

Лабораторный практикум по теории конечных графов

Лабораторный практикум по теории графов

Тема: Основные понятия теории графов. Неориентированные графы

Лабораторная работа 1

№ 1. Дан граф  $G(V, E)$  (рис. 1):

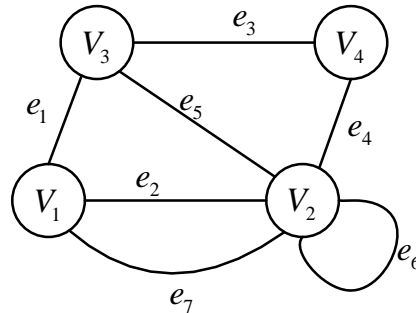


Рисунок 1. Исходный граф

Определить:

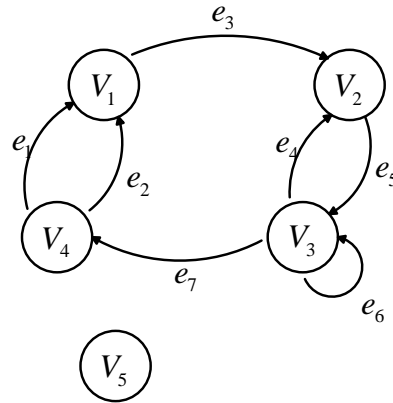
- 1) Множество вершин  $V$  и множество ребер  $E$ .
- 2) Пары смежных вершин.
- 3) Инцидентность ребра вершинам.
- 4) Пары смежных ребер.
- 5) Степени вершин.
- 6) Параллельные ребра.
- 7) Наличие петель.
- 8) Количество вершин нечетной степени.

№ 2. Построить неизоморфные графы с пятью вершинами и ребрами,  $i = \overline{0, 10}$ .

**Зарипова Э.Р. 2016 РУДН, Физ-мат.**  
**Лабораторный практикум по теории конечных графов**

**Лабораторная работа 2**

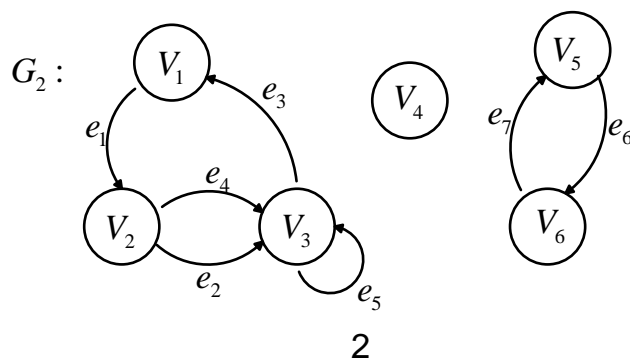
№ 1. Дан граф  $G(\mathbf{V}, \mathbf{E})$ .



Найти:

- 1) Множество вершин  $\mathbf{V}$  и множество дуг  $\mathbf{E}$ .
- 2) Пары смежных вершин.
- 3) Положительная инцидентность дуг вершинам. Отрицательная инцидентность дуг вершинам.
- 4) Наличие петель.
- 5) Наличие строго параллельных дуг.
- 6) Наличие нестрого параллельных дуг.
- 7) Пары смежных дуг.
- 8) Положительные и отрицательные степени вершин. Степень вершин  $\delta(V) = \delta_{(V)}^+ + \delta_{(V)}^-$ .
- 9) Количество вершин нечетной степени.

№ 2. Дан граф  $G_2(\mathbf{V}, \mathbf{E})$ .



**Лабораторный практикум по теории конечных графов**

Найти:

- 1) Множество вершин  $V$  и множество дуг  $E$ .
- 2) Пары смежных вершин.
- 3) Положительная инцидентность дуг вершинам. Отрицательная инцидентность дуг вершинам.
- 4) Наличие петель.
- 5) Наличие строго параллельных дуг.
- 6) Наличие нестрого параллельных дуг.
- 7) Пары смежных дуг.
- 8) Положительные и отрицательные степени вершин. Степень вершин  $\delta(V) = \delta_{(V)}^+ + \delta_{(V)}^-$ .
- 9) Количество вершин нечетной степени.

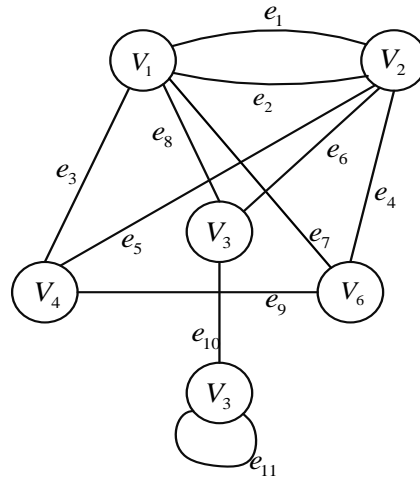
Лабораторный практикум по теории конечных графов

Тема: Метрические характеристики графов. Матрицы смежности и инцидентности

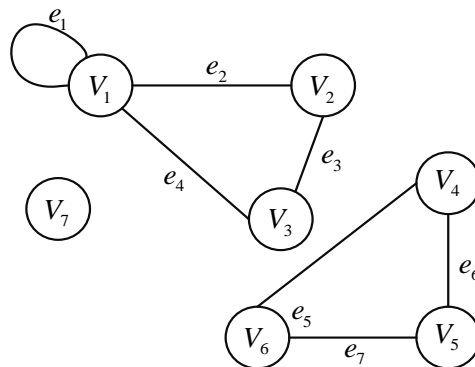
Лабораторная работа 3

№ 1. Построить матрицу смежности  $\mathbf{B}$  и матрицу инцидентности  $\mathbf{A}$  для графов:

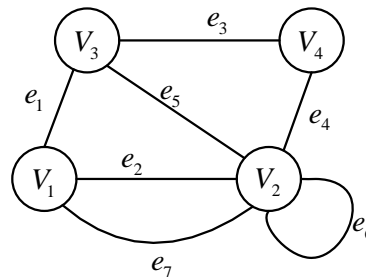
а)



б)



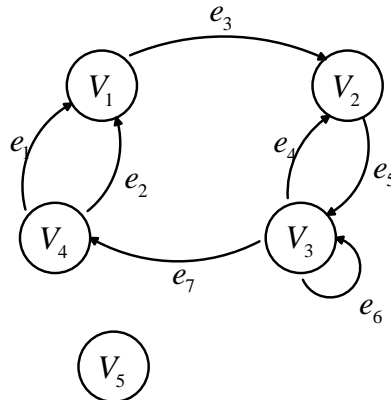
в)



Замечание: Если в графе отсутствуют петли и кратные ребра, то для доказательства изоморфизма достаточно сравнить их матрицы смежности или инцидентности.

Лабораторный практикум по теории конечных графов

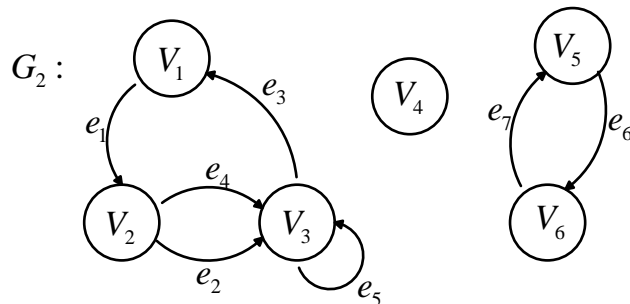
№ 2. Дан граф  $G(V, E)$ .



Найти:

- 1)  $A$  – матрицу инцидентности.
- 2)  $B$  – матрицу смежности.

№ 3. Дан граф  $G_2(V, E)$ .



Найти:

- 1)  $A$  – матрицу инцидентности (граф из лабораторной № 2).
- 2)  $B$  – матрицу смежности (граф из лабораторной № 2).

№ 4. Даны матрица инцидентности и матрица смежности для графа. Составить схему графа.

$$A_1 = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \\ \hline V_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ V_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \\ \hline V_1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ V_3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ V_6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Лабораторный практикум по теории конечных графов

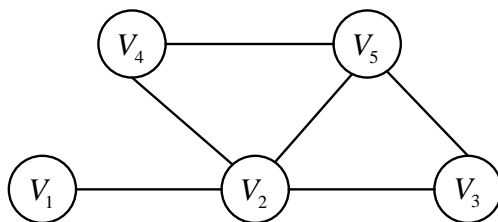
№ 5. Дана матрица инцидентности  $A_2$ .

Построить:

- 1) схему графа.
- 2) матрицу смежности  $B_2$ .

$$A_2 = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} \\ V_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ V_5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ V_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_7 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

№ 6. Дан граф.

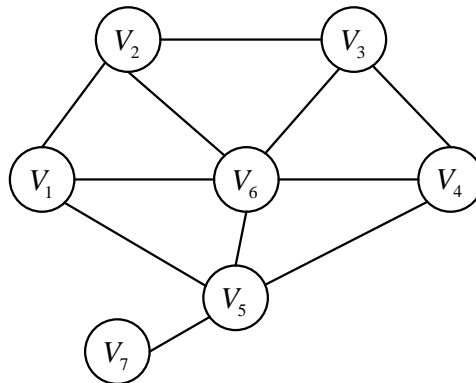


Найти:

- 1) Расстояние между различными вершинами (кратчайшая простая цепь, т.е. все вершины различны, все веса за 1 берем),  $d(V_i, V_j) = ?$  ( $i \neq j$ ).
- 2) Эксцентриситет каждой вершины  $l(V_i) = \max_{V_j \in V} d(V_i, V_j)$ .
- 3) Диаметр графа  $d(G) = \max_{V \in V} l(V)$ .
- 4) Радиус графа  $r(G) = \min_{V \in V} l(V)$ .
- 5) Определить центральные вершины графа  $l(V_i) = r(G)$ .
- 6) Определить центр графа.
- 7) Найти число маршрутов длины 2 для всех вершин графа (т.е.  $B^2$ ).
- 8) Найти число маршрутов длины 3 для всех вершин графа (т.е.  $B^3$ ).
- 9) Определить список смежности для графа  $G$ .

**Зарипова Э.Р. 2016 РУДН, Физ-мат.**  
**Лабораторный практикум по теории конечных графов**

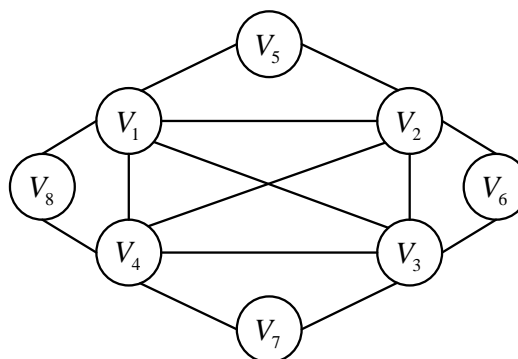
№ 7. Дан граф.



