# CH II. PRODUITS SCALAIRES HERMITIENS

Rappel : produit scalaire : Soit $V$ un E.V. sur $\mathbb{R}$. Un produit scalaire est une application $\cdot : V \times V \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x \cdot y$ tq, $\forall x, y, y' \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $x \cdot y = y \cdot x$ symétrie

(ii) $x \cdot (y + y') = x \cdot y + x \cdot y'$

(iii) $x \cdot (\lambda y) = \lambda (x \cdot y)$

$\Big\}$ bilinéarité

(iv) $x \cdot x \geq 0$ et $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ défini positif

- Produit scalaire usuel sur $V = \mathbb{R}^n$ :

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\to$ On peut définir un produit scalaire non usuel, par ex :

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = \alpha x_1 y_1 + \beta x_1 y_2 + \gamma x_2 y_1 + \delta x_2 y_2$$

Alors $\to$ tjs bilinéaire

$\to$ symétrique $\Leftrightarrow \beta = \gamma$

$\to$ défini positif $\Leftrightarrow$ (voir plus tard)

- Autre exemple : Soit $V$ l'espace des fcts continues de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{R}$. $\forall f, g \in V$, on définit $f \cdot g = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt$

- Produit hermitien :

Si $K = \mathbb{C}$, on remplace la notion de produit scalaire par celle de produit hermitien : $\cdot : V \times V \to \mathbb{C} : (x,y) \mapsto x \cdot y$ tq $\forall x, y, x', y' \in V$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$,

(1) $y \cdot x = \overline{x \cdot y}$

(2) $(x + x') \cdot y = x \cdot y + x' \cdot y$ et $x (y + y') = x \cdot y + x \cdot y'$

(3) $(\lambda x) y = \lambda (x y)$ et $x (\lambda y) = \overline{\lambda} (x y)$

$\Big\}$ sesquilinéaire

(4) $x \cdot x \in \mathbb{R}^+ \ \forall x$, et $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ défini positif

- Un espace hermitien est un E.V. sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit hermitien

- Produit hermitien usuel sur $V = \mathbb{C}^n$ par

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) := \sum x_i \overline{y_i}$$

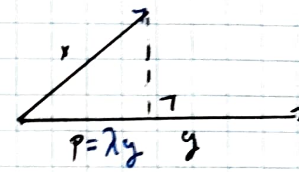
# II.1 ORTHOGONALITE ET PROJECTION ORTHOGONALE

**Def** Dans un espace euclidien / hermitien $V$, deux vecteurs $x, y \in V$ sont orthogonaux si $x \cdot y = 0$. On note $x \perp y$

⊙ Projection orthogonale :

On veut que $p = \lambda y$ et que $x - p \perp y$ :

$(x - \lambda y) \cdot y = 0 \iff \lambda = \frac{x y}{y \cdot y}$




coefficient de Fourier de $x$ p/r à $y$

La projection orthogonale de $x$ sur $y$ est donc $p = \frac{x y}{y \cdot y} \cdot y$

# II.2 BASES ORTHOGONALES et GRAM-SCHMIDT

**Pro** Dans un espace euclidien/hermitien $V$, tout ensemble de vecteurs $\{e_i \mid i \in I\} \neq 0$ et deux à deux orthogonaux est une partie libre

DEMO Supposons que $\sum_{i \in I'} \lambda_i e_i = 0$ pour un certain sous ensemble fini $I' \subseteq I$.

Alors, $0 = 0 \cdot e_j = \left(\sum_{i \in I'} \lambda_i e_i\right) e_j = \underbrace{\sum_{i \in I'} \lambda_i (e_i \cdot e_j)}_{=0\ \forall i \neq j} = \lambda_j \underbrace{(e_j \cdot e_j)}_{>0}$

