

# CH3 UNIVERS PRIMORDIAL

## 3.1 Égalités matière = $\Lambda$ et matière = radiation

$$\rightarrow \text{Rappel: } f = f_{cr} \left( -\Omega_m \left( \frac{\alpha_0}{\alpha} \right)^3 + \Omega_r \left( \frac{\alpha_0}{\alpha} \right)^4 + \Omega_\Lambda \right)$$

### ① Égalité $m = \Lambda$ :

$\rightarrow$  On s'intéresse au moment où  $f_m = f_\Lambda \gg f_r$ , c'est à dire lorsque

$$-\Omega_m \left( \frac{\alpha_0}{\alpha} \right)^3 = -\Omega_\Lambda$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_0}{\alpha} = \left( \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} \right)^{1/3} \approx 1,31 = 1 + z_{m=\Lambda}^{EG}$$

$$\Leftrightarrow t_{m=\Lambda}^{EG} = \frac{1}{H_0} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot \text{arcsinh} \left[ \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} \frac{1}{(1+z)^{3/2}} \right] \approx 10,3 \cdot 10^{10} \text{ yrs}$$

### ② Égalité $m=r$ :

$\rightarrow$  On regarde au moment où  $f_m = f_r \gg f_\Lambda$ , ie lorsque

$$\Omega_m^0 = \Omega_r \frac{\alpha_0}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\alpha_0}{\alpha} = 1 + z_{m=r}^{EG} \approx 3 \cdot 10^3$$

$$\Leftrightarrow t_{m=r}^{EG} \approx \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_m^0}} (1 + z_{m=r}^{EG})^{-3/2} \approx 56 \text{ 000 yrs}$$

## 3.2 Époque dominée par la radiation

### 3.2.1 Equilibre cinétique:

$\rightarrow$  Si les particules dans le plasma interagissent rapidement, une redistribution des impulsions / énergies s'opère. On obtient alors des distributions d'énergie caractérisées par la température  $T$ .

DEF La distribution de Bose-Einstein  $f_B$  est définie selon

$$f_B(\vec{p}) = \frac{1}{\exp \left( \frac{E - \mu}{T} \right) - 1} \quad \text{où } \mu \text{ est le potentiel chimique}$$

DEF

La distribution de Fermi - Dirac  $f_F$  est définie par:

$$f_F(\vec{p}) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{T}\right) + 1}$$

- La distribution de Bose - Einstein est obtenue en calculant la fonction de partition pour des bosons, et celle de Fermi - Dirac en calculant la fonction de partition des fermions.
- ex: la réaction rapide  $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$ . Alors on aurait  $f_B^\gamma(T_\gamma)$  et  $f_F^e(T_e)$  avec  $T_e = T_\gamma = T$

### 3.2.2 Equilibre chimique:

- Il ya équilibre chimique lorsque des collisions inélastiques se produisent rapidement dans le plasma.  
Si  $i + j \rightarrow k + l$  et  $k + l \rightarrow i + j$  rapidement, alors les potentiels chimiques s'égalisent:  $\mu_i + \mu_j = \mu_k + \mu_l$
- ex:  $e^\pm + \gamma \rightleftharpoons e^\pm + \gamma + \gamma$ : si les  $e^\pm$  peuvent émettre et absorber des photons rapidement, alors  $T_\gamma = T_{e^\pm}$  et  $\mu_e + \mu_\gamma = \mu_{e^\pm} + 2\mu_\gamma$   
 $\Leftrightarrow \mu_\gamma = 0$ . In this case,  $f_B^\gamma = (e^{E/T} - 1)^{-1}$  only depends on  $T_\gamma$ .
- ex:  $e^+ + e^- \rightleftharpoons \gamma + \gamma$  Alors  $T_{e^+} = T_{e^-} = T_\gamma$  et  $\mu_{e^+} + \mu_{e^-} = 2\mu_\gamma = 0$   
 $\Leftrightarrow \mu_{e^+} = -\mu_{e^-}$

### 3.2.3 Photons:

- Si les  $\gamma$  n'avaient pas d'interactions, on aurait  $\frac{h\nu}{V} = \text{cste}$  et  $E_\gamma = E_\gamma^{\text{initial}} \cdot \frac{a^{\text{initial}}}{a} = E_\gamma^{\text{i}} (1+z)^{-1}$

↳ La distribution en énergie est la distribution initiale, multiplié par le redshift,  $\neq f_B$  ⇒ Pas de température définie.

→ Avec interaction, par ex.  $e^{\pm} + \gamma \rightarrow e^{\pm} + \gamma$  et  $e^{\pm} + \gamma \rightarrow e^{\pm} + \gamma + \gamma$ ,  
on aurait  $f_B^\gamma|_{\gamma=0} = (\exp\{E/+\gamma-1\})^{-1}$

↳ La densité du photon vaut donc

Ch 9.8.4  
physique stat

$$\begin{aligned} n_\gamma &= g_\gamma \int f_B^\gamma(\vec{p}) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{g_\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{E^2 dE}{e^{E/T}-1} \\ &= \frac{g_\gamma T^3}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{y^2 dy}{e^y-1} = \frac{g_\gamma T^3}{2\pi^2} \int_0^\infty dy y^2 (e^{-y} + e^{-2y} + e^{-3y} + \dots) \\ &= \frac{g_\gamma T^3}{2\pi^2} \left( 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} \right) = \frac{g_\gamma T^3}{\pi^2} \zeta(3) = \frac{2}{\pi^2} \zeta(3) T^3 \end{aligned}$$

Où  $g_\gamma = 2$  le # de polarisation du photon.

