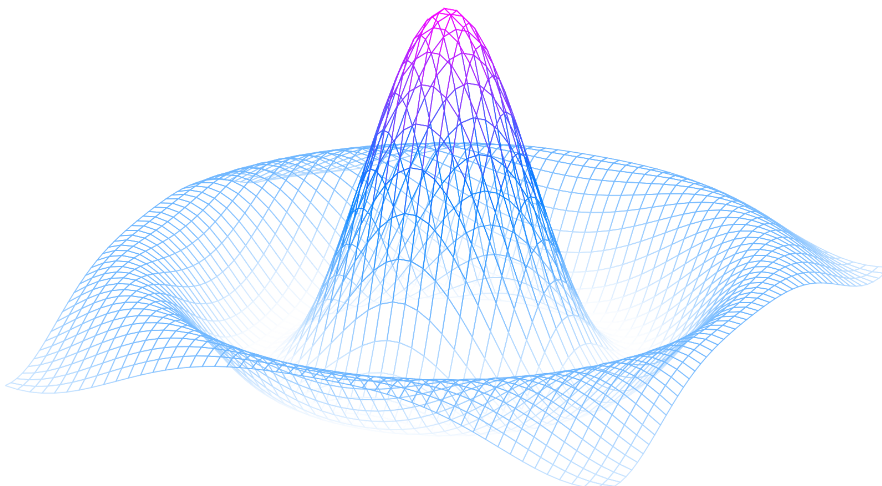
Université Libre de Bruxelles



Études sur les fonctions
en vue du test d'admission en mathématiques

Volume 1 - Notions fondamentales

Antoine DIERCKX

Version du 7 décembre 2023

Résumé

Les notes qui suivent sont à usage strictement personnel et n'ont été ni relues ni corrigées par un·e professionnel·le. Elles sont destinées à introduire certains concepts et techniques mathématiques mais ne constituent en aucun cas un syllabus. De très bons ouvrages, complets et en accès libres, peuvent être trouvés ici [1] et là [2].

Cette note est séparée en deux volumes :

- le premier porte sur des notions fondamentales, indispensables à la réussite du test d'admission en mathématique.
- le deuxième aborde des notions plus avancées, qui vous seront utiles plus tard dans votre parcours.

J'aimerais également remercier les personnes qui m'ont aidé dans la rédaction et la correction de cette note, en particulier : Sarah Lejeune et Clara Hannon.

> « Je rêve d'un jour où l'égoïsme ne régnera plus dans les sciences, où on s'associera pour étudier, au lieu d'envoyer aux académiciens des plis cachetés, on s'empressera de publier ses moindres observations pour peu qu'elles soient nouvelles, et on ajoutera "Je ne sais pas le reste". »
> *Évariste Galois*

Enfin, si vous avez des remarques et/ou des corrections, contactez moi à l'adresse `antwandirx@gmail.com`.
Bonne lecture et bon courage !

Table des matières

Première partie
Rappels

Si les erreurs de calculs ne reflètent pas la compréhension du cours, elles pénalisent énormément lors d'un examen (ou lors de la construction d'un pont).
Il faut essayer de les éviter au maximum, puis de repérer celles qui se sont glissées entre les mailles du filet pour les corriger avant de poursuivre un raisonnement coûteux en temps qui n'aura servi à rien.
Voici donc quelques rappels. [1]

> « Si j'ai vu plus loin que d'autres, c'est parce que j'étais soutenu par les épaules de géants. »
> *Isaac Newton*

1. Cette section est en grande partie inspirée de ce document [3]

1 Calcul numérique

1.1 Vocabulaire

Définition 1.1.
— Les éléments d'une addition sont appelés *termes*.
— Les éléments d'une multiplication sont appelés *facteurs*.

1.2 Règle des signes

Règle 1.1 (Règles des signes).
— Le produit de deux nombres positifs est positif.
— Le produit de deux nombres négatifs est positif.
— Le produit de deux nombres de signes contraires (c'est-à-dire d'un nombre positif et d'un nombre négatif) est négatif.

$+$	$+$	$+$
$-$	$-$	$+$
$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$

Remarque. Physiquement, on peut penser que lorsque l'on multiplie par -1, on « retourne » un axe, par exemple un thermomètre. Toutes les températures positives deviennent négatives, et inversement. Lorsque l'on réitère l'opération, on retrouve la situation initiale. On comprend alors intuitivement pourquoi $(-1)\cdot(-1) = +1$ ou encore $(-4)\cdot(-3) = 12$.

Remarque. Par la suite, on pensera à la *soustraction d'un nombre positif* comme à l'*addition d'un nombre négatif*. Cela simplifiera à la fois les formules et les schémas calculatoires.

1.3 Fractions

Règle 1.2 (Multiplication de fractions). Pour multiplier deux fractions, il suffit de multiplier à la fois leur numérateur et leur dénominateur.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \tag{1.1}$$

Exemple:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Règle 1.3 (Division par des fractions). Afin de diviser par une fraction, il faut multiplier par son inverse.

$$\frac{a}{b}/\frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \tag{1.2}$$

Exemple:

$$\frac{2}{3}/\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1} = \frac{4}{3}$$

Remarque. On remarque que l'analogie de la formule 1.2 avec la remarque 1.2.
En effet, au lieu de considérer une *division par un nombre entier*, on va penser la division comme la *multiplication par un nombre fractionnaire*. Plus de rigueur sur ces concepts est apportée dans la section suivante.

Règle 1.4 (Addition de fractions). Afin d'additionner des nombres fractionnaires, il faut qu'ils soient au **même dénominateur**.

$$\frac{a}{D} + \frac{b}{D} = \frac{a+b}{D} \tag{1.3}$$

Si ce n'est pas le cas, il faut multiplier chaque terme par $1 = \frac{d}{d}$ afin d'obtenir un dénominateur commun :

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{a \cdot b'}{b \cdot b'} + \frac{a' \cdot b}{b' \cdot b} = \frac{a \cdot b' + a' \cdot b}{b \cdot b'} \tag{1.4}$$

Exemple:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6}$$

Exemple:

$$\frac{2}{x^2 - x} + \frac{3}{x} = \frac{2 \cdot x}{(x^2 - x) \cdot x} + \frac{3 \cdot (x^2 - x)}{x \cdot (x^2 - x)} = \frac{3x^2 - x + 2x}{x \cdot (x^2 - x)} = \frac{x(3x+1)}{x \cdot (x^2 - x)} = \frac{3x+1}{x^2 - x}$$

Remarque. La technique présentée ci-dessus (multiplication « croisée » des dénominateurs) n'est pas la plus efficace en cas de facteur commun entre les dénominateurs. Afin d'identifier les facteurs commun et s'éviter des calculs inutiles, on introduit la notion de *décomposition en produit de facteurs premiers*.

Définition 1.2 (Nombre premier). Un nombre entier naturel est dit premier s'il admet 2 diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Exemple: Voici la liste des nombres premiers plus petit que 20 :

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$$

9 n'est pas premier car il est divisible par 1, 3, et 9.

Règle 1.5 (Décomposition en facteurs premiers). Si un nombre n'est pas premier, alors il peut être « décomposé » (factorisé) de manière unique en produit de nombres premiers. Cette technique permet de rendre explicite des facteurs communs, par exemple entre deux dénominateurs.
L'ordre de la décomposition n'a pas d'importance étant donnée la commutativité de la multiplication.

Exemple:

On veut décomposer le nombre 45 en facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline 5 & 3 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$$

On obtient donc

$$45 = 3 \cdot 5 \cdot 3 = 3^2 \cdot 5$$

On veut décomposer le nombre 735 en facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} & 735 \\ \hline 5 & 147 \\ \hline 3 & 49 \\ \hline 7 & 7 \\ \hline 7 & 1 \end{array}$$

On obtient donc

$$735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$$

Remarque. Afin de voir si un nombre est divisible par un 2, 3 ou 5, il existe une maniere rapide de l'apercevoir :

— Un nombre est un multiple de 2 si son dernier chiffre est 0,2,4,6 ou 8.

— Un nombre est un multiple de 3 si l'addition de ses chiffres est un multiple de 3

Exemple:

$$12345 \rightarrow 1+2+3+4+5=15 \rightarrow 1+5=6$$

Ainsi, 12345 est divisible par 3.

— Un nombre est un multiple de 5 si son dernier chiffre est 0 ou 5.

Exemple: (Application de la décomposition en facteurs premiers pour l'addition de fraction) On veut effectuer l'opération suivante :

$$\frac{1}{105}+\frac{13}{84}$$

Si on utilise la règle 1.4, il va falloir multiplier par 84 à gauche et par 105 à droite, ce qui même un dimanche pluvieux d'hiver n'est pas une activité recommandable. Au lieu de ça, on va chercher des facteurs premiers entre les deux fractions afin de simplifier la mise au même dénominateur :

On veut décomposer le nombre 105 en facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} & 105 \\ \hline 5 & 21 \\ \hline 3 & 7 \\ \hline 7 & 1 \end{array}$$

On obtient donc

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

On veut décomposer le nombre 84 en facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} & 84 \\ \hline 2 & 42 \\ \hline 2 & 21 \\ \hline 7 & 3 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$$

On obtient donc

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

On voit que les facteurs communs sont $3 \cdot 7 = 21$. On ne doit donc pas les multiplier. On obtient à présent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{105}+\frac{13}{84} &= \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{13}{2^2\cdot 3\cdot 7} \\ &= \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{2^2}{2^2}+\frac{13}{2^2\cdot 3\cdot 7}\cdot\frac{5}{5} \\ &= \frac{1\cdot 4+13\cdot 5}{105\cdot 4} \\ &= \frac{4+65}{420}=\frac{69}{420} \end{aligned}$$

La nouvelle fraction obtenue peut encore se simplifier. En effet :

$$\begin{aligned} &69 \rightarrow 6+9=15 \rightarrow 1+5=6 && \text{donc 69 est divisible par 3} \\ &420 \rightarrow 4+2+0=6 && \text{donc 420 est divisible par 3} \end{aligned}$$

On peut donc décomposer $69 = 3 \cdot 23$ et $420 = 3 \cdot 140$. Le résultat final est

$$\frac{1}{105}+\frac{13}{84}=\frac{23}{140}$$

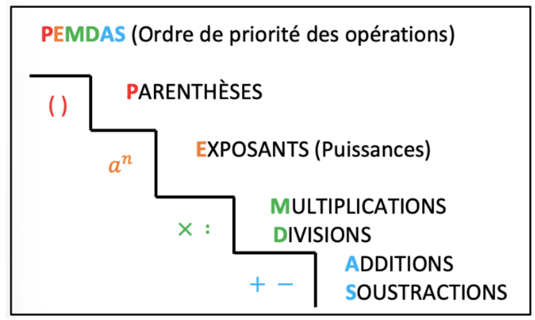
1.4 Règle PEMDAS

Règle 1.6 (PEMDAS). Il s'agit de l'ordre des priorités des opérations :

1. Parenthèses
2. Exposants (puissances)
3. Multiplications et Divisions
4. Additions et Soustractions

Exemple:

$$\begin{aligned}
& 3 \cdot (3+7) - \frac{4^2}{2} & \\
=& 3 \cdot 10 - \frac{4^2}{2} & \text{parenthèses} \\
=& 3 \cdot 10 - \frac{16}{2} & \text{exposants} \\
=& 30 - 8 & \text{multiplications (et divisions)} \\
=& 22 & \text{additions (et soustractions)}
\end{aligned}$$



2 Calcul littéral

2.1 Formules de distributivité et mise en évidence

Règle 2.1 (Formule de distributivité). Lorsque qu'un nombre multiplie une parenthèse, on peut *distribuer* celui-ci à chaque terme présent dans la parenthèse.

$$a \cdot (b+c) = ab + ac \tag{2.1}$$

Exemple:

$$7 \cdot (3x+6) = 21x + 42$$

Inversement, s'il existe un facteur commun à tout les termes d'une parenthèse, on peut effectuer l'opération inverse, dite de mise en évidence.

