

---

# Photon sombre : une introduction

---

Stage dans le Service de Physique Théorique

François Dero & Antoine Dierckx



Sous la direction de Michel Tytgat

ULB, Belgique  
2024



لكي أكتبَ شعراً ليس سياسياً يجب أن أصغي إلى العصافير ولكي أسمع العصافير يجب أن تخرس  
مروان مخول

« In order for me to write poetry that isn't political  
I must listen to the birds  
and in order to hear the birds  
the warplanes must be silent. »  
*Marwan Makhoul*

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Électrodynamique <math>U(1)</math> classique</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Définitions</b>	<b>2</b>
1.1	Loi de l'électrodynamique classique . . . . .	2
1.2	Réponse du milieu . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Onde dans le milieu</b>	<b>4</b>
2.1	Décomposition en onde plane . . . . .	4
2.2	Propagation de l'onde . . . . .	4
2.3	Moment dipolaire électrique . . . . .	5
2.4	Indice de réfraction . . . . .	5
2.5	Propagation d'une onde dans un conducteur . . . . .	6
2.6	Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma . . . . .	7
2.7	Propagation d'une onde dans un diélectrique . . . . .	8
<b>II</b>	<b>Électrodynamique <math>U(1)_V \otimes U(1)_{\text{QED}}</math></b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Électrodynamique classique <math>U(1)_V \otimes U(1)_{\text{QED}}</math></b>	<b>10</b>
3.1	Lagrangien . . . . .	10
3.2	Analyse dimensionnelle . . . . .	10
3.2.1	En dimension $D = 3 + 1$ . . . . .	10
3.2.2	En dimension $D = d + 1$ . . . . .	11
3.3	Équation du mouvement . . . . .	12
3.4	Shift . . . . .	14
3.4.1	Shift $S_V$ . . . . .	14
3.4.2	Lagrangien transformé $\mathcal{L}_V$ . . . . .	15
3.4.3	Shift $S_A$ . . . . .	15
3.4.4	Lagrangien transformé $\mathcal{L}_A$ . . . . .	15
3.5	Discussion autour des équations du mouvement . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Électrodynamique quantique <math>U(1)_V \otimes U(1)_{\text{QED}}</math></b>	<b>17</b>
4.1	Règles de Feynman . . . . .	17
4.2	Formulation matricielle . . . . .	18
4.2.1	Introduction et conventions . . . . .	18
4.2.2	Canonification des termes cinétiques : $S_1$ . . . . .	19
4.2.3	Diagonalisation de la matrice de masse : $S_2$ . . . . .	19
4.2.4	Discussion sur les couplages . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Impact de la matière noire sur la propagation des photons</b>	<b>21</b>
5.1	Matrice de polarisation . . . . .	21
5.2	Application numérique . . . . .	23
5.2.1	Modèle hydrogénoïde . . . . .	26
5.2.2	Modèle de plasma . . . . .	28
5.2.3	OSQAR et les modèles de matière noire . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>30</b>

## Première partie

# Électrodynamique $U(1)$ classique

### Résumé

Dans cette première partie, nous rappellerons les résultats principaux de la théorie de Maxwell, constituant les fondements de l'électrodynamique classique. Nous débuterons par une révision détaillée des lois de Maxwell dans le vide et dans un milieu, incluant la définition des champs électriques et magnétiques, et leurs interactions avec la matière. Nous explorerons ensuite la propagation des ondes électromagnétiques dans divers milieux. Deux cas limites seront examinés en profondeur : celui des charges libres, comme dans un plasma, et celui des charges liées, modélisées par une approche atomique. Nous verrons ainsi comment les propriétés des matériaux influencent la vitesse de propagation des ondes et leur atténuation. Cette étude va nous permettre de poser les bases nécessaires pour aborder la compréhension du photon sombre. La référence principale utilisée dans cette partie est [1].

# 1 Définitions

## 1.1 Loi de l'électrodynamique classique

Nous rappelons ici les lois de Maxwell dans le vide et dans un milieu.

**Définition 1.1 (Maxwell dans le vide).**

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad (1.4)$$

Où : —  $\vec{E}$  est le champ électrique —  $\rho$  est la densité de charge électrique  
 —  $\vec{B}$  est le champ magnétique —  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide  
 —  $\vec{J}$  est la densité de courant —  $\mu_0$  est la perméabilité du vide

**Définition 1.2 (Maxwell dans un milieu).**

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{ext} \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_{ext} \quad (1.8)$$

Où : —  $\vec{D}$  est le champ de déplacement —  $\vec{H}$  est le champ de magnétisation

Ces lois dérivent du principe de moindre action appliqué à l'action de l'électrodynamique classique [2] :

$$\mathcal{S}_{\text{QED}} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \right\} \quad (1.9)$$

## 1.2 Réponse du milieu

Le milieu contenant des charges (pouvant être libres ou liées), il est nécessaire d'introduire un certain nombre de quantités et de relations entre celles-ci.

**Définition 1.3 (Induction électrique).** Le champ d'induction électrique  $D$  est relié au champ électrique  $E$  selon :

$$\vec{D} = \epsilon(\omega) \vec{E} \quad (1.10)$$

$$= \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \vec{E} \quad (1.11)$$

$$= \epsilon_0 (1 + \chi_E) \vec{E} \quad (1.12)$$

$$= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.13)$$

Où :

- $\epsilon_r(\omega)$  est la permittivité relative du milieu,
- $\epsilon(\omega)$  est la permittivité (dépendante de la fréquence et du milieu),
- $\chi_E$  est la susceptibilité électrique du milieu,
- $\vec{P}$  est la densité de polarisation.

On voit donc que  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_E \vec{E}$ . Lorsque la densité de polarisation  $\vec{P}$  change avec le temps, on peut également exprimer la densité

de courant de polarisation  $\vec{J}_P$  comme

$$\vec{J}_P = \partial_t \vec{P} \quad (1.14)$$

de sorte que

$$\partial_t \rho_P + \nabla \cdot \vec{J}_P = 0 \quad (1.15)$$

La densité de courant totale intervenant dans les équations de Maxwell est finalement la suivante :

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_m + \vec{J}_P \quad (1.16)$$

Où :

- $\vec{J}_f$  est la densité de courant de charge libre,
- $\vec{J}_m$  est le courant de magnétisation.

Cette dernière quantité s'exprime comme :

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} \quad (1.17)$$

Où  $M$  est la magnétisation.

On définit également le moment dipolaire électrique comme :

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i \quad (1.18)$$

Où  $\vec{r}$  est la distance séparant deux dipôles.

**Définition 1.4 (Excitation magnétique).** Le champ d'excitation magnétique  $H$  est défini selon

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \quad (1.19)$$

$$= \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} \quad (1.20)$$

$$= \frac{\vec{B}}{\mu_0 (1 + \chi_M)} \quad (1.21)$$

$$= \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (1.22)$$

Où :

- $\mu$  est la perméabilité magnétique du milieu,
- $\mu_r$  est la perméabilité relative du milieu,
- $\chi_M$  est la susceptibilité magnétique,
- $\vec{M}$  est la magnétisation.

Un milieu est dit paramagnétique si  $\chi_M > 0$  et diamagnétique si  $\chi_M < 0$ .

## 2 Onde dans le milieu

### 2.1 Décomposition en onde plane

Les solutions aux équations de Maxwell dans le vide en l'absence de source peuvent se décomposer en ondes planes. En effet,

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B}) &= \nabla \times (\nabla \times \vec{B} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}) \\
 \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla \cdot \nabla \vec{E} + \nabla \times \partial_t \vec{B} &= \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla \cdot \nabla \vec{B} + \frac{1}{c^2} \nabla \times \partial_t \vec{B} \\
 = -\nabla^2 \vec{E} + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} &= -\nabla^2 \vec{B} + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{B} \\
 = 0 &= 0
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'équation d'onde :

$$\square \vec{E} = \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{E} = 0 \quad (2.1)$$

$$\square \vec{B} = \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

Dans le cas d'une onde monochromatique, c'est-à-dire lorsqu'il y a une dépendance temporelle de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  d'une fréquence  $\omega$ , et plane, on peut écrire les champs comme :

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ \vec{E}_0 e^{-i\omega t} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right\} \quad (2.3)$$

$$\vec{B} = \text{Re} \left\{ \vec{B}_0 e^{-i\omega t} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right\} \quad (2.4)$$

### 2.2 Propagation de l'onde

On considère un milieu constitué de particules chargées de charge  $e$  (par exemple des électrons). Ces charges sont soumises à plusieurs forces :

1. la force de Lorentz :

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q \left( \vec{E}(\vec{x}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t) \right) = -e \left( \vec{E}(\vec{x}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t) \right) \quad (2.5)$$

où  $q = -e$ , la charge de l'électron.

Dans l'approximation des vitesses faibles  $|\vec{v}| \ll c$ ,  $\vec{F}_{\text{Lorentz}}$  se réduit à

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = -e \vec{E}(\vec{x}, t)$$

2. une force d'amortissement proportionnelle à la vitesse (par exemple due à l'émission d'ondes électromagnétiques suite à l'accélération de la charge considérée) :

$$\vec{F}_{\text{dissipation}} = -m\gamma \dot{\vec{x}} \quad (2.6)$$

où  $\gamma$  est un coefficient d'amortissement.

3. Une force de liaison approximée par un oscillateur harmonique de fréquence propre  $\omega_0$  :

$$\vec{F}_{\text{liaison}} = -m\omega_0^2 \vec{x} \quad (2.7)$$

Mises ensemble, ces trois contributions nous donnent l'équation différentielle :

$$\ddot{\vec{x}} + \gamma \dot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x} = -\frac{e}{m} \vec{E}(\vec{x}, t) \quad (2.8)$$

On fait l'approximation habituelle que les variations spatiales sont négligeables devant la taille typique du déplacement des électrons :

$$\vec{x} \approx \vec{x}_0 + \dot{\vec{x}} \delta \vec{x} \Big|_{\vec{x}_0 = \vec{0}} \quad (2.9)$$

En posant  $\vec{E}(\vec{x}, t) \approx \vec{E}_0 \cdot e^{-i\omega t}$  pour tout  $t$ , où  $\vec{E}_0$  est la valeur du champ  $\vec{E}$  à la position moyenne de l'électron, ainsi que  $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$ , l'équation du mouvement se résout comme

$$m \cdot \ddot{\vec{x}} = \vec{F}_{\text{Lorentz}} + \vec{F}_{\text{liaison}} + \vec{F}_{\text{dissipation}} \quad (2.10)$$

$$\iff (-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2) \vec{x}_0 e^{-i(\omega t - \phi)} = -\frac{e}{m} \vec{E}_0 \cdot e^{-i\omega t} \quad (2.11)$$

$$\iff (-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2) \vec{x}_0 = -\frac{e}{m} \vec{E}_0 \cdot e^{-i\phi} \quad (2.12)$$

$$\iff \vec{x}(t) = -\frac{e}{m} \vec{E}_0 \frac{e^{-i\omega t}}{-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2} \quad (2.13)$$

## 2.3 Moment dipolaire électrique

L'expression du moment dipolaire étant rappelée ici 1.18, il peut être calculé selon

$$\begin{aligned} \vec{p} &= -e\vec{x}(t) \\ &= \frac{e^2}{m} \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right) \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour un électron, on généralise aisément à  $N$  électrons par unité de volume,

$$\vec{P} = N\vec{p} = \frac{Ne^2}{m} \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right) \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (2.14)$$

où  $\vec{P}$  est la densité de polarisation (ou polarisation suivant les auteur·trices). Elle représente le moment dipolaire électrique moyen par unité de volume.