↳ La densité d'énergie est donnée par :

$$f_\gamma \equiv g_\gamma \int f_B^\gamma(\vec{p}) E_\gamma \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{g_\gamma}{2\pi^2} \int \frac{E^2 dE}{e^{ET}-1} = \frac{\pi^2}{30} g_\gamma T^4$$

On s'attendait bien à  $f_\gamma \propto T^4$  car  $f_\gamma = n_\gamma \langle E_\gamma \rangle \propto T^3 \cdot T$

↳ La pression est donnée par :

$$p = g_\gamma \int f_B^\gamma(\vec{p}) \frac{|\vec{p}|^2}{3E} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = g_\gamma \int f_B^\gamma(\vec{p}) \frac{E}{3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = f_\gamma / 3$$

$$\Rightarrow W = p/f_\gamma = 1/3$$

↳ Enfin, l'énergie est déterminée par :

$$\langle E_\gamma \rangle = f_\gamma / n_\gamma = \frac{\pi^4}{30 \zeta(3)} \cdot T \approx 2,7T$$

### 3.2.4 Positions et électrons :

→ Sans interaction, on a :  $n_{e^+} \cdot V = \text{cste}$   $\left\{ \begin{array}{l} E_{e^+}^{ini} = E_{e^+} \cdot (1+z) \\ n_{e^-} \cdot V = \text{cste} \end{array} \right.$

↳ Pas de température définie pour les  $e^+$  et  $e^-$ .

→ Si interaction  $e^+ + \gamma \rightarrow e^+ + \gamma$  rapide, alors il y a équilibre chimique:  $f_F^{e^+} = (\exp((E - \mu_{e^+})/T) + 1)^{-1}$  avec  $T_{e^+} = T_{e^-} = T_\gamma$   
et  $N_{e^\pm} = g_{e^\pm} \int f_F^{e^\pm}(\vec{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$

→ Si en plus, on a  $e^+ + e^- \rightleftharpoons \gamma + \gamma$ , on a aussi équilibre chimique:  $\mu_{e^+} = -\mu_{e^-}$ . Ceci implique que  $N_{e^+} + N_{e^-}$  est fixé par  $N_\gamma$ , mais que  $N_{e^+} - N_{e^-}$  reste fixé.

↳ En prenant comme condition initiale que  $N_{e^+} - N_{e^-} = \text{cste} = 0$ , alors  $\mu_{e^+} = -\mu_{e^-} = 0$ . Alors:

$$\rightarrow N_{e^+} = N_{e^-} = g_{e^-} \int f_F^{e^-}(\vec{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \frac{3}{4} \frac{S(3)}{\pi^2} g_e T^3$$

$$\rightarrow \rho_{e^+} = \rho_{e^-} = g_e \int f_F^{e^-}(\vec{p}) \cdot E \cdot \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g_e T^4$$

$$\rightarrow \rho_{e^+} = \rho_{e^-} = g_e \int f_F^{e^-}(\vec{p}) \cdot \frac{\vec{p}^2}{E} \cdot \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = f_e / 3$$

$$\rightarrow \langle E_{e^\pm} \rangle = \frac{7}{8} \frac{\pi^4}{30} \frac{4}{3S(3)} \cdot T \approx 3,1T$$

### 3.2.5 Bain thermique général avec $\mu \ll T$ :

→ Chaque boson contribue de  $f_{R,i} = \frac{\pi^2}{30} T_i^4 g_i$  et chaque fermion contribue de:  $f_{R,i} = \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} T_i^4 g_i$

→ La densité d'énergie totale est donnée par:

$$f_{R,\text{tot}} = \frac{\pi^2}{30} T_\gamma^4 \left( \sum_{b=\text{boson}} g_b \left( \frac{T_b}{T_\gamma} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{f=\text{fermion}} g_f \left( \frac{T_f}{T_\gamma} \right)^4 \right)$$

Dodelrou 19.9.25

DEF On définit le nombre effectif de degrés de liberté relativiste  $g_*$  selon  $g_* = \sum_{b=\text{boson}} g_b \left( \frac{T_b}{T_\gamma} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{f=\text{fermion}} g_f \left( \frac{T_f}{T_\gamma} \right)^4$

↳ La densité d'énergie totale se réécrit:

$$f_{R,\text{tot}} = \frac{\pi^2}{30} T^4 g_*$$

### 2.2.6 Temps et paramètre d'Hubble en fonction de T :

→ La température est proportionnelle à l'énergie du photon, donc  $\frac{a_0}{a} = \frac{T_0}{T} \Rightarrow T \propto \frac{1}{a}$

→ Pour le cas plat, dans un univers de radiation, on avait :

$$\text{p16} \quad a(t) = \sqrt{\frac{8\pi G p_0}{3}} t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{C} \sqrt{2t}$$

$$= \frac{1}{m_{pl}} \sqrt{\frac{8\pi^3}{90}} \sqrt{g_*} \sqrt{T^4 a^4}$$

$$\text{On trouve } t = \frac{1}{2} \frac{a^2}{C} = 0,301 \frac{m_{pl}}{\sqrt{g_*}} \cdot \frac{1}{T^2}$$

$$\text{et } H(t) = \frac{1}{2t} \approx 1,65 \sqrt{g_*} \frac{t^2}{m_{pl}}$$

### 3.3 Entropie

Eg 3.65/Kdb-Tunne

Prop L'entropie pour des particules relativistes est donnée par

$$S = \frac{f + \mu}{T} \cdot V \Leftrightarrow S = \frac{f + \mu}{T}$$

→ L'entropie est conservée dans un volume comobile.