Règle 2.2 (Formule de mise en évidence).

$$ab + ac = a \cdot (b+c) \tag{2.2}$$

Exemple:

$$x^2 + 27x = x \cdot x + x \cdot 27 = x \cdot (x+27)$$

Exemple:

$$\frac{21x+42}{7} = \frac{7 \cdot (3x+6)}{7} = 3x + 6 = 3(x+2)$$

Règle 2.3 (Formules de double distributivité). Dans le cas où l'on multiplie deux parenthèses entre elles, il faut multiplier chaque terme deux à deux. C'est la *double distributivité*.

$$(a+b) \cdot (c+d) = ac + ad + bc + bd \tag{2.3}$$

Exemple:

$$\begin{aligned}(x-12)(x+4) &= x\cdot x + x\cdot 4 + (-12)\cdot x + (-12)\cdot 4 \\ &= x^2 - 8x - 48\end{aligned}$$

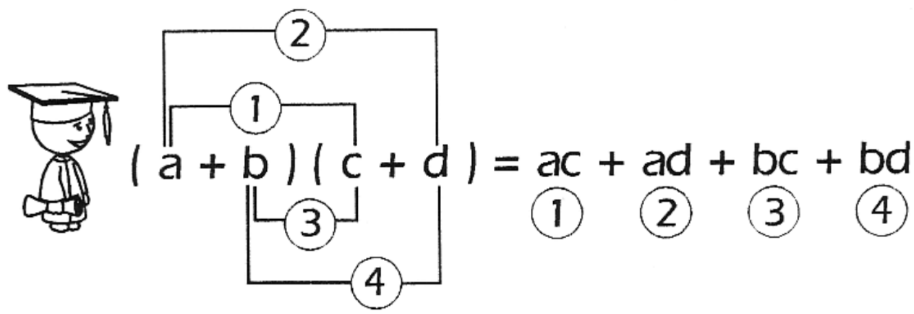
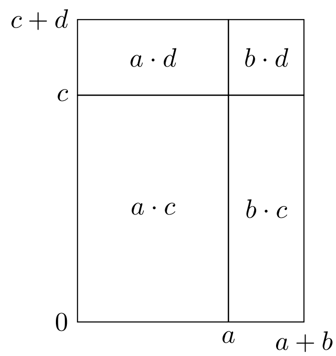


FIGURE 1 – Illustration de la formule 2.3

Remarque. La formule de double distributivité peut se visualiser à l'aide d'un rectangle.



L'air d'un rectangle de coté $a+b$ et $c+d$ et donnée par

$$(a+b)\cdot(c+d)$$

2.2 Identités remarquables

Les deux identités suivantes sont des cas particuliers des formules de distributivité vues plus haut. Ce sont des égalités qui reviennent souvent dans les calculs et qu'il peut être utile de connaître par coeur.

Théorème 2.1.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\cdot ab \tag{2.4}$$

Preuve.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

□

Théorème 2.2.

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \tag{2.5}$$

Preuve.

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$$

□

2.3 Puissances

Définition 2.1. On définit l'opération puissance par la multiplication un certain nombre de fois de ce nombre par lui même. On note en exposant du nombre multiplié le nombre de fois qu'il a été multiplié

Exemple:

$$12^2 = 12 \cdot 12 = 144$$
$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 3 = 27$$
$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

Propriété 2.3 (Multiplication de puissances). *Pour multiplier deux mêmes nombres ayant des puissances différentes, on additionne leur exposants.*
Soit a,n,m des nombres non-nuls. On a :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{2.6}$$

Exemple:

$$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$$
$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

Remarque. Attention, cette règle ne fonctionne qui si les deux nombres sont égaux. Par exemple :

$$a_1^{b_1} \cdot a_2^{b_2} \neq (a_1 \cdot a_2)^{b_1+b_2}$$
$$a_1^b + a_2^b \neq (a_1 + a_2)^b$$

Propriété 2.4 (Puissances particulières). *Soit a un nombre non nul. Alors :*

$$a^0 = 1 \tag{2.7}$$
$$a^1 = a \tag{2.8}$$
$$\sqrt{a} = a^{1/2} \tag{2.9}$$
$$\sqrt[n]{a} = a^{1/m} \tag{2.10}$$

Exemple:

$$\left(\sqrt{x}\right)^{2/3} = x^{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}} = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$$

Exemple:

$$\sqrt[3]{\sqrt{x^{18}}} = \left(\left(x^{18}\right)^{1/2}\right)^{1/3} = x^{18 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = x^{\frac{18}{2 \cdot 3}} = x^3$$

Propriété 2.5 (Manipulation de puissances). *Soit a,b,m,m des nombres non-nuls. Alors :*

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m} \tag{2.11}$$
$$\frac{a^m}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n} \tag{2.12}$$

Deuxième partie
Généralités

Nous allons introduire ici plusieurs notions très générales, qui pourraient paraître abstraites dans un premier temps, mais qui seront concrétisées par des applications dans les parties 8 et 9. Le but de cette introduction est de donner un point de vue le plus général possible sur la notion de fonction tout en limitant le plus possible le formalisme qui y est lié.

> « L'essence des mathématiques, c'est la liberté. »
> *Georg Cantor*

3 Notations mathématiques

Afin de pouvoir exprimer de manière compacte et précise les notions abordées dans ce syllabus, nous introduisons plusieurs notations. Celles-ci se rapprochent du langage formel que vous rencontrerez dans vos études d'informatique.

3.1 Égalités

Dans la suite de ces notes, nous étudierons comment évoluent certaines quantités par rapport à d'autres. Pour cela, le signe « égal » $=$ sera abondamment utilisé, ainsi que plusieurs de ses variantes.

Notation 3.1.
— On note $=$ pour signifier que deux quantités sont égales
— On note $\neq$ pour signifier que deux quantités sont différentes
— On note $\equiv$ pour *assigner* une équation à un objet mathématique
— On note $\widehat{=}$ pour signifier « égal par *définition* »
— On note $\overset{!}{=}$ pour signifier qu'on *impose* que deux quantités soit égales
— On note $<$ (ou $\leq$) pour signifier « plus petit (ou égal) »
— On note $>$ (ou $\geq$) pour signifier « plus grand (ou égal) »

Exercice 3.1.

$$f \equiv y \ = \ ax^2 + bx \overset{!}{=} 0$$

La fonction f a pour équation $y = ax^2 + bx$ qu'on impose $= 0$.

3.2 Opérateurs logiques

Lors de ce cours, on se limitera à l'utilisation des 3 symboles suivants :

Notation 3.2. On note $\Rightarrow$ pour signifier « implique ».

Exemple: Il pleut $\Rightarrow$ le sol est mouillé

Notation 3.3. On note $\Leftarrow$ pour signifier est impliqué par

Exemple: le sol est mouillé $\Leftarrow$ Il pleut
mais : le sol est mouillé $\not\Rightarrow$ Il pleut

Notation 3.4. On note $\iff$ pour signifier « est équivalent à », « si et seulement si » (« ssi »pour les intimes).
Ce symbole $\iff$ est la contraction des deux précédents $\Leftarrow$ et $\Rightarrow$

Exemple: le sol est mouillé $\not\Leftrightarrow$ Il pleut
En effet, le sol peut être mouillé pour d'autre raison, les deux propositions ne sont donc pas équivalentes.

Exemple: Si $a \Leftarrow b$ et $b \Leftarrow a$, alors $a \iff b$.

Exemple: Si $a \iff b$, alors $a \Leftarrow b$ et $b \Leftarrow a$.

Cependant, notons l'existence de 3 opérateurs logiques supplémentaires, particulièrement utilisés en informatique :

Notation 3.5. On note $\neg$ pour signifier la négation (« non »)

Notation 3.6. On note $\wedge$ pour signifier la conjonction (« et »)

Notation 3.7. On note $\vee$ pour signifier la disjonction non-exclusive (« ou »)

Une mathématicienne déjeune au restaurant. Le serveur lui demande : « Fromage ou dessert ? ». La mathématicienne répond « oui ».

3.3 Ensembles

3.3.1 Définition d'un ensemble

Définition 3.8. Un **ensemble** représente une collection [2] d'objets. Les objets de la collection sont les éléments de l'ensemble.

Remarque. Il est possible de définir un même ensemble de plusieurs manières (*en compréhension* ou *comme image directe*).

Exemple: $\{n \in \mathbb{N} | \text{ est pair }\}$ et $\{2m | m \in \mathbb{N}\}$ sont équivalents.

3.3.2 Relations sur les ensembles

Notation 3.9. On note $\in$ l'**appartenance** entre un élément d'un ensemble et celui-ci.

Exemple: $1 \in \{0, 1, 2, 3\}$. On dit que 1 est un *élément* de $\{0, 1, 2, 3\}$.

Notation 3.10. On note $\subset$ l'**inclusion** entre deux ensembles.

Remarque. Dans le cas particulier où l'ensemble contient un élément unique, on l'appelle un *singleton*.

Exemple: $\{1\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$
$\{1, 3\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$
On dit que $\{1\}$ et $\{1, 3\}$ sont des *parties* de $\{0, 1, 2, 3\}$.

3.3.3 Opérations sur les ensembles

Si on est en présence de plusieurs ensembles, on définit les deux opérations suivantes :

Notation 3.11. On note $\cap$ l'**intersection** entre deux ensembles.

Exemple: $\{0, 1, 2, 3\} \cap \{0, 1\} = \{0, 1\}$

Remarque. Si l'intersection de deux ensembles est vide, ils sont dit *disjoints*.

Notation 3.12. On note $\emptyset$ pour représenter l'ensemble vide.

Exemple: $\{2,3\} \cap \{0,1\} = \emptyset$

Notation 3.13. On note $\cup$ l'**union** entre deux ensembles.

