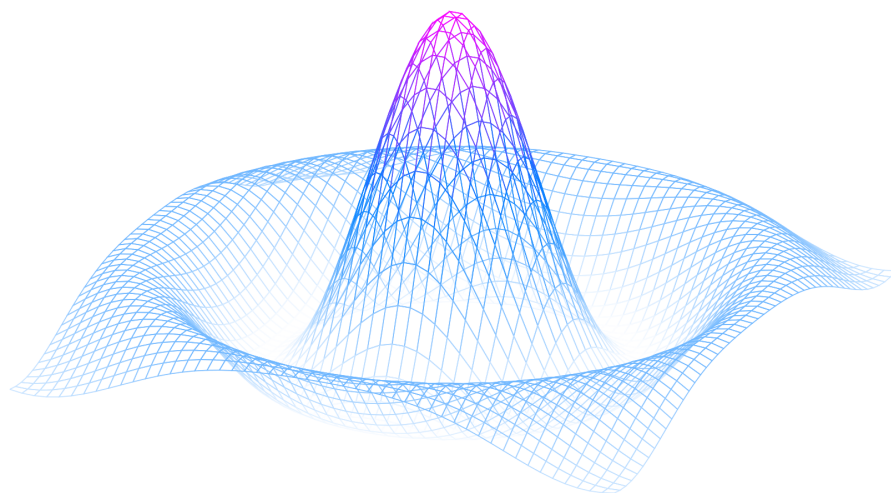


UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES



---

Études sur les fonctions  
en vue du test d'admission en mathématiques

---

Volume 2 - Notions avancées

Antoine DIERCKX

Version du 28 août 2023

## Résumé

Les notes qui suivent sont à usage strictement personnel et n'ont été ni relues ni corrigées par un·e professionnel·le. Elles sont destinées à introduire certains concepts et techniques mathématiques mais ne constituent en aucun cas un syllabus. De très bons ouvrages, complets et en accès libres, peuvent être trouvés [ici](#) [1] et [là](#) [2].

Cette note est séparée en deux volumes :

- le premier porte sur des notions fondamentales, indispensables à la réussite du test d'admission en mathématique.
- le deuxième aborde des notions plus avancées, qui vous seront utiles plus tard dans votre parcours.

J'aimerais également remercier les personnes qui m'ont aidé dans la rédaction et la correction de cette note, en particulier : Sarah Lejeune et Clara Hannon.

« S'il n'y pas de solution, c'est qu'il n'y a pas de problème »  
*Les Shadocks*

Enfin, si vous avez des remarques et/ou des corrections, contactez moi à l'adresse  
[antwandirx@gmail.com](mailto:antwandirx@gmail.com).

Bonne lecture et bon courage !

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Trigonométrie</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Triangles et cercles</b>	<b>5</b>
1.1	Rappel sur les triangles rectangles	5
1.2	Théorème de Pythagore	5
1.3	Distance euclidienne	5
1.4	Cercles et angles	6
1.5	Sinus et cosinus dans un cercle	7
1.6	Sinus et cosinus dans un triangle	8
1.7	Fonctions trigonométriques	10
1.8	Étude des fonctions trigonométriques	10
1.8.1	Ensemble image	10
1.8.2	Identité remarquable	10
1.8.3	Périodicité	11
1.8.4	Représentation graphique	11
1.9	Exercices simples	14
1.10	Problèmes	14
<b>II</b>	<b>Fonctions usuelles [partie en cours de rédaction]</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>Propriétés d'une fonction</b>	<b>17</b>
2.1	Rappel de la définition d'une fonction	17
2.1.1	Ensemble de départ et domaine de définition	17
2.1.2	Ensemble d'arrivée et ensemble image	18
2.2	Injectivité, surjectivité et bijectivité	18
2.2.1	Fonction injective ( $\varphi : x \rightarrow 1/x$ )	19
2.2.2	Fonction surjective ( $\varphi : x \rightarrow x^2$ sur $\mathbb{R}^+$ )	19
2.2.3	Fonction bijective ( $\varphi : x \rightarrow x$ )	20
2.2.4	Fonction ni injective ni surjective	20
2.3	Symétries	20
2.3.1	Parité	20
2.3.2	Réciproque	21
<b>3</b>	<b>Manipulation de fonction</b>	<b>21</b>
3.1	Translation	21
3.1.1	Translation de la variable	21
3.1.2	Translation de l'image	21
3.2	Dilatation et contraction	21
3.2.1	Dilatation et contraction de la variable	21
3.2.2	Dilatation et contraction de l'image	21
3.3	Renversement	21
3.3.1	Renversement de la variable	21
3.3.2	Renversement de l'image	21
3.4	Réciproque	21
<b>4</b>	<b>Inventaire des fonctions usuelles et de leurs propriétés</b>	<b>21</b>
4.1	Les polynômes	21
4.2	Les fonctions trigonométriques	21
4.2.1	La fonction sinus et sa réciproque	21
4.2.2	La fonction cosinus et sa réciproque	21
4.2.3	La fonction tangente et sa réciproque	21
4.3	Les fonctions puissances	21
4.4	Le logarithme	21

4.5 L'exponentielle . . . . .	21
<b>III Calcul différentiel et Intégral [partie en cours de rédaction]</b>	<b>22</b>
<b>5 Notion de limite et calcul infinitésimal</b>	<b>23</b>
<b>6 Pente et dérivée</b>	<b>23</b>
6.1 Pente . . . . .	23
6.2 Dérivée . . . . .	23
<b>7 Intégrale</b>	<b>23</b>
<b>IV Solutions des exercices et problèmes</b>	<b>24</b>
<b>8 Solutions des exercices sur la trigonométrie</b>	<b>25</b>
<b>V Formulaire</b>	<b>27</b>
<b>Références</b>	<b>27</b>

## Première partie

# Trigonométrie

Le but de cette partie est l'introduction d'un nouveau pan des mathématiques : la *trigonométrie*.

Il s'agit de l'étude des triangles, des angles et des courbes. Partout où un cercle et une droite se côtoient se cache des notions de trigonométries.

