

## 2

## BASES DE LA QCD

- Principe de construction similaire à la QED, mais celle-ci est plus simple à écrire car abélienne. De plus, leur comportement asymptotique est très différent.
- Le principe de base pour la construction du modèle en physique des particules est l'invariance du jauge locale (physique indépendante des phases des champs). La physique est contenue dans la densité lagrangienne  $L[\psi(x), \partial_\mu \psi(x)]$ , un fonctionnel local du champ  $\psi(x)$  et de ses dérivées, apd laquelle on construit l'action  $S = \int d^4x \{ L[\psi(x), \partial_\mu \psi(x)] \}$

↳ L'évolution classique du  $\psi(x)$  est donnée par les équations d'Euler-Lagrange obtenues en imposant que l'action soit stationnaire sous une variation du champ (principe d'Hamilton):

$$\frac{\delta L}{\delta \psi(x)} - \partial_\mu \frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \psi(x)} = 0$$

- L'invariance du jauge local  $\Rightarrow$  L'invariant sous symétrie locale des champs. Le champ définissant l'interaction est celui dont les transformations de jauge compensent exactement celles encourues par le champ de matière  $\psi(x)$
- La connaissance du groupe de symétrie auquel satisfait un champ de matière et sous lequel  $L_I$  doit demeurer invariant permet de déterminer les propriétés du champ porteur de l'interaction ainsi que la forme de son couplage à la matière apd des générateurs et des constantes de structures définissant le groupe de Lie associé.

## 2.1 Invariance du jauge en QED

- Les équations du mouvement d'une particule chargée libre de spin 1/2 découlent du Lagrangien :

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu - m) \psi(x)$$

où  $\psi(x) = u(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}$  représente le spinor de Dirac (particule ( $E > 0$ ), antiparticule ( $E < 0$ ), 2 états d'hélicité  $\lambda = \pm 1/2$ ) qui décrit la particule, et  $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0$  est le spinor adjoint, et où  $\gamma^\mu$  sont les matrices de Dirac.

- Le champ de matrice  $\psi(x)$  satisfait à une symétrie  $U(1)_Q$  attachée à la conservation du courant électrique et correspondent à la transformation de jauge suivante :

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x) = e^{-ie\alpha(x)} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \mapsto e^{ie\alpha(x)} \bar{\psi}(x)$$

Cette transformation ne modifie pas la valeur des observables

Le principe d'invariance du jauge local sous ce groupe de symétrie  $\Rightarrow \partial_\mu \mapsto D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA^\mu(x)$  la dérivée covariante qui satisfait à :

$$D^\mu \psi'(x) = e^{-ie\alpha(x)} D^\mu \psi(x)$$

qui définit les lois de transformation de  $A^\mu(x)$  associées à  $\psi(x)$ :

$$A^\mu(x) \mapsto A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \alpha(x)$$

- Le lagrangien de la théorie en interaction s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + e \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{\text{jauge}} \\ (\text{particule libre}) &\qquad (\text{interaction}) \qquad (\text{E. ein}) \end{aligned}$$

- Le tenseur de Maxwell  $F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$  est fourni par  $[\partial^\mu, \partial^\nu] A_\nu = -ie F^{\mu\nu} A_\nu$

- Les EOM sont l'éq de Dirac  $(i\gamma^\mu - m)\psi = -e A_\mu \psi$  et l'éq. de Maxwell inhomogène :  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = e \bar{\psi} \gamma^\nu \psi$   
Les éq. homogènes résultent de  $\partial^\mu \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}(x) = 0$

## 2.2 Invariance du jauge non abélienne et Lagrangien de la QCD

- Aucun structure finie liée à la présence de la charge de couleur n'est observable  $\Rightarrow$  symétrie exacte du Hamiltonien  $\Leftrightarrow$  les 3 états de couleurs  $\psi_q^r, \psi_q^g, \psi_q^b$  associés à un quark de saveur  $q$  donnée sont dégénérés du pdv de l'IF. La loi de transformation

$$\begin{pmatrix} \psi_q^r \\ \psi_q^g \\ \psi_q^b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \psi_q^{r'} \\ \psi_q^{g'} \\ \psi_q^{b'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{rr} & U_{rg} & U_{rb} \\ U_{gr} & U_{gg} & U_{gb} \\ U_{br} & U_{bg} & U_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_q^r \\ \psi_q^g \\ \psi_q^b \end{pmatrix}$$

doit constituer une opération de symétrie pour le  $L$ .

