⊙ Posons

$d := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & d(n) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$, la matrice

d est orthogonale, et $d^{-1}(c^{-1}ac)d$ est diagonale. Alors $b := cd$ est la matrice souhaitée.

CN14 - FORMES QUADRATIQUES

Dans ce chapitre, V sera un E.V. réel.

Def Une forme bilinéaire symétrique sur V est une fonction $f : V \times V \to \mathbb{R}$ linéaire en les 2 composantes et telle que $f(x,y) = f(y,x)$ $\forall x,y \in V$

Def Si $f : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique (fbs) sur V, la fonction $q : V \to \mathbb{R}$ tq $q(x) := f(x,x)$ $\forall x \in V$ est appelée la forme quadratique sur V associée à f.

⊙ Formule de polarisation

$\forall$ forme bilinéaire symétrique f, $\exists!$ forme quadratique q, via $q(x) = f(x,x)$ et réciproquement. Ainsi, $\forall x,y \in V$, on a

$$q(x+y) = f(x+y, x+y) \overset{\text{bilinéarité + symétrique}}{=} f(x,x) + 2f(x,y) + f(y,y)$$

$$= q(x) + 2f(x,y) + q(y) \text{ et donc}$$

$$f(x,y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}$$

14.1 Matrice d'une forme quadratique

Soit V un EV$\mathbb{R}$ et $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base qcq de V et $f : V \times V \to \mathbb{R}$ une fbs de V. Alors pour $x, y \in V$,

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \underbrace{f(e_i, e_j)}_{= a_{ij} \text{ (posons)}}$$

Alors : $f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$

et la matrice $a := (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique qui détermine complètement f. On dit que a est la matrice de la forme bilinéaire f dans la base E. Pour la forme quadra.,

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2}_{\text{termes } \square} + \underbrace{\sum_{1 \le i < j \le n} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j}_{\text{termes rectangles}}$$

14.2 Changement de base

- Soit V un EVℝ, $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de V, soit $a \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$

On identifie le vecteur $x = \sum_i x_i e_i$ par le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Alors on peut écrire : $q(x) = \sum_i^n \sum_j^n a_{ij} x_i x_j = x^T a x$

et la FBS s'écrit $f(x,y) = \sum_i^n \sum_j^n a_{ij} x_i y_j = x^T a y$

- Prenons une nouvelle base $G = \{g_1, \dots, g_n\}$. Prenons $c := c_{ij} \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ la matrice q dans G, et b la matrice du changement de base :

$$g_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} e_i, \ \forall j. \text{ Nous avons,}$$

$$c_{kl} = f(g_k, g_l) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ik} b_{jl} \underbrace{a_{ij}}_{f(e_i, e_j)}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b^T_{ki} a_{ij} b_{jl}$$ ← sélectionne l'élément en k-ième ligne et l-ième colonne de $b^T a b$

- Formule de changement de base : Soit q une FQ sur un

Def EVℝ de dimention finie, et soient E, G deux bases de V. Si a est la matrice de q dans la base E, et b est la matrice de changement de base, alors $c = b^T a b$ est la matrice de q dans la base G

14.3 Forme définie, semi définie et indéfinie

a) définie positive si $q(v) \geq 0 \ \forall v \in V$ et $q(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

b) semi définie ⊕ si $q(v) \geq 0 \ \forall v \in V$

c) définie négative si $q(v) \leq 0 \ \forall v \in V$, et $q(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

d) semi définie ⊖ si $q(v) \leq 0 \ \forall v \in V$

e) indéfinie si $\exists$ 2 vecteurs v, v' tq $q(v) > 0$ et $q(v') < 0$

Pro Une FQ q sur un EVℝ V avec $\dim V = n$ est déf. ⊕ (⊖) $\Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres de la matrice symétrique $a \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ de q sont positive (⊖)

DEMO ($\Rightarrow$) Si $\lambda \leq 0$ est une valeur propre de a et $x \in V \setminus \{0\}$,

$$q(x) = x^T a x = x^T \lambda x = \underbrace{\lambda}_{\leq 0} \underbrace{x^T x}_{> 0} \leq 0$$ et donc q n'est pas déf ⊕. car $x^T x = \|x\|$

($\Leftarrow$) Supposons que toutes les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

Vu que a est symétrique, $\exists\ c = b^{-1} \in O_n$ tq

$b^{-1}ab = cac^{-1} = cac^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow a = c^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} c$

Donc $q(x) = x^T a x = x^T c^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} c x$

$$= \underbrace{\lambda_1}_{>0} \left(\sum_j c_{1j} x_j\right)^2 + \dots + \underbrace{\lambda_n}_{>0} \left(\sum_j c_{nj} x_j\right)^2$$

et donc $q(x)$ est définie positive (car $cx = 0 \Rightarrow x = 0$ car c inversible).