Exemple: $\{1\} \cup \{0\} = \{0,1\}$

3.4 Quantificateurs

Lorsqu'on écrit des définitions et théorèmes, il peut être utile de rendre plus compacte l'écriture. À cet effet, on utilise souvent les trois notations suivantes :

Notation 3.14. On note $\forall$ pour signifier « **pour tout** », « quel que soit ».

Exemple:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n + m \in \mathbb{N}$$

Pour tout entiers naturels n et m, leur somme est également un entier

Notation 3.15. On note $\exists$ pour signifier « **il existe** » (au moins un)

Exemple:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists m \in \mathbb{N} \text{ tel que } \quad m > n$$

Pour tout entier naturel n, il existe un autre entier naturel m plus grand que n. On dit que $\mathbb{N}$ est *non borné*.

Notation 3.16. On note : ou | pour signifier « **tel que** », « telle que », « tels que », etc.

Exemple:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists m \in \mathbb{N}| \quad m > n$$

Remarque. Attention, l'ordre des quantificateurs a beaucoup d'importance.

Exemple: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} : m \geq n$
Pour tout entier naturel n, il existe un autre entier naturel m tel que m est supérieur ou égal à n.

Exemple: $\exists m \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}\ , m \geq n$
Il existe un entier naturel m tel que pour tout entier naturel n, m est plus grand ou égal à n.

Les exemples précédents énoncent deux propositions contradictoires. A votre avis, laquelle est correcte ?

Remarque. A titre personnel, je recommande de limiter l'utilisation des quantificateurs et d'écrire le plus possible en français dans les copies, afin d'éviter une correction plus intransigeante due à l'utilisation de notations rigoureuses. De plus, il est d'usage de toujours séparer les notations mathématiques de la rédaction en langage naturel.

3.5 Symboles arithmétiques

3.5.1 Notion d'indice

Définition 3.17. Un indice est un symbole placé souvent à droite et au-dessous d'un autre symbole, qu'il caractérise ou numérote.

Exemple: Soit le couple de nombre $(3, -2)$ qui représente la position du nombre p sur une grille. Je peux utiliser une notation indicielle pour faire référence à ces nombres :

$$(p_1, p_2) \text{ avec } p_1 = 3 \text{ et } p_2 = -2$$

Je peux également écrire

$$p_i \text{ avec } i \in \{1, 2\}$$

Remarque. En programmation informatique, la notation indicielle est massivement utilisée, notamment pour faire référence à un élément d'une liste.
De plus, les indices commence généralement en 0 et non en 1.

Exemple:

```
a = [5,4,3,2,1]
print('le premier élement de la liste est',a[0],'et le 4eme est', a[3])
=> le premier élement de la liste est 5 et le 4eme est 2
```

3.5.2 Somme

Notation 3.18. On note $\sum$ une somme répétée. Pour cela, on introduit un indice i, qui commence à $i = 0$ ou $i = 1$ (en général), et qui s'arrête à la valeur renseignée au dessus du symbole $\sum$:

$$\sum_{i=1}^{i=k}$$

Exemple:

$$\sum_{i=0}^{i=3} i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{x^k}{x!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... = e^x$$

3.5.3 Produit

Notation 3.19. On note $\prod$ un produit répété. Pour cela, on introduit un indice i, qui commence à $i = 1$ (en général), et qui s'arrête à la valeur renseignée au dessus du symbole $\prod$:

$$\prod_{i=1}^{i=k}$$

Exemple:

$$\prod_{j=1}^{j=3} j^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$$

$$\prod_{j=1}^{j=n} j = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

Remarque. Les indices utilisés dans les sommes ou produits sont dit *muets*, car ils disparaissent après la sommation (ou la multiplication). [3]

Exemple:

$$\prod_{j=1}^{j=3} j^2 = \prod_{k=1}^{k=3} k^2 = \prod_{\gamma=1}^{\gamma=3} \gamma^2 = 36$$

4 Nombres et ensembles

4.1 Nombres naturels et entiers

1. Les premiers nombres qui viennent à l'esprit sont les **nombres entiers naturels**. C'est avec eux que l'on compte les objets de la vie quotidienne : *Alice a trois pommes, Bob a deux bras, Elon a 200 milliards de dollars américains.*

Définition 4.1. L'ensemble des **entiers naturels** est l'ensemble

$$\boxed{\mathbb{N} \equiv \{0, 1, 2, 3, ...\}}$$

2. Dans les nombres naturels, l'addition est bien définie (c'est-à-dire que l'addition de 2 nombres naturels donnera toujours un troisième nombre naturel), mais la soustraction ne l'est pas. En effet :

$$3 + 5 = 8 \in \mathbb{N}$$
$$\text{mais } 3 - 5 = -2 \notin \mathbb{N}$$

ou plus rigoureusement :

$$\forall a \in \mathbb{N} \quad \exists b \in \mathbb{N} \mid a - b = c \notin \mathbb{N}$$

On définit alors les **nombres entiers** comme suit :

Définition 4.2. L'ensemble des nombres entiers est l'ensemble

$$\boxed{\mathbb{Z} \equiv \{..., -3, -2 - 1, 0, 1, 2, 3, ...\}}$$

Propriété 4.1. *On peut écrire*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

car tout nombre entier naturel est un nombre entier.

3. Une autre justification de leur appellation « muet » est qu'ils ne crient pas lorsqu'on les modifie.

4.2 Nombres rationnels

De la même manière qu'on a étendu l'ensemble des naturels $\mathbb{N}$ à l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$ par la soustraction, on va étendre l'ensemble $\mathbb{Z}$ à l'ensemble des **nombres rationnels** $\mathbb{Q}$ par la division.

Définition 4.3. On définit l'ensemble des **nombres rationnels** comme l'ensemble

$$\boxed{\mathbb{Q} \equiv \{\frac{a}{b} \text{ avec } a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0\}}$$

Propriété 4.2. *On peut écrire*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

car tout nombre entier est un nombre rationnel.

Intuitivement, les nombres rationnels sont les fractions, ou les nombres à virgules dont les décimales se répètent.

Exemple: $\frac{3}{2}$; $1,6$; $\frac{1}{3} = 1,333...$

4.3 Nombres réels

Une dernière généralisation évoquée ici est l'**ensemble des nombres réels** $\mathbb{R}$. Cette généralisation est un peu plus subtile que les deux précédentes, elle découle du fait que certains nombres ne peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, quels que soient les nombres a,b réels.

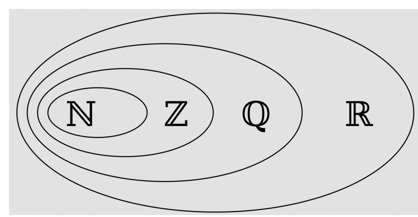


Figure 2 – Représentation des inclusions en terme d'ensembles

Définition 4.4. L'ensemble des **nombres réels** est l'ensemble contenant tous les nombres qui peuvent être représentés par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales.
On note cet ensemble $\mathbb{R}$.

Des exemples de nombres réels non rationnels sont π et $\sqrt{2}$.

Remarque. Si cela vous intéresse, sachez qu'il est possible de généraliser encore les nombres réels pour obtenir les nombres complexes [4] ou encore les quaternions [5].

.

4. On "rajoute" aux nombres réels le nombre imaginaire i en définissant $i^2 = -1$ ou encore $i = \sqrt{-1}$. On définit un nombre complexe comme la somme d'un nombre réel et d'un nombre imaginaire, de la forme $a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Dans le cas des polynômes, cela permet d'obtenir autant de solutions que le degré du polynôme (voir formule 9.17), ce qui rend le plan complexe *algébriquement fermé*.

5. Même principe que pour les nombres imaginaires, mais en introduisant $i^2 = j^2 = k^2 = ijk$. Cette structure est associée au groupe $SU(2)$.

4.4 Notations sur les ensembles

Afin de rendre toujours plus compacte l'écriture, nous introduisons les notations suivantes :

Notation 4.5. On note X un ensemble quelconque, et x ses éléments.

Notation 4.6. On note X_+ les éléments positifs d'un ensemble :

$$X_+ \equiv \{x \in X | x \geq 0\} \tag{4.1}$$

Notation 4.7. On note X_- les éléments négatifs d'un ensemble :

$$X_- \equiv \{x \in X | x \leq 0\} \tag{4.2}$$

Notation 4.8. On note X^0 les éléments d'un ensemble privé de 0 :

$$X^0 \equiv X \backslash \{0\} \tag{4.3}$$

Propriété 4.3.

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \tag{4.4}$$

Propriété 4.4.

$$\mathbb{N}_- = \emptyset \tag{4.5}$$

5 Fonction et variable

5.1 Variable

Définition 5.1. Une **variable** est un symbole représentant un élément quelconque d'un ensemble.

Par exemple, on peut définir la variable $x \in X \equiv \mathbb{Q}^+$. Même si l'on ne connaît explicitement la variable x, on sait qu'il s'agit d'un nombre rationnel et positif.

Définition 5.2. Un **intervalle** $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est définit comme l'ensemble des nombres réels entre a et b. On peut écrire

$$[a, b] \equiv \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} \tag{5.1}$$
$$[a, b[\equiv \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\} \tag{5.2}$$
$$]a, b[\equiv \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} \tag{5.3}$$
$$[a, \infty[\equiv \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\} \tag{5.4}$$
$$]-\infty, b] \equiv \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\} \tag{5.5}$$

Exemple: $[0,1]$ est le segment de la droite réelle compris entre 0 et 1. On peut écrire

$$[0,1]\backslash\{0,1\} =]0,1[$$

Exemple:

$$[-3;3]\backslash\{0\} = [-3;0[\cup]0;3]$$

Exemple:

$$]0,\infty[= \mathbb{R}^0_+$$

5.2 Fonction

Dans la plupart des cas que nous allons aborder, les fonctions seront définies sur un intervalle.

On peut imaginer une fonction comme une *machine* qui envoie une *(ou plusieurs)* variable*(s)* sur une *(ou plusieurs)* variable*(s)*. Ainsi, pour définir une fonction, il faut à la fois définir son ensemble de départ *(son domaine)* et son *ensemble d'arrivée*, mais aussi la manière précise (explicite) dont chaque élément du domaine est envoyé dans l'ensemble d'arrivée [6].

Définition 5.3. Soit X, Y deux ensembles, et $x \in X$, $y \in Y$. Alors on définit la **fonction** f par :

$$f : X \to Y \quad (5.6)$$
$$x \mapsto f(x) \quad (5.7)$$

où tout élément $x \in X$ est envoyé sur **au plus** un élément $y \in Y$. On peut écrire

$$\boxed{y = f(x)}$$

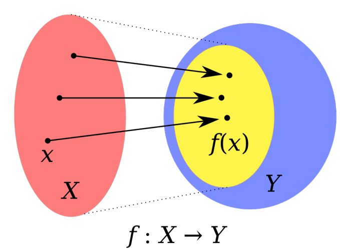


FIGURE 3 – Visualisation du concept de fonction en terme d'ensembles

Autrement dit, on a écrit une relation entre x et y.
Si le premier varie, le deuxième varie aussi. La relation entre les deux peut être représentée, dans le cas d'une fonction réelle d'une variable réelle, par une courbe contenue dans un plan. Par la suite, nous considérerons toujours une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Définition 5.4 (Fonction réelle d'une variable réelle).

$$f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R} \quad (5.8)$$
$$x \mapsto f(x) \quad (5.9)$$

Dans ce cas précis, on définit l'**abscisse** et l'**ordonnée** comme la variable x et son image par la fonction $f(x)$. Le couple des deux forme alors une **coordonnée**, qui identifie un point $(x, f(x))$.

