→ Dans le 2e cas, a est diagonalisable :

⊙ valeurs propres de $\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{sym. bil.}}$ ⇒ $Spec_{\mathbb{R}}(a) = \{-1, +1\}$

∃ base tq $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$

→ Si on prend $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, on revient au cas de gauche.

On peut donc oublier le 2e cas.

→ 1er cas : ∀ isométrie centrée α dans $\mathbb{R}^3$, ∃ base orthonormée

CCl

F avec $[\alpha]_{FF} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

↳ si $+1$: rotatation

↳ si -1 : rotation puis symétrie bilatéral
= antirotation

CH13 : MATRICES SYMETRIQUES/HERMITIENNE

Def Une matrice carrée $a \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ est symétrique si $a = a^T$

Une matrice carrée $a \in Mat_{n,n}(\mathbb{C})$ est hermitienne si $a = \overline{a}^T$

Observat° Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix} = x^T \cdot \overline{y}$$

13.1 Propriété des mat. sym / herm.

Soit $x, y \in \mathbb{C}^n$, avec $x = \sum_i x_i e_i$ et $y = \sum_i y_i e_i$, où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Si $a = (a_{ij}) \in Mat_{n,n}(\mathbb{C})$, alors

$$(a \cdot x) \cdot y = (ax)^T \cdot \overline{y} = x^T a^T \overline{y} = x^T \overline{\overline{a}^T y} = x \cdot (\underbrace{\overline{a}^T}_{=a} y)$$

Obs magique Si $a \in Mat_{n,n}(\mathbb{C})$ est symétrique / hermitienne, alors $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$:

⇔ $(ax) \cdot y = x \cdot (ay)$ (= opérateur "auto-adjoint")

Pro Soit $a = (a_{ij}) \in Mat_{n,n}(\mathbb{C})$ une mat. hermitienne / symétrique.

Alors toute valeur propre de a est un nombre réel.

DEMO Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de a, et soit $x \in V_\lambda \setminus \{0\}$ un vecteur propre $\neq 0$ de λ. Alors : $(ax) \cdot x \overset{a \text{ hermitienne}}{=} x \cdot (ax) = \overline{(ax) \cdot x}$ ⇒ $(ax) \cdot x \in \mathbb{R}$

De plus : $(ax) \cdot x = (\lambda x) \cdot x = \lambda (x \cdot x)$ donc $x \cdot x \in \mathbb{R}_{>0}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

en effet $\lambda = \dfrac{(ax) \cdot x \leftarrow \in \mathbb{R}}{x \cdot x \leftarrow \in \mathbb{R}}$.

Pro

Si $a = [a_{ij}] \in Mat_{n,n}(\mathbb{C})$ matrice (sym) hermitienne et si x et y sont 2 vecteurs propres de a de valeurs propres respective λ et μ distincts, alors $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x \perp y$

DEMO

$\lambda (x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y$ car produit hermitien

$= (ax) \cdot y$ $x \in V_\lambda$

$= x \cdot (ay)$ a hermitienne

$= x \cdot (\mu y)$ $y \in V_\mu$

$= \bar{\mu} (x \cdot y)$ sesquilinéarité

$= \mu (x \cdot y)$ $\mu \in Spec_{\mathbb{C}}(a) \Rightarrow \mu \in \mathbb{R}$

Donc $0 = \lambda (x \cdot y) - \mu (x \cdot y) = \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \underbrace{(x \cdot y)}_{= 0}$

13.2 Diagonalisation de matrices symétriques/hermitiennes

Thé Spectrale

Pour $\forall$ matrice symétrique (hermitienne) $n \times n$, $\exists$ base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) constituée de vecteurs propres

DEMO

Soit $a \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Induction :

$\rightarrow P(n=1)$: trivial

$\rightarrow P(n)$: Soit $n \geq 2$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de a. On sait que $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit f_1 un vecteur de norme 1 de v.p. λ.

- Par Gram-Schmidt, $\exists f_2, \dots, f_n$ tq $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
- Soit c la matrice constitué en colonne des vecteurs f_i. c est orthogonale et satisfait : $c^{-1} a c = \begin{pmatrix} \lambda & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & a_{(1)} \\ 0 & \end{pmatrix}$

où $a_{(1)} \in Mat_{n-1 \times n-1}(\mathbb{R})$. Comme c est orthogonale et a est symétrique, $c^{-1} a c$ est encore symétrique :

$(c^{-1} a c)^T = c^T a^T (c^{-1})^T = c^{-1} a (c^T)^T = c^{-1} a c$

a^T : a symétrique

c orthogonal : $c^T = c^{-1}$

- Alors la 1e ligne de $c^{-1} a c$ est $(\lambda, 0, \dots, 0)$ et donc $a_{(1)}$ est symétrique. Par induction, $\exists\, d_{(1)} \in Mat_{n-1,n-1}(\mathbb{R})$ tq $d^{-1}_{(1)} a_{(1)} d_{(1)}$ est diagonale.

○ Posons

$d := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & d(n) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$, la matrice

d est orthogonale, et $d^{-1}(c^{-1}ac)d$ est diagonale. Alors

$b := cd$ est la matrice souhaitée.

CN14 - FORMES QUADRATIQUES

Dans ce chapitre, V sera un E.V. réel.

Def Une forme bilinéaire symétrique sur V est une fonction $f : V \times V \to \mathbb{R}$ linéaire en les 2 composantes et telle que $f(x,y) = f(y,x)$ $\forall x,y \in V$

Def Si $f : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique (fbs) sur V, la fonction $q : V \to \mathbb{R}$ tq $q(x) := f(x,x)$ $\forall x \in V$ est appelée la forme quadratique sur V associée à f.

○ Formule de polarisation

$\forall$ forme bilinéaire symétrique f, $\exists!$ forme quadratique q, via $q(x) = f(x,x)$ et réciproquement. Ainsi, $\forall x,y \in V$, on a

$$q(x+y) = f(x+y, x+y) \overset{\text{bilinéarité + symétrique}}{=} f(x,x) + 2f(x,y) + f(y,y)$$

$$= q(x) + 2f(x,y) + q(y) \text{ et donc}$$

$$f(x,y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}$$

14.1 Matrice d'une forme quadratique

Soit V un EV$\mathbb{R}$ et $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base qcq de V et $f : V \times V \to \mathbb{R}$ une fbs de V. Alors pour $x,y \in V$,

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \underbrace{f(e_i, e_j)}_{= a_{ij}} \text{ (posons)}$$

Alors : $f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$

et la matrice $a := (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique qui détermine complètement f. On dit que a est la matrice de la forme bilinéaire f dans la base E. Pour la forme quadra.,

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2}_{\text{termes } \square} + \underbrace{\sum_{1 \le i < j \le n} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j}_{\text{termes rectangles}}$$