

## Chapitre 1 : introduction

### I. Motivation

A l'origine, on voulait calculer des amplitudes QCD tq des interactions  $q-\bar{q}$



On a alors constaté que les équations étaient comme si le quark et l'antiquark étaient reliés par une corde. Les physiciens ont alors pris au sérieux l'idée et on fait des calculs. Il est alors apparu une particule sonne massive de spin 2 : le graviton!

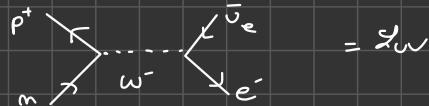
A l'époque l'existence du graviton n'avait pas raison d'être. Ce n'est que plus tard qu'est apparu la nécessité d'avoir un tel graviton dans nos théories afin d'expliquer gravitation et QFT.

De manière générale, lorsqu'on établit une théorie en physique, il faut pouvoir faire le lien entre haute et basse énergie.  
Par exemple, lorsque l'on regarde une interaction de Fermi à 4 champs :



La fonctionnelle à basse énergie mais diverge à haute

Il faut alors postuler l'existence d'une particule intermédiaire massive :



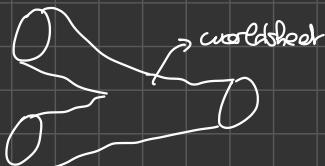
La théorie à haute énergie est cohérente avec celle à basse énergie car il suffit de prendre la limite à basse énergie de  $L_W$  :



Pour la gravité, cette stratégie ne marche pas car on a des vertex cubiques :



En théorie des cordes, ce genre d'interaction n'est plus traitée avec des particules ponctuelles et des lignes d'univers, mais avec des cordes et des surfaces d'univers.



## II. PHÉNOMÉNOLOGIE

Avec la théorie des cordes, on a gravité, champs de jauge et fermions chiraux. A priori, on a tout pour décrire la SM et la gravitation, ce qui mènerait à une théorie du tout.

↳ Problème : • pas le même nombre de fermion que HS ou pas exactement le même potentiel de Yukawa

• Sélections du vide permettant d'ajuster et corriger ces détails sont arbitraires.

## III. MATHÉMATIQUE PHYSIQUE

La théorie des cordes permet de résoudre des problèmes de maths que l'on n'arrivait pas à résoudre avant. Par exemple, elle a permis de démontrer l'existence d'une symétrie miroir pour certaines variétés différentielles 6-dimensionnelles.

## Chapitre 2 : particule pendulaire

esp. Mink en  
d-dim.

Considérons une particule libre qui se propage sur  $\mathbb{R}^{1, D-1}$ , avec

$$P_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1).$$

La particule libre va se déplacer le long d'une ligne d'univers paramétrée par le temps propre  $\tau$ . La  trajectoire de la particule sera donc décrite par les coord.

$$\text{(plongement)} \quad X^{\mu} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{1, D-1} \quad \tau \mapsto \underline{X^{\mu}(\tau)} \quad \mu = 0, \dots, D-1.$$

↓  
ligne d'univers      ↓  
espace cible

On travaille dans la jauge physique



$$\begin{aligned} X^0(\tau) &= \tau \\ \hookrightarrow \text{la part. perçoit} & \\ \text{"1sec / 1sec"} & \end{aligned}$$

$$\implies$$



L'action associée est

$$S = -m \int d\tau \sqrt{1 - \|\dot{x}\|^2}$$

avec  $\dot{x} = (x^1, \dots, x^{D-1})$  et  $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ .

Si on prend la limite non-relativiste ( $\|\dot{x}\| \ll 1$ ), on vit de la jauge physique et

$$S \approx -m \int d\tau \left\{ -1 + \frac{1}{2} \|\dot{x}\|^2 + \dots \right\}$$

et les éqns d'Euler-Lagrange sont donc

$$\frac{d}{d\tau} (m \dot{x}^i) = 0 \quad \forall i$$

On définit la quantité de mv<sup>i</sup> conjuguée

$$\bar{p}^i = \frac{m \dot{x}^i}{\sqrt{1 - \|\dot{x}\|^2}}$$

et on a l'hamiltonien

$$H = \sum_i p^i \dot{x}^i - \mathcal{L} = \frac{m}{\sqrt{1 - \|\dot{x}\|^2}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{m^2 + \|\bar{p}\|^2}.$$

Prenons une jauge plus générale :

$$\mathcal{S} = -m \int d\tau \cdot \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu \eta_{\mu\nu}}$$

où  $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ . Alors

$$p^\mu = \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \dot{x}^\mu} = \frac{m \dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu}}{\sqrt{-\dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma \eta_{\rho\sigma}}}$$

et on a

$$p^\mu p_\mu + m^2 = 0$$

avec  $(p^\mu)^2 \geq m^2$  pour avoir une propagation causale.

## I. SYMÉTRIES DE L'ACTION

L'action d'une particule ponctuelle possède 2 symétries :

- Symétrie de Poincaré sur le target space :

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu + c^\mu$$

avec  $\int \Lambda^\mu_\nu \eta^{\nu\rho} \Lambda^\sigma_\rho = \eta^{\mu\sigma}$   
 $c^\mu$  sont des vecteurs constants = translation dans l'espace-temps.

- Invariance par reparamétrisation / difféo sur la ligne d'univers :

$$\tau \rightarrow \tilde{\tau}(\tau)$$

où  $\tilde{\tau}(\tau)$  est monotone (on ne veut pas inverser le temps au cours de la trajectoire).

C'est une symétrie parce que

$$\left| \begin{array}{l} d\tau = d\tilde{\tau} \left( \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} \right)^{-1} \\ \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tilde{\tau}} \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} \end{array} \right. \Rightarrow \mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}} \quad \textcircled{Q}$$

Cette invariance explique pourquoi on peut prendre la jauge physique : on peut réabsorber  $x^0$  en posant

$$\tilde{\tau} = x^0(\tau).$$

Dans un espace cible à  $(0+1)$ -dimensions, cette invariance constitue un principe de covariance générale ( $x^\mu$  sont des champs scalaires lorsque l'on considère la pdv de la ligne d'univers  $(0+1)d$ ).

→ théorie compatible avec la gravitation à  $1d$ .

## II. COMPARAISON MQ ET QFT

### Mécanique quantique

- Variable :  $t$

Opérateurs :  $\hat{x}^i(t)$ ,  $\hat{p}^i(t)$ ,  $\hat{H}(\hat{x}^i, \hat{p}^i)$

Fonction d'onde :  $\psi(x^i, t)$  tq  $i \frac{d\psi}{dt} = H\psi$

$\rightarrow$  MQ est une QFT à  $(0+1)$ -dimension

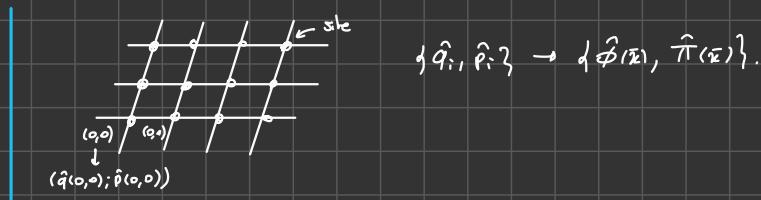
### Théorie quantique des champs

- Variable :  $x^m$

$(3-1) + 1$  dimensions

- Opérateur :  $\hat{\phi}(x^m)$

Si on discrétise l'espace, on observe que la QFT est une copie de la MQ en chaque point, car l'on a pris la limite continue



### Intégrale de chemin

Les deux théories peuvent se reformuler dans le formalisme des intégrales de chemins :

$$\begin{aligned} \text{MQ : } Z &= \int Dq^i(\tau) \cdot e^{i \int [q^i, \dot{q}^i] \dots} \\ \text{QFT : } Z &= \int D\phi^i(x^m) \cdot e^{i \int [\phi^i, \partial_m \phi^i]} \end{aligned}$$

## III. EINSTEIN

L'action que nous avons introduite précédemment

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^m \dot{x}^n \eta_{mn}}$$

possède 2 problèmes :

- La racine rend compliquée la quantification
- Si  $m=0$ ,  $S=0 \rightarrow$  on ne peut rien faire.

La solution est d'introduire un champ auxiliaire  $e(\tau)$  tq

$$S = \frac{1}{e} \int d\tau \cdot \left\{ e^{-1} \dot{x}^m \dot{x}^n \eta_{mn} - e \cdot m^2 \right\}$$

$e = \text{multiplicateur de Lagrange}$

Les EOT sont alors

$$\cdot X^m : \frac{d}{d\tau} (e^{-\tau} X^m) = 0$$

$$\cdot e : \dot{X}^m \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu} + e^z m = 0 \quad (\text{éq dans forme chélique} \rightarrow \text{EOT algébriques})$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\substack{\text{métrique du} \\ \text{target space}}} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{m \dot{X}^m}{\sqrt{-\dot{X}^z}} \right) = 0 \quad (\text{théorie } \supseteq \text{ la précédente}) \\ & \text{avec } \dot{X}^z = \dot{X}^m \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}. \quad \xrightarrow{\substack{\text{éq rela. de munt} \\ \text{pour une part.}}} \end{aligned}$$

Lorsque  $m=0$ , on a

$$S \neq 0 \text{ et } \dot{X}^z = 0 \quad (\text{projection de l'hyperlumière}).$$

### Interprétation

Le champ  $e(\tau)$  peut être vu comme un einbein :

$$e^z = g_{zz} \quad \xrightarrow{\substack{\text{métrique pour la ligne d'univers} \\ \text{metr. invar. si difféo.}}}$$

et l'action est

$$S = -\frac{1}{2} \int d\tau \sqrt{-g^{zz}} \left( g^{zz} \frac{dx^m}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \eta_{\mu\nu} + m^z \right)$$

On a donc introduit une théorie de la gravitation 1d pour résoudre le problème.

Les EOT sont

$$X^m : \frac{d}{d\tau} \left( \sqrt{-g^{zz}} g^{zz} \frac{dx^m}{d\tau} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \square_{\text{eucl.}} X^m(\tau) = 0$$

On a toujours l'invariance sous reparam. et on a une théorie qui a la covariance générale. On peut voir la particule ponchelle comme une QFT à 0+1d avec des champs scalaires de type K-G et grande quantique.

J'en parle de l'intégrale de chemin,

$$Z = \int \mathcal{D}X^m(\tau) \mathcal{D}g^{zz}(\tau) e^{iS_1(X^m, g^{zz})}$$

$$= \int \mathcal{D}X^m(\tau) e^{iS_2(X^m)}$$

$\rightarrow$  correspondance entre  $S_1$  et  $S_2$  (équivalence).

$\hookrightarrow$  d'-scalaires (K-G) + gravité (X<sup>m</sup>) (g<sub>zz</sub>)

### Chapitre 3 : corde classique

Pour une corde, on ajoute 1 dimension tq

$$X^{\mu} : \Sigma_g \rightarrow \mathbb{R}^{1, d-1} \quad X^{\mu} = X^{\mu}(\tau, \sigma)$$

avec  $\Sigma_g = \begin{cases} \mathbb{R} \times S^1 & (\text{corde fermée}) \\ \mathbb{R} \times [0, \pi] & (\text{corde ouverte}) \end{cases}$ , une surface de Riemann.

Il s'agit d'une QFT à  $(1+1)$ -dimension pour laquelle on va minimiser une surface relativiste.

#### I. Action de Nambu - Goto

En partant de cette idée de minimisation de surface, on peut alors définir l'action de N-G

$$S_{NG} = -T \int d\sigma d\tau \sqrt{-\det \gamma}$$

où  $T$  est la tension de la corde (énergie/lg) et la métrique induite est celle d'un esp.  $\mathbb{R}^{1, d-1}$   
 = conste

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma^{\alpha}} \cdot \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \sigma^{\beta}} \eta_{\mu\nu}$$

avec  $\sigma^0 = \tau$  et  $\sigma^1 = \sigma$ . Comme la tension est un paramètre finie, + il y a d'énergie, + la corde est grande.



petite masse



grande masse

Afin de minimiser l'énergie potentielle, la corde aura tendance à se réduire en taille. Si  $T \rightarrow 0$ , il y a collapse de la corde.

↪ comme "collapse" de l'action pour  $m \rightarrow 0$   
 ⇒ introduit un chps aux.

#### II. Action de Polyakov

Tout comme avec la particule, l'action de Nambu - Goto pose problème à cause de la racine. Il est alors utile d'introduire un champ auxiliaire :  $g_{\alpha\beta}$

$$S_{\text{Pol.}} = -\frac{1}{4\pi T} \int d\sigma d\tau \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} \eta_{\mu\nu}$$

où  $T = \frac{1}{4\pi \tilde{\epsilon}}$ .  
 conste de couplage

On a alors introduit un champ de gravité en 2d. Dans le formalisme de l'intégrale de chemin, on a

$$Z = \int \downarrow \partial X^{\mu} Dg_{\alpha\beta} e^{i S_{\text{Pol.}}} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \text{3 champs scalaires} \end{matrix} \quad \begin{matrix} i S_{\text{Pol.}} \\ \text{gravité en 2d} \end{matrix}$$

Ici, il s'agit d'une théorie de la gravité topologique, se elle ne contient pas de termes chotiques de type

$$\int \sqrt{-g} \cdot R_{2d}(g_{\alpha\beta}).$$

Cela dit que

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0$$

est une analogie en 2d.

Les EoM sont

- $\frac{\delta S}{\delta x^\mu} = 0 \Leftrightarrow \partial_\alpha (\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta} \partial_\beta x^\mu) = 0$
- $\Leftrightarrow \boxed{\square_{2d,g} x^\mu = 0}$  *à cause en 2d*

- $\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{T_{\alpha\beta} = 0} \quad \text{car } G_{\mu\nu} = 0$  *éq d'Einstein en 2dms.*

où  $T_{\alpha\beta} = -\frac{g}{\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}}$ . On a donc

$$T_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \partial_\mu x^\rho \partial_\nu x^\sigma) \eta_{\mu\nu} = 0$$

$$\Leftrightarrow g_{\alpha\beta} = f(\tau, \varepsilon) \cdot (\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu) \eta_{\mu\nu}$$

$\rightarrow$  contrainte algébrique sur  $g_{\alpha\beta}$  (*car pas de terme chotique*)

### Symétries de l'action

- Poincaré sur le target space (symétrie interne)

$$x^\mu(\tau, \varepsilon) \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu(\tau, \varepsilon) + c^\mu \quad \text{c'est Poincaré si } d=96$$

Du point de la worldsheet  $(\tau, \varepsilon)$ , il s'agit d'une symétrie interne sur les champs ( $\equiv$  symétrie de valeur)

- Reparamétrisation / difféomorphisme (symétrie d'espace-temps)

$$\tau \rightarrow \tilde{\tau}(\tau, \varepsilon)$$

Il s'agit d'une symétrie d'espace-temps en  $(1+1)$ -dim. En particulier, comme  $\tilde{\tau} \tau$  est une fact que, il s'agit du principe de covariance générale à 2d ! Si on était dans N-G, on n'aurait pas ça car on a pas de métrique dynamique.

Cette Ifo  $\Rightarrow$

$$g_{\alpha\beta}(\tau, \varepsilon) \rightarrow \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{\tau}, \tilde{\varepsilon}) = \frac{\partial \tilde{\tau}^\gamma}{\partial \tau^\alpha} \cdot \frac{\partial \tilde{\tau}^\delta}{\partial \varepsilon^\beta} g_{\gamma\delta}(\tau, \varepsilon)$$

$$x_\mu(\tau, \varepsilon) \rightarrow \tilde{x}_\mu(\tilde{\tau}, \tilde{\varepsilon}) = x_\mu(\tilde{\tau}, \tilde{\varepsilon})$$

$$\partial_\alpha x^\mu(\tau, \varepsilon) \rightarrow \tilde{\partial}_\alpha x^\mu(\tilde{\tau}, \tilde{\varepsilon}) = \frac{\partial \tilde{\tau}^\beta}{\partial \tau^\alpha} \cdot \partial_\beta x^\mu(\tau, \varepsilon)$$

• Invariance de Weyl (symétrie intérieure)

$$g_{\alpha\beta}(\sigma) \rightarrow \Omega^2(\sigma) g_{\alpha\beta}(\sigma) \quad \text{et} \quad \Omega \sim L^d \cdot e^{-2} \text{ ds metriche lors } g^{ab} \text{ inverse de } g_{ab}$$

et

$$\begin{cases} \sigma^\alpha & \rightarrow \sigma^\alpha \\ x^\alpha & \rightarrow x^\alpha \end{cases}$$

avec  $\Omega^2(\sigma)$  une fonction scalaire arbitraire positive (pour ne pas changer la signature). Il s'agit d'une symétrie intérieure spécifique au cas à 2d. En effet,

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} &\rightarrow \Omega^d \sqrt{-g} \\ g^{\alpha\beta} &\rightarrow \Omega^{-2} g^{\alpha\beta} \end{aligned} \Rightarrow \Omega^d \Omega^{-2} = 1 \quad \text{si } d=2.$$

L'invariance de Weyl mène à

$$T^\alpha_\alpha = 0,$$

si  $d=2$ . En effet,

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \partial_\rho x^\mu \partial_\sigma x^\nu \eta_{\mu\nu} \\ \Rightarrow T^\alpha_\alpha &= g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = (\partial x)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (\partial x)^2 = 0 \end{aligned} \quad \square$$

### III. TRANSFORMATIONS CONFORMES

Une IFO conforme est un difféo la

$$\sigma^\alpha \rightarrow \tilde{\sigma}^\alpha(\sigma)$$

$$g^{\alpha\beta} \rightarrow \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{\sigma}) = \Omega^2(\sigma) g_{\alpha\beta}(\sigma)$$

où  $\Omega^2(\sigma)$  est le facteur conforme. Elle fixe les angles mais pas les distances (la projection stéréo.)

Si on a l'invariance par reparamétrisation et l'invariance de Weyl, on a l'invariance conforme.

Pour la gravité à 2d, cette invariance a deux conséquences sur les ddfl de  $g_{\alpha\beta}$ :

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{pmatrix} \quad \text{avec } g_{01} = g_{10} \quad \rightarrow 3 \text{ ddfl} \\ + \\ \text{reparam. : } g_{\alpha\beta} &\rightarrow g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \varepsilon_\beta + \partial_\beta \varepsilon_\alpha \quad (\sigma^\alpha \rightarrow \sigma^\alpha + \varepsilon^\alpha(\sigma)) \rightarrow \text{absorb 2ddfl localement} \\ + \\ \text{Weyl : } g_{\alpha\beta} &\rightarrow \Omega^2(\sigma) \cdot g_{\alpha\beta} \quad \rightarrow \text{absorb 1ddfl} \\ \rightarrow \text{la metriche a 0 ddfl.} \end{aligned}$$

Localement, en 2d, il est toujours possible de trouver un diffon et une ffo de Weyl tq

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow \mathcal{L}^2(\sigma) \eta_{\alpha\beta} \quad \text{métrique conformément plate}$$

$$\mathcal{L}^2(\sigma) \eta_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}.$$

Ans, en 2d, l'espace-temps est toujours localement plat.

→ conséquence : découplage de la gravité en 2d.

diffon = ffo de jauge

En effet,

$$\begin{aligned} Z &= \int dx^\mu \partial g_{\alpha\beta} e^{S_{\text{Ric}}(x^\mu, g_{\alpha\beta})} \\ &= \int DX^\mu \partial g_{\alpha\beta} e^{S_{\text{Ric}}(X^\mu)} \\ &= \int \partial g_{\alpha\beta} \int DX^\mu e^{S_{\text{Ric}}(X^\mu)} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} ; S_{\text{Ric}}(x^\mu, g_{\alpha\beta}) \\ \downarrow \text{ffo conforme} \end{array}$$

où l'on a effectué une ffo conforme tq

$$S_{\text{Ric}} \rightarrow S_{\text{Ric}} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\sigma X^\mu \partial_\mu X^\nu \eta_{\alpha\beta}$$

et ça ressemble aux champs scalaires libre sans masse de K-G :

$$-(\partial_\sigma X^\mu) \partial^\sigma X^\mu + \sum_i \partial_\sigma X^i \partial^\sigma X^i.$$

## IV. ÉQUATIONS DU MOUVEMENT (corde fermée)

Klein-Gordon

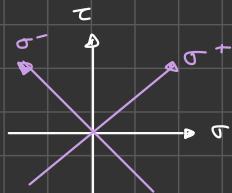
On a

$$\square X^\mu = 0 \iff \partial_\sigma \partial^\sigma X^\mu = 0 \iff (-\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2) X^\mu = 0. \quad \rightarrow \text{sol. sont des fons formo.}$$

$\partial_\sigma = \partial_{\alpha\beta}$

On passe aux coordonnées du cône de lumière

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$$



et les éqs de K-G deviennent

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0.$$

Les solutions sont du type

$$X^\mu(\sigma^+, \sigma^-) = X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-). \quad (\text{left \& right mover})$$

Pour une corde fermée, on a

$$X^\mu(\sigma + 2\pi, \tau) = X^\mu(\sigma, \tau)$$

On décompose les solutions en modes de Fourier

$$\begin{cases} X_L^{\mu}(\sigma^+) = \sum_m \tilde{c}_m^{\mu} e^{-im\sigma^+} + \tilde{k}\sigma^+ \\ X_R^{\mu}(\sigma^-) = \sum_m c_m^{\mu} e^{-im\sigma^-} + k\sigma^- \end{cases}$$

et la périodicité impose ( $\sigma^+ + \sigma^- = \omega$ )

$$\tilde{k} = k.$$

On a donc

$$\partial_{-} X(\sigma^-) = \sqrt{\alpha'} \sum_m \alpha_m e^{-im\sigma^-} ; \quad \partial_{+} X(\sigma^+) = \sqrt{\alpha'} \sum_m \tilde{\alpha}_m e^{-im\sigma^+}$$

en renommant les constantes et

$$\begin{cases} X_L^{\mu}(\sigma^+) = \frac{1}{2} x^{\mu} + \frac{1}{2} \alpha' p^{\mu} \sigma^+ + i \sqrt{\frac{\alpha'}{g}} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \tilde{\alpha}_m^{\mu} e^{-im\sigma^+} \\ X_R^{\mu}(\sigma^-) = \frac{1}{2} x^{\mu} + \frac{1}{2} \alpha' p^{\mu} \sigma^- + i \sqrt{\frac{\alpha'}{g}} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \alpha_m^{\mu} e^{-im\sigma^-} \end{cases}$$

où  $x^{\mu}$ ,  $p^{\mu}$ ,  $\alpha_m^{\mu}$  et  $\tilde{\alpha}_m^{\mu}$  sont des constantes pour que les champs soient réels :

↓  
oscillateurs

$$(\alpha_m^{\mu})^* = \alpha_{-m}^{\mu} \quad \text{et} \quad (\tilde{\alpha}_m^{\mu})^* = \tilde{\alpha}_{-m}^{\mu}.$$

On a

$$X^{\mu} = x^{\mu} + \alpha' p^{\mu} \tau$$

Si  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha} = 0$

$$\rightarrow x^{\mu} = \text{position du CR} \quad \text{et} \quad p^{\mu} = \text{impulsion.}$$

## Équations d'Einstein

Dans les coordonnées du cône de lumière,

$$\begin{cases} T_{++} = (\partial_{+} X^{\mu})(\partial_{+} X^{\nu}) \eta_{\mu\nu} \\ T_{--} = (\partial_{-} X^{\mu})(\partial_{-} X^{\nu}) \eta_{\mu\nu} \\ T_{+-} = T_{-+} = 0 \quad \text{holographie en 2d du fait que sans trace} \end{cases}$$

On a

$$d\tau = \frac{d\sigma^+ + d\sigma^-}{2} ; \quad d\omega = \frac{d\sigma^+ - d\sigma^-}{2}$$

$$\Rightarrow d\tau^2 = -d\sigma^+ d\sigma^-$$

$$\Rightarrow g_{+-} = g_{-+} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad g_{++} = g_{--} = 0$$

$$\Rightarrow T^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 0 \iff -T_{+-} = 0.$$

Les équations sont donc

$$\begin{cases} T_{++} = 0 \\ T_{--} = 0 \end{cases}$$

Ainsi,

- $T_{--} = (\partial_- X)^2 = \alpha' \sum_m L_m e^{-im\sigma^-} = 0$

or  $L_m = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^m \alpha_m^{\circ} \eta_{mu}$  et  $\alpha_0^m = \sqrt{\frac{\alpha'}{g}} p^m$ .

