une symétrie $U(1)_Q$ attachée à la conservation du courant électrique et correspondent à la transformation de jauge suivante :

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x) = e^{-ie\alpha(x)} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \mapsto e^{ie\alpha(x)} \bar{\psi}(x)$$

Cette transformation ne modifie pas la valeur des observables

Le principe d'invariance du jauge local sous ce groupe de symétrie $\Rightarrow \partial_\mu \mapsto D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA^\mu(x)$ la dérivée covariante qui satisfait à :

$$D^\mu \psi'(x) = e^{-ie\alpha(x)} D^\mu \psi(x)$$

qui définit les lois de transformation de $A^\mu(x)$ associées à $\psi(x)$:

$$A^\mu(x) \mapsto A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \alpha(x)$$

- Le lagrangien de la théorie en interaction s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + e \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{\text{jauge}} \\ (\text{particule libre}) &\qquad (\text{interaction}) \qquad (\text{E. ein}) \end{aligned}$$

- Le tenseur de Maxwell $F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$ est fourni par $[\partial^\mu, \partial^\nu] A_\nu = -ie F^{\mu\nu} A_\nu$

- Les EOM sont l'éq de Dirac $(i\gamma^\mu - m)\psi = -e A_\mu \psi$ et l'éq. de Maxwell inhomogène : $\partial_\mu F^{\mu\nu} = e \bar{\psi} \gamma^\nu \psi$
Les éq. homogènes résultent de $\partial^\mu \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}(x) = 0$

2.2 Invariance du jauge non abélienne et Lagrangien de la QCD

- Aucun structure finie liée à la présence de la charge de couleur n'est observable \Rightarrow symétrie exacte du Hamiltonien \Leftrightarrow les 3 états de couleurs $\psi_q^r, \psi_q^g, \psi_q^b$ associés à un quark de saveur q donnée sont dégénérés du pdv de l'IF. La loi de transformation

$$\begin{pmatrix} \psi_q^r \\ \psi_q^g \\ \psi_q^b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \psi_q^{r'} \\ \psi_q^{g'} \\ \psi_q^{b'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{rr} & U_{rg} & U_{rb} \\ U_{gr} & U_{gg} & U_{gb} \\ U_{br} & U_{bg} & U_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_q^r \\ \psi_q^g \\ \psi_q^b \end{pmatrix}$$

doit constituer une opération de symétrie pour le L .

DEF On définit la fonction d'onde de couleur associée à un quark de saveur q selon :

$$\psi_q^c \equiv \begin{pmatrix} \psi_q^r \\ \psi_q^g \\ \psi_q^b \end{pmatrix}$$

constitue un triplet de la repr. du groupe de symétrie associé dont la loi de transformation \otimes peut s'écrire :

$$\psi_q^c \rightarrow \psi_q^{c'} = U \psi_q^c$$

- La matrice U est unitaire et de déterminant = 1. On a donc $U \in SU(n)_c$

- La fct d'onde de couleur associée à un antiquark est $\psi_{\bar{q}}^c = (\psi_q^c)^+$. Sa loi de transformation est donc $\psi_{\bar{q}}^{c'} \rightarrow \psi_{\bar{q}}^{c'} = \psi_{\bar{q}}^{c+} U^+$

Prop La fct d'onde de couleur d'un méson est invariante sous cette transformation (\Leftrightarrow c'est un singulet de couleur de cette repr.).

DEMO On a $\psi_{\bar{q}_1 q_2}^c = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{\bar{q}_1}^c \psi_{q_2}^c$. Alors

$$\psi_{\bar{q}_1 q_2}^{c'} = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{\bar{q}_1}^{c'} \psi_{q_2}^{c'} = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{\bar{q}_1}^{c+} U^+ U \psi_{q_2}^c = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{\bar{q}_1}^{c+} \psi_{q_2}^c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{\bar{q}_1 q_2}^c = \psi_{\bar{q}_1 q_2}^c$$



→ Si on choisit $SU(2)_c$ comme groupe de symétrie, on peut alors on peut choisir $U_{ij} \in \mathbb{R}$. En prenant la fact d'onde d'un quark réellement, on aurait $(\psi_q^c)^* = (\psi_{\bar{q}}^c)^*$ et $(\psi_q^c)^* = (\psi_q^c)^*$ et cela autorise les combinaisons $\bar{q}\bar{q}$ et qq . On, elles ne sont pas observées.

Prop La symétrie de L_{QCD} est $SU(3)_c$.

→ Considérons une transformation infinitésimale sous $SU(3)_c$. On a $\psi_q^c \mapsto \psi_q^c = (\mathbb{1} + iS) \psi_q^c$ avec $iS \in su(3) \Rightarrow S \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{C}) / S^+ = S$ et $\text{tr } S = 0$? S possède donc $18 - 9 - 1 = 8$ paramètres distincts.

DEF On introduit les matrices de Gell-Mann λ_i qui gèrent $su(3)$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

→ On peut alors écrire:

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_1/\sqrt{3} & S_1 - iS_2 & S_1 - iS_5 \\ S_1 + iS_2 & S_8/\sqrt{3} - S_3 & S_6 - iS_7 \\ S_9 + iS_5 & S_6 + iS_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}} S_8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 S_a \lambda_a = \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{S}$$

→ La relation de fermeture de $su(3)$ est

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2} \quad \text{où les } f_{abc} \text{ sont les} \quad \text{côtes de structures}$$

DEF Un champ de Yang-Mills ou champ de jauge non abélien est un groupe dont les générateurs ne commutent pas entre eux
 $\Leftrightarrow f_{abc} \neq 0 \quad \forall a, b, c$

→ Soit $\vec{\alpha}$ le vecteur des paramètres caractérisant une transformation de valeur finie. Alors :

$$U(\vec{\alpha}) = \lim_{n \rightarrow \infty} [U(\frac{\vec{\alpha}}{n})]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + i \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{n} \right]^n = e^{\frac{i}{2} \vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha}}$$

DEF On introduit la constante du couplage de l'interaction forte g_F

$$U(\vec{\alpha}) = \exp\{ig_F \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\alpha}\}$$

→ On considère alors le Lagrangien de la théorie libre pour un particule massive de spin 1/2 :

$$L_0 = \sum_q \bar{\Psi}_q^c(x) (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi_q^c(x)$$

On impose que L_0 soit invariant sous $\Psi_q^c \mapsto \Psi_q^{c'} = e^{ig_F \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\alpha}} \Psi_q^c(x)$.

$$\begin{aligned} \text{On prouve alors } \partial_\mu &\mapsto D_\mu = \partial_\mu + ig_F \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot A_\mu \\ &= \partial_\mu + ig_F \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a(x) \end{aligned}$$

→ On identifie les 8 potentiels-vecteurs $A_\mu^a(x)$ aux 8 gluons vecteur de l'IF. Chacun d'eux est associé à l'un des 8 générateurs λ^a du groupe de symétrie $SU(3)_c$. Les charges de gluon déterminent l'amplitude de chaque des 8 rotations indépendantes réalisables dans l'espace des degrés de liberté de couleur

→ La densité covariante satisfait l'invariance de jauge locale :

$$D_\mu \Psi_q^{c'}(x) = \exp\{ig_F \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x)\} D_\mu \Psi_q^c(x)$$

② Tenseur de force de l'IF :

→ On considère une transformation infinitésimale $\vec{g}(x)$ de la fit d'onde de couleur caractérisant le charge de matière :

$$\Psi_q^{c'}(x) = \left(1 + ig_F \frac{\vec{\lambda}}{2} \vec{g}(x) \right) \Psi_q^c(x)$$

À l'ordre 1, on peut montrer que :

$$(i \vec{\lambda} \cdot \vec{a})(i \vec{\lambda} \cdot \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - i f_{abc} \vec{a}_a \vec{b}_b \vec{a}_c$$

On obtient finalement :

DÉP

La transformation du champ de gluons $A_\mu^a(x)$ sous un changement de jauge infinitésimal $\vec{g}(x)$ est :

?

$$A_\mu^a(x) \mapsto A_\mu^{a'} = A_\mu^a(x) - \partial_\mu g^a(x) - g f_{abc} g^b(x) A_\mu^c(x)$$

→ Les champs de jauge se transforment selon la rep. régulière de $SU(3)_c$

→ Afin de déterminer l'énergie cinétique de $\vec{A}^\nu(x)$, on applique :

$$[D_\mu, D_\nu] \vec{A}^\nu(x) = ig \frac{\lambda^a}{2} \left(\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - g f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \right) \vec{A}^\nu(x)$$

DÉF

Le tenseur de force de l'IF couleur est donné par

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - g f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x)$$

↳ $A_\mu^a(x)$ interagit avec lui-même ! Les gluons vecteurs de l'IF portent eux-mêmes une charge de couleur. La conservation de la couleur $\rightarrow \exists (n^2-1)|_{n=3} = 8$ gluons, pourtant une couleur et anti-couleur.

DÉF

Le Lagrangien de la QCD s'écrit comme :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi - \frac{1}{4} F^2$$

Explicitement, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{\text{jauge}}$ avec :

$$\rightarrow \mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_q^c(x) [i \gamma^\mu \partial_\mu - m] \psi_q^c(x)$$

$$\rightarrow \mathcal{L}_{\text{jauge}} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a = -\frac{1}{4} [\partial^\mu A_\mu^a(x) - \partial^\nu A_\nu^a(x)] [\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x)] \\ + (\text{terme } \alpha \text{ } f_{abc}) \sim \text{dans } \mathcal{L}_I$$

$$\rightarrow \mathcal{L}_I = \bar{\psi}_q^c(x) \left(-g \gamma^\mu A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} \right) \psi_q^c(x)$$

$$= -g \bar{\psi}_q^c(x) \gamma^\mu A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} \psi_q^c(x) + \frac{g}{2} f_{abc} [\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x)] A_b^\mu(x) A_c^\nu(x)$$

- $\frac{g^2}{4} f_{abc} f_{bcd} A_a^\mu(x) A_b^\nu(x) A_c^\mu(x) A_d^\nu(x)$

- Puisque le champ de couleur couplé à lui-même, il est impossible d'envisager le gluon comme un particule libre.
- ↳ Le vide de la QCD est le siège d'interactions.
- Le paramètre g gère l'invariance du jauge. On la nomme constante de couplage du jauge.

2.3 Règles de Feynmann pour QCD

- Le lagrangien libre $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma - m)\psi$ donne l'expression des propagat., donné par l'opérateur inverse des EOM.
- Les règles pour les interactions sont traitées comme des perturbations et sont données par \mathcal{L}_{int} .
- La jauge covariante est représentée par ξ , qui définit la jauge.
- Dans la jauge de Feynman, $\xi = 1$. Dans celle de Landau, $\xi = 0$.

① Particules externes:

	entrant	sortant
$\begin{array}{c} p \\ \rightarrow \\ \hline \end{array}$	$u(p,s)$	$\bar{u}(p,s)$
$\begin{array}{c} p \\ \leftarrow \\ \hline \end{array}$	$v(p,s)$	$\bar{v}(p,s)$
$\begin{array}{c} p \\ \hline \text{mmmm} \end{array}$	$\epsilon_\mu(p,s)$	$\epsilon_\mu^*(p,s)$

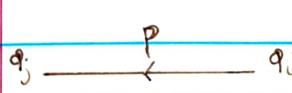
→ Relation d'orthogonalité:

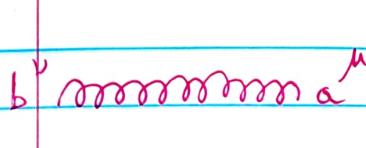
$$(p-m)u = 0 = \bar{u}(p-m)u \quad u(p+m)v = 0 = \bar{v}(p+m)v$$

→ Relations de fermeture:

$$\sum_s u(p,s)\bar{u}(p,s) = p + m \quad \text{et} \quad \sum_s v(p,s)\bar{v}(p,s) = p - m$$

② Propagateurs:

 $G^i_j(p) = \frac{i}{p - m} \delta^i_j = i(p + m) \delta^i_j$

b  $D_{\mu\nu}^{ab}(p) = \frac{-i\delta^{ab}}{p^2} \left(g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right)$ conservation de la couleur

En jauge de Feynman:

$$D_{\mu\nu}^{ab}(p) = -i \frac{\delta^{ab}}{p^2} g_{\mu\nu}$$

① Interactions:

$$\text{Gluon } q_i \quad (\Gamma^{\alpha\mu})_{ij} = ig g^\mu (\lambda^\alpha)_{ij}$$

sauvage, couleur i

$$\text{Gluon } q_i \quad \Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(p, q, r) = -g f^{abc} \left((p-q)_\lambda g_{\mu\nu} + (q-r)_\mu g_{\nu\lambda} + (r-p)_\nu g_{\mu\lambda} \right)$$

tel que $p+q+r=0$

$$\text{Gluon } q_i \quad \Gamma_{\mu\nu\lambda\sigma}^{abcd} = -ig^2 f^{abc} f^{cde} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma})$$

$$-ig^2 f^{ace} f^{bed} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma})$$

$$-ig^2 f^{ade} f^{bce} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma})$$

② Remarques:

- Tous les vertex dépendent des indices de couleur des lignes croisées. Conventionnellement, on prend a, b, c, d pour les indices de couleur adjointes des gluons et i, j pour les quarks et anti-quarks.
- Le propagateur d'un quark est le même que celui d'un autre fermion, où l'on a imposé la conservation de la couleur.
- Les lignes de gluon portent un vecteur de polarisation S^μ similaire à celui d'un photon, avec un indice de couleur en plus.
- Pour quantifier la QCD, il faut introduire des fantômes de Faddeev-Popov pour préserver l'invariance de jauge.
- L'existence d'auto-interaction des champs de jauge est responsable des propriétés de liberté asymptotique et de confinement de l'IF.

2.4 La liberté asymptotique

- La constante du couplage ne comporte pas de effet de la distance. Ce comportement est déterminé par la réponse du vide à la présence d'un charge, le principe d'incertitude permettant des fluctuations du vide en paire de particule-anti particule pendant un temps $\propto 1/E$.

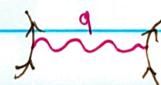
2.4.1 Effet d'écaillage en QED:

- Un paire part-antipart ne polarise le champ électrique d'un charge. Il faut donc spécifier la distance à laquelle on s'intéresse.

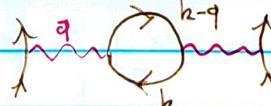
DEF 1 La longueur d'onde de de Broglie $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e c} \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$

- En QED, l'effet d'écaillage de la charge électrique est calculé en sommant toutes les corrections de boucle e^+e^- au propagateur du photon: $\gamma^* \rightarrow (e^+e^-)^* \rightarrow \gamma^*$. On s'intéresse au couplage qui apparaît à chaque vertex:

→ A l'ordre 1: $(-i) e_0 \gamma^\mu \cdot (-i) \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \cdot (-i) e_0 \gamma^\nu = i e_0^2 \gamma^\mu \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \gamma^\nu$
représenté par:



→ A l'ordre 2:



$$(-i) e_0 \gamma^\mu \cdot (-i) \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \cdot (-i) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[(-i) e_0 \gamma^\rho \frac{i(k+m)}{k^2 - m^2} (-i) e_0 \gamma^\nu \frac{i(k-q+m)}{(k-q)^2 - m^2} \right] \times (-i) \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} (-i) e_0 \gamma^\nu$$

En effet, $\sum_{\alpha, \beta, \gamma, \nu} \gamma^\rho_{\nu\mu} (k+m)_{\mu\alpha} \gamma^\lambda_{\nu\mu} (k-q+m)_{\alpha\beta} =$

$$= \text{Tr} [\gamma^\rho (k+m) \gamma^\lambda (k-q+m)]$$

$$= 4 g^{\rho\lambda} (m^2 - h \cdot (k-q)) + 8 h^\rho h^\lambda - 4 (h^\lambda q^\rho + h^\rho q^\lambda)$$

On voit sur les états d'hélicité des fermions de la boucle

① Divergence et cut-off UV:

→ Le calcul de la boucle fait intervenir le terme :

$$\int \frac{d^4 k}{2\pi} \text{Tr}[\dots] \propto \int \frac{d^4 k}{(k^2 - m^2)^2} = \int \frac{k^3}{(k^2 - m^2)^2} dk d\Omega \propto \int_0^\infty \frac{dk}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$$

↳ C'est la divergence ultraviolette, qui est logarithmique : $\int dk/k$

DEF On introduit un cut-off ultraviolet μ_R tq $\int_0^\infty \frac{dk}{k} \mapsto \int_0^{\mu_R} \frac{dk}{k}$

→ L'intégrale laisse alors une divergence en q^2/μ_R^2 :

$$ie_0^2 g^{\mu\nu} \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \gamma^\nu \left[1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \left[\frac{m^2 - q^2}{\mu_R^2} \right] + \frac{e_0^2}{12\pi^2} F(q^2) \right]$$

avec $F(q^2)$ tel que $\lim_{q^2 \rightarrow \infty} F(q^2) = 0$ et $\max\{F\} < \infty$

DEF On introduit la charge renormalisée en ne gardant que le terme de correction logarithmique (Leading Log Approximation-LLA)

? juste ?

$$e_0^2 \equiv e_0^2 \left(1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \left[\frac{m^2 - q^2}{\mu_R^2} \right] \right)$$

Pour des diagrammes aux ordres supérieurs, on introduit

$$\alpha_0 \equiv e_0^2 / 4\pi$$

→ On obtient alors :

$$\alpha_{em}^{eff}(\mu_R^2) = \alpha_0 \left(1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left[\frac{m^2 - q^2}{\mu_R^2} \right] + \left(\frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left[\frac{m^2 - q^2}{\mu_R^2} \right] \right)^2 + \dots \right)$$

$$\approx \frac{\alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left[Q^2 / \mu_R^2 \right]} \quad \text{en posant } \frac{m^2 - q^2}{\mu_R^2} \approx Q^2$$

De manière équivalente,

$$e_0^2(Q^2) = \frac{e_0^2}{1 - \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \left[Q^2 / \mu_R^2 \right]}$$

→ La constante de couplage dépend donc de la charge, dont la dépendance en la distance est, asymptotiquement,

$$e^2(r) = \frac{e^2}{1 + \frac{2e^2(r_0)}{3\pi} \ln \left[r/r_0 \right]} \quad \text{où } r_0 = \frac{1}{\alpha_0}$$

④ Discussion:

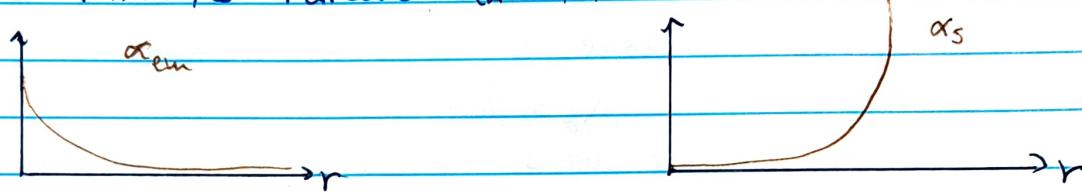
→ A grande distance, $r \gg r_0$, on peut négliger la dépendance en la charge nue $e(r)$:

$$e'(r) \approx -\frac{3\pi}{2 \ln(r/r_0)}$$

→ A courte distance, $r_0 \rightarrow 0$, le logarithme $\ln(r/r_0) \rightarrow \infty$. Or, si $e(r_0)$ est fini, $e(r) \rightarrow 0$ & r : paradoxe!