Le concept de fonction est assez abstrait car très général. Il est important de retenir son caractère *dynamique*.

6. Plus précisément, chaque élément du domaine est envoyé sur l'ensemble image de la fonction, qui est en général un sous-ensemble de ce dernier.

Définition 5.5. On définit le **graphe Γ d'une fonction** f par l'ensemble des coordonnées $(x, y = f(x))$. On écrit :

$$\Gamma_f \equiv \{(x, y) | x \in X, y \in Y, y = f(x)\} \qquad (5.10)$$

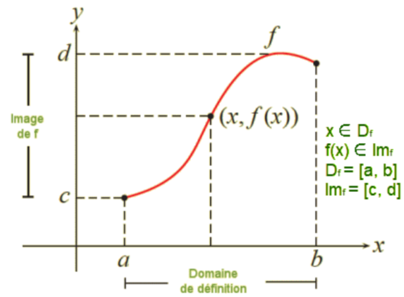


FIGURE 4 – Représentation graphique d'une fonction

6 Analyse d'une fonction

6.1 Racine

Définition 6.1. L'ensemble des racines d'une fonction sont toutes les valeurs de $x \in X$ telles que

$$f(x) = 0$$

On peut écrire que l'ensemble des racines d'une fonction $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$ est

$$X_0 \equiv \{x \in X | f(x) = 0\}$$

Graphiquement, les racines d'une fonction f sont ses intersections avec l'axe $y = 0$.

6.2 Signe et inéquation

Définition 6.2 (Signe d'une fonction). Le signe d'une fonction est positif si $f(x) > 0$ et négatif si $f(x) < 0$. On note

$$\operatorname{sgn}\big[f(x)\big] > 0 \text{ ou } \operatorname{sgn}\big[f(x)\big] < 0$$

Graphiquement, une fonction est positive si elle se place au dessus de l'axe $y = 0$ (*l'axe des abscisses*) et négative si elle se place en dessous.
Un concept similaire à celui du signe d'une fonction est celui d'*inéquation*.

Définition 6.3 (Inéquation). Une inéquation est une relation (*une question*) inégalitaire entre deux quantités qui contiennent des inconnues. Soit f et g deux fonctions définie sur X vers Y. Alors l'inéquation

$$f(x) > g(x)$$

revient à déterminer l'ensemble

$$\{x \in X | f(x) > g(x)\}$$

Autrement dit, cela revient à déterminer

$$\{x \in X | \operatorname{sgn}\big[f(x) - g(x)\big] > 0\} \qquad (6.1)$$

6.3 Croissance

La croissance d'une fonction est une notion capitale pour aborder le concept de dérivée abordé dans la « Partie 2 : notions avancées ».

Soit f une fonction et I un intervalle contenu dans son ensemble de définition $I \subset X$.

Définition 6.4. La fonction f est dite **croissante sur Y** si elle prend des valeurs de plus en plus grandes lorsque x croît.
Mathématiquement, on écrit :
Soit $f : I \subset X \subset \mathbb{R} \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I. La fonction est dite croissante $\iff$

$$\forall x_1, x_2 \in I : \boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)} \tag{6.2}$$

Définition 6.5. La fonction f est dite **décroissante sur Y** si elle prend des valeurs de plus en plus petites lorsque x croît.
Mathématiquement, on écrit :
Soit $f : I \subset X \subset \mathbb{R} \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I. La fonction est dite décroissante $\iff$

$$\forall x_1, x_2 \in I : \boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)} \tag{6.3}$$

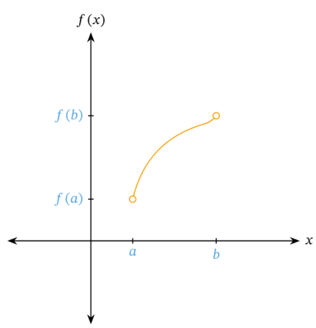


FIGURE 5 – Graphique d'une fonction croissante entre a et b

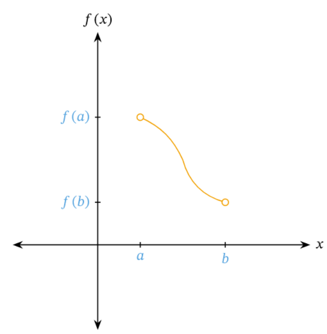


FIGURE 6 – Graphique d'une fonction décroissante entre a et b

6.4 Ordonnée à l'origine

Définition 6.6. Soit f une fonction d'ensemble de départ X et d'ensemble image Y.
Son ordonnée à l'origine est l'unique point $y \in Y$ satisfaisant

$$y = f(0) \tag{6.4}$$

Graphiquement, il s'agit de l'intersection entre le graphe Γ_f de la fonction et l'axe $x = 0$.
En général, l'ordonnée à l'origine d'une fonction est beaucoup plus simple à calculer que ses racines.

Exemple: Soit la fonction de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$y = f(x) = \frac{2x - 1}{x - 2}$$

Son ordonnée à l'origine est donnée par :

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{2 \cdot 0 - 1}{0 - 2} \\ &= \frac{-1}{-2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Troisième partie

Fonctions polynomiales

Remarque. Par abus de langage, on appelle parfois une fonction polynomiale un polynôme, confondant ainsi la notion de fonction polynomiale avec celle de polynôme formel. Cette confusion est sans gravité dans le cadre des polynômes à coefficients réels ou complexes (ou plus généralement à coefficients dans un corps infini) mais peut conduire à des contresens en général (par exemple pour les polynômes à coefficients dans un corps fini). [4]
Par la suite, nous restreindrons le terme polynôme à son sens de *fonction polynomiale sur les réels*.

> « Les mathématiques sont une sorte de jouet que la nature nous a lancé pour nous consoler et nous divertir dans cette vallée de larmes. »
> *Jean-Baptiste le Rond d'Alembert*

7 Introduction

Dans le cadre de ces notes, nous prendrons la définition suivante pour un polynome :

Définition 7.1. Un polynôme P à coefficients réels est une fonction de la forme

$$P \equiv f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

On peut alors définir des cas particuliers, correspondant au « petites » puissances de x.

Définition 7.2 (Polynômes particuliers). On distingue les polynômes particuliers suivants :

0. Les fonctions **constantes** ($n = 0$)
$$f(x) = a \quad a \in \mathbb{R} \tag{7.1}$$

1. Les fonctions **affines** ($n = 1$)
$$f(x) = ax + b \quad a \in \mathbb{R}^0; b \in \mathbb{R} \tag{7.2}$$

2. Les fonctions **quadratiques** ($n = 2$)
$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad a \in \mathbb{R}^0; b, c \in \mathbb{R} \tag{7.3}$$

3. Les fonctions **cubiques** ($n = 3$)
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad a \in \mathbb{R}^0; b, c, d \in \mathbb{R} \tag{7.4}$$

8 Polynômes du premier degré

8.1 Équation

Définition 8.1. On définit un **polynôme de degré 1** comme une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme

$$\boxed{y = f(x) = ax + b}$$

où a et b sont des nombres réels quelconques.

Remarque. Attention, a et b ne sont pas des variables ! Ces nombres sont fixés, *donnés* par la personne qui fait l'exercice. Ils ne varient donc pas au cours de l'exercice au contraire de x et $y = f(x)$.

Monsieur et Madame Naume ont une fille. Comme s'appelle-t-elle ?
Réponse : Pauline

8.2 Graphe

Les graphes correspondant aux polynômes du premier degré sont les **droites**.

8.2.1 Ordonnée à l'origine

Propriété 8.1 (Ordonnée à l'origine d'une droite). *Soit une droite d'équation $\mathcal{D} \equiv f(x) = ax + b$. Alors son ordonnée à l'origine est :*

$$f(0) = b \tag{8.1}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} f(x = 0) &= a \cdot (x = 0) + b \\ &= a \cdot 0 + b \\ &= b \end{aligned}$$

□

Ainsi, une droite passe par l'**origine** (point du plan défini pas $(x, y) = (0, 0)$) si $b = 0$.

8.2.2 Racine

Propriété 8.2 (Racine d'un polynôme de degré 1). *Soit $f = ax+b$ un polynôme du premier degré. Alors il possède une unique racine dont l'abscisse est donnée par :*

$$\boxed{x_0 = \frac{-b}{a}} \tag{8.2}$$

Preuve. En appliquant la définition du point 6, on voit qu'il faut résoudre l'égalité suivante :

$$y = f(x_0) = 0 \text{ où } f(x) \equiv ax + b \tag{8.3}$$

$$\iff ax_0 + b = 0 \tag{8.4}$$

$$\iff ax_0 = -b \tag{8.5}$$

$$\iff \boxed{x_0 = \frac{-b}{a}} \tag{8.6}$$

□

Remarque. On remarque que le cas $a = 0$ n'est pas défini (car on diviserait par 0). Ceci est cohérent puisque cela correspond au cas où $f(x) = b$, et pour peu que $b \neq 0$, on retrouve le fait que $f(x) \neq 0 \; \forall x$. La fonction constante non-nulle ne possède donc pas de racine.

8.2.3 Tableau de signes

Après avoir déterminé la racine (s'il y en a une), on peut dresser un tableau de signes afin de se faire une idée du comportement de notre droite. Deux cas peuvent alors apparaître :

x	$]-\infty; x_0[$	x_0	$]x_0; +\infty[$
signe de $f(x)$	-	0	$+$

Ce cas correspond à une droite *montante*, c'est-à-dire avec une pente positive, et donc avec $a > 0$.
Une droite montante est *partout croissante*.

x	$]-\infty; x_0[$	x_0	$]x_0; +\infty[$
signe de $f(x)$	$+$	0	-

Ce cas correspond à une droite *descendante*, c'est-à-dire avec une pente négative, et donc avec $a < 0$.
Une droite descendante est *partout décroissante*.

8.3 Inéquation

Définition 8.2 (Inéquation du premier degré). Une inéquation stricte du premier degré à une inconnue est de la forme

$$ax + b < 0 \tag{8.7}$$

Remarque. Cette définition se généralise en remplaçant « $<$ » par « $\leq$ », « $>$ » et « $\geq$ ».

Graphiquement, cela revient à considérer $x \in \mathbb{R}$ seulement si la droite est en dessous de l'axe des abscisses.

