Лабораторная работа №4

Математическое моделирование

Мухамедияр Адиль

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Вводная часть

1.1 Объект и предмет исследования

- Модель гармонических колебаний
- Язык программирования Julia
- Система моделирования Openmodelica

1.2 Цели и задачи

- Построение математической модели колебаний гармонического осциллятора
- Визуализация модели на языках Julia и OpenModelica

1.3 Материалы и методы

- Язык программирования Julia
- Пакеты “Plots”, “DifferentialEquations”

Теоретическая справка

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором.

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

, где x — переменная, описывающая состояние системы (например, смещение грузика), γ — параметр, характеризующий потери энергии (например, трение в механической системе), ω_0 — собственная частота колебаний.

Зададим начальные условия: $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases}$.

Для первого случая потери в системе отсутствуют ($\gamma = 0$), поэтому уравнение принимает вид: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Представим его в виде системы: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$.

Для второго случая появляются потери в системе, и система уравнений принимает вид: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\gamma\dot{x} - \omega_0^2 x \end{cases}$.

Для третьего случая помимо потерь на систему влияет внешняя сила, описываемая функцией $P(t)$. Тогда система уравнений примет вид: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = P(t) - 2\gamma\dot{x} - \omega_0^2 x \end{cases}$.

Для всех этих систем начальные условия примут вид: $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

2 Содержание лабораторной работы

2.1 Постановка задачи

2.1.1 Вариант № 6

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев 1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

$$\ddot{x} + 8x = 0$$

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 0$$

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 6x = sin(0.5t)$$

На интервале t ⊠ [0; 45] (шаг 0.05) с начальными условиями $ x_0 = -1, y_0 = 0$

3 Решение программными средствами

1 случай на *Julia*

```
using Plots
using DifferentialEquations
const x0 = -1
const y0 = 0
const omega = 8
const gamma = 0
P(t) = 0
T = (0, 45)
u0 = [x0, y0]
p1 = (omega)
p2 = (omega, gamma)
function F1(du, u, p, t)
    omega = p
    du[1] = u[2]
    du[2] = -omega*u[1]
end

prob1 = ODEProblem(F1, u0, T, p1)
sol1 = solve(prob1, dtmax=0.05)
plt = plot(sol1, vars=(2,1), color=:red, label="Фазовый портрет", title="1 случай
plt2 = plot(sol1, vars=(0,1), color=:blue, label="x(t)", title="1 случай", xlabel
```

```
plot!(plt2, sol1, vars=(0,2), color=:green, label="y(t)")
savefig(plt, "Julia1_1.png")
savefig(plt2, "Julia1_2.png")
```

Получаем графики решения уравнения и фазовый портрет гармонического осциллятора. Из замкнутости фазового портрета можно сделать вывод о консервативности системы, то есть об отсутствии влияния на систему со стороны внешних сил.