**DEF** On définit la fonction d'onde de couleur associée à un quark de saveur  $q$  selon :

$$\psi_q^c \equiv \begin{pmatrix} \psi_q^r \\ \psi_q^g \\ \psi_q^b \end{pmatrix}$$

constitue un triplet de la repr. du groupe de symétrie associé dont la loi de transformation  $\otimes$  peut s'écrire :

$$\psi_q^c \rightarrow \psi_q^{c'} = U \psi_q^c$$

- La matrice  $U$  est unitaire et de déterminant = 1. On a donc  $U \in SU(n)_c$

- La fct d'onde de couleur associée à un antiquark est  $\psi_{\bar{q}}^c = (\psi_q^c)^+$ . Sa loi de transformation est donc  $\psi_{\bar{q}}^{c'} \rightarrow \psi_{\bar{q}}^{c'} = \psi_{\bar{q}}^{c+} U^+$

**Prop** La fct d'onde de couleur d'un méson est invariante sous cette transformation ( $\Leftrightarrow$  c'est un singulet de couleur de cette repr.).

**DEMO** On a  $\psi_{\bar{q}_1 q_2}^c = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{\bar{q}_1}^c \psi_{q_2}^c$ . Alors

$$\psi_{\bar{q}_1 q_2}^{c'} = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{\bar{q}_1}^{c'} \psi_{q_2}^{c'} = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{\bar{q}_1}^{c+} U^+ U \psi_{q_2}^c = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{\bar{q}_1}^{c+} \psi_{q_2}^c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{\bar{q}_1 q_2}^c = \psi_{\bar{q}_1 q_2}^c$$



→ Si on choisit  $SU(2)_c$  comme groupe de symétrie, on peut alors on peut choisir  $U_{ij} \in \mathbb{R}$ . En prenant la fact d'onde d'un quark réellement, on aurait  $(\psi_q^c)^* = (\psi_{\bar{q}}^c)^*$  et  $(\psi_q^c)^* = (\psi_q^c)^*$  et cela autorise les combinaisons  $\bar{q}\bar{q}$  et  $qq$ . On, elles ne sont pas observées.

Prop La symétrie de  $L_{QCD}$  est  $SU(3)_c$ .

→ Considérons une transformation infinitésimale sous  $SU(3)_c$ . On a  $\psi_q^c \mapsto \psi_q^c = (\mathbb{1} + iS) \psi_q^c$  avec  $iS \in su(3) \Rightarrow S \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{C}) / S^+ = S$  et  $\text{tr } S = 0$ ?  $S$  possède donc  $18 - 9 - 1 = 8$  paramètres distincts.

DEF On introduit les matrices de Gell-Mann  $\lambda_i$  qui gèrent  $su(3)$ :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

→ On peut alors écrire:

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_1/\sqrt{3} & S_1 - iS_2 & S_1 - iS_5 \\ S_1 + iS_2 & S_8/\sqrt{3} - S_3 & S_6 - iS_7 \\ S_9 + iS_5 & S_6 + iS_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}} S_8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 S_a \lambda_a = \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{S}$$

→ La relation de fermeture de  $su(3)$  est

$$\left[ \frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2} \quad \text{où les } f_{abc} \text{ sont les} \quad \text{côtes de structures}$$

DEF Un champ de Yang-Mills ou champ de jauge non abélien est un groupe dont les générateurs ne commutent pas entre eux  
 $\Leftrightarrow f_{abc} \neq 0 \quad \forall a, b, c$

→ Soit  $\vec{\alpha}$  le vecteur des paramètres caractérisant une transformation de valeur finie. Alors :

$$U(\vec{\alpha}) = \lim_{n \rightarrow \infty} [U(\frac{\vec{\alpha}}{n})]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + i \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{n} \right]^n = e^{\frac{i}{2} \vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha}}$$

DEF On introduit la constante du couplage de l'interaction forte  $g_F$

$$U(\vec{\alpha}) = \exp\{ig_F \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\alpha}\}$$

→ On considère alors le Lagrangien de la théorie libre pour un particule massive de spin 1/2 :

$$L_0 = \sum_q \bar{\Psi}_q^c(x) (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi_q^c(x)$$

