Dynamique des fluides et des plasmas

ULB MA | 2023–2024 | Prof. Bernard KNAEPEN

Chapitre 1: Description d'un fluide

Notes manuscrites (scannées)

Antoine Dierckx • ant.dierckx@gmail.com

Attention: uniquement le chapitre 1 ici. Ce document DocHub contient **uniquement le premier chapitre**. L'ensemble des chapitres, des notes personnelles, des corrections d'exercices et une liste d'ouvrages de référence se trouvent sur mon site web.

— **Tous les chapitres :** voir la page du cours

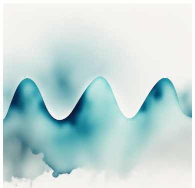
— **Corrections d'exercices & travaux personnels :** voir la page principale.

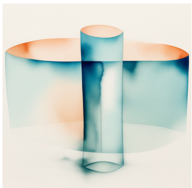
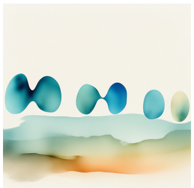
— **Ouvrages de référence :** voir la section bouquin.

Accéder au reste : scannez ou cliquez ici

https://adierckx.github.io/NotesAndSummaries/Master/MA1/PHYS-F-412





DYNAMIQUE DES FLUIDES ET DES PLASMAS

PHYS-F412 - Bernard Knaepen

[I] DESCRIPTION D'UN FLUIDE

1.1 Introduction

→ On va assimiler un fluide à un milieu continu. Le milieu est suffisamment dense pour que ses propriétés moyennes puissent être correctement définies localement.

→ On introduira la notion de particule de fluide

1.2 Définitions et notions préliminaires

DEF La vitesse du fluide $\vec{u}$ est définie en un point de l'espace à chaque instant selon :

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t) = \left[u(x,y,z,t), v(x,y,z,t), w(x,y,z,t)\right]$$

DEF Un écoulement est dit stationnaire si $\partial_t \vec{u} = 0$

(stationnaire ⟺ indépendant du temps)

→ exemple : écoulement stationnaire bi-dimensionnel :

$$\bar{u} = [u(x,y), v(x,y), 0]$$

⊙ Deux descriptions possibles :

→ Il est possible de traiter le fluide comme un champs :

$\forall$ grandeur, $\exists$ champ (exemple : densité $\rho(x,y,z,t)$).

C'est une description Eulerienne.

→ Alternativement, on peut traiter le fluide comme une collection de particules de fluide $\{A\}$. La densité de la particule de fluide "A" est alors $\rho_A(t)$. C'est une description Lagrangienne.

⊙ Liens entre les 2 descriptions :

→ Une particule de fluide qui se trouve au point $\vec{x}_A$ possède une densité $\rho_A(t) = \rho(\vec{x}_A, t)$

→ Que vaut $\rho_A(t+dt)$?

$$\rho_A(t+dt) = \rho\big(\underbrace{\vec{x}_A + \vec{u}(\vec{x}_A,t)dt}_{\text{déplacement de la part. de fluide}}, t+dt\big)$$

$$\simeq \rho(\vec{x}_A,t) + \partial_t \rho \, dt + \frac{\partial \rho}{\partial x^j} u^j(\bar{x}_A,t)\, dt$$

$$= \rho(\bar{x}_A,t) + \left\{ \partial_t \rho + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\rho \right\} dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\rho_A = \partial_t \rho + (\bar{u}\cdot\bar{\nabla})\rho$$

DEF Soit $y = y(\bar{x}, t)$ un champ tensoriel. On définit sa dérivée matérielle D/Dt selon :

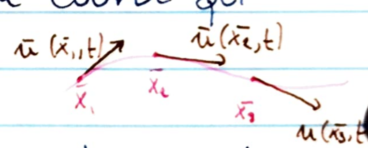
$$\frac{Dy}{Dt} \equiv \frac{\partial y}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\, y$$

→ Dérivée matérielle de la vitesse du fluide :

$$\frac{d\bar{u}_A}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u}\cdot\bar{\nabla})\cdot\bar{u}$$

⊙ Ligne de courant :

DEF On définit une ligne de courant comme une courbe qui est partout tangente à la vitesse $\vec{u}$ (à un certain instant t.)



→ Puisque $\bar{u} = \bar{u}(t)$, les lignes de courants peuvent varier et ne correspondent pas forcément avec les trajectoires des particules.

Prop Si un écoulement est stationnaire, trajectoire = ligne de courant.