- $T_{++} = (\partial_+ X)^2 = \alpha' \sum_m \tilde{L}_m e^{-im\sigma^+} = 0$

or  $\tilde{L}_m = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_m^m \tilde{\alpha}_m^{\circ} \eta_{mu}$  et  $\tilde{\alpha}_0^m = \sqrt{\frac{\alpha'}{g}} p^m$ .

$$\Rightarrow [L_m, \tilde{L}_m = 0 \quad \forall m] \quad \text{constantes physiques}$$

### Interprétation physique des solutions

• On a

$$X^m = x^m + \alpha' p^m \tau \quad (\text{Mé})$$

Si  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha} = 0$

$\rightarrow x^m = \text{position du CR}$  et  $p^m = \text{impulsion}$ .

•  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha}$  = oscillateurs et

$$X_L^m (\sigma^+) = \text{left mover cor} \quad \sigma^+ = \tau + \sigma \quad \Rightarrow \quad x_L^m \propto e^{-im\sigma} = e^{-im\tau}$$

$$X_R^m (\sigma^-) = \text{right mover cor} \quad \sigma^- = \tau - \sigma \quad \Rightarrow \quad x_R^m \propto e^{im\sigma} = e^{im\tau}.$$



• On a

$$L_0 = 0 \Leftrightarrow -p^m p_m = \frac{4}{\alpha'} \sum_{m \neq 0} \alpha_m \cdot \alpha_{-m} = M^2$$

$$\tilde{L}_0 = 0 \Leftrightarrow -p^m p_m = \underbrace{\frac{4}{\alpha'}}_{\sim \tau} \underbrace{\sum_{m \neq 0} \tilde{\alpha}_m \cdot \tilde{\alpha}_{-m}}_{\text{# oscillateurs}} = M^2$$

En fonction de l'état vibratoire de la corde, on a des masses différentes:

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} \cdot \sum_{m \neq 0} \alpha_m \cdot \alpha_{-m}$$

La corde n'a pas de fil fixe mais une tension fixe. Tous les bosons ont la même corde.

$$[\tau] = \frac{E}{L} = E^2 = \frac{1}{L^2} \quad \text{et} \quad \tau \propto \frac{1}{\alpha'} \Rightarrow [\alpha'] = L^2$$

Réécrivons les éqs d'Einstein dans les coord ( $\tau, \sigma$ ) .

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X \partial_\beta X - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho X \partial_\sigma X$$

$$\Rightarrow T_{00} = \dot{X}^2 - \frac{1}{2} (-\ddot{X}^2 + \dot{X}'^2)$$
$$= \frac{\dot{X}^2 + \dot{X}'^2}{2}$$

$$\text{avec } \dot{X} = \frac{dX}{d\tau} ; \quad X' = \frac{dX}{d\sigma}$$

$$\Rightarrow T_{11} = \frac{\dot{X}^2 + \dot{X}'^2}{2} = T_{00}$$

$$\Rightarrow T_{0n} = T_{n0} = \dot{X} \cdot X'$$

Les éqs d'Einstein sont alors

$$\begin{cases} \dot{X}^2 + \dot{X}'^2 = 0 & (1) \\ \dot{X} \cdot X' = 0 & (2) \end{cases}$$



Si on fait le choix de jauge  $X^0(\tau, \sigma) = \tau$ , (2)  $\Leftrightarrow$  vibrations de la cordes sont uniquement transverses

## Chapitre 4: la corde quantique

### I. OLD COVARIANT WAY

On prend  $X^m$  et  $\Pi^m$  comme opérateurs avec

$$[\hat{X}^m(\sigma, \tau), \hat{\Pi}_j(\sigma', \tau')] = i \delta(\sigma - \sigma') \delta^m{}_j.$$

et  $\delta(\sigma - \sigma') = \frac{1}{2\pi} \sum_m e^{im(\sigma - \sigma')}$  et

$$[x^m, p_j] = i \delta^m{}_j ; \quad [\tilde{x}_m^m, \tilde{x}_n^n] = m \eta^{mn} \delta_{m+n,0}$$

On définit alors des opérateurs de création et annihilation

$$\alpha_m^m = \frac{\alpha_m^m}{\sqrt{m}} \quad \text{et} \quad \alpha_m^m = \frac{\alpha_n^m}{\sqrt{n}} \quad m > 0$$

On a l'espace de Fock

$$\alpha_m^m |0, \rho\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}_n^m |0, \rho\rangle = 0$$

:

$$(\alpha_{-n}^m)^{m_1} (\alpha_{-n}^{m_2})^{m_2} \dots (\tilde{\alpha}_{-n}^{m_n})^{m_n} (\tilde{\alpha}_{-n}^{n_1})^{n_1} \dots |0, \rho\rangle \quad (\alpha_{-n})^* \neq \alpha_{-n}$$

Le problème avec cette espace de Fock est que la norme n'est pas d.p. Cela vient du fait que l'on a construit les rel. de commutation avec  $\eta^{mn}$ :

$$[\alpha_m^m, \alpha_n^+]=m \cdot \eta^{mn} \delta_{m,n}$$

Certains états ont une norme négative:

$$\|\alpha_{-n}^0 |0, \rho\rangle\|^2 = \langle 0, \rho | \underbrace{\alpha_{-n}^0 \alpha_{-n}^0}_{=1} |0, \rho\rangle = \text{ghosts} \quad (\text{se supprime via les contraintes de fixation de jauge})$$

### II. LIGHT-CONE QUANTIZATION

On se place dans les coord. du cône de lumière

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{g^+}} (X^0 \pm X^{D-1})$$

et dans l'espace cible, la métrique est

$$ds_+^2 = -2dX^+ dX^- + \sum_{i=1}^{D-2} dX^i dX^i$$

et le produit scalaire est

$$A^\mu B_\mu = -A^+ B^- - A^- B^+ + \sum_{i=1}^{D-1} A^i B^i.$$

On exploite l'invariance sous reparamétrisation

$$\sigma^+ \rightarrow \tilde{\sigma}^+(\sigma^+) \quad ; \quad \sigma^- \rightarrow \tilde{\sigma}^-(\sigma^-)$$

e)

$$ds_{2d}^2 = - d\sigma^+ d\sigma^- \xrightarrow{\text{diffes}} - \eta^2 d\tilde{\sigma}^+ d\tilde{\sigma}^- \xrightarrow{\text{Weyl}} - d\tilde{\sigma}^+ d\tilde{\sigma}^-$$

abaisse le facteur conforme

Les solutions étant du type

$$\begin{cases} X^+ = X_L^+(\sigma^+) + X_R^+(\sigma^-) \\ X^- = X_L^-(\sigma^+) + X_R^-(\sigma^-) \end{cases}$$

on peut choisir  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  tq

$$\begin{cases} X_L^+ = \frac{1}{2} x^+ + \frac{\alpha'}{2} p^+ \tilde{\sigma}^+ \\ X_R^+ = \frac{1}{2} x^+ + \frac{\alpha'}{2} p^+ \tilde{\sigma}^- \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\alpha'}{2} p^+ \tilde{\sigma}^+ = \frac{\alpha'}{2} p^+ \sigma^+ + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_m \alpha_m^- e^{-im\sigma^+}$$

$$\Rightarrow X^+ = x^+ + \alpha' p^+ \tau \quad \text{jauge du lightcone}$$

Comme  $\tilde{\sigma}^+$  et  $\tilde{\sigma}^-$  ont déjà été fixés, on ne peut pas faire la même chose pour  $X^-$ .

Par ailleurs les éqns d'Einstein sont

$$\begin{cases} (\partial_+ X)^i = 0 \\ (\partial_- X)^i = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\partial_+ X^- \partial_+ X^+ = \sum_{i=1}^{D-2} (\partial_+ X^i)^2 \quad \text{cf produit scalaire}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_+ X_L^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \cdot \sum_{i=1}^{D-2} (\partial_+ X^i)^2 \\ \partial_- X_R^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \cdot \sum_{i=1}^{D-2} (\partial_+ X^i)^2 \end{cases}$$

et on décompose les modes de Fourier, on a

$$\alpha_m^- = \sqrt{\frac{1}{2\alpha'}} \cdot \frac{1}{p^+} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{D-2} \alpha_{m,i}^i \alpha_{m,i}^i$$

→ on a éliminé les redondances à l'aide des contraintes et on a

2. (D-2) oscillateurs à prendre en compte  
 ↗ ↘  
 L ou R      directions ⊥ à la worldsheet (oscillato transverse)

En fixant cette jauge, on choisit une direction particulière de temps et d'espace ( $X^\pm$ ). Par conséquent, l'invariance de Lorentz est perdue → calcul impliquant  $X^\pm$ .

## Règles de quantification

On a

$$[\hat{u}^i, \hat{p}^j] = i\delta^{ij} \quad ; \quad [\hat{x}^i, \hat{p}^j] = -i \quad ; \quad [\hat{x}^i, \hat{x}^j] = 0$$

$$[\alpha_m^i, \alpha_n^j] = m\delta^{ij}\delta_{m+n,0} \quad , \quad [\tilde{\alpha}_m^i, \tilde{\alpha}_n^j] = n\delta^{ij}\delta_{m+n,0}$$

De plus, il faut prendre en compte les contraintes classiques

$$L_m = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{L}_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Naïvement, on pourrait imposer

$$\hat{L}_m |4\rangle = 0 \quad ; \quad \tilde{L}_n |4\rangle = 0$$

Cependant, cela est trop contraignant et mène à des incohérences. Il est préférable d'imposer

$$\langle 4_i | \hat{L}_m | 4_j \rangle = 0.$$

et on prend

$$\hat{L}_m |\text{phys}\rangle = 0 \quad \forall m < 0 \quad \text{et} \quad \tilde{L}_n^+ = \tilde{L}_{-n}$$

En ce qui concerne  $L_0$ , on a

$$L_0 = \sum_{m>0} \alpha_m \cdot \alpha_{-m} \quad \rightarrow \text{ambiguité sur l'ordre car } \alpha_m \text{ et } \alpha_{-m} \text{ ne commutent pas}$$

On paramètre notre ignorance

$$\begin{cases} (L_0 - \alpha) |\text{phys}\rangle = 0 \\ (\tilde{L}_0 - \alpha) |\text{phys}\rangle = 0 \end{cases}$$

La formule de masse devient

$$\frac{\alpha'}{4} \gamma^0 = \underbrace{\sum_{m=-n}^n \tilde{\alpha}_{-m} \cdot \tilde{\alpha}_m}_{\tilde{N}} - \alpha$$

$$\Rightarrow (L_0 - \tilde{L}_0) |\text{phys}\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow (N - \tilde{N}) |\text{phys}\rangle = 0 \quad \text{level-matching cond.}$$

et

$$\gamma^0 = \frac{4}{\alpha'} (N - \alpha) = \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N} - \alpha)$$

Classiquement, on a

$$\frac{1}{2} \sum_{m>0} \alpha_{-m}^i \cdot \alpha_m^i = \frac{1}{2} \sum_{m>0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \frac{1}{2} \sum_{m>0} \alpha_{-n}^i \alpha_m^i$$

et on veut le normal ordering : créateurs à gauche

$\alpha = \leftarrow$  du normal ordering

$$\frac{1}{2} \sum_{m>0} \alpha_n^i \cdot \alpha_{-m}^i - \frac{D-2}{2} \sum_{m>0} m + \frac{1}{2} \sum_{m>0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \sum_{m>0} \alpha_{-m}^i \alpha_m^i + \frac{D-2}{2} \sum_{m>0} m$$

énergie du vide

$$\text{et } \sum_{m>0} m = -\frac{1}{12} \ln$$

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} \left( N - \frac{D-2}{24} \right) = \frac{4}{\alpha'} \left( \tilde{N} - \frac{D-2}{24} \right)$$

## Spectre en énergie

- L'état le plus simple est

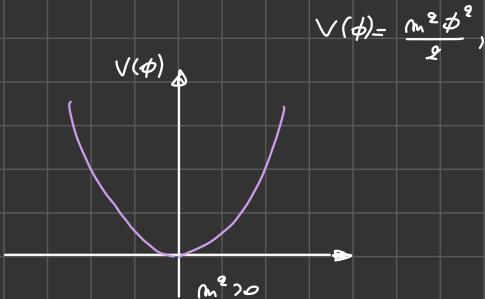
$$N=0, \tilde{N}=0 : |0, p\rangle \quad (\text{ground state})$$

et

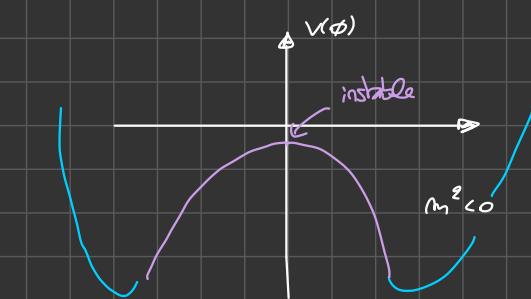
$$M^2 = -\frac{4}{\alpha'} \cdot \frac{D-2}{24} < 0 \rightarrow \text{tachyon !}$$

Le problème est que le tachyon mène à une instabilité et potentiellement à une énergie pas bounded from below.  
En effet, si  $\phi$  un champ scalaire de potentiel  $V(\phi)$ . Sans interaction,

et



$$V(\phi) = \frac{m^2 \phi^2}{2},$$



$\rightarrow$  afin d'éviter que  $E \rightarrow -\infty$ , il faut ajouter des termes comme  $\frac{1}{2} \phi^2$   
Cependant, on aura toujours une instabilité autour de 0.

$\Rightarrow$  la corde bosonique est instable.

- $N=1, \tilde{N}=1 :$

$$|1, \alpha_-^i |0, p\rangle$$

et

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} \left( 1 - \frac{D-2}{24} \right) \quad i, j = 1, \dots, D-2$$

Pour ce 1<sup>er</sup> état excité, il semblerait qu'il y ait un problème. En effet,  $i, j$  vont jusqu'à  $D-2$  donc les opérateurs  $\alpha_i^j$  et  $\alpha_j^i$  se lèvent sans bon rep. de  $SO(D-2) \subset SO(1, D-1)$ . Cependant, on admettra que ces états possèdent un bon rep. du groupe de Lorentz  $SO(1, D-1)$  afin de récupérer l'invariance de Lorentz

Pour ce faire, rappelons la notion de petit groupe :

- Particule massive : pour une particule massive plongée dans  $\mathbb{R}^{1, D-1}$ , il est toujours possible de trouver une lfo de Lorentz  $\eta$   
 $SO(D-1)$   
 $\rho^\mu = (\overbrace{E, 0, \dots, 0}^{\sim})$

Le système est alors invariant sous  $SO(D-1)$  sur les indices spatiaux.

petit groupe de  
 $SO(1, D-1)$

$\rightarrow$  toute particule massive doit former une rep. de  $SO(D-1)$

Or, ici, la particule décrite possède  $(D-2)^2$  états. Il de rep de  $\text{SO}(D-1)$  de cette dim et donc, une particule massive ne peut pas former une rep. de  $\text{SO}(n, D-1)$ .

- Particule sans masse : il est possible de trouver une lfp de Lorentz la

$$\rho^m = (\underbrace{\varepsilon, 0, \dots, 0}_{\text{so}(D-2)}, E)$$

$\hookrightarrow$  petit groupe de  $\text{SO}(n, D-1)$

et elle présente donc une symétrie de  $\text{SO}(D-2)$  et correspondant à une rep. de ce petit groupe

Par conséquent, on doit imposer  $M^2=0$  si on veut une théorie invariante sous  $\text{SO}(n, D-1)$ . On a donc

$$M^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{D-2}{g_4} = 0 \Leftrightarrow \boxed{D = 26} \quad \text{dimension critique}$$

Il faut donc un espace-temps à  $D=26$  pour la corde bosonique.

Le 1<sup>er</sup> état excité est donc sans masse et forme une rep.  $94 \otimes 94$  de  $\text{SO}(94)$ . Cette rep. est réductible et

$$94 \otimes 94 = \text{sous trace et symétrique} \oplus \text{anti-sym} \oplus \text{trace}$$

graviton :  $G_{\mu\nu}$       champ de Kalb-Ramond (2-forme)      dilaton

### Autres états excités

On a récupéré l'invariance de Lorentz du 1<sup>er</sup> état excité en imposant  $D=26$ . Les autres états excités possèdent aussi des indices  $i, j = 1, \dots, 24$  et seront massifs  $\rightarrow$  ils doivent former une rep. de  $\text{SO}(D-1)$ .

En  $N=9=\tilde{N}$ , dans le secteur des R-mouvements, on a

$$\alpha_-^i \alpha_-^j |0\rangle \text{ et } \alpha_+^i |0\rangle$$

et l'ensemble total des états de niveau 2 est

$$(\alpha_-^i \alpha_-^j \oplus \alpha_+^i) \otimes (\tilde{\alpha}_-^i \tilde{\alpha}_-^j \oplus \tilde{\alpha}_+^i) |0; \rho\rangle$$

de masse

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}$$

Dans chaque secteur, on a

$$\frac{1}{2} (D-2)(D-1) + D-2 = \frac{1}{2} D(D-1) - 1 \text{ états}$$

ce qui correspond à la rep. d'un tenseur symétrique sur trace de  $\text{SO}(D-1)$ .

En fait tous les états excités d'une corde  $\equiv$  rep. de  $\text{SO}(D-1)$ .

### Rémarque

Si théorie fondamentale de la gravité quantique, tous ces états excités auront une masse proche de m<sub>pl</sub> et donc impossible de les observer.

$\rightarrow$  ventricular un rôle de les précurseurs de scattering + empêcher divergence UV de gravité.

### III. CORDE OUVERTE

Considérons une corde ouverte  $\sigma \in [0, \pi]$ .

#### Équations du mouvement

Soit

$$S = \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \cdot \sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \partial_\beta X.$$

Si on y ajoutait la constante cosmique, on perdrait la symétrie de Weyl et on ne pourrait plus avoir  $g = \eta$ .

On a

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left( g \partial X \delta (\partial X) \right) \\ &= \frac{-1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left\{ \partial(\partial X \delta X) - \square X (\delta X) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \cdot \square X \cdot \delta X - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\partial\omega} m_\alpha \cdot (\delta X \partial^\alpha X) \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \cdot \square X \cdot \delta X - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \underset{\substack{x=\bar{x}, \\ \bar{x}=\bar{x}'}}{\cancel{x}} \delta X \Big|_{\sigma=0} - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma \underset{\substack{x=x' \\ \sigma=\sigma'}}{\cancel{x}} \delta X \Big|_{\sigma=\pi} \\ &\quad \text{On suppose } \delta X = 0 \text{ en } \tau_i, \bar{\tau} \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \cdot \square X \cdot \delta X - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma \underset{\substack{x=x' \\ \sigma=\sigma'}}{\cancel{x}} \delta X \Big|_{\sigma=0} \end{aligned}$$

Les EOM sont donc

$$\square X^\mu = 0$$

avec les conditions aux bords tq le second terme soit nul. Il existe 2 types de conditions:

- Neumann :  $X'^\mu \Big|_{\sigma=0,\pi} = \partial_\sigma X^\mu \Big|_{\sigma=0,\pi} = 0$

- Dirichlet :  $\delta X^\mu \Big|_{\sigma=0,\pi} = 0 \Leftrightarrow X^\mu \Big|_{\sigma=0,\pi} = C^\mu$

→ DD, DN, ND, NN

Rappelons l'expansion en série de Fourier pour la corde et appliquons ces conditions aux bords :

$$X^\mu = X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} X_L^\mu(\sigma^+) = \frac{1}{2} x^\mu + \alpha' p^\mu \sigma^+ + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_m^n e^{-im(\tau - \sigma)} \\ X_R^\mu(\sigma^-) = \frac{1}{2} x^\mu + \alpha' p^\mu \sigma^- + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_m^n e^{-im(\tau + \sigma)} \end{array} \right.$$

La condition de Neumann donne

$$\partial_\sigma X^m \Big|_{\sigma=0,\pi} = 0 \Rightarrow \alpha_m^m = \tilde{\alpha}_m^m$$

La condition de Dirichlet donne

$$X^m \Big|_{\sigma=0,\pi} = c^m \Rightarrow \begin{cases} \alpha_m^m = -\tilde{\alpha}_m^m \\ p^m = 0 \\ x^m = c^m \end{cases}$$

et avec  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}$  de mode fondamental (ground state,  $m=0$ ). Les conditions de N imposent qu'il n'y a pas de distinction entre R et L-modes. Il n'y a donc pas de Ravel-matching conditions. Le mode fondamental  $\mathcal{E}$ .