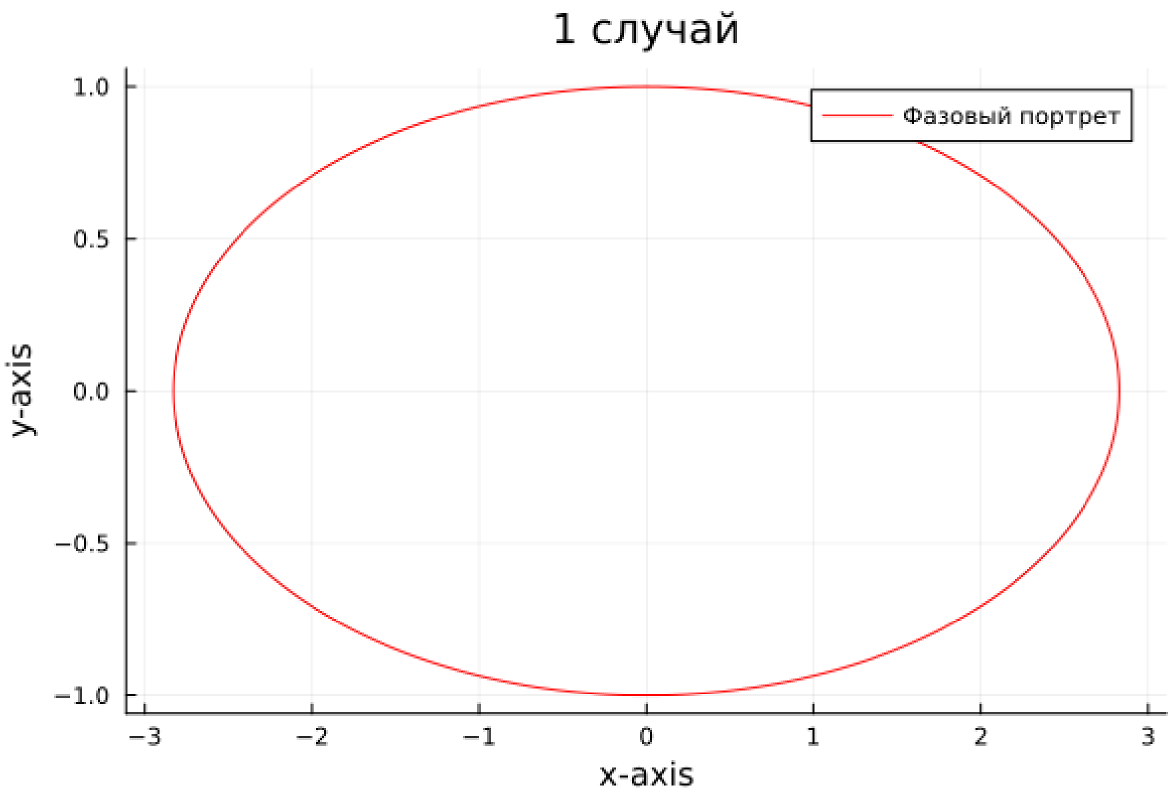


Рис. 3.1: Первый случай на Julia

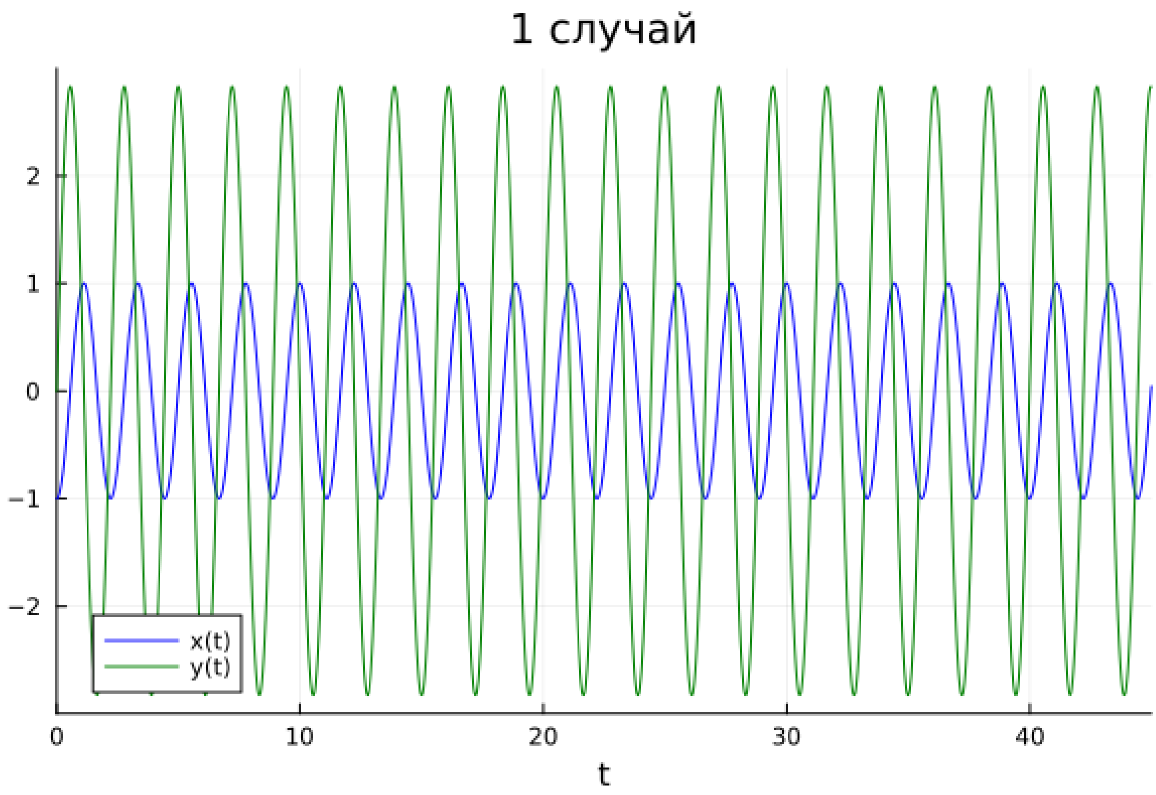


Рис. 3.2: Первый случай на Julia

2 случай на *Julia*

```
using Plots
using DifferentialEquations

const x0 = -1
const y0 = 0
const omega = 3
const gamma = 4

P(t) = 0

T = (0, 45)
```

```
u0 = [x0, y0]

p1 = (omega)
p2 = (omega, gamma)

function F2(du, u, p, t)
    omega, gamma = p
    du[1] = u[2]
    du[2] = -gamma*du[1]-omega*u[1]
end

prob2 = ODEProblem(F2, u0, T, p2)
sol2 = solve(prob2, dtmax=0.05)

plt = plot(sol2, vars=(2,1), color=:red, label="Фазовый портрет", title="2 случай
plt2 = plot(sol2, vars=(0,1), color=:blue, label="x(t)", title="2 случай", xlabel
plot!(plt2, sol2, vars=(0,2), color=:green, label="y(t)")

savefig(plt, "Julia2_1.png")
savefig(plt2, "Julia2_2.png")
```

Для второго случая получаем графики решения уравнения и фазовый портрет гармонического осциллятора. Фазовый портрет незамкнут, отсюда можно сделать вывод о том, что система не является консервативной, то есть на нее влияет какая-то внешняя сила, например, сила трения.