↳ En fait, lorsque $r_0 \rightarrow 0$, $e(r_0) \rightarrow \infty$: pas de traitement perturbatif possible. Le problème fut résolu par Gribov via la procédure dite de renormalisation.

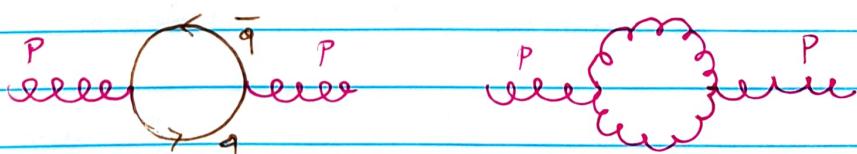
→ Pour $r \gg r_0$, on retrouve $\alpha_{em} \approx 1/137$



2.4.2 La constante de couplage de QCD:

DEF En QCD, la liberté asymptotique correspond à un effet d'anti-échantage: le couplage augmente avec la distance.

→ On calcule également des corrections de bouches aux propagateurs du boson de jauge:



↳ couleur fixée, pas le sateur.

↳ La bouch de quark est similaire au cas QED, avec:

$$\rightarrow un \text{ facteur } \text{Tr}[\lambda^a \lambda_a] = 1/2$$

→ somme sur les saturs, aux numbr de N_f

- ↳ La boucle de gluons a un expression similaire avec :
- un signe +1 car c'est un boson
 - une somme sur les couleurs

DEF
On introduit la constante de couplage forte $\alpha_s \equiv \frac{g^2}{4\pi}$

→ On obtient :

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu_R^2)}{1 - \frac{2N_f - 11N_c}{6\pi} \alpha_s(\mu_R^2) \ln[Q^2/\mu_R^2]}$$

Le terme $11N_c$ ← gluons, et celui $2N_f$ ← quarks.

- ↳ Les quarks induisent un effet d'écaillage et les gluons d'anti-écaillage. L'effet de compétition s'annulerait pour $N_f = 11N_c/2$

2. 4.3 Petite discussion :

→ Considérons un milieu à vive dans un milieu continu avec une constante diélectrique ϵ . Elle est liée à la perméabilité magnétique μ selon

$$\epsilon \cdot \mu = 1 = 1/c^2$$

→ Un milieu diamagnétique (effet d'écaillage) correspond à $\mu < 1$ et un milieu paramagnétique (anti-écaillage) à $\mu > 1$

→ Quand on e^- se déplace dans un \vec{B}_{ext} , 2 effets apparaissent :

- 1) le courant induit (direction opposée, effet diamagn.)
- 2) le spin s'alligne sur \vec{B}_{ext} (effet paramagn.)

↳ En QED, l'effet diamagn l'emporte : écaillage

↳ En QCD, les gluons possèdent une charge de couleur et ont un spin plus élevé que les q et \bar{e} .

→ La charge de couleur tend $\rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 0$.

DEF On définit le paramètre Λ_{QCD} par

$$\Lambda_{QCD}^2 \equiv \mu^2 \exp \left\{ -\frac{4\pi}{\beta_0 \alpha_s(\mu^2)} \right\}$$

qui correspond à Q^2 tq $\frac{2N_f - 11N_c}{6\pi} \alpha_s(\mu^2) \ln [Q^2/\mu^2] = 1$

- Cette grandeur indique le pivot entre la région perturbatif et non-perturbatif, et donc l'énergie à laquelle les eq. du groupe de renormalisation deviennent valables.
En effet, $\alpha_s(Q) \xrightarrow{Q \rightarrow \Lambda_{QCD}} \infty$

- Λ_{QCD} est un paramètre libre de QCD. Pour $Q=M_Z$, on obtient $\Lambda_{QCD} \approx 0,1 \text{ GeV}$

2.5 Le potentiel de QCD

- Les quarks isolés n'ayant jamais été observés, on suppose qu'ils sont confinés au sein des hadrons.

2.5.1 Etats de couleur du gluon:

DEF On définit 8 états de couleur du gluon orthonormés

→ Un octet:

$$G_1 \equiv r\bar{g}$$

$$G_2 \equiv r\bar{t}$$

$$G_3 \equiv g\bar{r}$$

$$G_4 \equiv g\bar{b}$$

$$G_5 \equiv b\bar{r}$$

$$G_6 \equiv b\bar{g}$$

$$G_7 \equiv \sqrt{\frac{1}{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}) \quad G_8 \equiv \sqrt{\frac{1}{2}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})$$

Rappel que
rg, bt, bg?

$$\rightarrow \text{Un singlet: } G_0 \equiv \sqrt{\frac{1}{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})$$

Prop Seuls les états antisymétriques sous permutation de 2 couleurs sont réalisés dans la nature

→ $\{G_i\}_{i=1}^8$ existe

→ G_0 n'existe pas. De plus, il ne porte pas de couleur, il ne réalise pas l'IF.

2.5.2 Le facteur de couleur :

DEF

La fonction d'onde d'un quark peut être exprimée comme le produit d'un spinor de Dirac et d'une fonction d'onde de couleur (χ_c):

$$\Psi = \psi(x) \cdot \chi_c \text{ avec:}$$

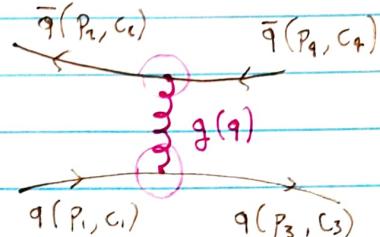
$$\chi_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

① Diffusion de 2 quarks au tree-level:

→ L'élément du matrice correspondant s'écrit:



$$i\mathcal{M} = \left(\bar{u}(p_3) \chi_3^+ \left(-i \frac{g \lambda^a}{2} \gamma^\mu \right) u(p_1) \chi_1 \right) \frac{-ig_{\mu\nu}\delta^{ab}}{q^2} \left(\bar{v}(p_1) \chi_2^+ \left(-i \frac{g \lambda^a}{2} \gamma^\nu \right) v(p_3) \chi_4 \right)$$

$$= ig^2 \frac{1}{q^2} \left(\bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \right) \left(\bar{v}(p_1) \gamma^\nu v(p_3) \right) \underbrace{\frac{1}{4} (\chi_3^+ \lambda^a \chi_1) (\chi_2^+ \lambda^a \chi_4)}_{C_F}$$

 C_F

On obtient à une constante de couplage près la même expression que dans QED pour la diffusion $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ multiplié par un facteur de couleur C_F

Prop

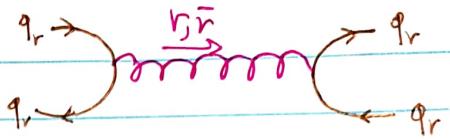
Pour les interactions abéliennes (par d'interaction gluon-gluon), on peut toujours factoriser C_F et avoir " $i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_{QED} \cdot C_F$ "

② Force attractive ou répulsive?

→ Dans QED, le signe de la force e-m est donnée par $e\epsilon_{\mu\nu\lambda}k_\lambda$, avec $\alpha > 0$. De façon équivalente dans QCD, on peut décomposer C_F en $\frac{1}{2} c_1 c_2$ (facteur 1/2 historique)

Prop Un interaction ayant un facteur de couleur $C_F \propto_s = \frac{1}{2} c_1 c_2 \propto_s$
 sera attractive pour $C_F < 0$
 répulsive pour $C_F > 0$

① Exemple: diffusion $q_r \bar{q}_r \rightarrow q_r \bar{q}_r$:



→ Le facteur de couleur vaut:

$$C_F = \frac{1}{4} \sum_{\alpha} \left[(100) \lambda^{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[(100) \lambda^{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\lambda_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} (\lambda^1)_{11} (\lambda^1)_{11} = \frac{1}{4} ((\lambda^1)^2)_{11} + ((\lambda^1)^3)_{11} = 1/3$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 1/3$$

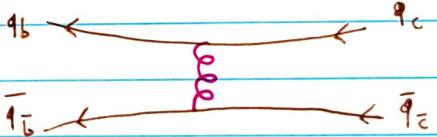
Un autre moyen d'obtenir ce résultat est de regarder quels gluons possède un terme $\propto r\bar{r}$: il s'agit de G_7 et G_8 . On trouve:

$$C_F = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \right) = 1/3$$

↳ La force sera donc répulsive!

→ Le résultat sera le même pour $g\bar{g}$ et $b\bar{b}$, comme imposé par la symétrie de couleur.

② Exemple: état singlet $q\bar{q}$:



→ Considerons un méson, état singlet de couleur:

$$q\bar{q} = \frac{1}{\sqrt{3}} (q_r \bar{q}_r + q_g \bar{q}_g + q_b \bar{q}_b) = \frac{1}{\sqrt{3}} (r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}) \sim G_0$$

↳ Le facteur de couleur est: (on considère 1 couleur et on multiplie par 3)

$$C_F(q\bar{q}) = 3 \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{\text{initial}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{\text{final}} \cdot C_F(q_b \bar{q}_b)$$

→ Les gluons ayant une couleur bleue sont G_5 ($q_b \bar{q}_b \rightarrow q_r \bar{q}_r$),

G_6 ($q_b \bar{q}_b \rightarrow q_g \bar{q}_g$) et G_8 ($q_b \bar{q}_b \rightarrow q_b \bar{q}_b$):

$$C_F = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{6}} + 1 \cdot -1 + 1 \cdot -1 \right) = -\frac{4}{3}$$

(Les signes (-) sont dus aux anti-particules)

↳ La force est attractive!

Prop

Le facteur de couleur d'un (anti-)baryon qqq est $C_F^{qqq} = 2/3$

2.5.3 Le potentiel:

→ Le potentiel qui représente l'interaction QCD entre un quark et un anti-quark dans un état de couleur singulet est dit de "fumel".

DEF Le potentiel du fumel V_{QCD} est donné par

$$V_{QCD}(r) = C_F \frac{\alpha_s}{r} + k \cdot r = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + k \cdot r$$

où k est la tension de la corde, $k \approx 1 \text{ GeV fm}^{-1}$

↳ Ce potentiel est compatible avec les calculs non perturbatifs th lattice QCD

↳ Ce potentiel possède 2 régimes :

→ coulombien si $r \ll 1/k$ et linéaire si $r \gg 1/k$

① Partie coulombienne:

→ Due au propagateur des gluons. Pour $q^2 \ll M^2$ (approx non-relativiste), le potentiel est \propto transfo de Fourier du propagateur des gluons :

$$\begin{aligned} V_{QCD}(r) &= -g^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot r} \cdot \frac{1}{-p^2} = g^2 \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{\sin(p|r|)}{p|r|} \\ &= \frac{g^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{|r|} = \frac{\alpha_s}{|r|} \quad \left(\int_0^\infty \sin(x)/x = \pi/2 \right) \end{aligned}$$

↳ On retrouve la forme classique du potentiel coulombien

② Partie linéaire:

→ Correspond au régime non-perturbatif, donc diagrammes de Feynmann inutiles.

→ Lorsque la distance de séparation entre les 2 quarks devient de l'ordre de 1 fm, les lignes de champ des gluons s'attirent réciproquement et forment un tube. Si on les écarte encore, le tube s'allonge avec $F = -\delta V/\delta r$ constante. Si $r > 135 \text{ MeV} \sim m_\pi$, il y a fragmentation : une paire $q\bar{q}$ est créée.

3

ANNIHILATION $E^+ - E^-$

- Considérons le calcul le plus simple ; les collisions e^+e^- . L'annihilation électron-positon permet l'étude des aspects électro-faibles et de différents aspects de la QCD.
- La réaction $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$ présente un état initial clair, et n'est pas sujet à des interférences entre l'état initial et l'état final. De plus, p^μ est intégralement transmis à l'état final (si pas de radiation QED). Enfin, α_{EM} fait intervenir la constante de couplage électro-faible ; la proba de superposition de 2 événements est faible.

3.1 Section efficace totale $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$

- La production de hadrons se fait via la production d'un paire $q\bar{q}$ avec une proba de 1 :
- $$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) = N_c \sum_{i=1}^{N_f} \sigma(e^+e^- \rightarrow q_i \bar{q}_i)$$
- La production $e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow \gamma^*(q) \rightarrow q(p_q) + \bar{q}(p_{\bar{q}})$ est identique à toute autre production de paire l^+l^- (en modifiant les charges électriques Q_i et en rajoutant N_c).

- La section efficace (on néglige l'échange d'un Z) est :

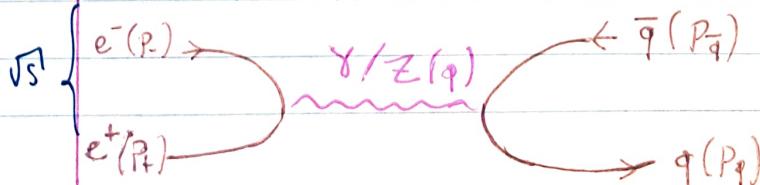
$$d\sigma = \frac{1}{2S} |\overline{CM}|^2 (2\pi)^4 \delta(P_+ + P_- - P_q - P_{\bar{q}}) \frac{d^3 p_q}{(2\pi)^3 2\omega_q} \frac{d^3 p_{\bar{q}}}{(2\pi)^3 2\omega_{\bar{q}}}$$

avec $S = q^2 = (P_+ + P_-)^2 = (p_q + p_{\bar{q}})^2$ et avec

$$|\overline{CM}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{S_{e^+}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{S_{e^-}} \cdot \sum_{S_q, S_{\bar{q}}} |\overline{CM}|^2, \text{ où}$$

$$|\overline{CM}| = \bar{v}(p_+) (-ie\gamma^\mu) u(p_-) \cdot \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(p_q) (-iQ_i e\gamma^\nu) v(p_{\bar{q}})$$

$$= \frac{iQ_i e^2}{q^2} \bar{v}(p_+) \gamma^\mu u(p_-) \cdot \bar{u}(p_q) \gamma_\mu v(p_{\bar{q}})$$



→ Trouvons $C\bar{M}^*$:

$$\begin{aligned} &\rightarrow \text{Puisque } \bar{\psi} \gamma^\mu x \in C\bar{M}_1(C), \text{ on a} \\ &(\bar{\psi} \gamma^\mu x)^* = (\bar{\psi} \gamma^\mu x)^+ = (\psi^+ \gamma^0 \gamma^\mu x)^+ = x^+ (\gamma^\mu)^+ (\gamma^0)^+ \psi \\ &= x^+ \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^0 \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \end{aligned}$$

$$\rightarrow iC\bar{M}^* = \frac{i Q_e e^2}{q^2} \bar{u}(p_-) \gamma^\mu v(p_+) \bar{v}(p_{\bar{q}}) \gamma_\mu u(p_q)$$

PROP On rappelle les relations de fermeture suivantes :

$$\sum_s u^s(p_q) \bar{u}^s(p_q) = p_q + m_q$$

$$\sum_s v^s(p_{\bar{q}}) \bar{v}^s(p_{\bar{q}}) = p_{\bar{q}} - m_{\bar{q}}$$

→ Calculons la somme sur les quarks sortants :

$$\sum_{q\bar{q}q\bar{q}} \bar{u}^s(p_q) \gamma_\mu v^s(p_{\bar{q}}) \bar{v}^s(p_{\bar{q}}) \gamma_\nu u^s(p_q)$$

$$= \text{tr} \left\{ (p_q + m_q)(p_{\bar{q}} - m_{\bar{q}}) \gamma_\mu \gamma_\nu \right\} \quad \text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu) = 4(\eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu} + \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu})$$

$$\text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4 \eta_{\mu\nu}$$

$$= \text{tr} \left\{ (\gamma^\alpha p_{q\alpha} + m_q)(\gamma^\beta p_{\bar{q}\beta} - m_{\bar{q}}) \gamma_\mu \gamma_\nu \right\}$$

$$= \text{tr} \left\{ p_q^\alpha p_{\bar{q}}^\beta \gamma_\mu \gamma_\nu - m_q^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \right\} \quad \text{tr}(\gamma) = \text{tr}(\gamma\gamma) = \text{tr}(\gamma\gamma\gamma\gamma) = 0$$

$$\underset{\text{à indice } \mu \text{ et } \nu}{=} 4 \text{tr} \left\{ p_{q\mu} p_{\bar{q}\nu} (\eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} - \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} + \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu}) \right\} - 4 m_q^2 \eta_{\mu\nu}$$

$$= 4 \left\{ p_{q\mu} p_{\bar{q}\nu} + p_{q\nu} p_{\bar{q}\mu} - p_q \cdot p_{\bar{q}} \eta_{\mu\nu} - m_q^2 \eta_{\mu\nu} \right\}$$

→ Le terme leptonnique est analogue :

$$\begin{aligned} \sum_{S+S^-} \bar{\nu}^+(p_+) \gamma^\mu \bar{u}(p_-) u^-(p_-) \gamma^\nu v^+(p_+) \\ = 4 \left\{ p_+^\nu p_+^\mu + p_-^\mu p_+^\nu - p_- \cdot p_+ \eta^{\nu\mu} - m_e^2 \eta^{\nu\mu} \right\} \end{aligned}$$

→ On obtient $|C\bar{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{S+S^-} \sum_{S+\bar{S}} C\bar{M}^* C\bar{M}$

cirkulatique

$$\begin{aligned} &= \frac{q \cdot q}{2} \frac{e^4}{S^2} N_c Q_e^2 \left\{ (p_- \cdot p_{\bar{q}})(p_+ \cdot p_{\bar{q}}) + (p_+ \cdot p_q)(p_- \cdot p_q) \right. \\ &\quad \left. + m_q^2 (p_+ \cdot p_-) + m_e^2 (p_+ \cdot p_{\bar{q}}) + 4 m_q^2 m_e^2 \right\} \\ &\quad \text{terres de main} \end{aligned}$$

↳ Les taux de masses sont constants :

$$\begin{aligned} m_q^2(p_+ \cdot p_-) + m_e^2(p_q \cdot p_{\bar{q}}) + 4m_q^2 m_e^2 &= \frac{S}{2} (m_q^2 + m_e^2) - 2m_q^2 m_e^2 + 4m_q^2 m_e^2 \\ &= \frac{S}{2} (m_q^2 + m_e^2) + 2m_q^2 m_e^2 \end{aligned}$$

→ Prenons la limite relativiste : $p_+^2 = p_-^2 = p_q^2 = p_{\bar{q}}^2 = 0$

$$\hookrightarrow (p_+ + p_q)^2 = 2p_+ \cdot p_q$$

Et on se place dans le CM, avec l'axe ζ = axe du faisceau.