On impose que  $L_0$  soit invariant sous  $\Psi_q^c \mapsto \Psi_q^{c'} = e^{ig_F \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\alpha}} \Psi_q^c(x)$ .

$$\begin{aligned} \text{On prouve alors } \partial_\mu &\mapsto D_\mu = \partial_\mu + ig_F \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot A_\mu \\ &= \partial_\mu + ig_F \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a(x) \end{aligned}$$

→ On identifie les 8 potentiels-vecteurs  $A_\mu^a(x)$  aux 8 gluons vecteur de l'IF. Chacun d'eux est associé à l'un des 8 générateurs  $\lambda^a$  du groupe de symétrie  $SU(3)_c$ . Les charges de gluon déterminent l'amplitude de chaque des 8 rotations indépendantes réalisables dans l'espace des degrés de liberté de couleur

→ La densité covariante satisfait l'invariance de jauge locale :

$$D_\mu \Psi_q^{c'}(x) = \exp\{ig_F \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x)\} D_\mu \Psi_q^c(x)$$

② Tenseur de force de l'IF :

→ On considère une transformation infinitésimale  $\vec{g}(x)$  de la fit d'onde de couleur caractérisant le charge de matière :

$$\Psi_q^{c'}(x) = \left( 1 + ig_F \frac{\vec{\lambda}}{2} \vec{g}(x) \right) \Psi_q^c(x)$$

À l'ordre 1, on peut montrer que :

$$(i \vec{\lambda} \cdot \vec{a})(i \vec{\lambda} \cdot \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - i f_{abc} \vec{a}_a \vec{b}_b \vec{a}_c$$

On obtient finalement :

DÉP

La transformation du champ de gluons  $A_\mu^a(x)$  sous un changement de jauge infinitésimal  $\vec{g}(x)$  est :

?

$$A_\mu^a(x) \mapsto A_\mu^{a'} = A_\mu^a(x) - \partial_\mu g^a(x) - g f_{abc} g^b(x) A_\mu^c(x)$$

→ Les champs de jauge se transforment selon la rep. régulière de  $SU(3)_c$

→ Afin de déterminer l'énergie cinétique de  $\vec{A}^\nu(x)$ , on applique :

$$[D_\mu, D_\nu] \vec{A}^\nu(x) = ig \frac{\lambda^a}{2} \left( \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - g f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \right) \vec{A}^\nu(x)$$

DÉF

Le tenseur de force de l'IF couleur est donné par

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - g f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x)$$

↳  $A_\mu^a(x)$  interagit avec lui-même ! Les gluons vecteurs de l'IF portent eux-mêmes une charge de couleur. La conservation de la couleur  $\rightarrow \exists (n^2-1)|_{n=3} = 8$  gluons, pourtant une couleur et anti-couleur.

DÉF

Le Lagrangien de la QCD s'écrit comme :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi - \frac{1}{4} F^2$$

Explicitement,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{jauge}$  avec :

$$\rightarrow \mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_q^c(x) [i \gamma^\mu \partial_\mu - m] \psi_q^c(x)$$

$$\rightarrow \mathcal{L}_{jauge} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a = -\frac{1}{4} [\partial^\mu A_\mu^a(x) - \partial^\nu A_\nu^a(x)] [\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x)] \\ + (\text{terme } \alpha \text{ } f_{abc}) \sim \text{dans } \mathcal{L}_I$$

$$\rightarrow \mathcal{L}_I = \bar{\psi}_q^c(x) \left( -g \gamma^\mu A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} \right) \psi_q^c(x)$$

$$= -g \bar{\psi}_q^c(x) \gamma^\mu A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} \psi_q^c(x) + \frac{g}{2} f_{abc} [\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x)] A_b^\mu(x) A_c^\nu(x)$$

-  $\frac{g^2}{4} f_{abc} f_{bcd} A_a^\mu(x) A_b^\nu(x) A_c^\mu(x) A_d^\nu(x)$

- Puisque le champ de couleur couplé à lui-même, il est impossible d'envisager le gluon comme un particule libre.
- ↳ Le vide de la QCD est le siège d'interactions.
- Le paramètre  $g$  gère l'invariance du jauge. On la nomme constante de couplage du jauge.

## 2.3 Règles de Feynmann pour QCD

- Le lagrangien libre  $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma - m)\psi$  donne l'expression des propagat., donné par l'opérateur inverse des EOM.
- Les règles pour les interactions sont traitées comme des perturbations et sont données par  $\mathcal{L}_{int}$ .
- La jauge covariante est représentée par  $\xi$ , qui définit la jauge.
- Dans la jauge de Feynman,  $\xi = 1$ . Dans celle de Landau,  $\xi = 0$ .