Exemple:

$$3x + 1 > 0 \iff x > \frac{-1}{3}$$

Exemple:

$$\frac{u-3}{2} + 4 > 5u \iff u - 3 + 8 > 10u \iff 5 > 9u \iff u < \frac{5}{9}$$

Propriété 8.3. *Lorsque l'on multiplie une inégalité par (-1), le sens de l'inégalité change. Par exemple :*

$$-x \leq -y \iff x \geq y \tag{8.8}$$

Exemple:

$$x^2 + 3x - 5 \geq (x-9)(x+3) \iff x^2 + 3x - 5 \geq x^2 - 6x - 27 \iff 22 \geq -9x \iff x \geq \frac{22}{9}$$

8.4 Exemples simples

Remarque. Afin de ne pas entraver le plaisir de la résolution d'exercices, les indications et/ou solutions sont localisées dans le chapitre 10. Les symboles suivants sont utilisés :

— indique que l'usage de la calculatrice est recommandée.
— indique la présence d'une indication.
— indique la présence d'une résolution partielle de l'exercice.
— indique la présence de la solution finale.
— indique la présence d'une solution (et explication) détaillée.

Deux points pour une droite

Exercice 8.1 (10.1). *Soit* $p_1 = (x_1, y_1) = (2; 1)$ *et* $p_2 = (x_2, y_2) = (3; 4)$ *deux points qui appartiennent à une droite.*

— *Donner l'équation de* $y = f(x)$
— *Calculer ses racines*
— *Dresser le tableau de signes de* f

Une droite pour deux points

Exercice 8.2 (10.2). *Soit une droite donnée par* $y = f(x) = -2x + 3$.
Est-ce que les points $p_1 = (x_1, y_1) = (7, -12)$ *et* $p_2 = (x_2, y_2) = (-15, 33)$ *appartiennent à la droite ?*

Exercice 8.3. *Dans les cas suivants, déterminer si le point p appartient au graphe de la fonction.*

$$f_1(x) = 3x - 5 \text{ et } p_1 = (1; -2)$$
$$f_2(y) = -2y + 1 \text{ et } p_2 = (-2; 3)$$
$$f_3(\text{🤟}) = 2\text{🤟} + 4 \text{ et } p_3 = (-1; -2)$$
$$f_4(\gamma) = \frac{2}{3}\gamma + \frac{7}{3} \text{ et } p_4 = (4; 5)$$

Exercice 8.4. *Résoudre des les inéquations suivantes en donnant la solution sous forme d'un intervalle solution :*

1. $x - 3 < 5x + 1$
2. $2 - 3x \geq 0$
3. $5x - 7 \geq 0$
4. $-4x + \frac{5}{4} \leq 0$
5. $-2 - \frac{3}{2}x \geq 0$

8.5 Problèmes

> Il n'y a pas de problème
> Il n'y a que des professeurs.
> *Jacques Prévert*

Exercice 8.5 (Vendeur de chemises(10.3)). *Un commerçant veut écouler 100 chemises démodées. Il réussit à en vendre 43 au prix initial. Il consent alors un rabais de 1 € par chemise et en vend ainsi 17. Il liquide le reste à 1,5 € l'unité.*

1. *Calculer le prix initial d'une chemise* x_c*, sachant qu'il a encaissé en tout 1 243 €*
2. *Une fois* x_c *calculé, réinjecter sa valeur dans l'égalité trouvée au point précédent afin de vérifier son résultat.*

Exercice 8.6 (10.4). *Trois électriciennes ont effectué les installations électriques dans les différents appartements d'un immeuble. La première a travaillé sur deux cinquièmes du nombre total d'appartements, la seconde a travaillé sur un cinquième du nombre total d'appartements plus 8 appartements, la dernière a travaillé sur les 16 appartements qui restent.*

1. *Calculer le nombre total d'appartements de l'immeuble.*
2. *En déduire, pour chaque électricienne le nombre d'appartements sur lequel elle a travaillé.*

Exercice 8.7 (Garage automobile(10.5)). *Un garage automobile propose à un client de reprendre son véhicule d'occasion au prix de 3 790 pour acheter un nouveau véhicule neuf. Pour financer son achat, le client doit ajouter au montant de la reprise un quart du prix du nouveau véhicule puis compléter par un emprunt égal à la moitié du prix du nouveau véhicule.*

1. *Quel est le prix du nouveau véhicule ?*

2. *Quel est le montant de la somme empruntée ?*

Exercice 8.8 (Marchands d'internet). *Soit deux opérateurs du marché de la téléphonie mobile en Belgique, Troximousse et Jaune. Chez Troximousse, il faut payer pour les frais d'inscription (5 €), puis le prix du Mb de data coûte 5 centimes. Chez Jaune, les frais d'inscription sont gratuit et le prix du Mb est de 8 centimes. On note $t(x)$ le prix de l'abonnement internet en fonction du Mb consommé chez Troximousse et $j(x)$ chez Jaune.*

1. *Déterminer les deux fonctions $t(x)$ et $j(x)$.*
2. *Représenter les deux fonctions $t(x)$ et $j(x)$ sur un même graphe.*
3. *Déterminer graphiquement (approximativement) la quantité de data pour laquelle le prix est le même chez les deux opérateurs*
4. *Déterminer algébriquement la quantité de data pour laquelle le prix est le même chez les deux opérateurs.*

Exercice 8.9 (🖩). *Une société d'informatique veut publier un nouveau logiciel en magasin. Les frais de création s'élève à 30 000 €, et la production de chaque boite contenant le logiciel coûte 3, 5 €.*

— *Déterminer le coûts de production $C(n)$ de n logiciels.*
— *Chaque logiciel est vendu 6, 5 €. Calculer la recette $R(n)$ pour n logiciels vendus.*
— *Représenter graphiquement dans un même repère les fonctions C et R associées.*
— *Combien de logiciels la société doit-elle vendre pour réaliser un bénéfice ?*
— *La société souhaite réaliser des bénéfices à partir de 4000 logiciels vendus. A quel prix doit-elle alors vendre chaque logiciel ?*

Remarque. Les exercices suivants : 8.5 et 8.6 sont tirés de ce pdf.[5]

> « Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est uniquement parce qu'iels ne réalisent pas à quel point la vie est compliquée. »
> *John von Neumann*

9 Polynômes du second degré

9.1 Équation

Remarque. Il existe plusieurs manières d'écrire une équation quadratique. Nous verrons les trois principales :

1. la forme *réduite*
2. la forme *factorisée*
3. la forme *canonique*

Les formes factorisées et canoniques seront abordées plus tard dans cette section 9.

Définition 9.1 (Forme réduite). On définit un **polynôme du second degré** par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme

$$\boxed{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$$

où $a \in \mathbb{R}^0$ et $b, c \in \mathbb{R}$

9.2 Graphe

Les graphes correspondant aux polynômes du second degré sont les **paraboles**.

9.2.1 Ordonnée à l'origine

Propriété 9.1 (Ordonnée à l'origine d'une parabole). *Soit une parabole d'équation* $\mathcal{P} \equiv f(x) = ax^2 + bx + c$. *Alors son ordonnée à l'origine est :*

$$f(0) = c \tag{9.1}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} f(x=0) &= a \cdot (x=0)^2 + b \cdot (x=0) + c \\ &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ &= c \end{aligned}$$

□

Ainsi, une parabole passe par l'**origine** (point du plan défini pas $(x, y) = (0, 0)$) si $c = 0$.

9.2.2 Racine

La formule pour la racine étant plus compliquée dans le cas d'un polynôme de degré 2, on introduit d'abord une première quantité : le discriminant.

Définition 9.2 (Discriminant). Soit $f = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}_0$ et $b, c \in \mathbb{R}$.
On définit le **discriminant** Δ_0 comme suit :

$$\Delta_0 \equiv b^2 - 4ac \tag{9.2}$$

Propriété 9.2 (Racine d'un polynôme de degré 2). *Soit* $f = ax^2 + bx + c$ *avec* $a \in \mathbb{R}_0,\ \ b, c \in \mathbb{R}$. *Alors il possède entre 0 et 2 racines réelles dont les abscisses sont données par :*

$$\boxed{x_0^{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta_0}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{9.3}$$

Preuve. En appliquant la définition du point 6, on voit qu'il faut résoudre l'égalité suivante :

$$y = f(x_0) = 0 \text{ où } f(x) \equiv ax^2 + bx + c \tag{9.4}$$

$$\iff f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c = 0 \tag{9.5}$$

$$\iff f(x_0) = a \cdot \left(x_0^2 + \frac{b}{a} \cdot x_0 + \frac{c}{a}\right) \tag{9.6}$$

$$\tag{9.7}$$

On utilise ici la méthode de *complétion du carré* :

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2 \cdot \alpha\beta$$

En posant $\alpha = x$ et $\beta = b/2a$, on obtient

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

On utilise alors ce résultat pour le calcul de $f(x_0)$:

$$f(x_0) = a \cdot \left(x_0^2 + \frac{b}{a} \cdot x_0 + \frac{c}{a}\right) \tag{9.8}$$

$$\iff f(x_0) = a \cdot \left(\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \tag{9.9}$$

$$\iff f(x_0) = a \cdot \left(\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \tag{9.10}$$

Afin de simplifier l'écriture (et parce qu'on verra des propriétés intéressantes sur cette quantités plus tard), on fait apparaître le *discriminant* $\Delta_0 = b^2 - 4ac$.

L'équation 9.10 devient alors :

$$f(x_0) = a \cdot \left(\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta_0}{4a^2}\right) = 0 \tag{9.11}$$

$$\iff \left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta_0}{4a^2} = 0 \tag{9.12}$$

$$\iff \left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta_0}{4a^2} \tag{9.13}$$

$$\iff x_0 + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{\Delta_0}}{2a} \tag{9.14}$$

$$\iff x_0 = \frac{\pm\sqrt{\Delta_0}}{2a} - \frac{b}{2a} \tag{9.15}$$

$$\iff x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta_0}}{2a} \tag{9.16}$$

$$\iff \boxed{x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{9.17}$$

□

Remarquons que cette quantité n'est définie que pour un discriminant Δ_0 positif ou nul. En effet :

Règle 9.1 (Règle du discriminant).
si $\Delta_0 > 0$, f possède **2 racines** réelles. On les note $x_0^{\pm}$ ou x_1, x_2.
— si $\Delta_0 = 0$, f possède **1 racine** réelle. On la note x_0.
— si $\Delta_0 < 0$, f ne possède **aucune racine** réelle.

Remarque. En réalité, un polynôme de degré 2 possède toujours deux racines complexes, données par $x_0^{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{i|\Delta_0|}}{2a}$.