On obtient : (voir eq. 6.50 dans Martin et Habermann)

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi \alpha^2 N_c Q_i^2}{2S} (1 + \cos^2\theta)$$

où $\alpha = e^2/4\pi$ et θ l'angle entre le faisceau et les particules sortantes.

→ À très haute énergie, les interactions entre les quarks de l'état final peuvent être négligées (principe de causalité). La section efficace intégrée est :

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3S} N_c \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2$$

où la somme porte sur les N_f sursous qui contribuent à la section efficace, c'est à dire $\sum Q_i^2 \ll S$

DEF On définit rapport de σ hadronique - muonique R selon

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

→ Le rapport R se réexprime :

$$R = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) / (4\pi\alpha^2/3S) = N_c = \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2$$

↳ Mesurer R permet d'améliorer bcp d'incertitudes expérimentales.

→ Si $\sqrt{S} < 3 \text{ GeV}$ et $N_c = 3$, seuls u, d, s contribuent et

$$R|_{\sqrt{S} < 3 \text{ GeV}} = 3 \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 \right\} = 2$$

Au delà, $R[4 < \sqrt{S} < 9] = 10/3$ et $R[\sqrt{S} > 9 \text{ GeV}] = 11/3$

→ Expérimentalement, on trouve $N_c = 3$ à haute énergie, loin des résonances. Haute énergie = moins d'hadronisation

- Prop Les résonances correspondent à la production exclusive d'un méson vecteur $e^+e^- \rightarrow VM$; $VM = p, \omega, \phi, \pi, \eta, \dots$
- Si une seule particule est créée, par conservation du spin et de la parité ($J_p = 1^-$), il doit s'agir d'un méson ($q\bar{q}$) vecteur (spin 1) de parité négative
 - Les mésons 1^+ sont appellés pseudo-vecteurs.

3.2 Crédit d'une paire $q\bar{q}$

- Dans le système du CM, $p_q = -p_{\bar{q}}$. Lorsqu'ils se séparent de $r \approx 10^{-15} \text{ m}$, le champ de couleur de la paire peut être représenté par un tube. En continuant $r > 10^{-15} \text{ m}$, $E_{\text{pot}} \gg E_{\text{kin}}$. Lorsque $E_{\text{pot,tube}} > m_{q\bar{q}}$, une paire $q\bar{q}$ est créée, et écrase la couleur de la paire initiale.
- Il y a conservation de la couleur à chaque vertex, et globalement après le temps de l'hadrénisation t_h
ex: $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow q_w + \bar{q}_w \rightarrow q_w + \bar{q}_w \dots q_w + \bar{q}_w$
- Si les impulsions relatives sont suffisamment grandes, il y a une cascade de parton produite. Si l'énergie dispo. est grande (dans le CM), ce phénomène de neutralisation de la couleur n'apparaîtra qu'en fin de processus.
- Pour $E \gg m_p$ la masse du proton, l'impulsion longitudinale du tube P_L est grande et $P_T = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \approx m_p$ est limitée \Rightarrow Les partons produits possède des $P \approx P_L$
- Après production en cascade, il y a recombinaison en état neutre de couleur: en hadron. C'est un processus soft, il n'induit pas de transfert de P_T . Cette hypothèse est appelée la dualité parton-hadron.
→ les hadrons produits sont proche dans l'espace des phares des partons qui les constituent. Les hadrons produits sont collinaires dans 2 petits domaines angulaires: les jets, opposés l'un à l'autre.
- Le mécanisme de formation des jet est composé de 2 étapes,
 - ① le processus partonique: désintégration de γ ou Z sur un temps $t_p \approx 1/\sqrt{s}$
 - ② L'hadrénisation $t_h \approx \frac{1}{\Lambda_{QCD}} \approx \sqrt{\Lambda_{QCD}/s} \approx 10^{-23} \text{ s}$. A haute énergie, $\sqrt{s} \gg \Lambda_{QCD} \Rightarrow t_p \ll t_h$

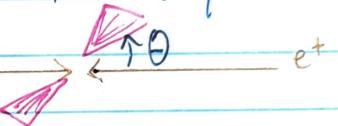
3.3 La formation de jets

→ Soit un quark $\in J_1$ d'impulsion p_1 , et un autre quark $\in J_2$ d'impulsion p_2 . Alors si $p_1 \cdot p_2 \gg \Lambda_{QCD}^2$, il ne peuvent pas se combiner.

\Leftrightarrow si $M[q_1 q_2] \gg \Lambda_{QCD}^2$, ils doivent appartenir à 2 jets différents.

↳ On peut donc déduire des jets hadroniques des infos sur les jets partoniques, et sur la paire $q\bar{q}$ d'origine.

→ Les dépendances angulaires de la production de 2 jets sont en $\alpha(1 + \cos^2\theta)$ comme le spin 1/2 des quarks (voir $d\sigma/d\cos\theta$ plus tard)



DEF | Un gluon dur est un gluon énergétique, produit à grand angle p/r à la paire d'origine

→ Les diagrammes à l'origine de 3 jets sont $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow q\bar{q}, g$



↳ Ces processus sont à l'ordre α_s^2 (pour la partie QCD)

3.4 Le pic du Z et haute énergie

→ Les expériences auprès du LEP (CERN) et du SLD (SLAC) ont opéré à des énergies $\sqrt{s} \sim M_Z$ sur le pic de production du boson Z. On peut alors modifier la contribution du photon, et l'interférence entre le Z et le γ .

(p 24 SM)

DEF | On définit le couplage vectoriel γ_Z et axial a_Z du Z aux fermions par :

$$\gamma_Z = I_{3,f} - 2Q \sin^2\theta_W$$

$$a_Z = I_{3,f}$$

→ Soit G_F la constante du Fermi, α la constante de structure fine et Γ_Z la longueur du boson Z . La section efficace est :

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{G_F^2 M_Z^4}{16\pi \Gamma_Z^2} \left\{ (1 + C_0^2) (\alpha_e^2 + \alpha_\nu^2) (\alpha_f^2 + \alpha_{\bar{f}}^2) + 8 \cdot C_0 \cdot \alpha_e \alpha_\nu \alpha_f \alpha_{\bar{f}} \right\}$$

$$= \frac{\pi \alpha^2 k^2}{8 \Gamma_Z^2} \left\{ (1 + C_0^2) (\alpha_e^2 + \alpha_\nu^2) (\alpha_f^2 + \alpha_{\bar{f}}^2) + 8 \alpha_e \alpha_\nu \alpha_f \alpha_{\bar{f}} C_0 \right\}$$

où $k = \sqrt{2} G_F M_Z^2 \approx 1,4$ est le rapport sans dimension des couplages faibles sur e-m, pris à $\alpha(M_Z) \approx 1/128$

↳ La distribution angulaire présente une contribution supplémentaire en $\cos\theta$ produite par l'interférence entre α_f et $\alpha_{\bar{f}}$. Ce terme induit une différence entre le nombre d'évenements dans l'hémisphère du fermion ($\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$) et de l'antifermion ($\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$) : c'est l'effet d'asymétrie avant-après A_{FB} généré par la brisure de la parité dans les interactions faibles.

→ En $E = M_Z$, la section efficace intégrée est

$$\sigma = \frac{4\pi \alpha^2 k^2}{3 \Gamma_Z^2} (\alpha_e^2 + \alpha_\nu^2) (\alpha_f^2 + \alpha_{\bar{f}}^2)$$

↳ Le bremsstrahlung (émission de γ réels par les e^\pm initiaux) étale et déplace légèrement le pic \Rightarrow modification de σ . Cependant, peu de modification du rapport R (même effet de correction radiative QED sur $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$).

→ Sur le pôle du Z , on a : $R_Z = \frac{\Gamma(Z \rightarrow \text{hadron})}{\Gamma(Z \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum_{j=1}^5 \frac{(\alpha_j^2 + \alpha_{\bar{j}}^2)}{\alpha_\mu^2 + \alpha_{\bar{\mu}}^2} \approx 20$

↳ Très supérieur à R [bonne énergie] car les charges faibles des quarks \approx celle des μ , alors que $Q_q < Q_\mu$ et $\alpha \sim Q^2$. Au delà du pic du Z , les contributions de l'échange d'un γ , et de l'interférence entre l'échange γ/Z sont non négligeables et R retombe.

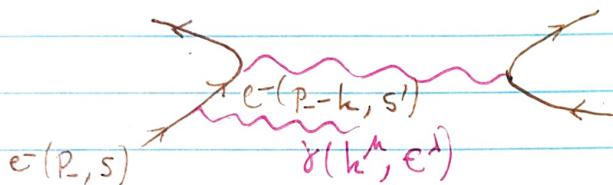
3.5 Corrections radiatives QED

DEF Les corrections radiatives sont la prise en compte d'effets dus aux ordres supérieurs comportant, ou non, des particules supplémentaires dans l'état initial et/ou final.

→ Chaque particule chargée pouvant émettre des γ , traiter ces radiations peut être compliqué.

3.5.1 Radiation par l' e^\pm incidents :

→ Considérons le diagramme suivant:



L'élément de matrice M s'écrit :

$$\begin{aligned}
 iM &= (\dots) \frac{i(-ie\gamma_\lambda)}{(P_- - k) - m_e} u(P, s) \cdot e^\lambda \\
 &= (\dots) \frac{\cancel{P}_- - \cancel{k} + m_e}{(\cancel{P}_- - \cancel{k})^2 - m_e^2} e^\lambda u(P, s) \quad (\cancel{P}_- - \cancel{k})^2 = P_-^2 + k^2 - 2P_- \cdot k \\
 &= (\dots) \frac{\cancel{P}_- - \cancel{k} + m_e}{-2P_- \cdot k} e^\lambda u(P, s) \quad \cancel{k}_1 \cdot \cancel{k}_2 = 2p \cdot q \\
 &= (\dots) \frac{-\cancel{P}_- + m_e}{2P_- \cdot k} e^\lambda u(P, s) \\
 &= (\dots) \frac{-e}{2P_- \cdot k} (-\cancel{P}_- + 2P_- \cdot \epsilon + m_e \cancel{\epsilon}) \cdot u(P, s) \\
 &= (\dots) \frac{-e}{2P_- \cdot k} (2P_- \cdot \epsilon - \cancel{P}_- (\cancel{P}_- - m_e)) u(P, s) \quad (\cancel{P}_- - m_e) u(P, s) = 0 \\
 &= (\dots) (-e) \frac{\epsilon - P_-}{P_- \cdot k} u(P, s)
 \end{aligned}$$

→ De manière analogue, $M \left[\begin{smallmatrix} e^+ & e^- \\ \bar{e}^+ & \bar{e}^- \end{smallmatrix} \right]$ donne

$$iM = (\dots) \frac{e^+ \epsilon \cdot P_+}{P_+ \cdot k} \bar{u}(P_+, s')$$

→ En considérant les 2 sources, la correction à l'amplitude à l'ordre le plus bas est :

$$M_{\text{rad}} = (-e) \left(\frac{E \cdot P_+}{P_+ \cdot k} - \frac{E \cdot P_-}{P_- \cdot k} \right) M_{\text{born}}$$

$$= (-e) \left(\frac{E \cdot P_+}{P_+ \cdot k} - \frac{E \cdot P_-}{P_- \cdot k} \right) \cdot \frac{Q^2 e^2 \pi(P_+) \gamma^\mu u(P_-)}{q^2} \bar{u}(P_q) \gamma_\mu v(P_{q'})$$

↳ On peut étudier cette factorisation pour un # L de photons.

DEF

On définit le radiateur à photon $\Delta\gamma$ selon

$$\Delta\gamma \equiv \prod_{i=1}^L \left\{ (-e) \left(\frac{e_i \cdot P_+}{P_+ \cdot k_i} - \frac{e_i \cdot P_-}{P_- \cdot k_i} \right) \right\}$$

PROP Des bremsstrahlung d'un lepton incident peuvent toujours se factoriser selon : $M_{\text{rad}} = \Delta\gamma \cdot M_{\text{born}}$

→ Pour la section efficace avec radiation d'un seul photon, on a :

$$d\sigma = e^2 \left(\frac{P_+}{P_+ \cdot k} - \frac{P_-}{P_- \cdot k} \right) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 k_0} d\sigma_{\text{born}}$$

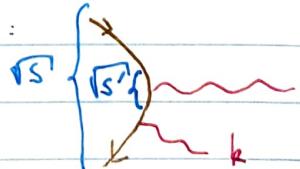
↳ On observe une structure en double pôle qui correspond à l'émission collinéaire au positon ($P_+ / P_+ \cdot k$) et à l'émission ($-P_- / P_- \cdot k$). Les divergences infrarouge ($k \rightarrow 0$) sont annulées par la prise en compte de la correction de vertex, qui se factorise aussi $P_\pm \cdot k \rightarrow 0$ si $k \rightarrow 0$: divergence soft
 $\gamma \parallel e^+$: divergence collinéaire

→ L'émission d'un γ par une des particules entrantes peut être vu comme une diminution de l'énergie disponible le CM, s :

$$s = (P_- + P_+)^2 = 4E \cdot E_+$$

$$\hookrightarrow s' = 4(E - k_0) \cdot E_+$$

Ceci est rendu possible par la factorisation du $\Delta\gamma$. Cette approche est correcte même pour l'émission de photons énergétiques.



→ On peut réexprimer la section efficace diff. comme

$$\begin{aligned} d\sigma_{e+e \rightarrow q\bar{q}\gamma} &= \frac{1}{2s} |\mathcal{M}_{\text{had}}|^2 \cdot \frac{d^3 p_q}{(2\pi)^3 2p_q^0} \cdot \frac{d^3 p_{\bar{q}}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{q}}^0} \cdot \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k^0} (2\pi)^4 \delta(p_+ + p_- - p_q - p_{\bar{q}} - k) \\ &\simeq e^2 \left\{ \frac{p_+}{p_+ \cdot k} - \frac{p_-}{p_- \cdot k} \right\}^2 \cdot \frac{1}{2s} |\mathcal{M}_{\text{born}}|^2 \\ &\quad \times d^3 p_q \cdot d^3 p_{\bar{q}} \cdot d^3 k \cdot (2\pi)^4 \delta(p_+ + p_- - p_q - p_{\bar{q}}) \end{aligned}$$

→ Pour un radiation colinéaire ($\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ et $d\cos\theta \approx d\theta^2$), on a

$$\left\{ \frac{p_+}{p_+ \cdot k} - \frac{p_-}{p_- \cdot k} \right\}^2 = -\frac{2 p_+ \cdot p_-}{(p_+ \cdot k)(p_- \cdot k)}$$

$$\text{Or, } p_+ \cdot k = E_- k_0 - \vec{p}_- \cdot \vec{k} = E_- k_0 (1 - \cos\theta) \approx E_- k_0 \cdot \theta^2/2$$

$$\text{Ainsi, } d\sigma_{e+e \rightarrow q\bar{q}\gamma} \propto \frac{p_- \cdot p_+}{p_+ \cdot k} \cdot \frac{d\theta^2}{E_- k_0 \theta^4/2} \sim \frac{d\theta^2}{\theta^4} \propto d\ln\theta^2$$

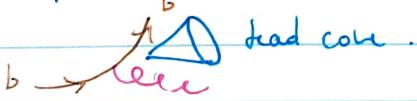
?

↳ L'angle minimal θ_{\min} n'atteint pas 0 car $m_e \neq 0$. L'angle de diffusion minimum est donné par le facteur de Lorentz :

$$\theta_{\min} \sim 1/\gamma \quad \text{avec } \gamma = E/m_e = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \gg 1$$

DEF On appelle dead cone l'angle mort autour de la particule massive incidente, dans lequel aucun boson n'est émis.

↳ plus la particule est massive, plus le cone est grand



→ Pour un γ ayant une fraction d'impulsion $\gamma = k/p$, on a

$$d\sigma = \frac{\alpha}{\pi} \frac{d\gamma}{\gamma} \ln \left[\frac{E_b^2}{m_e^2} \right] \cdot d\sigma_{\text{born}} \quad (\text{pour un } \gamma \text{ mou})$$

Pour k non négligeable devant p , on a :

$$d\sigma = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{d\gamma}{\gamma} \left(1 + (1-\gamma)^2 \right) \ln \left[\frac{E_b^2}{m_e^2} \right] \cdot d\sigma_{\text{born}}$$

↳ C'est l'approx. colinéaire : peaking approximation, valable tant que $\theta \approx m_e/E_b \ll 1$. Tant que le recouvrement de l'espace des phénomènes reste faible, l'approx. est correcte.

3.5.2 Effet sur le pic du Z :

→ Ces corrections radiatives entraînent 2 effets :

1) Un déplacement de la valeur du pic du Z.