### ① Particules externes:

	entrant	sortant
$\begin{array}{c} p \\ \rightarrow \\ \hline \end{array}$	$u(p,s)$	$\bar{u}(p,s)$
$\begin{array}{c} p \\ \leftarrow \\ \hline \end{array}$	$v(p,s)$	$\bar{v}(p,s)$
$\begin{array}{c} p \\ \hline \text{mmmm} \end{array}$	$\epsilon_\mu(p,s)$	$\epsilon_\mu^*(p,s)$

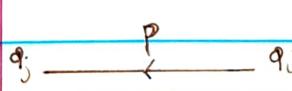
### → Relation d'orthogonalité:

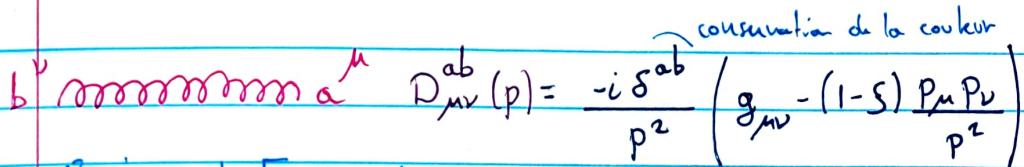
$$(p-m)u = 0 = \bar{u}(p-m)u \quad u(p+m)v = 0 = \bar{v}(p+m)v$$

### → Relations de fermeture:

$$\sum_s u(p,s)\bar{u}(p,s) = p + m \quad \text{et} \quad \sum_s v(p,s)\bar{v}(p,s) = p - m$$

### ② Propagateurs:

  $G^i_j(p) = \frac{i}{p - m} \delta^i_j = i(p + m) \delta^i_j$

b)   $D_{\mu\nu}^{ab}(p) = \frac{-i\delta^{ab}}{p^2} \left( g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right)$  conservation de la couleur

En jauge de Feynman:

$$D_{\mu\nu}^{ab}(p) = \frac{-i\delta^{ab}}{p^2} g_{\mu\nu}$$

### ① Interactions:

$$\text{Gluon } q_i \quad (\Gamma^{\alpha\mu})_{ij} = ig g^\mu (\lambda^\alpha)_{ij}$$

sauvage, couleur i

$$\text{Gluon } q_i \quad \Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(p, q, r) = -g f^{abc} \left( (p-q)_\lambda g_{\mu\nu} + (q-r)_\mu g_{\nu\lambda} + (r-p)_\nu g_{\mu\lambda} \right)$$

tel que  $p+q+r=0$

$$\text{Gluon } q_i \quad \Gamma_{\mu\nu\lambda\sigma}^{abcd} = -ig^2 f^{abc} f^{cde} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma})$$

$$-ig^2 f^{ace} f^{bed} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma})$$

$$-ig^2 f^{ade} f^{bce} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma})$$

### ② Remarques:

- Tous les vertex dépendent des indices de couleur des lignes croisées. Conventionnellement, on prend  $a, b, c, d$  pour les indices de couleur adjointes des gluons et  $i, j$  pour les quarks et anti-quarks.
- Le propagateur d'un quark est le même que celui d'un autre fermion, où l'on a imposé la conservation de la couleur.
- Les lignes de gluon portent un vecteur de polarisation  $S^\mu$  similaire à celui d'un photon, avec un indice de couleur en plus.
- Pour quantifier la QCD, il faut introduire des fantômes de Faddeev-Popov pour préserver l'invariance de jauge.
- L'existence d'auto-interaction des champs de jauge est responsable des propriétés de liberté asymptotique et de confinement de l'IF.

## 2.4 La liberté asymptotique

- La constante du couplage ne comporte pas différemment en fonction de la distance. Ce comportement est déterminé par la réponse du vide à la présence d'un charge, le principe d'incertitude permettant des fluctuations du vide au voisinage d'une particule-antiparticule pendant un temps  $\propto 1/E$ .

### 2.4.1 Effet d'écaillage en QED:

- Un paire part-antipart ne polarise pas dans la présence d'un charge. Il faut donc spécifier la distance à laquelle on s'intéresse.