Pro Soit q une FQ sur un E.V. $\mathbb{R}$. V avec $\dim V = n$, soit $a = (a_{ij})$ sa matrice dans une base qcq de V, et soit $p(\lambda) = \det(a - \lambda I)$ le poly. caractéristique de a.

① q est déf ⊕ $\Leftrightarrow$ les coeff de $p(\lambda)$ alternent en signe

② q est déf ⊖ $\Leftrightarrow$ les coeff ont tous le m̂ signe

DEMO ($\Rightarrow$) Si q déf ⊕, alors $\lambda_i > 0$. Donc les coeff de $p(\lambda)$ alternent en signe : $p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda)$

$$= (-1)^n \cdot \lambda^n + (-1)^{n-1} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \cdot \lambda^{n-1} \dots$$

($\Leftarrow$) Si $p(\lambda)$ a des coeff qui alternent de signe, on peut écrire

$p(\lambda) = (-\lambda)^n + c_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \dots + c_1(-\lambda) + c_0$

où $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}_{>0}$. On voit que $p(\lambda) > 0$ dès que $\lambda \leq 0$.

Donc les racines de $p(\lambda)$ sont positive.

14.4 SIGNATURE ET THRM DE SYLVESTER

Soit $a = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n,n}\mathbb{R}$ une matrice symétrique. On a vu qu'on peut trouver une matrice orthogonale $b \in O_n$ tq

$$b^{-1}ab = b^T ab = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$ où les λ_i sont les valeurs propres de a.

Soit n_0 le # de λ_i égaux à 0, n_+ le # de $\lambda_i > 0$ et n_- le # de $\lambda_i < 0$.

Def Le triple (n_0, n_+, n_-) est la signature de a.

☺ Si b ortho, $b^T ab$ a les m̂ valeurs propres que a car $b^{-1}ab = b^T ab$.

Thm Loi d'inertie de Sylvester : Si $a \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ est symétrique et $b \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ est inversible, alors $b^T ab$ et a ont la même signature.

DEMO

a et $b^T a b$ sont les matrices de la même f.q. $q(x) = f(x,x)$ dans des bases différentes.

Si $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $E' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ sont deux bases dans lesquels q (et f) a une matrice diagonale :

$$[q]_{E,E} = \left(\begin{array}{c|c|c} +\ddots & & \\ \hline & -p- & \\ \hline & & 0\ddots 0 \end{array}\right) \qquad [q]_{E',E'} = \left(\begin{array}{c|c|c} +\ddots & & \\ \hline & p' & \\ \hline & & 0\ddots 0 \end{array}\right)$$

(r sous la première matrice, r' sous la seconde)

① Montrons $r = r'$! Considérons le sous-espace

$Rad(f) = \{x \in V \mid \forall y \in V : f(x,y) = 0\}$ "radical de f"

On a $Rad(f) = \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle$ et $Rad(f) = \langle e'_{r+1}, \dots, e_n \rangle$

② Méthode pour calculer la signature :

→ faire apparaître des carrés dans $q(x)$ puis regarder leurs signes

→ calculer les valeurs propres

Obs Soit $a \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Fixons $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Soit $E_{ij} \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ tq $(E)_{ij} = 1$ et 0 partout ailleurs. Alors

$(I + \alpha E_{ij})\, a\, (I + \alpha E_{ij})^T$ s'obtient à partir de a via :

① remplacer la i-ème ligne de a par elle même $+\ \alpha$ fois la j-ème ligne de a

② Dans la matrice résultante, remplacer la i-ème colonne par elle-même plus α fois la j-ème colonne