2) Un changement de la cinétique, entraînant un radiation return. Le LEP II fonctionnait à $\sqrt{s} > m_Z$, mais l'émission de photons durs par l'état initial faisait qu'il n'y avait pas de pic. La section efficace $\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})$ était donc grandement favorisée.

De plus, l'énergie disponible dans chaque faisceau est :

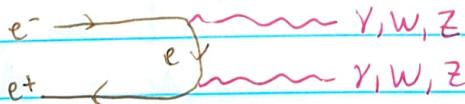
$$\sigma(s) = \int_s^\infty \sigma(s') R(s,s') ds'$$

où $R(s,s')$ est la proba d'avoir une émission de photons faisant passer l'énergie de $s \mapsto s'$.

→ Cette diminution de s par l'émission de γ collinéaire est utilisée dans l'expérience BELLE. Ceci permet d'étudier certaines résonances sans changer le régime des e^+e^- .

3.6 Au delà du Z

→ Le LEP II avait $\sqrt{s} \approx 200 \text{ GeV}$, ouvrant de nouveaux canaux de production de paires de fermions ou de bosons



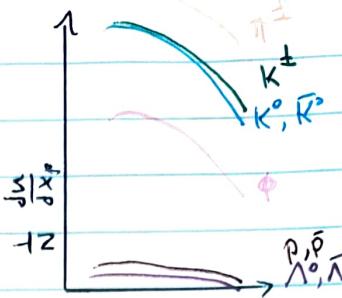
3.7 Production de particules

→ On étudie les taux relatifs de production de particules de façon incluse et séparément pour les hadrons chargés identifiés (π^\pm, K^\pm, p) ou se désintégrant en particules chargées (K^0, ϕ, Λ)

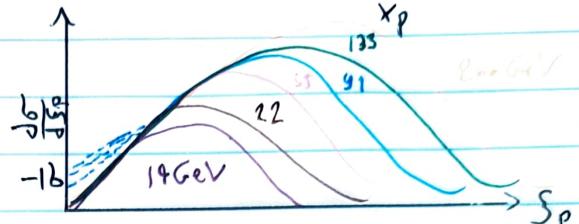
DEF On définit les fractions d'impulsion x_p et s_p par

$$x_p \equiv \frac{p}{E_{beam}} = \frac{2p}{\sqrt{s}} \quad \text{et} \quad s_p \equiv \log\left(\frac{1}{x_p}\right)$$

- Les spectres de production de hadrons ont une forme similaire mais le taux de prod. dépend fortement de la masse de la particule :
 $m_{\pi} < m_{K^{\pm}} < m_{K^0, \bar{K}^0} < m_{\rho} < m_{\chi_0}$



- En considérant $\xi_p = \ln(1/x_p)$, on se concentre sur la prod. des particules à $x_p \ll 1 \Leftrightarrow \xi_p \gg 1$.



↳ La distribution tombe pour de grandes valeurs de ξ_p : les gluons ont au moins en moins d'énergie et finissent par un plus petit de pair $q\bar{q}$.

3.7.1 Les fonctions de fragmentation :

- Considérons la production d'un certain hadron h : $e^+e^- \rightarrow hX$. Nous ne sommes plus dans un cas inclusif. La section efficace nécessite l'introduction de nouveaux objets.

DEF On définit la fraction d'énergie ζ selon

$$\zeta \equiv \frac{E_h}{E_{beam}} = \frac{2 E_h}{\sqrt{s}}$$

On définit également les fonctions de fragmentation $D_q^h(\zeta)$. Il s'agit de la probabilité qu'un hadron h soit trouvé dans les débris d'un quark portant une fraction d'énergie ζ .

- Les $D_q^h(\zeta)$ n'ont du sens que dans les productions multiples de hadrons (loin de la région des résonances).

- La section efficace peut alors s'écrire comme

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} (e^+e^- \rightarrow hX) = \sum_q \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) [D_q^h(\zeta) + D_{\bar{q}}^h(\zeta)]$$

↳ la somme porte sur toutes les sorties de quarks

↳ il y a création $q\bar{q}$ puis fragmentation $q\bar{q} \rightarrow hX$

→ La conservation des probas \Rightarrow 3 règles sur les $D_q^h(z)$:

Prop ① Tout quark doit finir dans un hadron:

$$\sum_h \int_{z_{\min}}^1 D_q^h(z) dz = 1 \text{ avec } z_{\min} = \frac{2 m_h}{\sqrt{s}}$$

② Un hadron h provient toujours de quarks et d'anti-quarks:

$$\sum_q \int_{z_{\min}}^1 \{D_q^h(z) + D_{\bar{q}}^h(z)\} dz = n_h$$

avec n_h est la multiplicité moyenne du hadron h dans l'ensemble hadronique formé par q et \bar{q} .

③ L'intégrale sur l'impulsion du q et \bar{q} doit se retrouver intégralement dans la somme des hadrons:

$$\sum_h \int_{z_{\min}}^1 z \cdot \{D_q^h(z) + D_{\bar{q}}^h(z)\} dz = 1$$

→ Pour être indépendant de s , on normalise par $e^+e^- \rightarrow X$:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dz} (e^+e^- \rightarrow hX) = \sum_q e_q^2 \frac{(D_q^h(z) + D_{\bar{q}}^h(z))}{\sum_p e_p^2}$$

DEF La paramétrisation de Peterson est un modèle proposé pour $D_Q^h(z)$:

$$D_Q^h(z) = N(\epsilon) \frac{1}{z \left(1 - \frac{1}{z} - \frac{\epsilon}{1-z}\right)^2}$$

où $N(\epsilon)$ fixe la normalisation et $\epsilon = m_q^2/m_Q^2$ est (en pratique) laitée comme paramètre libre.

↪ Le modèle de Peterson considère un hadron formé d'un quark léger q et d'un quark lourd Q

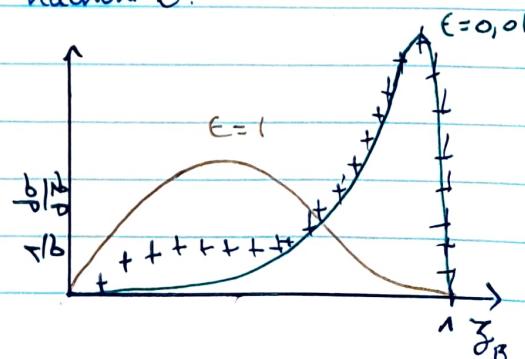
→ Exemple: Fragmentation du quark b en hadron B .

↪ quark léger ($\text{pic} \approx 1/2$)

↪ quark lourd ($\text{pic} \rightarrow 1$)

→ On remarque que:

$$\lim_{z \rightarrow z'_0} D_Q^h(z) \rightarrow 0$$



3.7.2 Production de quarks lourds :

- On considère les quarks b et t . Leur masse ne peuvent plus être négligées (au LEP et SLC). On note \bar{Q} un quark lourd.
- Au tree level, $e^+e^- \rightarrow Q\bar{Q}$, on observe 2 effets du même :

① La conservation de l'énergie impose $\sqrt{s} < 2m$. La vitesse est donnée par $\beta = \sqrt{1 - 4m^2/s}$. La section efficace est alors

$$\frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow Q\bar{Q})}{dQ} = N_c \frac{\alpha^2}{4s} \beta \left\{ 1 + \cos^2 \theta + (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \right\} Q_i^2$$

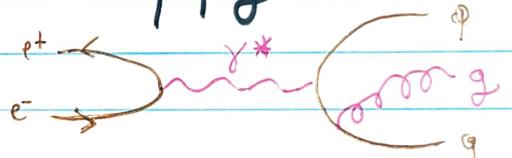
↳ Lorsque $\beta \rightarrow 1$, on retrouve bien l'expression (p30).

② Le terme $(1 - \beta^2) \sin^2 \theta$ correspond aux diffusions inversant l'hélicité, ce qui n'est pas du tout vrai en présence de masse.

3.8 Section efficace $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$

→ Page 29 on avait obtenu pour $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ l'expression suivante :

$$|CM|^2 = \frac{8e^4 N_c Q_i^4}{s^2} \left\{ (P_+ \cdot P_q)(P_- \cdot P_{\bar{q}}) + (P_+ \cdot P_{\bar{q}})(P_- \cdot P_q) \right\} \\ + m_q^2 (P_+ \cdot P_-) + m_{\bar{q}}^2 (P_q \cdot P_{\bar{q}}) + 4 m_q^2 m_{\bar{q}}^2$$



→ En négligeant les masses, $|CM|^2$ pour $e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow \gamma^*(q) \rightarrow q + \bar{q} + g$ est $|CM|^2 = 8G_F (4\pi)^3 \alpha^2 \alpha_S N_c Q_i^2$

$$\times \frac{(P_+ \cdot P_q)^2 + (P_+ \cdot P_{\bar{q}})^2 + (P_- \cdot P_q)^2 + (P_- \cdot P_{\bar{q}})^2}{(P_+ \cdot P_-)(P_q \cdot P_{\bar{q}})(P_{\bar{q}} \cdot P_g)}$$

↳ En effet, le terme $1/s^2$ n'écrit

$$S^2 = (P_+ + P_-)^2 (P_q + P_{\bar{q}})^2 = 4(P_+ \cdot P_-)(P_q \cdot P_{\bar{q}})$$

↳ De plus, on peut réécrire :

$$(P_+ \cdot P_q)^2 + (P_- \cdot P_{\bar{q}})^2 = \frac{1}{2} \left\{ (P_+ \cdot P_q)^2 + (P_+ \cdot P_{\bar{q}})^2 + (P_- \cdot P_q)^2 + (P_- \cdot P_{\bar{q}})^2 \right\} \\ = (P_+ \cdot P_{\bar{q}})^2 + (P_- \cdot P_q)^2$$

Le radiateur du gluon Δg est donné par

$$\Delta g \equiv \frac{1}{T} \sum_{i=1}^l \left\{ -\alpha_S \epsilon^a \left(\frac{\epsilon_i \cdot P_q}{P_q \cdot k} - \frac{\epsilon \cdot P_{\bar{q}}}{P_{\bar{q}} \cdot \epsilon} \right) \right\}$$

DEF

→ Ayant négligé les masses, on a

$$x_q = \beta_q = E_q / E_b ; x_{\bar{q}} = \beta_{\bar{q}} = E_{\bar{q}} / E_b \text{ et } x_g = E_g / E_b$$

En intégrant sur les 3 angles indépendants, on obtient

$$\cancel{\frac{d^2\sigma_{q\bar{q}g}}{dx_q dx_{\bar{q}}}} = \sigma_{q\bar{q}} C_F \frac{x_s}{2\pi} \frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2}{(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})} \text{ symétrique sous } (q \leftrightarrow \bar{q}),$$

car symétrie CP de QCD.

↳ Les fractions d'énergie n'étant pas invariantes de Lorentz, on définit

$$x_i \equiv 2 q \cdot p_i / q^2$$

→ La conservation de l'énergie impose

$$\begin{cases} x_q + x_{\bar{q}} + x_g = 2 \\ 1 - x_i = \frac{1}{2} x_j x_k (1 - \cos \theta_{jk}) , \quad i \neq j \neq k , \quad i \neq k . \end{cases}$$

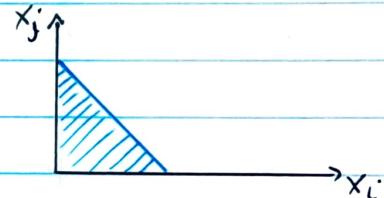
Ainsi, $x_i + x_j \geq 1$ pour $i \neq j$. Si un parton a une énergie maximale ($x_i = 1$), les 2 autres sont colinéaires ($\theta_{jk} = 0$). L'impulsion de l'état initial étant nulle dans le plan transverse, l'état final tient sur un plan :

$$\theta_{q\bar{q}} + \theta_{\bar{q}g} + \theta_{qg} = 2\pi$$

↳ Le domaine d'intégration est donc

$$0 \leq x_q, x_{\bar{q}} \leq 1$$

$$1 \leq x_q + x_{\bar{q}}$$



③ Singularités :

→ L'équation ~~☆~~ présente 2 types de singularités infrarouges.

→ un pôle simple lorsque $x_q \rightarrow 1^-$ ou $x_{\bar{q}} \rightarrow 1^-$

→ un pôle double lorsque les 2 quarks atteignent simultanément 1 :

$$x_q \rightarrow 1^- \quad \left\{ \Leftrightarrow \int (P_{\bar{q}} + P_g)^2 = 2 (P_{\bar{q}} \cdot P_g) \rightarrow 0 \right.$$

$$x_{\bar{q}} \rightarrow 1^- \quad \left\} (P_{\bar{q}} + P_g)^2 = 2 (P_{\bar{q}} \cdot P_g) \rightarrow 0 \right.$$

DEF → La première singularité est une singularité de masse, liée à

l'émission d'un gluon colinéaire. Elle disparaît pour $m_g > 0$

→ La 2ème singularité est liée à l'émission d'un gluon soft, c'est à dire lorsque $P_g \rightarrow 0$

→ Explications ces singularités:

$$\frac{x_q^2 + \bar{x}_q^2}{(1-x_q)(1-\bar{x}_q)} = \frac{2}{(1-x_q)(1-\bar{x}_q)} - \frac{1+x_q}{1-\bar{x}_q} - \frac{1+\bar{x}_q}{1-x_q}$$

Ces singularités sont issues du propagateur des quarks:

$$\cancel{P_q + P_{\bar{q}}} \cancel{m_P} \frac{1}{(P_q + P_{\bar{q}})^2} = \frac{1}{2E_q E_{\bar{q}} (1 - \cos \theta_{q\bar{q}})} = \frac{1}{s} \frac{1}{1 - x_{\bar{q}}}$$

→ Singularité simple: $E_q \rightarrow 0$ mais $\theta_{qg} \neq 0 \neq \theta_{\bar{q}g}$

→ La contribution IR à la section efficace totale est:

$$\sigma \sim \alpha_s \sim \int \frac{dx_q dx_{\bar{q}}}{(1-x_q)(1-\bar{x}_{\bar{q}})} \sim \alpha_s \int \frac{dx_q dx_{\bar{q}}}{x_q^2 (1 - \cos \theta_{qg}) (1 - \cos \theta_{\bar{q}g})}$$

$$\sim \int \frac{d\zeta}{\zeta} \frac{du}{1-u} \quad \text{où } \zeta = x_g \\ \text{pole simple} \quad u = \cos \theta_{qg}$$

→ C'est bien un pôle simple car $u \neq \pm 1$

→ Singularité double: $E_g \rightarrow 0$ et $\theta_{qg} \rightarrow 0 / \theta_{\bar{q}g} \rightarrow 0$

→ Dans ce cas, $u \rightarrow \pm 1$ et on a un double pôle.

$$\sigma \sim \alpha_s \int \frac{d\zeta}{\zeta} \int \frac{d\theta}{\theta}$$

→ En pratique, en dessous d'un certain seuil, $|q\bar{q}g\rangle$ théorique sera englobé dans un $|q\bar{q}\rangle$ physique.

DEF On définit l'angle de Ellis-Karliner Θ_{EK} selon:

$$\cos \Theta_{EK} = \frac{x_2 - x_3}{x_1}$$

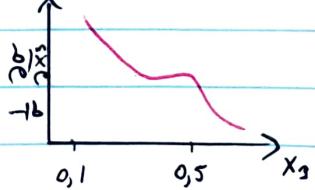
→ Il représente l'angle entre les jets 1 et 2 dans le repère constitué des jets 2 et 3. Il permet de mettre en évidence le caractère vectoriel des gluons.

→ La conservation de l'énergie ($x_1 + x_2 + x_3 = 2$) impose que:

1) $x_1 > 2/3$ et $x_2 > 1/2$

2) $x_3 < 1/2$

3) la barre sur $x_3 \sim 0,4$ provient de $x_g \leq 1/2$
qui décroît et $x_{q,\bar{q}} \leq 1/2$ qui croît.



3.8.1 Approximation colinéaire

→ Exprimons σ en fonction des gluons : $\bar{z} = x_g$ et $t = 1 - \cos(\theta_{q\bar{q}})$.

$$\text{Alors: } x_g = 2(1-\bar{z}) ; \quad x_{\bar{q}} = 2 - \bar{z}(2-\bar{z})t ; \quad dx_g dx_{\bar{q}} = \frac{\bar{z}(2-\bar{z})}{2-3t} d\bar{z} dt$$

$$\text{On peut écrire } \frac{d^2\sigma}{dx_g dx_{\bar{q}}} = C_F \alpha_S (x_g^2 + x_{\bar{q}}^2) / (1-x_g)(1-x_{\bar{q}}) \text{ comme} \\ \frac{d^2\sigma_{q\bar{q}g}}{d\bar{z} dt} = \bar{C}_{q\bar{q}g} C_F \frac{\alpha_S}{2\pi} \frac{4[1+(1-\bar{z})^2]^{1/2} - 4\bar{z}(2-\bar{z})t + \bar{z}^2(2-\bar{z})^2 t^2}{\bar{z} t (2-t) (2-3t)^2}$$

Pour de faibles angles (limite colinéaire, $t \approx \theta^2/2$), on a

$$d^2\sigma = \bar{C}_{q\bar{q}g} C_F \frac{\alpha_S}{2\pi} \left(1 + (1-\bar{z})^2\right) \frac{d\bar{z}}{\bar{z}} \frac{d\theta^2}{\theta^2} \quad // p36, peaking approx$$

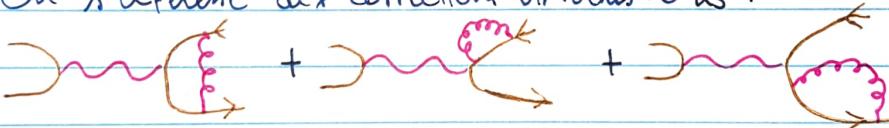
DEF Le facteur de splitting, P_{gg} est défini selon :

$$\frac{1 + (1-\bar{z})^2}{\bar{z}}$$

↪ La proba pour un quark de se séparer en un quark de fraction d'impulsion \bar{z} et un gluon est donnée par $N_c \cdot \frac{C_F \alpha_S}{2\pi} \cdot P_{gg}$

3.8.2 Correction radiative QCD virtuelles

→ On s'intéresse aux corrections virtuelles $\sim \alpha_S$:



→ Les divergences IR s'annulent lorsque l'on somme sur $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ et $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$. Considérons la méthode de la régularisation dimensionnelle.