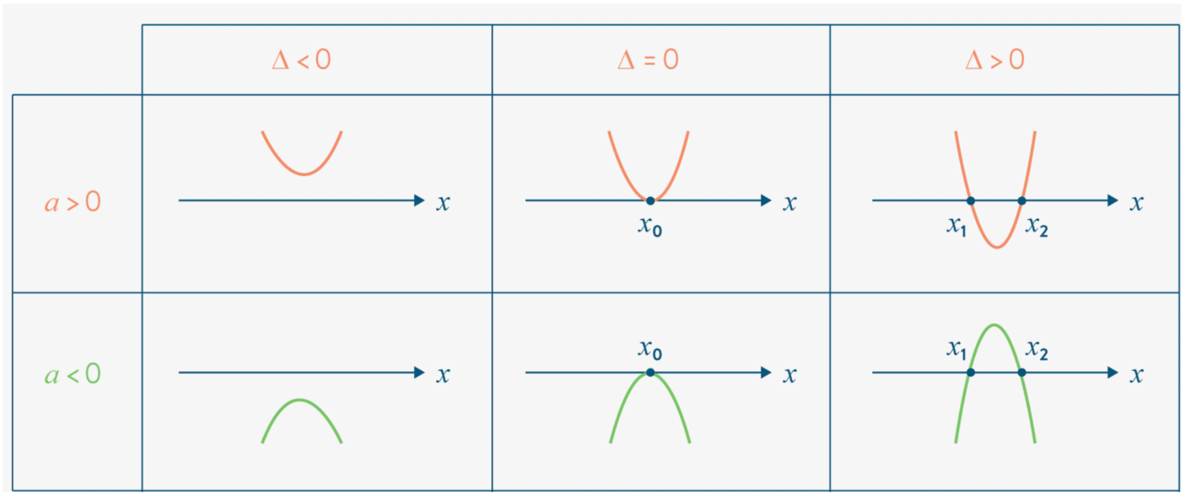


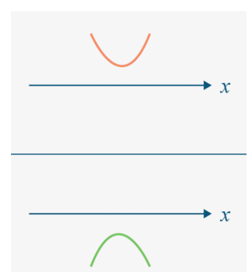
FIGURE 7 – 3 cas possibles en fonction de la valeur du discriminant Δ_0

9.2.3 Tableau de signes

De la même manière que pour les polynômes du premier degré (point 8), on peut dresser un tableau de signes pour se faire une idée du comportement de la parabole.
Le comportement de $f(x)$ lorsque x est "grand" [7] est donné par le signe de a, puisque le terme en x^2 "gagne" sur le terme en x pour de grande valeurs de x. Ainsi, il suffit de regarder le signe de a pour connaître le signe de la fonction en $\pm\infty$ (cf figure 7). On adopte la convention, dans les tableaux de signe suivant, que $\pm$ vaut $+$ si $a > 0$ et $-$ si $a < 0$ (et inversement pour $\mp$).

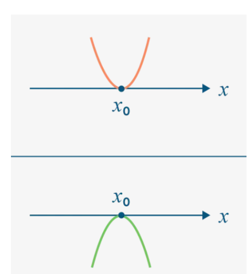
— Si $\Delta_0 < 0$:
la fonction ne change pas de signe.

x	$\mathbb{R}$
signe de $f(x)$	$\pm$

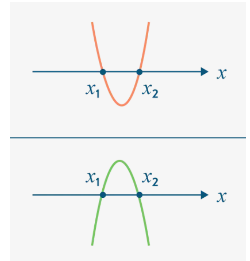


— Si $\Delta_0 = 0$:
la fonction ne possède qu'une racine, et ne change pas de signe.

x	$]-\infty; x_0[$	$\{x_0\}$	$]x_0; \infty[$
signe de $f(x)$	$\pm$	0	$\pm$



7. Rigoureusement, on parle de la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $\pm\infty$.



— Si $\Delta_0 > 0$:
la fonction possède 2 racines, et change de signe entre celles-ci.

x	$]-\infty; x_0^-[$	$\{x_0^-\}$	$]x_0^-; x_0^+[$	$\{x_0^+\}$	$]x_0^+; +\infty[$
signe de $f(x)$	$\pm$	0	$\mp$	0	$\pm$

9.2.4 Minimum et maximum

Une parabole étant symétrique, son minimum (ou maximum) se trouve au milieu des deux racines. On peut alors le calculer en utilisant cette méthode. [8]
Commençons par donner les définitions suivantes :

Définition 9.3 (Distance entre deux points). Soit deux points x_1 et x_2. La distance entre deux est donnée par :

$$\Delta x \equiv |x_2 - x_1| \tag{9.18}$$

avec $|\cdot|$ est la valeur absolue.

Définition 9.4. L'**extremum** d'une fonction est définit comme étant son maximum ou son minimum.

Propriété 9.3 (Extremum d'une parabole). *Soit $f = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}^0$. Alors l'abscisse de son extremum est donné par :*

$$\boxed{x_{extr} = \frac{-b}{2a}} \tag{9.19}$$

Preuve. La moitié de la distance entre deux points est donnée par

$$d_{1/2} = \frac{\Delta x}{2} = \frac{|x_2 - x_1|}{2} \tag{9.20}$$

On utilise alors la formule 6 pour calculer la distance entre x_0^- et x_0^+. Ensuite, le minimum sera donné par

$$x_{\text{extr}} = x_0^- + d_{1/2} \tag{9.21}$$

Ainsi,

$$d_{1/2} = \frac{|x_0^+ - x_0^-|}{2} \tag{9.22}$$

8. Il existe une méthode beaucoup plus rapide qui utilise la dérivée de $ax^2 + bx + c$, à savoir $2ax + b$, puis l'égale à zéro pour obtenir $x_{\text{min}} = -b/2a$.

Or, $x_0^+ > x_0^-$ donc on peut laisser tomber les valeurs absolues

$$\begin{aligned} d_{1/2} &= \frac{\frac{-b+\sqrt{|\Delta_0|}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{|\Delta_0|}}{2a}}{2} && (9.23)\\ &= \frac{-b+\sqrt{|\Delta_0|}+b+\sqrt{|\Delta_0|}}{4a} && (9.24)\\ &= \frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2a} && (9.25)\end{aligned}$$

On trouve donc que

$$\begin{aligned} x_{\text{extr}} &= x_0^- + d_{1/2} && (9.26)\\ &= \frac{-b-\sqrt{|\Delta_0|}}{2a} + \frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2a} && (9.27)\\ &= \frac{-b}{2a} && (9.28)\end{aligned}$$

On trouve que le **minimum/ maximum d'une parabole** est donnée par :

$$\boxed{x_{\text{extr}} = \frac{-b}{2a}}$$

□

Remarque. Dans le cas où $\Delta_0 = 0$, on trouve bien que l'extremum de la fonction coïncide avec son unique racine : $x_{\text{extr}} = x_0$.

9.2.5 Autres formes d'une équation quadratique

Nous pouvons à présent introduire les deux autres formes (factorisée et canonique) d'un polynôme.

Définition 9.5 (Forme factorisée et canonique). Soit un polynôme du deuxième degré $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \in \mathbb{R}^0$ et $b, c \in \mathbb{R}$

— On définit sa **forme factorisée** de la manière suivante :

$$\boxed{f(x) = a(x - x_0^+)(x - x_0^-)} \tag{9.29}$$

où $x_0^\pm$ sont les racines du polynôme.

— On définit sa **forme canonique** de la manière suivante :

$$\boxed{f(x) = a(x - x_{\text{extr}})^2 - \frac{\Delta_0}{4a^2}} \tag{9.30}$$

où Δ_0 est le discriminant et x_{extr} l'extremum du polynôme.

Remarque. En fait, nous avons déjà rencontré la forme canonique d'un polynôme dans l'équation 9.11 de la preuve de la propriété 9.2.

9.3 Inéquation

Définition 9.6 (Inéquation du deuxième degré). Une inéquation stricte du deuxième degré à une inconnue est de la forme

$$ax^2 + bx + x < 0 \tag{9.31}$$

Remarque. Cette définition se généralise en remplaçant « $<$ » par « $\leq$ », « $>$ » et « $\geq$ ».

Graphiquement, cela revient à considérer $x \in \mathbb{R}$ seulement si la parabole est en dessous de l'axe des abscisses.
En général, une inéquation du deuxième degré se résout avec un tableau de signes.

9.4 Exemples simples

Remarque. Afin de ne pas entraver le plaisir de la résolution d'exercices, les indications et/ou solutions sont localisées dans le chapitre 10. Les symboles suivants sont utilisés :
- 🖩 indique que l'usage de la calculatrice est recommandée.
- 👁 indique la présence d'une indication.
- 👁👁 indique la présence d'une résolution partielle de l'exercice.
- 👁 indique la présence de la solution finale.
- 👁👁 indique la présence d'une explication détaillée.

Exercice 9.1 (👁 10.6). *Soit l'égalité suivante :*

$$\frac{v+15}{3u} = u - 4$$

- *Trouver la fonction $v = f(u)$.*
- *Trouver les racines de f.*
- *Injecter les valeurs trouvées et vérifier que ce sont bien des racines.*
- *Dresser un tableau de signe pour f.*

Exercice 9.2 (👁 10.7). *Soit l'égalité suivante :*

$$\frac{x+\pi^3}{y} = y + \pi(\pi - 1)$$

- *Trouver la fonction $x = f(y)$.*
- *Trouver les racines de f.*
- *Injecter les valeurs trouvées et vérifier que ce sont bien des racines.*
- *Dresser un tableau de signe pour f.*

Exercice 9.3 (Inéquations produits). *Résoudre les inéquations suivantes. L'utilisation d'un tableau de signes est recommandée.*

1. $(x-4)(3-x) \leq 0$
2. $(x+7)^2 + 2(x+1)(x+7) \leq 0$
3. $4x^2 - 9 \geq 0$
4. $(3x+5)^2 \geq 0$
5. $(3x+5)^2 \geq 1$

Exercice 9.4 (Inéquations particulières). *Résoudre les inéquations suivantes sans calcul (ou presque).*

1. $-5x^2 \leq 0$
2. $(x-1)^2 < 0$
3. $(x-4)^2 > 0$
4. $x^3 + 2x^2 + x \geq 0$

Exercice 9.5 (Inéquations rationnelles (👁👁10.8)). *Résoudre les inéquations suivantes. L'utilisation d'un tableau de signes est recommandée.*

1. $\frac{x+1}{3-x} \geq 0$
2. $\frac{7-2x}{2x-1} \leq 0$
3. $\frac{x+4}{5-x} < 2$
4. $\frac{5x}{1-x} \leq \frac{10x}{2x+1}$

Exercice 9.6 (Erreurs fréquentes). *Les propositions suivantes sont fausses. Donner une raison de cette erreur puis donner la proposition vraie en résolvant l'inéquation*

1. *Si* $x^2 \geq 9$, *alors* $x \geq 3$
2. *Si* $\frac{1}{x} > 1$, *alors* $1 < x$
3. *Si* $x(1-x) < 2$, *alors* $1 - x < 2$
4. *Si* $\frac{2x+1}{x-3} \leq 1$, *alors* $2x + 1 \leq x - 3$

9.5 Problèmes

> En essayant continuellement, on finit par réussir. Donc plus ça rate, plus on a de chances que ça marche.
> *Les Shadocks*

