

Dynamique des fluides et des plasmas

ULB MA | 2023–2024

Chapitre 1: Description d'un fluide

Notes manuscrites (scannées)

Antoine Dierckx • ant.dierckx@gmail.com

Attention: uniquement le chapitre 1 ici. Ce document DocHub contient **uniquement le premier chapitre**. L'ensemble des chapitres, des notes personnelles, des corrections d'exercices et une liste d'ouvrages de référence se trouvent sur mon site web.

- **Tous les chapitres :** voir la page du cours
- **Corrections d'exercices & travaux personnels :** voir la page principale.
- **Ouvrages de référence :** voir la section bouquin.

Accéder au reste : scannez ou cliquez ici



<https://adierckx.github.io/NotesAndSummaries/Master/MA1/PHYS-F-412>

Avertissement. Les notes publiées ici sont basées sur ma compréhension des cours et n'ont pas fait l'objet d'un examen ou d'une vérification indépendante. J'espère qu'elles sont utiles, mais il peut y avoir des erreurs ou des inexactitudes. Si vous trouvez des erreurs ou si vous avez des suggestions d'amélioration, n'hésitez pas à me contacter à l'adresse suivante : ant.dierckx@gmail.com. Merci !

DYNAMIQUE DES FLUIDES ET DES PLASMAS

PHYS-F412 - Bernard Knaepen

I DESCRIPTION D'UN FLUIDE

1.1 Introduction

- On va assimiler un fluide à un milieu continu. Le milieu est suffisamment dense pour que ses propriétés moyennes puissent être correctement définies localement.
- On introduira la notion de particule de fluide

1.2 Définitions et notions préliminaires

DEF La vitesse du fluide \vec{u} est définie en un point de l'espace à chaque instant selon:

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t) = [u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)]$$

DEF Un écoulement est dit stationnaire si $\partial_t \vec{u} = 0$
(stationnaire \Leftrightarrow indépendant du temps)

→ exemple : écoulement stationnaire bi-dimensionnel:

$$\vec{u} = [u(x, y), v(x, y), 0]$$

⊙ Deux descriptions possibles :

- Il est possible de traiter le fluide comme un champ:
 \forall grandeur, \exists champ (exemple : densité $\rho(x, y, z, t)$).
C'est une description Eulerienne.
- Alternativement, on peut traiter le fluide comme une collection de particules de fluide $\{A\}$. La densité de la particule de fluide "A" est alors $\rho_A(t)$. C'est une description Lagrangienne.

③ Liens entre les 2 descriptions :

→ Une particule de fluide qui se trouve au point \vec{x}_A possède une densité $\rho_A(t) = \rho(\vec{x}_A, t)$

→ Que vaut $\rho_A(t+dt)$? déplacement de la part. de fluide

$$\begin{aligned}\rho_A(t+dt) &= \rho(\vec{x}_A + \vec{u}(\vec{x}_A, t)dt, t+dt) \\ &\approx \rho(\vec{x}_A, t) + \partial_t \rho dt + \frac{\partial \rho}{\partial x^j} u^j(\vec{x}_A, t) dt \\ &= \rho(\vec{x}_A, t) + \left\{ \partial_t \rho + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \rho \right\} dt\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \rho_A = \partial_t \rho + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \rho$$

DEF

Soit $y = y(\vec{x}, t)$ un champ tensoriel. On définit sa dérivée matérielle D/Dt selon :

$$\frac{Dy}{Dt} \equiv \frac{\partial y}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) y$$

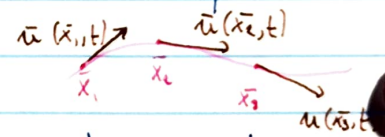
→ Dérivée matérielle de la vitesse du fluide :

$$\frac{d\vec{u}_A}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u}$$

④ Ligne de courant :

DEF

On définit une ligne de courant comme une courbe qui est partout tangente à la vitesse \vec{u} (à un certain instant t .)



→ Puisque $\vec{u} = \vec{u}(t)$, les lignes de courants peuvent varier et ne correspondent pas forcément avec les trajectoires des particules.

Prop Si un écoulement est stationnaire, trajectoire = ligne de courant.