En effet  $\nabla_\mu T^\mu = 0 \Rightarrow \nabla_\mu (fV) = -\mu \nabla_\mu V$ . Or,  $\nabla_\mu (fV) = -pdV + TdS$  so  $dS = 0$ .

Alternativement, à l'éq. thermique,  $\frac{\partial f}{\partial T} \propto T^3$  et  $V \propto T^{-3}$

→ A l'équilibre thermique,  $S_T = \frac{f_T + \mu_T}{T} = \frac{2\pi^2}{45} g_T T^3$

$$\text{En général : } S_{tot} = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3$$

DEF Le nombre de dof relativiste pour l'entropie  $\cancel{g_{*s}}$  est défini selon  $g_{*s} \equiv \sum_{b=bos} g_b (T_b/T)^3 + \frac{7}{8} \sum_{f=ferm} g_f (\bar{T}_f/T)^3$

$$\hookrightarrow \text{On a alors } S_{tot} = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3$$

### 3.4 Particule non-rel en eq. thermique

- S'il ya équilibre thermique pour un particule, sa densité est donnée par une statistique  $f_B$  ou  $f_F$ :  
pour un particule p;

$$n_p = \frac{g_p}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p}) d^3p = \frac{g_p}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1} d^3p$$

- Pour  $T \ll m_p$ , la particule n'est pas relativiste. Alors:

$$n_p = \frac{g_p}{(2\pi)^2} \int_{m_p}^{\infty} \frac{\sqrt{E^2 - m_p^2} E dE}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1} \approx g_p \left(\frac{m T}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{(m_p - \mu)}{T}\right\}$$

et  $f_p = \frac{g_p}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p}) E d^3p \approx m_p \cdot n_p$  à  $T \ll m_p$ ,  $E \approx m_p$

De plus,  $\mu = \frac{g_p}{(2\pi)^2} \int_{m_p}^{\infty} \frac{\sqrt{E^2 - m_p^2} \cdot E \cdot p^2}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1} \frac{dE}{3E} \approx n_p \cdot T \ll f_p$

↳ La matière n'a donc pas de pression.

- Si à  $T < m_p$ , la particule p est à l'équilibre chimique, par exemple via  $p + \bar{p} \Rightarrow \gamma + \gamma$ , on aurait encore  $\mu_p = -\mu_{\bar{p}}$

③ Si  $n_p = n_{\bar{p}}$ :

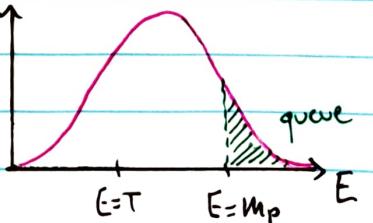
- Valide si on avait  $\mu_p = -\mu_{\bar{p}} = 0$  initialement

$$\rightarrow \text{On a } n_p = n_{\bar{p}} = g_p \left(\frac{m T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{(m_p + \bar{m}_p)/T}{\pm 1}} \rightarrow \text{suppression de Boltzmann}$$

Lorsque l'énergie critique est trop faible pour avoir  $\gamma + \gamma \rightarrow p + \bar{p}$ , on a une suppression de Boltzmann: les photons ayant assez d'énergie pour effectuer ce processus se trouvent dans la queue de la distribution d'énergie:

$$\rightarrow n_p = n_{\bar{p}} \propto \exp\{-m_p/T\}$$

C'est la catastrophe d'annihilation



① Si  $n_p > n_{\bar{p}}$  :

→ Valide si on ait  $\mu_p = -\mu_{\bar{p}} > 0$  initialement.

→ Dans ce cas, l'équilibre chimique et thermique mène à un cataclysme d'annihilation pour les antiparticules  $\bar{p}$  :

$$n_{\bar{p}} \propto \exp \left\{ -\frac{(m_{\bar{p}} - \mu_p)}{T} \right\} \ll 1$$

↳ Toutes les antipart. vont se faire annihiler par les particules, et certaines particules subsisteront :

$$\frac{n_p - n_{\bar{p}}}{V} \approx \frac{n_p}{V} = \text{cste}; \quad n_p \propto \exp \left\{ -\frac{(m_p - \mu_p)}{T} \right\}$$

$$\hookrightarrow \mu_p = -\mu_{\bar{p}} = m_p + \epsilon \text{ avec } \epsilon \text{ tq } \frac{n_p}{V} = \text{cst}$$

### 3.5 Découplage chimique d'un type de particule

DEF Un découplage chimique se produit lorsqu'une particule sort de son équilibre chimique.

→ Considérons une diffusion  $i + j \rightarrow k + l$  avec équilibre chimique :

$i + j \rightleftharpoons k + l$  avec  $\mu_i + \mu_j = \mu_k + \mu_l$ . Il faut comparer le temps moyen pour que i soit en réaction avec  $1/N \approx 1/\text{age de l'univers}$ .

DEF Le taux de réaction  $\Gamma$  est défini selon  $\Gamma = 1/\Delta t$ , où  $\Delta t$  est le temps moyen d'une réaction.