Donc $\lambda_j\ \forall j$

⊙ Remarque : Si $\{e_i \mid i \in I\}$ est une base orthogonale de $V$ et $x = \sum_j x_j e_j$ un vecteur de $V$ (somme finie), alors le coeff. de Fourier de $x$ p/r $e_i$ est $x_i$ :

$$\frac{x \cdot e_i}{e_i \cdot e_i} = \frac{1}{e_i \cdot e_i}\left(\sum_j x_j e_j\right) \cdot e_i = \frac{1}{e_i \cdot e_i} \sum_j x_j \underbrace{(e_j \cdot e_i)}_{=0 \text{ qd } i \neq j}$$

$$= \frac{1}{e_i \cdot e_i} x_i (e_i \cdot e_i) = x_i$$

**Pro** Gram-Schmidt : Si $V$ est un euclidien/hermitien de $\dim V = n$, et si $\{e_1, \dots, e_i\}$ est une partie libre orthogonale de $V$ de taille $i < n$, alors $\exists\, e_{i+1} \in V$ tq $\{e_1, \dots, e_i\} \cup \{e_{i+1}\}$ est partie libre orthogonale de $V$.

DEMO Soit $f_{i+1}$ n'importe quel vecteur linéairement indépendant des vecteurs de la partie libre $\{e_1, \dots, e_i\}$. Posons

$e_{i+1} = f_{i+1} - \frac{f_{i+1} \cdot e_1}{e_1 \cdot e_1} e_1 - \dots - \frac{f_{i+1} \cdot e_i}{e_i \cdot e_i} e_i = f_{i+1} - \sum_{k=1}^{i}$ proj ⊥ de $f_{i+1}$ sur $e_k$

Montrons mtn que ce $e_{i+1}$ est bien $\perp$ aux autres $e_j$ :

Pour $1 \le j \le i$ on trouve

$$e_{i+1}\cdot e_j = f_{i+1}\cdot e_j - \sum_{k=1}^{i} \frac{f_{i+1}\cdot e_k}{e_k\cdot e_k}\overbrace{(e_k\cdot e_j)}^{=0 \text{ si } k\neq j}$$

$$= f_{i+1}\cdot e_j - \frac{f_{i+1}\cdot e_j}{\cancel{e_j\cdot e_j}}\cancel{(e_j\cdot e_j)} = 0$$

Donc $\{e_1,\dots,e_i,e_{i+1}\}$ est une partie libre orthogonale de $V$

⊙ On a enfin une méthode d'orthogonalisation pour toute base

⊙ Application : polynome de Legendre :

$V=\mathbb{R}[x]$ + produit scalaire : $p\cdot q = \int_{-1}^{+1} p(x)q(x)\,dx$

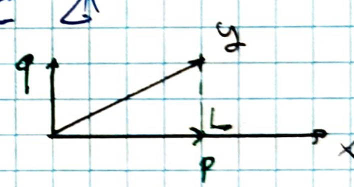
$\{1,x,x^2,\dots\}\to$ Gram-Schmidt ?

$P_0=1$ ; $P_1(x) = x - \frac{\int_{-1}^{1} x\,dx}{\int_{-1}^{1} dx}1 = x-0=x$

$P_2(x)=x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}{\int_{-1}^{1} dx}\cdot 1 - \frac{\int_{-1}^{1} x^3\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}\, x = x^2 - \frac{2/3}{2}\cdot 1 - 0 = x^2-\frac{1}{3}$

En normalisant ces polynomes $P_n(x)$, on obtient les polynomes $P_n(x)$ de Legendre.

⊙ Remarque : pour $x,y\in V$ avec $x\neq 0$, la projection orthogonale de $y$ sur $x$ : $\frac{y\cdot x}{x\cdot x}x \neq \frac{x\cdot y}{x\cdot x}x$ si $K=\mathbb{C}$ ⚠




$y = p+q = \underbrace{\frac{y\cdot x}{x\cdot x}x}_{=p} + \underbrace{\left(y-\frac{y\cdot x}{x\cdot x}\cdot x\right)}_{=q,\ q\perp x}$

## 11.3 NORME ASSOCIÉE

Def → Dans un espace hermitien ou euclidien, la norme d'un vecteur $x$ est définie par $\|x\| := \sqrt{x\cdot x}$

Pro Soit $V$ un espace euclidien. $\forall x,y\in V$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ :

① $\|x\|\ge 0$ et $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

② $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ positivement homogène

③ $|x\cdot y|\le \|x\|\,\|y\|$ ≠ de Cauchy-Schwarz

④ $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ ≠ triangulaire

DEMO ② Si $K=\mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x)\cdot(\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2(x\cdot x)} = |\lambda|\,\|x\|$

si $K=\mathbb{C}$, $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x)\cdot(\lambda x)} = \sqrt{\underbrace{\lambda\bar{\lambda}}_{\text{module de } \lambda^2}\, x\cdot x} = |\lambda|\,\|x\|$