Preuve : Soit $\vec{x}(s)$ une ligne de courant. Alors

$$d(\vec{x} + d\vec{x}) \approx d(\vec{x}) + (d\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{x} \leadsto d\vec{x} = (d\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{x} \propto (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{x}$$

\leadsto Si $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{x} = 0$, alors \vec{x} = cste sur cette ligne de courant

→ Si $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})f = 0$, cela signifie qu'elle est constante le long d'une ligne de courant, mais ça ne veut pas dire qu'elle prend la même valeur sur toutes les lignes de courant.
 En effet, $\frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow \partial_t f + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})f = 0$

1.3 Equation du mvmt pour un fluide idéal

DEF

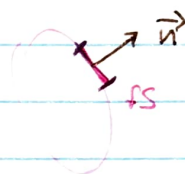
Un fluide est dit idéal si :

?

① Il est incompressible (les particules de fluides ne changent pas de volume lors de leur déplacement).

② Sa densité est une constante $\forall \vec{x}, \forall t$

③ La force exercée par le fluide sur son environnement est normale à la surface : $\delta \vec{F} = p \vec{n} \delta S$
 (Fluide non visqueux).

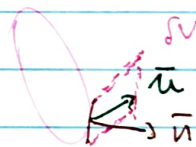


③ Conséquence de l'incompressibilité :

→ Soit un volume fixe de l'espace V . La quantité de masse qui quitte ce volume par unité de temps est

$$\frac{dM}{dt} = - \int_{\partial V} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$= \int_V \rho \cdot \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}) = - \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \, dV \stackrel{!}{=} 0$$



$$dM = \rho \delta V$$

On trouve que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$

→ Même dans le cas où ρ varie dans l'espace, avec chaque PDF qui garde sa densité lors de son déplacement, la condition $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ reste valable. En effet :

$$\dot{M} = \frac{d}{dt} \int \rho \, dV = - \frac{d}{dt} \int dV \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u})$$

$$\dot{M} = \int \partial_t \rho \, dV$$

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

Conservation de la masse

Or, si le fluide est idéal, par ①, $\partial_t \rho + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\rho = \dot{\rho} = 0$

$$\text{Donc } \partial_t \rho + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\rho = \rho \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$



② Force totale exercée sur une PDF:

→ Soit une PDF délimitée par une surface S .

→ La force qu'exerce l'extérieur sur la PDF est $\delta \vec{F}_s = -p \vec{n} \cdot \delta S$.

La force totale vaut: $\vec{F}_s = - \oint_{\partial V} p \cdot \vec{n} \cdot \delta S = \int_V - \vec{\nabla} p \cdot dV$

→ Si on rajoute les forces de volume (ici la gravité), on a:

$$\vec{F} = \int_V (-\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}) dV$$

③ Equation d'Euler:

→ Soit un élément de fluide ∞ -ale. Alors

$$\delta \vec{F} \approx (-\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}) \delta V$$

On applique $\delta \vec{F} = \delta m \cdot \vec{a}$:

$$\rho \cdot \delta V \frac{d\vec{u}}{dt} = (-\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}) \delta V$$

DEF $\Rightarrow \rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}$ Equation d'Euler (1)

→ On peut développer: $\rho (\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u}) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}$

↳ On peut réécrire le champ de pesanteur comme:

$$\rho \cdot \vec{g} = -\vec{\nabla} (\rho \vec{g} \cdot \vec{x}) = -\vec{\nabla} p' \text{ où } p' \equiv -\vec{g} \cdot \vec{x}$$

$$\text{On a alors: } -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} = -\vec{\nabla} p - \vec{\nabla} (-\rho \vec{g} \cdot \vec{x}) \\ = -\vec{\nabla} (p')$$

$$\text{avec } p' \equiv p + p' = p - \rho \vec{g} \cdot \vec{x}.$$

↳ On peut également réécrire $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u}$:

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u} = u_j \partial_j u_i = (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \times \vec{u} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} u^2 \right)$$

$$\text{En effet: } (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \times \vec{u} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} u^2 \right)$$

$$= \epsilon_{ijk} (\vec{\nabla} \times \vec{u})_j u_k + \partial_i \left(\frac{1}{2} u_j u_j \right)$$

$$= \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} \partial_l u_m u_k + \partial_i \left(\frac{1}{2} u_j u_j \right) \quad \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} = \epsilon_{ikl} \epsilon_{jlm}$$

$$= (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) (\partial_l u_m u_k) + \frac{1}{2} \partial_i u_j u_j$$

$$= \partial_k u_i u_k - \partial_i u_k u_k + \frac{1}{2} \partial_i u_j u_j$$

$$= u_i \partial_j u_j + u_j \partial_j u_i - 2 u_j \partial_i u_j + u_j \partial_i u_j = u_j \partial_j u_i$$



5
On a alors $\rho \left[\partial_t \bar{u} + (\bar{\nabla} \times \bar{u}) \times \bar{u} + \bar{\nabla} \left(\frac{1}{2} \bar{u}^2 \right) \right] = -\nabla (p + \rho \chi)$

$$\Leftrightarrow \partial_t \bar{u} + (\bar{\nabla} \times \bar{u}) \times \bar{u} = -\bar{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + \chi \right) - \bar{\nabla} \left(\frac{1}{2} \bar{u}^2 \right)$$

On trouve l'équation d'Euler (2):

$$\partial_t \bar{u} + (\bar{\nabla} \times \bar{u}) \times \bar{u} = -\bar{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + \chi + \frac{1}{2} \bar{u}^2 \right)$$

⊙ Théorème de Bernoulli:

Thm Pour un fluide idéal indépendant du temps,

$$H \equiv \frac{p}{\rho} + \chi + \frac{1}{2} \bar{u}^2 = \text{cte} \quad \Leftrightarrow (\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) H = 0$$

| ligne de courant

Preuve Si l'écartement ne dépend pas du temps, on a:

$$(\bar{\nabla} \times \bar{u}) \times \bar{u} = -\bar{\nabla} H \quad \parallel \cdot \bar{u}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) H = 0$$

↳ Pour un fluide idéal stationnaire, H est cste le long des lignes de courant. □

DEF Un fluide est dit irrotationnel si $\bar{\nabla} \times \bar{u} = 0$

DEF On définit la vorticité par $\bar{\omega} \equiv \bar{\nabla} \times \bar{u}$

↳ Un fluide est irrotationnel si sa vorticité est nulle.

Thm (Bernoulli pour un fluide irrotationnel). Pour un fluide idéal, stationnaire et irrotationnel, on a:

$$\bar{\nabla} \cdot H = 0$$

Preuve Si $\partial_t \bar{u} = 0$ et $\bar{\omega} = 0$, l'équation d'Euler (2) se réduit à

$$0 = -\bar{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + \chi + \frac{1}{2} \bar{u}^2 \right)$$
□

1.4. Vorticité

② Equation d'évolution (Euler):

→ Par Euler (2), on a:

$$\partial_t \bar{u} + \bar{u} \times \bar{u} = -\bar{\nabla} H \quad \parallel \bar{\nabla} \times$$

$$\Leftrightarrow \partial_t \bar{u} + \bar{\nabla} \times (\bar{\omega} \times \bar{u}) = 0 \quad \text{car } \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \phi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \partial_t \bar{\omega} + (\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) \bar{\omega} - (\bar{\omega} \cdot \bar{\nabla}) \bar{u} + (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) \bar{\omega} - (\bar{\nabla} \cdot \bar{\omega}) \bar{u} = 0$$

$$\text{On trouve } \partial_t \bar{\omega} + (\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) \bar{\omega} = (\bar{\omega} \cdot \bar{\nabla}) \bar{u}$$

$$\Leftrightarrow \frac{D \bar{\omega}}{Dt} = (\bar{\omega} \cdot \bar{\nabla}) \bar{u} \quad \text{version générale}$$

③ Cas d'un fluide à 2-D:

→ Sa vitesse est donnée par: $\bar{u} = [u(x, y, t), v(x, y, t), 0]$

$$\hookrightarrow \bar{\omega} = [0, 0, \omega(x, y, t)]$$

$$\hookrightarrow (\bar{\omega} \cdot \bar{\nabla}) \bar{u} = \omega \partial_z \bar{u} = 0$$

$$\text{On trouve } \frac{D \omega}{Dt} = 0$$

③ Décomposition cinématique du champ de vitesse.