Preuve : Soit $\bar{x}(s)$ une ligne de courant. Alors

$$f(\bar{x}+d\bar{x}) \simeq f(\bar{x}) + (d\bar{x}\cdot\bar{\nabla})f \rightsquigarrow \delta f = (d\bar{x}\cdot\bar{\nabla})f \propto (\bar{u}\cdot\bar{\nabla})f$$

↳ Si $(\bar{u}\cdot\bar{\nabla})f = 0$, alors $f = \text{cste}$ sur cette ligne de courant

→ Si $(\bar{u}.\bar{\nabla})f = 0$, cela signifie qu'elle est constante le long d'une ligne de courant, mais ça ne veut pas dire qu'elle prend la m̂ valeur sur toutes les lignes de courant.
En effet, $\frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow \partial_t f + (\bar{u}.\bar{\nabla})f = 0$

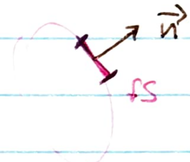
1.3 Equation du mvt pour un fluide idéal

DEF Un fluide est dit idéal si :

① Il est incompressible (les particules de fluides ne changent pas de volume lors de leur déplacement).

② Sa densité est une constante $\forall \bar{x}, \forall t$?

③ La force exercée par le fluide sur son environnement est normale à la surface : $\delta\vec{F} = p\,\vec{n}\,\delta S$
(Fluide non visqueux).

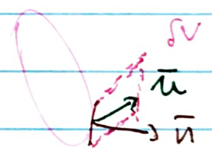


⊙ Conséquence de l'incompressibilité :

→ Soit un volume fixe de l'espace V. La quantité de masse qui quitte ce volume par unité de temps est

$$\frac{dM}{dt} = -\int_{\partial V} \rho\, \bar{u}.\bar{n}\, dS$$

$$= \int_V \rho\,.\,\vec{\nabla}(\bar{u}) = -\int_V \bar{\nabla}(\rho\bar{u})\, dV \overset{!}{=} 0$$



$\delta M = \rho\,\delta V$

On trouve que $\bar{\nabla}.\bar{u} = 0$

→ Même dans le cas où ρ varie dans l'espace, avec chaque PDF qui garde sa densité lors de son déplacement, la condition $\bar{\nabla}.\bar{u} = 0$ reste valable. En effet :

$$\dot{M} = \frac{d}{dt}\int \rho\, dV = -\frac{d}{dt}\int dV\, \bar{\nabla}(\rho\bar{u})$$

$$\dot{M} = \int \partial_t \rho\, dV$$

$\partial_t \rho + \bar{\nabla}(\rho\bar{u}) = 0$
Conservation de la masse

Or, si le fluide est idéal, par ②, $\partial_t\rho + (\bar{u}.\bar{\nabla})\rho = \dot{\rho} = 0$

Donc $\partial_t \rho + \rho(\bar{\nabla}.\bar{u}) + (\bar{u}.\bar{\nabla})\rho = \rho.(\bar{\nabla}.\bar{u}) = 0 \Rightarrow \bar{\nabla}.\bar{u} = 0$ ▨

Force totale exercée sur une PDF :

→ Soit un PDF délimitée par une surface S.

→ La force qu'exerce l'extérieur sur la PDF est $\delta \bar{F}_s = -p\bar{n}.\delta S$.

La force totale vaut : $\bar{F}_s = -\int_{\partial V} p.\bar{n}\,\delta S = \int_V -\bar{\nabla} p.dV$

→ Si on rajoute les forces de volume (ici la gravité), on a :

$$\bar{F} = \int_V (-\bar{\nabla} p + \rho \bar{g})\, dV$$

Equation d'Euler :

→ Soit un élément de fluide ∞-al. Alors

$$\delta \bar{F} \simeq (-\bar{\nabla} p + \rho \bar{g})\, \delta V$$

On applique $\delta \bar{F} = \delta m . \bar{a}$:

$$\rho\, \delta V \frac{d\bar{u}}{dt} = (-\bar{\nabla} p + \rho \bar{g})\, \delta V$$

DEF $\Rightarrow \rho \frac{d\bar{u}}{dt} = -\bar{\nabla} p + \rho \bar{g}$ Equation d'Euler (1)

→ On peut développer : $\rho\left(\partial_t \bar{u} + (\bar{u}.\bar{\nabla}).\bar{u}\right) = -\bar{\nabla} p + \rho \bar{g}$

↳ On peut réécrire le champ de pesanteur comme :

$$\rho.\bar{g} = \bar{\nabla}(\rho \bar{g} \bar{x}) = -\bar{\nabla}\rho\chi \quad \text{où } \chi \equiv -\bar{g}\bar{x}$$

On a alors : $-\bar{\nabla} p + \rho g = -\bar{\nabla} p - \bar{\nabla}(-\rho \bar{g}.\bar{x})$

$$= -\bar{\nabla}(p')$$

avec $p' \equiv p + \rho\chi = p - \rho \bar{g}.\bar{x}$.