### Interprétation physique, champs scalaires et vectoriels

Exemple ( $D=3$ )

On choisit des conditions différentes selon les 3 directions.

$$\begin{cases} x \rightarrow DD & \text{avec } c^x = 0. \\ y \rightarrow NN \\ z \rightarrow NN \end{cases}$$

On a alors à disposition les opérateurs

$$x : \frac{\partial}{\partial x}, \alpha_m^x = -\tilde{\alpha}_m^x$$

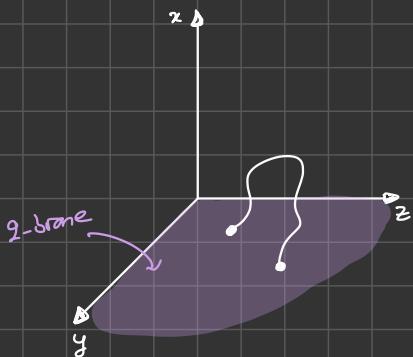
$$y : \frac{\partial}{\partial y}, \alpha_m^y = \tilde{\alpha}_m^y$$

$$z : \frac{\partial}{\partial z}, \alpha_m^z = \tilde{\alpha}_m^z$$

On a alors des états du hys.

$$|\psi_y \psi_z\rangle \rightarrow \phi(\psi_y, \psi_z) \sim \psi(y, z).$$

Les champs sont localisés en 2D (sur une 2-brane). On a une brisure de symétrie :  $SO(3) \rightarrow SO(2) \times \mathbb{Z}_2$ .



Des états vont former 2 hypers de représentation / champs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_m^y |\psi_y \psi_z\rangle \\ \alpha_m^z |\psi_y \psi_z\rangle \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_m^x |\psi_y \psi_z\rangle \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \{ \\ \} \end{array} \begin{array}{l} A_p(x,y) \\ \phi(x,y) \end{array}$$

Dans le cas général, on a

$$DD : D-l \text{ fois} \quad ; \quad NN : l \text{ fois}$$

→ Les extrémités de la corde sont fixées sur une  $l$ -brane, i.e sur une hypersurface d'espace-temps de dimension  $l$ .

On a donc

$$SO(1, D-1) \rightarrow SO(1, l-1) \times SO(D-l)$$

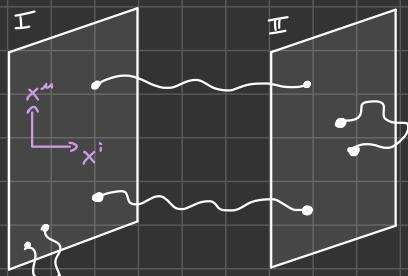
En résumé, si on fixe  $l$ , NN et  $D-l$  DD conditions, on a :

- NN directions : directions tangentialles de la brane
- DD directions : directions transverses de la brane
- un champ de  $l$ -vecteurs  $D-l$  champs scalaires sur la brane de dimension  $l$

### III. PLUSIEURS BRANES DE MÊME DIMENSIONS (ET PARALLÈLES)

#### 2 branes

Supposons maintenant 2  $l$ -branes parallèles



→ on distingue 4 types de cordes :

II, II II, I II, II I

## Chapitre 5 : Théorie des champs conformes

### I. Symétries conformes

En CFT, on a la symétrie de Poincaré (+ symétries internes) qui donnent des contraintes sur les termes du lagrangien et sur les fct de corrélations  $\langle \phi(x)\phi(y) \rangle$  : ils doivent être réalistes et les fonctions de corrélation doivent dépendre que de  $\|x-y\|$ .

La CFT est une théorie qui comprend une symétrie qui généralise celle de Poincaré et va mener à des contraintes supplémentaires sur les fonctions de corrélations  $\langle \phi(x)\phi(y) \rangle$ .

#### Transformation de Poincaré

↪ diffeomorphisme qui préserve la métrique :

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu \cdot x^\nu$$

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \Lambda^\mu_\alpha \cdot \Lambda^\nu_\beta \cdot g^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}$$

#### Transformation conforme

↪ diffeomorphisme qui préserve la métrique à un facteur conforme près (préserve les angles) :

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow f^\mu(x) \\ g^{\mu\nu} &\rightarrow \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\sigma} \cdot \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\tau} \cdot g^{\sigma\tau} = \Lambda(x) \cdot g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

scaling factor  
↓

Une CFT est donc une théorie invariante sous l'iso conforme. Il s'agit d'une théorie qui est invariante par changement d'échelle et qui ne se soucie que des angles.

### Généralisation de l'équation de Killing

Soit une transformation conforme infinitésimale

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(x) = 1 + K(x) \\ y^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x) \\ \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu + \frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial x^\nu}(x) \end{array} \right.$$

Mais

$$\Lambda \eta_{\mu\nu} = (1 + K(x)) \eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \left( \delta_\mu^\sigma + \frac{\partial \varepsilon^\sigma}{\partial x^\mu}(x) \right) \left( \delta_\nu^\tau + \frac{\partial \varepsilon^\tau}{\partial x^\nu}(x) \right)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\eta_{\mu\nu}} + K(x) \eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \eta_{\mu\beta} \delta_\nu^\beta \frac{\partial \varepsilon^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\nu\beta} \delta_\mu^\beta \frac{\partial \varepsilon^\nu}{\partial x^\mu}$$

et donc

$$K(x) \eta_{\mu\nu} = \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial x^\mu}$$

généralisation de l'éq. de Killing  
pour espace plat qd K=0

Si on prend la trace de cette équation, on a

$$\partial_\mu \varepsilon^\mu = d \cdot K$$

avec  $d$  la dimension de l'espace-temps.

$\rightarrow K$  ne prend pas n'importe quelle valeur.

L'équation devient

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = \frac{2}{d} \partial_\mu \varepsilon^\rho \eta_{\rho\nu} \quad (1)$$

## II. ALGEBRE DE LIE ET GROUPE CONFORME POUR $d > 2$

De l'équation (1), on apprend que  $\partial_\mu \varepsilon^\nu$  doit être linéaire en  $x$  et donc que  $\varepsilon_\mu(\mathbf{x})$  doit être quadratique en  $x$ :

$$\varepsilon_\mu(\mathbf{x}) = a_\mu + M_{\mu\nu} x^\nu + T_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho$$

et c'est l'alg. de Lie du groupe conforme.

Répondons à l'interprétation des différents coef:

- $a_\mu$  correspond à une translation d'espace-temps  $\rightarrow$  générateur :  $P_\mu$ .
- $M_{\mu\nu}^A$  (= partie antisymm. de  $M_{\mu\nu}$ ) correspond aux lfos de Lorentz  $\rightarrow$  générateur :  $M_{\mu\nu}^A = M_{\nu\mu}$

En effet, pour une lfo de Lorentz,

$$\begin{aligned} \partial_\nu \varepsilon^\mu &= 0 \quad \rightarrow \text{cor lfo de Lorentz} = \text{lfo conforme avec } \lambda = 1 \Rightarrow K=0 \Rightarrow \\ &\quad \partial_\mu \varepsilon^\nu = M_{\mu\nu} \delta^{\mu\nu} + \text{termes linéaires en } x = 0 \quad \partial_\mu \varepsilon^\nu = d \cdot K \\ &\Leftrightarrow M_{\mu\nu} \delta^{\mu\nu} = 0 \\ &\Leftrightarrow M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu} = M_{\mu\nu}^A \end{aligned}$$

- $M_{\mu\nu}^S = D \eta_{\mu\nu}$  correspond aux dilatations  $\rightarrow$  générateur :  $D$

En effet, soit  $a_\mu = 0$  et  $T_{\mu\nu\rho} = 0$ , l'éq (1) devient

$$M_{\mu\nu} + M_{\nu\mu} = \frac{2}{d} (\eta^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}) \eta_{\mu\nu}$$

$$\Leftrightarrow M_{\mu\nu}^S + M_{\nu\mu}^S = \frac{2}{d} \cdot D \cdot M^S \eta_{\mu\nu}$$

et c'est ok par  $M_{\mu\nu}^S = D \eta_{\mu\nu}$  :

$$2D \eta_{\mu\nu} = \frac{2}{d} \cdot d \cdot D \eta_{\mu\nu} \quad \text{OK.}$$

- $T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} b_\nu + \eta_{\nu\mu} b_\nu - \eta_{\mu\nu} b_\mu$  correspond aux lfes spéciales conformes  $\rightarrow$  générateur :  $k_\mu$

Cela se montre en prenant (1) avec  $\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = 0$ .

$\rightarrow$  Le groupe conforme comprend des translations, des lfes de Lorentz, des dilatations et des lfes spéciales conformes (TSC).

Si on ajoute d'autres générateurs, la théorie devient libre/trivelle : Coleman-Mandula thm.

### Algèbre de gie du groupe conforme et générateurs ( $d > 2$ )

Les générateurs de l'algèbre sont donc

-1	$P_\mu = -i \partial_\mu$ (translations)
0	$M_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$ (Lorentz)
0	$D = -i x_\mu \partial^\mu$ (dilatations)
1	$K_\mu = i(x^2 \partial_\mu - g x_\mu x_\nu \partial^\nu)$ (TSC)

$$x'_\mu = x_\mu + \alpha_\mu$$

$$x^\mu' = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

$$x'_\mu = \sigma x_\mu$$

$$x'_\mu = \frac{x_\mu - b_\mu x^2}{1 - g b_\nu x^\nu + b^\mu x^\nu}$$

Les relations de commutation non nulles sont

$$0+1=1$$

$$[D, K_\mu] = -i K_\mu$$

$$0-1=-1$$

$$[D, P_\mu] = i P_\mu$$

$$1-1=0$$

$$[K_\mu, P_\nu] = g(\eta_{\mu\nu} D - M_{\mu\nu})$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho})$$

$$[K_\mu, M_{\nu\rho}] = i(\eta_{\mu\nu} K_\rho - \eta_{\mu\rho} K_\nu)$$

$$[P_\mu, M_{\nu\rho}] = i(\eta_{\mu\nu} P_\rho - \eta_{\mu\rho} P_\nu)$$

On peut now si on étend l'espace d'une dimension et le temps d'une dimension :  $\mathbb{R}^{3,d-1} \rightarrow \mathbb{R}^{3,d}$ , on peut égaler les générateurs

$$J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}$$

$$J_{-1,0} = D$$

$$\mu = 1, \dots, d$$

$$J_{-1,\mu} = \frac{i}{2}(P_\mu - K_\mu)$$

$$J_{0,\mu} = \frac{i}{2}(P_\mu + K_\mu)$$

Ces générateurs ont pour relation de commutateur celle de  $so(9,d)$ .

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\rho}).$$

Le isomorphisme entre l'algèbre de gie du groupe conforme en dim  $d$  et  $so(9,d)$ .

Si on avait pris une métrique euclidienne à  $d$  dim, on aurait un isomorphisme avec  $so(1, d+1)$ .

### III. SYMÉTRIES CONFORMES À 2 DIMENSIONS ( $d=2$ )

Pour la suite, on travaille en métrique euclidienne par facilité, i.e avec des coord.  $(\sigma^1, \sigma^2) = (\sigma^+, i\sigma^0)$ . Pour revenir en signature riemannienne, il suffit de faire une rotation de Wick.

On introduit les coordonnées dans le plan complexe

$$z = \sigma^+ + i\sigma^2 \quad \text{et} \quad \bar{z} = \sigma^- - i\sigma^2$$

avec

$$\partial_z = \partial = \frac{1}{2}(\partial_+ - i\partial_-) \quad \text{et} \quad \partial_{\bar{z}} = \bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_+ + i\partial_-)$$

Dans ces coord., la métrique euclidienne devient

$$ds^2 = dz \cdot d\bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

On va considérer  $z$  et  $\bar{z}$  comme des coord. indépendantes, i.e on étend la worldsheet de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{C}^2$ . On fait les calculs affinés, il faudra imposer  $\bar{z} = z^*$  afin de sélectionner un plan réel.

Dans le plan complexe, on peut montrer que conformes sont générées par des lfos holomorphes. En effet, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} z \rightarrow z' = f(z) \\ \bar{z} \rightarrow \bar{z}' = \bar{f}(\bar{z}) \end{array} \right. \Rightarrow ds^2 = dz \cdot d\bar{z} \rightarrow \underbrace{\frac{df}{dz} \cdot \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}}}_{\text{scaling factor}} \cdot dz d\bar{z}$$

A noter qu'il y a une infinité de lfos conformes menant à une algèbre de Lie de dimension infinie ( $\gg$  au cas  $d>2$ )

$\nexists$  PB 1.3-TPI

Sur une lfo infinitésimale

$$z \rightarrow z + \varepsilon(z).$$

Les paramètres infinitésimaux  $\varepsilon(z)$  admettent une expansion en série de Laurent

$$\varepsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^{n+m}.$$

On peut alors montrer que les générateurs associés sont (voir TP)

$$\left\{ \begin{array}{l} l_m = -z^{m+n} \partial_z \\ \bar{l}_m = -\bar{z}^{m+n} \partial_{\bar{z}} \end{array} \right.$$

lq

$$[l_m, l_{m'}] = (m-m') l_{m+m} \quad ; \quad [\bar{l}_m, \bar{l}_{m'}] = (m-m') \bar{l}_{m+m}$$

algèbre de Witt

$$[l_m, \bar{l}_m] = 0$$

→ l'algèbre de Lie des lfos conformes à 2d est la somme directe de 2 copies de l'alg. de Witt. Cette alg. est bien infinie dimensionnelle.

Par ailleurs, si on considère les champs vectoriels qui génèrent ces lfos conformes :

$$v(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m z^{m+1} \partial_z \quad , \quad \bar{v}(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \bar{a}_m \bar{z}^{m+1} \partial_{\bar{z}} ,$$

on peut montrer (TP) que ces champs sont globalement bien définis uniquement pour les C.L. de

$$\{l_0, l_+, l_-, \bar{l}_+, \bar{l}_-, \bar{l}_0\}.$$

Il s'agit d'une sous-algèbre finie qui génère les lfos conformes globales en  $d=2$ . On y distingue les générateurs associés à ces lfos :

- générateur des translations :

$$l_{-+} = -\partial_z \quad \text{et} \quad \bar{l}_{-+} = -\partial_{\bar{z}} \quad (\text{translation selon } z \text{ et } \bar{z})$$

- générateur des TCS :

$$l_+ = -z^2 \partial_z \quad \text{et} \quad \bar{l}_+ = -\bar{z}^2 \partial_{\bar{z}}$$

- générateur des rotations :

$$l_0 - \bar{l}_0 = \partial_\theta$$

- générateur des dilatations :

$$l_0 + \bar{l}_0 = -r \partial_r$$

Le groupe générée par cette sous-algèbre est celui des lfos de Möbius, i.e

$$z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$$

avec  $ad-bc=1$  et  $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ . Il s'agit du groupe  $\text{SL}(2, \mathbb{C}) / \mathbb{Z}_2 \cong \text{SO}(3, -)$

## IV. TENSEUR ENERGIE-IMPULSION

→ courants conservés corrélation par translation.

Théorie sans gravitation ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ )

On considère l'action

$$S = \int d^4x \cdot \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi),$$

Sont les lfos infinitésimale

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \varepsilon^\mu(x).$$

On a alors

$$\cdot d^d x \rightarrow \left| \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \right| dx^j = \det \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \approx 1 + \text{tr} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = 1 + \partial_\mu \xi^\mu$$

$$\cdot \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi)$$

$$\Rightarrow S \rightarrow S' = S + \int d^d x \cdot \left\{ \mathcal{L} \partial_\mu \xi^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right\}$$

$$= \delta S = \int d^d x \cdot \left\{ \mathcal{L} \partial_\mu \xi^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu (\delta \phi) - \delta (\partial_\nu \phi)) \right\}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \partial_\nu \phi' &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \cdot \partial_\mu (\phi + \delta \phi) = (\eta^{\mu\nu} - \partial_\nu \xi^\mu) \partial_\mu (\phi + \delta \phi) \\ &= \partial_\nu \phi - \underbrace{\partial_\nu \xi^\mu \partial_\mu \phi}_{\delta (\partial_\nu \phi)} + \partial_\nu \delta \phi \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \partial_\nu (\delta \phi) - \delta (\partial_\nu \phi) = \partial_\nu \xi^\mu \partial_\mu \phi$$

$$= \delta S = \int d^d x \cdot \left\{ \mathcal{L} \partial_\mu \xi^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \cdot \partial_\nu \xi^\nu \partial_\mu \phi \right\}$$

$$= - \int d^d x \cdot \partial_\nu \xi^\nu \underbrace{\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \xi^\mu \partial_\nu \phi - \mathcal{L} \delta_\mu^\nu \right\}}_{T_\mu^\nu}$$

$$= \int d^d x \cdot \partial_\mu T^{\mu\nu} \cdot \xi^\nu = 0 \quad \text{car } \xi^\nu \text{ constant dans un espace plat}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0}$$

Avec gravitation

On a

$$S = \int d^d x \cdot \sqrt{g} \cdot ? \cdot \mathcal{L}(g^{\mu\nu}, \phi, \partial_\mu \phi)$$

et soit la infinitésimale

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \varepsilon^\mu \alpha_\mu.$$

Il s'agit d'un difféo qui doit laisser invariant la théorie si on prend en compte le changement de métrique

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\nu} g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \partial^\mu \varepsilon^\nu - \partial^\nu \varepsilon^\mu$$

$$\Rightarrow \delta g^{\mu\nu} = - \partial^\mu \varepsilon^\nu - \partial^\nu \varepsilon^\mu$$

On a donc

$$\delta_g S = \int d^d x \cdot \frac{\partial (\sqrt{g} \cdot \mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \cdot \delta g_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \text{par de factor 2 car symétrie}$$

$$= - \int d^d x \cdot \frac{\partial (\sqrt{g} \cdot \mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \cdot \partial^\mu \epsilon^\nu$$

Par ailleurs, on a que

$$\delta_\phi S = \int d^d x \cdot \sqrt{g} \cdot \delta_\phi \mathcal{L} = - \int d^d x \cdot \partial^\mu \epsilon^\nu T_{\mu\nu} \sqrt{g}$$

Comme on doit avoir  $\delta S = 0$ , on a

$$\delta S = \delta_\phi S + \delta_g S = 0$$

$$\Leftrightarrow \delta_g S = - \delta_\phi S$$

$$\Leftrightarrow - \int d^d x \cdot \frac{\partial (\sqrt{g} \cdot \mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \cdot \partial^\mu \epsilon^\nu = \int d^d x \cdot T_{\mu\nu} \sqrt{g} \partial^\mu \epsilon^\nu$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{\mu\nu} = - \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial (\sqrt{g} \cdot \mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}}} \quad \text{parties déprimées avec un facteur 4tr suppl.}$$

Trace de  $T^{\mu\nu}$  en CFT de dimension d

Dans une CFT, on a  $\delta S = 0$  pour n'importe quelle transformation conforme. En particulier, par une dilatation  $\delta g_{\alpha\beta} = \epsilon g_{\alpha\beta}$ , on a

$$\delta S = \int d^d x \cdot \frac{\partial (\sqrt{g} \cdot \mathcal{L})}{\partial g_{\alpha\beta}} \cdot \delta g_{\alpha\beta} = \int d^d x \cdot \sqrt{g} \cdot T^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T^\alpha_\alpha = 0} \quad (*)$$

$T^{\mu\nu}$  en coordonnées complexes

En coordonnées  $z, \bar{z}$ , on a

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

et (\*) devient

$$T^\alpha_\alpha = T^{\alpha\bar{\alpha}} g_{\alpha\bar{\alpha}} = T^{z\bar{z}} + T^{\bar{z}z} = 0$$

et par symétrie,  $T^{z\bar{z}} = T^{\bar{z}z}$

$$\Rightarrow \boxed{T^{z\bar{z}} = T^{\bar{z}z} = 0}$$

Par ailleurs, l'éq. de conservation aboutit à

$$\partial_z T^{zz} = 0 \quad ; \quad \partial_{\bar{z}} T^{\bar{z}\bar{z}} = 0,$$

$$\Leftrightarrow \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad ; \quad \partial_{\bar{z}} T_{z\bar{z}} = 0$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} T_{zz} = T_{zz}(z) = T(z) & \text{et une fonction holomorphe} \\ T_{\bar{z}\bar{z}} = T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) = \bar{T}(\bar{z}) & \text{et une fonction antiholomorphe.} \end{cases}$$

## II. COURANTS DE NOETHER ( $d=2$ )

Cherchons le courant de Noether associé aux bâts conformes. Soit la bâti conforme infinitésimale

$$\begin{cases} z' = z + \varepsilon(z) \\ \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \end{cases} \rightarrow \text{correspond à un changement de signature du Lorentzien à} \\ \text{euclidien } (= t \rightarrow it)$$

Afin de trouver le courant conservé, il va falloir considérer  $\varepsilon(z, \bar{z})$  et  $\bar{\varepsilon}(z, \bar{z})$ :

$$\begin{aligned} \delta S \sim & \int d^2\sigma \cdot T_{ab} \cdot \delta g^{ab} - \int d^2\sigma \cdot T_{ab} \partial^a (\delta g^b) \\ \sim & \int dz d\bar{z} \cdot \left\{ T_{zz} \partial_z \delta_z + T_{\bar{z}\bar{z}} \partial_{\bar{z}} \delta_{\bar{z}} \right\} \\ \sim & \int dz d\bar{z} \cdot \left\{ T_{zz} \partial_z \varepsilon + T_{\bar{z}\bar{z}} \partial_{\bar{z}} \bar{\varepsilon} \right\} \end{aligned}$$

On peut écrire

$$\begin{cases} \varepsilon(z, \bar{z}) = \varepsilon(z) \varphi(z) \\ \bar{\varepsilon}(z, \bar{z}) = \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \bar{\varphi}(\bar{z}) \end{cases}$$

et donc

$$\delta S \sim \int dz d\bar{z} \cdot \left\{ T_{zz} \varepsilon \partial_z \varphi + T_{\bar{z}\bar{z}} \bar{\varepsilon} \partial_{\bar{z}} \bar{\varphi} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_z J^{\bar{z}} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_{\bar{z}} \bar{J}^z = 0$$

$$\Leftrightarrow J^{\bar{z}} = J(z) \quad \text{et} \quad \bar{J}^z = \bar{J}(\bar{z})$$

et les courants conservés sont

$J(z) = T(z), \varepsilon(z)$	holomorphe
$\bar{J}(\bar{z}) = \bar{T}(\bar{z}) \bar{\varepsilon}(\bar{z})$	anti-holomorphe

A noter qu'il y a une infinité de courants conservés car c'est à  $d=2$ .