Найти:

- 1) Расстояние между различными вершинами (кратчайшая простая цепь, т.е. все вершины различны, все веса за 1 берем),  $d(V_i, V_j) = ? \quad (i \neq j)$ .
- 2) Эксцентриситет каждой вершины  $l(V_i) = \max_{V_j \in V} d(V_i, V_j)$ .
- 3) Диаметр графа  $d(G) = \max_{V \in V} l(V)$ .
- 4) Радиус графа  $r(G) = \min_{V \in V} l(V)$ .
- 5) Определить центральные вершины графа  $l(V_i) = r(G)$ .
- 6) Определить центр графа.
- 7) Найти число маршрутов длины 2 для всех вершин графа (т.е.  $\mathbf{B}^2$ ).
- 8) Найти число маршрутов длины 3 для всех вершин графа (т.е.  $\mathbf{B}^3$ ).
- 9) Определить список смежности для графа  $G$ .

№ 8. Дан граф.



Лабораторный практикум по теории конечных графов

Найти:

- 1) Расстояние между различными вершинами (кратчайшая простая цепь, т.е. все вершины различны, все веса за 1 берем),  $d(V_i, V_j) = ? \quad (i \neq j)$ .
- 2) Эксцентриситет каждой вершины  $l(V_i) = \max_{V_j \in V} d(V_i, V_j)$ .
- 3) Диаметр графа  $d(G) = \max_{V \in V} l(V)$ .
- 4) Радиус графа  $r(G) = \min_{V \in V} l(V)$ .
- 5) Определить центральные вершины графа  $l(V_i) = r(G)$ .
- 6) Определить центр графа.
- 7) Найти число маршрутов длины 2 для всех вершин графа (т.е.  $\mathbf{B}^2$ ).
- 8) Определить список смежности для графа  $G$ .

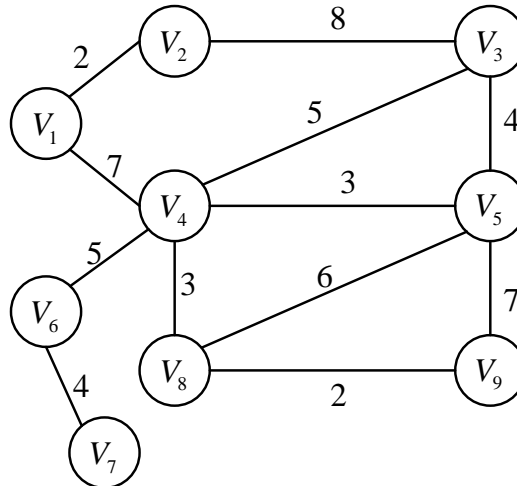


Лабораторный практикум по теории конечных графов

Тема: Алгоритм Краскала

Лабораторная работа 4

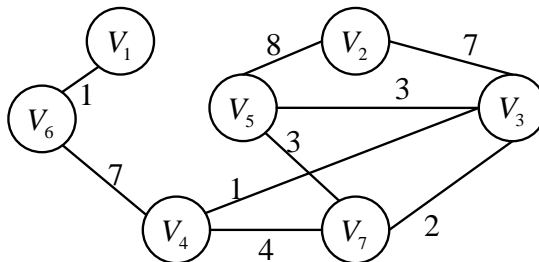
№ 1. Дан граф  $G$ .



Для графа построить по алгоритму Краскала:

- 1) покрывающее дерево по нумерации;
- 2) минимальное покрывающее дерево и найти вес  $w_{T_{\min}}$  полученного дерева;
- 3) максимальное покрывающее дерево и найти вес  $w_{T_{\max}}$  полученного дерева.

№ 2. Дан граф  $G$ .

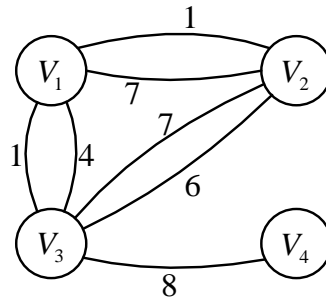


Для графа построить по алгоритму Краскала:

- 1) покрывающее дерево по нумерации;
- 2) минимальное покрывающее дерево и найти вес  $w_{T_{\min}}$  полученного дерева;
- 3) максимальное покрывающее дерево и найти вес  $w_{T_{\max}}$  полученного дерева.

№ 3. Дан граф  $G$ .

Лабораторный практикум по теории конечных графов



Для графа построить по алгоритму Краскала:

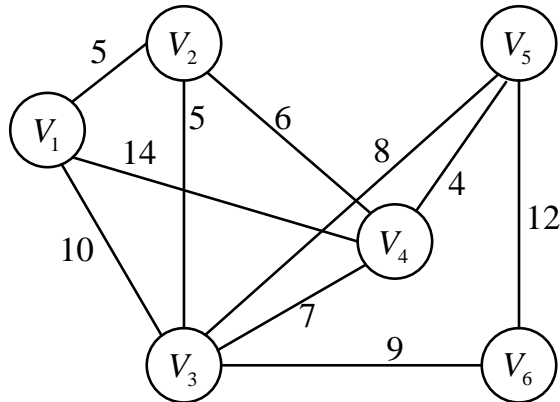
- 1) покрывающее дерево по нумерации;
- 2) минимальное покрывающее дерево и найти вес  $w_{T_{\min}}$  полученного дерева;
- 3) максимальное покрывающее дерево и найти вес  $w_{T_{\max}}$  полученного дерева.

Лабораторный практикум по теории конечных графов

Тема: Алгоритм Прима

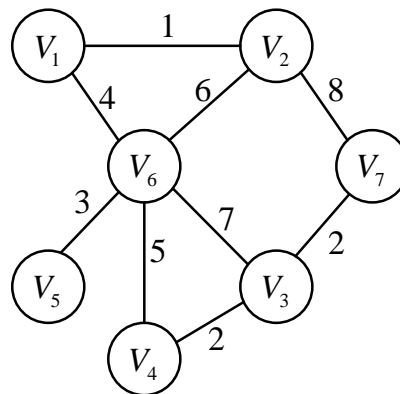
Лабораторная работа 5

№ 1. Дан граф  $G$ .



Построить минимальное покрывающее дерево по алгоритму Прима и посчитать вес дерева  $w_{T_{\min}}$ .

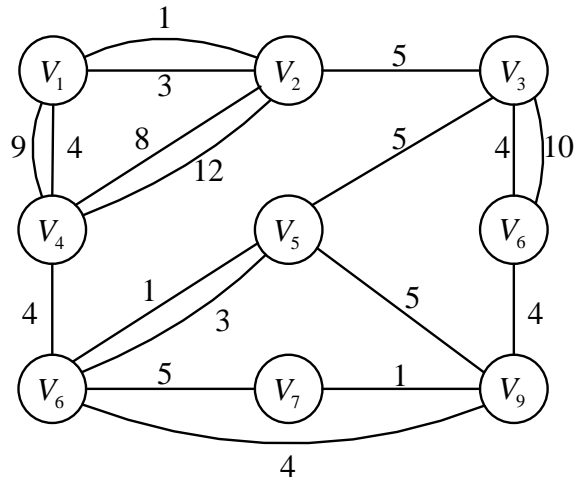
№ 2. Дан граф  $G$ .



Построить максимальное покрывающее дерево по алгоритму Прима и посчитать вес дерева  $w_{T_{\max}}$ .

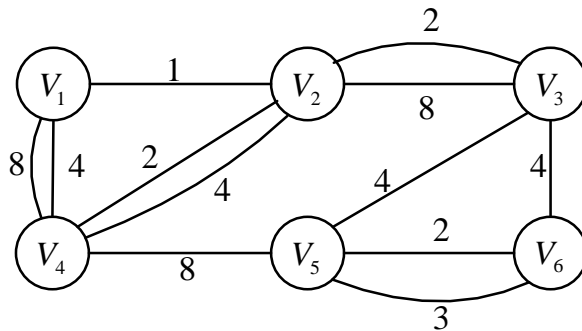
№ 3. Дан граф  $G$ .

Лабораторный практикум по теории конечных графов



Построить минимальное покрывающее дерево по алгоритму Прима и найти его вес  $w_{T_{\min}}$ .

№ 4. Дан граф  $G$ .



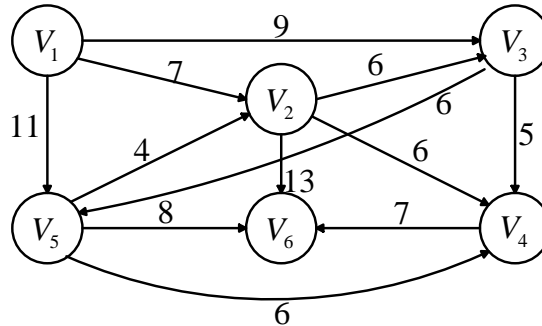
Построить максимальное и минимальное дерево по алгоритму Прима и для каждого посчитать веса  $w_{T_{\max}}$  и  $w_{T_{\min}}$ . Изобразить результаты в виде деревьев с весами.

Лабораторный практикум по теории конечных графов

Тема: Алгоритм Дейкстры

Лабораторная работа 6

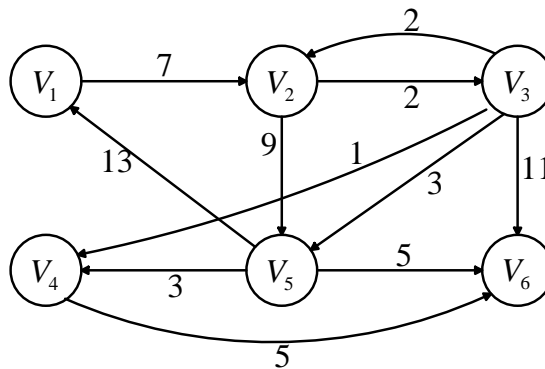
№ 1. Дан граф  $G$ .



Используя Алгоритм Дейкстры найти минимальный путь и длину:

- 1) от вершины  $V_1$  до вершины  $V_4$ ;
- 2) от вершины  $V_3$  до вершины  $V_6$ ;
- 3) от вершины  $V_1$  до вершины  $V_6$ .

№ 2. Дан граф  $G$ .

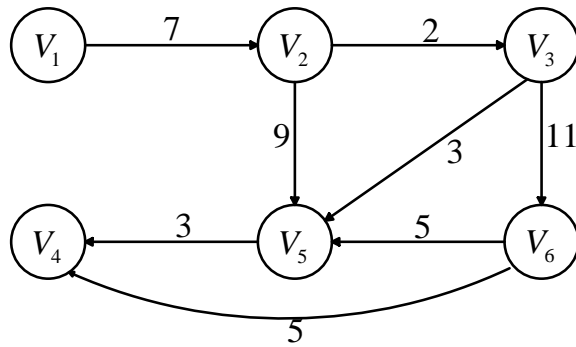


Используя Алгоритм Дейкстры найти минимальный путь и длину:

- 1) от вершины  $V_2$  до вершины  $V_4$ ;
- 2) от вершины  $V_1$  до вершины  $V_5$ ;
- 3) от вершины  $V_1$  до вершины  $V_4$ .