En supposant qu'il y ait  $N$  molécules par unité de volume, possédant chacune  $Z$  électrons, on note  $f_j$  le nombre d'électrons par molécule, ayant une fréquence de liaison  $\omega_j$  et une constante de dissipation  $\gamma_j$ . La polarisation totale s'exprime alors comme

$$\vec{P} = \frac{Ne^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (2.15)$$

avec  $f_j$  telle que

$$\sum_j f_j = Z$$

## 2.4 Indice de réfraction

On peut comparer les propriétés de propagation des ondes électromagnétiques dans le milieu par rapport à leur propagation dans le vide. Pour cela, on introduit les quantités suivantes :

**Définition 2.1 (Vitesses et indice de réfraction).** La vitesse d'une onde électromagnétique dans le vide  $c$  est donnée par :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (2.16)$$

La vitesse d'une onde électromagnétique dans le milieu  $v$  est donnée par :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (2.17)$$

Le rapport des deux définit l'indice de réfraction  $n$  :

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (2.18)$$

Pour obtenir l'indice de réfraction du milieu, on voit de l'équation 2.15 que la polarisation est linéaire en le champ électrique. La constante de proportionnalité est généralement exprimée en



termes de la susceptibilité électrique,  $\chi_E$ ,

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_E \vec{E} \Leftrightarrow \chi_E = \frac{\vec{P}}{\epsilon_0 \vec{E}} \quad (2.19)$$

Ainsi :

$$\chi_E = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} \quad (2.20)$$

On peut finalement exprimer  $\epsilon(\omega)$  :

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left( 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} \right) \quad (2.21)$$

Grâce à 2.18 et en posant que  $\mu_0 = \mu^1$ , on exprime l'indice de réfraction du milieu comme :

$$n = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega}} \quad (2.22)$$

## 2.5 Propagation d'une onde dans un conducteur

Penchons-nous sur le cas d'électrons libres dans le milieu. Soit une fraction  $f_0$  d'électrons libres par molécule (ayant donc une fréquence de liaison  $\omega_0 = 0$ ). Notre expression 2.21 devient dès lors :

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left( 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{f_0}{(-\omega^2 - i\gamma_0 \omega)} \right) \quad (2.23)$$

$$= \epsilon_0 \left( 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{f_0}{\omega(\omega + i\gamma_0 \omega)} \right) \quad (2.24)$$

$$= \epsilon_0 \left( 1 + \frac{iNe^2}{\epsilon_0 m} \frac{f_0}{m\omega(\gamma_0 - i\omega)} \right) \quad (2.25)$$

Examinons 2 cas possibles dans le but d'obtenir une expression pour la conductivité du milieu  $\sigma$  :

- Dans le 1er, nous attribuons certaines propriétés du milieu à une densité de courant extérieure  $\vec{J}_{ext}$ .
- Dans le 2ème, nous attribuons toutes les propriétés du milieu à la constante diélectrique  $\epsilon(\omega)$ .

Pour le 1er cas, démarrons des équations de Maxwell de l'électromagnétisme dans le milieu 1.2, en particulier :

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_{ext} \quad (2.26)$$

En considérant l'approximation des milieux simples, le milieu obéit à la loi d'Ohm :

$$\vec{J}_{ext} = \sigma \vec{E} \quad (2.27)$$

Par ailleurs, les relations 1.3 impliquent que

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \equiv -i\omega \epsilon(\omega) \vec{E} \quad (2.28)$$

Dans 2.26, on obtient :

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon(\omega)(-i\omega) \vec{E} + \sigma \vec{E} \quad (2.29)$$

$$= \left( \epsilon(\omega)(-i\omega) + \sigma \right) \vec{E} \quad (2.30)$$

$$= -i\omega \left( \epsilon(\omega) + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E} \quad (2.31)$$

---

1. L'effet dominant étant la polarisation du milieu, cf. Jackson section 7.6.

Posons désormais  $\epsilon(\omega) = \epsilon_0$ . On obtient finalement

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega \left( \epsilon_0 + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E} \quad (2.32)$$

Pour le 2ème cas, pour lequel on considère que  $\epsilon(\omega)$  comprend l'information sur toutes les propriétés du milieu, la loi 2.26 se réécrit :

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.33)$$

$$= i\omega \epsilon(\omega) \vec{E} \quad (2.34)$$

Nous pouvons désormais comparer 2.32 avec 2.34 et en extraire une expression pour  $\epsilon(\omega)$  :

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + i \frac{\sigma}{\omega} \quad (2.35)$$

Dès lors, en insérant ceci dans notre expression 2.25 pour  $\epsilon(\omega)$  dans le cas d'électrons libres ayant une fréquence de liaison  $\omega_0 = 0$ , on peut en obtenir une expression pour la conductivité  $\sigma$  :

$$\sigma = \frac{f_0 N e^2}{m(\gamma_0 - i\omega)} \quad (2.36)$$

Ce modèle est nommé le modèle de Drude pour la conductivité électrique.

## 2.6 Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

Situons nous désormais dans le cas où nous considérons des fréquences bien supérieures à la fréquence de résonance la plus élevée, c'est à dire dans la limite :

$$\omega \gg \max\{\omega_j\} \quad (2.37)$$

Dès lors, notre expression 2.21 pour  $\epsilon(\omega)$  devient :

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \quad (2.38)$$

$$\approx 1 + \frac{Ne^2}{m} \sum_j \frac{-f_j}{\omega(\omega + i\gamma_j)} \quad (2.39)$$

$$\approx 1 - \frac{Ne^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega^2} \quad (2.40)$$

$$\approx 1 - \frac{Ne^2}{m} \frac{Z}{\omega^2} \quad (2.41)$$

où on a utilisé le fait qu'à grandes valeurs de  $\omega$ ,  $\omega^2 \gg \omega$ .

On peut réécrire cette expression en introduisant la fréquence de plasma  $\omega_p$  du milieu :

$$\epsilon(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (2.42)$$

avec

$$\omega_p^2 = \frac{NZe^2}{m} \quad (2.43)$$

## 2.7 Propagation d'une onde dans un diélectrique

Nous allons à présent étudier le comportement d'une onde électromagnétique dans un milieu immergé dans un champ magnétique externe.

Nous considérons un plasma électronique (facteur d'amortissement  $\gamma$  négligeable) de densité uniforme, avec une forte induction magnétique statique et uniforme  $\vec{B}_{\text{ext}}$  et des ondes transversales se propageant parallèlement à la direction de  $\vec{B}_{\text{ext}}$ .

En négligeant l'influence du champ  $\vec{B}$  de l'onde incidente par rapport au champ extérieur, on peut écrire l'onde électromagnétique transverse (polarisation circulaire) comme :

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{\epsilon}_{\pm} e^{i\omega t} \text{ avec } \vec{\epsilon}_{\pm} \hat{=} \vec{\epsilon}_1 \pm i\vec{\epsilon}_2 \quad (2.44)$$

L'équation du mouvement est donnée par

$$m\ddot{\vec{x}} = -e(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}_{\text{ext}}) \quad (2.45)$$

Restreignons-nous au cas où  $\vec{B}_{\text{ext}} = B_0 \vec{u}_z$ . Dans ce cas, l'équation 2.45 se réécrit :

$$m\ddot{\vec{x}} = -eE_0 \vec{\epsilon}_{\pm} e^{i\omega t} - e\dot{\vec{x}} \times B_0 \vec{u}_z \quad (2.46)$$

En composantes, on obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + e\dot{y}B_0 &= -eE_0 \cos(\omega t) \\ m\ddot{y} - e\dot{x}B_0 &= -eE_0 \sin(\omega t) \end{cases} \quad (2.47)$$

On définit alors  $\vec{z} \equiv x + iy$  afin de pouvoir réexprimer notre système d'équations selon

$$m\ddot{z} - ie\dot{z}B_0 = -eE_0 e^{-\omega t} \quad (2.48)$$

On pose alors  $z_{\pm} = z_{0,\pm} e^{\pm i\omega t}$ . On obtient

$$\mp m\omega^2 z_{0,\pm} \pm e\omega B_0 z_{0,\pm} = -eE_0 \quad (2.49)$$

$$\iff z_{0,\pm} = \frac{eE_0}{m\omega^2 \mp e\omega B_0} \quad (2.50)$$

L'indice de réfraction dépend de la polarisation, gauche ou droite, de l'onde de sorte que le milieu est biréfringent.

## Deuxième partie

# Électrodynamique $U(1)_V \otimes U(1)_{\text{QED}}$

### Résumé

Dans ce travail, nous allons étudier l'ajout d'une symétrie de jauge (ou *degré de liberté de jauge*)  $U(1)_V$  au modèle standard, qui couplerait avec celui-ci à travers un terme cinétique de jauge. Ce type de modèle est très populaire pour l'étude de la matière noire. La matière noire est supposée être composée de particules chargées, analogues à l'électron et à son antiparticule. Ces particules interagissent entre elles via l'analogue du photon, que nous appellerons le photon sombre. Leur étude est abordée dans de nombreux articles. Pour réaliser cette partie, nous nous sommes principalement aidés de [3], ainsi que [4], [5] et [6]. Notre approche est purement classique. Notre premier objectif sera de dériver l'équivalent des équations de Maxwell pour cette théorie modifiée. Ensuite, nous considérerons la propagation d'ondes dans de la matière noire, en faisant différentes hypothèses sur sa nature. On utilisera dans cette section les unités naturelles, en particulier  $c = 1$  et donc  $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ .

### 3 Électrodynamique classique $U(1)_V \otimes U(1)_{\text{QED}}$

#### 3.1 Lagrangien

##### Définitions et notations

Les notations utilisées dans les différents papiers sur le sujet variant, nous commençons par préciser celles employées ici.

**Définition 3.1.** On appelle

$$A^\mu$$

le champ de photons,

$$F^{\mu\nu} \triangleq \partial^{[\mu} A^{\nu]}$$

son tenseur associé, et

$$\psi$$

le champ de matière couplant au photon, de couplage  $e$ .

**Définition 3.2.** On appelle

$$V^\mu$$

le champ de photons sombres,

$$G^{\mu\nu} \triangleq \partial^{[\mu} V^{\nu]}$$

son tenseur associé et

$$\chi$$

le champ de matière couplant au photon sombre (matière noire), de couplage  $f$ .

##### Lagrangien

Le Lagrangien le plus général de la théorie  $U(1)_V \otimes U(1)_{\text{QED}}$  s'exprime alors comme

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} \\ & + \bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi + \bar{\chi}i\gamma^\mu(\partial_\mu + ifV_\mu)\chi \\ & + m^2V^\mu V_\mu - \frac{\epsilon}{2}F^{\mu\nu}G_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$= \frac{-1}{4}(F^2 + G^2) + \bar{\psi}i\not{D}_A\psi + \bar{\chi}i\not{D}_V\chi + m^2V^2 - \frac{\epsilon}{2}F \cdot G \quad (3.2)$$

où les dérivées covariantes  $D_\mu$  sont définies implicitement et la notation  $\not{D} \triangleq D_\mu \gamma^\mu$  de Feynman est utilisée.

#### 3.2 Analyse dimensionnelle

Intéressons-nous aux dimensions des différents objets présents dans notre Lagrangien, d'abord en dimension  $D = 3 + 1$  puis en dimension  $D = d + 1$  quelconque.

##### 3.2.1 En dimension $D = 3 + 1$

L'action associée au Lagrangien 3.2 est donnée par :

$$\mathcal{S}[A, V] = \int d^4x \left\{ \frac{-1}{4}(F^2 + G^2) + \bar{\psi}i\not{D}_A\psi + \bar{\chi}i\not{D}_V\chi + m^2V^2 - \frac{\epsilon}{2}F \cdot G \right\} \quad (3.3)$$

$$= \int d^4x \left\{ \frac{-1}{4}(F^2 + G^2) + \bar{\psi}i\not{\partial}\psi - eA \cdot J + \bar{\chi}i\not{\partial}\chi - fV \cdot K + m^2V^2 - \frac{\epsilon}{2}F \cdot G \right\} \quad (3.4)$$

où  $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  et  $K^\mu = \bar{\chi}\gamma^\mu\chi$ .

