CH12 - ISOMETRIES

V sera un E.V. euclidien ou hermitien fini ou ∞ dimensionel

Def : Une isométrie est une permutation linéaire $\alpha : V \to V$ tq :
(☆) $\forall x, y \in V : \alpha(x) \cdot \alpha(y) = x \cdot y$

- exemple : rotation de centre O, symétrie centrale centrée, ...
- Remarque : ① Si $\dim V = n$, (☆) $\Rightarrow \alpha$ permutation linéaire

② Si V infini dim., (☆) $\Rightarrow$ α linéaire et injective, mais pas d'office surjective.

③ Toute isométrie conserve les longueurs des vecteurs, ainsi que leurs angles.

④ Une fonction $\beta : V \to V$ tq $|\beta(x)\,\beta(y)| = |xy|$ $\forall x, y \in V$, ce n'est pas une isométrie en général (ex : translation). Il faut que $\beta(0) = 0$

- Exemple infini dimensionel : $V : \mathbb{R}[t]$ polynome en t à coeff en $\mathbb{R}$, avec le prod. scal. usuel : $\underbrace{\left(\sum_i a_i t^i\right)}_{p(t)} \cdot \underbrace{\left(\sum_i b_i t^i\right)}_{q(t)} = \sum_i a_i b_i$
et $\alpha : V \to V : p(t) \to t\,p(t)$.

Alors α satisfait (☆), est injectif mais pas surjectif.

Thm : Soit E une base orthonormale avec $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ et α une isométrie, alors $\alpha(E)$ est une base orthonormale.

DEMO
$$\alpha(e_i) \cdot \alpha(e_j) = e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Thm : $\forall$ bases orthonormales $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $F = \{f_1, \dots, f_n\}$, $\exists!$ isométrie $\alpha : V \to V$ tq $\alpha(e_i) = f_i$ $\forall i = 1, \dots, n$

DEMO
On sait $\exists!$ permutation linéaire α tq $\alpha(e_i) = f_i$ $\forall i = 1, \dots, n$
Vérifions que c'est une isométrie :

Soient $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ qcq, avec $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\Rightarrow \alpha(x) = \sum x_i \underbrace{\alpha(e_i)}_{f_i}$ et $\alpha(y) = \sum y_i \underbrace{\alpha(e_i)}_{f_i}$. Alors :

$$\alpha(x) \cdot \alpha(y) = \left(\sum_i x_i f_i\right) \cdot \left(\sum_j y_j f_j\right) = \sum_{i,j} x_i \overline{y_j} \underbrace{f_i \cdot f_j}_{\delta_{ij}}$$
$$= \sum_i x_i \overline{y_i} = \left(\sum_i x_i e_i\right) \cdot \left(\sum_j y_j e_j\right) = x \cdot y$$

MATRICE D'UNE ISOMETRIE (V fini-dim.)

Soient $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormale de V et $\alpha : V \to V$ une isométrie

→ Propriété de $a := [\alpha]_{E,E}$:

$$a = \begin{pmatrix} & \underset{\alpha(e_j) = f_j}{\boxed{\ }} & \end{pmatrix}$$

$$\delta_{ij} = \alpha(e_i) \cdot \alpha(e_j)$$

$$= \left(\sum_k a_{ki} e_k\right) \cdot \left(\sum_\ell a_{\ell j} e_\ell\right) = \sum_{k,\ell} a_{ki} \underbrace{e_k \cdot e_\ell}_{\delta_{k\ell}}$$

$$= \sum_k \underbrace{a_{ki}}_{(a_{ik})^T} \overline{a_{kj}} \qquad \forall i,j$$

$$\Rightarrow \underline{a^T \cdot \overline{a} = I}$$

Def Une matrice $a \in \mathrm{Mat}_{n,n}\mathbb{R}$ est orthogonale si $a^T a = I$ et si $a \in \mathrm{Mat}_{n,n}\mathbb{C}$ est unitaire si $a^T \overline{a} = I$

◦ Remarque : ① $a^T a = I \Leftrightarrow a a^T = I \Leftrightarrow a^{-1} = a^T$
$\Leftrightarrow$ les colonnes (lignes) sont une base orthonormale. } dans $\mathbb{R}$

② $a^T \overline{a} = I \Leftrightarrow a \overline{a}^T = I \Leftrightarrow a^{-1} = \overline{a}^T$ } dans $\mathbb{C}$

③ Toute matrice orthogonale est unitaire, tout comme les matrices de Pauli : $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

◦ Rappel : Groupes : Un groupe est un ensemble G, muni d'une opération binaire $G \times G \to G$ tq $(x,y) \mapsto xy$ tq :

① $\forall x,y,z \in G : (xy)z = x(yz)$ [associativité]

② $\exists e \in G : \forall x \in G : ex = x = x.e$ [neutre]

③ $\forall x \in G : \exists x^{-1} \in G : x.x^{-1} = x^{-1}x = e$ [$\exists$ inverse]

◦ $O_n = O_n(\mathbb{R}) = \{a \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \mid a^T a = I\}$: groupe orthogonal

$U_n = U_n(\mathbb{C}) = \{u \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C}) \mid u^T \overline{u} = I\}$: groupe unitaire

→ Groupe O_2 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a \in O_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} = 0 \end{cases}$$