Il est probable, si vous vous êtes déjà frotté à cette discipline à l'école, qu'elle vous en ait laissé un souvenir épineux, constitués de règles compliqués à retenir bêtement par coeur et de formules mathématiques alambiquées. Nous essayerons ici d'éviter un tel enseignement nécrosé, et l'on veillera à se concentrer sur une approche intuitive afin de limiter autant que faire se peut l'apprentissage façon bétail si cher à notre enseignement public.<sup>1</sup>

La trigonométrie une matière assez complexe et qui demande plusieurs lectures avant d'intégrer les concepts. Si vous avez des difficultés avec ce sujet, je ne peux trop vous recommander les [vidéos de Clipédia sur le sujet](#). [4]

Une synthèse sur les fonctions trigonométriques peut également être trouvée [ici](#). [5]

---

1. Si le sujet de l'enseignement des maths vous intéresse, je ne peut trop vous recommander le livre suivant : *La lamentation d'un mathématicien* [3]

# 1 Triangles et cercles

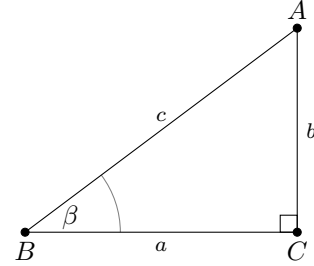
Commençons par le commencement. Avant de s'aventurer dans l'étude des cercles, il nous faut passer par celle des triangles. Cela nous permettra également de définir une distance en 2 et 3 dimensions, ce qui nous sera utile pour la suite.

## 1.1 Rappel sur les triangles rectangles

**Définition 1.1.** Un triangle de sommets  $A, B, C$ , de cotés  $a, b, c$  et d'angles  $\alpha, \beta, \gamma : \mathcal{T}(A, B, C)$  est dit rectangle en  $C$  si l'angle  $\angle BCA = 90^\circ$ .

Par rapport à l'angle  $\angle ABC = \beta$ , on nomme

- $b$  le **côté opposé**,
- $a$  la **côté adjacent**,
- $c$  l'**hypoténuse**.



*Remarque.* Par convention, on note avec une *lettre majuscule* les sommets, un *lettre minuscule* les cotés et une *lettre grecque* les angles.

De plus, le coté  $a$  est toujours à l'opposé du sommet  $A$  et de l'angle  $\alpha$ . De même pour  $b$  et  $c$ .

## 1.2 Théorème de Pythagore

Maintenant que nous savons nommer les éléments d'un triangle, nous pouvons énoncer le théorème de Pythagore :

**Théorème 1.1 (Pythagore).** Soit  $\mathcal{T}(a, b, c)$  un triangle rectangle en  $C$ .

Alors le carré de la longueur de l'hypoténuse (ou côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Si on nomme  $a$  et  $b$  les cotés adjacents à l'angle droit du triangle rectangle, et  $c$  son côté opposé, on peut écrire :

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (1)$$

ou encore :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2)$$

*Remarque.* Notons qu'on ne considère pas le cas où  $c < 0$  (c'est à dire  $c = -\sqrt{a^2 + b^2}$ ) car une distance est, par définition, positive ou nulle.

## 1.3 Distance euclidienne

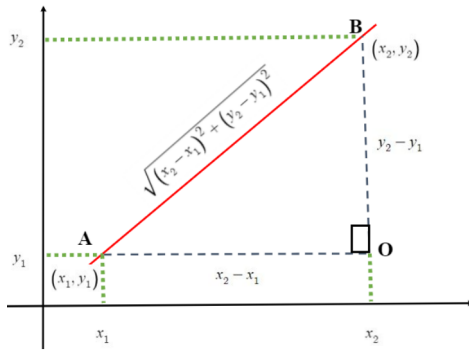
**Définition 1.2 (Distance entre deux points).** Soit deux points  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ . On définit la distance entre ces deux points à l'aide du théorème de Pythagore :

$$d^2 \equiv (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad (3)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (4)$$

$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (5)$$

où  $\Delta x = x_2 - x_1$  et  $\Delta y = y_2 - y_1$



*Remarque.* Il y a plusieurs manière de définir une distance. Celle présentée ici est dite *euclidienne* ou distance *usuelle*.

FIGURE 1 – Illustration de la distance euclidienne [6]

## 1.4 Cercles et angles

Avant de commencer la trigonométrie proprement dite, on va se simplifier la vie en utilisant une nouvelle unité d'angle : le *radian*.

**Notation 1.3.** Afin de représenter un cercle de centre  $c = (x_c; y_c)$  et de rayon  $r > 0$ , on note  $\mathcal{C}(c, r)$

### Définition 1.4 (Cercle trigonométrique).

Le cercle trigonométrique est le cercle 'le plus simple', c'est-à-dire de centre  $c = (0; 0)$  et de rayon  $r = 1$ . On l'écrit  $\mathcal{C}((0; 0), 1)$

### Propriété 1.2 (Rappel sur le cercle).

 Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de rayon  $r$ . Alors :

- sa circonférence est donné par  $L = 2\pi r$
- son aire est donnée par  $A = \pi r^2$

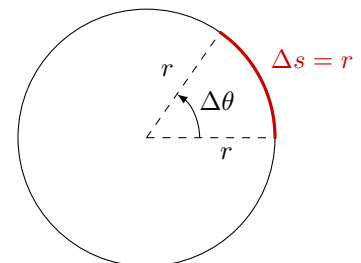
Le volume d'une pizza de rayon  $z$  et d'épaisseur  $a$  est :  $\pi \cdot z \cdot z \cdot a$ .

Remarquons que le rapport entre la circonférence d'un cercle et son rayon est toujours égale à

$$\frac{L}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Il est dès lors naturel de définir l'angle formé par un tour complet (soit  $360^\circ$ ) par  $2\pi$  radians. La définition du radian est équivalente mais diffère quelque peu.

**Définition 1.5 (Radian).** Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de rayon  $r$ . On définit un angle d'un radian  $\theta = 1 \text{ rad}$  comme l'angle pour lequel la longueur de l'arc  $\Delta s$  de cercle sous-tendu par cet angle est égal au rayon  $r$ .



**Définition 1.6 (Angle orienté).** Un angle orienté peut être positif ou négatif. Il est positif lorsqu'il tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (le *sens trigonométrique*), et négatif sinon.

**Propriété 1.3 (Arc de cercle).** La longueur d'un arc de cercle  $\Delta s$  de rayon  $r$  intercepté par un angle  $\theta$  (en radian) est donnée par

$$\Delta s(\theta) = \theta \cdot r$$

On retrouve bien que  $\Delta s(\theta = 2\pi) = 2\pi \cdot r = L$ .

## 1.5 Sinus et cosinus dans un cercle

### Première approche du sinus et cosinus

Avant de donner la « vraie » définition du sinus et du cosinus, les deux fondations de la trigonométrie, faisons un rapide détour par le monde physique pour comprendre la centralité de celles-ci.

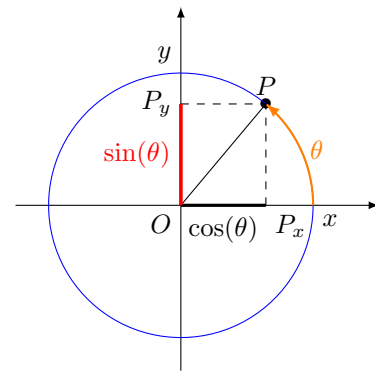
Imaginons un cercle (de rayon  $r$ ), sur lequel se déplace un point  $P$ . Si ce cercle est centré en l'origine, la distance entre mon point et l'origine sera toujours  $d = r$ . Si je connais l'angle  $\theta$  entre mon point  $P$  et l'axe des  $x$ , j'ai suffisamment d'information pour localiser mon point.