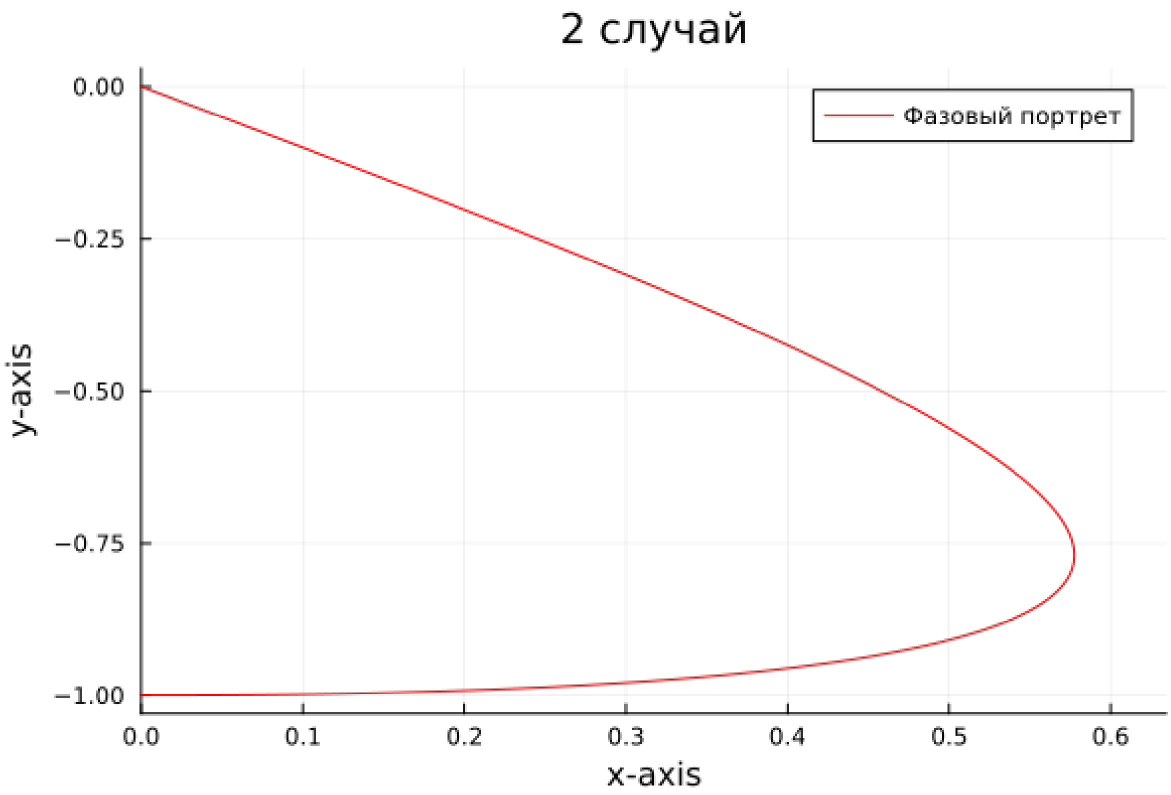
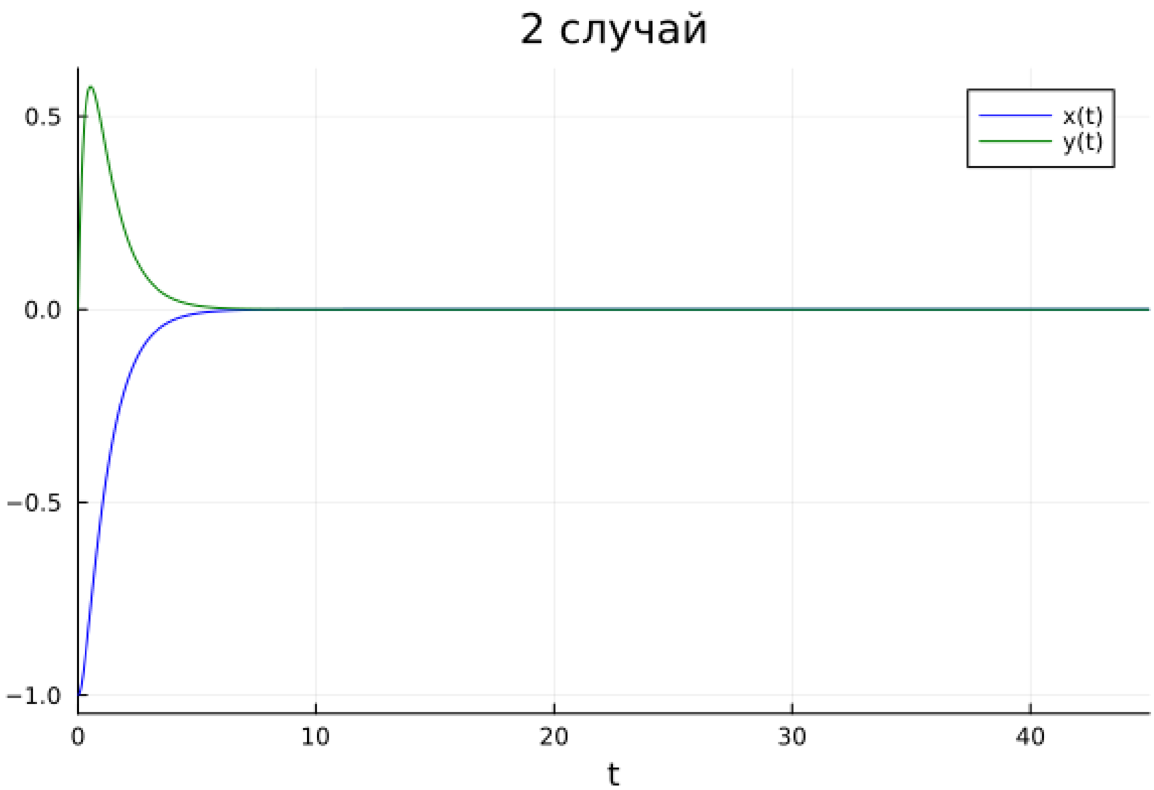