№ 3. Дан граф  $G$ .

Лабораторный практикум по теории конечных графов



Используя Алгоритм Дейкстры найти минимальный путь и длину:

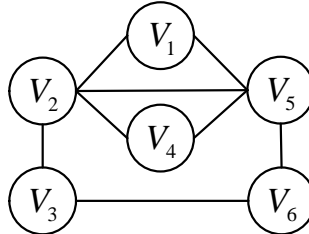
- 1) от вершины  $V_1$  до вершины  $V_4$ ;
- 2) от вершины  $V_1$  до вершины  $V_6$ ;
- 3) от вершины  $V_2$  до вершины  $V_6$ .

Лабораторный практикум по теории конечных графов

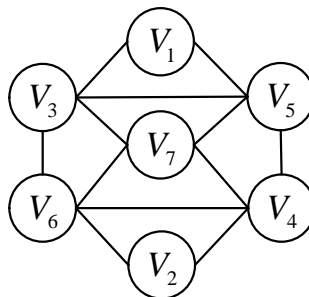
Тема: Поиск эйлера цикла

Лабораторная работа 7

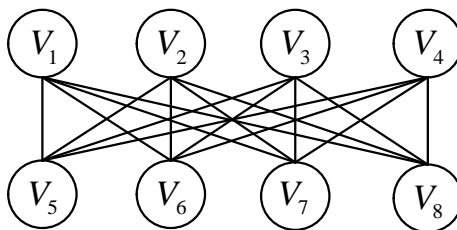
№ 1. Построить эйлеров цикл в графе, начиная с вершин  $V_1$ ,  $V_3$ ,  $V_4$ .



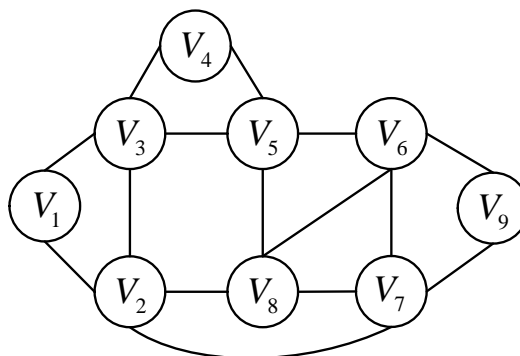
№ 2. Построить эйлеров цикл в графе, начиная с вершины  $V_1$ .



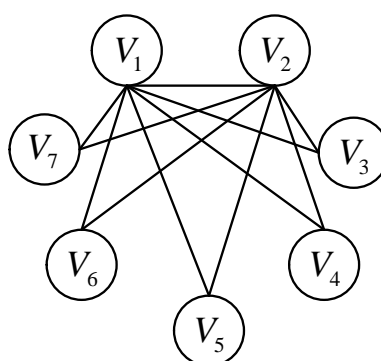
№ 3. Построить эйлеров цикл в графе, начиная с вершины  $V_8$ .



№ 4. Построить эйлеров цикл в графе, начиная с вершины  $V_1$ .



№ 5. Построить эйлеров цикл в графе, начиная с вершины  $V_4$ .



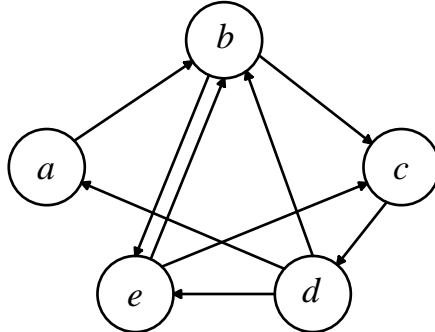


Лабораторный практикум по теории конечных графов

Тема: Гамильтоновы графы

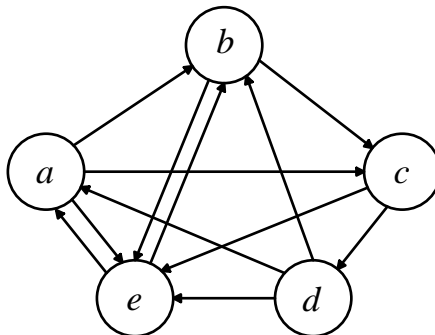
Лабораторная работа 8

№ 1. Дан граф  $G_1 = \langle V, E \rangle$ .



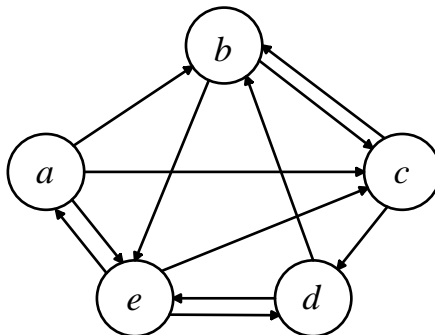
Из вершины  $V_2$  найти всевозможные гамильтоновы циклы.

№ 2. Дан граф  $G_1 = \langle V, E \rangle$ .



Найти количество гамильтоновых циклов из вершины  $V_2$  и указать их.

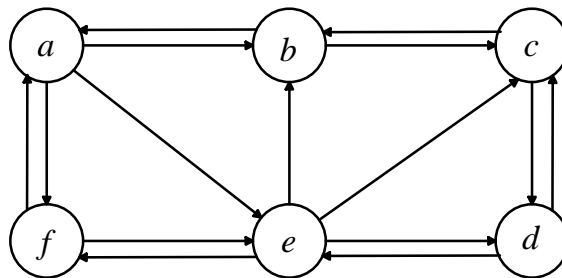
№ 3. Дан граф  $G_1 = \langle V, E \rangle$ .



Найти количество гамильтоновых циклов из вершины  $V_3$  и указать их.

**Зарипова Э.Р. 2016 РУДН, Физ-мат.**  
**Лабораторный практикум по теории конечных графов**

№ 4. Дан граф  $G_1 = \langle V, E \rangle$ .



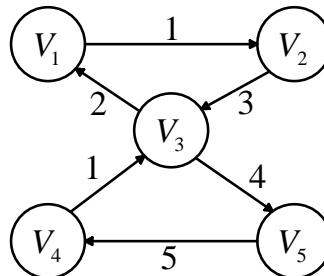
Из вершины  $V_1$  найти всевозможные гамильтоновы циклы.

Лабораторный практикум по теории конечных графов

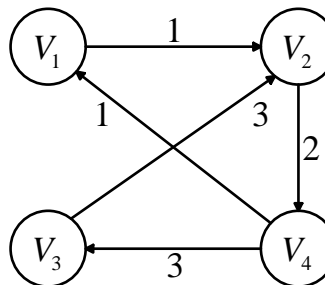
Тема: Алгоритм Уоршалла-Флойда. Задача транзитивного замыкания

Лабораторная работа 9

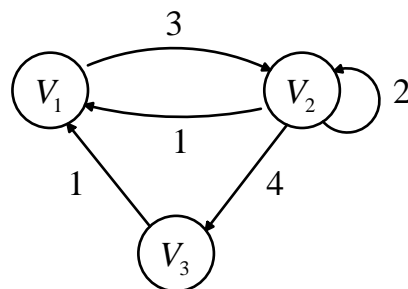
№ 1. Используя алгоритм Уоршалла-Флойда, найти минимальное расстояние между всеми парами вершин.



№ 2. Используя алгоритм Уоршалла-Флойда, найти минимальное расстояние между всеми парами вершин.

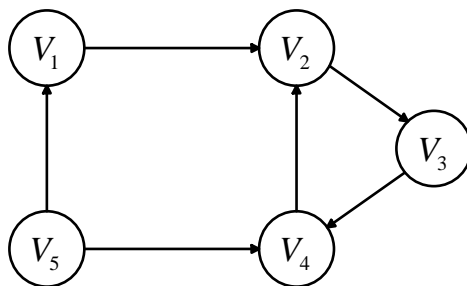


№ 3. Используя алгоритм Уоршалла-Флойда, найти минимальное расстояние между всеми парами вершин.

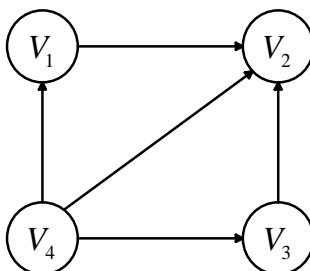


№ 4. Построить транзитивное замыкание для графа и найти матрицу связности графа.

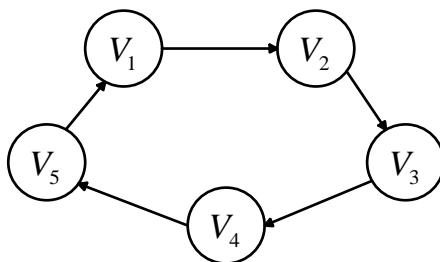
Лабораторный практикум по теории конечных графов



№ 5. Построить транзитивное замыкание для графа и найти матрицу связности графа.



№ 6. Построить транзитивное замыкание для графа и найти матрицу связности графа.

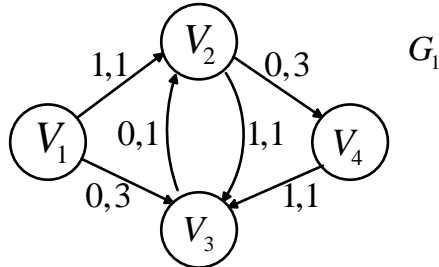


Лабораторный практикум по теории конечных графов

Тема: Условие существования потока в графе. Поиск увеличивающей цепи

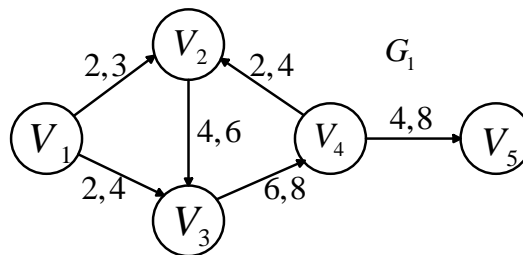
Лабораторная работа 10

№ 1. Дан граф  $G_1 = \langle V, E \rangle$ .



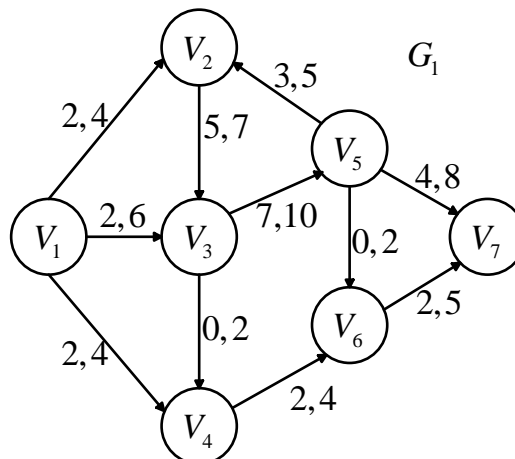
- 1) Проверить условие существования потока из вершины  $V_1$  в вершину  $V_4$ .
- 2) Найти увеличивающую цепь, если возможно, и увеличить поток.