La condition d'équilibre chimique s'exprime alors comme :

$$\Delta t < \frac{1}{N} \Leftrightarrow \Gamma > N$$

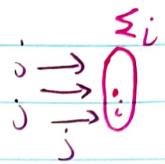
→ Si  $\Gamma < N$ , pas d'équilibre chimique car i et j n'auraient pas le temps de se rencontrer depuis le big bang.

→ On peut exprimer  $\Gamma_i = n_j \langle \sigma v_{ij} \rangle$

## ⑥ Taxe de réaction pour une annihilation:

$$\rightarrow \text{On a } \sigma(i;j \rightarrow k;l) = \frac{\# \text{ de transition par seconde}}{\# \text{ flux de } j \text{ à trans. } \Sigma_i}$$

$$\hookrightarrow n_j \langle \sigma; \varrho_{ij} \rangle = \# \text{ transition par seconde} \\ = \Gamma_i$$



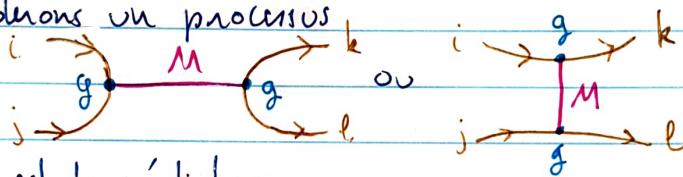
**DEF** La densité de réaction  $\gamma_{ij \rightarrow kl}$  est définie par

$$\gamma_{ij \rightarrow kl} \equiv n_i n_j \langle \sigma \varrho_{ij} \rangle$$

C'est le nombre de diffusion  $i;j \rightarrow k;l$  se produisant par unité de temps et de volume.

→ On peut alors déterminer quand est-ce qu'un particule  $i$  entre en équilibre thermique dans le bain thermique:

Considérons un processus



où  $M$  est le médiateur.

On suppose  $T \gg m_i, m_j, m_M, m_k, m_\ell$ : alors

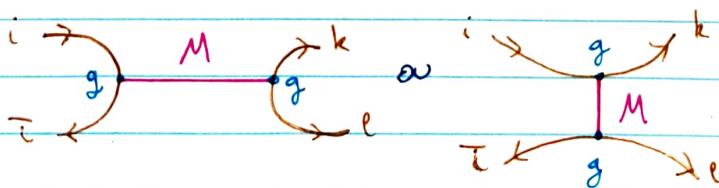
$$\Gamma_i = n_j \langle \sigma \varrho \rangle. \text{ Or, } \sigma = C = 1 \text{ et } \varrho = g^2 / 4\pi \text{ et } n_j \propto T^3 \\ \propto T^3 \cdot \frac{\alpha^2}{T^2} \propto \alpha^2 T. \text{ Or, } \Gamma_i \propto \frac{T^4}{m_{pe}}$$

Alors, pour  $\Gamma_i > N$ , il faut  $\alpha^2 m_{pe} > T$

Reponse:  $\hookrightarrow$  Il y a équilibre thermique pour  $T < 10^{16}$  GeV

→ Similairement, on peut déterminer quand l'équilibre thermique. Il faut alors différencier 2 cas: celui d'un médiateur lourd, et celui d'un médiateur léger.

Considérons  $i + \bar{i} \rightleftharpoons k + \ell$  avec  $m_k, m_\ell \ll m_i$



Q Cas du médiateur massif:  $m_M \gg m_i \gg m_h, m_e$

→ Pour  $m_\mu \gg T \gg m_i$ , on a:

$$\Gamma_i = n_i \langle \sigma v \rangle \propto T^3 \cdot \frac{g^4 T^2}{m_\mu^4} \propto \frac{g^4 T^5}{m_M^4} \propto \frac{\alpha^4 T^5}{m_M^4}$$

En effet, le propagateur est  $\text{cll } \alpha^4 g^2 \cdot \frac{1}{q^2 - m_M^2} \approx \frac{-g^2}{m_M^2}$

↳ La condition  $\Gamma_i > H$  implique donc  $\alpha^4 \frac{T^5}{m_M^4} > \frac{T^2}{m_{pe}}$

$$\Leftrightarrow T^3 > \frac{m_M^4}{m_{pe} \cdot \alpha^2}$$

↳ L'équilibre chimique s'arrête à la température de découplage  $T_{dec}^{chim}$ . Dans le cas d'un médiateur lourd, on a:

$$T_{dec}^{chim} = \left( \frac{m_M^4}{\alpha^2 \cdot m_{pe}} \right)^{1/3} \gg m_i \text{ par hypothèse}$$

↳ Une fois  $T < T_{dec}^{chim}$ , le nombre de diffusion  $i + \bar{i} \rightleftharpoons h + \ell$  est négligeable:  $n_i \cdot V = \text{cst}$  et  $n_{\bar{i}} \cdot V = \text{cst}$ .

DEF On parle de relique chaude lorsque leur température de découplage correspond toujours à leur régime relativiste:  
lorsque  $T_{dec}^{chim} \gg m_i$  et  $T_{dec}^{kin} \gg m_i$

→ Il y a équilibre chimique de  $T \gg m_i$  à  $T_{dec}^{chim} \gg m_i$  et équilibre cinétique de  $T \gg m_i$  à  $T_{dec}^{kin} \gg m_i$

→ Si le découplage cinétique provient de l'arrêt du même processus lié au découplage chimique, on a  $T_{dec}^{chim} = T_{dec}^{kin}$

→ Sinon, on a  $T_{dec}^{kin} \ll T_{dec}^{chim}$ . Une fois que  $T < T_{dec}^{kin}$ , il n'y a plus d'interaction et chaque impulsion reste inchangée, modulo un redshift global:  $p \mapsto p \cdot \frac{a_{dec}^{kin}}{a}$

→ N.B.: la condition de découplage cinétique est  $\Gamma \cdot \frac{\Delta E}{E} < H$  avec  $\Delta E$  l'énergie moyenne échangée entre un  $e^- + \bar{e}^+$  ou  $\gamma$  pour  $e^\pm + \gamma \rightarrow e^\pm + \gamma$ . Si découplage relativiste:  $\frac{\Delta E}{E} \sim 1$ .