↳ On peut également réécrire $(\bar{u}.\bar{\nabla}).\bar{u}$:

$$(\bar{u}.\bar{\nabla}).\bar{u} = u_j \partial_j u_i = (\bar{\nabla} \times \bar{u}) \times \bar{u} + \bar{\nabla}\left(\tfrac{1}{2}u^2\right)$$

En effet : $(\bar{\nabla} \times \bar{u}) \times \bar{u} + \bar{\nabla}\left(\tfrac{1}{2}u^2\right)$

$= \epsilon_{ijk} (\bar{\nabla} \times \bar{u})_j u_k + \partial_i \frac{1}{2} u_j u_j$

$= \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} \partial_l u_m u_k + \partial_i \frac{1}{2} u_j u_j$ $\qquad \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm} = \epsilon_{jki}\epsilon_{jlm}$

$= (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})(\partial_l u_m u_k) + \frac{1}{2}\partial_i u_j u_j$

$= \partial_k u_i u_k - \partial_i u_k u_k + \frac{1}{2}\partial_i u_j u_j$

$= u_i \partial_j u_j + u_j \partial_j u_i - 2u_j \partial_i u_j + u_j \partial_i u_j = u_j \partial_j u_i$ $\blacksquare$

On a alors $\rho\left[\partial_t \bar{u} + (\bar{\nabla}\times\bar{u})\times\bar{u} + \bar{\nabla}\left(\frac{1}{2}u^2\right)\right] = -\nabla(p+\rho\chi)$

$$\Leftrightarrow \partial_t u + (\bar{\nabla}\times\bar{u})\times\bar{u} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\chi\right) - \nabla\left(\frac{1}{2}u^2\right)$$

On trouve l'équation d'Euler (2) :

$$\partial_t \bar{u} + (\bar{\nabla}\times\bar{u})\times\bar{u} = -\bar{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}+\chi+\frac{1}{2}\bar{u}^2\right)$$

⊙ Théorème de Bernoulli :

Thm Pour un fluide idéal indépendant du temps,

$$H \equiv \frac{p}{\rho} + \chi + \frac{1}{2}u^2 = \text{cste}\Big|_{\text{ligne de courant}} \quad \Leftrightarrow (\bar{u}.\bar{\nabla})H = 0$$

Preuve Si l'écoulement ne dépend pas du temps, on a :

$$(\bar{\nabla}\times\bar{u})\times\bar{u} = -\nabla H \qquad \| \cdot \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{u}.\bar{\nabla})H = 0$$

↳ Pour un fluide idéal stationnaire, H est cst le long des lignes de courant.

DEF Un fluide est dit irrotationnel si $\bar{\nabla}\times\bar{u} = 0$

DEF On définit la vorticité par $\omega \equiv \bar{\nabla}\times\bar{u}$

↳ Un fluide est irrotationnel si sa vorticité est nulle.

Thm (Bernoulli pour un fluide irrotationnel). Pour un fluide idéal, stationnaire et irrotationnel, on a :

$$\bar{\nabla}.H = 0$$

Preuve Si $\partial_t u = 0$ et $\bar{\omega} = 0$, l'équation d'Euler (2) se réduit à

$$0 = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\chi+\frac{1}{2}\bar{u}^2\right)$$

1.4. Vorticité

a) Equation d'évolution (Euler) :

→ Par Euler (2), on a :

$$\partial_t \bar{u} + \bar{\omega} \times \bar{u} = -\bar{\nabla} H \qquad \| \nabla \times \cdot$$

$$\Leftrightarrow \partial_t \bar{\omega} + \nabla \times (\bar{\omega} \times \bar{u}) = 0 \qquad \text{car} \quad \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \varphi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \partial_t \bar{\omega} + (\bar{u} . \bar{\nabla}) \bar{\omega} - (\bar{\omega} . \bar{\nabla}) \bar{u} + \underbrace{(\bar{\nabla} . \bar{u})}_{0} \bar{\omega} - \underbrace{(\bar{\nabla} . \bar{\omega})}_{0} . \bar{u} = 0$$

On trouve $\partial_t \bar{\omega} + (\bar{u} . \bar{\nabla}) . \bar{\omega} = (\bar{\omega} . \bar{\nabla}) . \bar{u}$

$$\Leftrightarrow \frac{D \bar{\omega}}{Dt} = (\bar{\omega} . \bar{\nabla}) . \bar{u} \qquad \text{Version générale}$$

b) Cas d'un fluide à 2-D :

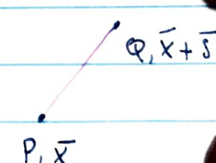
→ Sa vitesse est donnée par : $\bar{u} = [u(x,y,t), v(x,y,t), 0]$

↳ $\bar{\omega} = [0, 0, \omega(x,y,t)]$

↳ $(\bar{\omega} . \bar{\nabla}) \bar{u} = \omega \partial_z \bar{u} = 0$

On trouve $\dfrac{D\omega}{Dt} = 0$

c) Décomposition cinématique du champ de vitesse.