Рис. 3.3: Второй случай на Julia



3 случай на *Julia*

```
using Plots
using DifferentialEquations

const x0 = -1
const y0 = 0
const omega = 6
const gamma = 3

P(t) = sin(0.5*t)

T = (0, 45)

u0 = [x0, y0]
```

```
p1 = (omega)
p2 = (omega, gamma)

function F3(du, u, p, t)
    omega, gamma = p
    du[1] = u[2]
    du[2] = P(t)-gamma*du[1]-omega*u[1]
end

prob3 = ODEProblem(F3, u0, T, p2)
sol3 = solve(prob3, dtmax=0.05)

plt = plot(sol3, vars=(2,1), color=:red, label="Фазовый портрет", title="3 случай
plt2 = plot(sol3, vars=(0,1), color=:blue, label="x(t)", title="3 случай", xlabel
plot!(plt2, sol3, vars=(0,2), color=:green, label="y(t)")

savefig(plt, "Julia3_1.png")
savefig(plt2, "Julia3_2.png")
```

Получаем графики решения уравнения и фазовый портрет гармонического осциллятора для третьего случая. Из незамкнутости графика фазового портрета видно, что система неконсервативна, следовательно на нее действуют внешние силы.

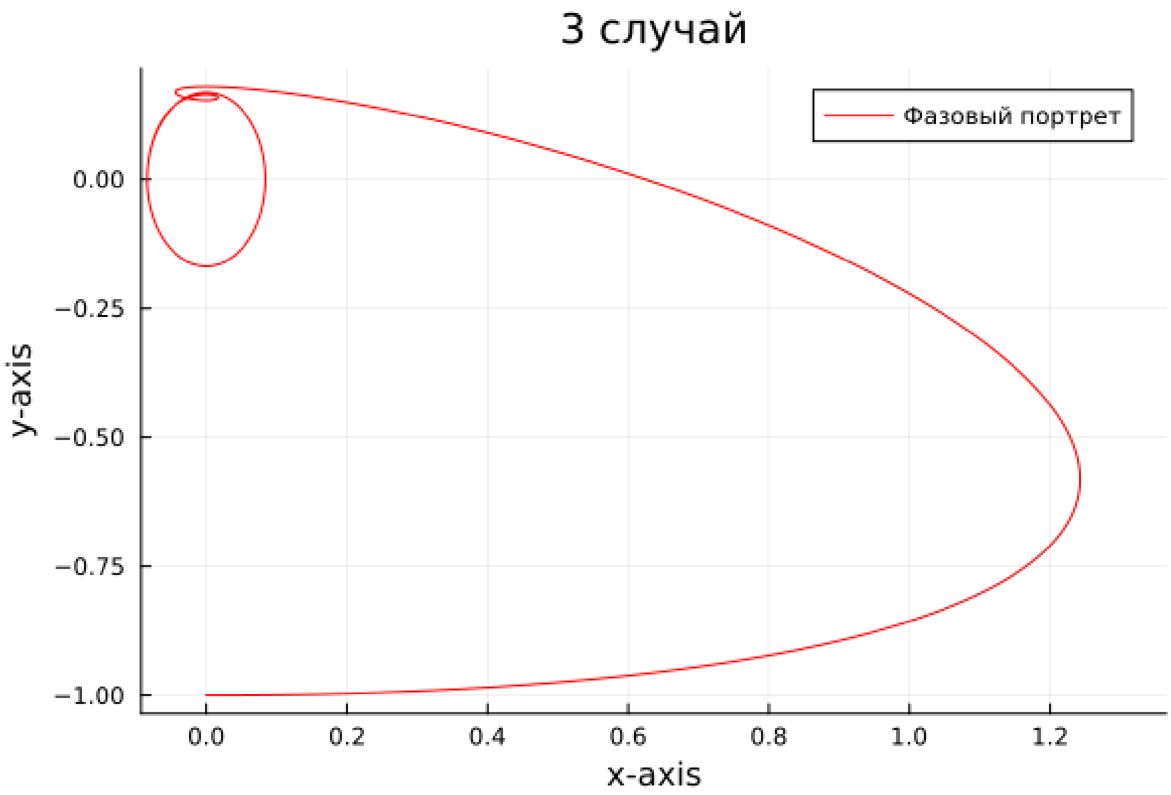


Рис. 3.4: Третий случай на Julia

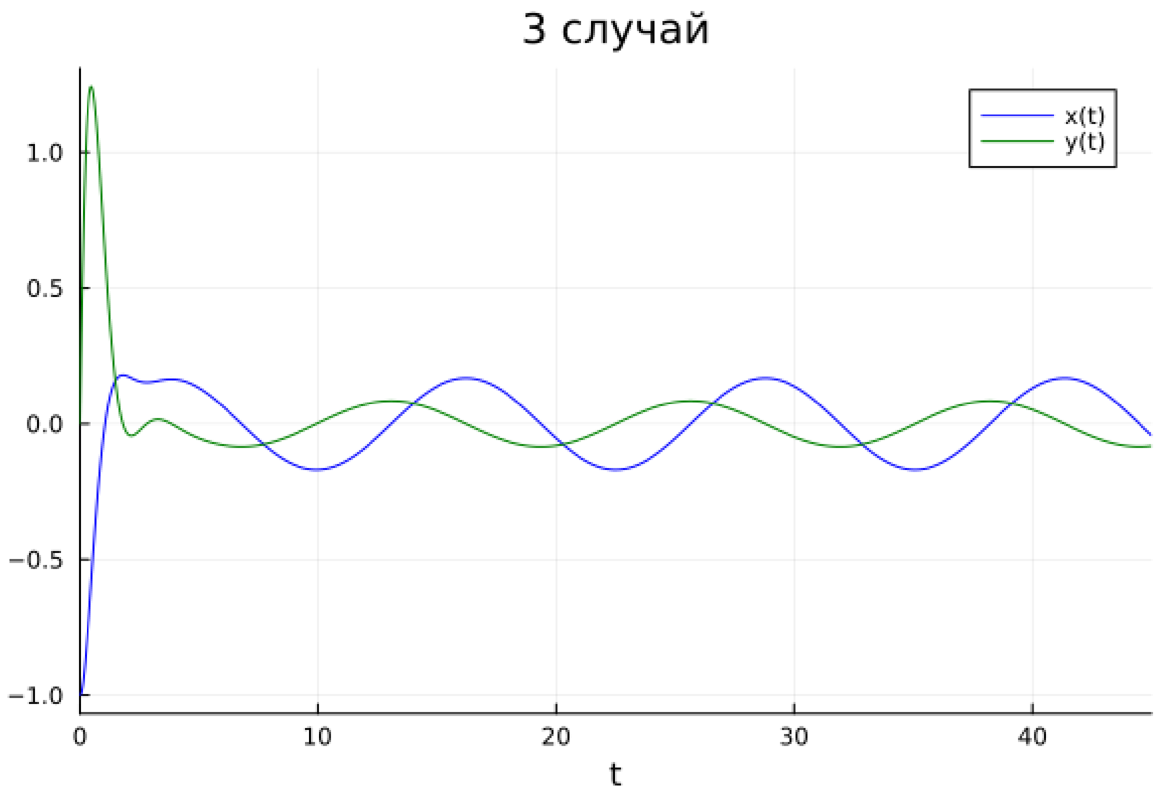


Рис. 3.5: Третий случай на Julia

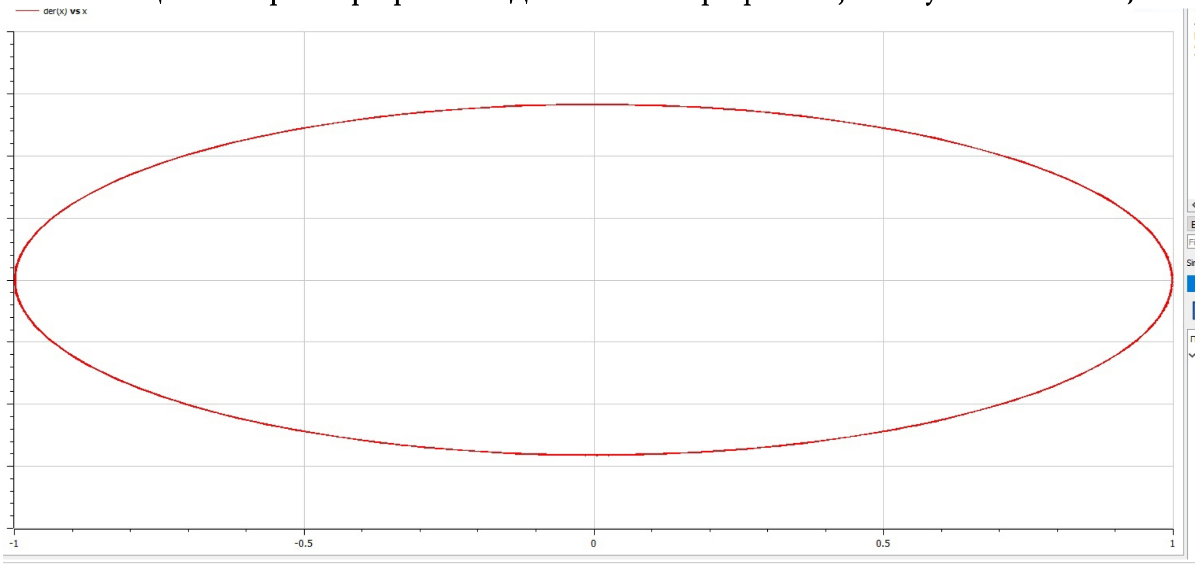
Теперь пишем на OpenModelica:

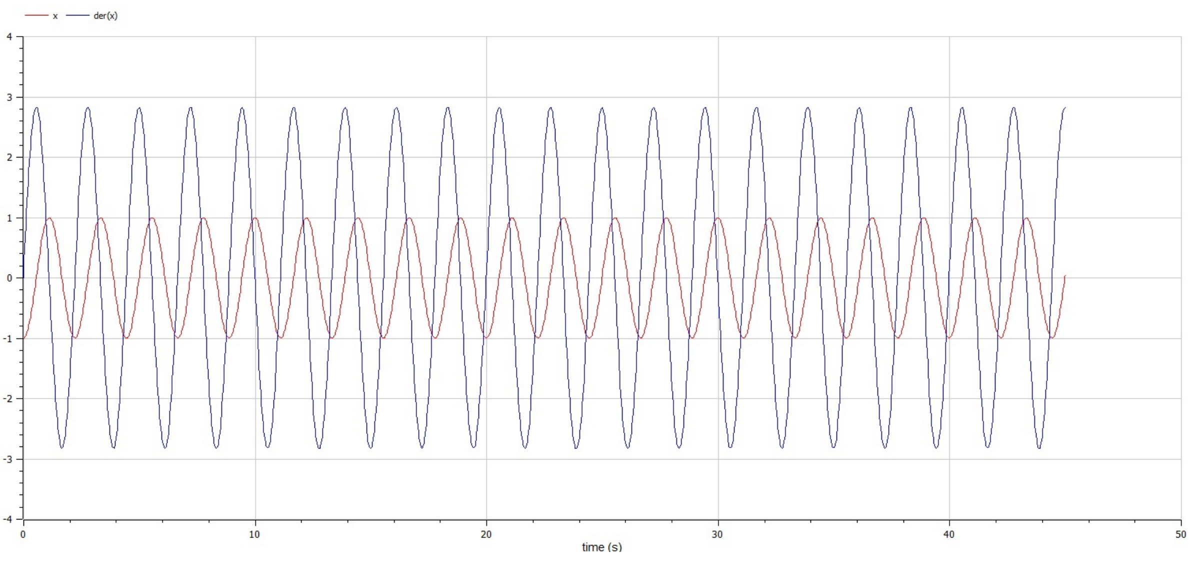
1 случай на *OpenModelica*

```
model Lab4
parameter Real x0 = -1;
parameter Real y0 = 0;
parameter Real omega = 8;

Real x(start=x0);
Real y(start=y0);

equation
```

```
der(x) = y;
der(y) = -omega*x;
end Lab4;
```

Видим графики решения уравнения и фазовый портрет гармонического осциллятора. Графики идентичны графикам, полученным в Julia.



