Группа НКНбд-01-20 Мухамедияр Адиль

Домашняя работа №1.

№1. $f(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1 \to extr.$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 8x_1 - 4x_2 + 1 \\ 6x_2 - 4x_1 \end{pmatrix} = \overline{0} \Rightarrow \begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 1 = 0 \\ 6x_2 - 4x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x_2 - 4x_2 = -1 \\ x_1 = 1{,}5x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3/16 \\ x_2 = -1/8 \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow 8 \cdot 6 - (-4)\cdot(-4) = 32 \Rightarrow ++ \Rightarrow H(x) > 0 \Rightarrow x - \text{т. лок. min}$$

№2. $f(x) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^2 - 10x_1x_2 + x_2^2$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1^2 + 4x_2^2 - 10x_2 \\ 8x_1x_2 - 10x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \overline{0} \Rightarrow x \in (0;0), (1;1), \left(-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{6}}{12}; 2 - \frac{\sqrt{6}}{8}\right), \left(\frac{-3}{4} + \frac{\sqrt{6}}{12}; 2 + \frac{\sqrt{6}}{8}\right)$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 12x_1 & 8x_2 - 10 \\ 8x_2 - 10 & 8x_1 + 2 \end{pmatrix}$$

1) $x^1 = (0;0)$

$$H(x^1) = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -10 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 \cdot 2 - (-10)(-10) = -100 < 0 \ominus \Rightarrow H(x^1) - \text{знаконеопр.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ экстр. нет.

2) $x^2 = (1;1)$

$$H(x^2) = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow ++ \Rightarrow H(x^2) > 0 \Rightarrow x^2 - \text{т. лок. min}$$

3) $x^3 = \left(-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{6}}{12}; 2 - \frac{\sqrt{6}}{8}\right)$

$$H(x^3) = \begin{pmatrix} -9 - \sqrt{6} & 6 - \sqrt{6} \\ 6 - \sqrt{6} & -4 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow 36 + 6\sqrt{3} + 4\sqrt{6} + 2\sqrt{2} - 36 + 12\sqrt{6} - 6 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - + \Rightarrow H(x^3) < 0 \Rightarrow x^3 - \text{т. лок. max}$$

4) $x^4 = \left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{6}}{12}; 2 + \frac{\sqrt{6}}{8}\right)$

$$H(x^4) = \begin{pmatrix} -9 + \sqrt{6} & 6 + \sqrt{6} \\ 6 + \sqrt{6} & -4 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow 36 - 6\sqrt{3} - 4\sqrt{6} + 2\sqrt{2} - 36 - 12\sqrt{6} - 6 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - \ominus \Rightarrow H(x^4) - \text{знаконеопр.} \Rightarrow \text{экстр. нет.}$$

№3. $f(x) = x_1^3 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 - 4$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - x_2 - 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3 \end{pmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1^2 - x_1 - 2 = 0 \\ x_2 = \frac{x_1 - 3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1^2 - x_1 + 3 - 4 = 0 \\ x_2 = \frac{x_1 - 3}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 1/2 \\ x_2 = -5/4 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = -1/3 \\ x_2 = -5/3 \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right), \left(-\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) $x^1 = \left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right)$

$$H(x^1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow ++ \Rightarrow H(x^1) > 0 \Rightarrow x^1 - \text{т. лок. min}$$

2) $x^2 = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$

$$H(x^2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow - \ominus \Rightarrow H(x^2) - \text{знаконеопр.} \Rightarrow x^2 - \text{не явл. экстр.}$$

№4. $f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 = x_1^4 - 2x_1^2x_2 + x_2^2 + x_1^2 - 2x_1 + 1$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 4x_1x_2 + 2x_1 - 2 \\ -2x_1^2 + 2x_2 \end{pmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1^3 - 2x_1x_2 + x_1 - 1 = 0 \\ x_2 = x_1^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1^3 - 2x_1^3 + x_1 - 1 = 0 \\ x_2 = x_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = x_1^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (1;1)$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 4x_2 + 2 & -4x_1 \\ -4x_1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H(x) = \begin{pmatrix} 12 - 4 + 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow ++ \Rightarrow H(x) > 0 \Rightarrow x - \text{т. лок. min}$

№5. $f(x) = 3x_1x_2 - x_1x_2^2 - x_1^2x_2$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 3x_2 - x_2^2 - 2x_1x_2 \\ 3x_1 - 2x_1x_2 - x_1^2 \end{pmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} x_2(-x_2 - 2x_1 + 3) = 0 \\ x_1(-x_1 - 2x_2 + 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ -x_2 - 2x_1 + 3 = 0 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3 = 0 \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow x \in (0;0), (0;3), (1;1), (3;0)$$

$$H(x)=\begin{pmatrix} -2x_2 & -2x_2-2x_1+3 \\ -2x_1-2x_2+3 & -2x_1 \end{pmatrix}$$

1) $x^1=(0;0)$

$$H(x^1)=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0\ominus \Rightarrow H(x^1)\text{ – знаконеопр.} \Rightarrow \text{экстр. нет.}$$

2) $x^2=(0;3)$

$$H(x^2)=\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -\ominus \Rightarrow H(x^2)\text{ – знаконеопр.} \Rightarrow \text{экстр. нет.}$$

3) $x^3=(1;1)$

$$H(x^3)=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow -+ \Rightarrow H(x^3)<0 \Rightarrow x^3 - \text{т. лок. max.}$$

4) $x^4=(3;0)$

$$H(x^4)=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow 0\ominus \Rightarrow H(x^4)\text{ – знаконеопр.} \Rightarrow \text{экстр. нет.}$$

№6. $f(x)=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2-6x_1x_2+8x_1x_3-4x_2x_3$

$x^*=(0;0;0)^T$ — проверить

$$\nabla f(x)=\begin{pmatrix} 2x_1-6x_2+8x_3 \\ 4x_2-6x_1-4x_3 \\ -6x_3+8x_1-4x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow H(x)=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 \\ -6 & 4 & -4 \\ 8 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$M_1=2>0$, $M_2=2\cdot 4-(-6)\cdot(-6)=-28<0$, $M_3=2\cdot 4\cdot(-6)+8\cdot(-6)\cdot(-4)+$
$+8\cdot(-6)\cdot(-4)-8\cdot 4\cdot 8-(-6)\cdot(-6)\cdot(-6)-(-4)\cdot(-4)\cdot 2=264>0$

$+\ominus+ \Rightarrow H(x)$ – знаконеопр. $\Rightarrow$ экстр. нет.

№7. $f(x)=x_1^4+x_2^4-(x_1+x_2)^2$ $\quad x^*=(0;0)^T$, $x^{**}=(1;1)^T$

$f(x)=x_1^4+x_2^4-x_1^2-2x_1x_2-x_2^2$ $\quad x^{***}=(-1;-1)^T$

$$\nabla f(x)=\begin{pmatrix} 4x_1^3-2x_1-2x_2 \\ 4x_2^3-2x_2-2x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow H(x)=\begin{pmatrix} 12x_1^2-2 & -2 \\ -2 & 12x_2^2-2 \end{pmatrix}$$

1) $x^*=(0;0)$

$$H(x^*)=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow -\underline{0} \Rightarrow \text{Требуется доп. исследование.}$$

2) $X^{**} = (1; 1)$

$$H(x^{**}) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow + + \Rightarrow H(x^{**}) > 0 \Rightarrow x^{**} - \text{т. лок. min}$$

3) $x^{**} = (-1; -1)$

$$H(x^{***}) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow + + \Rightarrow H(x^{***}) > 0 \Rightarrow x^{***} - \text{т. лок. min.}$$