Puisque l'action est sans dimension, celle du Lagrangien est donnée par  $[\mathcal{L}] = E^4$  pour compenser  $[d^4x] = E^{-4}$ . Ainsi, chaque terme de  $\mathcal{L}$  est de dimension  $E^4$  :

→ Considérons les termes  $\frac{-1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  et  $\frac{-1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$  :

Puisque  $[\partial^\mu] = L^{-1} = E$  et  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ , on en déduit que  $[A^\mu] = [V^\mu] = E$ . On retrouve bien :

$$\left[ \frac{-1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \right] = E^4 \text{ et } \left[ \frac{-1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} \right] = E^4$$

→ Considérons le terme de masse  $\frac{1}{2}m^2 V_\mu V^\mu$  :  
 Puisque  $[V^\mu] = E$ , il faut que  $[m] = E$ , ce qui est cohérent avec la relation bien connue  $E = m$  (où l'on rappelle que  $c = 1$ ). On retrouve bien que :

$$\left[ \frac{1}{2} m^2 V_\mu V^\mu \right] = E^4$$

→ Considérons les termes  $e A_\mu J^\mu$  et  $f V_\mu K^\mu$  :  
 Commençons par décomposer  $A_\mu J^\mu$  en sa partie temporelle et spatiale :

$$A_\mu J^\mu = \rho \phi - \vec{A} \cdot \vec{J}$$

Or,  $[\rho] = V^{-1} = L^{-3} = E^3$  et  $[\phi] = E$  car  $[m^2 \phi^2] = E^4$ . Ainsi,  $[e] = E^{4-1-3} = E^0$   
 On retrouve bien que :

$$[e A_\mu J^\mu] = E^4 \text{ et } [f V_\mu K^\mu] = E^4$$

→ Enfin, considérons le terme de couplage  $\frac{1}{2} \epsilon F^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$  :  
 Puisque  $[F^{\mu\nu}] = [G_{\mu\nu}] = E^2$ , on déduit que  $\epsilon$  est un paramètre adimensionnel. On retrouve bien que :

$$\left[ \frac{1}{2} \epsilon F^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \right] = E^4$$

### 3.2.2 En dimension $D = d + 1$

On considère l'action suivante :

$$\mathcal{S}[A, V] = \int d^D x \left\{ \frac{-1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + e A_\mu J^\mu \right. \quad (3.5)$$

$$\left. + \frac{-1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + f V_\mu K^\mu + \frac{1}{2} m^2 V_\mu V^\mu \right. \quad (3.6)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \epsilon F^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \right\} \quad (3.7)$$

Puisque l'action est sans dimension, celle du Lagrangien est donnée par  $[\mathcal{L}] = E^D$  pour compenser  $[d^D x] = E^{-D}$ . Ainsi, chaque terme de  $\mathcal{L}$  est de dimension  $E^D$ .

→ Considérons les termes  $\frac{-1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  et  $\frac{-1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$  :  
 Puisque  $[\partial^\mu] = L^{-1} = E$  et  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ , on en déduit que  $[A^\mu] = E^{\frac{D}{2}-1} = E^{\frac{D-2}{2}}$ .  
 On retrouve bien que :

$$\left[ \frac{-1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] = E^D \text{ et } \left[ \frac{-1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \right] = E^D$$

→ Considérons le terme de masse  $\frac{1}{2} m^2 V_\mu V^\mu$  :  
 Puisque  $[V^\mu] = E^{\frac{D-2}{2}}$ , il faut que  $[m^2] = E^{D-2 \cdot \frac{D-2}{2}} = E^2 \iff [m] = E$ , ce qui est toujours cohérent avec la relation  $E = m$ . On retrouve bien que :

$$\left[ \frac{1}{2} m^2 V_\mu V^\mu \right] = E^D$$

→ Considérons les termes  $e A_\mu J^\mu$  et  $f V_\mu K^\mu$  :

Décomposons  $A_\mu J^\mu$  en sa partie temporelle et spatiale :

$$A_\mu J^\mu = \phi \rho - \vec{J} \cdot \vec{A} \quad (3.8)$$

On sait que

$$[e A_\mu J^\mu] = E^D \quad (3.9)$$

$$[J^\mu] = [\rho] = V^{-1} = E^{D-1} \quad (3.10)$$

Par ailleurs, considérons le terme de masse d'un champ scalaire réel en dimension  $D$  afin de déterminer la dimension de  $\phi$  :

$$\mathcal{L} \ni m^2 \phi^2 \quad (3.11)$$

On sait que  $[m^2\phi^2] = E^D$ . Ainsi,

$$[\phi] = E^{\frac{D-2}{2}} \quad (3.12)$$

On trouve finalement :

$$[e] = [f] = E^{D-(D-1)\frac{D-2}{2}} = E^{2-\frac{D}{2}} \quad (3.13)$$

→ Enfin, le terme de couplage  $\frac{1}{2}\epsilon F^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$  est de dimension  $E^D$  par les raisonnements précédents.

### 3.3 Équation du mouvement

Afin de trouver les équations du mouvement, nous faisons varier l'action sous :

$$\begin{aligned} A^\mu &\mapsto A^\mu + \delta A^\mu \\ V^\mu &\mapsto V^\mu + \delta V^\mu \end{aligned}$$

et annulons les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \delta_A \mathcal{S} &\triangleq \mathcal{S}[A^\mu + \delta A^\mu, V^\mu] - \mathcal{S}[A^\mu, V^\mu] = 0 \\ \delta_V \mathcal{S} &\triangleq \mathcal{S}[A^\mu, V^\mu + \delta V^\mu] - \mathcal{S}[A^\mu, V^\mu] = 0 \end{aligned}$$

Afin de nous rendre la tâche plus facile, nous définissons :

**Définition 3.3 (Lagrangien et action initiale).**

$$\mathcal{L}_i[A^\mu] = \frac{-1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + e A_\mu J^\mu \quad (3.14)$$

$$\mathcal{S}_i[A^\mu] = \int d^4x \mathcal{L}_i \quad (3.15)$$

**Définition 3.4 (Lagrangien et action sombre).**

$$\mathcal{L}_d[V^\mu] = \frac{-1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + f V_\mu K^\mu + \frac{1}{2} m^2 V_\mu V^\mu \quad (3.16)$$

$$\mathcal{S}_d[V^\mu] = \int d^4x \mathcal{L}_d \quad (3.17)$$

**Définition 3.5 (Terme de couplage).**

$$\mathcal{L}_c[A^\mu, V^\mu] = \frac{1}{2} \epsilon F^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \quad (3.18)$$

$$\mathcal{S}_c[A^\mu, V^\mu] = \int d^4x \mathcal{L}_c \quad (3.19)$$

#### Variation de $\mathcal{S}_i$

Commençons par évaluer  $\mathcal{S}_i[A^\mu + \delta A^\mu]$  :

$$\mathcal{S}_i[A^\mu + \delta A^\mu] = \int d^4x \left\{ \frac{-1}{4} (\partial^\mu (A^\nu + \delta A^\nu) - \partial^\nu (A^\mu + \delta A^\mu)) (\partial_\mu (A_\nu + \delta A_\nu) - \partial_\nu (A_\mu + \delta A_\mu)) + e (A^\mu + \delta A^\mu) J_\mu \right\}$$

En ne gardant que les termes d'ordre  $\mathcal{O}(\delta A^\mu)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \delta_A \mathcal{S}_i &= \int d^4x \left\{ \frac{-1}{2} (\partial^\mu A^\nu \partial_\mu \delta A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu \delta A_\mu - \partial^\nu A^\mu \partial_\nu \delta A_\mu + \partial^\nu A^\mu \partial_\mu \delta A_\nu) + e \delta A^\mu J_\mu \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ - (\partial^\nu A^\mu \partial_\nu \delta A_\mu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu \delta A_\mu) + e \delta A^\mu J_\mu \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ + (\partial^\nu \partial_\nu A^\mu \cdot \delta A_\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu \cdot \delta A_\mu) + e J_\mu \delta A^\mu \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ ((\partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)) + e J^\mu) \delta A_\mu \right\} \end{aligned}$$

### Variation de $\mathcal{S}_d$

Les équations du mouvement pour  $\mathcal{S}_d$  sont similaires à l'exception d'un terme de masse supplémentaire :

$$\mathcal{S}_{d,m} \triangleq \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} m^2 V_\mu V^\mu \right\}$$

Faisons alors varier  $\mathcal{S}_{d,m}$  :

$$\delta_V \mathcal{S}_{d,m} = \int d^4x \left\{ m^2 V^\mu \delta V_\mu \right\}$$

### Variation de $\mathcal{S}_c$

Pour le terme de couplage, nous pouvons choisir de faire varier l'action selon le champ  $A$  ou  $V$ . Cette action étant symétrique en  $F$  et  $G$ , nous obtiendrons deux résultats similaires. Nous faisons le choix de faire varier  $\mathcal{S}_c$  sous  $A^\mu \mapsto A^\mu + \delta A^\mu$ .

$$\mathcal{S}_c[A^\mu + \delta A^\mu, V^\mu] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \epsilon (\partial^\mu (A^\nu + \delta A^\nu) - \partial^\nu (A^\mu + \delta A^\mu)) (\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu) \right\}$$

En ne gardant que les termes d'ordre  $\mathcal{O}(\delta A^\mu)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \delta_A \mathcal{S}_c &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \epsilon (\partial^\mu \delta A^\nu \partial_\mu V_\nu - \partial^\mu \delta A^\nu \partial_\nu V_\mu - \partial^\nu \delta A^\mu \partial_\mu V_\nu + \partial^\nu \delta A^\mu \partial_\nu V_\mu) \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \epsilon (-\partial^\mu \partial_\mu V_\nu \cdot \delta A^\nu + \partial^\mu \partial_\nu V_\mu \cdot \delta A^\nu + \partial^\nu \partial_\mu V_\nu \cdot \delta A^\mu - \partial^\nu \partial_\nu V_\mu \cdot \delta A^\mu) \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \epsilon (+\partial^\mu \partial_\nu V_\mu \cdot \delta A^\nu - \partial^\nu \partial_\nu V_\mu \cdot \delta A^\mu) \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \epsilon (+\partial^\nu \partial_\mu V_\nu - \partial^\nu \partial_\nu V_\mu) \delta A^\mu \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \epsilon (+\partial_\nu \partial^\mu V^\nu - \partial_\nu \partial^\nu V^\mu) \delta A_\mu \right\} \end{aligned}$$

Similairement,

$$\delta_V \mathcal{S}_c = \int d^4x \left\{ \epsilon (+\partial_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu) \delta V_\mu \right\}$$

### Équations du mouvement

Après avoir fait varier l'action selon le champ  $A$  et  $V$ , nous obtenons les variations suivantes :

$$\delta_A \mathcal{S} = \int d^4x \quad \delta A_\mu \left\{ (\partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)) + e J^\mu + \epsilon (\partial_\nu \partial^\mu V^\nu - \partial_\nu \partial^\nu V^\mu) \right\} \quad (3.20)$$

$$\delta_V \mathcal{S} = \int d^4x \quad \delta V_\mu \left\{ (\partial_\nu (\partial^\nu V^\mu - \partial^\mu V^\nu)) + f K^\mu + m^2 V^\mu + \epsilon (\partial_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu) \right\} \quad (3.21)$$

Les équations du mouvement sont obtenues en mettant la variation de l'action à 0 :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{S}[A^\mu, V^\mu]}{\delta A^\mu} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\delta \mathcal{S}[A^\mu, V^\mu]}{\delta V^\mu} &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\nu\mu} &= -e J^\mu - \epsilon (\partial_\nu \partial^\mu V^\nu - \partial_\nu \partial^\nu V^\mu) \\ \partial_\nu G^{\nu\mu} &= -f K^\mu - m^2 V^\mu - \epsilon (\partial_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu) \end{aligned}$$

Remarquons que nous pouvons mettre les équations du mouvement sous la forme :

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\nu\mu} &= -e J^\mu - \epsilon \partial_\nu G^{\mu\nu} \\ \partial_\nu G^{\nu\mu} &= -f K^\mu - m^2 V^\mu - \epsilon \partial_\nu F^{\mu\nu} \\ \begin{cases} \partial_\nu (\epsilon G^{\mu\nu} - F^{\mu\nu}) &= -e J^\mu \\ \partial_\nu (\epsilon F^{\mu\nu} - G^{\mu\nu}) &= -f K^\mu - m^2 V^\mu \end{cases} \end{aligned} \quad (3.22)$$



### 3.4 Shift

Cette mise en forme des équations du mouvement suggère une redéfinition de nos champs, afin de déplacer le terme de couplage. Différents choix de base sont possibles. Nous considérons ici deux cas, que nous notons  $S_V$  et  $S_A$ .