DEF L'opérateur Casimir $H(\epsilon)$ dans la rep. fondamentale avec $n=4-2\epsilon$ ($\epsilon < 0$) est $H(\epsilon) = \frac{3(1-\epsilon)^2}{(3-2\epsilon)\Gamma(2-\epsilon)} = 1 + O(\epsilon)$

$$\text{où } \Gamma(z) \equiv \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$$

↪ La section efficace se réécrit comme :

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g) = \bar{C}_{q\bar{q}g} C_F \frac{\alpha_S}{2\pi} H(\epsilon) \int dx_g dx_{\bar{q}} \frac{x_g^2 + x_{\bar{q}}^2 - \epsilon(2-x_g-x_{\bar{q}})}{(1-x_g)^{1+\epsilon} (1-x_{\bar{q}})^{1+\epsilon}}$$

$$= \bar{C}_{q\bar{q}g} C_F \frac{\alpha_S}{2\pi} H(\epsilon) \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + \frac{19}{2} + O(\epsilon) \right\}$$

Les poles en $1/\epsilon$ sont les singularités IR (collinéaire et soft).
 ↳ le pole en $1/\epsilon^2$ est la singularité collinéaire ou soft.

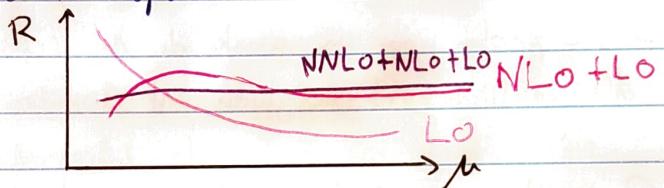
→ Les corrections virtuelles font apparaître des divergences UV:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = \sigma_{q\bar{q}} \text{CF} \frac{\alpha_s}{2\pi} H(\epsilon) \left\{ -\frac{8}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 + \mathcal{O}(\epsilon) \right\}$$

↳ Les poles s'annulent parfaitement!

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow x)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu\mu)} = 3 \sum_q Q_q^2 \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right) \text{ au tree level.}$$

→ Aux ordres supérieurs dépendent explicitement de l'échelle de renormalisation μ , en plus de la dépendance implicite $\alpha_s = \alpha_s(\mu)$. Cependant, cette dépendance diminue avec la prise en compte progressive d'ordre supérieur:



3.9 Algorithmes de reconstruction de jets

→ On tente de regrouper les particules de l'état final de façon à ce que la structure "visible" expérimentalement soit reproduite.

↳ L'algorithme peut être appliquée à 3 niveaux :

- 1) partons générés
- 2) particules générées de l'état final
- 3) particules reconstruites dans un détecteur.

3.9.1 Algorithme de JADE:

→ Soit les particules i, j , d'impulsion p_i, p_j . Si, étant donné un seuil y_{cut} , on a $M_{ij}^2 \equiv (p_i + p_j)^2 < y_{cut} \cdot s$, alors i et j sont combinées dans une pseudo-particule d'impulsion $p_{ij} \equiv p_i + p_j$.
 ↳ La procédure s'arrête lorsque toutes les particules sont telles que $M_{ijk\dots}^2 < y_{cut} \cdot s$.

47
 ↳ Les pseudo-particules restantes sont identifiées à des jets et leur nombre est la multiplicité de jet n
 $\Rightarrow y_{cut}$ fixe la valeur à laquelle un événement particulier passe de l'état n -jet à $(n+1)$ -jet.

? → JADE a des corrections d'hadronisation faible ($\sim 5\%$ à $s = m_Z^2$), donc est utilisé au LEP.

Son point faible est le suivant: si 2 gluons sont émis à grand angle p/r aux quarks initiaux, ils peuvent former un 3^e jet artificiel



↳ on ne peut inclure les techniques de resummation des gluons soft dans les simulations.

→ Exemple: $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ en milieu partonique

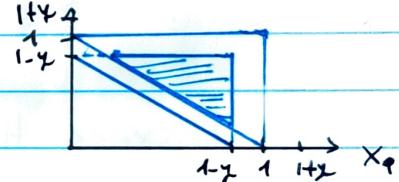
$$\rightarrow M_{ij}^2 = E_i E_j (1 - \cos \theta_{ij}) = s (1 - x_h)$$

→ Un événement aura 3 jets si chaque parton forme un jet:

$$x_q < 1-y$$

$$x_{\bar{q}} < 1-y$$

$$x_g < 1-y \quad (\Rightarrow x_q + x_{\bar{q}} > 1+y)$$



3.9.3 Multiplicité de jets:

→ Experimentalement, le # de jet se calcule en se basant sur les impulsions des hadrons de l'état final (et non des partons). Comparons ces 2 grandeurs.

DEF On définit les ratio 2-jets f_2 et ratio 3-jets f_3 par

$$f_2 \equiv \frac{\sigma_{\text{jets}}}{\sigma_{2\text{-jet}} + \sigma_{3\text{-jet}}} = \sigma_2 / \sigma_{\text{tot}} \quad \text{et} \quad f_3 \equiv \frac{\sigma_{3\text{-jet}}}{\sigma_{2\text{-jet}} + \sigma_{3\text{-jet}}} = \sigma_3 / \sigma_{\text{tot}}$$

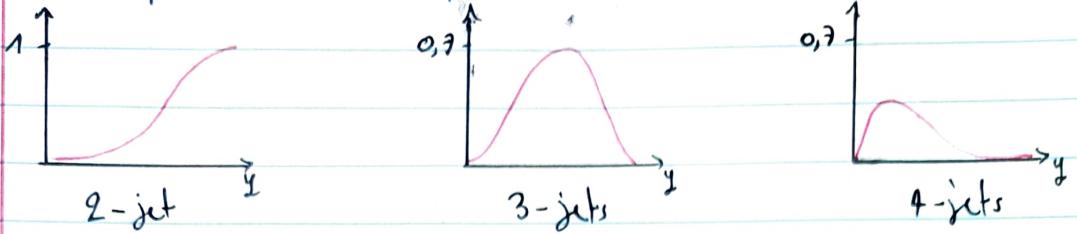
↳ $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{q\bar{q}} \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right)$ est la section efficace totale à l'ordre α_s :

$$\sigma_3 = \int d\sigma_{q\bar{q}g} = C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_{x_g}^{1-y} \frac{dx_g}{1-x_g} \int_{1+y-x_g}^{1-y} \frac{dx_{\bar{q}} (x_g^2 + x_{\bar{q}}^2)}{1-x_{\bar{q}}}$$

$$= C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(4 L_{i_2} \left[\frac{y}{1-y} \right] + (3-6y) \ln \left[\frac{y}{1-2y} \right] + 2 \ln^2 \left[\frac{y}{1-y} \right] - 6y - \frac{3}{2} y^2 - \frac{\pi^2}{3} + \frac{5}{2} \right)$$

↳ fonction de Spence $L_{i_2}(z) = - \int_0^z du \frac{\ln(u)}{1-u}$

- Si on fait varier \sqrt{s} en gardant y fixé, on a $f_i(s, \alpha_s, y) = f_i(\alpha_s(s), y)$
 ↳ On peut mesurer la dépendance en s de $\alpha_s(s)$



3.10 Structure de l'état final hadronique

- L'étude de la structure de l'état final hadronique (event shape) calcule en général plus values, correspondant à des observables, telle qu'elles s'annulent pour un cas idéal (2 jets, dos à dos).

① Les observables Thrust et M_H :

DEF On définit la variable thrust T pour un événement par:

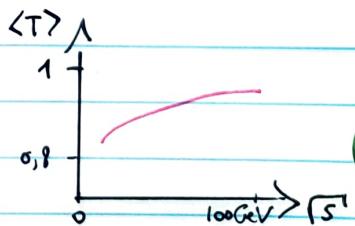
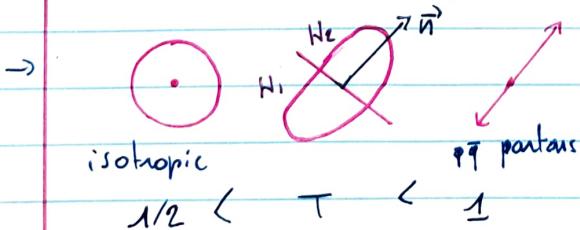
$$T = \max_{\vec{n}} \left\{ \frac{\sum_i |\vec{p}_i \cdot \vec{n}|}{\sum_i |\vec{p}_i|} \right\}$$

L'axe du thrust \vec{n}_T est le vecteur unitaire \vec{n} qui maximise l'expression. Un plan passant par l'origine, $\perp \vec{n}_T$ divise l'événement en 2 hémisphères : H_1 et H_2 .

- La valeur $T = 1$ correspond au cas idéal

DEF La variable M_H est définie comme le max. des $M(p_i) \in H_j$

$$M_{Hj} \equiv \max \{ M(p_i) / p_i \in H_j \}$$



- La mesure du thrust permet de tester le caractère vectoriel du gluon

DEF En construisant la quantité

$$B_h \equiv \frac{\sum_{i \in h} |\vec{P}_i \times \vec{n}_T|}{2 \sum_i |\vec{P}_i|}$$

pour chaque hémisphère h , on définit les variables de Broadening B_T et B_W :

$$B_T \equiv B_1 + B_2 \quad \text{et} \quad B_W \equiv \max\{B_1, B_2\}$$

→ Lorsque $\sqrt{s} \gg \alpha_S v$ et le nombre de parton showers également.

3.11 Comparaison des mesures de α_S

- Dans le cadre du QCD, le couplage α_S est indépendant de la masse des quarks. Actuellement, on mesure $\alpha_S(m_Z) = 0,1185 \pm 0,0006$.
- Même aux valeurs les plus hautes en énergie accessible expérimentalement l'IT reste bien plus importante que les Iem.

3.12 Test de la structure de jauge de QCD

- La distribution angulaire des événements à 2 jets a mis en évidence le spin 1/2 des quarks, et celle des événements à 3 jet (et la mesure des event shapes) ont mis en évidence le spin 1 des gluons.
- En revanche, la structure non-abélienne (structure de jauge) du groupe n'a pas été mise en évidence directement.

→ Au LO, les 3 vertex permis par QCD sont:

↳ En les elevant au carré, les relations suivantes sont utilisées:

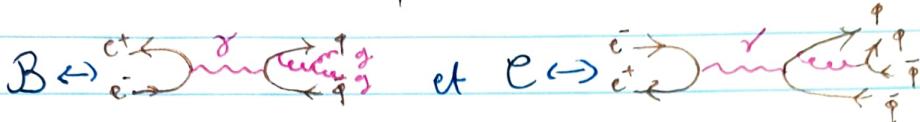
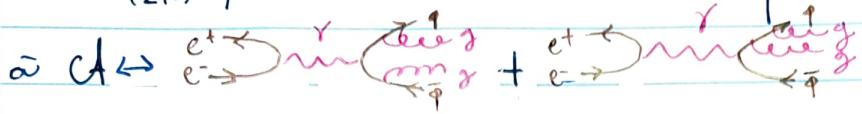
$$\textcircled{1} \sum_a (\lambda_{ik}^a \lambda_{kj}^a) = 4 C_F \delta_{ij} \quad \text{avec } C_F = T_F \frac{N^2 - 1}{N} = 4/3 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ lorsque} \\ \text{SU}(N) = \text{SU}(3) \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{2} \sum_{cd} f^{acd} f^{bcd} = C_A \delta_{ab} \quad \text{avec } C_A = 2 T_F N = 3$$

$$\textcircled{3} \text{Tr}(\lambda^a \lambda^b) = 4 T_F \delta^{ab} \quad \text{avec } T_F = 1/2$$

→ Vérifions la structure du groupe avec les évenements à 4 jets. La section efficace peut s'écrire sous la forme :

$$\text{d}\sigma = \left(\frac{\alpha_s}{2\pi}\right)^2 \left\{ C_F^2 C_F + C_F C_A B + C_F T_F N_f C \right\}$$



→ Dans une théorie abélienne, $B = 0$

Les fonctions C_F, B, C sont fonction de $S_{ij} = (p_i + p_j)^2$, la masse invariante des paires de partons, et donc indépendante du groupe de jauge.

→ On étudie les corrélations angulaires entre jets. On les classe selon $E_4 < E_3 < E_2 < E_1$. Alors, les jets 1 et 2 sont presque toujours issus des quarks. On s'attend à ce que les dépendances angulaires soient \neq pour $q \rightarrow qg$ ($\text{spin } 1/2 \rightarrow 1+1/2$), $g \rightarrow gg$ ($1 \rightarrow 1+1$) et $g \rightarrow q\bar{q}$ ($1 \rightarrow 1/2+1/2$)

DEF L'angle formé entre les plans $(1, 2)$ et $(3, 4)$ est l'angle de Bengtsson-Zernow X_{BZ} et est donné par :

$$\cos X_{BZ} = \left| \frac{(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot (\vec{p}_3 \times \vec{p}_4)}{|\vec{p}_1 \times \vec{p}_2| |\vec{p}_3 \times \vec{p}_4|} \right|$$

L'angle entre les vecteurs $(p_1 - p_2)$ et $(p_3 - p_4)$ est l'angle de Nachtmann-Reiter modifié $(\text{H})_{NR*}$ et est donné par

$$\cos (\text{H})_{NR*} = \left| \frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot (\vec{p}_3 - \vec{p}_4)}{|\vec{p}_1 - \vec{p}_2| |\vec{p}_3 - \vec{p}_4|} \right|$$

→ Les effets d'hadronisation sont ajustés par Monte-Carlo. En ajustant les données, sur le groupe $SU(3)$ est compatible avec les mesures. En particulier, les groupes abéliens sont exclus à 120° !

4

LA DIFFUSION E⁻-P

- Ce chapitre couvre la diffusion profondément inélastique d'un électron sur un proton, et plus généralement d'un lepton chargé sur un nucléon.
- Les mesures relatives à ce sujet constituent le test le plus contraint et le plus probant de QCD.

4.1 De l'atome au nucléon

- Passons en revue les mises en évidence des structures de plus en plus petites dans le noyau atomique.

4.1.1 Les noyaux atomiques : l'expérience de Rutherford

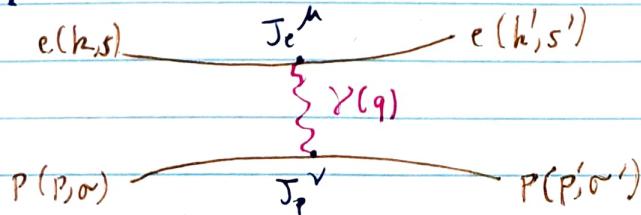
- En 1909, Geiger et Marsden sous la direction de Rutherford découvrent l'existence de noyaux atomiques en bombardant des feuilles de métal par des rayons α , en observant un nombre plus important que prévu de particules α diffusées à grand angle.

- La section efficace diff. pour la diffusion d'un particule de spin 0 sur un noyau de spin 0 est (recul du noyau négligeable) :

$$\frac{d\sigma_{Ruth}}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4 E_\alpha^2} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad \text{avec } \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \text{ pour un noyau de charge } Z \cdot e$$

4.1.2 Section efficace de Dirac :

- Commençons par envisager le cas simplifié de la diffusion d'un e^- sur une cible ponctuelle de spin $1/2$ et de charge unitaire. La section efficace correspondante est appelée section efficace de Dirac.



① Calcul de la section efficace du Dirac :

$$\rightarrow M = \langle k', s' | J_\mu e | k, s \rangle \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \langle p', \sigma' | J_\nu p | p, \sigma \rangle$$

où s, s', σ, σ' sont les états d'hélicité.

→ Soit $u(k, s)$ et $u(k', s')$ les spinors des électrons et $u(p, \sigma)$, $u(p', \sigma')$ ceux des protons.

→ Le courant leptonnique :

$$\langle k', s' | J_\mu e | k, s \rangle = -ie \bar{u}(k', s') \gamma_\mu u(k, s)$$

→ Le courant hadronique :

$$\langle p', \sigma' | J_\nu p | p, \sigma \rangle = -ie \bar{u}(p', \sigma') \gamma_\nu u(p, \sigma)$$

$$\hookrightarrow M = \frac{e^2}{q^2} \bar{u}(k', s') \gamma_\mu u(k, s) \cdot \bar{u}(p', \sigma') \gamma_\nu u(p, \sigma)$$

DEF On introduit le tenseur leptonnique $L^{\mu\nu}$ et le tenseur hadronique $W^{\mu\nu}$ tels que

$$|M|^2 = \frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \sum_{s, s', \sigma, \sigma'} |M|^2$$

→ Le tenseur leptonnique vaut alors

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{s, s'} J_e^\mu J_e^\nu = \frac{1}{2} \sum_{s, s'} [\bar{u}(k', s') \gamma^\mu u(k, s)] \cdot [\bar{u}(k', s') \gamma^\nu u(k, s)]^* \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s, s'} [\bar{u}(k', s')_\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta} u(k, s)_\beta \bar{u}(k, s)_\gamma \gamma^\nu_{\gamma\delta} u(k', s')_\delta] \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} (\not{k}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu) + \frac{1}{2} m_e^2 \text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu) \\ &= 2 (k'^\mu k^\nu + k^\mu k'^\nu - (k \cdot k' + m_e^2) g^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

→ Le tenseur hadronique vaut

$$W^{\mu\nu} = 2 (p'^\mu p^\nu + p^\mu p'^\nu - (p \cdot p' + m_p^2) g^{\mu\nu})$$

$$\begin{aligned} \rightarrow |M|^2 &= \frac{8e^4}{q^2} [(k \cdot p)(k' \cdot p') + (k' \cdot p)(k \cdot p') - m_e^2 p \cdot p' - m_p^2 k' \cdot k + 2m_e^2 m_p^2] \\ &\stackrel{p=p+k-k'}{=} \frac{8e^4}{q^2} \left[-\frac{q^2}{2} (k - k') \cdot p + 2(k \cdot p)(k' \cdot p) + \frac{m_p^2 q^2}{2} \right] \end{aligned}$$

Dans le référentiel du laboratoire : $p = (m_p \vec{v})$. Ainsi,

$$p \cdot k = m_p E$$

$$p \cdot k' = m_p E'$$

$$k \cdot k' = E E' (1 - \cos \theta)$$

$$\hookrightarrow |CM|^2 = \frac{8e^4}{q^4} \left[\frac{-q^2}{2} m_p (E - E') + 2EE' m_p^2 + \frac{m_p^2 q^2}{2} \right]$$

$$= \frac{8e^4}{q^4} 2EE' m_p^2 \left[1 - \frac{q^2}{m_p} \frac{E - E'}{4EE'} + \frac{q^2}{4EE'} \right]$$

→ Considérons le cas élastique : $p'^2 = m_p^2 = (p+q)^2 \Rightarrow 2p \cdot q = -q^2 = Q^2$
 Ainsi, $E - E' = -\frac{q^2}{2m_p}$

↪ L'électron perd de l'énergie dans l'interaction $\propto Q^2$:

$$|CM|^2 = \frac{16e^4}{q^4} EE' m_p^2 \left(\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2m_p^2} \sin^2(\theta/2) \right)$$

→ La section efficace de Dirac σ_{Dirac} est

$$\frac{d^2\sigma_{\text{Dirac}}}{dE' d\Omega} = \frac{4\alpha^2}{Q^4} E'^2 \left(\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2m_p^2} \sin^2(\theta/2) \right) \delta(E - E' + q^2/2m_p^2)$$

$$= \frac{\alpha^2}{4E^2} \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} \left(1 - \frac{q^2}{2m_p^2} \tan^2(\theta/2) \right) f(E - E' + q^2/2m_p^2)$$

condition d'élasticité

DEF On retrouve la formule de Mott qui correspond au 1^e terme :

$$\frac{d\sigma_{\text{Mott}}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}$$

↪ Le second terme provient de la contribution des photons virtuels avec une polarisation longitudinale

Photon réel : $q^2 = 0$. Photon virtuel : $q^2 < 0$

DEF On a introduit ci-dessus la virtualité du boson médiateur Q^2 définie comme $Q^2 = -q^2$ où q^2 est l'impulsion échangée.