③ Pour $x \neq 0$, considérons $z : y - \frac{y \cdot x}{x \cdot x} \cdot x = y - \text{proj. de } y - x$

Alors $0 \leq z \cdot z = \left(y - \frac{y \cdot x}{x \cdot x} x\right) \cdot \left(y - \frac{y \cdot x}{x \cdot x} \cdot x\right)$

$$= y \cdot y - y \left(\frac{y \cdot x}{x \cdot x} \cdot x\right) - \left(\frac{y \cdot x}{x \cdot x} \cdot x\right) \cdot y + \left(\frac{y \cdot x}{x \cdot x} x\right)\left(\frac{y \cdot x}{x \cdot x} x\right)$$

$$= y \cdot y - \underbrace{\frac{\overline{y \cdot x}}{x \cdot x}}_{\in \mathbb{R}} \cdot y \cdot x - \frac{y \cdot x}{x \cdot x} \cdot \underbrace{x \cdot y}_{= \overline{y x}} + \frac{(y \cdot x)(\overline{y \cdot x})}{(x \cdot x)\cancel{(x \cdot x)}} \cancel{x \cdot x}$$

$$= y \cdot y - \frac{1}{x \cdot x} \underbrace{\overline{y \cdot x} \cdot y \cdot x}_{|y \cdot x|^2} \Rightarrow |y \cdot x|^2 \leq (x \cdot x)(y \cdot y)$$

$$\Leftrightarrow |y \cdot x| \leq \|x\| \, \|y\|$$

④ $\|x+y\|^2 = (x+y) \cdot (x+y) = x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + xy + \overline{xy}$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x \cdot y)$$

$\left\{ z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) \text{ car } (a+bi) + (a-bi) = 2a \right.$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|x \cdot y| \longrightarrow 2a \leq 2\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \rightsquigarrow \text{Cauchy Schwarz}$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

Alors $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

De plus, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow x \cdot y = |x \cdot y| = \|x\| \cdot \|y\|$ et par C.S., $x$ et $y$ sont linéairement dépendant

⊙ <u>Cas particulier</u> : $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ et $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, par C.S,

$$|x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$$

⊙ <u>Bases orthonormales</u>

Soit $V$ un espace euclidien / hermitien de $\dim V = n$. Par Gram-Schmidt $\exists$ base orthogonale, disons $\{e_1, \ldots, e_n\}$. En normalisant les vecteurs, on obtient une base orthonormale : $\left\{\frac{e_1}{\|e_1\|}, \ldots, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right\}$

De plus, si $\{f_1, \ldots, f_n\}$ une base orthonormale de $V$, alors $\forall$ vecteurs $x = \sum_i x_i f_i$ et $y = \sum_i y_i f_i$, on a

$\mathbb{R}$ : $x \cdot y = \left(\sum_{i=1}^n x_i f_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i f_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_i \underbrace{(f_i \cdot f_j)}_{= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

$\mathbb{C}$ : $x \cdot y = \sum_i^n \sum_j^n x_i \overline{y_i} (f_i \cdot f_j) = \sum_i^n x_i \overline{y_i}$

Théorème | Tout espace euclidien / hermitien de dim $= n$ est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ / $\mathbb{C}^n$ avec le produit scalaire usuel (hermitien)

Remarque : isomorphisme d'espace euclidien $(V, \cdot)$ et $(W, *)$.
$\alpha : V \to W$ bijection tq $\alpha$ est linéaire et $x.y = \alpha(x) * \alpha(y)$

## 11.4 ANGLE ENTRE DEUX VECTEURS

Def | Soient $x, y \neq 0$ d'un espace euclidien $V$ (⚠ pas hermitien).
Par l'$\neq$ de C.S., $-1 \leq \frac{x.y}{\|x\|\|y\|} \leq 1$ et donc,

$\exists\ \theta \in [0, \pi]$ tq $\cos\theta = \frac{x.y}{\|x\|\|y\|}$ avec $\theta$ l'angle entre $x$ et $y$.