#### 3.4.1 Shift $S_V$

On effectue le shift  $V$  suivant :

$$V^\mu \xrightarrow{S_V} \tilde{V}^\mu - \epsilon A^\mu \iff \tilde{V}^\mu = \mathcal{N}(V^\mu + \epsilon A^\mu) \quad (3.23)$$

où la normalisation, que nous omettrons par la suite d'écrire afin de faciliter la lecture, est donnée par :

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}$$

#### Termes cinétiques

Les termes cinétiques se transforment selon :

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &\xrightarrow{S_V} F^{\mu\nu} \\ G^{\mu\nu} &\xrightarrow{S_V} \partial^\mu(\tilde{V}^\nu - \epsilon A^\nu) - \partial^\nu(\tilde{V}^\mu - \epsilon A^\mu) \\ &= \tilde{G}^{\mu\nu} - \epsilon F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

où  $\tilde{G}^{\mu\nu} \triangleq \partial^\mu \tilde{V}^\nu - \partial^\nu \tilde{V}^\mu$ .

$$\begin{aligned} F^2 &\xrightarrow{S_V} F^2 \\ G^2 &\xrightarrow{S_V} (\tilde{G} - \epsilon F)^2 \\ &= \tilde{G}^2 - 2\epsilon \tilde{G} \cdot F + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

#### Terme de mélange cinétique

Le terme de mélange cinétique se transforme selon :

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{2} F \cdot G &\xrightarrow{S_V} \frac{\epsilon}{2} F \cdot (\tilde{G} - \epsilon F) \\ &= \frac{\epsilon}{2} F \cdot \tilde{G} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

#### Minicharge

Observons comment les différents termes du Lagrangien  $\mathcal{L}$  se transforment sous ce shift :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \ni f \bar{\chi} V^\mu \gamma_\mu \chi &\xrightarrow{S_V} f \bar{\chi} (\tilde{V}^\mu - \epsilon A^\mu) \gamma_\mu \chi \\ &= f \bar{\chi} \tilde{V}^\mu \gamma_\mu \chi - \epsilon f \bar{\chi} \not{A} \chi \end{aligned}$$

On voit apparaître un couplage entre les dark fermions  $\chi$  et le photon  $A^\mu$ , proportionnel à  $\epsilon f$ .

**Définition 3.6 (Minicharge).** On définit la minicharge de couplage entre les fermions sombres et le photon usuel selon :

$$\tilde{f} \triangleq -\epsilon f \quad (3.24)$$

Le terme de couplage se réécrit alors selon :

$$f \bar{\chi} \tilde{V}^\mu \gamma_\mu \chi + \tilde{f} \bar{\chi} \not{A} \chi \quad (3.25)$$

### Terme de masse

Le terme de masse se transforme sous la translation selon :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \ni \frac{1}{2}m^2 V^\mu V_\mu &\xrightarrow{S_V} \frac{1}{2}m^2 (\tilde{V}^\mu - \epsilon A^\mu)(\tilde{V}_\mu - \epsilon A_\mu) \\ &= \frac{1}{2}m^2 (\tilde{V}^2 + (\epsilon A)^2 - 2\epsilon \tilde{V} \cdot A) \\ &\approx \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}\epsilon m^2 \tilde{V} \cdot A\end{aligned}$$

*Remarque.* Le mélange de  $A$  et  $V$  s'est déplacé d'un terme cinétique à un terme de masse.

#### 3.4.2 Lagrangien transformé $\mathcal{L}_V$

En assemblant les termes ci-dessus, on obtient un Lagrangien transformé :

$$\mathcal{L} \xrightarrow{S_V} \mathcal{L}_V$$

*Propriété 3.1. Sous une transformation des champs*

$$\begin{cases} V^\mu \xrightarrow{S_V} \tilde{V}^\mu - \epsilon A^\mu \\ A^\mu \xrightarrow{S_V} A^\mu \end{cases} \quad (3.26)$$

le Lagrangien se transforme selon :

$$\mathcal{L}_V \hat{=} \frac{-1}{4} (F^2 + \tilde{G}^2) + \bar{\psi}(i\tilde{D}_A - m_\psi)\psi + \bar{\chi}(i\tilde{D}_V - m_\chi)\chi + \frac{1}{2}m^2 \tilde{V}^2 - \epsilon m^2 \tilde{V} \cdot A \quad (3.27)$$

où

$$\tilde{D}_V \hat{=} \partial + if\tilde{V} + i\tilde{f}A \quad (3.28)$$

Dans cette base, les termes cinétiques des champs de jauge sont diagonalisés mais les champs se mélangent par le terme de masse. Ce ne sont pas des états propres de propagation, sauf dans la limite de masse nulle. Remarquons également que, toujours dans cette base, la matière ordinaire ne couple qu'au photon, tandis que la matière noire couple aux deux champs de jauge. Le couplage au photon ordinaire est  $\tilde{f} = \mathcal{O}(\epsilon \ll 1)$ . Dans la limite de masse nulle,  $m^2 = 0$ , on dit que la matière noire est millichargée.

#### 3.4.3 Shift $S_A$

Alternativement, on peut choisir de redéfinir nos champs selon :

$$A^\mu \xrightarrow{S_A} \tilde{A}^\mu - \epsilon V^\mu \iff \tilde{A}^\mu = \mathcal{N}(A^\mu + \epsilon V^\mu) \quad (3.29)$$

La minicharge associée à ce shift serait :

$$\tilde{e} \hat{=} -\epsilon e \quad (3.30)$$

#### 3.4.4 Lagrangien transformé $\mathcal{L}_A$

Ce shift transforme le Lagrangien selon  $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}_A$  où

$$\mathcal{L}_A \hat{=} \frac{-1}{4} (\tilde{F}^2 + G^2) + \bar{\psi}(i\tilde{D}_A - m_\psi)\psi + \bar{\chi}(i\tilde{D}_V - m_\chi)\chi + \frac{1}{2}m^2 V^2 \quad (3.31)$$

où

$$\tilde{D}_A \hat{=} \partial + ie\tilde{A} + i\tilde{e}V \quad (3.32)$$

### 3.5 Discussion autour des équations du mouvement

Le principe de moindre action appliqué à

$$\mathcal{S}_V \hat{=} \int d^4x \mathcal{L}_V \quad (3.33)$$

donne les équations du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} - \epsilon m^2 \tilde{V}^\mu - e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \epsilon f \bar{\chi} \gamma^\mu \chi &= 0 \\ \partial_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} + m^2 \tilde{V}^\mu - \epsilon m^2 A^\mu - f \bar{\chi} \gamma^\mu \chi &= 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\iff \begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} - \epsilon m^2 \tilde{V}^\mu &= e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \tilde{f} \bar{\chi} \gamma^\mu \chi \\ \partial_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} + m^2 \tilde{V}^\mu - \epsilon m^2 A^\mu &= f \bar{\chi} \gamma^\mu \chi \end{cases} \quad (3.35)$$

Le principe de moindre action appliqué à

$$\mathcal{S}_A \hat{=} \int d^4x \mathcal{L}_A \quad (3.36)$$

donne les équations du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} - e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi &= 0 \\ \partial_\mu G^{\mu\nu} + m^2 V^\mu + \epsilon e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - f \bar{\chi} \gamma^\mu \chi &= 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\iff \begin{cases} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \\ \partial_\mu G^{\mu\nu} + m^2 V^\mu &= \tilde{e} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + f \bar{\chi} \gamma^\mu \chi \end{cases} \quad (3.38)$$

Dès lors, comparons les équations du mouvement obtenues dans le cas du shift  $\mathcal{S}_V$  et du shift  $\mathcal{S}_A$  :

Base V	Base A
$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} - \epsilon m^2 \tilde{V}^\mu &= e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \tilde{f} \bar{\chi} \gamma^\mu \chi \\ \partial_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} + m^2 \tilde{V}^\mu - \epsilon m^2 A^\mu &= f \bar{\chi} \gamma^\mu \chi \end{cases} \quad (3.39)$	$\begin{cases} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \\ \partial_\mu G^{\mu\nu} + m^2 V^\mu &= \tilde{e} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + f \bar{\chi} \gamma^\mu \chi \end{cases} \quad (3.40)$

On remarque un terme de masse pour le photon ordinaire dans l'équation du mouvement du photon sombre et réciproquement. Cette base est utile dans le cas de masse nulle. En particulier, elle met en avant le fait que, dans ce cas, la matière ordinaire ne couple qu'au photon ordinaire et pas au photon sombre. La matière sombre est par contre millichargée.

Cette base est particulièrement utile dans le cas du photon sombre massif car les champs sont des états propres de masse. Dans cette base, la matière ordinaire et matière noire couplent toutes les deux avec le photon sombre. Il y a été introduit une minicharge  $\tilde{f} \propto \epsilon \ll 1$  des fermions usuels sous le photon sombre.

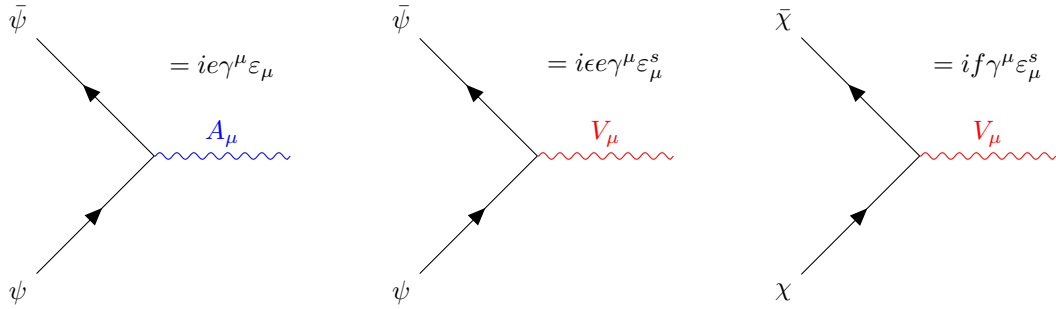
## 4 Électrodynamique quantique $U(1)_V \otimes U(1)_{\text{QED}}$

### 4.1 Règles de Feynman

Notre démarche est essentiellement classique, c'est-à-dire au niveau des équations classiques du mouvement. Néanmoins, il est utile de représenter ce qui se passerait si nous considérions notre théorie en terme de champs de jauge quantifiés. Ceci peut être exprimé simplement en termes de règles et de diagrammes de Feynman. Nous passons la dérivation de ces règles et donnons directement les résultats.