4.1.3 Diffusion spin 1/2 sur cible nucléaire

→ On s'intéresse à la diffusion $e^- + N \rightarrow e^- + \text{hadrons}$. Pour des énergies $\sim 125 \text{ MeV}$ (Klystron), la diffusion d'électrons permet d'étudier la structure de la cible.

DEF On introduit le facteur de forme électrique G_E , interprété comme \mathcal{F} (distribution de charges électriques de la cible):

$$G_E(Q) = \int d^3r p(r) e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}} \quad \text{avec } G_E(0) = 1$$

On a:

↳ normalisation

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{d\sigma_{\text{Dirac}}}{dQ^2} |G_E(Q)|^2$$

↳ Pour $|Q| = |q| \ll 1$, on a $G_E(Q) \approx \int (1 + iQ \cdot r - \frac{(Q \cdot r)^2}{2}) p(r) d^3r$

$$p(r) = p(-r)$$

De plus, $\langle r^2 \rangle = \int r^2 p(r) d^3r$.

Alors, $G_E \approx 1 - \frac{Q^2}{6} \langle r^2 \rangle$

↳ On peut donc estimer le rayon typique de la cible. Ici, $\sqrt{\langle r^2 \rangle} \sim 10^{-15} \text{ m}$

→ Lorsque $Q \rightarrow \infty$, il faut que $\langle r^2 \rangle \rightarrow 0$. Pour une extension spatiale finie, le facteur de forme décroît et tend vers une constante.

② Remarque sur la résolution spatiale :

→ Pour sonder une distance Δr , on utilise la longueur d'onde de de Broglie λ du particule qui interagit :

$$\lambda = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\Delta r}{2\pi} = \frac{hc}{p} \Rightarrow \Delta r = hc/p$$

$$\text{et } \lambda = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}$$

→ Dans la limite $E \gg m$, on retrouve $\lambda = hc/E$. Dans la limite des hautes virtualités ($E^2 \ll m^2 c^4$), on a

$$\lambda = \frac{hc}{Q} \Rightarrow \Delta r = \frac{hc}{Q}$$

① Effet du spin de la cible :

→ L'interaction entre le spin du lepton incident et celui de la cible donne lieu à une interaction magnétique.

→ En imposant les symétries P et T, la $\sigma(eN \rightarrow eN)$ non polarisés est:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \left(\frac{\alpha^2 \cos^2(\theta/2)}{4E^2 \sin^2(\theta/2)} \right) \frac{E'}{E} \left(\frac{|G_E(Q)|^2 + Z|G_M(Q)|^2 + 2Z|G_M(Q)|^2 \tan^2 \theta/2}{1 + Z} \right)$$

où $Z \equiv Q^2/4M_N^2$ et M_N la masse du proton, et $G_E(Q)$ et $G_M(Q)$ sont les facteurs de forme électriques et magnétiques.

4.1.4 Mise en évidence de la structure des noyaux

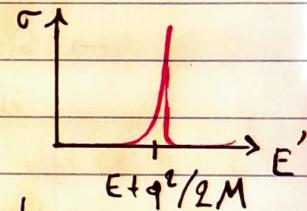
→ Soit R le rayon du noyau et M sa masse. On distingue 3 régimes dans l'évolution de σ en fonction de E'

① Faible transferts : $q \ll 1/R$

→ diffusion élastique

→ pic en $E' = E + q^2/2M$

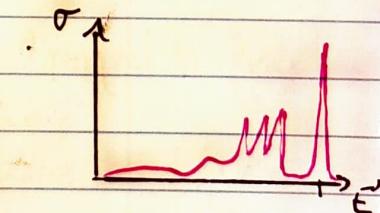
→ noyau = objet rigide qu'on mesure via son facteur de forme dans l'état fondamental : $F(q) = 1 - q^2 R^2 / 6 + \dots$



② Transferts moyens : $q \approx 1/R$

→ plusieurs états du noyau à basse énergie

→ transitions inélastiques à 1 particule



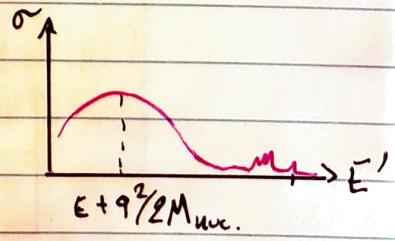
③ Grand transferts : $q \gg 1/R$

→ Apparition d'une base très large à

$$E' = E + q^2/2M_{\text{nucleon}}$$

→ Dans cette région, l'énergie du noyau est entièrement absorbée par le nucléon comme s'il était quasiment libre.

→ Le mouvement de Fermi du nucléon provoque un élargissement du pic.



A.2 Diffusion Spin 1/2 sur nucléon

4.2.1 Prémisses expérimentales.

→ En 1950, un groupe du SLAC utilise le faisceau d'électrons de 125 MeV pour étudier les distributions électriques et magnétiques du nucéon.

→ Une déviation aux grands angles de diffusion est observée p/r aux prédictions pour une particule ponctuelle de spin 1/2 : la décroissance en Q^2 est plus importante que prévue.

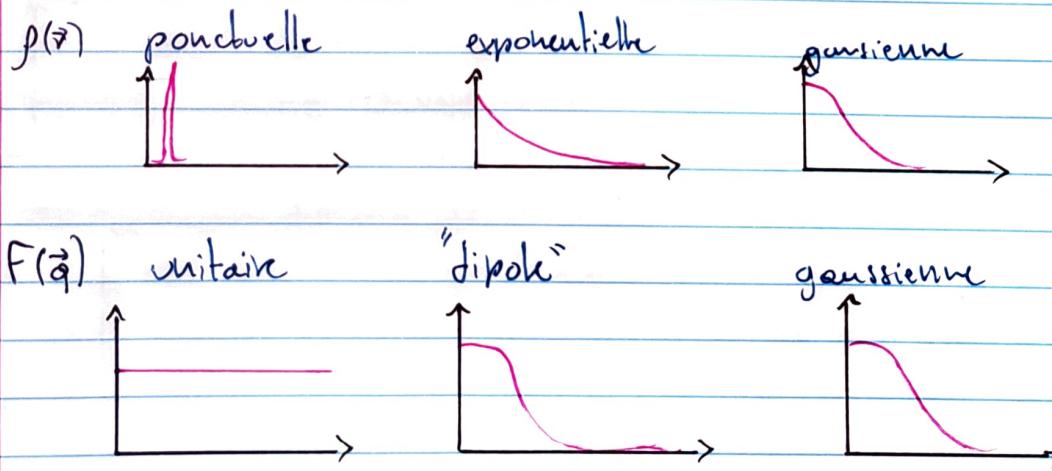
↳ On paramétrise les facteurs de forme sous la forme du dipôle:

$$1G(Q^2) \sim \frac{1}{(1 + Q^2/\mu_0^2)^2} \leftrightarrow g(r) = g_0 e^{-\mu_0 r}$$

→ suggère la présence d'une sous-structure (distribution étendue)

→ Si on augmente l'énergie, les collisions sont de moins en moins élastique

→ Liens entre les facteurs de forme $F(q^2)$ et la distribution de densité de charge :



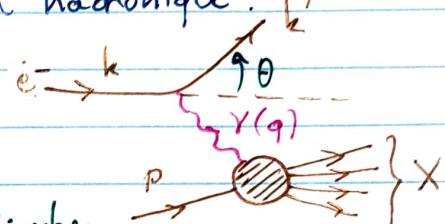
4.3 Diffusion profondément inélastique

4.3.1 Premières mesures au SLAC :

→ En 1967 au SLAC commença une série d'expériences de diffusion profondément inélastiques: de l'hydrogène / deutérium bombardé par un faisceau d'électrons allant jusqu'à 21 GeV

→ Dans ce type d'expérience, seul l'électron diffusé est observé: on n'a pas directement accès à l'état final hadronique. Cependant, on peut calculer:

$$W^2 = (q+p)^2 = X^2 = q^2 + 2 p \cdot q + m_p^2$$



DEF |

On introduit les variables d'échelle du Bjorken

x et y sans dimension et $\in [0, 1]$ définies selon:

$$x = \frac{Q^2}{2 p \cdot q}$$

$$y \equiv \frac{p \cdot q}{p \cdot k}$$

→ La masse invariante de l'état final hadronique W s'exprime alors comme: $W^2 = m_p^2 + \underbrace{\frac{1-x}{x}}_{\text{élastique}} Q^2 + \underbrace{x}_{\text{inélastique}}$

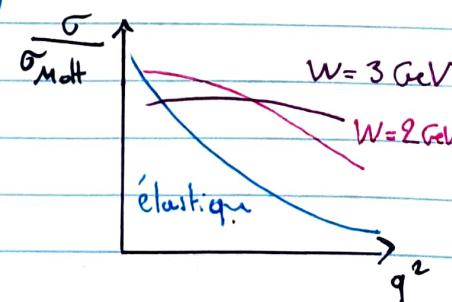
→ Dans le ref. où le proton est au repos, $y = (E - E')/E$ est la fraction d'énergie que l'électron a cédé au boson échangé.
↳ y est une mesure de l'inélasticité du processus de diffusion

PROB Les invariants cinétiques sont liés par la relation

$$Q^2 = x \cdot y \cdot S$$

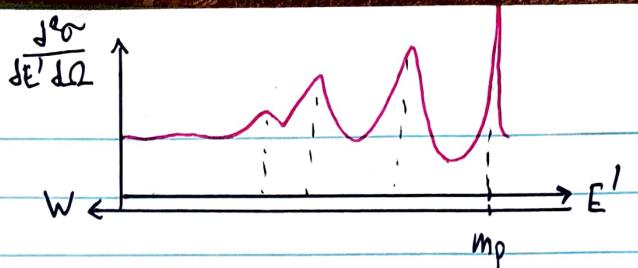
$$x \cdot y \cdot S = \frac{Q^2}{2 p \cdot q} \cdot \frac{p \cdot q \cdot S}{p \cdot k} = Q^2 \cdot \frac{S}{2 p \cdot k} = Q^2 \cdot \frac{S}{(p+k)^2} = Q^2$$

→ À grand Q^2 , il est de plus en plus difficile d'obtenir un "œil élastique".



→ Inélasticité de σ

$$\rightarrow W^e = \frac{E - E'}{E} s$$



PROP La condition d'élasticité $\delta(E - E' + q^2/2m_p) = 0$ se réexprime comme

$$W^e = m_p^2 + \frac{1-x}{x} Q^2 \stackrel{!}{=} m_p^2 \Leftrightarrow x = 1$$

→ Pour traiter les diffusions inélastiques, il faut remplacer le s par des fonctions inconnues qui rendront compte de la complexité de la structure cible.

DEF

On introduit les fonctions de structures W_1 et W_2 qui dépendent à priori de 2 dof. On choisit $W_i = W_i(x, Q^2)$. La section efficace $d\sigma_{\text{Dirac}}/dE' d\Omega$ devient:

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \left(\frac{\alpha^2}{2SE \sin^4(\theta/2)} \right) (2 \sin^2(\theta/2) W_1(x, Q^2) + \cos^2(\theta/2) W_2(x, Q^2))$$

4.4. Les fonctions de structure

→ Pour accéder à la structure du proton, il faut varier le caractère élastique de la réaction, et donc augmenter la virtualité du γ échangé. Environs le tenseur $W_{\mu\nu}$ en toute généralité, pour des analyses non polarisées (pas de terme $\alpha \gamma^\mu$):

$$W_{\mu\nu} = -W_1 g_{\mu\nu} + W_2 \frac{p_\mu p_\nu}{m_p^2} + W_3 \frac{p_\mu p_\nu + p_\nu p_\mu}{m_p^2} + W_4 \frac{p_\mu p_\nu - p_\nu p_\mu}{m_p^2} + W_5 \frac{q_\mu q_\nu}{m_p^2} + W_6 \frac{g_{\mu\nu} p_\mu p_\nu}{m_p^2}$$

à chaque $W_i = W_i(x, Q^2)$

↪ La contraction avec $L_{\mu\nu} = L_{(\mu\nu)}$ fait tomber W_4 et W_6 .

→ Comme tout courant, le courant hadronique est conservé:

$$\partial_\mu W^{\mu\nu} = \partial_\nu W^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow q^\mu W_{\mu\nu} = 0 = q^\nu W_{\mu\nu}$$

Ainsi, on obtient:

$$-W_1 q_\nu + W_2 \frac{(p \cdot q) p_\nu}{m_p^2} + W_3 \left(\frac{(p \cdot q) q_\nu + q^2 p_\nu}{m_p^2} \right) + W_5 \frac{q^2 q_\nu}{m_p^2} = 0$$

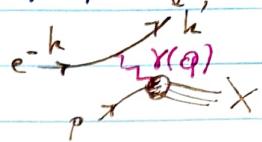
$$\Leftrightarrow -W_1 + W_3 (p \cdot q)/m_p^2 + W_5 q^2/m_p^2 = 0$$

$$\} W_2 (p \cdot q)/m_p^2 + W_5 q^2/m_p^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow W_3 = -\frac{q \cdot p}{q^2} W_2 \quad \text{et} \quad W_r = \frac{(q \cdot p)^2}{q^4} W_2 + \frac{m_p^2}{q^2} W_1$$

Le courant hadronique se réécrit sous la forme

$$W_{\mu\nu} = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1(x, Q^2) + \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \frac{W_2(x, Q^2)}{m_p^2}$$



\rightarrow Contractons $L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$ en négligeant m_p

$$\hookrightarrow k \cdot k' = k \cdot (k - q) \approx -k \cdot q = -\frac{1}{2} q^2$$

$$\hookrightarrow L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = 2(k'^\mu k^\nu + k^\mu k'^\nu + \frac{1}{2} q^\mu g^{\mu\nu}) W_{\mu\nu}$$

$$= 4 k \cdot k' W_1(x, Q^2) + (4(p \cdot k)(p \cdot k') - 2 m_p^2 k \cdot k') \frac{W_2(x, Q^2)}{m_p^2}$$

$$= 2 Q^2 W_1(x, Q^2) - (u_S + m_p^2 Q^2) \frac{W_2(x, Q^2)}{m_p^2}$$

\rightarrow Plaçons nous dans le ref. du proton au repos. On retrouve le résultat ps6 :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dE' dQ^2} &= \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^2} \left(2 \sin^2(\theta/2) W_1 + \cos^2(\theta/2) W_2 \right) \\ &= \frac{\alpha^2}{2s \sin^4(\theta/2)} \left(2 \sin^2(\theta/2) W_1 + \cos^2(\theta/2) W_2 \right) \end{aligned}$$

\hookrightarrow On effectue alors le changement de variable $(E', \cos\theta) \mapsto (x, Q^2)$
 $dx dQ^2 = \frac{2x E' dE' d\cos\theta}{y}$ et par ailleurs $y E' \sin^2(\theta/2) = m_p x y^2 / 2$

DEF On introduit de nouvelles fonctions de structures $F_1(x, Q^2)$ et $F_2(x, Q^2)$ définies par : $F_1 = \frac{W_1}{4\pi}$ et $F_2 = W_2 \cdot \frac{v}{4\pi m_p}$

où $v \equiv E - E' = p \cdot q / m_p$ est l'énergie du photon.

\rightarrow En prenant la limite $s, v \rightarrow \infty ; Q^2 \rightarrow \infty$ et x fixé, on obtient

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi \alpha^2}{x Q^4} \left\{ x y^2 F_1 + (1-y) F_2 \right\} \text{ pour } ep \rightarrow eX$$

\rightarrow Dans le cas élastique, le facteur de form factor introduit revient à écrire
 $W_{\mu\nu} = 4 p_\mu p_\nu G_F(Q^2)$

② Sections efficaces longitudinale et transverse

→ Intéressons-nous aux contributions à la section efficace issus des photons virtuels polarisés longitudinalement et transversalement.