Quelle est donc la coordonnée de mon point  $P = (P_x, P_y)$ ? C'est ici que le sinus et cosinus entrent en jeux.

Si j'appelle  $|P|$  la distance entre l'origine et  $P$ , ses coordonnées seront

$$P = (|P| \cdot \cos(\theta), |P| \cdot \sin(\theta)) \quad (6)$$

Il s'agit de la **projection** de la distance  $|P|$  (ou de manière plus correcte du vecteur  $\vec{P}$ ) sur son abscisse et son ordonnée.





## 1.6 Sinus et cosinus dans un triangle

### Vers une définition rigoureuse

Reprenons le cercle précédent, et simplifions les choses. On choisit la distance  $|P| = 1$  et donc le rayon du cercle  $r = 1$ . Il s'agit ainsi du cercle trigonométrique  $\mathcal{C}((0;0),1)$ .

En reliant les points  $O$ ,  $P_x$  et  $P$ , on trace un triangle rectangle. On va essayer de redéfinir le cosinus et le sinus en fonction de ce triangle. Reprenons la formule 6 avec  $|P| = 1$ . On a :

$$P = (P_x, P_y) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad (7)$$

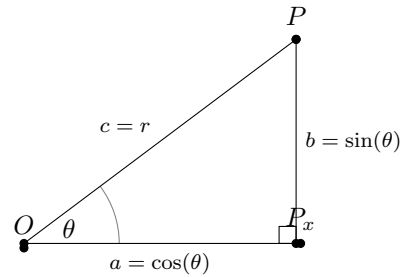
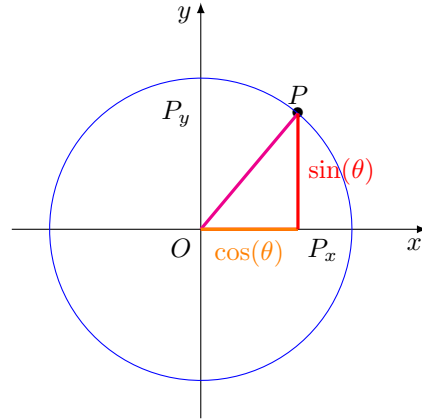
Ainsi,  $P_x = \cos(\theta)$  et  $P_y = \sin(\theta)$ . En observant le triangle rectangle formé, cela correspond à

$$\cos(\theta) = a \text{ et } \sin(\theta) = b$$

Pour être complet, pour que cette relation reste vraie même si le rayon du cercle  $r \neq 1$ , il faut diviser par celui-ci. On obtient alors

$$\cos(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{a}{c} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{r} = \frac{b}{c}$$

puisque le rayon correspond au côté  $c$  de notre triangle.



Nous venons d'obtenir le lien entre le cercle trigonométrique et les triangles rectangles. Il est à présent temps de passer aux définitions.

**Définition 1.7 (trigonométrie dans un triangle).** Soit  $\mathcal{T}(a; b; c)$  un triangle rectangle en  $C$  avec l'hypoténuse  $c = 1$  et  $\beta$  l'angle opposé au côté  $b$ . On définit :

— le sinus de  $\beta$  comme le rapport entre le côté opposé et l'hypoténuse.

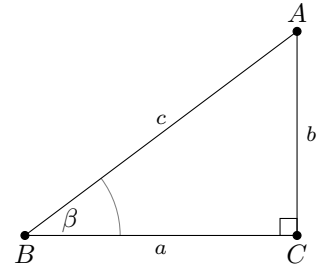
$$\sin(\beta) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{b}{c} \quad (8)$$

— le cosinus de  $\alpha$  comme le rapport entre le côté adjacent et l'hypoténuse.

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{a}{c} \quad (9)$$

— la tangente comme le rapport du sinus par le cosinus.

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{b}{a} \quad (10)$$



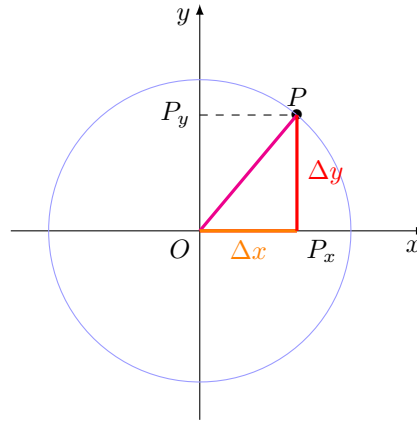
*Remarque.* Il existe un moyen mnémotechnique pour retenir ces définitions :

$$SOH\ CAH\ TOA \rightarrow S = \frac{O}{H}, C = \frac{A}{H}, T = \frac{O}{A} \quad (11)$$

avec  $O$  pour « côté opposé »,  $A$  pour « côté adjacent » et  $H$  pour « hypoténuse ».

*Remarque.* Si les fonctions sin et cos semblent « naturelles » (puisqu'elles paramétrisent la position d'un point se déplaçant sur le cercle trigonométrique), on peut se poser la question de l'utilité de la fonction tan.

Pour la comprendre, reprenons le cercle suivant :



Par définition, la fonction tangente est donnée par

$$\tan(\theta) = \frac{\text{coté opposé}}{\text{coté adjacent}}$$

Or, si l'on inscrit le triangle rectangle dans le cercle ci-contre, le coté opposé est  $\Delta y$  et le coté adjacent est  $\Delta x$ . On a alors :

$$\tan(\theta) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ce résultat sera très utile dans la partie [III](#).

## 1.7 Fonctions trigonométriques

**Définition 1.8 (Fonctions trigonométriques).** Une fonction trigonométrique associe à un angle  $\theta$  la valeur des rapports des cotés d'un triangle rectangle inscrit dans le cercle unité (*cercle trigonométrique*) selon la définition 1.7. On a donc 2 fonctions trigonométriques fondamentales :

$$\sin : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1; 1] \\ \theta \longmapsto \sin(\theta) \end{cases} \quad (12)$$

$$\cos : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1; 1] \\ \theta \longmapsto \cos(\theta) \end{cases} \quad (13)$$

Une troisième fonction est définie comme étant le rapport des deux premières :

$$\tan : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1; 1] \\ \theta \longmapsto \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \end{cases} \quad (14)$$

Ces nouvelles fonctions sont très différentes de ce que nous avons étudié précédemment, et des notions comme les racines et la croissance ne sont pas aussi « simple » que dans le cas des polynômes.

## 1.8 Étude des fonctions trigonométriques

Voyons à présent quelques propriétés de ces fonctions afin de commencer à se construire une intuition sur celles-ci.