## ① Cas du médiateur léger: $m_\chi \ll m_i$

→ Le découplage est non-relativiste:  $T_{dec}^{chim} < m_i$

$$\rightarrow \Gamma_i = n_i \langle \sigma v \rangle \propto m_i^{n-2} T^{-n} \cdot e^{-m_i/T}$$

↳ Car  $n_i \propto e^{-m_i/T}$  et  $\langle \sigma v \rangle \propto m_i^{n-2} T^{-n}$  pour un certain  $n$

↳ On doit comparer avec  $H \propto T^2/m_p$

→  $\Gamma_i > H$  ne peut pas rester vrai longtemps après que  $T$  soit  $< T_i$   
à cause du facteur  $e^{-m_i/T}$

$$\Rightarrow T_{dec}^{chim} \sim \frac{m_i}{\mathcal{O}(1)} : c'est un relique froid$$

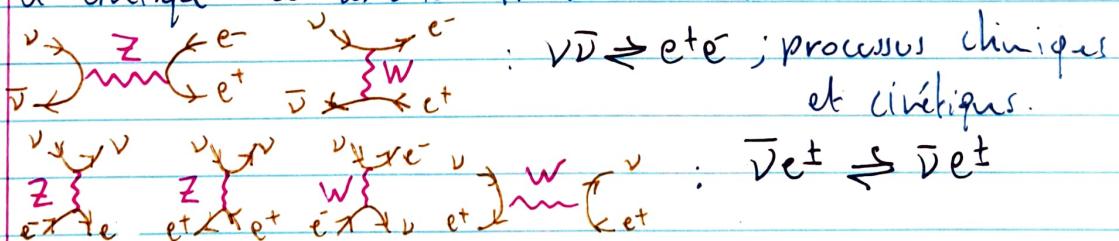
→ Pour un relique froid:

→ l'équilibre chimique se fait de  $T \gg m_i$  à  $T_{dec}^{chim} \sim m_i/\mathcal{O}(1)$

→ l'équilibre cinétique arrive en général beaucoup plus tard:  
il n'y a pas forte suppression du médiateur lourd ni de  
suppression du Boltzmann comme pour l'éq. chimique.

## 3.6 Découplage des neutrinos

→ A haute température, les neutrinos sont en équilibre chimique et cinétique via les interactions suivantes:



→ Pour  $T \gg M_\nu$ , on a  $\sigma \sim G_F^2 T^2$  avec  $G_F \sim g^2/m_W^2$ . De plus,  
ils sont relativistes:  $v \approx 1$ . Alors,

$$\Gamma = n_\nu \langle \sigma v \rangle \propto T^3 \cdot g^2/m_W^2 \cdot T^2 \propto G_F^2 T^5$$

Par rapport au paramètre de Hubble, on trouve:

$$\Gamma_\nu / N \sim \frac{G_F^2 T^5}{T^2/m_p} \propto \frac{T^5}{m_W^2} \cdot \frac{m_p}{T^2} \propto \left(\frac{T}{\text{MeV}}\right)^3$$

↳ découplage chimique à  $T \leq \text{MeV}$  et cinétique à  $T \leq \text{MeV}$

31.

↳ En effet,  $\nu\bar{\nu} \rightarrow l^+l^-$  et  $\nu\ell^\pm \rightarrow \nu\ell^\pm$  contribuent à la même dépendance  $T^5/m_\nu^4$  et  $\Delta E_\nu/E_\nu \sim 1$ .  
 ⇒ Les neutrinos sont des reliefs chaudes : MeV >  $m_\nu \sim \text{eV}$

### ① Pour $T > T_{\text{dec}}$ :

→ En  $T > \text{MeV}$ , la densité de radiation et d'entropie sont données par :

$$\rho_R = g_* \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad \text{avec } T = T_\gamma = T_\nu = T_{\ell^\pm}$$

$$\text{et } g_* = g_\gamma + \frac{7}{8} (g_{\ell^\pm} + g_\nu) = 2 + \frac{7}{8} (2 \cdot 2 + 3 \cdot 2) = \frac{43}{4} = 10,75$$

$$S = g_* \frac{2\pi^2}{45} T^3 = g_* \frac{2\pi^2}{45} T^3$$

### ② Pour $T < T_{\text{dec}}$ :

→ Lorsque  $T < \text{MeV}$ , il y a découplage chimique :  $\begin{cases} n_\nu \cdot V = \text{cst} \\ n_{\bar{\nu}} \cdot V = \text{cst} \end{cases}$

Il n'y a plus ou plus d'équilibre chimique. Cependant, on a toujours  $T_\nu = T_{\bar{\nu}} = T_\gamma$  car ils varient de la même manière au cours du temps :  $T_\nu = T_{\bar{\nu}} = T_{\text{dec}} \cdot \alpha_{\text{de}}$