→ Composantes transverses : $E^{\pm 1}$

→ Composante longitudinale : E^0

voir eq 8.53

Haben und Martin

On obtient :

$$\frac{d^2\sigma_T}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{x Q^4} \times (1 + (1-y)^2) F_1$$

$$\frac{d^2\sigma_L}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{x Q^4} (1-y)(F_2 - 2 \times F_1) = \frac{4\pi\alpha^2}{x Q^4} (1-y) F_L$$

DEF |

On introduit les fonctions de structure transverse et longitudinale F_T et F_L définies selon

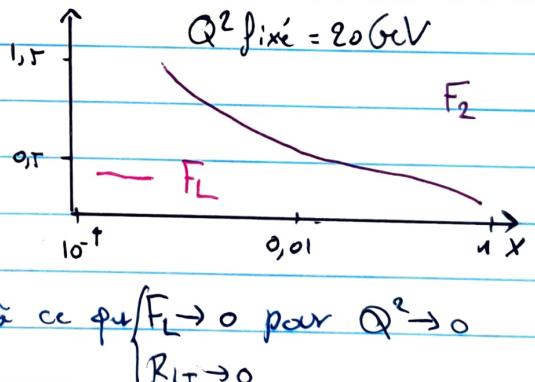
$$F_T \equiv F_1 \quad \text{et} \quad F_L \equiv F_2 - 2 \times F_1$$

$$\text{Leur rapport est noté } R_{LT} \equiv \frac{\sigma_L}{\sigma_T} = \frac{F_L}{2 \times F_T} = \frac{\sigma_L (\gamma^* p \rightarrow X)}{\sigma_T (\gamma^* p \rightarrow X)}$$

③ Nouvelle vision des données SLAC :

→ la fonction de structure F_2 semble être indépendante de Q^2 .

→ A $Q^2=0$, le jet échangé est purement transverse. On s'attend à ce que $F_L \rightarrow 0$ pour $Q^2 \rightarrow 0$
 $R_{LT} \rightarrow 0$



4.5 Le modèle des partons

- Le modèle des partons proposé par Feynman est motivé par l'absence de dépendance en Q^2 pour F_L . Il postule que l'interaction a lieu sur des objets ponctuels constitutants du proton : les partons.
 - les partons n'interagissent pas entre eux
 - Ils ont une charge électrique
 - Ils ont un spin 1/2.

DEF | Le référentiel de Breit ou infinite momentum frame est le référentiel dans lequel le proton est ultra-relativiste : $p \gg m_p \Rightarrow p = (p, 0, 0, p)$

- Le modèle considère que le photon interagit avec un parton chargé (quark) ponctuel portant une fraction d'impulsion du proton et se déplaçant // à lui :

$$p'^\mu = S p^\mu$$

- Les quarks étant de spin 1/2, la section efficace est donnée par σ_{Dirac} avec $p'^\mu \rightarrow S p^\mu$ et en utilisant la charge électrique du quark e_q :
$$\frac{d^2\hat{\sigma}_{ep \rightarrow e\gamma}}{dx dQ^2} (s) = \frac{8\pi \alpha^2}{Q^4} \kappa^2 (1 + (1-y)^2) \delta(x-s) \quad (x=1)$$

- La σ inclusive de la diffusion profondément inélastique $e p \rightarrow e X$ s'écrit comme

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{ep \rightarrow eX}}{dx dQ^2} &= \int_0^1 ds \sum_q f_q(s) \frac{d^2\hat{\sigma}_{ep \rightarrow e\gamma}}{dx dQ^2}(s, Q^2) \\ &= \frac{8\pi \alpha^2}{Q^4} \int_0^1 ds \sum_q e_q^2 f_q(s) \{ y^2 - 2(1-y) \} \delta(x-s) \end{aligned}$$

Comparer avec $\frac{4\pi \alpha^2}{x Q^4} \left[x y^2 F_1(x, Q^2) + (1-y) F_2(x, Q^2) \right]$

↳ On a introduit $f_q(s)$ les densités partoniques

→ On obtient :

$$F_1(x, Q^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 ds \sum_q e_q^2 f_q(s) f(x-s) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 f_q(x) = F_1(x)$$

$$F_2(x, Q^2) = \int_0^1 ds \sum_q e_q^2 \times f_q(s) f(x-s) = \sum_q e_q^2 \times f_q(x) = F_2(x)$$

On peut écrire $f_q(x) = q(x) + \bar{q}(x)$ pour séparer les quarks des anti-quarks.

↳ La seule dépendance en Q^2 ne trouvant dans le propagateur du photon, les fonctions de structures F_1 et F_2 sont indépendantes de Q^2 (dans le modèle naïf des partons libres).

→ En résumé : $F_1(x) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 (q(x) + \bar{q}(x))$

et $F_2(x) = \sum_q e_q^2 x (q(x) + \bar{q}(x))$

PROP On trouve la relation de Callan-Gross :

$F_2 = 2 \times F_1 \Rightarrow F_L = F_2 - 2 \times F_1 = 0$ qui reflète la conservation de l'hélicité des quarks de spin $1/2$.

① La valence et le ner:

→ La spectroscopie des hadrons, qui a amené le modèle des quarks, définit les quarks composant le n et le p de façon à satisfaire le $\neq \#$ quantiques :

$$p = (u u d) \quad \text{et} \quad n = (u d d)$$

DÉF On suppose la symétrie d'isospin fort $SU(2)$:

$$\cdot \quad u(x) \equiv \underbrace{u_p(x)}_{=2/3} = \underbrace{d_n(x)}_{=1/3} \quad \text{et} \quad d(x) \equiv \underbrace{d_p(x)}_{=1/3} = \underbrace{u_n(x)}_{=-1/3}$$

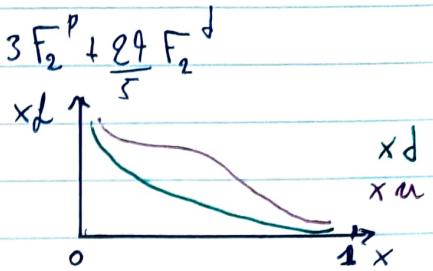
→ Les fonctions de structure du proton et neutron sont alors :

$$F_2^p = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times u_p(x) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times d_p(x) = 4/9 \cdot x \cdot u + 1/9 \cdot x \cdot d$$

$$\text{et } F_2^n = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times u_n(x) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times d_n(x) = 4/9 \cdot x \cdot d + 1/9 \cdot x \cdot u$$

→ Experimentalement, on extrait F_2^n de l'interaction avec du deuteron : $F_2^d = \frac{1}{2} (F_2^p + F_2^n)$

↳ On a : $x \cdot u = 3F_2^p - \frac{6}{5} F_2^d$ et $x \bar{d} = -3F_2^p + \frac{84}{5} F_2^d$



→ On observe effectivement $u > d$
Cependant, il faudrait

$$U = \int u(x) dx = 2 \text{ et } D = \int d(x) dx = 1,$$

et on trouve des divergences à la place.

DEF On décompose alors les densités de quarks en quarks et antiquarks pour rendre compte des fluctuations (les quarks de la mer). On définit alors la distribution de valence u_V et de la mer S selon :

$$u_V \equiv u(x) - \bar{u}(x) \quad \text{et} \quad S \equiv \bar{u}(x) = \bar{d}(x)$$

↳ On peut alors écrire : $\int u(x) = u_V + S(x)$

$$\int d(x) = \bar{d}_V(x) + S(x)$$

avec $\int dx (u + \bar{u}) = \infty$ mais $\int dx (u - \bar{u}) = 2$

$$\int dx (\bar{d} - \bar{d}_V) = 1$$

→ Comparons à nouveau les fonctions de structures :

$$F_2^p/x = \frac{1}{3} (4u_V + d_V) + \frac{4}{3} S \text{ et } F_2^n/x = \frac{1}{3} (u_V + 4\bar{d}_V) + \frac{4}{3} S$$

↳ On a : $\frac{F_2^n}{F_2^p} \rightarrow \begin{cases} 1/4 \text{ pour } x \rightarrow 1 \text{ valence domine} \\ 1 \text{ pour } x \rightarrow 0 \text{ mer domine} \end{cases}$

→ Confirmé par les mesures.

○ Momentum sum rule :

→ Experimentalement, on trouve que

$$\sum q \int_0^1 x (q + \bar{q}) dx = \int_0^1 x (u_V + d_V + \delta S) dx \approx 0,5$$

↳ Seule la moitié de l'impulsion est portée par les quarks !
Il faut alors prendre en compte les gluons, et QCD.

62

4.6 Mesure étendue des fonctions de structure

→ Le seul collisionneur e+p de l'histoire était HERA, situé à DESY à Hambourg.

→ Pour accéder aux fonctions de structure, il faut mesurer

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi x^2}{x Q^4} (xy^2 F_1 + (1-y) F_2)$$

En mesurant à chaque événement E_e (énergie de e- diffusé) et θ_e (l'angle polaire du e- diffusé), on peut reconstruire x et Q^2 :

$$\begin{cases} x = \frac{E_e}{E_p} \frac{E_e (1 + \cos \theta_e)}{2 E_e - E_p (1 - \cos \theta_e)} \\ Q^2 = 2 E_e^2 E_p (1 + \cos \theta_e) \end{cases}$$

→ On choisit un pavage du plan (x, Q^2) et on compte le nombre d'événements par bin: $\frac{d\sigma_{\text{bin}}}{dx dQ^2} = \frac{N_{\text{bin}} - N_{\text{BG}}}{L \cdot \text{Acc. } \epsilon}$

où $N_{\text{bin}} = \# \text{ événent / bin} / \text{taille du bin}$

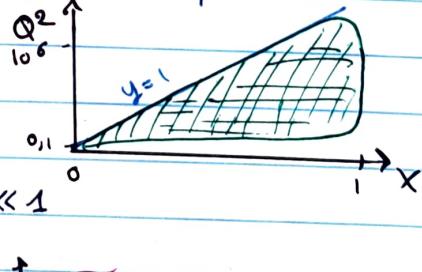
$N_{\text{BG}} = \# \text{ événement dûs au bruit de fond}$

L = luminosité intégrée

Acc. = l'acceptance (corrige les pertes \Leftarrow géométrie du détecteur)

ϵ = efficacité (corrige les pertes \Leftarrow imperfections)

→ Le domaine kinétique sondé par les différentes expériences d'interaction e+N est



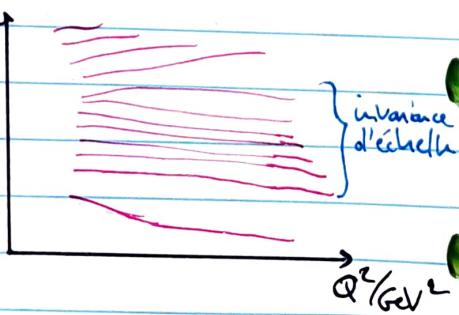
→ Par facilité, on définit la section eff.

$$\text{réduite } \sigma_T = F_2 - \frac{y^2}{1+(y)^2} F_L \approx F_2 \text{ si } F_L \ll 1$$

On mesure:

→ pour des valeurs de x de 0,15, on a bien invariance d'échelle.

→ pour des grandes et petites valeurs de x , l'invariance d'échelle est brisée.



② Effet de l'échange de Z^0 :

→ Lorsque $Q^2 \gg m_Z^2$, le terme d'échange d'un Z et son interaction avec l'échange d'un γ deviennent négligeable. Apparaît alors une 3^e fonction de structure, $F_3(x, Q^2)$.

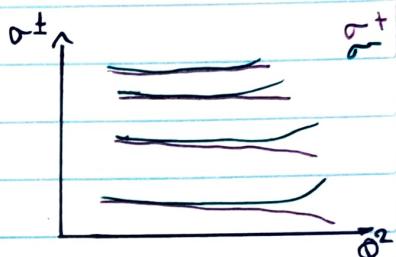
→ La section efficace pour l'échange par courant neutre s'écrit :

$$\frac{d^2\sigma^\pm(e^\pm p \rightarrow e^\pm X)}{dx dQ^2} = \frac{4\pi x^2}{x Q^2} \left\{ x y^2 F_1^{NC} + (1-y) F_2^{NC} + y(1-y/2) F_3^{NC} \right\}$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{cases} F_2^{NC} \sim \sum_x x (q(x) + \bar{q}(x)) \\ x F_3^{NC} \sim \sum_x x (q(x) - \bar{q}(x)) \end{cases}$$

↳ On peut séparer la valence et la mer !



③ Mesure de F_L :

→ Pour mesurer F_L , on effectue des mesures à différents \sqrt{s} . Puisque $Q^2 = 5 \times y$ et puisque seule une variation de y peut départager les 2 facteurs (x et Q^2 donnés), cela revient à changer s en prenant des données à des énergies de faisceaux différentes.

④ Limite sur la taille des quarks:

→ Les diffusions profondes inélastiques permettent de sonder la taille des quarks. En comparant les données avec la mesure attendue pour des partons de taille nulle, l'accord est suffisamment bon pour qu'il ne soit pas nécessaire d'introduire des facteurs de forme pour les quarks.

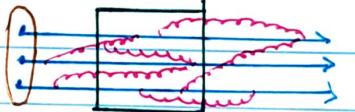
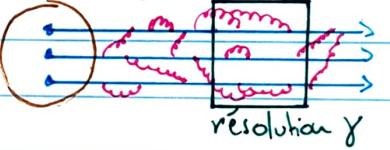
→ On peut établir une limite sur la taille des quarks : $R_q < 0,65 \cdot 10^{-18} \text{ m}$
Pour comparaison, $R_e < 0,3 \cdot 10^{-18} \text{ m}$

4.7 La violation d'échelle et les eq. DGLAP

- Dans QCD, les quarks sont liés entre eux par des gluons. On devrait donc s'attendre à voir apparaître la limite de validité du modèle naïf des partons.

① Approche intuitive:

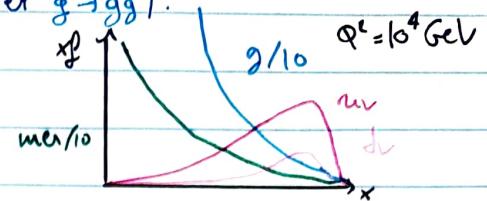
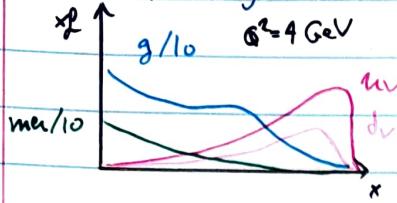
- Les quarks peuvent émettre des gluons qui eux-mêmes peuvent émettre des gluons, être réabsorbés ou créer une paire $q\bar{q}$. En l'absence d'interaction, toutes ces émissions sont réabsorbées.
- Ces fluctuations peuvent exister durant une échelle d'é-t < 1 fm
- Dans une interaction DIS (deep inelastic scattering), le photon virtuel saute le proton dans une direction transverse, avec une certaine résolution.
⇒ Toute fluctuation avec \gtrsim fluctuation < résolution γ ne peut être vue par le photon.
- Si le proton subit un boost, les fluctuations ont une échelle de temps dilatée
⇒ Un # plus important de fluctuations pourront être vus par le photon.
- Dans le modèle naïf des partons, $\ell^\mu = \xi p^\mu$: l'impulsion des partons est // à celle du proton. Cependant, l'émission d'un gluon peut provoquer des impulsions transverses, et la proba d'émission $\propto ds$. De plus, plus Q^2 , plus l'espace des phases libres pour émettre un gluon est grand
⇒ On s'attend à ce que la densité des quarks de la mer augmente aux petites valeurs de x lorsque Q^2 .



DÉF La violation de l'invariance d'échelle est le fait qu'aux hautes énergies, $Q^2 \rightarrow$ ouverture d'un espace plus grand aux migrations des grands vers les petits $x \Leftrightarrow$ densité de quark \propto aux petits x grand Q^2 .

→ Le pic de valence reste inchangé $\propto Q^2$ (c'est l'invariance d'échelle).

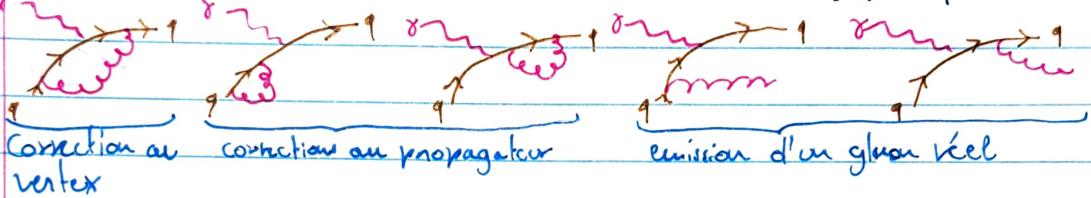
↪ $Q^2 > \Rightarrow$ migration vers les petits x , mais le nombre de parton n'est pas conservé (il augmente via $q \rightarrow qg$, $g \rightarrow g\bar{g}$ et $g \rightarrow gg$).



↪ Il faut que la densité de gluon décroisse un moment, sinon l'unité de la matrice S serait bousillée.

9.7.1 Développement à l'ordre α_s :

→ On regarde les corrections en α_s à la diffusion $gq \rightarrow q$:



↪ Les divergences IR des émissions réelles sont compensées par les corrections au vertex et aux propagateurs.

① Emission d'un gluon réel:

→ On regarde la contribution de l'émission réelle à la contribution totale C_F :

$$|CM|^2 = 32\pi^2 (e_q^2 \alpha_s) \frac{C_F}{3} \left\{ \frac{-t}{\hat{s}} - \frac{\hat{s}}{\hat{t}} + \frac{2\hat{u}\hat{Q}^2}{\hat{s}\hat{t}} \right\}$$

$$\text{où } \hat{t} = (h-p)^2 = (k'-q)^2 = -2p \cdot k (1 - \cos \theta_{qg})$$

$$\hat{s} = (k+q)^2 = (k'+p)^2 = 2p \cdot k' (1 - \cos \theta_{q'g})$$

$$\hat{u} = (q-p)^2 = (h-k')^2$$

→ On retire un pôle en $\frac{1}{(k-p)^2} = \frac{1}{(k'-q)^2} = \frac{1}{\hat{t}}$ du propagateur du quark,

idem en $\frac{1}{\hat{s}}$ et leur interférence.