### 1.8.1 Ensemble image

**Propriété 1.4 (Fonctions bornées).** Les fonctions  $\sin(x)$  et  $\cos(x)$  sont bornées pour tout  $x$  réels.

**Preuve.** Montrons que la fonction  $\sin(x)$  est bornée.

Par définition,

$$\sin(x) = \frac{\text{coté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{b}{c}$$

Or, par le théorème de Pythagore,

$$a^2 + b^2 = c^2 \implies b^2 = c^2 - a^2$$

On a donc :

$$(\sin(x))^2 = \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2 - a^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2 \leq 1$$

On vient de montrer que

$$(\sin(x))^2 \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ceci implique que

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La cas du  $\cos(x)$  se traite de manière similaire, et est laissé en exercice au lecteur·ice.  $\square$

### 1.8.2 Identité remarquable

**Propriété 1.5 (Identité trigonométrique pythagoricienne).**

$$\boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (15)$$

**Preuve.** Repartons de la définition géométrique du sinus et du cosinus :

$$\begin{aligned}
 (\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 &= \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 \\
 &= \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} \\
 &= \frac{a^2 + b^2}{c^2} \\
 &= \frac{c^2}{c^2} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

□

### 1.8.3 Périodicité

**Propriété 1.6 (Périodicité).** *Les fonctions sin, cos et tan sont périodiques, c'est-à-dire qu'elles se répètent après une période donnée. Les fonctions sin et cos ont toutes les deux une période  $P = 2\pi$ , et la fonction tan possède une période  $P = \pi$ . On écrit :*

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi) \quad (16)$$

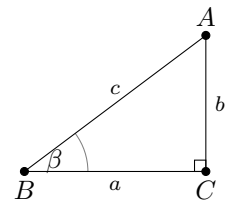
$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi) \quad (17)$$

$$\tan(x) = \tan(x + \pi) \quad (18)$$

**Preuve.** Les fonctions trigonométriques sont définies à partir d'un triangle rectangle, lui-même caractérisé par un angle. Or, un angle n'est pas modifié lorsqu'on lui ajoute un tour complet (soit  $2\pi$  rad). Il en est de même pour son triangle associé, et enfin pour les fonctions cos, sin et tan.

### 1.8.4 Représentation graphique

Nous avons vu que les fonctions sinus et cosinus sont bornées et liées par cette identité pythagoricienne. Il est temps de se les représenter sur un graphique. Pour cela, calculons d'abord quelques valeurs particulières de sinus et cosinus :



—  $\theta = 0$  : cela correspond à l'angle nul, c'est à dire au côté  $b = 0$  et  $c = a$ .

Dans ce cas,

$$\sin(0) = \frac{0}{c} = 0$$

$$\cos(0) = \frac{a}{c} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\tan(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

—  $\theta = \pi/4$  : puisqu'un tour complet vaut  $2\pi$ , un angle de  $\pi/4$  vaut  $45^\circ$ . Cela correspond au cas où  $a = b$ , ce qui implique  $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$ , ce qui implique  $c = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$ .

Dans ce cas,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

- $\theta = \frac{\pi}{2}$  : puisqu'un tour complet vaut  $2\pi$ , un angle de  $\frac{\pi}{2}$  vaut  $90^\circ$ . Cela correspond au cas où  $a = 0$ , et où  $c = b$ .

Dans ce cas,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{b}{c} = \frac{b}{b} = 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{c} = \frac{0}{c} = 0$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{0}$$

On observe que la fonction  $\tan(\theta)$  n'est pas définie<sup>2</sup> en  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

- Il reste deux valeurs intéressantes pour  $\theta$  mais qui ne seront pas traitées ici :

- $\theta = \frac{\pi}{6}$  : on a alors

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \text{ et } \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $\theta = \frac{\pi}{3}$  : on a alors

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Ces valeurs sont reprises sous forme de tableau et graphiquement ci-dessous :