## VII. LES IDENTITÉS DE WARD

Les identités de Ward sont l'équivalent quantique du théorème de Noether. Soit l'intégrale de chemin :

$$Z = \int D\phi e^{-S[\phi]}.$$

Soit une symétrie de la théorie par la tfo infinitésimale

$$\phi' = \phi + \varepsilon \delta\phi$$

anomalie  
✓ si  $D$  varie

laisse l'action et la mesure invariante. Considérons  $\varepsilon$  qui dépend des coord.  $\sigma$ :  $\varepsilon(\sigma)$ . Dans ce cas, il n'y a plus d'invariance de la mesure où l'action

$$\begin{aligned} Z \rightarrow \int D\phi \cdot e^{-S[\phi']} &= \int D\phi \cdot e^{(-S[\phi]) - \frac{i}{2\pi} \int J^\sigma \partial_\sigma \varepsilon} \\ &= \int D\phi \cdot e^{-S[\phi]} \left( 1 - \frac{i}{2\pi} \int J^\sigma \partial_\sigma \varepsilon \right) \end{aligned}$$

où  $\int = \int d^d\sigma \sqrt{g}$ . A noter que le courant  $J^\sigma$  peut également avoir des contributions du au changement de mesure et au changement de l'action. Comme il s'agit d'un changement de variable d'intégration  $\phi$ , l'expression de  $Z$  ne devrait pas changer sous la tfo et

$$\delta Z \sim \int D\phi \cdot e^{-S[\phi]} \int J^\sigma \partial_\sigma \varepsilon = 0 \quad \forall \varepsilon$$

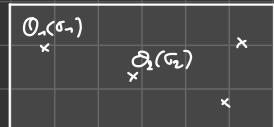
$$\Leftrightarrow \boxed{\langle \partial_\sigma J^\sigma \rangle = 0}$$

→ La valeur moyenne dans le vide de la divergence du courant doit être nulle.

Reignons ce qu'il se passe avec des insertions d'opérateurs dans l'intégrale de chemin:

$$\langle O_1(\sigma_1) \dots O_n(\sigma_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi \cdot e^{-S[\phi]} O_1(\sigma_1) \dots O_n(\sigma_n).$$

On peut voir ça comme des opérateurs que l'on aurait insérés à des points particuliers de l'espace-temps :



Les opérateurs  $O_i$  peuvent être n'importe quelle expression composée des champs  $\phi$ . Pour la symétrie considérée précédemment, les opérateurs vont de tfo par

$$O_i \rightarrow O_i + \varepsilon \delta O_i$$

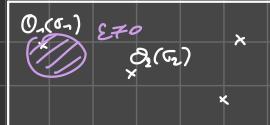
et on considère  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon(\sigma)$ . Si on choisit  $\varepsilon(\sigma)$  par rapport aux ensembles des insertions, on a

$$\delta(O_i | \sigma_i) = 0$$

et donc on trouve

$$\langle \partial_\sigma J^\sigma(\sigma), O_1(\sigma_1) \dots O_n(\sigma_n) \rangle = 0 \quad \forall \sigma \neq \sigma_i \quad \Leftrightarrow \partial_\sigma J^\sigma = 0 \quad \forall \sigma \neq \sigma_i$$

Si les insertions sont au même endroit que  $J^\alpha$ , et si  $\sigma \rightarrow \sigma'$ , on prend  $\mathcal{E}$  qui a un support dans une région qui inclut  $\sigma$ , la



et on trouve

$$\langle O_1(\sigma_1) \dots O_n(\sigma_n) \rangle \rightarrow \frac{1}{2} \int D\phi e^{-S(\phi)} \left( 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{E}} J^\alpha \partial_\alpha \mathcal{E} \right) (O_1 + \varepsilon \delta O_1) \dots O_n$$

$$\Rightarrow \langle \delta O_1(\sigma_1) \dots O_n(\sigma_n) \rangle = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{E}} \partial_\alpha \langle J^\alpha(\tau) O_n(\sigma_n) \dots \rangle \quad \text{id de Ward}$$

où l'intégrale est sur la région où  $\mathcal{E} \neq 0$ .

## VII. CHAMPS PRIMAIRES

### Champ primaire

Un champ primaire est un champ qui se transforme comme

$$\varphi'(w, \bar{w}) = \left( \frac{dw}{dz} \right)^{-h} \left( \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \right)^{-\bar{h}} \varphi(z, \bar{z}) \quad (2)$$

Sur une IFO conforme locale  $z \rightarrow w(z)$

On appelle  $h$  la dimension conforme holomorphe et  $\bar{h}$  la dimension conforme anti-holomorphe.

↳ ce sont les poids conformes.

On fait relâche au comportement du champ sous rotation et dilatation :

$$h = \frac{1}{2} (\Delta + s) \quad \text{et} \quad \bar{h} = \frac{1}{2} (\Delta - s)$$

où  $\Delta$  est la dimension d'échelle et  $s$  le spin du champ.

### Champ quasi-primaire

C'est un champ qui se IFO comme un champ primaire, mais sous des IFO conformes globales  $SL(2, \mathbb{C})$ .

→ alors les champs primaires sont quasi-primaire, mais pas nécessairement.

### Champ primaire chiral

Champ de poids :  $(h, 0)$

## Champ primaire anti-chiral

Champ de poids :  $(0, \bar{h})$ .

Une définition équivalente d'un champ primaire est un champ qui se trouve dans une tfe conforme infinitésimale tq

$$\delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}} \varphi = -(\bar{h}\varphi \partial_2 \varepsilon + \varepsilon \partial_2 \varphi) - (\bar{\varepsilon}\varphi \partial_2 \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon} \partial_2 \varphi)$$

## VII. IDENTITÉ DE WARD HOLOMORPHES

Les id. de Ward associées à l'invariance sous les tfs conformes sont

$$\frac{\partial}{\partial x^m} \langle T^m_{\mu}(x) X \rangle = - \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i) \frac{\partial}{\partial x_i^\mu} \langle X \rangle$$

translations

$$\varepsilon_{\mu\nu} \langle T^m_{\mu}(x) X \rangle = -i \sum_{i=1}^n s_i \delta(x - x_i) \langle X \rangle$$

rotations

$$\langle T^m_{\mu}(x) X \rangle = - \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i) \Delta_i \langle X \rangle$$

tfs d'échelle

où  $X$  est une collection de champs primaires,  $s_i \varepsilon_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}^i$  le générateur de spin ( $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$  et  $i$ : le spin du champ) et  $\Delta_i$  la dimension d'échelle.

A partir de gac, on peut montrer (TP5)

$$\langle T(z) X \rangle = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial w_i \langle X \rangle}{z - w_i} + \frac{\bar{h}_i \langle X \rangle}{(z - w_i)^2} \right) + \text{termes réguliers}$$

$$\langle \bar{T}(\bar{z}) X \rangle = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \bar{w}_i \langle X \rangle}{\bar{z} - \bar{w}_i} + \frac{\bar{h}_i \langle X \rangle}{(\bar{z} - \bar{w}_i)^2} \right) + \text{termes réguliers}$$

où  $w_i = (w_i, \bar{w}_i)$  et les termes réguliers sont des fcts holomorphes (anti-h) de  $z$  ( $\bar{z}$ ) régulier en  $z = w_i$  ( $\bar{z} = \bar{w}_i$ ). ( $\bar{z} = \bar{w}_i$ ).

## VIII. IDENTITÉ DE WARD CONFORMES

Les 3 id. de Ward holomorphes peuvent se réexprimer comme

$$\delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}} \langle X \rangle = \int_U d^2 z \cdot \partial_z \langle T^m_{\mu}(z) \varepsilon_{\mu}(z) \rangle \cdot X$$

où on intègre sur un domaine  $U$  qui contient tous les champs  $X$  et on considère une tfe conforme locale.

En utilisant le thm de Stokes dans le plan complexe, on obtient

$$\delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}} \langle X \rangle = \frac{1}{2} \int_{\partial U} \left( (-T^{\bar{z}\bar{z}} \varepsilon_{\bar{z}} X) dz + (T^{z\bar{z}} \varepsilon_{\bar{z}} X) dz \right)$$

$$\text{car } \int_{\partial D} \left( \langle T^{\bar{z}\bar{z}} \xi_2 \times \rangle dz + \langle T^{\bar{z}\bar{z}} \xi_{\bar{z}} \times \rangle d\bar{z} \right) = 0 \text{ car le contour } D \text{ ne passe pas par les } z_i.$$

Enfin, en utilisant les définitions de  $T(z)$  et  $\bar{T}(z)$  et  $\xi = \xi^z$ , on trouve

$$\delta_{\xi, \bar{\xi}} \langle \times \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \cdot \xi(z) \langle T(z) \times \rangle + \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\bar{z} \cdot \bar{\xi}(z) \langle \bar{T}(z) \times \rangle$$

où  $E$  est un contour orienté dans le sens trigonométrique et incluant les points  $(z_i, \tau_{z_i})$ .

## X. OPERATOR PRODUCT EXPANSION : OPE

Commençons par décrire ce que l'on entend par opérateur local en CFT. On appellera aussi ces objets des champs. Il y a une similitude entre CFT et QFT. En QFT, le terme champ est un objet  $\phi$  qui apparaît dans l'action et l'intégrale de chemin. En CFT, il désigne n'importe quelle expression locale, incluant  $\phi$ ,  $\partial^\mu \phi$  ou  $e^{i\phi}$ .

L'ensemble de tous les champs est infini et CFT même si, en travaillant avec une QFT, on ne considère qu'un nombre fini de champs fondamentaux  $\phi$ .

On définit l'exposition d'un produit d'opérateurs (OPE)

$$\langle \mathcal{O}_i(z, \bar{z}) \mathcal{O}_j(w, \bar{w}) \dots \rangle = \sum_k C_{ij}^k (z-w, \bar{z}-\bar{w}) \langle \mathcal{O}_k(w, \bar{w}) \dots \rangle$$

avec  $\mathcal{O}_i$  les opérateurs locaux de la CFT et  $C_{ij}^k$  une fct qui dépend de la distance entre les 2 opérateurs.

L'expression de l'OPE doit être toujours considérée pour des opérateurs qui se trouvent dans des fils de corrélations, ie

$$\langle \mathcal{O}_i(z, \bar{z}) \mathcal{O}_j(w, \bar{w}) \dots \rangle = \sum_k C_{ij}^k (z-w, \bar{z}-\bar{w}) \langle \mathcal{O}_k(w, \bar{w}) \dots \rangle$$

Par facilité, on ne notera plus le  $\langle \dots \rangle$ , il sera toujours implicite.

L'idée principale derrière cet OPE est d'effectuer un développement en série lorsque 2 opérateurs s'approchent l'un de l'autre. Autrement dit, quand 2 opérateurs sont définis en des points proches l'un de l'autre, on peut développer en série leur produit aujour d'un de ces 2 pts.

### Rémarques

- Les fonctions de corrélation seront toujours supposées être ordonnées. Par conséquent, les opérateurs apparaissent dans les OPE commutent.

$$\mathcal{O}_i(z, \bar{z}) \mathcal{O}_j(w, \bar{w}) = \mathcal{O}_j(w, \bar{w}) \mathcal{O}_i(z, \bar{z})$$

(si Gramm, ils ont commuté).

- Les OPE ont un comportement singulier en  $z \rightarrow w$ . On verra que c'est ce qui va nous intéresser. En effet, les OPE permettent de mettre en évidence les résidus à travers lesquels on peut facilement l'utilisation des formes des résidus.
- Les autres insertions dans la fil de corrélation "... " sont arbitraires mais doivent être à une distance  $> |z-w|$ . En fait, les OPE sont exactes et on un rayon de convergence = à la distance de la plus proche autre insertion.

## XI. EXEMPLE : CHAMP SCALAIRE LIBRE

Soit un boson sans masse

correspondant à l'invariance conforme

$$S = \frac{g}{2} \int d^2 z \cdot \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi.$$

On a vu au TP6 que

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle = -\frac{1}{4\pi g} \ln((x-y)^2).$$

En coordonnées complexes, on a

$$\langle \varphi(z, \bar{z}) \varphi(w, \bar{w}) \rangle = -\frac{1}{4\pi g} (\ln(\bar{z}-\bar{w}) + \ln(z-w)).$$

En dérivant, on trouve

$$\langle \partial_z \varphi(z, \bar{z}) \cdot \partial_w \varphi(w, \bar{w}) \rangle = \partial_w \left( -\frac{1}{4\pi g} \cdot \frac{1}{z-w} \right) = -\frac{1}{4\pi g} \frac{1}{(z-w)^2},$$

$$\langle \partial_{\bar{z}} \varphi(z, \bar{z}) \cdot \partial_{\bar{w}} \varphi(w, \bar{w}) \rangle = -\frac{1}{4\pi g} \frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})^2}.$$

Ensuite, on peut montrer

$$T(z) = -g\pi T_{zz} = -g\pi g : \partial \varphi(z) \partial \varphi(z) :$$

lorsque

$$\langle T(z) \rangle = 0.$$

Si on évalue  $\langle T(z) \varphi(w) \rangle$ , on trouve

$$\langle T(z) \partial \varphi(w) \rangle = \frac{\partial \varphi(z)}{(z-w)^2} = \frac{\partial \varphi(w)}{(z-w)^2} + (z-w) \frac{\partial_w (\partial \varphi(w))}{(z-w)^3}$$

$\Rightarrow \partial \varphi$  est un champ primaire de poids  $(1, 0)$

De manière analogue,  $\bar{\partial} \varphi$  est un champ primaire de poids  $(0, 1)$ .

De manière générale,

$\partial^m \varphi$  est de poids  $(m, 0)$ ;  $\bar{\partial}^m \varphi$  est de poids  $(0, m)$

On peut également montrer pour le champ scalaire

$$\langle T(z) T(w) \rangle \sim \frac{-1/2}{(z-w)^4} + \frac{g T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w}.$$

A cause du 1<sup>er</sup> terme, le tenseur énergie-impulsion n'est pas un champ primaire.

De manière générale,

$$\boxed{\langle T(z) T(w) \rangle \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{g T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w}}$$

avec  $c$  la charge contrôlée by

$$c = \begin{cases} 1 & \text{pour les bosons} \\ 1/2 & \text{pour les fermions} \\ -2 & \text{pour les 2 ghosts (cf BRST)} \\ -26 \end{cases}$$

$m$  scalaires libres :  $c = m$

$m$  fermions libres :  $c = m/2$

La charge contrôlée est une mesure extensive du nombre de fets du système. Si  $c=0$ ,  $T(z)$  serait un champ primaire de poids  $(1,0)$ .

En fait,  $T(z)$  est un champ quasi-primaire et se lève sous  $z \rightarrow w(z)$  comme

$$T(z) \rightarrow T'(w) = \left( \frac{dw}{dz} \right)^{-2} \left( T(z) - \frac{c}{12} \delta(w; z) \right)$$

où  $\delta(\cdot, \cdot)$  est la dérivée schouten définie comme

$$\delta(w, z) = \frac{d^3w/dz^3}{dw/dz} - \frac{3}{2} \cdot \frac{d^2w/dz^2}{dw/dz}.$$

La dérivée schouten est le seul terme qui peut être ajouté à la loi des fets de  $T(z)$  by

$$T(z) \xrightarrow{z \rightarrow w} T'(w) \xrightarrow{w \rightarrow u} T''(u) \quad (\text{propriété de groupe})$$

et qui s'annule par les fets conformes globaux.

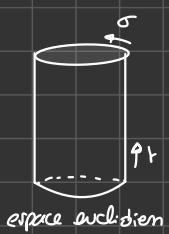
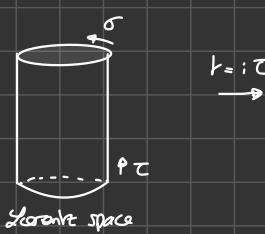
## XII. QUANTIFICATION RADIALE

Jusqu'à présent, on a parlé d'opérateurs mais pas des états sur lesquels ils agissent. Cela va pouvoir se faire à l'aide de la quantification radiale.

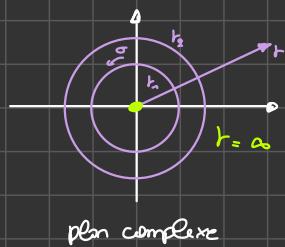
Soit une corde formée dans un espace de Minkowski. La worldsheet est un cylindre, décrit par une coordonnée spatiale  $\sigma$  et une temporelle  $\tau$ . On prend un cylindre de périmètre  $L$ . A l'aide d'une rotation de Wick  $r = i\tau$  et d'un fcto conforme

$$z = e^{\frac{i\pi}{L}(r+i\sigma)}$$

il est possible de ramener la théorie dans le plan complexe.



$$z = e^{\frac{i\pi}{L}(r+i\sigma)}$$



On voit donc que, pour ordonner des opérateurs dans le temps, il faut les placer à des distances différentes de l'origine "radical ordering" :

$$R(\phi(z)\phi(w)) = \begin{cases} \phi(z)\phi(w) & \text{si } |z| > |w| \\ \phi(w)\phi(z) & \text{si } |w| > |z|. \end{cases}$$

Par ailleurs, la quantification radiale permet de lier les commutateurs et des intégrales de contour. En effet, soient 2 opérateurs A et B, des intégrales de contour de fonctions holomorphes :

$$A = \oint dz \ a(z) \quad ; \quad B = \oint dw \ b(w).$$

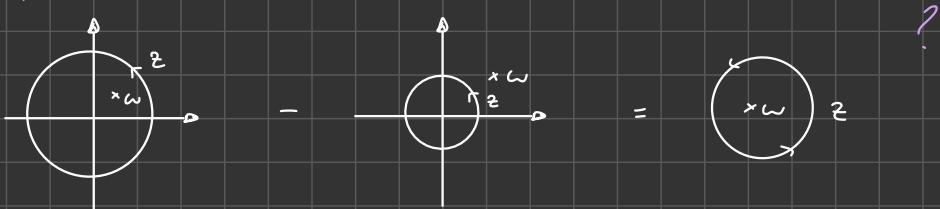
Leur commutateur vaut

$$[A, B] = \left( \oint dz \oint dw - \oint dw \oint dz \right) a(z)b(w).$$

On se rappelle que les opérateurs apparaissent toujours dans des fct de convolution avec du time ordering ie ici du radiciel cordonné. On a donc



L'astuce est de d'abord fixer w et intégrer z puis intégrer sur w :



$$\Rightarrow [A, B] = \oint_0 dw \oint_{\omega} dz \cdot a(z)b(w)$$

### Exemple (TP 4)

La charge conservée associée aux brou conformes infinitésimales est

$$\Omega_\varepsilon = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \cdot T(z) \varepsilon(z)$$

et donc

$$[\Omega_\varepsilon, \Phi(w)] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \cdot \varepsilon(z) \langle T(z) \Phi(w) \rangle = - \delta_\varepsilon \Phi(w)$$

### XIII. FONCTIONS DE CORRÉLATION

Dans cette quantification radiale, on va voir que la CFT impose des conditions strictes sur la forme des fonctions de corrélation.

Supposons l'existence d'un état  $|0\rangle$  sur lequel vont agir les opérateurs de création pour construire un espace de Hilbert. Afin de considérer des interactions en 1 point, on doit définir un état asymptotique :

$$|\varphi_{in}\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \langle \varphi(z, \bar{z}) |0\rangle.$$

On définit alors  $\langle \varphi_{out} | = |\varphi_{in}\rangle^\dagger$  où la conjugaison hermitienne est définie sur des champs conformes via

$$\varphi^\dagger(z, \bar{z}) = \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \varphi(1/\bar{z}, 1/z) \quad \begin{matrix} \text{défini sur la surface} \\ \text{réelle } \bar{z} = z^* \end{matrix}$$

Les arguments du champ  $\varphi$  vont de  $z$  à  $1/\bar{z}$  et  $\bar{z}$ . Cela est du au fait que l'on a fait une rotation de Wick et  $\text{AdS}_5$  sur le cylindre. Les préfacteurs permettent d'avoir un comportement régulier pour le produit réel

$$\langle \varphi_{out} | \varphi_{in} \rangle.$$

Pour le preuve, regardons la 2-pi fonction de l'opérateur primaire  $\varphi(z, \bar{z})$ .