Exercice 9.7 ((Intersection de courbes) 10.9). *Soit les fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$\begin{cases} f(x) & = x^2 + x - 6 \\ g(x) & = x - 2 \end{cases}$$

- *Trouver les racines et les ordonnées à l'origine de* f *et* g.
- *Tracer les graphes* $\Gamma_f(x)$ *et* $\Gamma_g(x)$.
- *Déterminer leur(s) intersection(s) graphiquement (approximativement).*
- *En quel(s) point(s) leurs courbes se croisent-elles ?*
- *Remplacer le résultat obtenu pour vérifier sa réponse.*

Exercice 9.8 (10.10). *Soit les fonctions* λ *et* ν *suivantes :*

$$\begin{cases} \lambda(x) & = \frac{x+1}{x-3} \\ \nu(x) & = \frac{x-4}{x+2} \end{cases}$$

définies respectivement sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ *et* $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$

- *Pourquoi* λ *n'est pas définie en* $x = 3$ *? Vers quoi tend la valeur de* $\lambda(x)$ *lorsque* x *tend vers* 3 *?*
- *Même question pour* $\nu(x)$.
- *Donner les racines de* λ *et* ν.
- *En quel(s) point(s) leurs courbes se croisent-elles ?*
- *Remplacer le résultat obtenu pour vérifier sa réponse.*

Exercice 9.9 (10.11). *Plusieurs personnes se sont réunies pour fêter Noël. Chaque personne a apporté trois cadeaux à chacune des autres personnes.*

- *Sachant qu'au total 468 cadeaux ont été déposés près de l'arbre de Noël, combien de personnes y avait-il ?*
- *Remplacer le résultat obtenu pour vérifier sa réponse.*

Exercice 9.10 (10.12). *Un père a 25 ans de plus que son fils et le produit de leurs âges est de 116.*

- *Calculer les âges du père et du fils.*
- *Un fois trouvé, réinjecter les réponses obtenues afin de vérifier sa réponse.*

Exercice 9.11 (). *Avec 180 € j'ai acheté un certain nombre d'articles identiques. Si chaque article avait coûté 3 € de moins, j'aurais pu en acheter 3 de plus.*

- *Combien en ai-je acheté ?*
- *Quel était le prix initial ?*
- *Remplacer les résultats obtenus pour vérifier sa réponse.*

Exercice 9.12. *On considère la droite* $\mathcal{D}$ *et la parabole* $\mathcal{P}$ *d'équations respectives :* $\begin{cases} \mathcal{D} \equiv y = \frac{1}{2}x + 1 \\ \mathcal{P} \equiv y = x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \end{cases}$

- *Calculer les abscisses* $\{x_i\}$ *des points d'intersection de* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{P}$.
- *Calculer* $\mathcal{D}(x_i)$ *et* $\mathcal{P}(x_i)$

— *Ces quantités sont-elles égales ? Pourquoi ?*

Exercice 9.13 (Tchoutchou (🖩)). *Deux trains A et B partent en même temps d'une même gare, l'un vers le nord et l'autre vers l'est. Le train A se déplace à 25 km/h de plus en moyenne que le train B.*
Après 2 heures, ils sont à 250 km de distance (à vol d'oiseau) l'un de l'autre.
Rappel : pour obtenir la distance parcourue à partir d'une vitesse moyenne, il faut multiplier la vitesse par le temps écoulé.

— *Faire un schéma de la situation*
— *Trouver la vitesse moyenne de chaque train.*
— *Remplacer le résultat obtenu pour vérifier sa réponse.*

Exercice 9.14 (Équation bicarré). *Soit* $z(x) = x^4 - x^2 - 6$.

— *Montrer que si un nombre* $x \in \mathbb{R}$ *est solution de* $z(x) = 0$, *alors le nombre* y *défini par* $y = x^2$ *vérifie* $y^2 - y - 6 = 0$.
— *Déterminer les valeurs possibles de* y.
— *Résoudre* $z(x) = 0$.
— *Commenter le nombre de racines de* z *et remplacer le résultat obtenu pour vérifier sa réponse.*

Exercice 9.15 (Équation à paramètre (👁👁 10.13). *Soit* $f_m(x) = mx^2 + 4x + 2(m-1)$.

— *Pour quelles valeurs de* m, $fm(x)$ *admet-elle une unique racine ?*

Exercice 9.16. *Soit* $Z_p(z) = 5z^2 - 2pz + z$.

— *Trouver* p *tel que* $-2 \in \{z \in \mathbb{R} | Z_p(z) = 0\}$
— *Donner l'autre racine associée.*
— *Remplacer le résultat obtenu pour vérifier sa réponse.*

Exercice 9.17. *Soit* $\mathcal{A}_a(\alpha) = a\alpha^2 - 12\alpha + 9$.

— *Déterminer toutes les valeurs possibles de* a *pour que* $\mathcal{A}_a(\alpha)$ *admettent deux racines distinctes.*

Exercice 9.18. *Soit* $\mathcal{B}_\beta(b) = 2b^2 + 4b + \beta$.

— *Déterminer toutes les valeurs possibles de* β *pour que* $\mathcal{B}_\beta(b)$ *ne possède aucune racine réelle.*
— *Remplacer le résultat obtenu pour vérifier sa réponse.*

Exercice 9.19. *Soit* $\mathcal{G}_\gamma(g) = \gamma g^2 + (\gamma - 2)g - 2$.

— *Déterminer toutes les valeurs possibles de* γ *pour que* $\mathcal{G}_\gamma(b)$ *admette un seule racine réelle.*

Exercice 9.20. *Soit le système* $\mathcal{S} \equiv \begin{cases} ✄ + 🖫 = 3 \\ \frac{1}{✄} + \frac{1}{🖫} = -\frac{3}{4} \end{cases}$ *avec* ✄, 🖫 $\in \mathbb{R}$.

— *Résoudre le système*

Exercice 9.21 (Bonus). *Quel est le point commun entre une parabole et l'humour ?*

Exercice 9.22 (🖩). *Une automobile et un camion font un trajet de 480 km. Ils partent en même temps. L'automobile fait 20 km/h de plus que le camion et arrive à destination 2 heures avant le camion.*

— *Donner la relation entre la vitesse de l'automobile* v_a *et celle du camion* v_c.
— *Donner la relation entre la temps de trajet de l'automobile* t_a *et celle du camion* t_c.
— *Donner la relation entre la distance* d *et* v_a,t_a. *Idem pour* d,v_c *et* t_c.
— *Trouver la vitesse de chaque véhicule*

.

Exercice 9.23 (Inégalités quadratiques).
Résoudre dans $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

—
$$h(y) = y^2 + 2y - 15 > 0$$

—
$$\frac{1}{x} > \frac{x}{x+2}$$

—
$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{3}{(x+1)(x-2)}$$

—
$$\frac{3}{2x-1} - \frac{x}{2(x-1)} \leq 0$$

Exercice 9.24. *Soit* $f_m(x) = -2x^2 + 4x + m$

— *Déterminer* $m \in \mathbb{R}$ *pour que* $f_m(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Remarque. Les exercices suivants : 9.9, 9.10 et 9.15 sont tirés de ce pdf.[6]
Les exercices suivants : 9.11, 9.12,9.13 et 9.14 sont tirés de ce pdf.[7]
Les exercices suivants : 8.4, 9.3,9.4, 9.5 et 9.6 sont tirés de ce pdf.[8]

> « Il est difficile de faire la différence entre un·e mathématicien·ne qui dort et un·e mathématicien·ne qui travaille. »
> *André Lichnerowicz*

10 Solutions des exercices et problèmes

10.1 Solutions des exercices sur les polynômes du premier degré

Solution 10.1 (exercice 8.1). *Nous allons devoir résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. Notre but est de déterminer les coefficients a et b de notre formule $f(x) = ax+b$. Or, les points p_1 et p_2 appartiennent à la droite, et donc satisfont l'égalité $y = f(x)$. On injecte ainsi, pour chaque point, sa coordonnée :*

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + b = 1 \\ 3a + b = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 - 2a \\ a = (4 - b)/3 \end{cases} \begin{aligned} \Rightarrow \quad a &= \tfrac{4-(1-2a)}{3} \\ \iff \quad 3a &= 3 + 2a \\ \iff \quad a &= 3 \end{aligned}$$

En remplaçant $a = 3$ dans $b = 1 - 2a$, on obtient $b = -5$. On trouve que notre droite a pour équation

$$y = f(x) = 3x - 5$$

Sa racine est $x_0 = 5/3$ et son tableau de signes :

x	$]-\infty; 5/3[$	$5/3$	$]5/3; +\infty[$
signe de $f(x)$	-	0	+

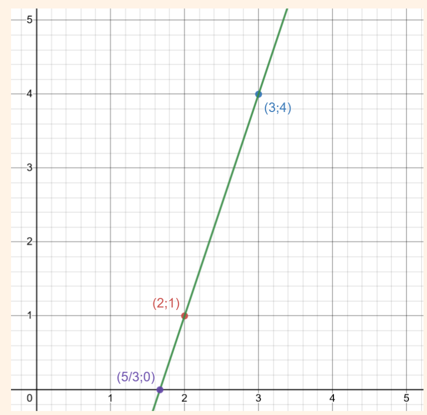


FIGURE 8 – Représentation graphique de l'exemple 8.4

Solution 10.2 (exercice 8.2). *Un point (x_i, y_i) appartient à une fonction si il est solution de l'équation $y_i = f(x_i)$. Il faut donc remplacer la coordonnée de chaque point dans l'équation ci-dessus et voir ensuite si on obtient une contradiction (par exemple $3 = 2$) ou un résultat trivial (par exemple $1 = 1$).*

Pour le point p_1, on a :

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_1) \\ y_1 &= -2x_1 + 3 \ \textit{Or, } (x_1, y_1) = (7, -12) \\ -12 &= -2 \cdot 7 + 3 \\ -12 &= -11 \end{aligned}$$

On voit donc que le premier point n'appartient pas à la droite :

$$p_1 \notin (x, f(x))$$

$$\begin{aligned} y_2 &= f(x_2) \\ y_2 &= -2x_2 + 3 \ \textit{Or, } (x_2, y_2) = (-15, 33) \\ 33 &= -2 \cdot (-15) + 3 \\ 33 &= 33 \end{aligned}$$

On voit donc que le deuxième point appartient à la droite :

$$p_2 \in (x, f(x))$$

Indication 10.3 (exercice 8.5). *Pour traiter un problème, la première étape est d'extraire les informations.*
Premièrement, il faut comprendre ce qu'on nous demande : ici, le prix initial de la chemise. Appelons le x_c.