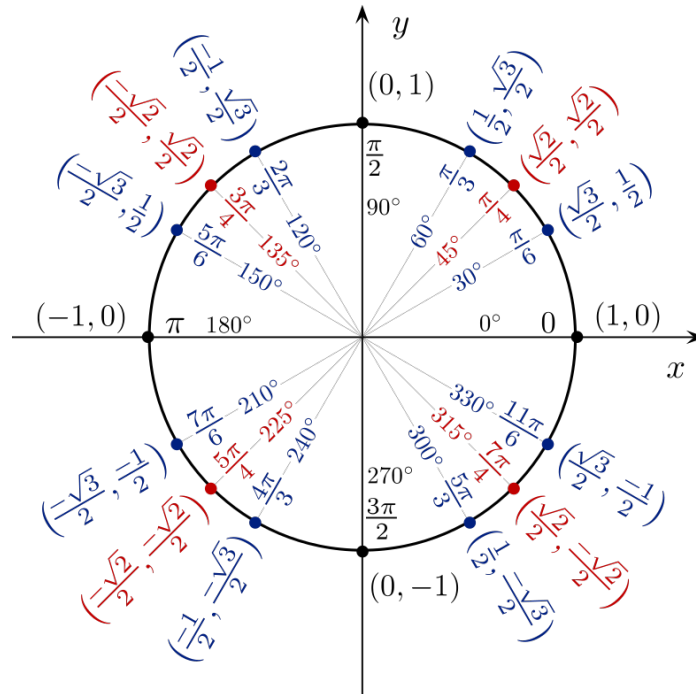


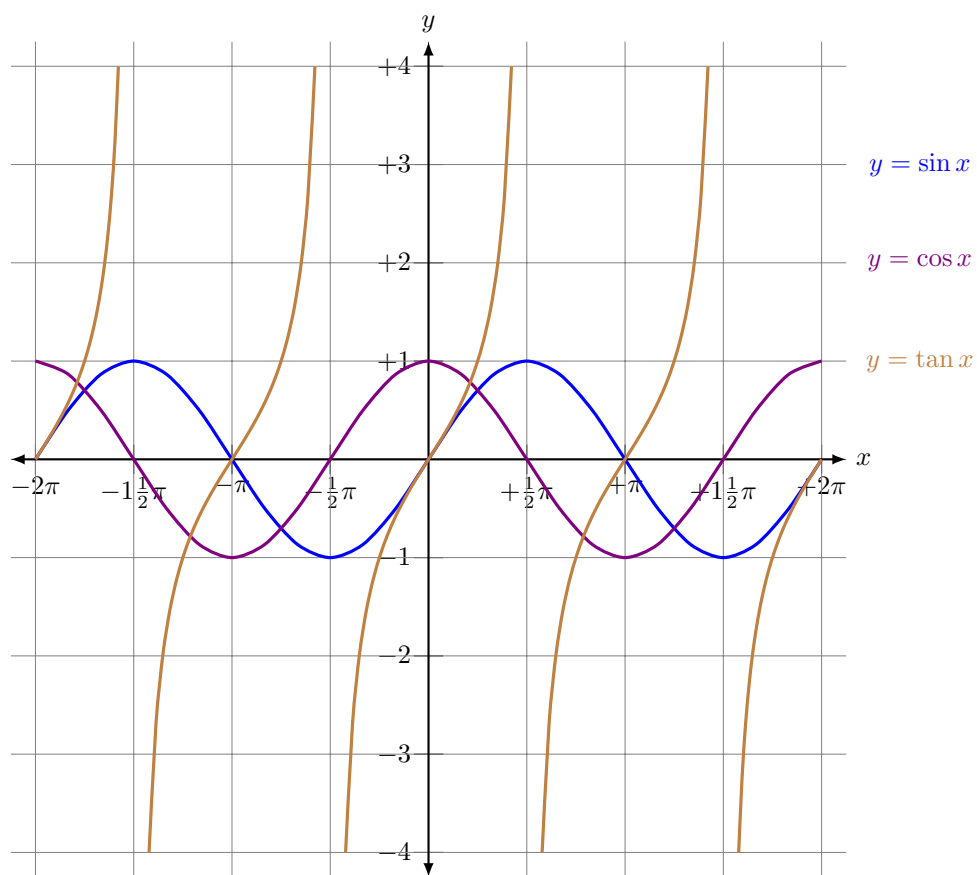
FIGURE 2 – Angles remarquables sur le cercle trigonométrique [7]

2. N'étant pas Chuck Norris, la division par zéro n'est pas à notre portée. On se contentera de dire que la fonction est indéterminée en ce point.

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\emptyset$

TABLE 1 – Tableau des valeurs remarquables






Après tout ce suspense, il est finalement temps pour nous d'admirer une représentation graphique des fonctions trigonométriques.




Why was  $\pi$  sad?  
'cos  $\pi$  is negative

## 1.9 Exercices simples

*Remarque.* Afin de ne pas entraver le plaisir de la résolution d'exercices, les indications et/ou solutions sont localisées dans le chapitre IV. Les symboles suivants sont utilisés :


-  indique que l'usage de la calculatrice est recommandée.
-  indique la présence d'une indication.
-  indique la présence d'une résolution partielle de l'exercice.
-  indique la présence de la solution finale.
-  indique la présence d'une explication détaillée.

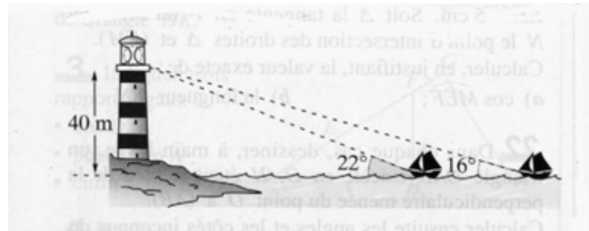
**Exercice 1.1** () .

- Quel est l'aire d'un carré de diagonale égale à 5cm ?

**Exercice 1.2.** Donner une mesure en radians de l'angle formé par les aiguilles d'une montre (petite et grande) aux heures suivantes :

- à 3h
- à 6h
- à 8h
- à 13h


**Exercice 1.3** () . Un phare de 40m de haut voit au loin deux bateaux  $B_1$  et  $B_2$ . Depuis le bateau  $B_1$  (resp.  $B_2$ ), le haut du phare forme un angle de  $22^\circ$  (resp.  $16^\circ$ ).




- Calculer la distance entre les deux bateaux

**Exercice 1.4.** Soit  $\theta$  l'angle entre l'axe des  $x$  et un point  $M$  sur le cercle trigonométrique. Placer sur ce cercle tout les points  $M$  tels que

$$M = \frac{27\pi}{6} + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Exercice 1.5** () . Un télésiège d'une longueur de 1453m transporte des skieur-euses depuis une altitude de 1839m jusqu'à 2261m.


- Calculer l'angle formé par le câble du télésiège avec l'horizontale, en radian et en degré.

**Exercice 1.6** () . Une personne mesurant 1,8m, situé à 100m de la tour Eiffel, observe son sommet avec un angle de  $72,8^\circ$ .

- Calculer la hauteur de la tour Eiffel.

## 1.10 Problèmes

« Il vaut mieux mobiliser son intelligence sur des conneries que mobiliser sa connerie sur des choses intelligentes. »  
Les Shadoks

**Exercice 1.7** ( **8.0.1**) . Résoudre les équations et inéquations suivante dans  $\mathbb{R}$  :

1.

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2.

$$\sin(3x) = \frac{1}{2}$$

3.

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

4.



$$\cos(2x) = \sin(3x)$$

5.

$$\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

6.

$$\sin(3x) > \frac{1}{2}$$

**Exercice 1.8** (  **8.0.2**). Résoudre dans les réels l'équation suivante :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}$$



## Deuxième partie

# Fonctions usuelles [partie en cours de rédaction]

*Remarque.* Une partie des notes qui suivent sont issues de ce [pdf](#).<sup>[8]</sup>

Dans cette partie, nous allons faire un inventaire des fonctions les plus communes, et étudier leurs propriétés. Le but n'est évidemment pas de faire une liste exhaustive ( ce serait impossible), mais de proposer un ensemble de fonctions de base, ainsi que certaines techniques pour les modifier ( translation, symétries, etc.).

Il faut que je pense à mettre une jolie citation ici

## 2 Propriétés d'une fonction

Afin de pouvoir classer les fonctions, il est utile d'en étudier d'abord quelques propriétés supplémentaires.

Beaucoup de concepts semblables mais distincts sont présentés dans cette partie, attention à ne pas les confondre ! Afin de rendre plus concrètes les propriétés présentées ci-après, n'hésitez pas à utiliser votre calculatrice graphique préférée ou un équivalent en ligne.<sup>3</sup>

### 2.1 Rappel de la définition d'une fonction

**Définition 2.1.** Soit  $X, Y$  deux ensembles, et  $x \in X, y \in Y$ . Alors on définit la **fonction**  $f$  par :

$$f : X \rightarrow Y \quad (19)$$

$$x \mapsto f(x) \quad (20)$$

où tout élément  $x \in X$  est envoyé sur **au plus un** élément  $y \in Y$ . Formellement,

$$\forall x \in X, \exists ! y \in \text{Im}\{f\} \mid y = f(x) \quad (21)$$

On peut écrire

$$y = f(x)$$

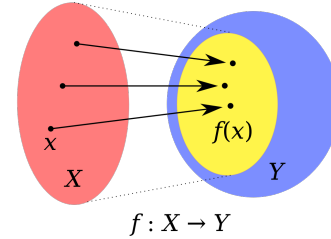


FIGURE 3 – Visualisation du concept de fonction en terme d'ensembles

Par définition donc, un élément de l'ensemble de départ ne peut pas avoir plusieurs images. Graphiquement, si l'on s'imagine tracer la fonction au crayon, on ne peut pas « revenir en arrière » (par exemple dessiner une boucle).