DEF 1 La longueur d'onde de de Broglie  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v} \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$

- En QED, l'effet d'écaillage de la charge électrique est calculé en sommant toutes les corrections de boucle  $e^+e^-$  au propagateur du photon:  $\gamma^* \rightarrow (e^+e^-)^* \rightarrow \gamma^*$ . On s'intéresse au couplage qui apparaît à chaque vertex:

→ À l'ordre 1:  $(-i) e_0 \gamma^\mu \cdot (-i) \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \cdot (-i) e_0 \gamma^\nu = i e_0^2 \gamma^\mu \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \gamma^\nu$



→ À l'ordre 2:

$$(-i) e_0 \gamma^\mu \cdot (-i) \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \cdot (-i) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ (-i) e_0 \gamma^\rho \frac{i(k+m)}{k^2 - m^2} (-i) e_0 \gamma^\nu \frac{i(k-q+m)}{(k-q)^2 - m^2} \right] \times (-i) \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} (-i) e_0 \gamma^\nu$$

En effet,  $\sum_{\alpha, \beta, \gamma, \nu} \gamma^\rho_{\nu\mu} (k+m)_{\mu\alpha} \gamma^\lambda_{\nu\mu} (k-q+m)_{\alpha\beta} =$

$$= \text{Tr} [\gamma^\rho (k+m) \gamma^\lambda (k-q+m)]$$

$$= 4 g^{\rho\lambda} (m^2 - h \cdot (k-q)) + 8 h^\rho h^\lambda - 4 (h^\lambda q^\rho + h^\rho q^\lambda)$$

On s'assure sur les états d'hélicité des fermions de la boucle

### ① Divergence et cut-off UV:

→ Le calcul de la boucle fait intervenir le terme :

$$\int \frac{d^4 k}{2\pi} \text{Tr}[\dots] \propto \int \frac{d^4 k}{(k^2 - m^2)^2} = \int \frac{k^3}{(k^2 - m^2)^2} dk d\Omega \propto \int_0^\infty \frac{dk}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

↳ C'est la divergence ultraviolette, qui est logarithmique :  $\int dk/k$

DEF On introduit un cut-off ultraviolet  $\mu_R$  tq  $\int_0^\infty \frac{dk}{k} \mapsto \int_0^{\mu_R} \frac{dk}{k}$

→ L'intégrale laisse alors une divergence en  $q^2/\mu_R^2$  :

$$ie_0^2 g^{\mu\nu} \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \gamma^\nu \left[ 1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \left[ \frac{m^2 - q^2}{\mu_R^2} \right] + \frac{e_0^2}{12\pi^2} F(q^2) \right]$$

avec  $F(q^2)$  tel que  $\lim_{q^2 \rightarrow \infty} F(q^2) = 0$  et  $\max\{F\} < \infty$

DEF On introduit la charge renormalisée en ne gardant que le terme de correction logarithmique (Leading Log Approximation-LLA)

? juste ?

$$e_0^2 \equiv e_0^2 \left( 1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \left[ \frac{m^2 - q^2}{\mu_R^2} \right] \right)$$

Pour des diagrammes aux ordres supérieurs, on introduit

$$\alpha_0 \equiv e_0^2 / 4\pi$$

→ On obtient alors :

$$\alpha_{em}^{eff}(\mu_R^2) = \alpha_0 \left( 1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left[ \frac{m^2 - q^2}{\mu_R^2} \right] + \left( \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left[ \frac{m^2 - q^2}{\mu_R^2} \right] \right)^2 + \dots \right)$$

$$\approx \frac{\alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left[ Q^2 / \mu_R^2 \right]} \quad \text{en posant } \frac{m^2 - q^2}{\mu_R^2} \approx Q^2$$

De manière équivalente,

$$e_0^2(Q^2) = \frac{e_0^2}{1 - \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \left[ Q^2 / \mu_R^2 \right]}$$

→ La constante de couplage dépend donc de la charge, dont la dépendance en la distance est, asymptotiquement,

$$e^2(r) = \frac{e^2}{1 + \frac{2e^2(r_0)}{3\pi} \ln \left[ r/r_0 \right]} \quad \text{où } r_0 = \frac{1}{\alpha_0}$$