Par invariance par translation, on a

$$\langle \varphi(z_1, \bar{z}_1) \varphi(z_2, \bar{z}_2) \rangle = f(z_1 - z_2, \bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$

Par invariance par dilatation ( $z \rightarrow \lambda z, \bar{z} \rightarrow \bar{\lambda} \bar{z}$ ), on a

$$\langle \varphi(z_1, \bar{z}_1) \varphi(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \left( \frac{dz'}{dz} \right)^h \Big|_{z_1} \left( \frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}} \right)^{\bar{h}} \Big|_{\bar{z}_1} \left( \frac{dz'}{dz} \right)^h \Big|_{z_2} \left( \frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}} \right)^{\bar{h}} \Big|_{\bar{z}_2} \langle \varphi(z'_1, \bar{z}'_1) \varphi(z'_2, \bar{z}'_2) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle \varphi(z_1) \varphi(z_2) \rangle = \lambda^{2h} \bar{\lambda}^{2\bar{h}} \langle \varphi(z'_1, \bar{z}'_1) \varphi(z'_2, \bar{z}'_2) \rangle$$

$$= \lambda^{2h} \bar{\lambda}^{2\bar{h}} f(\lambda(z_1 - z_2), \bar{\lambda}(\bar{z}_1 - \bar{z}_2))$$

$$\Rightarrow f(z_1 - z_2, \bar{z}_1 - \bar{z}_2) = \frac{C_{12}}{(z_1 - z_2)^{2h} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2\bar{h}}}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\langle \varphi(z_1, \bar{z}_1) \varphi(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{C_{12}}{(z_1 - z_2)^{2h} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2\bar{h}}}.}$$

De là, on voit facilement que  $\langle \varphi_{out} | \varphi_{in} \rangle$  est bien défini :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{out} | \varphi_{in} \rangle &= \lim_{z, \bar{z}, w, \bar{w} \rightarrow 0} \langle 0 | \varphi^\dagger(z, \bar{z}) \varphi(w, \bar{w}) | 0 \rangle \\ &= \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \langle 0 | \varphi(1/\bar{z}, 1/z) \varphi(w, \bar{w}) | 0 \rangle \\ &= \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \langle 0 | \varphi(-1/\bar{z}, 1/z) \varphi(w, \bar{w}) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Soit  $\xi = \frac{1}{z}$ . Alors

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{\text{ext}} | \varphi_{in} \rangle &= \lim_{\xi, \bar{\xi} \rightarrow 0} \xi^{\frac{1}{2}\bar{L}} \bar{\xi}^{\frac{1}{2}L} \langle \alpha(\varphi(\xi, \bar{\xi})) \varphi(0, 0) \alpha \rangle \\ &= \lim_{\xi, \bar{\xi} \rightarrow 0} C_{12} \cdot \frac{\xi^{\frac{1}{2}\bar{L}} \bar{\xi}^{\frac{1}{2}L}}{\xi^{2\bar{L}} \bar{\xi}^{2L}} = C_{12}. \quad (\text{ok}) \end{aligned}$$

Enfin, on peut faire une expansion en série de Taylor d'un champ primaire du poids  $(L, \bar{L})$ :

$$\varphi(z, \bar{z}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-m-L} \bar{z}^{-n-\bar{L}} \varphi_{m,n}$$

$$\text{où } \varphi_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \cdot z^{m+L-n} \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \cdot \bar{z}^{m+\bar{L}-n} \varphi(z, \bar{z}) \text{ et } \varphi_{m,n}^+ = \varphi_{-m,-n}.$$

#### XIV. ALGÈBRE DE VIRENORE

Développons en série de Laurent la tensore énergie-impulsion :

$$\begin{cases} T(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{L_m}{z^{m+1}} \\ \bar{T}(\bar{z}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{L}_m}{\bar{z}^{m+1}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_m = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \cdot z^{m+1} \cdot T(z) \\ \bar{L}_m = \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \cdot \bar{z}^{m+1} \cdot \bar{T}(\bar{z}) \end{cases}$$

On voit que  $L_m$  est la charge conservée associée à la lfo conforme

$$\begin{cases} \delta z = \mathcal{E}(z) = z^{m+1} \\ \delta \bar{z} = \bar{\mathcal{E}}(\bar{z}) = \bar{z}^{m+1} \end{cases}$$

De plus, l'intégrale de contour se fait autour d'une branche spirale du cylindre. Cela signifie que  $L_m$  est la charge conservée i.e est constante lors de l'évolution dans le temps et le cylindre ou sous évolution radiale dans le plan complexe.

Quand on s'intéresse à une théorie quantique, les charges conservées deviennent les générateurs des lfos. Donc les opérateurs  $L_m$  et  $\bar{L}_m$  gènèrent les lfos conformes

$$\delta z = z^{m+1} \text{ et } \delta \bar{z} = \bar{z}^{m+1}.$$

→ ce sont les générateurs de Virasoro.

En particulier,

- $L_-$  et  $\bar{L}_-$  gènèrent les translations dans le plan
- $L_0$  et  $\bar{L}_0$  les rotations et les dilatations.

Par ailleurs, l'hamiltonien génère les translations dans le temps et donc correspond à l'op. de dilatations :

$$H \propto L_0 + \bar{L}_0.$$

### Relation de commutation

Evaluons le commutateur  $[L_m, L_n]$ :

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= \left( \oint \frac{dz}{2\pi i} \oint \frac{dw}{2\pi i} - \oint \frac{dw}{2\pi i} \oint \frac{dz}{2\pi i} \right) z^{m+n} w^{m+n} T(z) T(w) \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i} \oint_w \frac{dz}{2\pi i} z^{m+n} w^{m+n} T(z) T(w) \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i} \cdot \text{Res} \left[ z^{m+n} w^{m+n} \left( \frac{c/2}{(z-w)^2} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \text{reg. t.} \right) \right] \end{aligned}$$

Pour calculer le résidu, on fait un développement de Taylor de  $z^{m+n}$  autour de  $w$

$$z^{m+n} = w^{m+n} + (m+n) w^m (z-w) + \frac{1}{2} m(m+n) w^{m-1} (z-w)^2 + \frac{1}{6} m(m-1) w^{m-2} (z-w)^3 + \dots$$

et donc

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= \oint \frac{dw}{2\pi i} \cdot w^{m+n} \left[ \frac{c}{12} \cdot m(m-1) w^{m-2} + (m+n) w^m 2T(w) + \partial T(w) w^{m+n} \right] \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i} \left[ \underbrace{\frac{c}{12} m(m-1) w^{m+m-2}}_{\text{pole}} + (m+n) 2T(w) w^{m+m+1} + \underbrace{\partial T(w) w^{m+m+2}}_{w^{m+m-1-k}} \right] \\ T(z) &= \sum z^{-m-2} L_m \\ &= 2(m+n) L_{m+m} + \oint \frac{dw}{2\pi i} \cdot \sum (-k-2) w^{-k-3} L_k w^{m+m+2} + \frac{c}{12} m(m-1) \delta_{m+m,0} \\ &= 2(m+n) L_{m+m} + (-m-m-2) L_{m+m} + \frac{c}{12} m(m-1) \delta_{m+m,0} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow [L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + \frac{c}{12} m(m-1) \delta_{m+n,0} \quad \text{Alg. de Virasoro}$$

Le second terme commute avec toute l'algèbre : c'est une charge centrale.

De même,

$$[\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m-n) \bar{L}_{m+n} + \frac{c}{12} m(m-1) \delta_{m+n,0}$$

et  $[L_m, \bar{L}_n] = 0$ .

On remarque que l'alg. de Virasoro possède une sous-algèbre  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  :  $\{L_0, L_{-1}, L_{-2}\}$ .

## Algèbre de Witt vs Virasoro

Les opérateurs de coordonnées (différentiels) sont générés par les opérateurs

$$L_m = z^{m+n} \partial_z \quad ; \quad \bar{L}_m = \bar{z}^{m+n} \partial_{\bar{z}}$$

où  $[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n}$  (alg. de Witt).

C'est la première partie de l'alg. de Virasoro. En ce qui concerne la forme de charge centrale, on se rappelle qu'une IFS conforme n'est pas qu'une reparamétrisation, mais est accompagnée d'une IFS de Weyl. Le second terme est donc celui à cette IFS de Weyl.

## XV. ESPACE DE HILBERT DE LA QUANTIFICATION RADIALE

Soit l'état du v.v.  $|0\rangle$ . On impose qu'il soit invariant sous les IFS conformes globales, i.e. annulé par sous-algèbre  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  ( $L_0, L_{-1}, L_+$ ). De plus, on verra que  $|0\rangle$  est annihilé par  $L_m$ ,  $m > 0$ . Au final, on a

$$L_m |0\rangle = 0 \quad ; \quad \bar{L}_m |0\rangle = 0 \quad \forall m > 0.$$

Ensuite, on peut définir

$$|h, \bar{h}\rangle = \phi(0, 0) |0\rangle$$

où  $\phi(0, 0)$  est un champ primaire de poids  $(h, \bar{h})$ . On peut rajouter des tels champs qui agissent sur un état du v.v. créé en état propre de l'hamiltonien ( $T_P$ ). En effet, on a

$$\begin{cases} L_0 |h, \bar{h}\rangle = h |h, \bar{h}\rangle \quad \text{et} \quad \bar{L}_0 |h, \bar{h}\rangle = \bar{h} |h, \bar{h}\rangle \\ L_m |h, \bar{h}\rangle = \bar{L}_m |h, \bar{h}\rangle = 0 \quad \forall m > 0 \end{cases}$$

on a donc

$$H |h, \bar{h}\rangle = (h + \bar{h}) |h, \bar{h}\rangle.$$

Enfin, si on développe le champ en série de Laurent, on a

$$\phi(\omega, \bar{\omega}) = \sum_m \sum_n \omega^{-m-h} \bar{\omega}^{-n-\bar{h}} \phi_{m,n},$$

on a

$$[L_k, \phi_{m,n}] = (k(h - n) - m) \phi_{m+k, n}$$

$$[\bar{L}_k, \phi_{m,n}] = (\bar{k}(\bar{h} - n) - m) \phi_{m, n+\bar{k}}$$

Par conséquent,  $\phi_{m,n}$  sont des opérateurs d'échelle pour les états propres de  $L_0$ .

$$L_0 \phi_{m,n} |h, \bar{h}\rangle = (h - m) \phi_{m,n} |h, \bar{h}\rangle$$

$$\bar{L}_0 \phi_{m,n} |h, \bar{h}\rangle = (\bar{h} - m) \phi_{m,n} |h, \bar{h}\rangle$$

En conclusion,  $|h, \bar{h}\rangle$  est un état propre de l'hamiltonien généré par un champ primaire. De plus, il s'agit de l'état avec la plus basse n.v. ou, en théorie des groupes, l'état de p.h.p. En partant de cet état de p.h.p., on peut générer des états descendants

on agrègeant avec les générateurs de Virasoro  $L_m, \bar{L}_{-m}$  ( $m > 0$ ) :

$$L_{-k_1} \dots L_{-k_n} \bar{L}_{-\bar{k}_1} \dots \bar{L}_{-\bar{k}_m} |k, \bar{k}\rangle,$$

états de nœuds  $(k', \bar{k}') = (k_1 + k_2 + \dots + k_n, \bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \dots + \bar{k}_m) = |k+N, \bar{k}+\bar{N}\rangle$ , où  $N$  et  $\bar{N}$  sont les niveaux de l'état descendant. Un ensemble d'états  $|k\rangle$  ( $|\bar{k}\rangle$ ) est fermé sous l'action des générateurs de Virasoro et donc, forment une repr. de l'alg. de Virasoro. Un tel ensemble est appelé un module de Verma. Il dépend de 2 quantités :  $k$  et  $c$  ( $\bar{k}$  et  $\bar{c}$ ).

## XVI. (MARGE CENTRALE ET Pourquoi $D=26$ (aller chercher notes du TP8 pour + d'infos))

On a vu que pour avoir l'invariance de Lorentz, il faut que la théorie des cordes soit sur une surface à  $D=26$ , correspondant à 26 bosons libres qui localisent la corde dans le target space.

On se rappelle que le spectre de masse pour des cordes fermées est le

- au niveau 1 : particule en masse avec spin 2  $\rightarrow$  graviton

↳ Les gravitons proviennent des excitations de la corde fermée et vont construire une métrique  $g_{\mu\nu}$ .

En commençant par l'action de Polyakov dans un espace plat, la théorie des cordes se plonge dans un espace-temps dynamique. N'iel devient une théorie d'interactions et l'invariance conforme à 1-boucle  
 $\Rightarrow$  loi esp. d'Einstein.

Regardons ce que l'invariance conforme implique sur la worldsheet. La symétrie conforme a une symétrie de jauge résiduelle et ne doit donc pas être brisée dans la théorie quantique. Si elle l'est, la théorie comporte une anomalie : des configurations reliées par des lfs de jauge ne sont plus physiquement équivalentes

L'invariance conforme se résume à l'existence d'un tenseur énergie-impulsion sans trace. On peut montrer dans une théorie quantique

$$\langle T^{\mu}_{\mu}(x) \rangle = \frac{c}{24\pi} R(x)$$

avec  $R$  la courbure scalaire sur la worldsheet.

$\rightarrow$  anomalie de Weyl / conforme

Comme on a choisi la jauge conforme (où la worldsheet est plate) et on se demande donc si l'on doit se berner de l'anomalie de Weyl. Oui! Sous une lf de Weyl

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow \omega^\alpha g_{\alpha\beta}$$

et le scalaire de Ricci devient

$$R \rightarrow \omega^{-2} R - 2(D-1)g_{\alpha\beta} \omega^{-3} D_\alpha D_\beta \omega - (D-1)(D-4)g^{\alpha\beta} \omega^{-4} D_\alpha \omega D_\beta \omega$$

où le champ de jauge  $\omega$  apparaît explicitement: différents choix de jauge impactent directement un observable. Ainsi, on demande que la théorie ait une charge centrale totale = 0.

on a également vu que les états propres d'énergie d'un système invariant conforme hambo dans des repr. de l'alg. de Virasoro.

On part de l'état de p.h.p.  $|h\rangle$  défini par

$$L_0|h\rangle = h|h\rangle \quad L_m|h\rangle = 0 \quad \forall m > 0.$$

On applique les générateurs de virasoro de poids négatif sur cet état et on a une base pour les autres états de la rep. : les états descendants. On trouve le module de Verma générée par ces états

$$L_{-e_n} \dots L_{-e_m} |h\rangle \quad e_1 < e_2 < \dots < e_m = h + N.$$

Ce module de Verma dépend de  $h$  et  $c$ . Une rep. de l'alg. de Virasoro sera unitaire si elle ne contient pas d'état de norme négative (ghost). Comme  $L_m^+ = L_{-m}$ , le produit scalaire est

$$\langle h | L_{e_m} \dots L_{e_1} L_{-e_1} \dots L_{-e_m} | h \rangle$$

et peut être utilisé pour calculer la norme d'un état. On a

$$\begin{aligned} \langle h | L_n L_m | h \rangle &= \langle h | \left( L_{-m} L_m + 2m L_0 + \frac{c}{12} m(m^2 - 1) \right) | h \rangle \\ &= \left( 2m h + \frac{c}{12} m(m^2 - 1) \right) \langle h | h \rangle. \end{aligned}$$

L'unitarité impose 2 contraintes :

- si  $c < 0$  : la norme devient négative pour  $m$  grand.

↳ toutes les repr avec  $c < 0$  ne sont pas unitaires

Ainsi, prendre  $m = 1$  mq un poids conforme négatif  $\Rightarrow$  violation de l'unitarité.

$\Rightarrow$  unitarité requiert  $h \geq 0$  et  $c \geq 0$  (condition nécessaire seulement)

- si  $c = 0$  : la théorie est triviale, elle ne contient pas d'états excités.

Alors, l'anomalie de Weyl dit de supprimer la charge centrale, mais une théorie avec  $c = 0$  est triviale ..

La quantification covariante de l'action d'une corde requiert l'invariance d'un système de fantômes via la méthode de Faddeev-Popov de fixation de jauge.

Pour ces fantômes  $b$  et  $c$ , les opérs du tenseur énergie-impulsion échangent une charge centrale  $c = -96$ . On a également vu que l'exemple le plus simple de CFT, le boson libre vient avec  $c = 1$ .

$\rightarrow$  la façon la plus simple d'avoir l'annulation de l'anomalie de Weyl est d'avoir une théorie avec 96 bosons et 96 fants. pour la corde dans le target space.

La covariance de la théorie prédit le nombre de dimensions de l'espace-temps: c'est qq chose d'unique que GR ou QFT ne peuvent pas prédire.

$\rightarrow$  on finit avec 9 CFT découpées : théorie des cordes et ghost CFT, découpées des processus physiques et donc la non-unitarité n'a donc pas d'

## XVII. CORRESPONDANCE OPÉRATEUR - ETAT

Dans une QFT, les états et les opérateurs locaux sont des objets bien différents. En effet, les opérateurs locaux sont définis en des points précis de l'espace-temps, alors qu'un état se répartit sur tout l'espace-temps. Cela devient plus clair si on parle en terme de fonction d'onde de type Schrödinger.

En QFT, ces objets sont des fonctionnelles d'onde  $\mathcal{F}[\phi(\sigma)]$  qui décrivent la proba de chaque config du champ  $\phi(s)$  en chaque point  $\sigma$  de l'espace à temps fini.

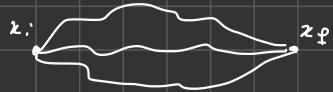
Bien que les états et les op. locaux sont des objets f., il y a un isomorphisme entre les 2 en CFT. La correspondance op. - état. L'idée est que les événements bien dans le passé sur un cylindre se retrouvent en  $z=0$  dans le plan complexe. Par conséquent, définir un état sur le cylindre dans le passé lointain = à définir une perturbation locale à l'origine du plan complexe.

Plus précisément, regardons les fonctions / fonctionnelles d'onde en MQ, en QFT, puis en CFT avec l'intégrale de chemin :

- En MQ

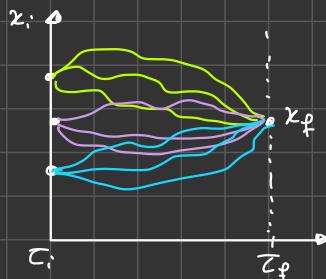
Le propagateur pour une particule qui se déplace entre  $(x_i, \tau_i)$  et  $(x_f, \tau_f)$  est donné par

$$G(x_f, x_i) = \int_{\substack{x(\tau_f) = x_f \\ x(\tau_i) = x_i}} \mathcal{D}x \cdot e^{iS}$$



Par conséquent, pour un système qui a pour état initial  $\psi_i(x_i)$  en  $\tau_i$ , il évoluera par

$$\psi_f(x_f, \tau_f) = \int dx_i \cdot G(x_f, x_i) \psi_i(x_i, \tau_i)$$



Il y a 2 choses à retenir :

- Pour évaluer les fonctionnelles d'onde en  $x_f$ , on évalue uniquement les intégrales de chemin avec comme condition finale

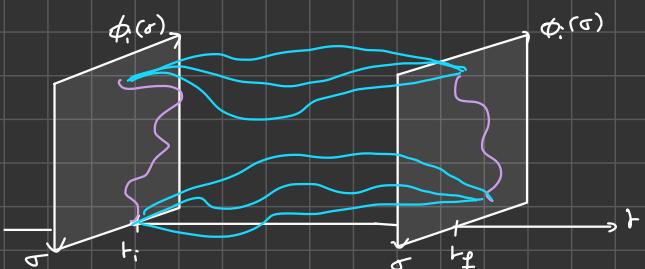
$$x(\tau_f) = x_f$$

- L'état initial  $\psi_i(x_i)$  agit comme une fonction poids pour l'intégrale sur les CT.

- En QFT

On a à faire à des fonctionnelles. Le propagateur qui lie la configuration du champ  $\phi(s)$  en un temps  $t_i$  et  $\phi_f$  en  $t_f$  est

$$K(\phi_i(\sigma), \phi_f(\sigma)) = \int_{\substack{\phi(\sigma, t_f) = \phi_f(\sigma) \\ \phi(\sigma, t_i) = \phi_i(\sigma)}} \mathcal{D}\phi(\sigma, t) \cdot e^{iS[\phi]}$$



Par conséquent, un état initial  $\psi_i(\phi(\sigma))$  au temps  $t_i$  va évoluer la

$$\psi_f(\phi_f(\sigma), t_f) = \int \mathcal{D}\phi_i \int_{\phi_i}^{\phi_f} \mathcal{D}\phi \cdot e^{-S[\phi]} \psi_i(\phi(\sigma), t_i).$$

La déf. de fonctionnelle d'onde en QFT à partir de l'espace bras/let se fait ± comme en 2D :

$$\psi(\phi(\sigma)) = \langle \psi | \phi(\sigma) \rangle.$$

### • En CFT

Pour le cas général des CFT en  $d+1$ , on l'a utilisé la quantification radiale (en coord. euclidiennes), on a

$$\mathbb{R} \times S^d \rightsquigarrow \mathbb{R}^{d+1}$$

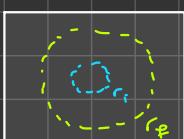
$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\sigma^2 \rightsquigarrow ds^2 = f(r) (dr^2 + d\sigma^2)$$



Après quantification radiale, les états sont définis sur des cercles de rayons constants  $|z| = r$ . En terme d'intégrale de chemin, on intègre sur tous les chemins avec comme condition aux frontières

$$\phi(r_i) = \phi_i \text{ et } \phi(r_f) = \phi_f$$

sur les bord des anneaux :



$$\psi_f(\phi_f(\sigma), r_f) = \int \mathcal{D}\phi_i \int_{C_i}^{C_f} \mathcal{D}\phi \cdot e^{-S[\phi]} \psi_i(\phi(\sigma), r_i)$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 $C_i$   $\phi_i$  weight of  $C_i$

On voit que l'effet de l'état initial est de changer le poids sur l'intégrale de chemin sur le bord de l'anneau  $|z|=r$ .

Si on prend un état initial bien dans le passé ( $z \rightarrow 0$ ), on doit intégrer sur un disque  $|z| < r_f$  et plus sur un anneau. De plus, le seul effet de l'état initial est de changer le poids de l'int. de chemin en  $z=0$ .

→ chaque opérateur local  $O(z=0)$  définit un état ≠ de la théorie.

$$\psi[\phi_f, r] = \int \mathcal{D}\phi_i \int_{\phi_i}^{\phi_f} \mathcal{D}\phi \cdot e^{-S[\phi]} \underbrace{\psi_i(\phi(\sigma), 0)}_{O(z=0)}$$

et  $\phi_i$  est assuré en scalaire et  $\psi$  un op. local en  $z=0$

$$\psi[\phi_f, r] = \int \phi(r) - \phi_f \mathcal{D}\phi \cdot e^{-S[\phi]} \cdot O(z=0)$$

→ ce qui était une fonctionnelle étaient  
un op : op-state correspondance !