#### Base A

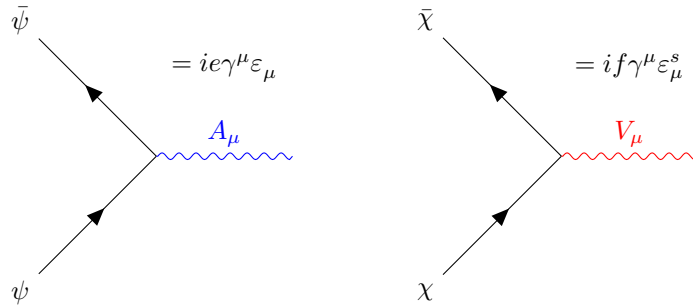
Commençons par le cas de notre shift  $S_A$ . Pour celui-ci, nous obtenons les diagrammes suivants :



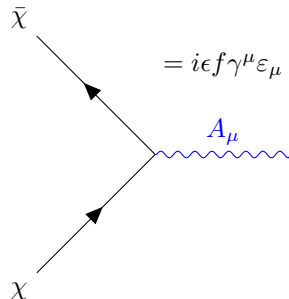
Ici,  $\epsilon_\mu$  ( $\epsilon_\mu^s$ ) se réfère au vecteur de polarisation du photon ordinaire (respectivement, du photon sombre). Dans la base A, nous voyons graphiquement que la matière noire ne couple qu'au photon sombre massif.

#### Base V

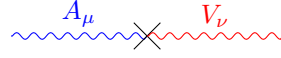
Pour notre set d'équations obtenues du shift  $S_V$ , les choses sont légèrement différentes de part les termes de masse "croisés". A l'ordre 1, on obtient pour ce shift les diagrammes suivants :



A l'ordre  $\epsilon$ , on obtient pour ce même shift le diagramme de couplage suivant :



Ce diagramme montre que la matière noire couple à un photon ordinaire. Cependant, ce résultat semble en contradiction avec les règles de Feynman dérivées dans la base  $A$ . En fait, au même ordre  $\epsilon$ , il faut tenir compte du mélange entre le photon ordinaire et le photon sombre :

$$= i\epsilon m^2 \eta_{\mu\nu}$$


Dans la limite de masse nulle,  $m^2 = 0$ , cette amplitude est nulle et l'on trouve bien le fait que la matière noire est millichargée. Par contre, pour  $m^2 \neq 0$ , les shifts différents effectués sur nos champs semblent à première vue avoir scindé le problème initial en deux sous-problèmes ayant une physique différente. Nous montrerons de manière générale dans la section 4.2 qu'en réalité, ce n'est pas le cas ; les deux bases mènent bien à la même physique.

Pour le moment, nous allons vérifier l'équivalence des EOM dans ces deux bases  $V$  3.39 et  $A$  3.40 dans un cas particulier : l'émission d'un photon  $A$  par un dark fermion  $\chi$ .

### Élément de matrice de l'émission $\chi \rightarrow \chi + A$

Plaçons nous dans la base  $V$ .

1. L'élément de matrice pour la contribution *directe*  $\chi \rightarrow \chi + A$  est donnée par

$$\mathcal{M}_d = i\epsilon f J^\mu \varepsilon_\mu^s \quad (4.1)$$

2. L'élément de matrice pour la contribution *indirecte*  $\chi \rightarrow \chi + V \rightarrow \chi + A$  est donnée par

$$\mathcal{M}_i = i f J^\mu \times \frac{-i}{k^2 - m^2} (\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}) \times i\epsilon m^2 \varepsilon^{\nu,s} \quad (4.2)$$

Pour la limite  $m^2 \gg k^2$ , le propagateur se réduit à  $\frac{i\eta_{\mu\nu}}{m^2}$ .

3. En calculant l'élément de matrice total à l'ordre  $\epsilon$  pour cette émission, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}_d + \mathcal{M}_i \\ &= i\epsilon f J^\mu \varepsilon_\mu^s + i f J^\mu \times \frac{i\eta_{\mu\nu}}{m^2} \times i\epsilon m^2 \varepsilon^{\nu,s} \\ &= i\epsilon J^\mu \varepsilon_\mu^s \left(1 - \frac{m^2}{m^2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dans la base  $A$ , il est évident que les dark fermions ne couplent pas au photon si le photon est massif.

On retombe ainsi sur un résultat équivalent dans la base  $V$  et  $A$  : à l'ordre 1 et à l'ordre  $\epsilon$ , les diagrammes  $\chi \rightarrow \chi + A$  sont supprimés.

## 4.2 Formulation matricielle

### 4.2.1 Introduction et conventions

Nous allons dans cette section reformuler notre shift sous forme matricielle. Pour ce faire, nous supposons l'existence d'une symétrie agissant sur le doublet  $\begin{pmatrix} V \\ A \end{pmatrix}$  et qui va mélanger ces états, dans le but de trouver une combinaison spécifique de ceux-ci qui deviendra nos états propres de masse. Nous souhaitons dès lors diagonaliser toutes les matrices d'auto-interaction de notre Lagrangien. Réécrivons notre Lagrangien en terme du doublet  $\begin{pmatrix} V \\ A \end{pmatrix}$  en ces notations :

$$\phi = \begin{pmatrix} V \\ A \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$d\phi = d \begin{pmatrix} V \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dV \\ dA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Où  $(F)_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}A_{\nu]} = 2F_{\mu\nu}$  avec  $F_{\mu\nu}$  le tenseur de Maxwell.

On peut dès lors réécrire notre Lagrangien comme :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{-1}{2}d(V \ A) \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} V \\ A \end{pmatrix} + \frac{m^2}{2}(V \ A) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ A \end{pmatrix} \\ &+ \bar{\chi}(i\cancel{\partial} - m_\chi)\chi + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m_\psi)\psi + (-f\bar{\chi}\gamma\chi \quad -e\bar{\psi}\gamma\psi) \begin{pmatrix} V \\ A \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{2}d\phi^T K d\phi + \frac{m^2}{2}\phi^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \phi + \bar{\chi}(i\cancel{\partial} - m_\chi)\chi + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m_\psi)\psi + J\phi\end{aligned}\tag{4.5}$$

Où on a écrit  $\begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \triangleq K$

et  $(-f\bar{\chi}\gamma\chi \quad -e\bar{\psi}\gamma\psi) = (-fJ_\chi \quad -eJ_\psi) \triangleq J$ .

#### 4.2.2 Canonification des termes cinétiques : $S_1$

On souhaite maintenant rendre canonique notre terme cinétique. Pour ce faire nous allons effectuer notre shift tel que réalisé en 3.4.1 :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ A \end{pmatrix} \triangleq \phi_1\tag{4.6}$$

où on écrit  $\begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \triangleq S_1$ . Vérifions bien que que  $S_1^T K S_1 = K^{\text{diag}}$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{4.7}$$

Ce shift a donc rendu notre terme cinétique canonique comme souhaité. L'effet de ce shift sur notre terme de masse est le suivant :

$$\frac{m^2}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ A \end{pmatrix} \right\}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ A \end{pmatrix} = \frac{m^2}{2} (V \ A) \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ A \end{pmatrix}\tag{4.8}$$

On réécrit dès lors notre Lagrangien sous la forme

$$\mathcal{L}_1 = \frac{-1}{2}d\phi_1^T \mathbf{1}_2 d\phi_1 + \frac{m^2}{2}\phi_1^T \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix} \phi + J\phi_1\tag{4.9}$$

On définit dès lors  $\begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix} \triangleq M_1$ .

#### 4.2.3 Diagonalisation de la matrice de masse : $S_2$

Il reste un terme non-diagonal dans notre Lagrangien : la matrice de masse  $M_1$ . C'est une matrice  $2 \times 2$  symétrique. On peut donc trouver une matrice  $S_2 \in SO(2)$  qui diagonalisera  $M_1$  :

$$S_2^{-1} M_1 S_2 = M_2 = \text{diag}\{m_V, m_A\}$$

On choisit de paramétrer  $S_2$  selon :

$$S_2 \triangleq \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}\tag{4.10}$$

On résout alors

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} m_V & 0 \\ 0 & m_A \end{pmatrix}$$

En prenant  $m_V = 1$  et  $m_A = 0$ , on trouve la condition suivante :

$$\cos \theta \sin \theta = \epsilon$$

Dans l'approximation des petits angles, on trouve alors

$$S_2 = \begin{pmatrix} \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ -\epsilon & 1 \end{pmatrix}\tag{4.11}$$

#### 4.2.4 Discussion sur les couplages

Ayant appliqué  $S_1$  puis  $S_2$  à  $\phi$  :  $\phi_2 \hat{=} S_2 S_1 \phi$ , le Lagrangien devient :

$$\frac{-1}{2}(d\phi_2)^2 + \frac{m^2}{2}\phi_2^2 + J\phi_2 + \bar{\chi}(i\not{D} - m_\chi)\chi + \bar{\psi}(i\not{D} - m_\psi)\psi \quad (4.12)$$

Explicitement, le terme de couplage est :

$$J\phi_2 = \begin{pmatrix} -f\bar{\chi}\gamma\chi & -e\bar{\psi}\gamma\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ -\epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f\bar{\chi}\gamma\chi & -e\bar{\psi}\gamma\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ A - \epsilon V \end{pmatrix}$$

On s'aperçoit que la diagonalisation de la matrice de masse  $M_1$  dans la base  $V$  nous fait revenir dans la base  $A$ , c'est-à-dire dans la base des états physiques.

## 5 Impact de la matière noire sur la propagation des photons

Dans cette section, nous allons appliquer le formalisme classique de la propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu (tel que développé, par exemple, dans le Jackson et revu dans la première partie) au modèle du photon sombre couplé par mélange cinétique. En particulier, nous allons étudier comment une onde électromagnétique plane ordinaire peut être convertie en onde électromagnétique sombre si elle se propage dans un milieu composé de matière noire.

Nous allons aborder ce problème de manière purement classique. En particulier, nous allons écrire les équations de Maxwell modifiées dans un milieu continu composé de matière noire. Nous nous concentrons sur le cas  $m = 0$ . Les résultats de cette section sont originaux.

### 5.1 Matrice de polarisation

#### Construction

Partons de nos équations du mouvement 3.40 et posons  $m = 0$  :

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = eJ_\psi^\nu \quad (5.1)$$

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = fJ_\chi^\nu - \epsilon eJ_\psi^\nu \quad (5.2)$$

pour obtenir l'expression des équations de Maxwell sous formes différentielles.

Partons de 5.1, dès lors :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial^2 A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu \quad (5.3)$$

où on a décidé d'omettre volontairement les " $\sim$ " pour le calcul.

Lorsque  $\nu = 0$  :

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^0 - \partial^0 A^\mu) = (\partial_t^2 - \nabla^2) \phi - \partial_\mu \dot{A}^\mu \quad (5.4)$$

$$= (\partial_t^2 - \nabla^2) \phi - \partial_t^2 \phi + \nabla \cdot \dot{\vec{A}} \quad (5.5)$$

$$= \nabla \cdot (-\nabla \phi + \partial_t \vec{A}) \quad (5.6)$$

$$= \nabla \cdot \vec{E} \quad (5.7)$$

où on a utilisé :

$$A = (\phi, \vec{A}) \text{ et } \vec{E} = -\nabla \phi + \partial_t \vec{A}$$

On obtient ainsi :

$$\nabla \cdot \vec{E} = e\rho_\psi \quad (5.8)$$

Pour  $\nu = j$  :

$$(\partial_t^2 - \nabla^2) A^j + \partial_\mu \partial_\nu A^\mu = (\partial_t^2 - \nabla^2) A^j + \partial_t \nabla \phi + \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) \quad (5.9)$$

$$= \nabla \times \vec{B} - \vec{E} \quad (5.10)$$

où on a utilisé  $\nabla \times (\nabla \times \vec{\Omega}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{\Omega}) - \nabla^2 \vec{\Omega}$  ainsi que  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ .

En effectuant un raisonnement analogue pour notre 2ème équation dans 3.40, on obtient finalement pour notre base A les équations suivantes :

$$\nabla \cdot \vec{E} = e\rho_\psi \quad (5.11)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = e\vec{J}_\psi \quad (5.12)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_D = f\rho_\chi - \epsilon e\rho_\psi \quad (5.13)$$

$$\nabla \times \vec{B}_D - \partial_t \vec{E}_D = f\vec{J}_\chi - \epsilon e\vec{J}_\psi \quad (5.14)$$



où les indices D réfèrent aux dark photons.

De manière similaire, on obtient pour notre base V :

$$\nabla \cdot \vec{E} = e\rho_\psi - \epsilon f\rho_\chi \quad (5.15)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = e\vec{J}_\psi - \epsilon f\vec{J}_\chi \quad (5.16)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_D = f\rho_\chi \quad (5.17)$$

$$\nabla \times \vec{B}_D - \partial_t \vec{E}_D = f\vec{J}_\chi \quad (5.18)$$

Supposons dès lors une onde électromagnétique incidente composée de photons ordinaires  $A_\mu$  et traversant un milieu constitué de dark fermions liés  $\chi$ . On suppose qu'il n'y a pas de matière ordinaire, et donc  $\rho_\psi = 0$ . Par ailleurs, dans ce milieu, on peut écrire

$$\nabla \cdot \vec{E} = \epsilon^2 \rho_{P'}(\vec{E}) + \epsilon \rho_{P'}(\vec{E}') \quad (5.19)$$

Ceci correspond donc au cas où une onde électromagnétique composée de photons ordinaires en interagissant avec les dark fermions va ré-émettre à l'ordre  $\epsilon$  une onde de dark photons et, à l'ordre  $\epsilon^2$ , une onde de photons ordinaires.

En utilisant l'expression de la polarisation 2.14 sur nos nouvelles équations de Maxwell, on trouve :

$$\vec{P}'(\vec{E}^{(\prime)}) = \frac{f^2 N_\chi}{m_\chi(\omega_0'^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} \vec{E}^{(\prime)} = \chi'(\omega) \vec{E}^{(\prime)} \quad (5.20)$$

On peut également écrire :

$$\nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \epsilon^2 \partial_t \vec{P}'(E) + \epsilon \partial_t \vec{P}'(E') \quad (5.21)$$

En dérivant ceci par rapport au temps on obtient :

$$\nabla \times \partial_t \vec{B} - \partial_t^2 \vec{E} = \epsilon^2 \partial_t^2 \vec{P}'(E) + \epsilon \partial_t^2 \vec{P}'(E') \quad (5.22)$$

Le premier terme du LHS devient dès lors :

$$-\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla^2 \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E})$$

On réécrit ainsi l'équation 5.22 comme :

$$\underbrace{\nabla^2}_{-k^2} \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) \underbrace{- \partial_t^2}_{+\omega^2} \vec{E} = \epsilon^2 \underbrace{\partial_t^2}_{-\omega^2} (\chi' \vec{E}) + \epsilon \underbrace{\partial_t^2}_{-\omega^2} (\chi' \vec{E}') \quad (5.23)$$

En passant dans l'espace de Fourier, on obtient l'équation suivante :

$$(-k^2 + \omega^2) \vec{E} = -\epsilon^2 \omega^2 \chi' \vec{E} - \epsilon \omega \chi' \vec{E}'$$

relation que l'on peut réécrire comme ceci :

$$\left( \omega^2 (1 + \epsilon^2 \chi') - \vec{k}^2 \right) \vec{E} + \epsilon \omega^2 \chi' \vec{E}' = 0 \quad (5.24)$$

Dans le cas où l'onde composée de dark photons interagit avec le milieu composé de dark fermions, on obtient les équations suivantes :

$$\nabla \cdot \vec{E}' = \epsilon \rho_{P'}(\vec{E}) + \rho_{P'}(\vec{E}') \quad (5.25)$$

$$\nabla \times \vec{B}' - \partial_t \vec{E}' = \epsilon \partial_t \vec{P}'(\vec{E}) + \partial_t \vec{P}'(\vec{E}') \quad (5.26)$$

Ce qui se traduit par le fait que l'onde de dark photons va en interagissant avec le milieu de dark fermions ré-émettre une onde de photons ordinaires à l'ordre  $\epsilon$  et une onde de dark photons à l'ordre 1.

En effectuant un raisonnement analogue à celui réalisé précédemment, on obtient :

$$\left( \omega^2 (1 + \chi') - \vec{k}^2 \right) \vec{E}' + \epsilon \omega^2 \chi' \vec{E} = 0 \quad (5.27)$$

A partir de ces résultats, nous construisons la matrice de polarisation :

$$M \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{E}' \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} (1 + \epsilon^2 \chi') \omega^2 - \vec{k}^2 & \epsilon \omega^2 \chi' \\ \epsilon \omega^2 \chi' & (1 + \chi') \omega^2 - \vec{k}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{E}' \end{pmatrix} = 0 \quad (5.28)$$

*Remarque.* Lorsqu'on met  $\epsilon = 0$ , on retrouve bien les relations de dispersion diagonales habituelles :  $\omega(k) = |\vec{k}|$  pour les photons (milieu non polarisé) et  $\omega(k) = \frac{|\vec{k}|}{\sqrt{1+\chi}} = \frac{|\vec{k}|}{\sqrt{\epsilon_r}}$  pour les dark photons.

### Relations de dispersion

Nous allons à présent diagonaliser cette matrice dans le but de trouver les états propres de propagation. En effectuant  $\det(M - \lambda \mathbb{1})$  sur une matrice symétrique :

$$\left| \begin{pmatrix} A - \lambda & B \\ B & D - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

on obtient

$$0 = \lambda^2 - \lambda(A + D) + AD - B^2 \quad (5.29)$$

$$\Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{A + D \pm \sqrt{(A + D)^2 - 4(AD - B^2)}}{2} \quad (5.30)$$

En appliquant ceci à notre matrice de polarisation avec  $\lambda = \vec{k}^2$ , les termes  $A + D$  et  $AD - B^2$  donnent respectivement :

$$A + D = \omega^2(2 + \chi + \chi\epsilon^2) \quad (5.31)$$

$$AD - B^2 = \omega^4(1 + \chi + \epsilon^2\chi) \quad (5.32)$$

En combinant les termes, on obtient les relations de dispersion suivantes :

$$\begin{cases} \vec{k}_1^2 &= \omega^2 \\ \vec{k}_2^2 &= \omega^2(1 + \chi(1 + \epsilon^2)) \end{cases} \quad (5.33)$$

### Vecteurs propres

Le vecteur associé à  $\lambda_-$  est défini par  $\ker\{M - \lambda_- \mathbb{1}_2\}$ . De même, le vecteur associé à  $\lambda_+$  est défini par  $\ker\{M - \lambda_+ \mathbb{1}_2\}$ . On trouve

$$V_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -\epsilon \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

$$V_+ = \begin{pmatrix} \epsilon \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

En termes d'ondes planes, les états propres de propagation sont donc

$$V_1(z, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\epsilon \end{pmatrix} \exp\{-i(\omega t \pm k_1 z)\} \text{ où } k_1^2 = \omega^2 \quad (5.36)$$

$$V_2(z, t) = \begin{pmatrix} \epsilon \\ 1 \end{pmatrix} \exp\{-i(\omega t \pm k_2 z)\} \text{ où } k_2^2 = \omega^2(1 + \chi(1 + \epsilon^2)) \quad (5.37)$$

## 5.2 Application numérique

Supposons à présent l'émission, en  $z = 0$ , d'une onde composée de photons ordinaires (par exemple, un laser), à savoir

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

et exprimons là en termes d'états propres de propagation

$$\vec{E}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{E}_0 (\alpha V_1(0, 0) + \beta V_2(0, 0)) = \vec{E}_0 \left( \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -\epsilon \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \epsilon \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (5.39)$$

On trouve

$$\alpha = \frac{1}{1 + \epsilon^2} \text{ et } \beta = \frac{\epsilon}{1 + \epsilon^2}$$

et on peut écrire

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1 + \epsilon^2} (V_1(0) + \epsilon V_2(0))$$

Autrement dit, en présence de matière noire, le flux de photons ordinaires peut se transformer en un flux de dark photons. Classiquement, on peut exprimer cela en termes de rapport de flux d'intensités. D'un point de vue quantique, on exprimerait cela en termes de probabilités de transition. Nous utiliserons cette dernière terminologie.

Calculons alors la probabilité de passer d'un photon à un dark photon en supposant que  $\epsilon \ll 1$ . Pour cela, calculons d'abord  $\gamma$  et  $\delta$  tels que

$$\vec{E}' = \vec{E}'_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{E}'_0 (\gamma V_1(0, 0) + \delta V_2(0, 0)) \quad (5.40)$$

On trouve alors

$$\gamma = \frac{1}{1 + \epsilon^2} = \alpha \text{ et } \delta = \frac{-\epsilon}{1 + \epsilon^2} = -\beta$$

On peut alors écrire

$$\begin{pmatrix} \vec{E}/\vec{E}_0 \\ \vec{E}'/\vec{E}'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

En utilisant le développement  $\frac{1}{1+\epsilon^2} = 1 - \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4)$ , on obtient

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^4)$$

On peut à présent écrire

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}/\vec{E}_0 \\ \vec{E}'/\vec{E}'_0 \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

Ainsi que

$$\begin{aligned} \vec{E}'/\vec{E}'_0 &= -\beta V_1(z) + \alpha V_2(z) \\ &= -\beta \exp\{-ik_1 z\} V_1(0) + \alpha \exp\{-ik_2 z\} V_2(0) \\ &= -\beta \exp\{-ik_1 z\} \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \exp\{-ik_2 z\} \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \beta (e^{-ik_2 z} - e^{-ik_1 z}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où on a utilisé la condition initiale  $V_1(0) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $V_2(0) = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . La probabilité de transition est donnée par

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma'}(z) = \frac{|\vec{E}'(z)|^2}{|\vec{E}(0)|^2} = \frac{\vec{E}'_0^2 \alpha^2 \beta^2 |e^{-ik_2 z} - e^{-ik_1 z}|^2}{\vec{E}_0^2} \quad (5.43)$$

$$= \left( \frac{1}{1 + \epsilon^2} \right)^2 \left( \frac{\epsilon}{1 + \epsilon^2} \right)^2 |e^{-ik_2 z} - e^{-ik_1 z}|^2 \quad (5.44)$$

$$= (1 - \epsilon^2)^2 (1 - \epsilon^2)^2 \epsilon^2 |e^{-ik_2 z} - e^{-ik_1 z}|^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \quad (5.45)$$

$$= \epsilon^2 |e^{-ik_2 z} - e^{-ik_1 z}|^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \quad (5.46)$$

$$= 4\epsilon^2 \sin^2 \left( \frac{(k_2 - k_1)z}{2} \right) \quad (5.47)$$

où on a utilisé le fait que  $|e^{-ik_2 z} - e^{-ik_1 z}|^2 = 2 - 2 \cos(\Delta k z) = 4 \sin^2 \left( \frac{\Delta k z}{2} \right)$ .