**Exemple:** Le cercle trigonométrique n'est pas une fonction. En effet, il est défini comme tout les points se trouvant à une distance unitaire de l'origine, soit :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ \iff y^2 &= 1 - x^2 \\ \iff y &= \pm \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

Le problème ici est le signe  $\pm$ . Ceci veut dire que pour chaque  $x \in [-1, 1]$ , il y a deux images. Par exemple, si  $x = 0$ ,  $y = \pm \sqrt{1 - 0} = \pm 1$ .

Dans toute cette partie II, nous allons considérer une fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(x) \end{cases}$$

Nous allons maintenant nous intéresser plus précisément aux ensembles  $X$  et  $Y$ .

#### 2.1.1 Ensemble de départ et domaine de définition

Dans notre étude, nous considérons toujours des fonctions réelles à variable réelle. Notre ensemble de départ est donc  $\mathbb{R}$ . Cependant, certaines fonctions ne sont pas définies pour tout nombres réels.

**Exemple:** La fonction *inverse* définie par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \frac{1}{x} \end{cases}$$

3. Je recommande <https://www.desmos.com/calculator> et <https://www.geogebra.org/graphing?lang=fr>.

n'est pas définie en  $x = 0$  puisqu'on ne peut pas diviser par 0. On dit que son *domaine* est différent de son ensemble image.

**Définition 2.2 (Domaine de définition).** Soit une fonction  $f : \begin{cases} X \longrightarrow Y \\ x \rightarrow f(x) \end{cases}$

Son domaine de définition  $\mathcal{D}_f$  est défini comme :

$$\mathcal{D}_f \hat{=} \{x \in X \mid f(x) \text{ est définie} \} \quad (22)$$

Ainsi, en général :

$$\boxed{\mathcal{D}_f \subset X}$$

**Exemple:** Soit

$$f : x \rightarrow 1/x$$

Alors  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  Soit

$$g : x \rightarrow \sin(x)$$

Alors  $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$

Soit

$$h : x \rightarrow \tan(x)$$

Alors  $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; \ k \in \mathbb{Z}\}$

Soit

$$u : x \mapsto \sqrt{4 - x}$$

Alors  $\mathcal{D}_u = ]-\infty; 4]$

Soit

$$v : x \mapsto \sqrt{4 - x^2}$$

Alors  $\mathcal{D}_v = [-2; 2]$

Soit

$$w : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Alors  $\mathcal{D}_w = ]-2; 2[$

### 2.1.2 Ensemble d'arrivée et ensemble image

De la même manière que le domaine de définition d'une fonction ne « rempli » pas toujours son ensemble de départ, son ensemble d'arrivée peut également se trouver « vide » à certains endroits. On introduit alors l'*ensemble image*.

**Définition 2.3 (Ensemble image).** Soit une fonction  $f : \begin{cases} X \longrightarrow Y \\ x \rightarrow f(x) \end{cases}$

Son ensemble image  $\text{Im}\{f\}$  est défini comme :

$$\text{Im}\{f\} \hat{=} \{y \in Y \mid x \in X \quad f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in X\} \hat{=} f(X) \quad (23)$$

Ainsi, en général :

$$\boxed{\text{Im}\{f\} \subset Y}$$

## 2.2 Injectivité, surjectivité et bijectivité

On peut à présent classer les fonctions avec ces nouvelles notions.

Les relations entre le domaine  $\mathcal{D}_f$ , l'ensemble de départ  $X$ , l'image  $\text{Im}\{f\}$  et l'ensemble d'arrivée  $Y$  sont décrites par les propriétés d'*injectivité* et de *surjectivité*.

2.2.1 Fonction injective ( $\mathfrak{V} : x \rightarrow 1/x$ )

**Définition 2.4 (Injectivité).** Soit une fonction

$$f : \begin{cases} \mathcal{D}_f \subset X & \longrightarrow \text{Im}\{f\} \subset Y \\ x & \longrightarrow f(x) \end{cases}$$

$f$  est dite *injective* si deux éléments distincts de  $\mathcal{D}_f$  possèdent toujours deux images distinctes. Plus formellement :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) \quad (24)$$

$$\iff \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2 \quad (25)$$

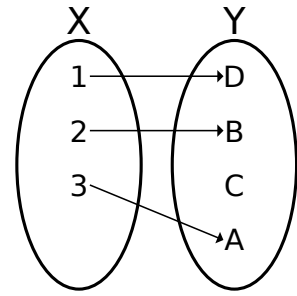


FIGURE 4 – Illustration d'une fonction injective non surjective

**Exemple:** Un exemple de fonction injective est la fonction inverse :

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Elle est injective puisque  $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_{1/x} = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x_1) = f(x_2) \iff \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \iff x_2 = x_1$

Elle n'est pas surjective car pour  $y = 0$ , il n'a pas d'antécédent. En effet,  $\frac{1}{x} = 0 \implies x = \pm\infty$  ce que est hors du domaine  $\mathcal{D}_{1/x}$ .

2.2.2 Fonction surjective ( $\mathfrak{V} : x \rightarrow x^2$  sur  $\mathbb{R}^+$ )

**Définition 2.5 (Surjectivité).** Soit une fonction

$$f : \begin{cases} \mathcal{D}_f \subset X & \longrightarrow \text{Im}\{f\} \subset Y \\ x & \longrightarrow f(x) \end{cases}$$

$f$  est dite *surjective* si chaque élément de  $\text{Im}\{f\}$  possède toujours au moins un antécédent dans  $\mathcal{D}_f$ . Plus formellement :

$$\forall y \in \text{Im}\{f\}, \exists x \in \mathcal{D}_f \mid y = f(x) \quad (26)$$

$$(27)$$

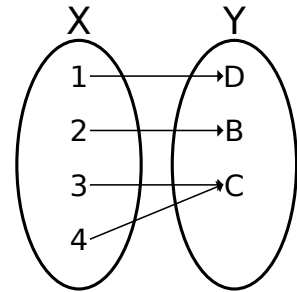


FIGURE 5 – Illustration d'une fonction non injective et surjective

**Exemple:** Un exemple de fonction surjective est la fonction carré :

$$x \mapsto x^2$$

Elle est surjective puisque  $\forall y \in \text{Im}\{x^2\} = \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathcal{D}_f \mid y = x^2 \iff \sqrt{y} = x \text{ ou } \sqrt{y} = -x$

Elle n'est pas injective puisque pour  $x_1 = 2$  et  $x_2 = -2$ , on a  $f(x_1) = 2^2 = 4 = (-2)^2 = f(x_2)$