## Remarquer

- On a pris l'exemple de la CFT à  $(1+1)$ -dim, mais cela est valable en CFT  $(d+n)$ -dim. En QFT non-conforme, un opérateur crée plusieurs états.
- La correspondance ne dit pas que le  $\#$  op =  $\#$  états. Il s'agit d'une correspondance  $1-1-1$  avec des op. locaux.
- On pourrait croire que c'est similaire au cas de la quantification canonique d'un champ libre en QFT : on crée les états en agissant avec des op. de créations, mais ça n'a rien à voir. Les op. sont des lfos de Fourier d'op. locaux et donc leurs lfos sont locaux.

## Consequence de cette correspondance

- 1) On a défini 2 objets que l'on a appellé primaire : des états et des op. La correspondance fait le lien entre ces 2. Soit l'état  $|O\rangle$ , on construit en insérant un opérateur primaire  $O$  dans l'intégrale de chemin en  $z=0$ . On a

$$\begin{aligned} L_m |O\rangle &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \cdot z^{m+n} T(z) O(z=0) \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \cdot z^{m+n} \left( \frac{BO}{z^2} + \frac{CO}{z} + \dots \right) \end{aligned}$$

On peut se demander où l'intégrale de chemin intervient. Rappelons que ce genre d'expression d'opérateurs est pris à l'intérieur des fts de corrélation implicitement et donc dans une intégrale de chemin.

En particulier,

- $L_{-1}|O\rangle = |O\rangle$  : vrai bcp, même non primaire car  $L_{-1}$  est le générateur des translations
- $L_0|O\rangle = h|O\rangle$  : vrai bcp avec une lfo pour chaque échelle bien définie
- $L_m|O\rangle = O$   $\forall m \neq 0$  : vrai que pour des op. primaires (c'est la condition pour qu'un op. soit primaire)

?

On comprend donc mieux pourquoi on s'intéresse aux poids des op. primaires. Il s'agit du poids en énergie et moment angulaire de la théorie définie sur le cylindre.

- 2) On peut utiliser l'idée de la correspondance afin de comprendre pourquoi les op. fonctionnent si bien en CFT. Supposons que l'on soit intéressé par une ft de corrélation avec des insertions d'opérateurs :



Les OPE nous permettent de remplacer les 2 opérateurs à l'intérieur du cercle par une somme d'ops en  $z=0$ , indépendamment de ce qu'il y a en dehors du cercle. Cela peut paraître surprenant pour des op., mais cela vient du fait que l'on cultive l'intégrale de chemin jusqu'au cercle pour l'effet des 2 op. qui déterminent l'état que l'on a. Cela nous donne une façon de comprendre pourquoi les OPE sont exacts en CFT, avec un rayon de convergence qui vaut la distance à l'équelle se trouve la prochaine insertion.

### XVIII. EXEMPLE : CHAMP SCALAIRE LIBRE

Illustrons cette correspondance état-opérateur avec le champ scalaire.

Sur un cylindre euclidien, on a

$$X(\omega, \bar{\omega}) = x + \alpha' p \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{g}} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} (\alpha_m e^{im\omega} + \tilde{\alpha}_m e^{i\bar{m}\bar{\omega}})$$

où les conditions pour avoir un champ réel donnent

$$\alpha_m^* = \alpha_{-m} \quad ; \quad \tilde{\alpha}_m^* = \tilde{\alpha}_{-m}.$$

On a vu que  $X(\omega, \bar{\omega})$  n'est pas un champ primaire mais que  $\partial_\omega X(\omega, \bar{\omega})$  l'est. On va donc travailler avec. Sur un cylindre, on a

$$\partial_\omega X(\omega, \bar{\omega}) = - \sqrt{\frac{\alpha'}{g}} \sum_m \alpha_m e^{im\omega}$$

$$\text{avec } \alpha_m = i \sqrt{\frac{\alpha'}{g}} p.$$

Comme  $\partial X$  est un champ primaire de poids  $h = 1$ , sa lift vers le plan complexe est ( $z = e^{-i\omega}$ )

$$\partial_z X(z) = \left( \frac{\partial z}{\partial \omega} \right)^{-1} \partial_\omega X(\omega) = -i \sqrt{\frac{\alpha'}{g}} \sum_m \frac{\alpha_m}{z^{m+1}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_m = i \sqrt{\frac{g}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^m \cdot \partial_z X(z),$$

Grâce à l'opérateur  $\partial_z \partial_z X$ , on déduit les relations de commutation

$$\begin{aligned} [\alpha_m, \alpha_n] &= -\frac{g}{\alpha'} \left[ \oint \frac{dz}{2\pi i} \cdot \oint \frac{d\omega}{2\pi i} - \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \cdot \oint \frac{dz}{2\pi i} \right] z^m \omega^n \partial_z X(z) \partial_z X(\omega) \\ &= -\frac{g}{\alpha'} \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \operatorname{Res}_{z=\omega} \left[ z^m \omega^n \left( \frac{-\alpha'/2}{(z-\omega)^2} + \dots \right) \right] \quad \boxed{z^m = \omega^m + m \omega^{m-1} (z-\omega)} \\ &= m \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \cdot \omega^{m+n-1} \\ &= m \cdot \delta_{m+n, 0}. \end{aligned}$$

→ on a bien la rel. de com. de la quantification canonique.

Intéressons-nous maintenant à la correspondance état-opérateur. De la quantification canonique, l'espace de Fock est défini en agissant avec les opérateurs  $\alpha_{-m}$ ,  $m > 0$  sur  $|0\rangle$ , la

$$\alpha_m |0\rangle = 0.$$

Le nombre  $\alpha_0 \sim p$  va donner un autre nombre quantique aux états. Un état général s'écrit

$$\frac{a_0}{\sqrt{\pi}} \alpha_{-m}^{b_m} |0, p\rangle.$$

Essayons de retrouver ces états avec des insertions d'opérateurs dans des intégrales de chemin.

Dans un premier temps, vérifions que l'insertion de l'opérateur donne  $|0\rangle$ , ce que la fonctionnelle d'état de l'état du vide d'une théorie sur un cercle ( $|z|=r$ ) vérifie

$$\psi_0(x_f) = \int_{x_i}^{x_f} dx \cdot e^{-S[x]}.$$

On veut vérifier que ça vérifie  $\alpha_m |0\rangle = 0 \quad \forall m > 0$ .

Comment agit un opérateur sur une fonctionnelle d'état ? On insère l'intégrale de contour

$$\alpha_m = i\sqrt{\frac{g}{\pi}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^m \partial_x(z),$$

en  $|z| < r$  et on prend l'intégration  $\partial_x$  avec la condition finale  $x(|z|=r) = x_f$ . (L'état va disparaître après avoir agit avec  $\alpha_m$ )

$$\alpha_m \psi_0(x_f) \propto \int_{x_i}^{x_f} dx \cdot e^{-S[x]} \oint \frac{dw}{2\pi i} w^m \partial_x(w)$$

Si l'action diverge pour une certaine configuration du champ au bord du disque ( $|z| < r$ ,  $e^{-S[x]} \rightarrow 0$  et ne contribue pas à l'intégrale de chemin). Cela nous assure que seules les termes  $\partial_x(z)$ , sans singularité dans le disque, contribuent.

Pour démontrer,

$$\oint \frac{dw}{2\pi i} w^m \partial_x(w) = 0 \quad \forall m > 0$$

$$\Rightarrow \psi_0(x_f) est l'état du vide \quad \textcircled{d}$$

NB :  $\alpha_0$  annihile aussi cet état, on l'identifie comme l'état du vide avec  $p=0$ .

Qu'en est-il des états excités ? On a

$$\alpha_m |0\rangle = |\partial^m X\rangle$$

et donc, l'état  $\alpha_m |0\rangle$  peut être construit depuis l'intégrale de chemin.

$$\alpha_m |0\rangle = \int dx \cdot e^{-S[x]} \partial^m X(z=\infty)$$

Démonstration

Si on agit avec  $\alpha_m$  sur  $|\partial^m X\rangle$ , on a

$$\alpha_m |\partial^m X\rangle \sim \int_{x_i}^{x_f(r)} dx \cdot e^{-S[x]} \oint \frac{dw}{2\pi i} w^m (\partial_x(w) \partial^m X(z=\infty))$$

$$\alpha_m \alpha_{-m} |0\rangle \sim \delta_{m,-m}$$

$$\sim \oint \frac{dw}{2\pi i} w^m (\partial_x(w) \partial^m X(z=\infty))$$

En utilisant l'OPÉ

$$\partial_x(z) \partial_x(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2}$$

on a

$$\alpha_n | \partial^m X > \sim \oint \frac{dz}{2\pi i} \omega^m \partial_z^{m-1} \frac{1}{(z-z')^2} \Big|_{z=0} = m! \oint \frac{dz}{2\pi i} \omega^{m-m-1}$$
$$= 0 \quad \text{sauf si } m=0$$

$$\sim \delta_{m,0}.$$

D

Enfin, intéressons-nous aux zéro-modes i.e.  $\alpha_0 \sim p$ . L'impulsion d'un état va apparaître en faisant une insertion d'op.  $e^{ipx}$ . Par exemple,

$$|\alpha, p> \sim \int dx \cdot e^{-S(x)} \underbrace{e^{ip \cdot x}}_{V_p(z=0)} \quad (\text{TPB})$$

avec  $V_p(z, \bar{z})$  un op. de vertex.

## XIX. ETATS ET OPÉRATEURS DE VERTEX

On considère l'invariance sous difféo. Une théorie avec une métrique dynamique, insérer des opérateurs dans la worldsheet ne donne pas des opérateurs invariants sous difféo. Autrement dit, on ait l'intégrale de chemin

$$\int dx Dg \cdot e^{-S_{\text{act}}(x, g)}$$

et l'invariance conforme permettrait d'écrire

$$\int Dg \cdot \int dx \cdot e^{-S_{\text{act}}(x, g=z)}$$

L'action de Polyakov est invariante conforme, mais rien ne nous assure que si l'on y insère des op., elle la restera.

Pour obtenir un objet invariant sous difféo de la worldsheet, on doit intégrer sur toute la worldsheet. Les insertions d'opérateurs dans la jauge conforme sont donc

$$V \sim \int dz \cdot O(z),$$

à une constante de normalisation près.

Ainsi, intégrer sur toute la worldsheet résoud des difféo, mais qu'en est-il des symétries de Weyl?

La mesure  $dz d\bar{z} = d^2z$  a un poids  $(-1, -1)$  sous le rescaling. Pour le compenser, l'opérateur  $O$  doit avoir un poids  $(1, 1)$ .

Les états physiques sont donc les états primaires de la CFT de poids  $(1, 1)$ . On appelle l'op  $V$  associé à ces états un opérateur de vertex.

De plus, un opérateur comme  $\partial^m X$  est tel en CFT mais pas pour la théorie des cordes car il a un poids  $(m, 0)$ .

Exemple : cordes formées dans un espace plat

## Tachyon

Recherchons la sphère de la corde formée dans un espace plat. On commence avec le grand state, que l'on avait identifié à un tachyon. Le vide d'une CFT est associé à l'opérateur identité, mais on a aussi des zeros modes. On peut donner de l'impulsion  $p^\mu$  à la corde en agissant avec l'opérateur  $e^{ip \cdot X}$ . L'opérateur de vertex associé au grand state de la corde est :

$$V_{\text{tachyon}} \sim \int d^2 z : e^{ip \cdot X} :$$

L'opérateur

$$V_p = e^{ip \cdot X(z, \bar{z})}$$

avec  $p \cdot X = \sum_{m=0}^{\infty} p_m X^m$  est primaire.

On calcule

$$T(\omega) V_p(z, \bar{z}) \quad \text{et} \quad \bar{T}(\omega) V_p(z, \bar{z})$$

et on a

$$(T, \bar{T}) = \frac{\alpha' \cdot p^2}{4} (1, -1).$$

Par conséquent, l'invariance de l'onglet requiert que l'opérateur ait un poids  $(1, -1)$ , ce qui est vrai si

$$\frac{\alpha' \cdot p^2}{4} = 1 \Leftrightarrow -p^2 = -\frac{4}{\alpha'}$$

$$\Rightarrow M^2 = -\frac{4}{\alpha'} \quad \text{masse d'un tachyon.}$$

→ on identifie cet opérateur à celui qui crée des tachyons.

## Graviton

Regardons les premiers états excités. Pour  $N = \bar{N} = 1$ , on pouvait créer un état comme

$$\oint_{\partial D} \alpha_{-n}^{-m} \tilde{\alpha}_n^m |0; p\rangle$$

avec  $\alpha_{\mu\nu}$  un tenseur constant qui détermine le type d'état, avec sa polarisation.

$$\begin{aligned} \alpha_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} + \overline{\Phi} \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\quad \text{traceless} \quad \text{antisym.} \quad \text{trace} \\ &\rightarrow \text{graviton} \quad \rightarrow g \text{ field} \quad \rightarrow \text{dilaton (scalaire)} \end{aligned}$$

L'opérateur de vertex associé à l'état

$$\alpha_{-n} |0\rangle = \int dX \cdot e^{-S(X)} \partial^m X(z=0)$$

est

$$V_{\text{vertex}} \sim \int d^2 z : e^{ip \cdot X} \partial X^m \bar{\partial} X^{\bar{n}} : \alpha_{\mu\nu}$$

où  $\partial X^m \equiv \partial_{-n}^m$  et  $\bar{\partial} X^m \equiv \tilde{\partial}_{-n}^m$ .

Le poids de cet opérateur est

$$(P, \bar{P}) = \left(1 + \frac{\alpha' p^2}{4}\right) (1, 1)$$

et l'invariance de Weyl requiert que

$$p^2 = 0,$$

et comme le graviton doit être sans masse, c'est cool !

Vérifions que cet opérateur est primaire. On sait que  $\partial X$  est primaire, tout comme  $e^{ip \cdot X}$ . Comme on les considère dans un normal ordering, des extra terms dans les contractions de Wick donneront des termes en

$$\frac{1}{(z-w)^3}$$

dans l'OPÉ, ce pourrait ruiner la fact que l'opérateur soit primaire. On a

$$T(\omega) V_{\text{ord.}} \sim \eta^\rho_\mu \frac{1}{(z-\omega)^2} \cdot \rho^\mu \frac{1}{z-\omega} : \bar{\partial} X^\nu e^{ipX} : S_\mu^\nu$$

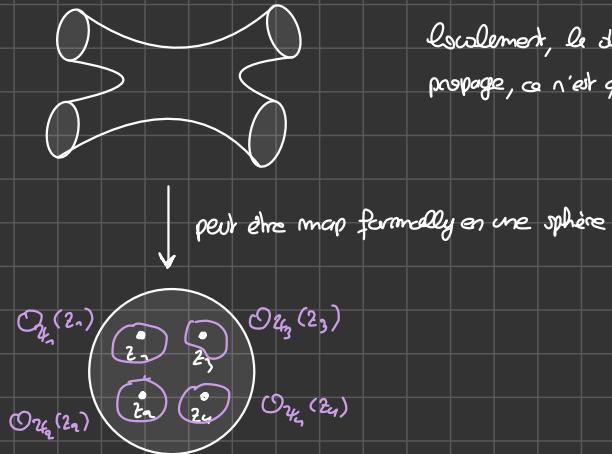
$$\Rightarrow \rho^\mu S_\mu^\nu = \rho^\nu S_\mu^\mu = 0$$

et ça impose que le graviton soit transverse, il n'y aura pas de polarisation longitudinale.

## (B) Chapitre 6 : interaction de cordes

On veut maintenant considérer des interactions de cordes. Si on continue avec notre analogie et avec la QFT, on pourrait penser que les interactions demandent d'ajouter des termes non-linéaires à l'action. Ce n'est cependant pas le cas. Cela briserait la symétrie de jauge. En fait, toutes les inflows pour les interactions sont déjà contenues dans la théorie libre, décrite par l'action de Polyakov.

Les diagrammes de Feynmann de QFT donnent des surfaces de Riemann :



## I. TOPOLOGIE DE LA WORLD SHEET

Il existe un autre moyen de créer des interactions à partir d'une théorie à 96 scalaires libres sur la worldsheet.

On se rappelle que la gravité en 2 dimensions ne peut pas être réalisée par l'action d'Einstein-Hilbert : les éqs. d'Einstein sont triviales et ne donnent pas de contraintes sur la géométrie car

$$2R_{\alpha\beta} = Rg_{\alpha\beta}, \quad ?\text{ où ?}$$

indépendamment des éqs. d'Einstein. Il y a cependant une signification topologique à l'action de Einstein-Hilbert, donnée par le thm de Gauß-Bonnet :

$$\chi(M) = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \cdot \sqrt{g} \cdot R^{(2)},$$

avec  $\chi$  la caractéristique d'Euler de la worldsheet, qui est un invariant topologique. Comme l'intégrale de chemin demande d'intégrer sur toutes les métriques et de sommer sur les homologues, ce thm va s'avérer utile.

On considère l'action de la corde

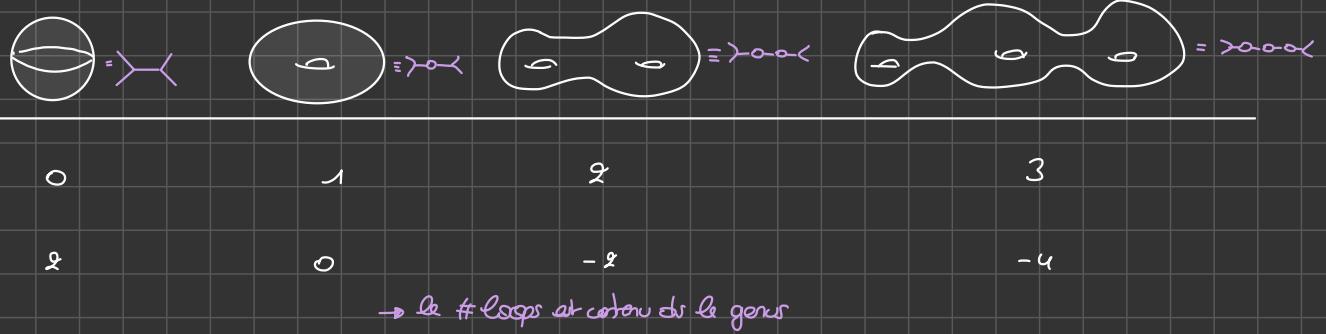
$$S_{\text{string}} = S_{\text{hol}} + \lambda \chi,$$

avec  $\lambda$  la caractéristique d'Euler de la worldsheet.

Pour des variétés sans boundary, la caractéristique d'Euler est

$$\chi = 2(1-g) \sim \int_{\Sigma} R^{(2)}$$

avec  $g$  le genre de la surface  $\Sigma$ .



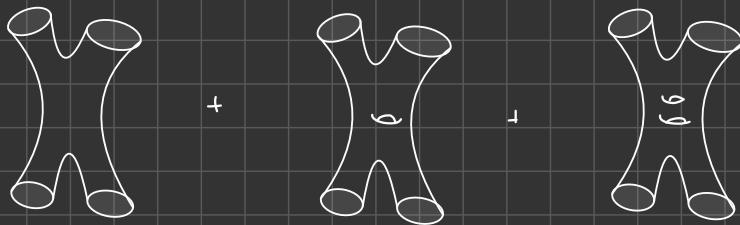
Le genre est un invariant homologique : les variétés homologiques avec le même genre sont homéomorphes. L'intégrale de chemin de la corde est

$$\sum_{\text{genre}} e^{-2\pi(1-g)} \int Dg \cdot Dx \cdot e^{-S_{\text{rel}}}.$$

Pour  $e^t \ll 1$ , on a une bonne expansion perturbative (série asymptotique) en terme de  $g$ . On définit alors la constante de couplage de la corde par

$$g_s = e^t.$$

En sommant sur les homologies et en considérant une expansion perturbative des interactions de la corde, on a l'existence de diagrammes de "bracelet" :



## II. AMPLITUDE DE VIAFORDO - SHAPIRO

On veut calculer la matrice  $S$ , cette fois en considérant les fonctions de corrélations d'états asymptotiques. La correspondance état-opérateur nous dit que ces états sont générés par des opérateurs de vertex sur la worldsheet.

Pour  $m$  états  $\alpha_i$  avec une impulsion  $p_i$ , on a le même nombre d'opérateurs de vertex  $V_{\alpha_i}(p_i)$ . Les éléments de matrice au tree-level sont donnés par

$$A^{(m)} = \frac{1}{g_s^2} \cdot \frac{1}{\text{vol}} \int dx \cdot Dg \cdot e^{-S_{\text{rel}}} \prod_{i=1}^m V_{\alpha_i}(p_i).$$

L'intégrale de chemin suggère que l'on traîne sur toutes les matrices sur la sphère. Cependant, toutes les matrices sur la sphère sont conformément plates : on peut fixer les différences et les libertés de jauge de Weyl pour calculer des fonctions de corrélations sur le plan au lieu de la sphère. On se retrouve alors qu'il y a une symétrie de jauge étonnante : les formes conformes  $SL(2, \mathbb{C}) / \mathbb{Z}_2$ , qui permettent de bouger 3 points quelconques du plan.

Si on considère la diffusion des tachyons, ils sont générés par des opérateurs de vertex

$$V(p_i) = g_s \int d^2z \cdot e^{ip_i \cdot z} = g_s \int d^2z \cdot \hat{V}(z, p_i).$$

La matrice  $S$  devient

$$A^{(m)} = g_s^{m-2} \cdot \frac{1}{\text{vol}(SL(2, \mathbb{C}))} \int \prod_{i=1}^m \int d^2z_i \langle \hat{V}(z_1, p_1) \dots \hat{V}(z_m, p_m) \rangle.$$

Au TP10, on a calculé que l'amplitude de Vissarion-Shapiro est

$$A^{(m)} \sim g_s^2 \delta^{(2d)}(\sum_i p_i) \frac{\Gamma(-\frac{\alpha' u}{4} - 1) \Gamma(-\frac{\alpha' s}{4} - 1) \Gamma(-1 - \frac{\alpha' t}{4})}{\Gamma(2 + \frac{\alpha' u}{4}) \Gamma(2 + \frac{\alpha' s}{4}) \Gamma(2 + \frac{\alpha' t}{4})}$$

c'est une amplitude de brachyon. Si on prend la limite  $s \rightarrow \infty$  et qu'on utilise la compacité asymptotique de la fonction gamma

$$\Gamma(n) \sim e^{x \ln(n)}$$

on peut alors

$$A^{(n)} \sim g_s^2 \delta^{(2d)}(\sum_i p_i) \cdot \exp\left(-\frac{\alpha'}{2} (-\ln(s) + k \ln(r) + u \ln(t))\right).$$

L'amplitude des tree-level décroît exponentiellement à très haute énergie. Individuellement, chaque diagramme de particules de Feynmann contribuant à l'amplitude de la corde diverge, mais la somme infinie de ces diagrammes donne un résultat fini. C'est une conséquence du fait que la théorie des cordes est une théorie d'objets étendus : l'interaction est lissée et ne présente plus un point singulier, un vertex, mais une surface étendue. Le fait que ce soit UV-fini est une caractéristique des amplitudes 1 et 2-loop.