→ Evaluons la ≠ de vitesses de 2 points voisins :

$$\bar{u}_Q \simeq \bar{u}_P + (\bar{s} . \bar{\nabla}) \bar{u}$$

$$u_{Q} = u_{P_i} + s_j \partial_j u_i$$

$$= u_{P_i} + s_j \Big(\underbrace{\overbrace{\tfrac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j)}^{\text{sym}}}_{e_{ji}} + \underbrace{\overbrace{\tfrac{1}{2} (\partial_j u_i - \partial_i u_j)}^{\text{antisym}}}_{\tilde{e}_{ji}} \Big)$$

$$= u_{P_i} + s_j e_{ji} + s_j \tilde{e}_{ji}$$

$$= u_{P_i} + \partial_{s_i} \left(\tfrac{1}{2} s_i s_j e_{ij} \right) + s_j \tilde{e}_{ji}$$

Or, $\frac{1}{2} (\omega \times s)_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_j s_k = \frac{1}{2} \underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm}}_{\to \epsilon_{jki} \epsilon_{jlm}} \partial_l u_m s_k$

? $= \frac{1}{2} (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{il} \delta_{km}) \partial_l u_m s_k = \frac{1}{2} (\partial_k u_i s_k - \partial_i u_k s_k)$

$= -\tilde{e}_{ik} s_k = \tilde{e}_{ki} s_k$

$$\bar{u}_Q = \bar{u}_P + \underbrace{\tfrac{1}{2} (\bar{\omega} \times \bar{s})}_{\text{rotation autour de P}} + \underbrace{\bar{\nabla}_s \left(\tfrac{1}{2} e_{ij} s_i s_j \right)}_{\text{matrice symétrique} \to \text{diagonalisable}}$$

→ Diagonalisons : $\bar{\nabla}_s\left(\frac{1}{2} e_{ij} s_i s_j\right)$

On trouve $s_i s_j e_{ij} = e'_{11}(s_1')^2 + e'_{22}(s_2')^2 + e'_{33}(s_3')^2$

Si on place notre système d'axe au point P, on a :

$$\bar{u}_Q - \bar{u}_P = \delta \bar{u}|_{\bar{P}} = \begin{pmatrix} e'_{11}\, s_1' \\ e'_{22}\, s_2' \\ e'_{33}\, s_3' \end{pmatrix}$$

. C'est un contraction / dilatation dans les directions s_1', s_2' et s_3'.

→ Si l'écoulement est incompressible ;

$$\sum_i e'_{ii} = Tr(e'_{ij}) = Tr(e_{ij}) = \frac{1}{2}\sum_i (\partial_i u_i + \partial_i u_i) = 0$$

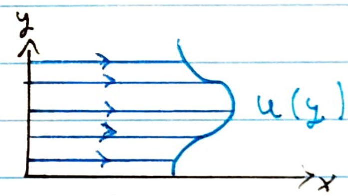
Dans un fluide incompressible, la trace est nulle.

2 INTRO AUX FLUIDES VISQUEUX

2.1 Introduction

→ Considérons un écoulement cisaillé simple :

$\bar{u} = [u(y), 0, 0]$



DEF Un fluide est dit Newtonien si la force de frottement est proportionnelle au gradient de vitesse.

Ici, $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ avec μ la viscosité moléculaire

force par unité de surface

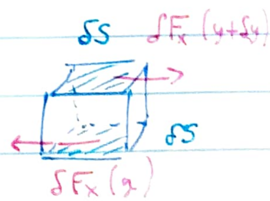
DEF On appelle viscosité cinématique la qté $\nu \equiv \mu / \rho$

2.2 Equation de Navier-Stokes

→ Calculons la force de surface due à la viscosité qui s'exerce sur un PDF :

$$\delta F_x(y+\delta y) = \tau(y+\delta y).\delta S = \mu \frac{du}{dy}(y+\delta y).\delta S$$

$$\delta F_x(y) = -\tau(y).\delta S = -\mu \frac{du}{dy}(y).\delta S$$



↳ $\sum \delta F = \mu\, \delta S\, \left(u'(y+\delta y) - u'(y)\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta F}{\delta V} \equiv \delta f = \frac{\mu\,\delta S}{\delta S\,\delta y}\left(u'(y+\delta y) - u'(y)\right) = \mu \frac{d^2 u}{dy}$$