On obtient donc $x.y = \|x\|\|y\| \cos\theta$

## 11.5 METRIQUE EUCLIDIENNE / HERMITIENNE

Def | Soit $V$ un espace euclidien / hermitien, et soit $x, y \in V$. On définit la distance entre les points $x$ et $y$ par :

$$|xy| = \|x - y\|$$

Pro. | L'espace euclidien / hermitien $V$ muni de la distance définie ci-dessus est un espace métrique, i.e. $\forall x, y, z \in V$, on a

1. $|xy| \geq 0$ et $|xy| = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $|xy| = |yx|$
3. $|xy| \leq |xz| + |zy|$ $\neq$ triangulaire

Théorème | Pythagore : Soit $V$ un espace euclidien / hermitien et soient $x, y, z \in V$. Si $(x-y) \perp (x-z)$, alors $|yz|^2 = |xy|^2 + |xz|^2$

DEMO | Si $a, b \in V$ et $a \perp b$, on a

$$\|a-b\|^2 = (a-b)(a-b) = \|a\|^2 - \underbrace{\overset{a \perp b}{a.b}}_{=0} - \underbrace{\overset{a \perp b}{b.a}}_{=0} + \|b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

Si $a = x-y$ et $b = x-z$, on a fini

Théorème | Loi des cosinus : Soit $V$ un espace $\boxed{\text{euclidien}}$ et soient $x, y, z \in V$. Si $\theta$ est l'angle entre les vecteurs $x-y$ et $x-z$, alors

$$|yz|^2 = |xy|^2 + |xz|^2 - 2|xy||xz|\cos\theta$$

DEMO | $\|a-b\| = (a-b)(a-b) = \|a\|^2 \|b\|^2 - 2a.b = \|a\|^2 \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\|\cos\theta$

Remplacer $a$ par $x-y$ et $b$ par $x-z$

## 11.6 SOUS-ESPACE ORTHOGONAUX

**Def** Soit $S \subseteq V$ un sous-ensemble non vide d'un espace euclidien / hermitien, on définit le sous-espace orthogonal à $S$ par $S^\perp = \{ x \in V \mid x \cdot s = 0 \ \forall s \in S \}$

**Pro** L'ensemble $S^\perp$ un sous-espace de $V$ tq $S^\perp \cap S \subseteq \{0\}$

DEMO Par linéarité de la première composante du produit scalaire, on a que $S^\perp$ est un sous-espace.

Si $S^\perp \cap S \neq \emptyset$, alors soit $x \in S^\perp \cap S$. Par déf, comme $x \in S^\perp$ et $x \in S$, on a $x \cdot x = 0$ et donc $x = 0$ ↯

## 11.7 PROJECTION ORTHOGONALE SUR UN SOUS-ESPACE

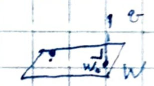
Remarque : $(S^\perp)^\perp = \langle S \rangle$

**Def** Soit $V$ un esp. euclidien de dimension ~~finie~~ quelconque, et soit $W$ un sous-espace de $V$ de dimension finie $m$. Soit $\{e_1, \dots, e_m\}$ une base orthogonale de $W$, et soit $v \in V$ un vecteur quelconque. On définit la projection orthogonale de $v$ sur $W$ par

$$w_0 := \sum_{i=1}^{m} \frac{v \cdot e_i}{e_i \cdot e_i} e_i$$

**Pro** Soit $V$ un espace euclidien, $v \in V$ et $W$ un S.E. de $V$. Soit $\{e_1, \dots, e_m\}$ une base orthogonale de $W$, et $w_0 = \sum^{m} \frac{v \cdot e_i}{e_i \cdot e_i} e_i$ la projection orthogonale de $v$ sur $W$. Alors

① $v - w_0 \in W^\perp$




② Si $w_1 \in W$ est tq $v - w_1 \in W^\perp$, alors $w_1 = w_0$. En particulier, la définition de $w_0$ ne dépend pas de la base orthogonale de $W$.

③ $\| v - w_0 \| \leq \| v - w \| \ \forall w \in W$ ($w_0$ est une approximation optimale de $v$ dans $W$)

④ Si $w_1 \in W$ et si $\| v - w_1 \| \leq \| v - w \| \ \forall w \in W$, alors $w_1 = w_0$. L'approximation optimale de $v$ dans $W$ est unique.