## Chapitre 7: actions effectives à basse énergie

Jusqu'ici, on a seulement discuté de cordes se propageant dans l'espace-temps plat. Ici, on va considérer des cordes se propageant dans différents background, et donc différentes CFT sur la worldsheet de la corde.

Une généralisation de l'action de Polyakov pour décrire une corde se déplaçant dans un espace-temps courbe est

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X^\nu G_{\mu\nu}(x), \quad \rightarrow \neq \text{tenseur d'Einstein}$$

où  $g_{\mu\nu}$  est la métrique sur la worldsheet. Cette action décrit une map de la worldsheet dans un espace-temps de métrique  $G_{\mu\nu}$ .

Le problème avec cette action est que la quantification de la corde formée nous a déjà donné un graviton. Si on veut construire une telle métrique  $G_{\mu\nu}$ , elle doit être construite à partir de gravitons.

Pour le voir, on peut utiliser les opérateurs de vertex. Si on étend la métrique comme une petite fluctuation autour d'un espace plat, on a

$$G_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$$

Alors, la fonction de partition construite à partir de l'action est reliée à celle de l'espace plat par

$$\mathcal{Z} = \int D\bar{X} Dg e^{-S_{\text{rel}} - V} = \int D\bar{X} Dg e^{-S_{\text{rel}}} \cdot (1 - V + \frac{1}{2} V^2 + \dots)$$

car

$$V = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X^\nu h_{\mu\nu}(x)$$

$V$  est en fait l'opérateur de vertex associé à l'état de graviton de la corde.

Pour une corde plane correspondant à un graviton dont la polarisation est donnée par le tenseur sym. et sans trace  $S_{\mu\nu}$  et l'impulsion  $p^\mu$ , la fluctuation est donnée par

$$h_{\mu\nu}(x) = P_{\mu\nu} \propto e^{ip \cdot x},$$

et on retrouve bien notre op. de vertex.

### Remarque

De manière générale, n'importe quelle superposition linéaire d'onde plane marche pour construire  $h_{\mu\nu}(x)$ .

Insérer une copie de  $V$  dans l'intégrale de chemin = introduire un état de graviton. Insérer  $e^V$  correspond à un état cohérent de graviton et change la métrique  $\eta_{\mu\nu}$  en  $\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ .

La métrique courbe de  $S$  est donc bien construite à partir de gravitons quantifiés.

## I. EQUATIONS D'EINSTEIN

En jauge conforme, l'action de Polyakov dans un espace plat se réduit à une théorie libre, ce qui nous a permis de calculer le spectre de la théorie. Ce n'est plus le cas pour un espace courbe.

En jauge conforme, la théorie de la worldsheet est décrite par une théorie des champs d'interaction à 2d :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \cdot G_{\mu\nu}(x) \partial_\sigma x^\mu \partial^\sigma x^\nu.$$

La théorie a un nombre infini de constantes de couplage stockées dans  $G_{\mu\nu}$ . On peut également utiliser la théorie des perturbations pour étudier la CFT de  $S$  : si la métrique varie sur une échelle  $\gg \text{r}_c$ , une quantité calculée en théorie des cordes est donnée par une double perturbation expansion : une en  $\alpha'$  et une en  $g_s$ .

### Fonction Beta (Connexion entre la target space et la worldsheet)

Classiquement, la théorie décrite par

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \cdot G_{\mu\nu}(x) \partial_\sigma x^\mu \partial^\sigma x^\nu$$

est invariante conforme. Ce n'est pas spécialement le cas quantiquement (anomalie). Pour régulariser les divergences, on va introduire un cut-off UV et après renormalisation, les quantités physiques dépendent du facteur d'échelle  $\mu$ . Si c'est le cas, la théorie n'est plus invariante conforme (ex : Yang-Mills).

En théorie des cordes, l'invariance conforme est une symétrie de jauge qu'on ne peut pas la perdre. On va donc chercher à comprendre quand  $S$  conserve l'invariance conforme au niveau quantique.

L'objet qui décrit comment les couplages dépendant de  $\mu$  ont la  $\beta$ -fonction. On va plutôt s'intéresser ici à la  $\beta$ -fonctionnelle

$$\beta_{\mu\nu}(G) = \mu \frac{\partial G_{\mu\nu}(x, \mu)}{\partial \mu}.$$

La théorie quantique sera donc invariante conforme si :

$$\beta_{\mu\nu}(G) = 0.$$

Calculons ce qu'il se passe à 1-loop. On va isoler la divergence UV et voir quelle sorte de contre-termes on doit ajouter. La  $\beta$ -fonction s'annulera si ces c.t. s'annulent.

On choisit des "Riemann normal coord." dans le T-space pour faciliter les choses autour d'un point  $\bar{x}$ ,

$$x^\mu = \bar{x}^\mu + \sqrt{\alpha'} \cdot \gamma^\mu$$

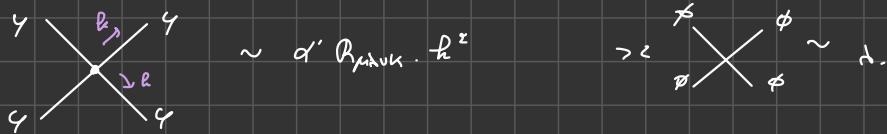
où  $\gamma^\mu$  = fluctuations dynamiques, tq

$$G_{\mu\nu}(x) = \tilde{G}_{\mu\nu} - \frac{\alpha'}{3} R_{\mu\nu\lambda\kappa}(\bar{x}) \gamma^\lambda \gamma^\kappa + \mathcal{O}(\gamma^3).$$

A l'ordre quartique dans les fluctuations, l'action devient

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \left[ \partial_{\mu} \gamma^{\nu} \partial^{\rho} \gamma^{\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{\alpha'}{3} R_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \partial_{\rho} \gamma^{\sigma} \partial_{\sigma} \gamma^{\mu} \right]$$

et on peut traiter ça comme une QFT d'interaction en 2d:



Maintenant que l'on a réduit le problème à une simple QFT, on peut calculer la  $\beta$ -fonction. La divergence vient du diagramme



et il y a plus simple de le traiter dans l'espace des positions. Le propagateur pour une particule scalaire est

$$\langle \gamma^{\mu}(\sigma) \gamma^{\nu}(\sigma') \rangle = -\frac{1}{2} \delta^{\mu\nu} \ln |\sigma - \sigma'|^k,$$

et il diverge pour  $\sigma \rightarrow \sigma'$ . Pour isoler la divergence, on utilise la régularisation dimensionnelle avec  $d = 2 + \varepsilon$ .

Le propa. devient

$$\langle \gamma^{\mu}(\sigma) \gamma^{\nu}(\sigma') \rangle = 2\pi \delta^{\mu\nu} \int \frac{d^{2+\varepsilon} k}{(2\pi)^{2+\varepsilon}} \cdot \frac{e^{ik(\sigma-\sigma')}}{k^2}.$$

Pour soustraire ce terme en  $\frac{1}{\varepsilon}$ , on ajoute le contre-termme

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \partial_{\rho} \gamma^{\sigma} \rightarrow R_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \partial_{\rho} \gamma^{\sigma} - \frac{1}{\varepsilon} R_{\mu\nu} \partial_{\rho} \gamma^{\sigma}$$

Cela peut alors résulter par la renormalisation de la fact d'onde

$$\gamma_{\mu\nu} \rightarrow \gamma_{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{6\varepsilon} \cdot R_{\mu\nu} \gamma^{\sigma}$$

et avec la renormalisation de la constante de couplage  $G_{\mu\nu}$ :

$$G_{\mu\nu} \rightarrow G_{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{\varepsilon} R_{\mu\nu}.$$

Ainsi, l'invariance conforme est obtenue si

$$\boxed{R_{\mu\nu}(G) = \alpha' R_{\mu\nu} = 0}$$

→ Wow ! La demande pour que la théorie soit invariante conforme est que  
le T-space soit Ricci plat :  $R_{\mu\nu} = 0$

→ Le spacetime dans lequel la constante d'énergie doit obéir aux éqs d'Einstein dans le vide

Les éqs de la GR décivent aussi le filtre du groupe de renorm. de ces sigma-modèles à 2d !

## Le dilaton

Regardons comment la corde couple à un champ de dilaton  $\Phi(x)$ , ce qui est plus subtil. Une construction naïve de l'opérateur de vertex n'est pas primaire (voir Polchinski pour la bonne démonstration).

L'action d'une corde se déplaçant dans un background incluant des profils pour les champs sans masse  $G_{\mu\nu}$ ,  $B_{\mu\nu}$  et  $\Phi(x)$  est donnée par

$$\begin{aligned} S \sim & \int d^9x \cdot \left\{ \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu G_{\mu\nu}(x) + :B_{\mu\nu}(x) \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu + :B_{\mu\nu}(x) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \varepsilon^{\alpha\beta} \right. \\ & \left. + \sqrt{g} \cdot \alpha' \bar{\Phi}(x) R^{(2d)} \right\} \\ = & \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^9x \cdot \sqrt{g} \left\{ G_{\mu\nu}(x) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g^{\alpha\beta} + :B_{\mu\nu}(x) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \varepsilon^{\alpha\beta} + \alpha' \bar{\Phi}(x) R^{(2d)} \right\} \end{aligned}$$

notion d'orientation  
sur la surface de Riemann

cor antisymétrique

forme holologique cor n'involue pas la métrique

Le couplage du dilaton est maintenant cor :

- Le terme dans l'action s'annule sur une worldsheet plate car  $R^{(2d)} = 0$ . C'est une des raisons pour lesquelles il est difficile de déterminer ce couplage via les opérateurs de vertex.
- Le couplage du dilaton ne respecte pas l'invariance de Weyl, mais il y a un moyen de restaurer ça, grâce au  $\alpha'$ .

En effet,  $\alpha'$  est simplement là pour des raisons dimensionnelles. Cependant,  $\alpha'$  joue un rôle dans la paramétrisation d'expansion de branche  $\sqrt{g}$ . Ce qui veut dire que le manque d'invariance de Weyl peut être compensé par une contribution à une branche provenant des couplages à  $G_{\mu\nu}$  et  $B_{\mu\nu}$ . Pour le voir explicitement, on calcule les  $\beta$ -fct de la théorie 2d :

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^9x \cdot \sqrt{g} \left\{ G_{\mu\nu}(x) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g^{\alpha\beta} + :B_{\mu\nu}(x) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \varepsilon^{\alpha\beta} + \alpha' \bar{\Phi}(x) R^{(2d)} \right\}$$

On a que

$$\bullet \quad \beta_{\mu\nu}(G) = \alpha' R_{\mu\nu} + 2\alpha' D_\mu D_\nu \bar{\Phi} - \frac{\alpha'}{2} H_{\mu\nu\lambda} H_{\lambda}^{\lambda K}$$

avec  $H = dB$ , et la 1-forme jauge

$$B \rightarrow B + d\omega$$

$$\bullet \quad \beta_{\mu\nu}(B) = -\frac{\alpha'}{2} \nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} + \alpha' (\nabla^\lambda \bar{\Phi}) H_{\lambda\mu\nu}.$$

$$\bullet \quad \beta_{\mu\nu}(\bar{\Phi}) = -\frac{\alpha'}{2} \nabla^\lambda \bar{\Phi} + \alpha' D_\mu \bar{\Phi} D^\mu \bar{\Phi} - \frac{\alpha'}{24} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda}.$$

L'invariance de Weyl requiert

$$\beta_{\mu\nu}(G) = \beta_{\mu\nu}(B) = \beta_{\mu\nu}(\bar{\Phi}) = 0.$$

Cette éq peut servir comme les EOT du background dans lequel la corde se propage. On cherche une action d'espace-temps  $D = 26$  qui reproduit ces éqs de  $\beta$ -fonctions comme EOT.

C'est l'action effective à basse énergie de la corde bosonique

$$S = \frac{1}{g_{\text{HO}}^2} \int d^9x \cdot \sqrt{-G} e^{-2\bar{\Phi}} \left( R - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} + 4 \cdot \partial_\mu \bar{\Phi} \partial^\mu \bar{\Phi} \right)$$

où l'on a fait une rotation de Wick vers l'espace de Minkowski.

→ théorie dans le larger space

Sergio Cecotti:

## Chapitre 8 : compactification et T-dualité

On va considérer la compactification la + simple de la corde bosonique : un background spacetime de la forme

$$\mathbb{R}^{1,24} \times S^1.$$

Le cercle a un rayon  $R$ , les coord. de  $S^1$  ont la périodicité

$$x^{25} = x^{25} + 2\pi R.$$

On va commencer à s'intéresser à la physique à des échelles de longueur  $\gg R$ , où le mouvement sur  $S^1$  peut être négligé. On veut comprendre à quoi la physique ressemble pour un observateur vivant sur l'espace de Minkowski non compact  $\mathbb{R}^{1,24}$ .

Avec des cordes bosoniques, on finit avec 96 dimensions. Avec la théorie des supercordes, on finit avec 10 dimensions. Cependant, on vit donc un espace-temps à  $(1+3)$ -dim. Pour résoudre ce pb, on compactifie donc. Les extra dimensions sont enroulées le long d'une variété compacte.

En 1919, Kaluza et Klein ont écrité GR et EM, les 2 interactions connues à ce moment.

### I. KALUZA - KLEIN MIRACLE

On va faire de la GR à 4d et de l'EN de Maxwell dans la GR à 5d.

Considérons que l'on est dans une variété lorentzienne à 5d avec métrique

$$\tilde{g}_{MN} = (\bar{g}_{\mu\nu}, g_{\mu 5}, g_{55}) \quad ? pq \bar{g}_{\mu\nu}$$

↓                    ↓  
A<sub>μ</sub> photon      KK-scalaire

avec  $M=0, \dots, 5$  et

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + g_{\mu 5} dx^\mu dx^5 + g_{55} dx^5 dx^5.$$

On pose

$$g_{55} = e^{2\sigma}; \quad g_{\mu 5} = A_\mu \cdot e^{2\sigma}; \quad g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} - e^{2\sigma} A_\mu A_\nu.$$

et on a l'analogie de Kaluza-Klein :

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2\sigma(\infty)} (dx^5 + A_\mu dx^\mu)^2.$$

$$\Rightarrow \tilde{g}_{MN} = \begin{pmatrix} \bar{g}_{\mu\nu} + e^{2\sigma} A_\mu A_\nu & e^{2\sigma} A_\nu \\ e^{2\sigma} A_\mu & e^{2\sigma} \end{pmatrix}.$$

Après calcul, on trouve

$$\tilde{g}_{5\mu} = -A_\mu, \quad \tilde{g}_{55} = e^{-2\sigma} + A_\mu A^\mu; \quad \tilde{g}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}$$

Mais pourquoi a-t-on que  $\tilde{g}^{55} \sim A^5$ ? Pour le comprendre, on considère la sous-classe de difféo

$$x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} ; \quad x^5 \rightarrow x^5 + \lambda(x^{\mu}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e^{2\sigma} A_{\mu} &= \tilde{g}_{\mu 5} \rightarrow \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^5} \cdot \frac{\partial x^5}{\partial x^{\mu}} \cdot \tilde{g}_{55} \\ &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^5} \cdot \tilde{g}_{\mu 5} \\ &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \tilde{g}_{\mu 5} + \frac{\partial x^5}{\partial x^{\mu}} \cdot \tilde{g}_{55} \\ &= \tilde{g}_{\mu 5} - \partial_{\mu}(\lambda \tilde{g}_{55}) \\ &= e^{2\sigma}(A_{\mu} - \partial_{\mu}\lambda) \end{aligned}$$

et le principe de covariance générale en 5d impose que l'on a invariance de jauge en 4d et covariance générale en 4d.

On considère que la métrique ne dépend pas de  $x^5$  et on prend  $x^5$  le long d'une variété compacte 1-dimensionnelle  $S^1$

$$\rightarrow J_5 = S^1 \times S^1. \quad \rightarrow \text{idée de k-k.}$$

On calcule les symboles de Christoffel en gardant en tête que  $\partial_5 \tilde{g}_{\mu\nu} = 0$  comme  $\tilde{g}$  ne dépend plus de  $x^5$ .  
Après calcul, on obtient le scalaire de Ricci

$$R^{(5)} = R^{(\mu)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{Kaluza-Klein miracle.}$$

Si on prend l'action d'Einstein-Hilbert, on a

$$\begin{aligned} S_{EH}^{(5)} &= \frac{1}{8\pi G^{(5)}} \int d^5x \sqrt{-\tilde{g}^{(5)}} (R^{(\mu)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \\ &\stackrel{\text{cor mtr, } x^5 \text{ est un cercle}}{=} \frac{2\pi R}{48\pi G^{(5)}} \int d^4x \sqrt{-g^{(\mu)}} (R^{(\mu)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow S_{E.H.}^{(5)} = \frac{1}{8\pi G^{(5)}} (S_{EH}^{(\mu)} + S_{EM}^{(\mu)}) \quad \text{k-k miracle - 1926}$$

Pour les calculs, pour simplifier les choses, on a pris  $\sigma = 0$  pour trivialiser la 5<sup>e</sup> dimension. Si on avait gardé  $\sigma \neq 0$ , on aurait eu

$$S = \frac{2\pi R}{8\pi G^{(5)}} \int d^4x \sqrt{-g^{(\mu)}} e^{\sigma} \left( R^{(\mu)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_{\mu}\sigma \partial^{\mu}\sigma \right)$$

$\rightarrow$  on trouve une théorie avec de la gravité et de l'ETT couplés d'une façon non-minimale à un scalaire  $\sigma$ .

## II. TOUR DE KALUZA-KLEIN ET COTES SUR UN CERCLE

On considère une action de champ scalaire sur

$$B^{1,0-2} \times S^1$$

Regardons ce qu'il se passe si on relâche l'hypothèse que les champs sont indép. de la direction périodique  $\times^D$ . En général, on peut écrire le champ en mode de Fourier le

$$\phi(x^m, x^j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m(x^m) e^{imx^j/R}$$

avec  $R$  le rayon de  $S^1$ . La réalité du champ impose que

$$\phi_n^* = \phi_{-n}.$$

En ignorant le couplage à la gravité, les termes chargés pour ce scénario sont

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int d^D x \cdot \left\{ \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + (\partial_0 \phi)^2 \right\} \\ &= 2\pi R \int d^{D-1} x \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_{-n} + \frac{m^2}{R^2} |\phi_n|^2 \right) \end{aligned}$$

Cette décomposition de Fourier indique qu'un champ scalaire de  $\mathbb{R}^{1, D-1} \times S^1$  se décompose en un nombre infini de champs scalaires sur  $\mathbb{R}^{1, D-2}$ , de masse

$$M_m^2 = \frac{m^2}{R^2}$$

et les  $\phi_n$  sont les modes de KK.

Ainsi, pour  $R$  petit, seules les particules sont lourdes sauf pour  $\phi_0$  ( $m=0$ ). Ces masses  $\phi_{n,0}$  peuvent être ignorées si on considère des énergies  $\ll 1/R$  i.e. distance  $\gg R$

C'est pour ça que l'on ne voit pas les extra-dim. Si on regarde un hiver d'escalier, on ne voit que les choses en 2d, mais si on s'en rapproche, on voit la structure 3d du cylindre 3d.

---

1 >> R

L ≈ R

et comme R est petit l'énergie reçue par distancer ces extra-dim. est énorme. Ainsi, on ne voit que les modes sans masse  $\phi_0$  lors de seuls modes accessibles en énergie.

## Charge

Une autre propriété de ces  $\varphi_{m0}$  modes est qu'ils sont chargés sous le champ de jauge  $A_\mu$  qui provient de la métrique. Si on regarde en IFO de jauge

$$X^D \rightarrow X^D + \Delta(X^m) \quad (\text{diffes})$$

Les modes sont philtres

$$\phi(x^m, x^o) \rightarrow \sum \phi_n(x^m) \cdot e^{\frac{imx^o}{R}} e^{\frac{inA}{R}}$$

comportement d'une particule chargée de charge  $m/R$  sous l'action du groupe  $U(1)$ .

En fait, on a rescale le champ de jauge à  $A_1 = A_0 / R$  sous laquelle la charge des  $\phi_n$  est  $n \in \mathbb{Z}$ .

### Point de vue de la worldsheet

on regarde la compactification KK du point de vue de la corde. On va étudier une corde se déplaçant dans  $\mathbb{R}^{1,25} \times S^1$ . La corde compact modifie la dynamique des cordes de 2 manières.