La probabilité qu'un photon reste un photon est alors donnée par

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma}(z) = 1 - 4\epsilon^2 \sin^2 \left( \frac{\Delta k z}{2} \right) \quad (5.48)$$

Remarquons que

$$\Delta k = k_2 - k_1 = \omega \left( \sqrt{1 + \chi(1 + \epsilon^2)} - 1 \right)$$

ou encore, en utilisant que  $\chi$  et  $\epsilon$  sont des petits paramètres,

$$\Delta k \approx \frac{\omega \chi}{2}$$

Si la phase est plus petite que 1 (propagation sur une distance  $L$  petite par rapport à  $1/\Delta k$ ), alors la probabilité de transition entre un photon ordinaire et un photon dark est donnée par

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma'}(L) \approx \frac{\epsilon^2 \chi^2}{4} \omega^2 L^2$$

Elle est donc déterminée à la fois par le paramètre de mélange et par la présence de matière noire ; en l'absence de cette dernière, un photon ordinaire reste un photon ordinaire.

### Modèle jouet pour la matière noire

Pour être concret, regardons à présent la probabilité d'observer un photon émis par la source ayant traversé un cylindre de matière noire liée avec une fréquence propre  $\omega'_0$  :

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma}(z) = 1 - 4\epsilon^2 \sin^2(\chi \omega z / 2) \quad (5.49)$$

$$\text{avec } \chi = \frac{f^2 N_\chi}{m_\chi(\omega'^2_0 - \omega^2 - i\gamma\omega)} \quad (5.50)$$

Supposons comme source  $S$  un laser ayant une longueur d'onde de  $\lambda = 1064 \text{ nm}$ .<sup>2</sup> La fréquence  $\omega$  est alors donnée par

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \approx 1,8 \cdot 10^{15} \text{ rad s}^{-1} \quad (5.51)$$

Nous supposons également un détecteur  $D$  situé à une distance  $z = L = 7 \text{ m}$  (valeur de référence pour l'expérience *OSQAR* [3]).

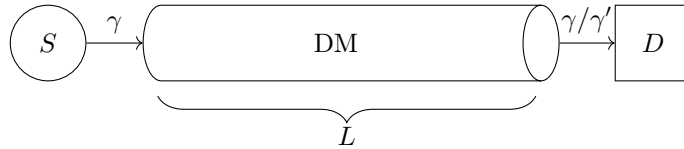


FIGURE 1 – Schéma d'une source  $S$  émettant de la lumière passant à travers de la matière noire  $DM$  vers un détecteur  $D$ .

Pour  $\chi \ll 1$ , on peut écrire l'approximation suivante :

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma}(z) \approx 1 - 4\epsilon^2 \sin^2\left(\frac{\omega z \chi}{2}\right) \quad (5.52)$$

$$\approx 1 - \epsilon^2 \omega^2 z^2 \frac{f^4 N_\chi^2}{m_\chi^2(\omega'^2_0 - \omega^2 - i\gamma\omega)^2} \quad (5.53)$$

$$= 1 - \epsilon^2 \omega^2 z^2 \frac{f^4 \rho_\chi^2}{m_\chi^2 M_\chi^2(\omega'^2_0 - \omega^2 - i\gamma\omega)^2} \quad (5.54)$$

où on a utilisé  $N_\chi = \rho_\chi / M_\chi$  et supposé, de manière analogue à la matière ordinaire, des « dark électrons » de masse  $m_\chi$  et des « dark protons » de masse  $M_\chi \approx 1 \text{ GeV}$ .

Ce qui nous intéresse étant  $\text{Re}\{P_{\gamma \rightarrow \gamma}\}$ , calculons sa partie réelle. Rappelons que  $\text{Re}\{z\} = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ . Pour un nombre complexe de la forme  $z = \frac{1}{(A - iB)^2}$ , on a

$$\text{Re}\{z\} = \frac{A^2 - B^2}{(A^2 + B^2)^2}$$

---

2. Similairement à l'expérience OSQAR

On trouve alors

$$\text{Re}\{P_{\gamma \rightarrow \gamma}\} = 1 - \epsilon^2 \omega^2 z^2 f^4 \rho_\chi^2 \frac{1}{m_\chi^2 M_\chi^2} \text{Re}\left\{ \frac{1}{(\omega_0'^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)^2} \right\} \quad (5.55)$$

$$= 1 - \epsilon^2 \omega^2 z^2 f^4 \rho_\chi^2 \frac{1}{m_\chi^2 M_\chi^2} \frac{(\omega_0'^2 - \omega^2)^2 - \gamma^2 \omega^2}{((\omega_0'^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2)^2} \quad (5.56)$$

La densité d'énergie de matière noire (supposée non-relativiste) est  $\rho_\chi^{\text{observée}} = 0.3 \text{ GeV}/\text{cm}^3$  [7]. On a donc  $N_\chi = 3 \cdot 10^5 \text{ m}^{-3}$ . Le coefficient d'amortissement  $\gamma$  typique peut se trouver dans la section 17 de [1]. Il est donné par  $\gamma = \frac{(4\pi)^5}{6} m_\chi \alpha^5$ .

Notre expression complète est donnée par

$$\text{Re}\{P_{\gamma \rightarrow \gamma}\} = 1 - \frac{\epsilon^2 \omega^2 z^2 f^4 \rho_\chi^2}{m_\chi^2 M_\chi^2} \frac{(\omega_0'^2 - \omega^2)^2 - \left\{ \frac{(4\pi)^5}{6} m_\chi \alpha^5 \right\}^2 \omega^2}{\left( (\omega_0'^2 - \omega^2)^2 + \left\{ \frac{(4\pi)^5}{6} m_\chi \alpha^5 \right\}^2 \omega^2 \right)^2} \quad (5.57)$$

Alternativement, on peut développer 5.52 sans faire d'approximation supplémentaire. En utilisant que  $\sin(z) = \sin(x + iy) = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y)$  et que  $\frac{1}{A - iB} = \frac{A}{A^2 + B^2} + i \frac{B}{A^2 + B^2}$ , on peut écrire

$$\text{Re}\{P_{\gamma \rightarrow \gamma}\} = 1 - 4\epsilon^2 \sin^2 \left( \frac{\omega z f^2 N_\chi}{2m_\chi} \frac{\omega_0'^2 - \omega^2}{(\omega_0'^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right) \cosh^2 \left( \frac{\omega z f^2 N_\chi}{2m_\chi} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0'^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right) \quad (5.58)$$

On prend également le couplage de  $U(1)_V$  comme étant égal à celui de  $U(1)_{\text{QED}}$  :  $f = e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ A s}$ . Les seuls paramètres libres qu'il nous reste sont  $\omega_0'$  et  $\epsilon$ .

### 5.2.1 Modèle hydrogénoïde

#### Fréquence et résonance

Nous supposons la matière noire constituée d'états liés similaires à des atomes d'hydrogène. On prend donc  $\omega_0' = 13,6 \text{ eV} = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ rad s}^{-1}$ . Pour ce choix de  $\omega_0'$ , la fréquence du laser définie en 5.51 ne permet pas d'obtenir un effet de résonance suffisamment important pour observer une variation de  $\text{Re}\{P_{\gamma \rightarrow \gamma}\}$ .

On suppose alors que la fréquence de laser a été ajustée afin de se rapprocher le plus possible de la fréquence de liaison. Ceci introduit un nouveau paramètre :

$$\Delta \triangleq \frac{\omega_0' - \omega}{\omega} \quad (5.59)$$

Dans les graphiques ci-dessous, on prend  $\Delta = 5 \cdot 10^{-5}$ .

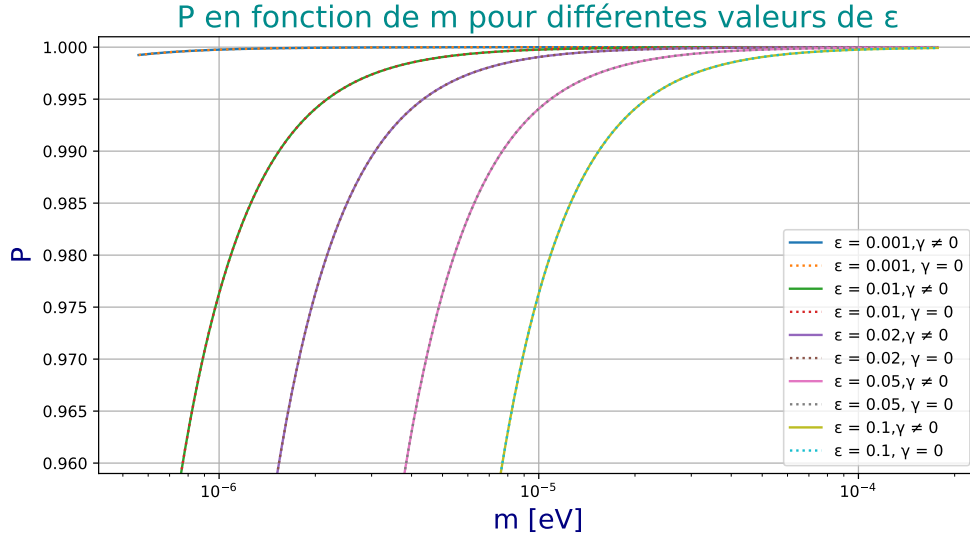


FIGURE 2 – Probabilité de survie 5.57 en fonction de  $m_\chi$  avec  $\Delta = 5 \cdot 10^{-8}$  dans l'approximation des petits angles, pour  $\gamma \neq 0$  et  $\gamma = 0$ .

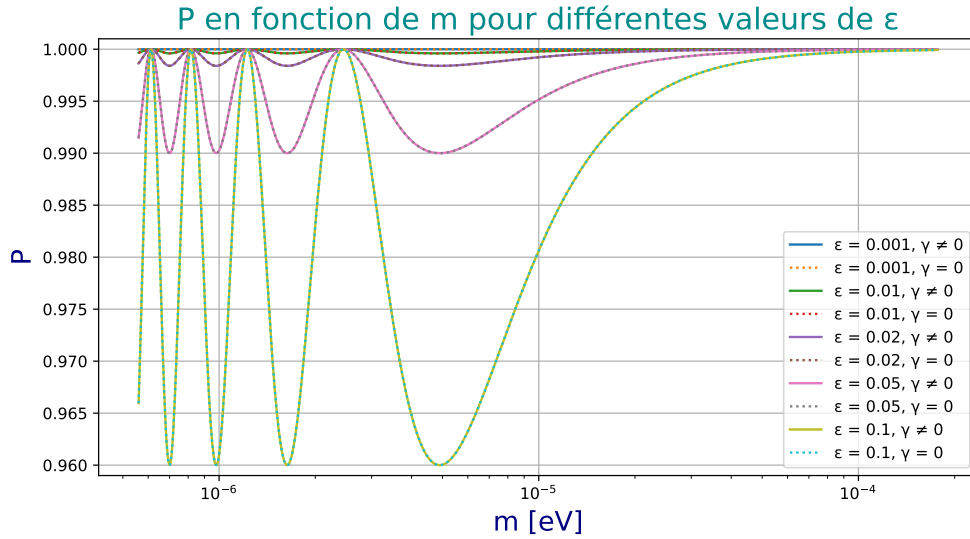


FIGURE 3 – Probabilité de survie 5.58 en fonction de  $m_\chi$  avec  $\Delta = 5 \cdot 10^{-8}$ , pour  $\gamma \neq 0$  et  $\gamma = 0$ .

On observe que la présence du coefficient d'amortissement  $\gamma$  est négligeable.

## Discussion

Nous pouvons tirer plusieurs conclusions à partir des graphiques 2 et 3.