→ Evaluons la \neq de vitesses de 2 points voisins:

$$\bar{u}_Q \simeq \bar{u}_P + (\bar{S} \cdot \bar{\nabla}) \bar{u}$$

$$\begin{aligned} u_Q &= u_{Pi} + S_j \partial_j u_i \quad \text{sym} \quad \text{antisym} \\ &= u_{Pi} + S_j \left(\underbrace{\frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j)}_{e_{ji}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_j u_i - \partial_i u_j)}_{\tilde{e}_{ji}} \right) \end{aligned}$$

$$= u_{Pi} + S_j e_{ji} + S_j \tilde{e}_{ji}$$

$$= u_{Pi} + \partial_{S_i} \left(\frac{1}{2} S_i S_j e_{ij} \right) + S_j \tilde{e}_{ji} \quad \rightarrow e_{jki} e_{jlm}$$

$$\text{Or, } \frac{1}{2} (\omega \times S)_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_j S_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} e_{jlm} \partial_l u_m S_k$$

$$= \frac{1}{2} (S_{kl} \delta_{lm} - \delta_{kl} S_{lm}) \partial_l u_m S_k = \frac{1}{2} (\partial_k u_i S_k - \partial_i u_k S_k)$$

$$= -\tilde{e}_{ik} S_k = \tilde{e}_{ki} S_k$$

$$\bar{u}_Q \simeq \bar{u}_P + \underbrace{\frac{1}{2} (\bar{\omega} \times \bar{S})}_? + \underbrace{\bar{\nabla}_S \left(\frac{1}{2} e_{ij} S_i S_j \right)}_{\text{matrice symétrique} \rightarrow \text{diagonalisable}}$$

notation autour de P

→ Diagonalisons : $\bar{S}(\frac{1}{2} e_{ij} s_i s_j)$

On trouve $s_i s_j e_{ij} = e'_{11} (s'_1)^2 + e'_{22} (s'_2)^2 + e'_{33} (s'_3)^2$

Si on place notre système d'axe au point P, on a :

$\bar{u}_Q - \bar{u}_P = \delta \bar{u}|_P = \begin{pmatrix} e'_{11} s'_1 \\ e'_{22} s'_2 \\ e'_{33} s'_3 \end{pmatrix}$. C'est une contraction/dilatation dans les directions s'_1, s'_2 et s'_3 .

→ Si l'écoulement est incompressible :

$$\sum e'_{ii} = \text{Tr}(e'_{ij}) = \text{Tr}(e_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_i (\partial_i u_i + \partial_i u_i) = 0$$

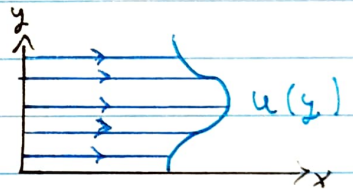
Dans un fluide incompressible, la trace est nulle.

2 INTRO AUX FLUIDES VISQUEUX

2.1 Introduction

→ Considérons un écoulement cisailé simple :

$$\bar{u} = [u(y), 0, 0]$$



DEF Un fluide est dit Newtonien si la force de frottement est proportionnelle au gradient de vitesse.

Ici, $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ avec μ la viscosité moléculaire
force par unité de surface

DEF On appelle viscosité cinématique la qté $\nu \equiv \mu / \rho$

2.2 Equation de Navier - Stokes

→ Calculons la force de surface due à la viscosité qui s'exerce sur un PDF :

$$\delta F_x(y+\delta y) = \tau(y+\delta y) \cdot \delta S = \mu \frac{du}{dy}(y+\delta y) \cdot \delta S$$

$$\delta F_x(y) = -\tau(y) \cdot \delta S = -\mu \frac{du}{dy}(y) \cdot \delta S$$

$$\sum \delta F = \mu \delta S (u'(y+\delta y) - u'(y))$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta F}{\delta V} \equiv \delta f = \frac{\mu \delta S}{\delta S \delta y} (u'(y+\delta y) - u'(y)) = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