→ Comportement à haute énergie:

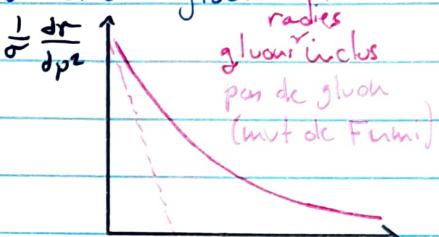
→ on n'oublie que la composante dominante, tq. $-\vec{E} \ll \hat{s}$ ($k \ll k'$),
on obtient en notant $p_T = k' \sin \theta$ et $\gamma = \frac{\vec{Q}^2}{2k \cdot q}$ la fraction d'impulsion
longitudinale:

DEF On introduit la fonction de splitting $P_{qq}(z)$ selon:

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{1-z}$$

Elle représente la probabilité qu'un quark se retrouve avec une fraction z de son impulsion longitudinale après émission d'un gluon.

$$\hookrightarrow \frac{d\sigma}{dR^2}(z) = \frac{4\pi^2 \alpha e_q^2}{s} \frac{1}{p_T^2} \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(z)$$



→ Sans radiation de gluon à l'ordre le plus bas, on a:

$$q_b(x) = \int_0^1 dS q(S) f(x-S) = \int_0^1 dS/S q(S) f(1-x/S) \\ = \int_x^1 dS/S q(S)$$

En incluant la radiation, on a:

$$q(x, Q^2) = \int_x^1 dS/S \left\{ q(S) + \alpha_s/2\pi \int dp_T^2 q(S) P_{qq}(x/S)/p_T^2 \right\} \\ = q_b(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dS}{S} \int dp_T^2 q(S) \frac{1}{p_T^2} P_{qq}\left(\frac{x}{S}\right) \\ = q_b(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 dS/S P_{qq} \ln(Q^2/\mu^2)$$

DEF

On introduit l'échelle de factorisation μ_F permettant d'exprimer la densité du parton habillée $q(x, Q^2)$ à une certaine échelle Q^2 à partir de la densité nue $q_b(x)$ et y absorber la dépendance en μ .

$$\hookrightarrow q(x, Q^2) = q_b(x, \mu_F^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dS}{S} q_b(S) P_{qq}\left(\frac{x}{S}\right) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu_F^2}\right) \\ = q(x, \mu_F^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dS}{S} q(S, \mu_F^2) P_{qq}\left(\frac{x}{S}\right) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu_F^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$$

PROP L'invariance d'échelle est brisée logarithmiquement.

→ La densité de partons habillée $q(x, Q^2)$ étant une observable physique, elle ne peut dépendre de l'échelle de factorisation μ_F^2 . On impose alors

$$\frac{dq(x, Q^2)}{d \ln \mu_F^2} = 0$$

Prop On trouve l'équation Dokshitzer - Gribov - Lipatov - Altarelli - Parisi ou équation d'évolution DGLAP :

$$\frac{dq(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{ds}{s} q(s, Q^2) P_{qq}(x/s)$$

① Les autres termes :

→ Considérons le processus de fusion gluon-photon : $g \gamma^* \rightarrow q\bar{q}$

Ce processus permet de relier la densité de gluons $q(x, \mu^2)$ définie à μ^2 l'échelle de factorisation, à la fonction de structure $F_2(x, Q^2)$ du proton :

$$q(x, Q^2) = q(x, \mu_F^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{ds}{s} q(s, \mu_F^2) P_{qg}(x/s) \ln(Q^2/\mu_F^2)$$

$$+ \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{ds}{s} g(s, \mu_F^2) P_{gg}(x/s) \ln(Q^2/\mu_F^2)$$

$$\text{où } P_{qg}(z) \equiv \frac{1}{2} (z^2 + (1-z)^2)$$

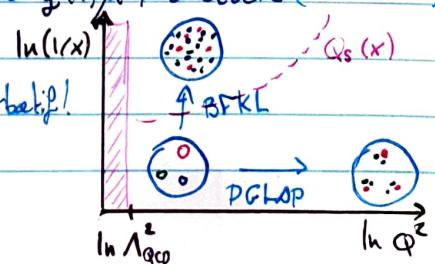
→ Ainsi, mesurer F_2 donne accès à la densité de gluons.

② Effets de l'évolution DGLAP :

- Lorsque $Q^2 \uparrow$, les partons perdent de l'impulsion long. \Rightarrow shift vers petits x .
- Les gluons mènent l'évolution des quarks.
- La distribution des gluons est énorme p/r aux quarks.

4.7.2 Saturation :

- Pour des valeurs de x suffisamment petites, il faut que $q(x, \mu^2)$ s'arrête (saturation).
 - La question de la saturation reste ouverte
- Lorsque $x \downarrow, Q^2 \downarrow \Rightarrow$ on sort du domaine perturbatif!
Il faudrait se placer à bcp + grande énergie



5 INTERACTIONS PROTON-PROTON

- Les collisions hadron-hadron sont dominées par les interactions softs (petit P_T , petites masses,...). Occasionnellement, une interaction dure (grand P_T , grande masse...) a lieu.
- En dessous de $\sqrt{s} \leq 100 \text{ GeV}$, on étudie les effets de spin et non perturbatifs.
- Au delà de $\sqrt{s} \gtrsim 300 \text{ GeV}$, une approche perturbative du QCD est possible. (ex: Tevatron et LHC) Cependant, une approche classique est compliquée (événement à 5 jets \rightarrow calculs au $N^3\text{LO}$)
- En présence d'une échelle dure, $\sigma(\text{hadron-hadron} \rightarrow X)$ se factorise comme :

$$\hat{\sigma}_{hh \rightarrow X(\alpha)}(Q) = \sum_{a,b=q,\bar{q},g} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \frac{f_a(x_1, \mu_F)}{f_b(x_2, \mu_F)} \hat{\sigma}_{ab \rightarrow X(\alpha)}(x_1, x_2, Q, \mu_F, \alpha_s(\mu_F))$$

$$\times \Theta(x_1 x_2 s - Q^2) + \delta(N_{\text{jet}} / Q^2)$$

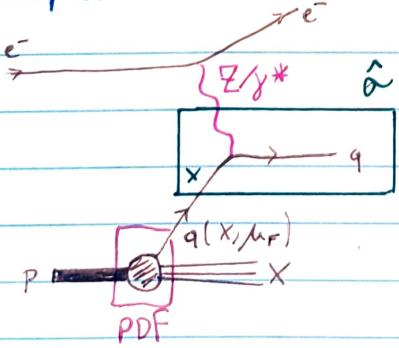
où : $\mu_F(Q)$ est l'échelle de factorisation (renormalisation)
 $\hat{\sigma}$ décrit le processus dur
 Θ met en évidence le fait que le système partonique doit avoir une énergie suffisante pour produire le système X de masse Q .

↳ La dépendance en μ_F provient du développement fini en α_s

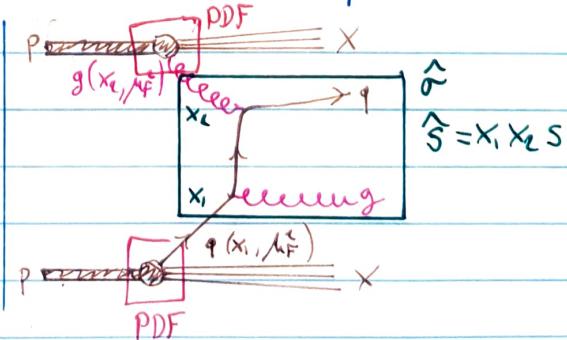
↳ L'échelle de factorisation μ_F donne la valeur jusqu'à laquelle les densités partoniques f_a et f_b ont été évoluées (via DGLAP).

→ En général, on choisit $\mu = \mu_F = \mu_F = Q$

- Le processus dur $\hat{\sigma} = \alpha_s(1 + \sum_j c^{(j)} \alpha_s^j)$ se calcule perturbativement.



Deep Inelastic Scattering (ep) Hadron-hadron (pp)



5.1 Production de jets

- La production de jets ($p\bar{p}$ au TeVatron et pp au LHC) permet de :
 - mesurer α_S
 - tester la factorisation
 - contraindre les PDF
 - sonder la physique à très haute énergie.
 - ↳ P_T (jets) ~ 100 GeV

- La section efficace de production de 2 jets est donnée par :

$$d\sigma = \sum_{a,b,c,d} dx_1 dx_2 f_{a/h}(x_1, \mu_F) \cdot f_{b/k}(x_2, \mu_F) \frac{\hat{\sigma}(a+b \rightarrow c+d)}{d\Phi} d\Phi$$

$= q\bar{q}, g$

DEF On introduit les variables (observables) suivantes :

$$\tau \equiv \frac{\hat{S}}{s} = x_1 x_2 \quad \text{et la rapidité } y \equiv \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right)$$

↳ Est aussi utile la pseudo-rapporté $\eta = -\ln(\Theta/2)$

- Pour un quadrivector p , sa rapidité est aussi

$$y = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{E + P_T}{E - P_T} \right\}$$

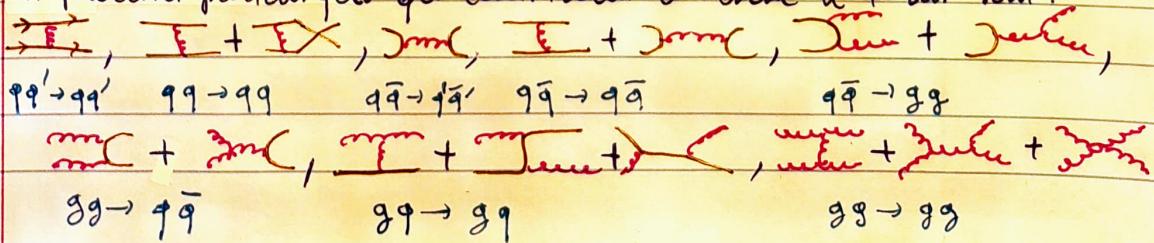
↳ Lorsque $m^2 \ll \vec{p}^2$, on a

$$y \approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|p| + p_z}{|p| - p_z} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right) = \ln \left(\frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} \right)^{1/2} = -\ln \tan(\theta/2) = \eta$$

Dans ce cas, $\cosh y = \frac{E}{P_T}$ et $\sinh y = \frac{p_z}{P_T}$

- La rapidité du système est constituée des 2 partons produits, d'impulsion p_c et p_d , et donnée par $y = \frac{y_c + y_d}{2} = \frac{1}{2} \ln(x_1/x_2)$
et $\hat{S} = s x_1 x_2 = 4 P_T^2 \cosh^2 y$

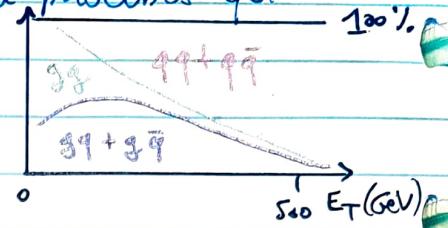
- Les processus partoniques qui contribuent à l'ordre h + bas sont :



- La contribution relative des différents groupes du processus qui contribue à σ est :

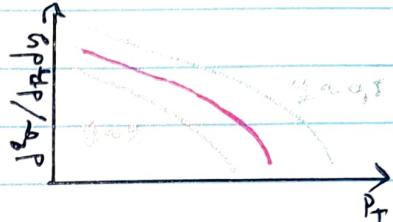
A comparer avec les PDF p6T

- La domination des processus $q\bar{q}$ aux grands p_T provient principalement de la contribution des quarks de valence (grand x)



- La section efficace des jets en fonction de p_T est donnée par :

→ très bon accord entre QCD et data.



5.2 Remarques sur les factorisations QCD

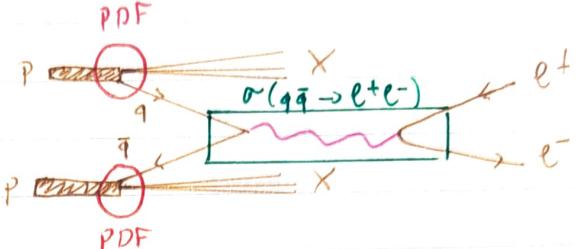
- Les densités de partons extraits des mesures en diffusion e-p permettent de prédire la section efficace en interaction pp avec une grande précision \Rightarrow caractère universel des densités de partons.
- Seulement possible si on a une factorisation QCD de σ :
 $e p \rightarrow e X$ d'un part et $pp \rightarrow \text{jets } XY$ d'autre part.

- Intuitivement, à haute énergie, les partons incidentes peuvent échanger de l'information : leurs interactions doivent être lentes lorsque l'énergie augmente. Idem pour les états finaux.
- Pour la divergence collinéaire : compliquée.

5.3 Le processus Drell-Yan

- Correspond à l'annihilation d'un quark avec un anti-quark protosissant un photon/Z, qui se désintègre en une ou plusieurs particules.
- ↳ le plus souvent, $q\bar{q} \rightarrow \gamma/Z \rightarrow e^+e^-$
- ↳ canal privilégié pour les mesures de précision au LHC.

5.3.1 A l'ordre le plus bas



- Dans le chap. 3, nous avions obtenu à l'ordre le plus bas :

$$\frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{dQ^2} = \frac{\alpha^2}{4\pi} e_q^2 (1 + \cos^2 \theta) = \frac{x^2}{4s} e_q^2 \frac{k^2 + m^2}{s^2}$$

- Dans notre cas, il faut moyenne sur les états de couleurs de l'état initial (et $\hat{s} = s_{q\bar{q}}$).

$$\frac{d\sigma_{q\bar{q} \rightarrow e^+e^-}}{dQ^2} = \frac{1}{3} \frac{\alpha^2}{4s_{q\bar{q}}} e_q^2 \frac{k^2 + m^2}{s_{q\bar{q}}^2} \Rightarrow \sigma(q\bar{q} \rightarrow e^+e^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{9s_{q\bar{q}}} e_q^2$$

En term de σ_{pp} , on a

$$\frac{d\sigma(pp \rightarrow e^+e^-)}{dQ^2} = \sum_{q\bar{q}} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \left\{ f_q(x_1) f_{\bar{q}}(x_2) + f_{\bar{q}}(x_2) f_q(x_1) \right\} \sigma_{q\bar{q} \rightarrow e^+e^-} \cdot \delta(Q^2 - s_{q\bar{q}})$$

$$\text{où } Q^2 = CM_{ee}^2 = s_{q\bar{q}}$$

$$\delta(Q^2 - s) = 1/Q^2 \cdot \delta(1 - s/Q^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\sigma_{pp \rightarrow ee}}{dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{9s} \frac{1}{Q^2} \sum_{q,\bar{q}} e_q^2 \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \left(f_q(x_1) f_{\bar{q}}(x_2) + (q \leftrightarrow \bar{q}) \right) \delta(1 - s_{q\bar{q}}/Q^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\sigma_{pp \rightarrow ee}}{dc} = \frac{4\pi\alpha^2}{9s} \frac{1}{c} \sum_{q,\bar{q}} e_q^2 \int_0^1 \frac{dx_1}{x_1} \left(f_q(x_1) f_{\bar{q}}(c/x_1) + (q \leftrightarrow \bar{q}) \right)$$

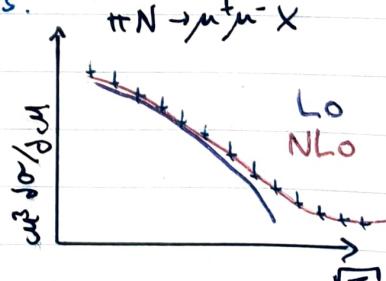
- ↳ On retrouve l'invariance d'échelle : les fonctions f_1 et f_2 ne dépendent pas de Q^2 \rightarrow les diffusions hadron-hadrons mettent aussi en évidence leur structure en constituants ponctuels.

?

- ↳ Invariance d'échelle observée dans le processus Drell-Yan dans la diffusion du pion sur nucléon, à plusieurs échelles de Q^2

\Rightarrow trace la même courbe $\propto Q^2$.

\Rightarrow le terme LO \leftrightarrow mouvement de fermi.



S. 3.2 Emission d'un jet supplémentaire (NLO) :

→ On prend en compte les diagrammes suivants:

LO	NLO	
	 annihilation $q + \bar{q} \rightarrow g + \gamma^*$	 processus QCD $q + g \rightarrow q + \gamma^*$

↳ Les processus QCD sont amplifiés car la densité du gluon est très importante.

→ La prise en compte de ces diagrammes revient à considérer la possible présence d'un jet dans l'état final.

S. 3.3 Contraintes sur les PDF :

→ Le processus Drell-Yan permet de contraindre le rapport \bar{d}/\bar{u} .
La symétrie d'hypercharge est $n = n_p = d_n$ et $\delta = \delta_p = u_n$.
En se limitant à $n \neq \delta$, on a:

$$\sigma^{pp} \sim \frac{4}{g} u(x_1) \bar{u}(x_2) + \frac{1}{g} \delta(x_1) \bar{d}(x_2)$$

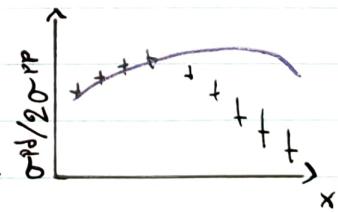
$$\sigma^{pn} \sim \frac{4}{g} u(x_1) \bar{d}(x_2) + \frac{1}{g} \delta(x_1) \bar{u}(x_2)$$

→ Le rapport des collisions proton-deutérium et proton-proton est:

$$\frac{\sigma^{pd}}{\sigma^{pp}} = \frac{(1 + \delta(x_1)/4u(x_1))}{(1 + \delta(x_1)\bar{d}(x_2)/4u(x_1)\bar{u}(x_2))} \left(1 + \frac{\bar{d}(x_2)}{\bar{u}(x_2)}\right) \approx 1 + \frac{\bar{d}(x_2)}{\bar{u}(x_2)}$$

↳ Les contributions des quarks \bar{u} et \bar{d} de la mer ne sont pas identiques!

⇒ modification importante de la paramétrisation des densités de quarks dans la région de valence.



5.4 Remarques et conclusion

- En 20 ans, QCD n'est imposé comme la théorie des interactions fortes.
- Encore beaucoup de questions ouvertes:
 - la question de la saturation de la densité de gluons.
 - D'où provient le spin du proton ?
 - Comment les factorisations sont-elles brisées (dans certains cas) ?
etc.