№ 2. Дан граф  $G_1 = \langle V, E \rangle$ .



- 1) Проверить условие существования потока из вершины  $V_1$  в вершину  $V_5$ .
- 2) Найти увеличивающую цепь, если возможно, и увеличить поток.

№ 3. Дан граф  $G_1 = \langle V, E \rangle$ .



**Лабораторный практикум по теории конечных графов**

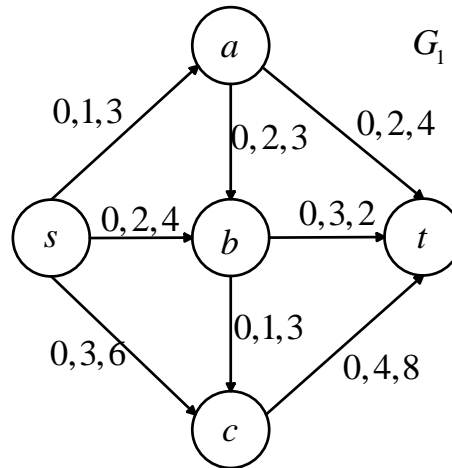
- 1) Проверить условие существования потока из вершины  $V_1$  в вершину  $V_7$ .
- 2) Найти увеличивающую цепь, если возможно, и увеличить поток.

Лабораторный практикум по теории конечных графов

Тема: Поиск максимального потока в графе. Стоимость потока минимальной стоимости

Лабораторная работа 11

№ 1. Дан граф  $G_1 = \langle V, E \rangle$ .

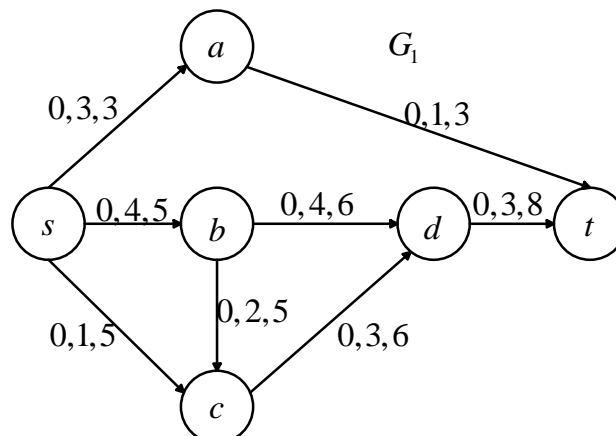


Найти:

- 1) максимальный поток  $K_{\max}$  на графе;
- 2) поток минимальной стоимости для  $k = 2$ ,  $k = 5$ . Узнать стоимость передачи.

Изобразить итоговые графы.

№ 2. Дан граф  $G_1 = \langle V, E \rangle$ .



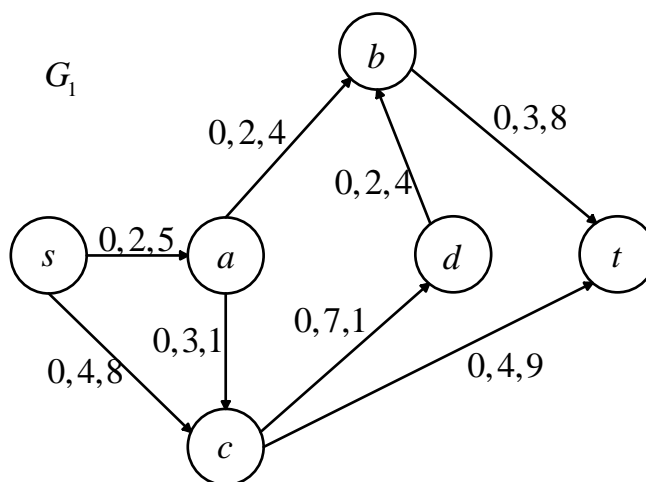
Найти:

- 1) максимальный поток  $K_{\max}$  на графе;
- 2) поток минимальной стоимости для  $k = 2$ ,  $k = 5$ . Узнать стоимость передачи.

Изобразить итоговые графы.

**Зарипова Э.Р. 2016 РУДН, Физ-мат.**  
**Лабораторный практикум по теории конечных графов**

№ 3. Дан граф  $G_1 = \langle V, E \rangle$ .



Найти:

- 1) максимальный поток  $K_{\max}$  на графе;
- 2) поток минимальной стоимости для  $k = 2$ ,  $k = 5$ . Узнать стоимости.

Изобразить итоговые графы.

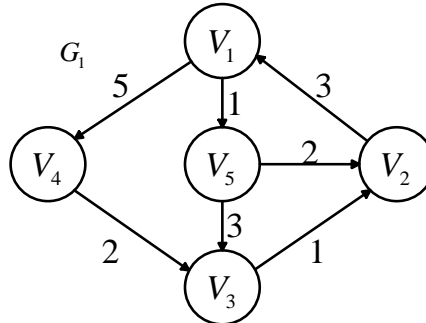


Лабораторный практикум по теории конечных графов

Тема: Задача почтальона для орграфа

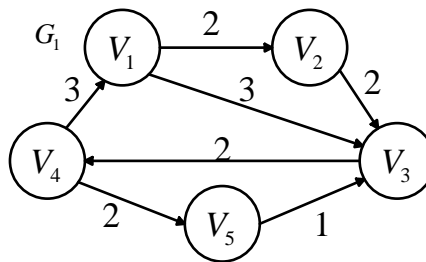
Лабораторная работа 12

№ 1. Дан граф  $G_1 = \langle V, E \rangle$ .



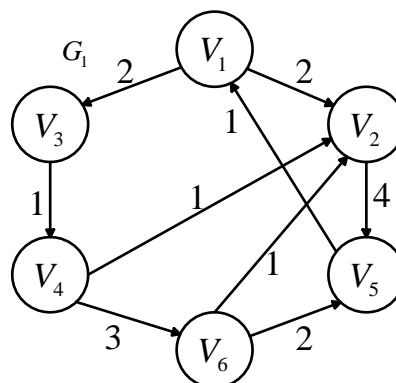
Построить оптимальный маршрут почтальона из вершины  $V_3$ .

№ 2. Дан граф  $G_1 = \langle V, E \rangle$



Построить оптимальный маршрут почтальона из вершины  $V_5$ .

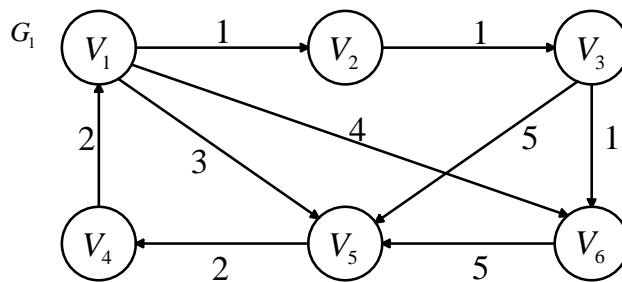
№ 3. Дан граф  $G_1 = \langle V, E \rangle$ .



Построить оптимальный маршрут почтальона из вершины  $V_2$ .

Лабораторный практикум по теории конечных графов

№ 4. Дан граф  $G_1 = \langle V, E \rangle$ .



Построить оптимальный маршрут почтальона из вершины  $V_1$ .

**Лабораторный практикум по теории конечных графов**

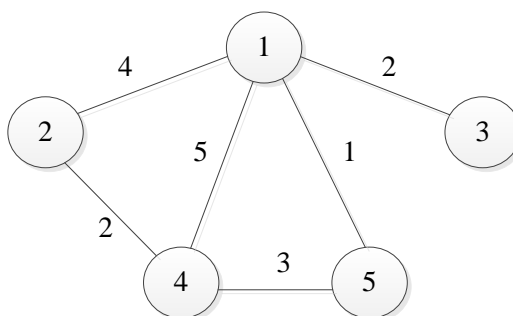
**Вопросы для самопроверки и обсуждений по темам**

1. Найти эксцентриситет, диаметр и радиус графа.
2. Составить матрицу смежности и матрицу инцидентности для графа.
3. Построить минимальное (максимальное) покрывающее дерево для графа, используя алгоритм Краскала.
4. Построить минимальное (максимальное) покрывающее дерево для графа, используя алгоритм Прима.
5. Найти Эйлеров цикл в графе.
6. Найти кратчайший путь и длину между заданными вершинами, используя алгоритм Дейкстры.
7. Найти минимальное расстояние между всеми парами вершин по алгоритму Уоршалла-Флойда.
8. Построить транзитивное замыкание и найти матрицу связности (достижимости) для графа. Представить решение через промежуточные матрицы.
9. Найти гамильтоновы циклы в графе из заданной вершины, используя алгоритм поиска гамильтонова цикла в графе.
10. Найти поток минимальной стоимости, состоящий из  $k$  (например, 5) единиц. (При решении обязательно указывать промежуточные графы и увеличивающие цепи. В ответе изобразить результирующий граф и указать минимальную стоимость потока.)
11. Построить оптимальный маршрут почтальона из заданной вершины. (В решении построить симметричный граф, указать потоки минимальной стоимости. В ответе указать результирующий граф и оптимальный маршрут почтальона.)
12. Найти максимальный поток на графе. (Увеличивать поток с указанием увеличивающей цепи и количеством единиц, передаваемых по увеличивающей цепи. На каждом шаге изображать новый граф с последующей нумерацией графа.) В ответе указать максимальный поток и результирующий граф.