### 2.2.3 Fonction bijective ( $\mathfrak{V} : x \rightarrow x$ )

**Définition 2.6 (Bijectivité).** Soit une fonction

$$f : \begin{cases} \mathcal{D}_f \subset X & \longrightarrow \text{Im}\{f\} \subset Y \\ x & \longrightarrow f(x) \end{cases}$$

$f$  est dite *bijective* si elle est à la fois injective et surjective. Formellement,

$$\forall y \in \text{Im}\{f\}, \exists ! x \in X \mid y = f(x) \quad (28)$$

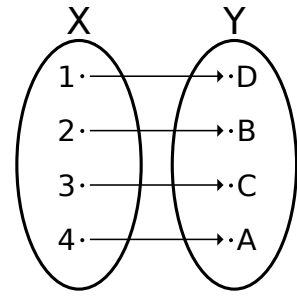


FIGURE 6 – Illustration d'une fonction injective et surjective

**Exemple:** Un exemple de famille de fonctions bijectives est les droites :

$$x \mapsto ax + b, \quad a \in \mathbb{R}_0, b \in \mathbb{R}$$

Elle est injective car  $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_{ax+b}, f(x_1) = f(x_2) \iff ax_1 + b = ax_2 + b \iff x_1 = x_2$

Elle est surjective car  $\forall y \in \text{Im}\{ax + b\}, \exists x \in \mathcal{D}_{ax+b} \mid y = ax + b$ . Ici, on peut prendre  $x = \frac{y-b}{a}$  qui est effectivement toujours défini puisque  $a \neq 0$ .

### 2.2.4 Fonction ni injective ni surjective

Certaines fonctions ne sont ni injectives, ni surjectives. Cependant, on choisissant astucieusement le domaine  $\mathcal{D}_f$  et l'image  $\text{Im}\{f\}$ , on peut toujours se ramener à une fonction surjective.

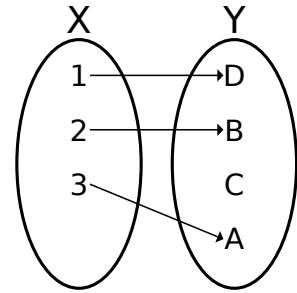


FIGURE 7 – Illustration d'une fonction ni injective ni surjective

## 2.3 Symétries

En mathématique, on parle de symétrie d'un système lorsqu'on peut modifier certaines de ses variables, d'une certaine façon, sans que le système ne soit modifié.

Dans le cas des fonctions, il existe des familles de symétries communes, qui l'est utile de couvrir avant d'aborder la manipulation des fonctions.

### 2.3.1 Parité

#### Fonction paire

**Définition 2.7.** Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$  une fonction réelle à variable réelle. Elle est dite paire si

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(-x) = f(x) \quad (29)$$

## Fonction impaire

**Définition 2.8.** Soit  $f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$  une fonction réelle à variable réelle. Elle est dite impaire si  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = -f(x) \quad (30)$$

## Symétrie par rapport à $x = 0$

### 2.3.2 Réciproque

## 3 Manipulation de fonction

Avant de dresser une liste de fonctions, nous allons voir différentes techniques générales pour transformer des fonctions.

Inspiré de *Révisions : manipulations de graphes* [9]

### 3.1 Translation

#### 3.1.1 Translation de la variable

#### 3.1.2 Translation de l'image

### 3.2 Dilatation et contraction

#### 3.2.1 Dilatation et contraction de la variable

#### 3.2.2 Dilatation et contraction de l'image

### 3.3 Renversement

#### 3.3.1 Renversement de la variable

#### 3.3.2 Renversement de l'image

### 3.4 Réciproque

## 4 Inventaire des fonctions usuelles et de leurs propriétés

### 4.1 Les polynômes

### 4.2 Les fonctions trigonométriques

#### 4.2.1 La fonction sinus et sa réciproque

#### 4.2.2 La fonction cosinus et sa réciproque

#### 4.2.3 La fonction tangente et sa réciproque

### 4.3 Les fonctions puissances

### 4.4 Le logarithme

### 4.5 L'exponentielle

## Troisième partie

# Calcul différentiel et Intégral [partie en cours de rédaction]

Cette section a pour but d'introduire les notions de bases du calcul différentiel (et intégral), à savoir :

- le calcul infinitésimal
- les dérivées
- les intégrales et le théorème fondamental de l'analyse

Ceux-ci constituent le socle d'une théorie mathématique à la base de la plupart de la physique moderne, et qui jouent un grand rôle en informatique.<sup>4</sup>

La compréhension de ces notions, parfois complexes, permet néanmoins de grandement simplifier l'étude des polynômes et des fonctions en général.

« Quand les lois mathématiques s'appliquent à la réalité, elles ne sont pas exactes, et quand elles sont exactes, elles ne s'appliquent pas à la réalité. »

*Albert Einstein*

---

4. Un site web dédié à l'étude des lien entre le *CDI* et le langage informatique (ici en **Python** ) peut être trouvé [ici](#).

## 5 Notion de limite et calcul infinitésimal

Une synthèse sur les limites peut être trouvée [ici](#).<sup>[10]</sup>

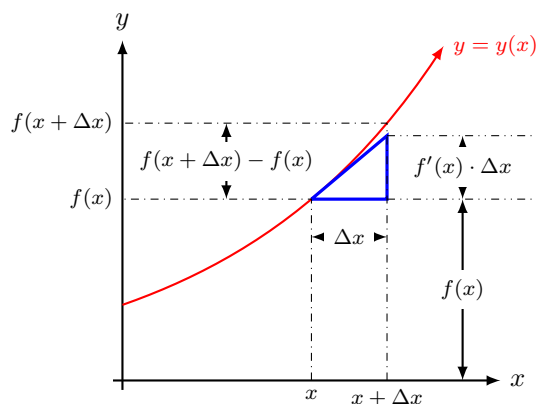
Section plus avancée, sera complétée si on avance suffisamment dans la matière

## 6 Pente et dérivée

Section plus avancée, sera complétée si on avance suffisamment dans la matière

### 6.1 Pente

### 6.2 Dérivée



## 7 Intégrale

« J'ai entendu dire que le gouvernement voulait taxer l'ignorance mathématique. C'est drôle, je pensais que c'était le rôle de la loterie! » *Gallagher*



## Quatrième partie

# Solutions des exercices et problèmes

« Il est difficile de faire la différence entre un·e mathématicien·ne qui dort et un·e mathématicien·ne qui travaille. »

*André Lichnerowicz*

## 8 Solutions des exercices sur la trigonométrie

**Solution 8.0.1 (1.7).** 1. On veut résoudre pour  $x \in \mathbb{R}$  l'égalité suivante :

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si vous connaissez un peu votre tableau des valeurs remarquables 1, vous remarquerez que si  $\cos(x) = \sqrt{2}/2$ , alors  $x = \pi/4$ . Mais ceci n'est vrai que dans le premier quadrant !