1. Pour obtenir une variation de  $\text{Re}\{P_{\gamma \rightarrow \gamma}\}$  de l'ordre du pourcent, il faut un terme de mixage  $\epsilon \sim 10^{-1}$ , celui-ci apparaissant au carré dans nos expressions.
2. Pour obtenir une variation de  $\text{Re}\{P_{\gamma \rightarrow \gamma}\}$  de l'ordre du pourcent, il faut un effet de résonance important ( $\Delta \sim 10^{-5}$ ) et donc un ajustement précis de la fréquence du laser à la fréquence propre de la matière noire.
3. La gamme d'énergies sondées pour  $m_\chi$  est très faible :  $m_\chi \sim 10^{-5}$  eV. Il est cependant possible d'augmenter l'intervalle de masses sondées en ajustant la fréquence du laser  $\omega$

de façon à obtenir un effet de résonance important ( $\Delta \ll 1$ ). Il est également possible d'augmenter le paramètre  $z = L$ , par exemple à l'aide de dispositif de Fabry-Perot. Pour  $z \sim 10^3 m$ , les masses sondables sont de l'ordre de  $m_\chi \sim 10^{-3}$  eV. En combinant une distance parcourue par le laser de l'ordre du kilomètre avec un ajustement de sa fréquence tel que  $\Delta \sim 10^{-15}$ , on pourrait sonder des masses de l'ordre de 10 keV. Nous abordons cette implication dans la section 5.2.3

## 5.2.2 Modèle de plasma

### Fréquence et résonance

Prenons à présent la limite  $\omega'_0 \rightarrow 0$  et  $\gamma = 0$  dans 5.57 et 5.58. Le paramètre  $\Delta$  n'est plus pertinent. La fréquence du laser considérée ici est donc à nouveau celle de l'expérience *OSQAR* rappelée en 5.51.

L'expression de  $P_{\gamma \rightarrow \gamma}$  devient réelle avec  $\gamma = 0$  et s'exprime selon

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma, \text{ plasma}} = 1 - 4\epsilon^2 \sin^2 \left( \frac{z f^2 N_\chi}{2 m_\chi \omega} \right) \quad (5.60)$$

### Graphique

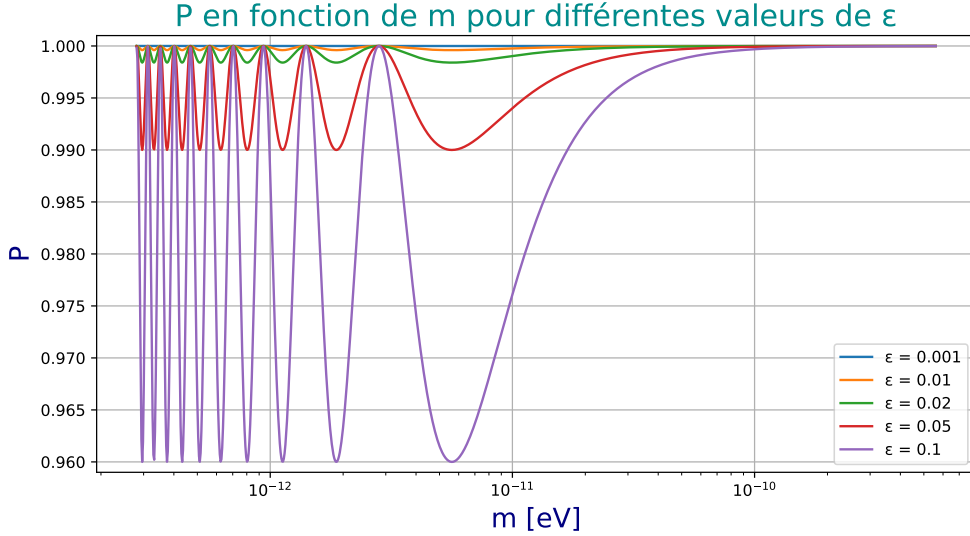


FIGURE 4 – Probabilité de survie en fonction de  $m_\chi$  pour le modèle du plasma.

### Discussion

Nous pouvons tirer plusieurs conclusions à partir du graphique 4.

1. Comme précédemment, l'amplitude de la variation de  $\text{Re}\{P_{\gamma \rightarrow \gamma}\}$  est déterminée par  $\epsilon^2$ .
2. En l'absence d'un phénomène de résonance, l'intervalle d'énergie des masses sondées est beaucoup plus faible :  $m_\chi \sim 10^{-11}$  eV.
3. En prenant  $z \sim 10^3$  m, l'intervalle sondé monte à  $m_\chi \sim 10^{-9}$  eV.

### 5.2.3 OSQAR et les modèles de matière noire

Les modèles actuels pour la matière noire proposent des intervalles de masse très variés : de  $10^{-24}$  eV pour les modèles de type *Ultralight Dark Matter* [8] à  $10^{12}$  eV pour les modèles de type *WIMPs*[9].

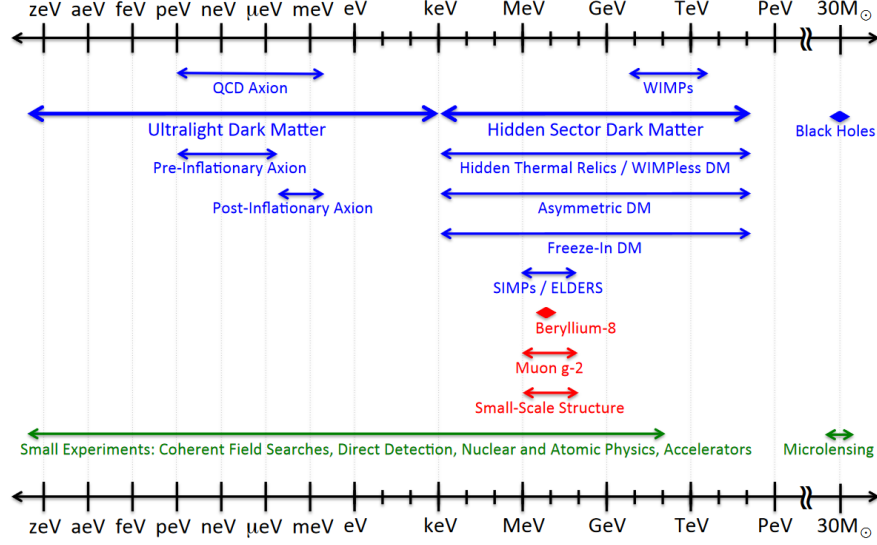


FIGURE 5 – Résumé de plusieurs particules candidates et leurs valeurs typiques de masse pour la matière noire [10].

En comparant les résultats des sections 5.2.1 et 5.2.2, on peut conclure qu’une expérience de type *OSQAR*, dans le cas du modèle étudié dans ce stage, pourrait sonder les intervalles de masse correspondant aux modèles les plus légers proposés : *Ultralight Dark Matter*, *QCD Axion* et *Pre/Post Inflationary Axion*.

Dans le cas du modèle hydrogénoïde, avec une augmentation de la longueur de propagation du laser et d’un paramètre  $\Delta \sim 10^{-15}$ , on pourrait au mieux espérer sonder les masses les plus légères prévues par les modèles de type *Hidden Sector Dark Matter*, *Asymmetric Dark Matter*, etc.



## 6 Conclusion

Dans ce stage, nous avons étudié les photons sombres et leurs interactions avec la matière noire.

Nous avons commencé par rappeler les fondamentaux de l'électrodynamique classique  $U(1)$ , en nous focalisant sur les équations de Maxwell et la propagation des ondes électromagnétiques dans différents milieux, y compris les plasmas et les diélectriques. Cela a posé les bases nécessaires pour aborder la théorie des photons sombres dans le cadre de l'électrodynamique  $U(1)_V \otimes U(1)_{\text{QED}}$ .

Nous avons ensuite travaillé le Lagrangien de  $U(1)_V \otimes U(1)_{\text{QED}}$  afin d'en extraire la dynamique des photons sombres et leurs interactions potentielles avec la matière.

Une partie importante de ce stage a été l'examen de l'impact de la matière noire sur la propagation des photons. Nous avons analysé la matrice de polarisation et étudié des scénarios spécifiques. En particulier, les modèles hydrogénoïde et de plasma ont été utilisés pour simuler l'interaction des photons avec des particules de matière noire.

Nos résultats indiquent que ces expériences peuvent potentiellement détecter des masses très légères de matière noire, comme celles prévues par les modèles d'*Ultralight Dark Matter* et de *QCD Axion*. En améliorant les configurations expérimentales, comme la longueur de propagation du laser ou l'ajustement de sa fréquence afin de profiter de résonance, il est possible d'explorer des gammes de masse plus étendues, correspondant à d'autres modèles de matière noire tels que le *Hidden Sector Dark Matter* et l'*Asymmetric Dark Matter*.

## Références

- [1] J. D. JACKSON. *Classical electrodynamics. 2.Ed.* Wiley, 1975.
- [2] WIKIPEDIA. *Covariant formulation of classical electromagnetism* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Covariant%20formulation%20of%20classical%20electromagnetism&oldid=1217723115>. [Online; accessed 01-June-2024]. 2024.
- [3] M. AHLERS et al. « Light from the hidden sector ». In : *Phys. Rev. D* 76 (2007), p. 115005. DOI : [10.1103/PhysRevD.76.115005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.115005). arXiv : [0706.2836](https://arxiv.org/abs/0706.2836) [hep-ph].
- [4] Haipeng AN, Maxim POSPELOV et Josef PRADLER. « New stellar constraints on dark photons ». In : *Physics Letters B* 725.4–5 (oct. 2013), p. 190-195. ISSN : 0370-2693. DOI : [10.1016/j.physletb.2013.07.008](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2013.07.008). URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2013.07.008>.
- [5] Thomas HAMBYE et al. « Dark matter from dark photons : A taxonomy of dark matter production ». In : *Physical Review D* 100.9 (nov. 2019). ISSN : 2470-0029. DOI : [10.1103/PhysRevD.100.095018](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.095018). URL : <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.100.095018>.
- [6] R. FOOT, A.Yu. IGNATIEV et R.R. VOLKAS. « Physics of mirror photons ». In : *Physics Letters B* 503.3–4 (mars 2001), p. 355-361. ISSN : 0370-2693. DOI : [10.1016/S0370-2693\(01\)00228-3](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(01)00228-3). URL : [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693\(01\)00228-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693(01)00228-3).
- [7] Gianfranco BERTONE, Dan HOOPER et Joseph SILK. « Particle dark matter : Evidence, candidates and constraints ». In : *Phys. Rept.* 405 (2005), p. 279-390. DOI : [10.1016/j.physrep.2004.08.031](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2004.08.031). arXiv : [hep-ph/0404175](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0404175).
- [8] Elisa G. M. FERREIRA. « Ultra-light dark matter ». In : *The Astronomy and Astrophysics Review* 29.1 (sept. 2021). ISSN : 1432-0754. DOI : [10.1007/s00159-021-00135-6](https://doi.org/10.1007/s00159-021-00135-6). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00159-021-00135-6>.
- [9] Leszek ROSZKOWSKI, Enrico Maria SESSOLO et Sebastian TROJANOWSKI. « WIMP dark matter candidates and searches—current status and future prospects ». In : *Reports on Progress in Physics* 81.6 (mai 2018), p. 066201. ISSN : 1361-6633. DOI : [10.1088/1361-6633/aab913](https://doi.org/10.1088/1361-6633/aab913). URL : <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aab913>.
- [10] Marco BATTAGLIERI et AL. *US Cosmic Visions : New Ideas in Dark Matter 2017 : Community Report*. 2017. arXiv : [1707.04591](https://arxiv.org/abs/1707.04591) [hep-ph].