Лабораторный практикум по теории конечных графов

Тестирование по теории графов

1. Как будет выглядеть матрица инцидентности для графа:



Ответ:

□

	$(V_1, V_2)$	$(V_1, V_3)$	$(V_1, V_4)$	$(V_1, V_5)$	$(V_2, V_4)$	$(V_4, V_5)$
$V_1$	1	1	1	1	0	0
$V_2$	1	0	0	0	1	0
$V_3$	0	1	0	0	0	0
$V_4$	0	0	1	0	1	1
$V_5$	0	0	0	1	0	1

□

	$(V_1, V_2)$	$(V_1, V_3)$	$(V_1, V_4)$	$(V_1, V_5)$	$(V_2, V_4)$	$(V_4, V_5)$
$V_1$	4	2	5	1	0	0
$V_2$	4	0	0	0	2	0
$V_3$	0	2	0	0	0	0
$V_4$	0	0	5	0	2	3
$V_5$	0	0	0	1	0	3

□

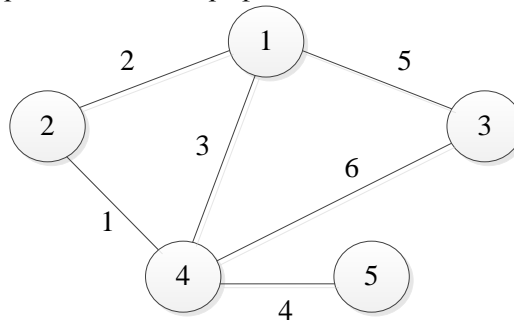
	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$
$V_1$	0	1	1	1	1
$V_2$	-1	0	0	1	0
$V_3$	-1	0	0	0	0
$V_4$	-1	-1	0	0	1
$V_5$	-1	0	0	-1	0

□

	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$
$V_1$	0	1	1	1	1
$V_2$	1	0	0	1	0
$V_3$	1	0	0	0	0
$V_4$	1	1	0	0	1
$V_5$	1	0	0	1	0

Лабораторный практикум по теории конечных графов

2. Как будет выглядеть матрица весов для графа:



Ответ:

□

	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>	V <sub>4</sub>	V <sub>5</sub>
V <sub>1</sub>	0	2	5	3	0
V <sub>2</sub>	2	0	0	1	0
V <sub>3</sub>	5	0	0	6	0
V <sub>4</sub>	3	1	6	0	4
V <sub>5</sub>	0	0	0	4	0

□

	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>	V <sub>4</sub>	V <sub>5</sub>
V <sub>1</sub>	0	2	5	3	∞
V <sub>2</sub>	2	0	∞	1	∞
V <sub>3</sub>	5	∞	0	6	∞
V <sub>4</sub>	3	1	6	0	4
V <sub>5</sub>	∞	∞	∞	4	0

□

	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>	V <sub>4</sub>	V <sub>5</sub>
V <sub>1</sub>	0	2	5	3	∞
V <sub>2</sub>	-2	0	∞	1	∞
V <sub>3</sub>	-5	∞	0	6	∞
V <sub>4</sub>	-3	-1	-6	0	4
V <sub>5</sub>	∞	∞	∞	-4	0

□

	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>	V <sub>4</sub>	V <sub>5</sub>
V <sub>1</sub>	1	-2	-5	-3	∞
V <sub>2</sub>	2	1	∞	-1	∞
V <sub>3</sub>	5	∞	1	-6	∞
V <sub>4</sub>	3	1	6	1	-4
V <sub>5</sub>	∞	∞	∞	4	1

Лабораторный практикум по теории конечных графов

3. Маршрут в графе можно задать:

Ответ:

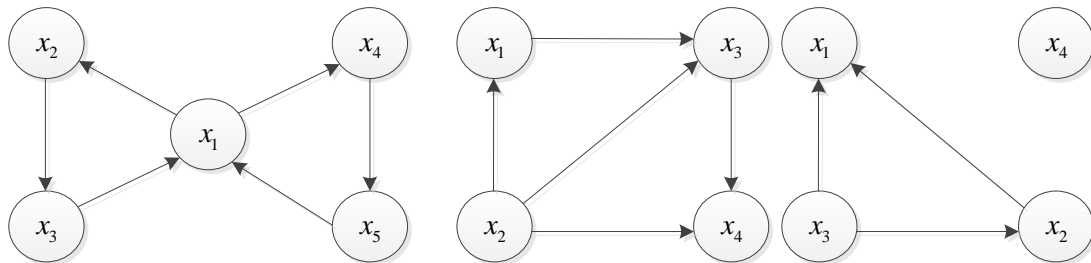
- ☐ только последовательностью ребер;
- ☐ только последовательностью вершин;
- ☐ и последовательностью ребер и последовательностью вершин;
- ☐ ни последовательностью ребер, ни последовательностью вершин.

4. Какие из графов являются связными?

А

В

С



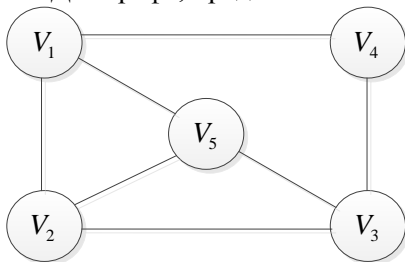
Ответ: ☐ А и В ☐ С ☐ А ☐ В.

5. Выберите правильные утверждения. Неориентированное дерево есть:

Ответ:

- ☐ связный граф, содержащий  $n$  вершин и  $n-1$  ребер;
- ☐ связный граф, содержащий  $n$  вершин и  $n-1$  ребер, и не имеющий циклов;
- ☐ граф, в котором любые две вершины соединены двумя цепями;
- ☐ любое подмножество  $n-1$  неориентированных ребер и  $n$  вершин.

6. Для графа, представленного на рисунке, число маршрутов длины 2 для всех вершин равно:



Ответ: ☐ 14;

☐

0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	0

☐

3	1	3	0	1
1	3	1	2	2
3	1	3	0	1
0	2	0	2	2
1	2	1	2	3

☐

2	7	2	6	7
7	4	7	2	5
2	7	2	6	7
6	2	6	0	2
7	5	7	2	4

**Лабораторный практикум по теории конечных графов**

7. Какие из утверждений справедливы?

Ответ:

- ☐ В конечном графе число вершин нечетной степени нечетно.
- ☐ В неориентированном графе число вершин четной степени четно.
- ☐ В конечном графе число вершин нечетной степени четно.
- ☐ В орграфе число вершин четной степени четно.

8. Алгоритм Краскала может быть применен для:

Ответ:

- ☐ построения цикла;
- ☐ поиска минимального дерева;
- ☐ поиска кратчайшего пути между вершинами;
- ☐ поиска радиуса графа.

9. При построении минимального покрывающего дерева по алгоритму Краскала используются:

Ответ:

- ☐ букет;
- ☐ матрица инцидентности;
- ☐ матрица смежности;
- ☐ матрица весов.

10. При построении минимального покрывающего дерева по алгоритму Прима используются:

Ответ:

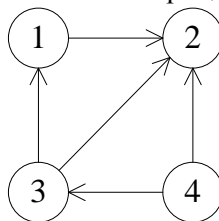
- ☐ матрица инцидентности;
- ☐ множество ребер, упорядоченное по возрастанию весов;
- ☐ множество ребер, упорядоченное по убыванию весов;
- ☐ матрица весов.

11. Сколько существует попарно неизоморфных неорграфов (без петель и кратных дуг) с 4 вершинами и 2 ребрами.

Ответ:      ☐ 3                      ☐ 4                      ☐ 5                      ☐ 2

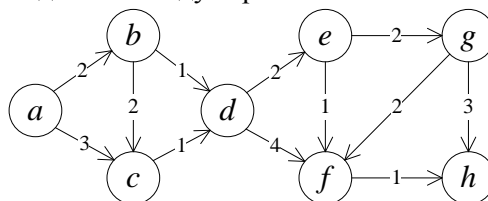
Лабораторный практикум по теории конечных графов

12. Какая из приведённых ниже матриц является матрицей смежности орграфа



- Ответ:
- ☐  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$       ☐  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$       ☐  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

13. Найдите путь наименьшей длины между вершинами  $a$  и  $h$  по алгоритму Дейкстры



Ответ:

- ☐  $a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow f \rightarrow h$
- ☐  $a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow h$
- ☐  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow h$
- ☐  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow g \rightarrow h$

14. Выберите правильное утверждение. Планарным графом называется граф, который

Ответ:

- ☐ можно изобразить на плоскости так, чтобы все пересечения ребер являлись вершинами графа;
- ☐ нельзя изобразить на плоскости так, чтобы все пересечения ребер являлись вершинами графа;
- ☐ можно изобразить в пространстве так, чтобы все пересечения ребер являлись вершинами графа;
- ☐ нельзя изобразить в пространстве так, чтобы все пересечения ребер являлись вершинами графа.



**Лабораторный практикум по теории конечных графов**

15. Для поиска пути в задаче Почтальона используется алгоритм:

Ответ:

- ☐ Прима;
- ☐ Краскала;
- ☐ Уоршалла - Флойда;
- ☐ поиска эйлера цикла.

Лабораторный практикум по теории конечных графов

Ответы для третьей главы

Ответы для лабораторного практикума

Лабораторная работа 1

№ 1. 1.  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{v_i\}, i = \overline{1,4}$ ,  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} = \{e_j\}, j = \overline{1,7}$ .

2. а)  $v_1$  и  $v_2$ ; б)  $v_1$  и  $v_3$ ; в)  $v_2$  и  $v_2$ ; г)  $v_2$  и  $v_3$ ; д)  $v_2$  и  $v_4$ ;

е)  $v_3$  и  $v_4$ . 3. Ребро  $e_1$  инцидентно вершинам  $v_1$  и  $v_3$ . Ребро  $e_2$  инцидентно вершинам  $v_1$  и  $v_2$ .

Ребро  $e_3$  инцидентно вершинам  $v_3$  и  $v_4$ . Ребро  $e_4$  инцидентно вершинам  $v_2$  и  $v_4$ . Ребро  $e_5$

инцидентно вершинам  $v_2$  и  $v_3$ . Ребро  $e_6$  инцидентно вершине  $v_2$ . Ребро  $e_7$  инцидентно вершинам

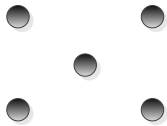
$v_1$  и  $v_2$ . 4. Смежные ребра: а)  $e_1$  и  $e_2$ ; б)  $e_1$  и  $e_3$ ; в)  $e_1$  и  $e_5$ ; г)  $e_1$  и  $e_7$ ; д)  $e_2$  и  $e_4$ ; е)  $e_2$  и  $e_5$ ; ж)  $e_2$

и  $e_6$ ; з)  $e_2$  и  $e_7$ ; и)  $e_3$  и  $e_4$ ; к)  $e_3$  и  $e_5$ ; л)  $e_4$  и  $e_5$ ; м)  $e_4$  и  $e_6$ ; н)  $e_5$  и  $e_6$ ; о)  $e_5$  и  $e_7$ ; п)  $e_6$  и  $e_7$ ; р)

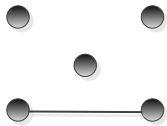
$e_4$  и  $e_7$ . 5.  $\delta(v_1)=3$ ;  $\delta(v_2)=6$ ;  $\delta(v_3)=3$ ;  $\delta(v_4)=2$ ;  $\sum_{i=1}^4 \delta(v_i)=14$ . 6. Ребра  $e_2$  и  $e_7$  являются

параллельными. 7.  $e_6$  – петля. 8. Две вершины нечетной степени:  $v_1$  и  $v_3$ .