À la question : résous pour  $x \in [0, \pi/2]$  l'égalité  $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , la réponse est effectivement  $x = \pi/4$ .

Cependant, dans  $\mathbb{R}$ , le nombre de solutions est infini ! Comment faire pour toutes les obtenir ? Il faut visualiser le cercle :

— Premièrement, on sait que si l'on rajoute  $2\pi$  rad à  $x$ , rien ne change. C'est notre premier pas vers l'ensemble des solutions. On peut écrire

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

— Deuxièmement,  $\cos$  est une fonction paire. Ainsi,  $\cos(x) = \cos(-x)$ . On peut donc aussi prendre la valeur  $x = -\pi/4$ , ainsi que tout ses multiples  $2\pi$ . C'est notre deuxième ensemble de solutions :

$$x = \frac{-\pi}{4} + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

— Finalement, il faut rassembler ces deux ensembles :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pm\pi}{4} + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{8\pi k \pm \pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

2. On veut résoudre pour  $x \in \mathbb{R}$  l'équation suivante :

$$\sin(3x) = \frac{1}{2}$$

On reconnaît du tableau 1 l'égalité suivante :  $\sin(\theta) = 1/2 \Rightarrow \theta = \pi/6$  (valable entre 0 et  $\pi/2$ ). On pose donc  $\theta = 3x$  et on résout pour  $\theta$ .

— Le premier ensemble de solution est donné par

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

— Puisque  $\sin$  est la « projection » d'un angle sur l'axe  $y$ ,  $\sin(\theta + \pi/2) = \sin(\theta)$ . Notre deuxième ensemble de solution est donc donné par

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

— L'ensemble fusionné de solution est donné par :

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi + 12\pi k}{6}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ et } \theta = \frac{2\pi + 12\pi k}{6}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \iff \theta &\in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k ; \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

— On résout à présent pour  $x = \theta/3$  : il faut tout diviser par 3.

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi k, \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k ; \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

**Solution 8.0.2 (1.8).** Afin de résoudre ce problème, il faut procéder par étape.

1. Se ramener à une forme  $f(x) = 0$
2. Considérer la fonction trigonométrique comme une nouvelle inconnue et résoudre
3. Remplacer et résoudre
4. Ne pas oublier la périodicité

Commençons :

1.

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2} \\ \iff \cos^2 x - \frac{1}{2} &= 0\end{aligned}$$

On a bien une égalité de la forme  $f(x) = 0$ .

2. On pose  $\tilde{x} = \cos x$  et on résout  $f(\tilde{x}) = 0$

$$\begin{aligned}f(\tilde{x}) &= \tilde{x}^2 - \frac{1}{2} = 0 \\ &= \left(\tilde{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \\ \iff \tilde{x} &\in \left\{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\end{aligned}$$

3. On remplace  $\tilde{x}$  par  $\cos x$  :

$$\tilde{x} = \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On reconnaît alors la valeur remarquable de  $\cos = \frac{1}{\sqrt{2}}$  qui correspond à un angle de  $\pm \frac{\pi}{4}$ . De même,  $\cos = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  correspond à un angle de  $\pm \frac{3\pi}{4}$ .

Si on nous demandait les solutions sur un intervalle  $[-\pi; \pi]$ , on aurait terminé.

4. En 'ajoutant' la périodicité de  $2\pi$  de la fonction  $\cos$ , on obtient :

$$\begin{aligned}x &\in \left\{ \frac{\pi}{4} + k_1 \cdot 2\pi; \quad -\frac{\pi}{4} + k_2 \cdot 2\pi; \quad \frac{3\pi}{4} + k_3 \cdot 2\pi; \quad -\frac{3\pi}{4} + k_4 \cdot 2\pi; \quad k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z} \right\} \\ \iff x &\in \left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}; \quad k \in \mathbb{Z} \right\}\end{aligned}$$

## Cinquième partie

# Formulaire

Type de fonction	Polynome de degré 1	Polynome de degré 2
Forme générale	$f(x) = ax + b$	$f(x) = ax^2 + bx + c$
Racines ( $f(x_0) = 0$ )	$x_0 = \frac{-b}{a}$	$x_0^{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Minimum / Maximum	$\emptyset$	$x_{\min} = \frac{-b}{2a}$

## Références

- [1] Arian NOVRUZI. *Introduction au Calcul Différentiel et Intégral*. URL : <https://mysite.science.uottawa.ca/novruzi/mat1700/my-mat1700-course.pdf>. (accessed: 26.07.2023).
- [2] Guillaume DUJARDIN. *Calcul différentiel et intégral II*. URL : <http://chercheurs.lille.inria.fr/~gdujardi/ULB/syllabusCDI2.pdf>. (accessed: 26.07.2023).
- [3] P. LOCKHART, F. BOURGEOIS et B. DELVAUX. *La lamentation d'un mathématicien*. L'Arbre de Diane, 2017. ISBN : 9782930822099. URL : <https://books.google.be/books?id=Vc-8DgAAQBAJ>.
- [4] Marc Haelterman & Olivier DECROLY. *CLIPEDIA*. URL : <https://clipedia.be/mathematiques/geometrie>. (accessed: 11.08.2023).
- [5] Vivien RIPOLL. *Rappels de trigonométrie*. URL : [https://www.normalesup.org/~vripoll/MAT1013\\_Rappels\\_trigo.pdf](https://www.normalesup.org/~vripoll/MAT1013_Rappels_trigo.pdf). (accessed: 04.08.2023).
- [6] Vikram SINGH. *How to Compute Euclidean Distance in Python*. URL : <https://www.shiksha.com/online-courses/articles/how-to-compute-euclidean-distance-in-python/>. (accessed: 22.08.2023).
- [7] J. BELK. *Cercle trigonométrique et angles remarquables*. URL : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Table\\_de\\_lignes\\_trigonom%C3%A9triques\\_exactes#/media](https://fr.wikipedia.org/wiki/Table_de_lignes_trigonom%C3%A9triques_exactes#/media). (accessed: 22.08.2023).
- [8] Romain JOLY. *Chapitre 5: Les Fonctions Usuelles - université grenoble alpes*. URL : <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rjoly/Documents/Pedago/MAT252/Chap5-MAT252.pdf>.
- [9] Chantal HOESSELS. *Révisions : manipulations de graphes*. URL : [http://www.csdm.be/wp-content/uploads/2020/05/4G\\_MATH5H\\_Hoessels-Pizzolante\\_manipulations2.pdf](http://www.csdm.be/wp-content/uploads/2020/05/4G_MATH5H_Hoessels-Pizzolante_manipulations2.pdf). (accessed: 24.08.2023).
- [10] Claude PETIT. *Rappels et compléments sur les limites*. URL : <https://cpmath.fr/cours/lim.pdf>. (accessed: 04.08.2023).