### Spatial momentum is quantized

Pour le voir, on demande que le fait d'être de la corde, incluant  $e^{ip \cdot X}$ , soit périodique :

$$\psi \sim e^{ip \cdot X}$$

et comme elle s'enroule autour d'un cercle,

$$\begin{aligned} \psi(x^m, x^{25}) &= \psi(x^m, x^{25} + 2\pi R) \\ \Leftrightarrow e^{ip^{25} \cdot x^{25}} &= e^{ip^{25} \cdot x^{25} + i p^{25} \cdot 2\pi R} \\ \Leftrightarrow e^{ip^{25} \cdot 2\pi R} &= 1 \\ \Leftrightarrow p^{25} \cdot R &= m ; \quad m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

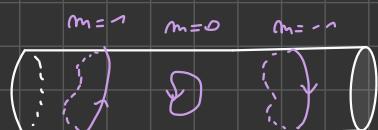
$$\boxed{\Rightarrow p^{25} = \frac{m}{R}} \quad \text{quantized}$$

### Conditions de bord

on peut autoriser des B.C. plus générale pour l'expansion en mode de  $X$ . Quand on bouge le long de la corde, on n'a plus besoin de  $X(\sigma + 2\pi) = X(\sigma)$ , mais de

$$\boxed{X^{25}(\sigma + 2\pi) = X^{25}(\sigma) + 2\pi m R} \quad m \in \mathbb{Z}.$$

L'entier  $m$  indique combien de fois la corde s'enroule autour de  $S^1$ . on l'appelle le winding number,  $W$



L'expansion en mode de la corde est

$$X^{25}(\sigma, \tau) = x^{25} + \alpha' p^{25} \tau + \sum_m \underbrace{\frac{1}{m} e^{-im(\tau-\sigma)}}_{\text{modes d'oscillation}} \zeta_m$$

$$\Leftrightarrow X^{25}(\sigma, \tau) = x^{25} + \alpha' \frac{m}{R} \tau + m R \sigma + \text{corr. modes}$$

Avant de split  $X^{25}$  et  $\text{left}$  et  $\text{right-movers}$ , on introduit les quantités

$$P_L = \frac{m}{R} + \frac{mR}{\alpha'} \quad \text{et} \quad P_R = \frac{m}{R} - \frac{mR}{\alpha'}.$$

Ensuite,  $X^{25}(\sigma, z) = X_L^{25}(\sigma^+) + X_R^{25}(\sigma^-)$  avec

$$\begin{cases} X_L^{25} = \frac{1}{2} x^{25} + \frac{1}{2} \alpha' p_L \sigma^+ + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}^{25} e^{-im\sigma^+} \\ X_R^{25} = \frac{1}{2} x^{25} + \frac{1}{2} \alpha' p_R \sigma^- + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}^{25} e^{-im\sigma^-} \end{cases}$$

Réflexions au spectre de la théorie pour un observateur vivant dans  $D=25$  directions non-compactes. Chaque état de particule sera décrite par une impulsion  $p^\mu$ ,  $\mu = 0, \dots, 94$ .

La masse de la particule est

$$M^2 = - \sum_{\mu=0}^{94} p_\mu p^\mu.$$

Des éqs de  $L_0$  et  $\bar{L}_0$ , avec  $\alpha$

$$M^2 = p_L^2 + \frac{q}{\alpha'} (\tilde{N}-1) = p_R^2 + \frac{q}{\alpha'} (N-1)$$

et maintenant le Level-matching ne donne plus  $N = \tilde{N}$ , mais

$$N - \tilde{N} = m \cdot n. \quad \text{Level-matching}$$

Ainsi,

$$M^2 = \frac{N^2}{R^2} + \frac{m^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2m \cdot n}{\alpha'} + \frac{q}{\alpha'} (\tilde{N}-1)$$

$$= \frac{m^2}{R^2} + \frac{m^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{q}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2)$$

$\nwarrow$  KK-hauer : une corde avec  $m$  unités d'impulsion autour du cercle gagne une contribution de  $m/R$  à sa masse.

$\downarrow$  une corde qui s'enroule en  $n$  fois gagne une contribution  $2\pi m R T$  à sa masse, avec

$$T = 1/2\pi\alpha'$$

La tension de la corde

### Etats sans masse

On s'intéresse aux états sans masse dans  $R^{1,94}$ , en regardant dans la formule de masse les états avec  $m=0$  (ie  $p=0$ ) et  $n=0$ , tq  $N = \tilde{N} = 1$ .

Les seuls états sont

- $\alpha_-^m \tilde{\alpha}_-^n |0; p\rangle$  : sous le groupe de Lorentz  $SO(1, 94)$ , ces états se décomposent en une matrice  $G_{\mu\nu}$ , un tenseur antisymétrique  $B_{\mu\nu}$  et un scalaire  $\Phi$  (dilatation)

- $\alpha_-^{25} \tilde{\alpha}_-^{25} |0; p\rangle$  : ce sont deux champs de vecteur. On peut identifier leur somme à  $A_\mu$  et leur différence  $\alpha_-^{25} \tilde{\alpha}_-^{25} |0; p\rangle$  à  $\bar{A}_\mu$  de  $B_{\mu\nu}$ .

$\alpha_{-1}^{ss} \tilde{\alpha}_{-1}^{ss}$  lo(p) : c'est un scalaire, associé au rayon de la direction compacte  $S^1$ .

### Symétrie de jauge améliorée

Avec un cercle, il y a d'autres façons pour construire des états sans masse qui ne demandent pas  $N = \tilde{N} = 1$ .

Si on prend  $N = \tilde{N} = 0$  et qu'on répond à des masses avec  $m \neq 0$ , les level-matching conditions  $\Rightarrow m=0$  et

$$M^2 = \frac{(m \cdot R)^2}{(\alpha')^2} - \frac{4}{\alpha'}$$

et ces états peuvent être sans masse quand

$$R^2 = \frac{4\alpha'}{m^2} \quad m \in \mathbb{Z}$$

De même, si on considère  $N = \tilde{N} = 0$  et  $m = 0$ , on a

$$M^2 = \frac{m^2}{R^2} - \left( \frac{4}{\alpha'} \right) \text{ masse du tachyon}$$

qui devient sans masse quand

$$R^2 = \frac{m^2 \alpha'}{4}$$

$\rightarrow$  KK tower et winding number du tachyon

?

Le spectre d'états sans masse le plus riche a lieu quand

$$R = \sqrt{\alpha'}. \quad (\text{voir T-charge p 205 pour les } \neq \text{ cas.})$$

### Remarques

La formule de masse

$$M^2 = \frac{m^2}{R^2} + \frac{m^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2)$$

est invariante sous l'échange

$$R \leftrightarrow \frac{\alpha'}{R}$$

si, en même temps,

$$m \leftrightarrow m.$$

Ans, une corde sur un rayon  $R$  a le même spectre que sur un rayon  $\alpha'/R$ . Elle réalise cet exploit en échangeant ce que signifie "enrouler" et "brouter".

$\rightarrow$  La corde ne peut pas sauter si c'est un petit ou un grand cercle

$$\equiv T\text{-dualité.}$$

La T-dualité est une symétrie de la théorie des cordes bosoniennes, mais pas de la théorie des supercordes : en ST, c'est une dualité.

### III. T-DUALITÉ

On considère une variété à 26 dimensions tq

$$\mathcal{M}_{26} = \mathbb{R}^{1,25} \times S^1.$$

Le KK-momentum engendre une masse pour la particule du pôle du target space avec  $p^{KK}$  et

$$M_{KK}^2 = \frac{m^2}{R^2} + \frac{\alpha'}{\alpha'} (N-1) \quad \text{pour le } m ?$$

En ce qui concerne le winding number, on a

$$X^{25}(\sigma + 2\pi) = X^{25}(\sigma) + 2\pi m R$$



avec  $m$  le winding number.

La T-dualité consiste à dire que l'on échange le winding number avec le KK-momentum tq

$$\begin{cases} m \leftrightarrow m \\ R \leftrightarrow \alpha'/R \end{cases}$$

Si lorsque  $R \rightarrow +\infty$ , on a

$$\begin{cases} M_{KK}^2 \rightarrow 0 \sim 1/R^2 \\ M_{winding}^2 \rightarrow \infty \sim R^2/\alpha'^2 \end{cases}$$

→ Les masses des winding modes deviennent irrelevantes pour une dynamique à basse énergie.

Les modes d'impulsion deviennent très légers et forment un continu.

Du pôle du spectre d'énergie, ce continu = à ce que l'on veut dire par l'existence d'une direction non compacte dans l'espace.

Si lorsque  $R \rightarrow 0$ , on a

$$\begin{cases} M_{KK}^2 \rightarrow \infty \\ M_{winding}^2 \rightarrow 0 \end{cases}$$

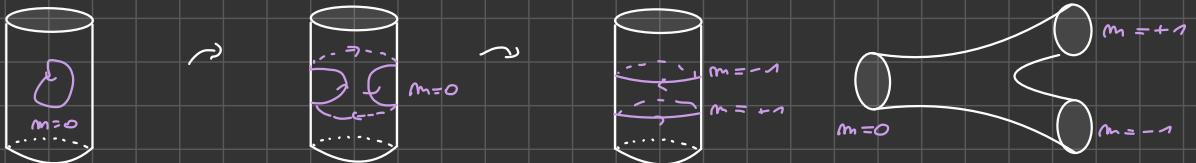
→ Les modes d'impulsion deviennent lourds et peuvent être ignorés : ça prend trop d'énergie de faire bouger quelque sur  $S^1$

Les winding modes deviennent légers et formeront un continu. Le spectre d'énergie résultant est tq une autre dimension d'espace s'ouvre. ?

Cette T-dualité fournit un autre mécanisme dans lequel la théorie des cordes montre une échelle de lq minimal : quand on réduit la taille d'un corde, en  $R = \sqrt{\alpha'}$ , la théorie agit comme si le corde grandissait de nouveau, avec  $m \leftrightarrow m$ .

En théorie des cordes, on dit que la T-dualité est une symétrie complète.

Si la quantité de mat dans la direction KK est conservée, il faut aussi que le winding soit conservé.



Pour spécifier un état dans cette situation compactifiée, on a

$$| p_0, \dots, \omega_1, \frac{m}{R}, m, \dots \rangle^{\text{oscillations}}$$

La worldsheet a une orientation et le winding est induit par cette orientation. Pour que la surface soit conservée il faut que le winding soit conservé.

### La nouvelle direction dans l'espace-temps

Comment écrire cette étrange nouvelle direction spatiale qui s'ouvre en  $R \rightarrow 0$ ? Sous les échanges

$$\begin{cases} m \leftrightarrow m \\ R \leftrightarrow \alpha'/R, \end{cases}$$

on voit que  $p_L$  et  $p_R$  se tutoient comme

$$p_L \rightarrow p_L \quad ; \quad p_R \rightarrow -p_R.$$

Les  $\alpha'$  subissent aussi un effet

$$\tilde{\alpha}_m^{95} \rightarrow \tilde{\alpha}_m^{95} \quad ; \quad \alpha_m^{25} \rightarrow -\alpha_m^{25},$$

et donc

$$\partial_{\sigma^+} X_L^{95} \rightarrow \partial_{\sigma^+} X_L^{95} \quad ; \quad \partial_{\sigma^-} X_R^{25} \rightarrow -\partial_{\sigma^-} X_R^{25}.$$

On définit alors un nouveau scalaire

$$\gamma^{95} = X_L^{95} (\sigma^+) - X_R^{25} (\sigma^-).$$

et

$$X^{95} = X_L^{95} (\sigma^+) + X_R^{25} (\sigma^-).$$

Dans une CFT pour un champ scalaire compact et étire, toutes les opérateurs de  $\gamma^{95}$  coïncident avec celles  $X^{95}$ . C'est suffisant pour dire que toutes les interactions définies dans la CFT sont les mêmes.

On peut écrire la nouvelle direction spatiale  $\gamma$  directement en termes du vieux champ  $X$ , sans faire le split en R et L.

De la déf. de  $\gamma$ , on a

$$\partial_{\bar{\sigma}} X = \partial_{\sigma} \gamma \quad ; \quad \partial_{\sigma} X = \partial_{\bar{\sigma}} \gamma$$

$$\Leftrightarrow \partial_{\sigma} X = \varepsilon_{\sigma \bar{\sigma}} \partial^{\bar{\sigma}} \gamma$$

avec  $\varepsilon_{\sigma \bar{\sigma}} = -\varepsilon_{\bar{\sigma} \sigma} = 1$  (la  $-1$  de  $\varepsilon_{\sigma \bar{\sigma}}$  s'annule quand on descend l'indice avec la matrice de braket de la worldsheet)

Pour la corde courbée, on est obligé de considérer des D-branes sous T-dualité et

Neumann

$\leftrightarrow$

Dirichlet

$$\partial_T X \Big|_{\sigma=0,\pi} = 0$$

$$\partial_T Y \Big|_{\sigma=0,\pi} = 0$$

$\rightarrow$  Le fait de faire une T-dualité a créé une D-brane.

On a donc notre espace d'univers  $\Sigma = \mathbb{R} \times S^1$  et on a un plongement dans l'espace cible  $X = \mathbb{R} \times S^1_R$  et dans  $\tilde{X} = \mathbb{R} \times \tilde{S}_{\alpha'/R}$

$\rightarrow$  dualité entre  $X$  et  $\tilde{X}$  : la corde ne voit pas la diff entre  $R$  et  $\alpha'/R$ .  
et la corde se voit piégée sur une D-brane



Pour la corde courbée,

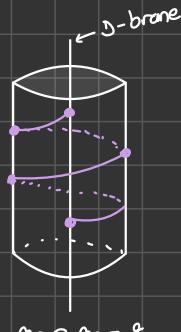
$$p^{25} = \frac{m}{R}$$

et en ce qui concerne le winding



$$m=2, m=0$$

T-dualité  
 $\rightarrow$



$$? \quad p \neq m=0$$

$\rightarrow$  La T-dualité fait qu'une D<sub>p</sub>-brane devient  $\begin{cases} D_{p-1} \text{-brane} \\ D_{p+1} \end{cases}$

en fonction de quelle direction on a compactifié en un cercle.

## IV. T-DUALITÉ ET INTÉGRALE DE CHEMIN

Dualité en (0+0)-dimension (espace-temps = point)

On a une gaussienne avec un ajout de terme linéaire :

$$\int dx \cdot e^{-ax^2 + bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-b^2/4a}$$

On a une théorie A et on veut montrer une correspondance avec une théorie B. Pour cette théorie A, on a

$$Z_A = \frac{N}{\sqrt{\pi}} \int dx \cdot e^{-R^2 x^2} \left( = \frac{N}{R} \right)$$

1) On élargit la théorie

$$Z_{\text{master}} = \frac{N}{4\pi R} \int dx dy e^{-R^2 x^2 + i\kappa y}$$

en ajoutant un champ qui a une interaction avec le champ d'origine  $x$ .

2) Deux options se présentent :

a) On intègre  $y$ , puis  $x$  :

$$\frac{N}{R} \int dx \cdot e^{-R^2 x^2} \cdot \delta_m = \frac{N}{R} ?$$

b) On intègre  $x$ , puis  $y$  :

$$\frac{N}{2\sqrt{\pi} \cdot R} \int dy \cdot e^{-y^2/4R^2} = \frac{N}{R}$$

On a donc

$$\begin{array}{c} Z_{\text{master}} \\ \downarrow \quad \searrow \\ Z_A \approx Z_B \\ \left. \begin{array}{l} x \leftrightarrow y \\ R \leftrightarrow 1/2R \end{array} \right. \end{array}$$

### Dualité en $(n+1)$ -dimension

Une façon facile de voir la T-dualité de la théorie quantique est d'utiliser une intégrale de chemin. On considère un champ réel et périodique  $X = X + 2\pi R$  sur la worldsheet. On prend la normalisation

$$X = R \cdot \varphi$$

la  $\varphi$  a une périodicité  $2\pi$ .

On considère donc l'action

$$S[\varphi] = \frac{R^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \cdot \partial_\alpha \varphi \cdot \partial^\alpha \varphi.$$

La fct de partition euclidienne pour cette théorie est

$$Z = \int D\varphi e^{-S[\varphi]},$$

et on va try on peut la réécrire en termes des nouvelles variables qui décrivent le cercle T-dual.

L'action a une symétrie de shift  $\varphi \rightarrow \varphi + \lambda$  car  $\varphi$  n'apparaît qu'avec sa dérivée. La 1<sup>e</sup> étape est de rendre la symétrie locale en introduisant un champ de jauge  $A_\alpha$  sur la worldsheet tq

↳ ie faire en sorte qu'un shift qui dépend de l'espace-temps soit une symétrie du lagrangien.

$$A_\alpha \rightarrow A_\alpha - \partial_\alpha \lambda$$

On complète alors les dérivées par des dérivées covariantes

$$\partial_\alpha \varphi \rightarrow D_\alpha \varphi = \partial_\alpha \varphi + A_\alpha. \quad \rightarrow \text{différente de la dérivée cov. de QFT car on a pas de phase}$$

Cela change notre théorie. Cependant, on peut retourner à la théorie originale en ajoutant un nouveau champ  $\Theta$  tq

$$S_{\text{master}}[\varphi, A, \Theta] = \frac{R^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \cdot D_\alpha \varphi D^\alpha \varphi + \frac{i}{2\pi} \int d^2\sigma \cdot \Theta \cdot \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta$$

$$Z_{\text{master}} = \int D\varphi D\Theta DA \cdot e^{-S_{\text{master}}}.$$

interaction, correspond au  $\varphi$  de  $(0+0)$ -dim

Les options sont

1) intégrer sur  $\Theta$ , puis sur  $\varphi$  :

?

Dans ce cas,

$$\delta[\partial_{[\alpha} A_{\beta]}] \Rightarrow \bar{f}_{\alpha\beta} = 0$$

et  $A_\alpha$  est pur jauge, n'importe quelle valeur de  $A$  peut être absorbée par une lpo de jauge

$$A_\alpha \sim \partial_\alpha \lambda$$

$$A_\alpha \rightarrow A_\alpha = 0 \quad (\text{jauge fixée})$$

et on obtient la théorie d'origine :

$$Z_{\text{master}} = Z_{\text{original}}$$

2) intégrer sur  $\varphi$ , puis sur  $\Theta$  :

on n'intègre pas  $\varphi$  on fixe la symétrie de jauge  $A_\alpha \rightarrow A_\alpha - 2\omega^\alpha \lambda$

$$\varphi = 0.$$

L'intégrale de chemin devient alors

$$Z = \int DA \exp \left( -\frac{R^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma A_\alpha A^\alpha + \frac{i}{2\pi} \int d^2\sigma \cdot \varepsilon^{\alpha\beta} (2\omega^\alpha) A_\beta \right)$$

par contre  
↓

et on termine la procédure en intégrant  $A_\alpha$ .

$$Z = \int D\omega \exp \left( -\frac{\tilde{R}^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \cdot 2\omega^\alpha \partial^\alpha \omega \right)$$

en a complété la corré

avec  $\tilde{R} = \frac{\alpha'}{R}$  le rayon du cercle T-dual.

## Remarques

- $A_\alpha = \partial_\alpha \varphi \rightarrow$  la dérivée du scalaire a été absorbée dans le A

- Pour compléter le carré, on a

$$(A_\alpha + \varepsilon_\alpha^\beta \partial_\beta \varphi)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow A_\alpha = \varepsilon_\alpha^\beta \partial_\beta \varphi \quad \begin{array}{l} \text{= dualité de Hodge } d\varphi = * ds \\ \text{correspond à l'échange entre } \tau \text{ et } \sigma. \end{array}$$

En 2d, la dualité échange un scalaire avec un scalaire

En 3d,  $d\varphi = * dA$

En 4d,  $F = * F \wedge g$

$$\frac{1}{g_{mn}^2} \text{tr}(F_A \wedge * F_A) = \tilde{g}_{mn}^2 \text{tr}(F_{\hat{A}} \wedge * F_{\hat{A}})$$

$$\rightarrow S\text{-dualité} \cdot \text{sous Yang Mills avec } g_{mn} \rightarrow \tilde{g}_{mn} = \frac{1}{g_{mn}}.$$

## V. T-DUALITÉ POUR LE PREMIER ETAT D'EXCITATION

on peut T-dualiser les champs de la corde formée au 1er niveau d'excitation:

$$\begin{aligned} S \sim & \int d^2x \left\{ \sqrt{g} \left( \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g^{\alpha\beta} G_{\mu\nu}(x) \right) + i B_{\mu\nu}(x) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \varepsilon^{\alpha\beta} \right. \\ & \left. + \sqrt{g} \alpha' \tilde{\Phi}(x) R_{(2d)} \right\} \end{aligned}$$

### Buscher's rules

On considère l'action master

$$\begin{aligned} S_{\text{master}} = & \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2x \sqrt{g} \cdot g^{\alpha\beta} \left\{ G_{\mu\nu} (\partial_\alpha \vartheta + A_\alpha) (\partial_\beta \vartheta + A_\beta) + 2G_{\mu\nu} (\partial_\alpha \vartheta + A_\alpha) \partial_\beta X^\mu \right\} \\ & + i \varepsilon^{\alpha\beta} \left\{ 2B_{\mu\nu} (\partial_\alpha \vartheta + A_\alpha) \partial_\beta X^\mu + B_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \right\} + 2i \varepsilon^{\alpha\beta} \tilde{\Phi} \partial_\alpha A_\beta \end{aligned}$$

La dualisation donne une nouvelle théorie où

$$R \leftrightarrow \tilde{R} = \alpha'/R.$$

Buscher obtient une nouvelle théorie via

$$\tilde{G}, \tilde{B}, \tilde{\Phi}$$

et

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{G_{\mu\nu}} \quad ; \quad \tilde{G}_{\alpha\mu} = \frac{G_{\alpha\mu}}{G_{\mu\nu}} \quad ; \quad \tilde{B}_{\alpha\mu} = \frac{G_{\alpha\mu}}{G_{\mu\nu}}$$

plus à connaitre par  $\heartsuit$

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{(G_{\alpha\mu} G_{\alpha\nu} - B_{\alpha\mu} B_{\alpha\nu})}{G_{\mu\nu}} \quad ; \quad \tilde{B}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} - \frac{G_{\alpha\mu} B_{\alpha\nu} - G_{\alpha\nu} B_{\alpha\mu}}{G_{\mu\nu}}$$

ce qui veut dire que

$$\int d^3\sigma \cdot \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^\gamma \partial_\beta x^\nu (G_{\mu\nu}(x) + i\beta_{\mu\nu}(x)) + \alpha' \bar{\Phi} Q_{(id)}$$

$\downarrow$  dualisé

$$\int d^3\sigma \cdot \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{x}^\gamma \partial_\beta \tilde{x}^\nu (\tilde{G}_{\mu\nu}(\tilde{x}) + i\tilde{\beta}_{\mu\nu}(\tilde{x})) + \alpha' \tilde{\Phi} Q_{(id)}$$