№ 2. 0)  $E = (\emptyset)$ :



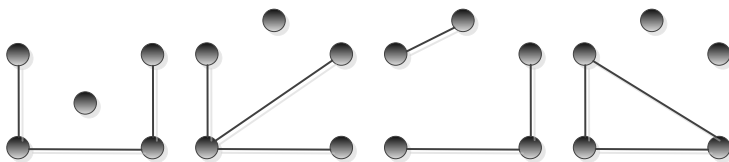
1)  $E = (e_1)$ :



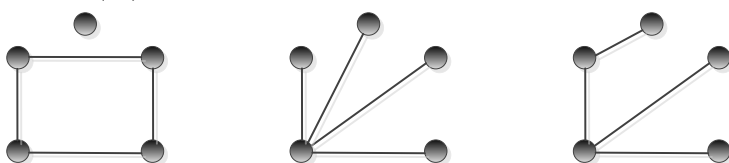
2)  $E = (e_1, e_2)$ :



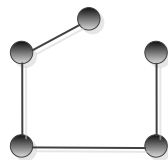
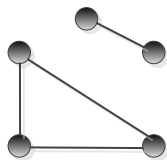
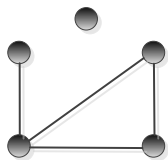
3)  $E = (e_j), j = \overline{1,3}$ :



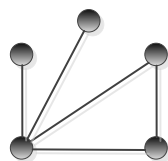
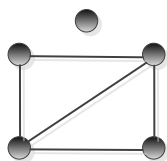
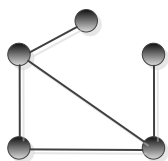
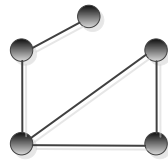
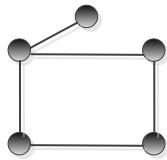
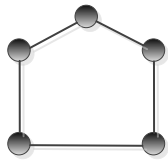
4)  $E = (e_j), j = \overline{1,4}$ :



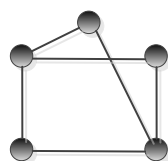
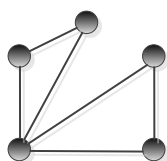
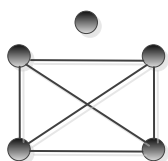
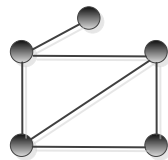
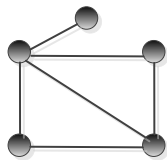
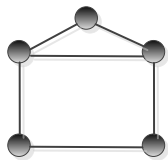
Лабораторный практикум по теории конечных графов



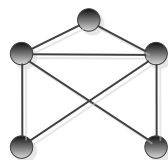
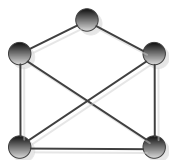
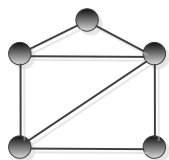
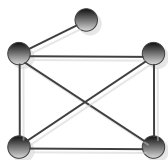
5)  $E = (e_j), j = \overline{1,5}$ :



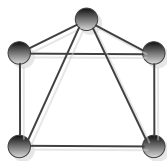
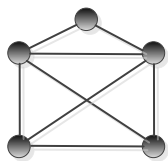
6)  $E = (e_j), j = \overline{1,6}$ :



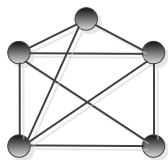
7)  $E = (e_j), j = \overline{1,7}$ :



8)  $E = (e_j), j = \overline{1,8}$ :



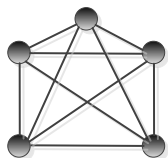
9)  $E = (e_j), j = \overline{1,9}$ :



10)  $E = (e_j), j = \overline{1,10}$ :



Лабораторный практикум по теории конечных графов



Лабораторная работа 2

№ 1. а) Найти графы, они перенесены в лаб 3

$$A = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} \\ V_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ V_6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \\ V_1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ V_2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ V_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ V_4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ V_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ V_6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

б)

$$A = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ V_1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ V_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ V_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 \\ V_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ V_6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ V_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в)

Лабораторный практикум по теории конечных графов

$$A = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ V_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ V_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ V_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ V_1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ V_2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ V_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ V_4 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

№ 2. 1)  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ . 2)  $v_1$  смежна с  $v_2$ ;  $v_2$  смежна с  $v_3$ ;  $v_3$  смежна с  $v_3$ ;  $v_3$  смежна с  $v_4$ ;  $v_3$  смежна с  $v_2$ ;  $v_4$  смежна с  $v_1$ . 3)  $e_1$  положительно инцидентна с  $v_4$  и отрицательно инцидентна с  $v_1$ ;  $e_2$  положительно инцидентна с  $v_4$  и отрицательно инцидентна с  $v_1$ ;  $e_3$  положительно инцидентна с  $v_1$  и отрицательно инцидентна с  $v_2$ ;  $e_4$  положительно инцидентна с  $v_3$  и отрицательно инцидентна с  $v_2$ ;  $e_5$  положительно инцидентна с  $v_2$  и отрицательно инцидентна с  $v_3$ ;  $e_6$  положительно инцидентна с  $v_3$  и отрицательно инцидентна с  $v_3$ ;  $e_7$  положительно инцидентна с  $v_3$  и отрицательно инцидентна с  $v_4$ . 4) Петля  $e_6$ . 5) Дуги  $e_1$  и  $e_2$  являются строго параллельными. 6) Дуги  $e_4$  и  $e_5$  являются не строго параллельными. 7) Дуга  $e_1$  смежна с  $e_3$ ;  $e_2$  с  $e_3$ ;  $e_3$  с  $e_5$ ;  $e_4$  с  $e_5$ ;  $e_5$  с  $e_4$ ;  $e_5$  с  $e_6$ ;  $e_5$  с  $e_7$ ;  $e_6$  с  $e_4$ ;  $e_6$  с  $e_7$ ;  $e_7$  с  $e_1$ ;  $e_7$  с  $e_2$ . 8)  $\delta^+(v_1)=1$ ,  $\delta^+(v_2)=1$ ,  $\delta^+(v_3)=3$ ,  $\delta^+(v_4)=2$ ,  $\delta^+(v_5)=0$ ;  $\delta^-(v_1)=2$ ,  $\delta^-(v_2)=2$ ,  $\delta^-(v_3)=2$ ,  $\delta^-(v_4)=1$ ,  $\delta^-(v_5)=0$ ;  $\delta(v_1)=3$ ,  $\delta(v_2)=3$ ,  $\delta(v_3)=5$ ,  $\delta(v_4)=3$ ,  $\delta(v_5)=0$ . 9) Количество вершин нечетной степени равно 4.

10)

$$A_1 = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ V_1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ V_4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11)

$$B_1 = \begin{pmatrix} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\ V_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ V_4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Лабораторный практикум по теории конечных графов

№ 3. 1)  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ ,  $E = \{\langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_3, v_1 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_3, v_3 \rangle, \langle v_5, v_6 \rangle, \langle v_6, v_5 \rangle\}$ . 2)  $v_1$  смежна с  $v_2$ ;  $v_2$  смежна с  $v_3$ ;  $v_3$  смежна с  $v_1$  и  $v_3$ ;  $v_5$  смежна с  $v_6$ ;  $v_6$  смежна с  $v_5$ . 3)  $e_1$  положительно инцидентна с  $v_1$  и отрицательно инцидентна с  $v_2$ ;  $e_2$  положительно инцидентна с  $v_2$  и отрицательно инцидентна с  $v_3$ ;  $e_3$  положительно инцидентна с  $v_3$  и отрицательно инцидентна с  $v_1$ ;  $e_4$  положительно инцидентна с  $v_2$  и отрицательно инцидентна с  $v_3$ ;  $e_5$  положительно инцидентна с  $v_3$  и отрицательно инцидентна с  $v_3$ ;  $e_6$  положительно инцидентна с  $v_5$  и отрицательно инцидентна с  $v_6$ ;  $e_7$  положительно инцидентна с  $v_6$  и отрицательно инцидентна с  $v_5$ . 4) Петля  $e_5$ . 5) Дуги  $e_2$  и  $e_4$  являются строго параллельными. 6) Дуги  $e_6$  и  $e_7$  являются не строго параллельными. 7) Дуга  $e_1$  смежна с  $e_2$  и  $e_4$ ;  $e_2$  с  $e_3$  и  $e_5$ ;  $e_3$  с  $e_1$ ;  $e_4$  с  $e_3$  и  $e_5$ ;  $e_5$  с  $e_3$ ;  $e_6$  с  $e_7$ ;  $e_7$  с  $e_6$ . 8)  $\delta^+(v_1)=1$ ,  $\delta^+(v_2)=2$ ,  $\delta^+(v_3)=2$ ,  $\delta^+(v_4)=0$ ,  $\delta^+(v_5)=1$ ,  $\delta^+(v_6)=1$ ;  $\delta^-(v_1)=1$ ,  $\delta^-(v_2)=1$ ,  $\delta^-(v_3)=3$ ,  $\delta^-(v_4)=0$ ,  $\delta^-(v_5)=1$ ,  $\delta^-(v_6)=1$ ;  $\delta(v_1)=2$ ,  $\delta(v_2)=3$ ,  $\delta(v_3)=5$ ,  $\delta(v_4)=0$ ,  $\delta(v_5)=2$ ,  $\delta(v_6)=2$ . 9) Количество вершин нечетной степени равно 2.

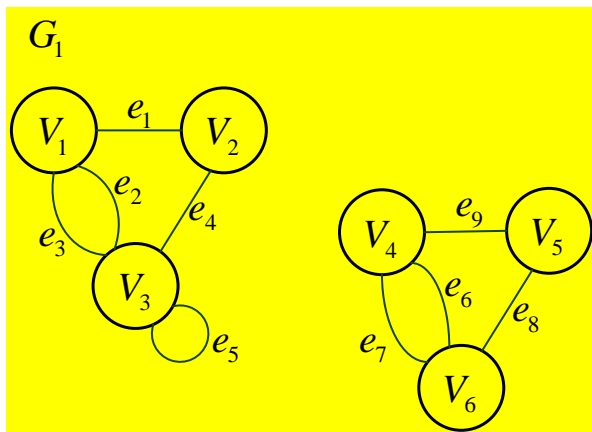
10)

$$A_2 = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ V_1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ V_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

11)

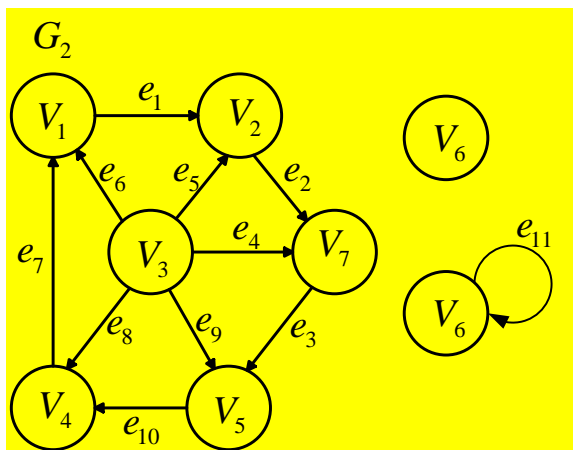
$$B_2 = \begin{pmatrix} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \\ V_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ V_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ V_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

№ 4.