→ La densité et l'entropie sont données par :

$$\rho_\nu = g_\nu \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} T_\nu^4$$

$$S_\nu = g_\nu \frac{7}{8} \frac{2\pi^2}{45} T_\nu^3$$

↳ Les entropies  $S_\nu$  et  $S_{\ell^\pm}$  sont conservées séparément :

$$S_\nu \cdot V \sim \frac{1}{a^3} \cdot a^3 \sim \text{cste} \quad \text{et} \quad S_{\ell^\pm} \sim \frac{1}{a^2} \cdot a^3 \sim \text{cste}$$

### ③ Pour $T \leq m_e$ :

→ Pour  $T \leq 0,5 \text{ MeV}$ , les  $e^\pm$  deviennent non relativistes et sont supprimés du Boltzmann :  $n_{e^\pm} \propto e^{-m_e T}$ . Seuls  $n_e - n_{e^\pm} = n_e^{\text{initial}}$  électrons persistent : catastrophe d'annihilation.

→ Il n'y a presque plus d'électron p/r au nombre de  $\gamma$ , on peut donc négliger leur entropie. Cette entropie se retrouve dans la création de nombreux photons (pas de création de neutrinos car ils ont déjà découpé)  $\Rightarrow S_\gamma \nearrow \rightarrow T_\gamma \nearrow$

↳ L'entropie est donnée par :

$$\Lambda_{\gamma, \text{eff}}(T \gg m_e) = \left(g_\gamma + \frac{7}{8} g_\nu\right) \cdot \frac{2\pi^2}{45} T_\gamma^3$$

$$= S_\gamma(T \gg m_e) = g_\gamma \frac{2\pi^2}{45} T_\gamma^3$$

$$\Rightarrow T_\nu \approx T_\gamma \left(\frac{11/2}{2}\right)^{1/3} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} T_\gamma$$

→ Lorsque  $T \ll m_e$ , on a  $\frac{T_\nu}{T_\gamma} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3}$  puisque la température des neutrinos est inchangée ; ils sont découpés circulièrement.

### ① Pour $T \ll m_e$ :

→ Tout est découpé, il ne reste plus que le redshift :

$$\begin{cases} T_\nu \approx 1/a \\ T_\gamma \approx 1/a \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} T_\nu/T_\gamma \approx \text{cste.} \\ T_\nu \approx 1/a \end{array} \right.$$

### ② Pour $T = T_{\text{aujourd'hui}}$ :

→ Lorsque  $T = T_0^\gamma = 2,73 \text{ K}$  (mesuré via le CMB), on trouve que

$$T_0^\nu = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} T_0^\gamma = 1,96 \text{ K} : \text{inobservable.}$$

→ La densité de radiation est donnée par :

$$\begin{cases} \rho_\gamma^0 = \frac{\pi^2}{30} g_\gamma T^4 \\ \rho_\nu^0 = \frac{\pi^2}{30} \frac{7}{8} g_\nu T^4 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_R^0 = \frac{\pi^2}{30} T_0^4 \left(g_\gamma + \frac{7}{8} g_\nu \left(\frac{T_0}{T_0}\right)^4\right) \end{array} \right.$$

↳ Le paramètre de densité de radiation  $\Omega_R^0$  est

$$\Omega_R^0 \equiv \frac{\rho_R^0}{\rho_{\text{crit}}} = \frac{4,31 \cdot 10^{-5}}{h^2}$$

→ L'entropie du radiation est donnée par :

$$\Lambda_R^{\circ} = \frac{8\pi^2}{45} g_{\ast}^{\circ} T_0^3 = 2970 \text{ cm}^{-3}$$

$\underset{!}{g_{\ast}^{\circ}}$

→ La densité du photon et de neutrinos est donnée par :

$$n_{\gamma}^{\circ} = g_{\gamma} \frac{S(3)}{\pi^2} T_0^3 = 422 \text{ cm}^{-3} \approx \Lambda_R^{\circ} / 7$$

$$n_{\nu}^{\circ} = \frac{3}{4} \frac{S(3)}{\pi^2} T_0^3 \cdot g_{\nu} = 344 \text{ cm}^{-3} \text{ si } n_{\nu} - n_{\bar{\nu}} \approx 0 \Leftrightarrow \mu_{\nu} \approx 0$$

### ① Remarque 1 :

→ Après le découplage des  $\nu$ , le ratio  $\frac{n_{\nu}}{n_{\gamma}}$  car les  $e^{\pm}$  découlent, et ça change  $T_{\gamma}$ .

Déf

On définit le yield comme la ration de la densité d'un particule par l'entropie :  $\chi_p \equiv n_p / \Lambda$

→ Pour les neutrinos ;  $\chi_{\nu} \equiv n_{\nu} / \Lambda$

↳ le yield  $\chi_{\nu} \equiv n_{\nu} / \Lambda$  est conservé car  $\frac{n_{\nu}}{\Lambda} \approx \frac{V^{-1}}{V^{-1}} \approx \text{cte}$

→ Avant le découplage, on avait

$$\left. \chi_{\nu} \right|_{T_{\text{dec}}} = \frac{g_{\nu} \frac{3}{4} \frac{S(3)}{\pi^2} T_{\text{dec}}^3}{2 \frac{\pi^2}{45} g_{\ast S} (T_{\text{dec}}) T_{\text{dec}}^3} \approx 0,2 \cdot \frac{g_{\nu}}{g_{\ast S}} \left|_{T_{\text{dec}}} \right. = \frac{n_{\nu}}{\Lambda} \Big|_{T_0} = \left. \chi_{\nu} \right|_{T_0}$$