Ensuite, il faut mettre en équation le problème. On cherche à traduire le problème du langage naturel au langage mathématique. Ici,
— *43 chemises au prix initial correspond à* $43 \cdot x_c$.
— *17 chemises avec un rabais de 1€ correspond à* $17 \cdot (x_c - 1)$
— *le reste des chemises correspond à* $100 - 43 - 17$
— *le reste des chemises à 1,5€ correspond à* $(100 - 43 - 17) \cdot 1,5$
— *le total des quantités précédentes étant* 1234*, on obtient l'égalité suivante :*

$$43 \cdot x_c + 17 \cdot (x_c - 1) + (100 - 43 - 17) \cdot 1,5 = 1234$$

Notons que nous n'avons effectué aucun calcul, seulement traduit l'énoncé.
La suite est laissée en exercice au lecteur·ice

Indication 10.4 (exercice 8.6). *On cherche ici le nombre d'appartements total, qu'on appelle* A_t.

1. *Mise en équation :*
   — *première a travaillé sur deux cinquièmes du nombre total d'appartements : si l'on nomme* A_1 *le nombre d'appartements où la première électricienne a travaillé, on a :*

   $$A_1 = \frac{2}{5} \cdot A_t$$

   — *la seconde a travaillé sur un cinquième du nombre total d'appartements plus 8 appartements :*

   $$A_2 = \frac{1}{5} \cdot A_t + 8$$

   — *les 16 appartements qui restent :*
   — *la dernière a travaillé sur les 16 appartements qui restent :*

   $$\begin{aligned} A_3 &= A_t - A_1 - A_2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

2. *Nous avons maintenant une relation entre* A_t *et* A_1, A_2*, et entre* A_t*,* A_1*,* A_2 *et* A_3*.*[9]
   On peut donc écrire :

   $$\begin{cases} A_1 &= \frac{2}{5} \cdot A_t \\ A_2 &= \frac{1}{5} \cdot A_t + 8 \\ A_3 &= A_t - A_1 - A_2 = 16 \end{cases}$$

   Nous avons 3 inconnues : A_1, A_2, A_t[10] *et 3 équations, ce qui veut dire que nous pouvons trouver une solution. Il va falloir injecter les équations les une dans les autres. Ici, on va injecter les 2 premieres équations dans la troisieme afin de n'avoir qu'une seule variable :* A_t*.*

   $$\begin{cases} A_1 &= \frac{2}{5} \cdot A_t \\ A_2 &= \frac{1}{5} \cdot A_t + 8 \\ A_3 &= A_t - A_1 - A_2 = 16 \end{cases}$$

   $$\Rightarrow 16 = A_t - \frac{2}{5} \cdot A_t - \frac{1}{5} \cdot A_t + 8$$

La suite est laissée en exercice

Indication 10.5 (exercice 8.7). *1. Tout d'abord, identifions les inconnues. Nous en avons deux : le prix du nouveau véhicule* x_n *("x neuf") et le montant de la somme empruntée* x_e *("x emprunté").*

2. *Mise en équation :*
"le client doit ajouter au montant de la reprise un quart du prix du nouveau véhicule puis compléter par un emprunt égal à la moitié du prix du nouveau véhicule" correspond à :

$$3790 + \frac{1}{4} \cdot x_n + \frac{1}{2} \cdot x_n = x_n$$

La suite est laissée en exercice.

10.2 Solutions des exercices sur les polynôme du second degré

Solution 10.6 (9.1). $U_0 = \{u_0^{\pm}\} = \{-1; 5\}$

Solution 10.7 (9.2). $x = y^2 + y \cdot (\pi^2 - \pi) - \pi^3$ *et* $Y_0 = \{-\pi^2; \pi\}$

Solution 10.8 (9.5). *Afin de résoudre ces inégalités, il faut dresser un double tableau de signe pour la fonction au numérateur et au dénominateur. Résolvons ensemble l'exercice 3 en exemple :*

— *Premièrement, passons tout les membres du même coté :*

$$\begin{aligned} &\frac{x+4}{5-x} < 2 \\ \iff &\frac{x+4}{5-x} - 2 < 0 \\ \iff &\frac{x+4-10-(-2x)}{5-x} < 0 \\ \iff &\frac{3x-6}{5-x} < 0 \end{aligned}$$

— *Ensuite, identifions nos différentes fonctions :*

$$\begin{aligned} h(x) \hat{=} &\frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{3x-6}{5-x} \end{aligned}$$

— *Trouvons les racines de f et g :*

$$x_{0,f} = 2 \text{ et } x_{0,g} = 5$$

— *Dressons un double tableau de signe :*

x	$]-\infty; 2]$	2	$]2; 5[$	5	$]5; \infty[$
f	-	0	+	+	+
g	+	+	+	0	-
$h = \frac{f}{g}$	-	0	+	$\emptyset$	-

— *On peut à présent répondre à la question simplement en lisant le tableau de signe :*

$$h(x) < 0 \iff x \in]-\infty; 2[\cup]5; \infty[$$

Regardons également le cas suivant :

$$h(x) \leq 0 \iff x \in]-\infty; 2]\cup]5; \infty[$$

On remarque que l'on a inclus 2 dans notre intervalle solution, mais pas 5. En effet, h n'est pas définit en $g = 0$ car on ne peut pas diviser par 0. Graphiquement, cela se traduit par une asymptote en $x = 5$.

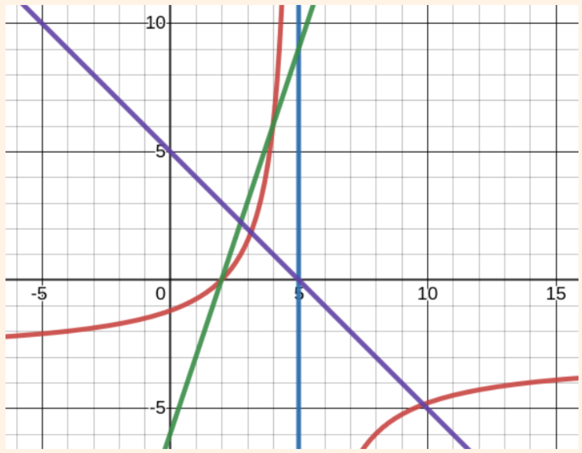


FIGURE 9 – Légende : h en rouge, f en vert, g en mauve, $x = 5$ en bleu

Indication 10.9 (9.7). *Les courbes se croisent lorsque $f(x) = g(x)$*

Indication 10.10 (9.8). *Les courbes se croisent lorsque $\lambda(x) = \nu(x)$*

Indication 10.11 (9.9). *Appelons p le nombre de personnes présentes. Si chaque personne a apporté 3 cadeaux aux autres, chaque personne apporte $c_p = 3 \cdot (p-1)$ cadeaux (il faut soustraire 1 à p car on ne s'offre pas de cadeau à soit même).*
Puisque tout le monde suit cette règle, il y a à la fin $c_{tot} = p \cdot c_p$ cadeaux.

Indication 10.12 (9.10). *Appelons a_p (a_f) l'âge du père (respectivement du fils). On nous dit que :* $\begin{cases} a_p = a_f + 25 \\ a_p \cdot a_f = 116 \end{cases}$
Commencer par calculer un des deux âges seulement.

Solution 10.13 (9.15). *Pour résoudre cet exercice, il faut travailler par étape (par cas). En observant l'équation, on peut se rendre compte que pour $m = 0$, le terme en mx^2 disparaît, et pour $m = 1$, le terme indépendant $(m-1)$ disparaît. Mais on cherche une manière 'systématique' de traiter les valeurs de m. Pour cela, il faut 'oublier' l'aspect paramétrique de m, et le traiter comme un nombre quelconque.*
Il faut donc résoudre les racines de $f_m(x)$ comme d'habitude. On trouve :

$$\begin{aligned} \Delta_0(f_m(x)) &= 4^2 - 4 \cdot m \cdot 2(m-1) \\ &= 16 - 8m(m-1) \\ &= 16 - 8m^2 + 8m \\ &= 8(2 - m^2 + m) \end{aligned}$$

Or, $f_m(x)$ n'admet qu'une seule racine réelle si $\Delta_0(f_m(x)) = 0$ (pour comprendre pourquoi, aller *voir 9.1). Il faut donc résoudre cette égalité :*

$$\begin{aligned}
&\Delta_0(f_m(x)) = 0 = 8(2 - m^2 + m) \\
&\iff 2 - m^2 + m = 0 \\
&\iff m^2 - m - 2 = 0 \\
&\iff m = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{1 \pm 3}{2} \\
&\iff m^{\pm} \in \{-1; +2\}
\end{aligned}$$

On a donc trouvé deux valeurs $m^{\pm}$ pour lesquelles $f_m(x^{\pm})$ admet une unique racine. Vérifions si c'est bien le cas :

$$f_{m^+}(x) = 2x^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta_0(f_{m^+}(x)) = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 - 16 = 0$$
$$f_{m^-}(x) = -x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow \Delta_0(f_{m^-}(x)) = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 0$$

« Un·e mathématicien·ne est un·e aveugle dans une pièce sombre à la recherche d'un chat noir qui n'est pas là. »
Charles Darwin

11 Formulaire

Type de fonction	Polynome de degré 1	Polynome de degré 2
Forme générale	$f(x) = ax + b$	$f(x) = ax^2 + bx + c$
Racines ($f(x_0) = 0$)	$x_0 = \frac{-b}{a}$	$x_0^{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Minimum / Maximum	$\emptyset$	$x_{\min} = \frac{-b}{2a}$

Références

[1] Arian Novruzi. *Introduction au Calcul Différentiel et Intégral.* URL : https://mysite.science.uottawa.ca/novruzi/mat1700/my-mat1700-course.pdf. (accessed: 26.07.2023).

[2] Guillaume Dujardin. *Calcul différentiel et intégral II.* URL : http://chercheurs.lille.inria.fr/~gdujardi/ULB/syllabusCDI2.pdf. (accessed: 26.07.2023).

[3] Yvan Monka. *Rappels des notions de base.* URL : https://www.maths-et-tiques.fr/telech/19Formulaire3e.pdf. (accessed: 26.07.2023).

[4] Wikipedia. *Fonction polynomiale — Wikipedia, The Free Encyclopedia.* URL : https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_polynomiale. (accessed: 04.08.2023).

[5] *EXERCICES SUR LES EQUATIONS DU PREMIER DEGRE.* URL : https://ww2.ac-poitiers.fr/math_sp/IMG/pdf/Exercices_et_problemes_sur_les_equations_du_premier_degre.pdf. (accessed: 09.08.2023).

[6] *Problèmes à résoudre avec des équations du second degré.* URL : https://www.ddm-vergote.be/spip2013/IMG/pdf/exprobsnddegre1.pdf. (accessed: 10.08.2023).

[7] J'ai compris.com. *´Equation du second degré et plus; Première S ES STI - Exercices.* URL : http://www.jaicompris.com/lycee/math/equation/equation2nddegre/equation-second-degre-premiere-S.pdf. (accessed: 13.08.2023).

[8] Paul Milan. *Les inéquations du premier degré.* URL : https://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/documents/math/math2S/03_inequation_premier_degre/03_exos_inequations_premier_degre.pdf. (accessed: 20.08.2023).