### ④ Discussion:

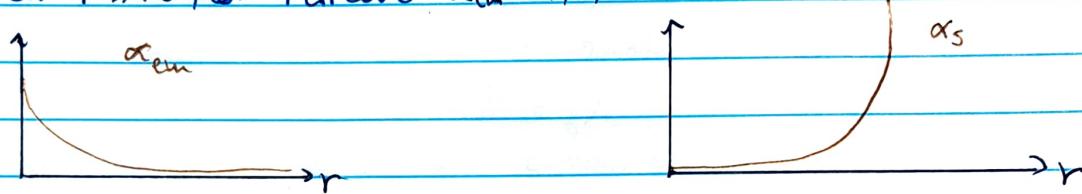
→ A grande distance,  $r \gg r_0$ , on peut négliger la dépendance en la charge nue  $e(r)$ :

$$e'(r) \approx -\frac{3\pi}{2 \ln(r/r_0)}$$

→ A courte distance,  $r_0 \rightarrow 0$ , le logarithme  $\ln(r/r_0) \rightarrow \infty$ . Or, si  $e(r_0)$  est fini,  $e(r) \rightarrow 0$  &  $r$ : paradoxe!

↳ En fait, lorsque  $r_0 \rightarrow 0$ ,  $e(r_0) \rightarrow \infty$ : pas de traitement perturbatif possible. Le problème fut résolu par Gribov via la procédure dite de renormalisation.

→ Pour  $r \gg r_0$ , on retrouve  $\alpha_{em} \approx 1/137$

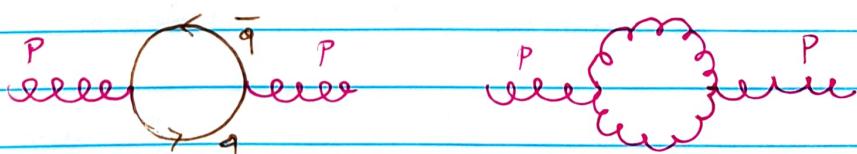


### 2.4.2 La constante de couplage de QCD:

DEF En QCD, la liberté asymptotique correspond à un effet

I d'anti-échantage: le couplage augmente avec la distance.

→ On calcule également des corrections de bouches aux propagateurs du boson de jauge:



↳ couleur fixée, pas le sateur.

↳ La bouch de quark est similaire au cas QED, avec:

$$\rightarrow un \text{ facteur } \text{Tr}[\lambda^a \lambda_a] = 1/2$$

→ somme sur les saturs, aux numbr de  $N_f$

- ↳ La boucle de gluons a un expression similaire avec :
- un signe +1 car c'est un boson
  - une somme sur les couleurs

DEF  
On introduit la constante de couplage forte  $\alpha_s \equiv \frac{g^2}{4\pi}$

→ On obtient :

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu_R^2)}{1 - \frac{2N_f - 11N_c}{6\pi} \alpha_s(\mu_R^2) \ln[Q^2/\mu_R^2]}$$

Le terme  $11N_c$  ← gluons, et celui  $2N_f$  ← quarks.

- ↳ Les quarks induisent un effet d'écaillage et les gluons d'anti-écaillage. L'effet de compétition s'annulerait pour  $N_f = 11N_c/2$

### 2. 4.3 Petite discussion :

→ Considérons un milieu à vive dans un milieu continu avec une constante diélectrique  $\epsilon$ . Elle est liée à la perméabilité magnétique  $\mu$  selon

$$\epsilon \cdot \mu = 1 = 1/c^2$$

→ Un milieu diamagnétique (effet d'écaillage) correspond à  $\mu < 1$  et un milieu paramagnétique (anti-écaillage) à  $\mu > 1$

→ Quand on  $e^-$  se déplace dans un  $\vec{B}_{ext}$ , 2 effets apparaissent :

- 1) le courant induit (direction opposée, effet diamagn.)
- 2) le spin s'alligne sur  $\vec{B}_{ext}$  (effet paramagn.)

↳ En QED, l'effet diamagn l'emporte : écaillage

↳ En QCD, les gluons possèdent une charge de couleur et ont un spin plus élevé que les  $q$  et  $\bar{e}$ .

→ La charge de couleur tend  $\rightarrow 0$  lorsque  $r \rightarrow 0$ .