↳ On retrouve bien que  $n_{\nu}|_0 = \Lambda_R^{\circ} \frac{g_{\nu}}{g_{\ast S}} \Big|_{T_{\text{dec}}} \cdot 0,208 = 344 \text{ cm}^{-3}$

### ② Remarque 2 :

→ Tout les résultats font l'hypothèse que  $m_{\nu} = 0$  mais on sait que

$$0,05 \text{ eV} \leq m_{\nu} < \sim 1 \text{ eV} \quad \text{Cependant, puisque } T_0 \sim 10^{-3} \text{ eV, on}$$

$$0,01 \text{ eV} \leq m_{\nu} < \sim 1 \text{ eV} \quad \text{mais 2 v sont devenu non-relat., mais}$$

$$0 \leq m_{\nu} < \sim 1 \text{ eV} \quad \text{très récemment} \Rightarrow n_{\nu} \text{ inchangé et}$$

$\chi_{\nu}$  inchangé également.

→ Si les 3 neutrinos sont non relativistes, on a:

$$\frac{f_\nu^0}{P_{\text{cr}}} = \frac{n_\nu^0}{3} \cdot \frac{\sum m_\nu}{f_{\text{cr}}} = \Omega_\nu^0 \Rightarrow \Omega_\nu^0 = \frac{\sum m_\nu}{91 \text{ eV} \cdot h^2}$$

Puisque on sait que  $\sum m_\nu \leq 2,4 \text{ eV}$ , on a  $\Omega_\nu \leq 1\%$ .

→ Contrainte cosmologique: si les  $\nu$  sont massifs, ils voyagent moins librement car moins relativistes, et ils ralentissent moins la formation de grandes structures.

### ① Remarque 3:

→ Lors du découplage des  $e^+ - e^-$ , non seulement l'entropie totale est conservée, mais également l'énergie totale: la variation de  $f_{\text{cr}}$  crée une variation de l'énergie d'expansion ( $\propto \dot{a}^2$ ) et une variation d'énergie associée à la pression.

→ L'équation de continuité est toujours respectée.

## 3.7 Ratio baryon - photon

**DÉF** On définit l'abondance des baryons  $\eta$  (ou "ratio of B to  $\gamma$ ") selon

$$\eta \equiv \frac{n_B}{n_\gamma}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Aujourd'hui, } \eta^0 &= \frac{n_B}{n_\gamma} \Big|_{t_0} = \frac{n_b - n_{\bar{b}}}{n_\gamma} \Big|_{t_0} \simeq \frac{n_b}{n_\gamma} \Big|_{t_0} \simeq \frac{f_b}{n_\gamma \cdot m_b} \Big|_{t_0} \\ &= \frac{f_{\text{cr}}}{f_{\text{cr}}} \cdot \frac{f_b^0}{m_b \cdot n_\gamma^0} = 2,7 \cdot 10^{-8} \Omega_B h^2 \ll 1 \end{aligned}$$

Baryons non relativistes aujourd'hui

↳ Ce faible pourcentage est expliquable apd de la catastrophe d'annihilation où  $\frac{n_b - n_{\bar{b}}}{n_\gamma} \ll 1$  à  $T \approx 1 \text{ GeV}$  mais  $\neq 0$ .

① En  $T \approx m_p$ :

→ Lorsque  $T \approx 1 \text{ GeV}$ , en assumant que  $\frac{n_p - n_{\bar{p}}}{n_g} \ll 1$ , alors:

$$n_p \approx n_{\bar{p}} \approx n_n \approx n_{\bar{n}} \approx n_g$$

$$\frac{n_n - n_{\bar{n}}}{n_g} \ll 1$$

② En  $T \leq m_p$ :

→ Lorsque  $T \leq 1 \text{ GeV}$ , il y a catastrophe d'annihilation:  
 $p\bar{p} \rightarrow \pi\pi$  (interaction forte donc  $\Gamma_{p\bar{p} \rightarrow \pi\pi}$  très large)

↳  $\Gamma_{p\bar{p} \rightarrow \pi\pi}$  devient plus petit que  $N$  (Décapage) très tard : lorsque

$$T = T_{dec} \approx \frac{m_p}{40} \approx 22 \text{ MeV}$$

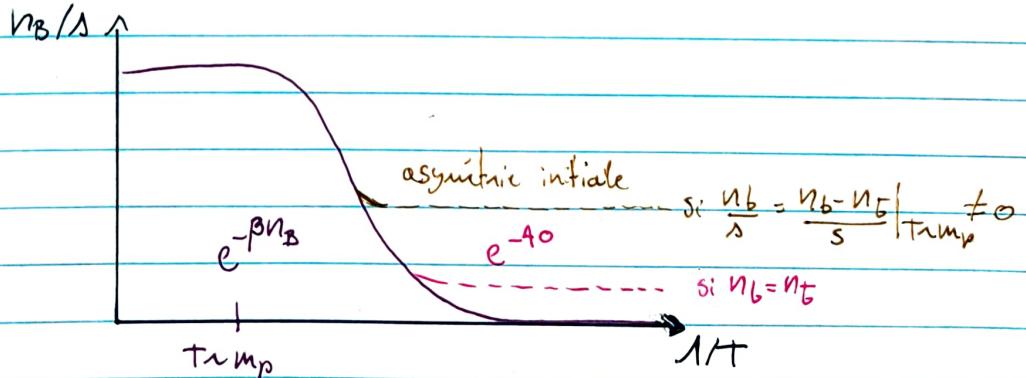
↳ Si  $n_b - n_{\bar{b}} = n_B$  avait été nul en  $T \approx m_p$ , alors

$$\eta_p = \frac{n_p}{n_g} = \frac{n_{\bar{p}}}{n_g} \propto e^{-m_p/T} \Big|_{T=\frac{m_p}{40}} = e^{-40} : \text{ extrêmement faible !}$$