→ $\underline{\text{Si } a \in O_2}$ $\Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 2\pi[$: $a = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (rotation)

ou $a = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ (symétrie bilatérale)

Def

Dans O_n, si $\det(a) = +1$, $a \in$ sous groupe des déplacements
(si $n=2$, déplacement = rotation)

Dans O_n, si $\det(a) = -1$, $a \in$ ~~sous groupe des~~ retournements
Pas de neutre ⚠
(si $n=2$, retournement = symétrie bilatérale)

⊙ Déterminant d'une isométrie:

Pro

Si a est une matrice orthogonale ou unitaire, alors $|\det a| = 1$

DEMO

Vu que $a^T \bar{a} = I$ et $\det(I) = 1$. Donc

$$1 = \det(a^T \bar{a}) = \det(a^T) \det(\bar{a})$$

$$= \det(a^T) \overline{\det(a)} = |\det(a)|^2$$

car $\forall$ polynome $p(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}$, $\overline{p(z_1, \dots, z_k)} = p(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k)$

Pro

Si a est une matrice orthogonale ou unitaire et si λ est une valeur propre de a, alors $|\lambda| = 1$

DEMO

Si $x \in V_\lambda \setminus \{0\}$, alors

$$\cancel{x \cdot x} = (ax) \cdot (ax) = (\lambda x) \cdot (\lambda x) = \lambda \bar{\lambda} \cancel{(x \cdot x)}$$

$\Leftrightarrow$ $1 = |\lambda|^2$. Or, $x \cdot x \neq 0$ donc $|\lambda| = 1$

⊙ Groupe O_3

Soit $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R}) = O_3$

et soit $\alpha : x \mapsto ax$ l'isométrie de $\mathbb{R}^3$ associée.

Notons $p(\lambda)$ le polynome caractéristique de α (ou de a) réel, de degré 3. Vu que $\deg(p(\lambda))$ est impair, $\Rightarrow$ racine $\exists \lambda^* : p(\lambda)^* = 0$. On sait que $\lambda^* = \pm 1$ $\Rightarrow$ partie libre qu'on complète en base

$\Rightarrow \exists$ base orthonormale $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ tq $a f_1 = \pm 1 . f_1$

$\Rightarrow \exists$ matrice $b \in O_3(\mathbb{R})$ tq $b^{-1} a b = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2$

image de f_1 exprimé dans $F = \{f_1, f_2, f_3\}$

$\rightarrow$ Comme b^{-1}, a et b est orthogonales, leur produit l'est aussi (propriété du groupe). On a alors que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2$, et donc 2 possibilités:

$$b^{-1} a b = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

→ Dans le 2e cas, α est diagonalisable :

⊙ valeurs propres de $\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{sym. bil.}}$ → $Spec_{\mathbb{R}}(\alpha) = \{-1, +1\}$

∃ base tq $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$

→ Si on prend $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, on revient au cas de gauche.

On peut donc oublier le 2e cas.

→ 1er cas : ∀ isométrie centrée α dans $\mathbb{R}^3$, ∃ base orthonormée

CCL F avec $[\alpha]_{FF} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

↳ si $+1$: rotation

↳ si -1 : rotation puis symétrie bilatéral = antirotation

CH13 : MATRICES SYMETRIQUES / HERMITIENNE

Def Une matrice carrée $\alpha \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ est symétrique si $\alpha = \alpha^T$

Une matrice carrée $\alpha \in Mat_{n,n}(\mathbb{C})$ est hermitienne si $\alpha = \overline{\alpha}^T$

Observation Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix} = x^T \cdot \overline{y}$$

13.1 Propriété des mat. sym / herm.

Soit $x, y \in \mathbb{C}^n$, avec $x = \sum_i x_i e_i$ et $y = \sum_i y_i e_i$, où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Si $\alpha = (a_{ij}) \in Mat_{n,n}(\mathbb{C})$, alors

$$(\alpha \cdot x) \cdot y = (\alpha x)^T \cdot \overline{y} = x^T \alpha^T \overline{y} = x^T \overline{\overline{\alpha}^T y} = x \cdot (\underbrace{\overline{\alpha}^T}_{=\alpha} y)$$

Obs magique Si $\alpha \in Mat_{n,n}(\mathbb{C})$ est symétrique / hermitienne, alors $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$:

⟺ $(\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y)$ (= opérateur "auto-adjoint")

Pro Soit $\alpha = (a_{ij}) \in Mat_{n,n}(\mathbb{C})$ une mat. hermitienne / symétrique.

Alors toute valeur propre de α est un nombre réel.

DEMO Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de α, et soit $x \in V_\lambda \setminus \{0\}$ un vecteur propre $\neq 0$ de λ. Alors : $(\alpha x) \cdot x \overset{\alpha \text{ hermitienne}}{=} x \cdot (\alpha x) = \overline{(\alpha x) \cdot x}$ ⇒ $(\alpha x) \cdot x \in \mathbb{R}$

De plus : $(\alpha x) \cdot x = (\lambda x) \cdot x = \lambda (x \cdot x)$ donc $x \cdot x \in \mathbb{R}_{>0}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

en effet $\lambda = \dfrac{(\alpha x) \cdot x}{x \cdot x}$ ← $\in \mathbb{R}$, ← $\in \mathbb{R}$.