Лабораторный практикум по теории конечных графов

№ 5.



$$B_2 = \begin{pmatrix} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 & V_8 \\ V_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ V_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ V_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ V_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Лабораторная работа 3

№ 1. 1)  $d(v_i, v_i) = 0$ ,  $d(v_1, v_2) = 1$ ,  $d(v_1, v_3) = 2$ ,  $d(v_1, v_4) = 2$ ,  $d(v_1, v_5) = 2$ ,  $d(v_2, v_3) = 1$ ,  $d(v_2, v_4) = 1$ ,  $d(v_2, v_5) = 1$ ,  $d(v_3, v_4) = 2$ ,  $d(v_3, v_5) = 1$ ,  $d(v_4, v_5) = 1$ . 2)  $l(v_1) = 2$ ,  $l(v_2) = 1$ ,  $l(v_3) = 2$ ,  $l(v_4) = 2$ ,  $l(v_5) = 2$ . 3)  $d(G) = 2$ . 4)  $r(G) = 1$ . 5)  $v_2$  – центральная вершина. 6) Вершина  $v_2$  является центром  $G$ .

$$7) B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$8) B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

9)  $u(v_1) = \{v_2\}$ ,  $u(v_2) = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ ,  $u(v_3) = \{v_2, v_5\}$ ,  $u(v_4) = \{v_2, v_5\}$ ,  $u(v_5) = \{v_2, v_3, v_4\}$ .

Лабораторный практикум по теории конечных графов

- № 2. 1)  $d(v_i, v_i) = 0$ ,  $d(v_1, v_2) = 1$ ,  $d(v_1, v_3) = 2$ ,  $d(v_1, v_4) = 2$ ,  $d(v_1, v_5) = 1$ ,  $d(v_1, v_6) = 1$ ,  $d(v_1, v_7) = 2$ ,  
 $d(v_6, v_7) = 2$ ,  $d(v_2, v_3) = 1$ ,  $d(v_2, v_4) = 2$ ,  $d(v_2, v_5) = 2$ ,  $d(v_2, v_6) = 1$ ,  $d(v_2, v_7) = 3$ ,  $d(v_3, v_4) = 2$ ,  
 $d(v_5, v_7) = 1$ ,  $d(v_3, v_5) = 2$ ,  $d(v_3, v_6) = 1$ ,  $d(v_4, v_5) = 1$ ,  $d(v_4, v_6) = 1$ ,  $d(v_5, v_6) = 1$ ,  $d(v_3, v_7) = 3$ ,  
 $d(v_4, v_7) = 2$ . 2)  $l(v_1) = 2$ ,  $l(v_2) = 3$ ,  $l(v_3) = 3$ ,  $l(v_4) = 2$ ,  $l(v_5) = 2$ ,  $l(v_6) = 2$ ,  $l(v_7) = 3$ . 3)  $d(G) = 3$ .  
4)  $r(G) = 2$ . 5)  $v_1, v_4, v_5, v_6$  – центральные вершины.  
б)  $\{v_1, v_4, v_5, v_6\}$  является центром  $G$ .

$$7) \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8) \mathbf{B}^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 & 5 & 8 & 9 & 1 \\ 7 & 4 & 7 & 5 & 5 & 9 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 7 & 5 & 9 & 2 \\ 5 & 5 & 7 & 4 & 8 & 9 & 1 \\ 8 & 5 & 5 & 8 & 4 & 10 & 4 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 10 & 10 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- 9)  $u(v_1) = \{v_2, v_5, v_6\}$ ,  $u(v_2) = \{v_1, v_3, v_6\}$ ,  $u(v_3) = \{v_2, v_4, v_6\}$ ,  
 $u(v_4) = \{v_3, v_5, v_6\}$ ,  $u(v_5) = \{v_1, v_4, v_6, v_7\}$ ,  $u(v_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ,  $u(v_7) = \{v_5\}$ .

- № 3. 1)  $d(v_i, v_i) = 0$ ,  $d(v_1, v_2) = 1$ ,  $d(v_1, v_3) = 1$ ,  $d(v_1, v_4) = 1$ ,  $d(v_1, v_5) = 1$ ,  $d(v_1, v_6) = 2$ ,  $d(v_1, v_7) = 2$ ,  
 $d(v_1, v_8) = 1$ ,  $d(v_2, v_3) = 1$ ,  $d(v_2, v_4) = 1$ ,  $d(v_2, v_5) = 1$ ,  $d(v_2, v_6) = 1$ ,  $d(v_2, v_7) = 2$ ,  $d(v_2, v_8) = 2$ ,  
 $d(v_3, v_4) = 1$ ,  $d(v_3, v_5) = 2$ ,  $d(v_3, v_6) = 1$ ,  $d(v_3, v_7) = 1$ ,  $d(v_3, v_8) = 2$ ,  $d(v_4, v_5) = 2$ ,  $d(v_4, v_6) = 2$ ,  
 $d(v_4, v_7) = 1$ ,  $d(v_4, v_8) = 1$ ,  $d(v_5, v_6) = 2$ ,  $d(v_5, v_7) = 3$ ,  $d(v_5, v_8) = 2$ ,  $d(v_6, v_7) = 2$ ,  $d(v_6, v_8) = 3$ ,  
 $d(v_7, v_8) = 2$ . 2)  $l(v_1) = 2$ ,  $l(v_2) = 2$ ,  $l(v_3) = 2$ ,  $l(v_4) = 2$ ,  $l(v_5) = 3$ ,  $l(v_6) = 3$ ,  $l(v_7) = 3$ ,  $l(v_8) = 3$ . 3)  
 $d(G) = 3$ . 4)  $r(G) = 2$ . 5)  $v_1, v_2, v_3, v_4$  – центральные вершины. 6)  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  является центром  
 $G$ .



Лабораторный практикум по теории конечных графов

$$7) \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$8) u(v_1) = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_8\}, u(v_2) = \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\},$$

$$u(v_3) = \{v_1, v_2, v_4, v_6, v_7\}, u(v_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_7, v_8\}, u(v_5) = \{v_1, v_2\}, u(v_6) = \{v_2, v_3\}, u(v_7) = \{v_3, v_4\},$$

$$u(v_8) = \{v_1, v_4\}.$$

Лабораторная работа 4

$$\text{№ 1. } \mathbf{1.} T = \left\{ \binom{2}{v_1, v_2}, \binom{7}{v_1, v_4}, \binom{8}{v_2, v_3}, \binom{4}{v_3, v_5}, \binom{5}{v_4, v_6}, \binom{3}{v_4, v_8}, \binom{7}{v_5, v_9} \right\},$$

$$\binom{4}{v_6, v_7} \Big\}, w_T = 40; \mathbf{2.} T_{\min} = \left\{ \binom{2}{v_1, v_2}, \binom{2}{v_8, v_9}, \binom{3}{v_4, v_5}, \binom{3}{v_4, v_8}, \binom{4}{v_3, v_5} \right\},$$

$$\binom{4}{v_6, v_7}, \binom{5}{v_4, v_6}, \binom{7}{v_1, v_4} \Big\}, w_{T_{\min}} = 30; \mathbf{3.} T_{\max} = \left\{ \binom{8}{v_2, v_3}, \binom{7}{v_1, v_4} \right\},$$

$$\binom{6}{v_5, v_8}, \binom{5}{v_3, v_4}, \binom{5}{v_4, v_6}, \binom{4}{v_3, v_5}, \binom{4}{v_6, v_7}, \binom{2}{v_4, v_2} \Big\}, w_{T_{\max}} = 46.$$

$$\text{№ 2. } \mathbf{1.} T = \left\{ \binom{1}{v_1, v_6}, \binom{7}{v_2, v_3}, \binom{8}{v_2, v_5}, \binom{1}{v_3, v_4}, \binom{2}{v_3, v_7}, \binom{7}{v_4, v_6} \right\},$$

$$w_T = 26; \mathbf{2.} T_{\min} = \left\{ \binom{1}{v_1, v_6}, \binom{1}{v_3, v_4}, \binom{2}{v_3, v_7}, \binom{3}{v_3, v_5}, \binom{7}{v_2, v_3}, \binom{7}{v_4, v_6} \right\},$$

$$w_{T_{\min}} = 21; \mathbf{3.} T_{\max} = \left\{ \binom{8}{v_2, v_5}, \binom{7}{v_2, v_3}, \binom{7}{v_4, v_6}, \binom{4}{v_4, v_7}, \binom{3}{v_5, v_7} \right\},$$

$$\binom{1}{v_1, v_6} \Big\}, w_{T_{\max}} = 30.$$

$$\text{№ 3. } \mathbf{1.} T = \left\{ \binom{1}{v_1, v_2}, \binom{1}{v_1, v_3}, \binom{8}{v_3, v_4} \right\}, w_T = 10;$$

$$\mathbf{2.} T_{\min} = \left\{ \binom{1}{v_1, v_2}, \binom{1}{v_1, v_3}, \binom{8}{v_3, v_4} \right\}, w_{T_{\min}} = 10;$$

Лабораторный практикум по теории конечных графов

$$3. T_{\max} = \left\{ \binom{7}{v_1, v_2}, \binom{7}{v_2, v_3}, \binom{8}{v_3, v_4} \right\}, w_{T_{\max}} = 22.$$

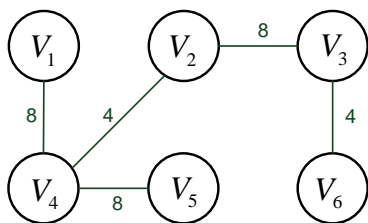
Лабораторная работа 5

$$\text{№ 1. } T_{\min} = \left\{ \binom{4}{v_4, v_5}, \binom{6}{v_2, v_4}, \binom{5}{v_1, v_2}, \binom{5}{v_2, v_3}, \binom{9}{v_3, v_6} \right\}, w_{T_{\min}} = 29.$$

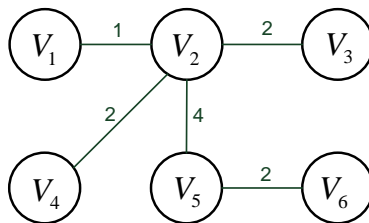
$$\text{№ 2. } T_{\max} = \left\{ \binom{8}{v_2, v_7}, \binom{6}{v_2, v_6}, \binom{7}{v_3, v_6}, \binom{5}{v_4, v_6}, \binom{4}{v_1, v_6}, \binom{3}{v_5, v_6} \right\}, w_{T_{\max}} = 33.$$

$$\text{№ 3. } T_{\min} = \left\{ \binom{1}{v_1, v_2}, \binom{4}{v_1, v_4}, \binom{4}{v_3, v_6}, \binom{4}{v_4, v_7}, \binom{1}{v_5, v_7}, \binom{4}{v_6, v_9}, \right. \\ \left. \binom{4}{v_7, v_9}, \binom{1}{v_8, v_9} \right\}, w_{T_{\min}} = 23.$$

№ 4. Мах-дерево:  $w_{T_{\min}} = 32$



Min-дерево:  $w_{T_{\max}} = 11$



Лабораторная работа 6

№ 1. 1. Путь  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4$ , длина 14; 2. Путь  $v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_6$ , длина 12; 3. Путь  $v_1 \rightarrow v_5 \rightarrow v_6$ , длина 19.