DEF On définit le paramètre  $\Lambda_{QCD}$  par

$$\Lambda_{QCD}^2 \equiv \mu^2 \exp\left\{-\frac{4\pi}{\beta_0 \alpha_s(\mu^2)}\right\}$$

qui correspond à  $Q^2$  tq  $\frac{2N_f - 11N_c}{6\pi} \alpha_s(\mu^2) \ln [Q^2/\mu^2] = 1$

- Cette grandeur indique le pivot entre la région perturbatif et non-perturbatif, et donc l'énergie à laquelle les eq. du groupe de renormalisation deviennent valables.  
En effet,  $\alpha_s(Q) \xrightarrow{Q \rightarrow \Lambda_{QCD}} \infty$

- $\Lambda_{QCD}$  est un paramètre libre de QCD. Pour  $Q=M_Z$ , on obtient  $\Lambda_{QCD} \approx 0,1 \text{ GeV}$

## 2.5 Le potentiel de QCD

- Les quarks isolés n'ayant jamais été observés, on suppose qu'ils sont confinés au sein des hadrons.

### 2.5.1 Etats de couleur du gluon:

DEF On définit 8 états de couleur du gluon orthonormés

→ Un octet:

$$G_1 \equiv r\bar{g}$$

$$G_2 \equiv r\bar{t}$$

$$G_3 \equiv g\bar{r}$$

$$G_4 \equiv g\bar{b}$$

$$G_5 \equiv b\bar{r}$$

$$G_6 \equiv b\bar{g}$$

$$G_7 \equiv \sqrt{\frac{1}{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}) \quad G_8 \equiv \sqrt{\frac{1}{2}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})$$

*Rappel que*  
*rg, rb, bg ?*

$$\rightarrow \text{Un singlet: } G_0 \equiv \sqrt{\frac{1}{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})$$

Prop Seuls les états antisymétriques sous permutation de 2 couleurs sont réalisés dans la nature

→  $\{G_i\}_{i=1}^8$  existe

→  $G_0$  n'existe pas. De plus, il ne porte pas de couleur, il ne réalise pas l'IF.

## 2.5.2 Le facteur de couleur :

DEF

La fonction d'onde d'un quark peut être exprimée comme le produit d'un spinor de Dirac et d'une fonction d'onde de couleur ( $\chi_c$ ):

$$\Psi = \psi(x) \cdot \chi_c \text{ avec :}$$

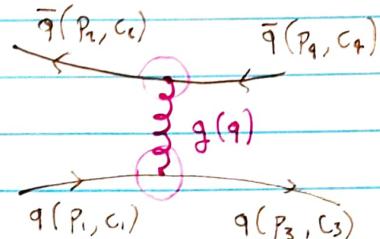
$$\chi_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### ① Diffusion de 2 quarks au tree-level:

→ L'élément du matrice correspondant s'écrit :



$$i\mathcal{M} = \left( \bar{u}(p_3) \chi_3^+ \left( -i \frac{g \lambda^a}{2} \gamma^\mu \right) u(p_1) \chi_1 \right) \frac{-ig_{\mu\nu}\delta^{ab}}{q^2} \left( \bar{v}(p_1) \chi_2^+ \left( -i \frac{g \lambda^a}{2} \gamma^\nu \right) v(p_3) \chi_4 \right)$$

$$= ig^2 \frac{1}{q^2} \left( \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \right) \left( \bar{v}(p_1) \gamma^\nu v(p_3) \right) \underbrace{\frac{1}{4} (\chi_3^+ \lambda^a \chi_1) (\chi_2^+ \lambda^a \chi_4)}_{C_F}$$

 $C_F$ 

On obtient à une constante de couplage près la même expression que dans QED pour la diffusion  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  multiplié par un facteur de couleur  $C_F$

Prop

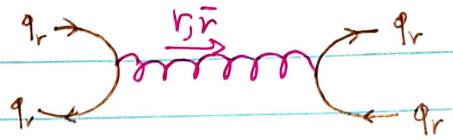
Pour les interactions abéliennes (par d'interaction gluon-gluon), on peut toujours factoriser  $C_F$  et avoir " $i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_{QED} \cdot C_F$ "

### ② Force attractive ou répulsive ?

→ Dans QED, le signe de la force e-m est donnée par  $e\alpha_s \propto$ , avec  $\alpha > 0$ . De façon équivalente dans QCD, on peut décomposer  $C_F$  en  $\frac{1}{2} c_1 c_2$  (facteur 1/2 historique)

Prop Un interaction ayant un facteur de couleur  $C_F \propto_s = \frac{1}{2} c_1 c_2 \propto_s$   
 sera attractive pour  $C_F < 0$   
 répulsive pour  $C_F > 0$