En fait, on a  $n_B \neq 0$  en  $T \approx m_p$ . Lorsque  $T \leq m_p$ , il y a une suppression du Boltzmann  $n_{\bar{p}} \propto e^{-m_p/T}$  jusqu'à atteindre  $n_{\bar{p}} \approx 0$  et  $n_p = n_p - n_{\bar{p}}$ .

↳ Dans ce cas,  $\frac{n_b - n_{\bar{b}}}{s} \Big|_{T \approx m_p} = \frac{n_b}{s} \Big|_{T_0}$  et  $\eta^0$  est très petit ajout

car la "condition initiale" était déjà parfaite.



### 3.8 Brève histoire thermique de l'univers

- Description de l'univers en fonction de la température, en oubliant la matière noire, la baryogénése et l'inflation.

#### ① En $T \gg m_{SM}$ , particules:

- Toute les particules du MS sont en équilibre thermique et relativistes:

$$\begin{array}{l} f+\bar{f} \rightleftharpoons f+\bar{f} \\ z \rightleftharpoons \bar{z} \\ h \rightleftharpoons \bar{h} \end{array} \quad \begin{array}{l} \bar{f}\bar{f} \rightleftharpoons \gamma\gamma, gg \\ hh \rightleftharpoons \bar{f}\bar{f} \end{array} \quad \begin{array}{l} W^+W^- \rightleftharpoons \gamma\gamma \\ ZZ \rightleftharpoons W^+W^- \end{array}$$

- Lorsque  $T \gg m_{top}$ , le nombre effectif de dof relativiste est :

$$g_* = \frac{g_{W^\pm, Z}}{2 \times 3} + \frac{g_h}{4} + \frac{g_\gamma}{2} + \frac{g_{ge}}{2 \times 8} + \frac{7}{8} (g_{et} + g_\phi + g_V) = 106,75$$

#### ② En $T \approx 200$ GeV:

- On a la brisure de symétrie électrofaible : les fermions, et les bosons de l'Ig  $W^+W^-$  et  $Z$  deviennent massifs.

$$g_{W^\pm, Z} = 2 \times 3 \mapsto 3 \times 3 \text{ et } g_h = 4 \mapsto 1 \mapsto g_* \mapsto g_*$$

#### ③ En $T \leq m_t$ :

- Lorsque  $T \leq m_t$  (ou de manière analogue,  $T \leq m_{W^\pm}, T \leq m_b, T \leq m_c$  ou encore  $T \leq m_\tau$ ), la particule va disparaître et  $g_t \neq g_*$  et on va observer une catastrophe d'annihilation:



#### ④ En $T \approx$ GeV:

(u,d,s)

- On a la transition de phase QCD : les quarks perdent leur liberté asymptotique et font des hadrons :  $\pi, n, \pi^{+}, K^{+}, \eta, \dots$

① En  $T \lesssim m_p$ :

→ Un autre cataclysme d'annihilation, pour les protons:  $\frac{n_p}{n_Y} \ll 1$   
 et  $n_{\bar{p}} = 0$ , jusqu'à  $n_b \cdot V = \text{cste.}$

② En  $T \lesssim m_K$ : découplage des  $K^{\pm 0}$ :  $K \rightarrow \pi e\nu \Rightarrow$  plus de  $K$

③ En  $T \lesssim 130 \text{ MeV} = m_\pi$ : découplage des  $\pi^{\pm 0}$ :  $\pi^\pm \rightarrow e\nu, \pi^0 \rightarrow \gamma\gamma \Rightarrow$  plus de  $\pi$

④ En  $T \lesssim m_\mu = 100 \text{ MeV}$ : découplage des  $\mu^\pm$ :  $\mu \rightarrow e\nu_e \nu_\mu \Rightarrow$  plus de  $\mu^\pm$

⑤ En  $T \approx 0,1 \text{ MeV}$ :

→ Lorsque  $T$  n'énergie de liaison nucléaire, des protons et neutrons forment des noyaux légers:  $d, {}^3H, {}^4He$

→ Les neutrinos découplent mais ce sont des reliques chaudes: pas de catastrophe d'annihilation

→ Lorsque  $T \lesssim m_e$ : catastrophe d'annihilation pour les électrons:  
 $e^+ e^- \rightarrow \gamma\gamma \Rightarrow n_e \sim 0$   
 relique froide  $\leftarrow n_e \sim n_p$

⑥ En  $T \approx 3 \text{ eV}$ :

→ La matière prend le dessus sur la radiation:  $k = k_{m=R}^{eq}$

⑦ En  $T \approx \text{eV}$ :

→ Les photons découpent cinétiquement et se recombinent avec les protons:  $e^- + p \rightarrow W$ . Les particules chargées disparaissent et l'univers devient transparent; c'est le CMB.

→ Bien plus tard, les  $e^-$  découpent cinétiquement

⑧ En  $T \lesssim 0,1 \text{ eV}$ : les  $\nu$  deviennent non-relativistes.