№ 2. 1. Путь  $v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4$ , длина 3; 2. Путь  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_5$ , длина 12; 3. Путь  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4$ , длина 10.

№ 3. 1. Путь  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_5 \rightarrow v_4$ , длина 15; 2. Путь  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_6$ , длина 20; 3. Путь  $v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_6$ , длина 13.

Лабораторная работа 7

№ 1. 1.  $v_1 v_5 v_4 v_2 v_5 v_6 v_3 v_2 v_1$ ; 2.  $v_3 v_6 v_5 v_4 v_2 v_5 v_1 v_2 v_3$ ; 3.  $v_4 v_5 v_6 v_3 v_2 v_5 v_1 v_2 v_4$ .

№ 2.  $v_1 v_5 v_7 v_6 v_4 v_7 v_3 v_6 v_2 v_4 v_5 v_3 v_1$ .

№ 3.  $v_8 v_4 v_7 v_3 v_6 v_4 v_5 v_3 v_8 v_2 v_7 v_1 v_6 v_2 v_5 v_1 v_8$ .

№ 4.  $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_2 v_8 v_6 v_9 v_7 v_8 v_5 v_3 v_1$ .

№ 5.  $v_4 v_2 v_7 v_1 v_6 v_2 v_5 v_1 v_3 v_2 v_1 v_4$ .

Лабораторная работа 8

Лабораторный практикум по теории конечных графов

№ 1.  $bcdab$ .

№ 2. 3 гамильтоновых цикла:  $bcd aeb$ ,  $bcdeab$ ,  $bdaceb$ .

№ 3. 2 гамильтоновых цикла:  $cdbeac$ ,  $cdeabc$ .

№ 4. 2 гамильтоновых цикла:  $abcdefa$ ,  $afedcba$ .

Лабораторная работа 9

№ 1.

$D^{(5)}$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
$v_1$	6	1	4	13	8
$v_2$	5	6	3	12	7
$v_3$	2	3	6	9	4
$v_4$	3	4	1	10	5
$v_5$	8	9	6	5	10

№ 2.

$D^{(4)}$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
$v_1$	4	1	6	3
$v_2$	3	4	5	2
$v_3$	6	3	8	5
$v_4$	1	2	3	4

№ 3.

$D^{(3)}$	$v_1$	$v_2$	$v_3$
$v_1$	4	3	7
$v_2$	1	2	4
$v_3$	1	4	8

№ 4.  $E^* = (\langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_1, v_3 \rangle, \langle v_1, v_4 \rangle, \langle v_2, v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_2, v_4 \rangle, \langle v_3, v_2 \rangle,$

$\langle v_3, v_3 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle, \langle v_4, v_2 \rangle, \langle v_4, v_3 \rangle, \langle v_4, v_4 \rangle, \langle v_5, v_1 \rangle, \langle v_5, v_2 \rangle, \langle v_5, v_3 \rangle, \langle v_5, v_4 \rangle)$ ;

$D^{(5)}$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
$v_1$	0	1	1	1	0
$v_2$	0	1	1	1	0
$v_3$	0	1	1	1	0
$v_4$	0	1	1	1	0
$v_5$	1	1	1	1	0

№ 5.  $E^* = E$ ;

Лабораторный практикум по теории конечных графов

$D^{(4)}$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
$v_1$	0	1	0	0
$v_2$	0	0	0	0
$v_3$	0	1	0	0
$v_4$	1	1	1	0

№ 6.  $E^* = (\langle v_1, v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_1, v_3 \rangle, \langle v_1, v_4 \rangle, \langle v_1, v_5 \rangle, \langle v_2, v_1 \rangle, \langle v_2, v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_2, v_4 \rangle, \langle v_2, v_5 \rangle, \langle v_3, v_1 \rangle, \langle v_3, v_2 \rangle, \langle v_3, v_3 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle, \langle v_3, v_5 \rangle, \langle v_4, v_1 \rangle, \langle v_4, v_2 \rangle, \langle v_4, v_3 \rangle, \langle v_4, v_4 \rangle, \langle v_4, v_5 \rangle, \langle v_5, v_1 \rangle, \langle v_5, v_2 \rangle, \langle v_5, v_3 \rangle, \langle v_5, v_4 \rangle, \langle v_5, v_5 \rangle);$

$D^{(5)}$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
$v_1$	1	1	1	1	1
$v_2$	1	1	1	1	1
$v_3$	1	1	1	1	1
$v_4$	1	1	1	1	1
$v_5$	1	1	1	1	1

Лабораторная работа 10

№ 1. 1. Поток существует. 2. Увеличивающие цепи:  $E' = \{\langle v_1, v_3 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_2, v_4 \rangle\}$ ,  
 $E'' = \{\langle v_1, v_3 \rangle, \langle v_3, v_2 \rangle, \langle v_2, v_4 \rangle\}$ ; Увеличенный поток:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1,1 \\ v_1, v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2,3 \\ v_1, v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,1 \\ v_2, v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2,3 \\ v_2, v_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,1 \\ v_3, v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,1 \\ v_3, v_4 \end{pmatrix} \right\}.$$

№ 2. 1. Поток существует. 2. Увеличивающие цепи:  $E' = \{\langle v_1, v_3 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle, \langle v_4, v_5 \rangle\}$ ,  
 $E'' = \{\langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_4, v_2 \rangle, \langle v_4, v_5 \rangle\}$ ; Увеличенный поток:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 3,3 \\ v_1, v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4,4 \\ v_1, v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4,6 \\ v_2, v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8,8 \\ v_3, v_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,4 \\ v_4, v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7,8 \\ v_4, v_5 \end{pmatrix} \right\}.$$

№ 3. 1. Поток существует. 2. Увеличивающие цепи:  $E' = \{\langle v_1, v_4 \rangle, \langle v_4, v_6 \rangle, \langle v_6, v_7 \rangle\}$ ,  
 $E'' = \{\langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_3, v_5 \rangle, \langle v_5, v_7 \rangle\}$ ,  $E''' = \{\langle v_1, v_3 \rangle, \langle v_3, v_5 \rangle, \langle v_5, v_7 \rangle\}$ ,  
 $E'''' = \{\langle v_1, v_3 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_5, v_2 \rangle, \langle v_5, v_7 \rangle\}$ ,  $E''''' = \{\langle v_1, v_3 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_5, v_2 \rangle, \langle v_5, v_6 \rangle, \langle v_6, v_7 \rangle\}$ ; Увеличенный  
 ПОТОК:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 4,4 \\ v_1, v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5,6 \\ v_1, v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4,4 \\ v_1, v_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5,7 \\ v_2, v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,2 \\ v_3, v_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10,10 \\ v_3, v_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4,4 \\ v_4, v_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,5 \\ v_5, v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,2 \\ v_5, v_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8,8 \\ v_5, v_7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5,5 \\ v_6, v_7 \end{pmatrix} \right\}.$$

Лабораторный практикум по теории конечных графов

Лабораторная работа 11

№ 1. 1.  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 3,1,3 \\ s,a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4,2,4 \\ s,b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6,3,6 \\ s,c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,2,3 \\ a,b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2,1,3 \\ b,c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3,2,4 \\ a,t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2,3,2 \\ b,t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8,4,8 \\ c,t \end{pmatrix} \right\}$ ,  $K_{\max} = 13$ ; 2. Для  $k = 2$ :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 2,1,3 \\ s,a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,2,4 \\ s,b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,3,6 \\ s,c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,2,3 \\ a,b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,1,3 \\ b,c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2,2,4 \\ a,t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,3,2 \\ b,t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,4,8 \\ c,t \end{pmatrix} \right\}, P = 6;$$

Для  $k = 5$ :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 3,1,3 \\ s,a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2,2,4 \\ s,b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,3,6 \\ s,c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,2,3 \\ a,b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,1,3 \\ b,c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3,2,4 \\ a,t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2,3,2 \\ b,t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,4,8 \\ c,t \end{pmatrix} \right\}, P = 19.$$

№ 2. 1.  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 3,3,3 \\ s,a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5,4,5 \\ s,b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3,1,5 \\ s,c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5,4,6 \\ b,d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,2,5 \\ b,c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3,3,6 \\ c,d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3,1,3 \\ a,t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8,3,8 \\ d,t \end{pmatrix} \right\}$ ,  $K_{\max} = 11$ ; 2. Для  $k = 2$ :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 2,3,3 \\ s,a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,4,5 \\ s,b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,1,5 \\ s,c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,4,6 \\ b,d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,2,5 \\ b,c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,3,6 \\ c,d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2,1,3 \\ a,t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,3,8 \\ d,t \end{pmatrix} \right\}, P = 8;$$

Для  $k = 4$ :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 3,3,3 \\ s,a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,4,5 \\ s,b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,1,5 \\ s,c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,4,6 \\ b,d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,2,5 \\ b,c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,3,6 \\ c,d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3,1,3 \\ a,t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,3,8 \\ d,t \end{pmatrix} \right\}, P = 19.$$

№ 3. 1.  $K_{\max} = 13$ ; 2. Для  $k = 2$ :

$$G = \{(s,a), (a,b), (b,t)\}, P = 14;$$

Для  $k = 4$ :

$$G = \{(s,a), (a,b), (b,t)\}, P = 21.$$

Лабораторная работа 12

№ 1.  $v_3 v_2 v_1 v_4 v_3 v_2 v_5 v_2 v_1 v_5 v_3$ .

№ 2.  $v_5 v_3 v_4 v_1 v_2 v_3 v_4 v_1 v_3 v_4 v_5$ .

№ 3.  $v_2 v_5 v_1 v_2 v_5 v_1 v_3 v_4 v_2 v_5 v_1 v_3 v_4 v_6 v_2 v_5 v_6 v_2$ .

№ 4.  $v_1 v_2 v_3 v_5 v_4 v_1 v_2 v_3 v_6 v_5 v_4 v_1 v_5 v_4 v_1 v_6 v_5 v_4 v_1$ .