① Exemple: diffusion  $q_r \bar{q}_r \rightarrow q_r \bar{q}_r$ :



→ Le facteur de couleur vaut:

$$\begin{aligned} C_F &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha} \left[ (100) \lambda^{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[ (100) \lambda^{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{4} (\lambda^1)_{11} (\lambda^1)_{11} = \frac{1}{4} ((\lambda^1)^2)_{11} + ((\lambda^3)^2)_{11} \\ &= \frac{1}{4} \left( 1 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 1/3 \end{aligned}$$

$$x_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

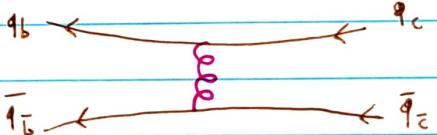
Un autre moyen d'obtenir ce résultat est de regarder quels gluons possède un terme  $\propto r\bar{r}$ : il s'agit de  $G_7$  et  $G_8$ . On trouve:

$$C_F = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \right) = 1/3$$

↳ La force sera donc répulsive!

→ Le résultat sera le même pour  $g\bar{g}$  et  $b\bar{b}$ , comme imposé par la symétrie de couleur.

② Exemple: état singlet  $q\bar{q}$ :



→ Considerons un méson, état singlet de couleur:

$$q\bar{q} = \frac{1}{\sqrt{3}} (q_r \bar{q}_r + q_g \bar{q}_g + q_b \bar{q}_b) = \frac{1}{\sqrt{3}} (r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}) \sim G_0$$

↳ Le facteur de couleur est: (on considère 1 couleur et on multiplie par 3)

$$C_F(q\bar{q}) = 3 \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{\text{initial}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{\text{final}} \cdot C_F(q_b \bar{q}_b)$$

→ Les gluons ayant une couleur bleue sont  $G_5$  ( $q_b \bar{q}_b \rightarrow q_r \bar{q}_r$ ),

$$G_6$$
 ( $q_b \bar{q}_b \rightarrow q_g \bar{q}_g$ ) et  $G_8$  ( $q_b \bar{q}_b \rightarrow q_b \bar{q}_b$ ):

$$C_F = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{6}} + 1 \cdot -1 + 1 \cdot -1 \right) = -\frac{4}{3}$$

(Les signes (-) sont dus aux anti-particules)

↳ La force est attractive!

Prop

Le facteur de couleur d'un (anti-)baryon  $qqq$  est  $C_F^{qqq} = 2/3$

### 2.5.3 Le potentiel:

→ Le potentiel qui représente l'interaction QCD entre un quark et un anti-quark dans un état de couleur singulet est dit de "fumel".

DEF Le potentiel du fumel  $V_{QCD}$  est donné par

$$V_{QCD}(r) = C_F \frac{\alpha_s}{r} + k \cdot r = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + k \cdot r$$

où  $k$  est la tension de la corde,  $k \approx 1 \text{ GeV fm}^{-1}$

↳ Ce potentiel est compatible avec les calculs non perturbatifs th lattice QCD

↳ Ce potentiel possède 2 régimes :

→ coulombien si  $r \ll 1/k$  et linéaire si  $r \gg 1/k$

#### ① Partie coulombienne:

→ Due au propagateur des gluons. Pour  $q^2 \ll M^2$  (approx non-relativiste), le potentiel est  $\propto$  transfo de Fourier du propagateur des gluons :

$$\begin{aligned} V_{QCD}(r) &= -g^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot r} \cdot \frac{1}{-p^2} = g^2 \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{\sin(p|r|)}{p|r|} \\ &= \frac{g^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{|r|} = \frac{\alpha_s}{|r|} \quad \left( \int_0^\infty \sin(x)/x = \pi/2 \right) \end{aligned}$$

↳ On retrouve la forme classique du potentiel coulombien

#### ② Partie linéaire:

→ Correspond au régime non-perturbatif, donc diagrammes de Feynmann inutiles.

→ Lorsque la distance de séparation entre les 2 quarks devient de l'ordre de 1 fm, les lignes de champ des gluons s'attirent réciproquement et forment un tube. Si on les écarte encore, le tube s'allonge avec  $F = -\delta V/\delta r$  constante. Si  $r > 135 \text{ MeV} \sim m_\pi$ , il y a fragmentation : une paire  $q\bar{q}$  est créée.