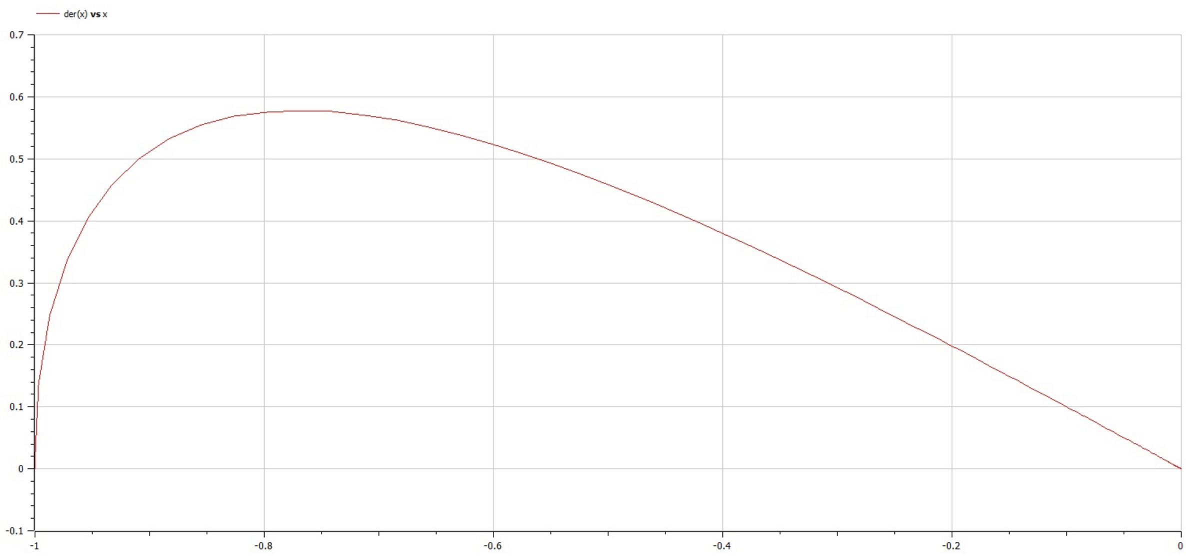


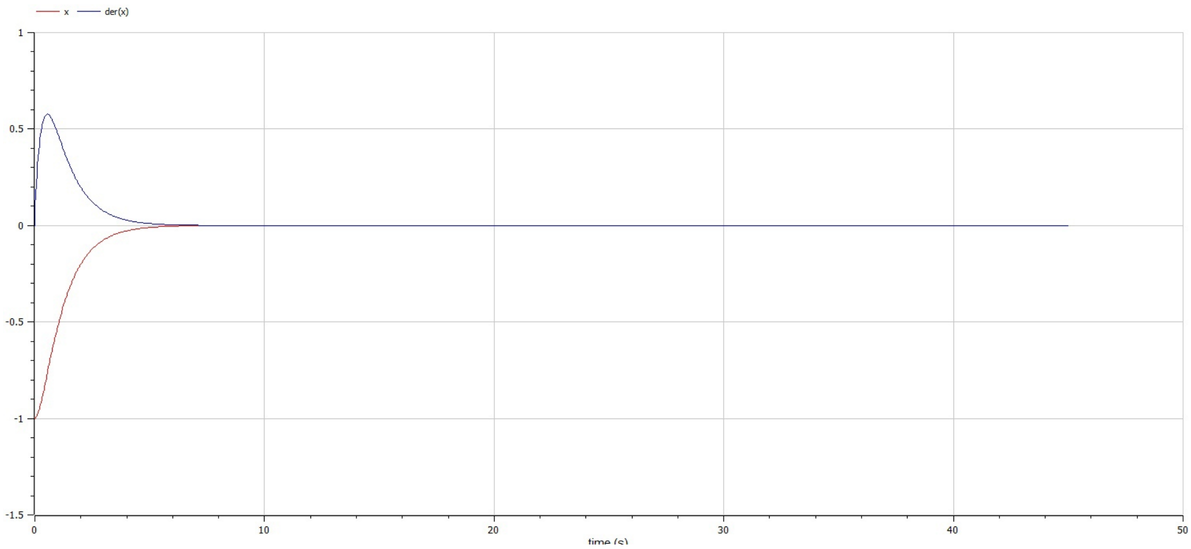
2 случай на *OpenModelica*

```
model Lab4
parameter Real x0 = -1;
parameter Real y0 = 0;
```

```
parameter Real omega = 3;
parameter Real gamma = 4;

Real x(start=x0);
Real y(start=y0);

equation

der(x) = y;
der(y) = -gamma*der(x)-omega*x;
end Lab4;
```

Видим графики решения уравнения и фазовый портрет гармонического осциллятора.

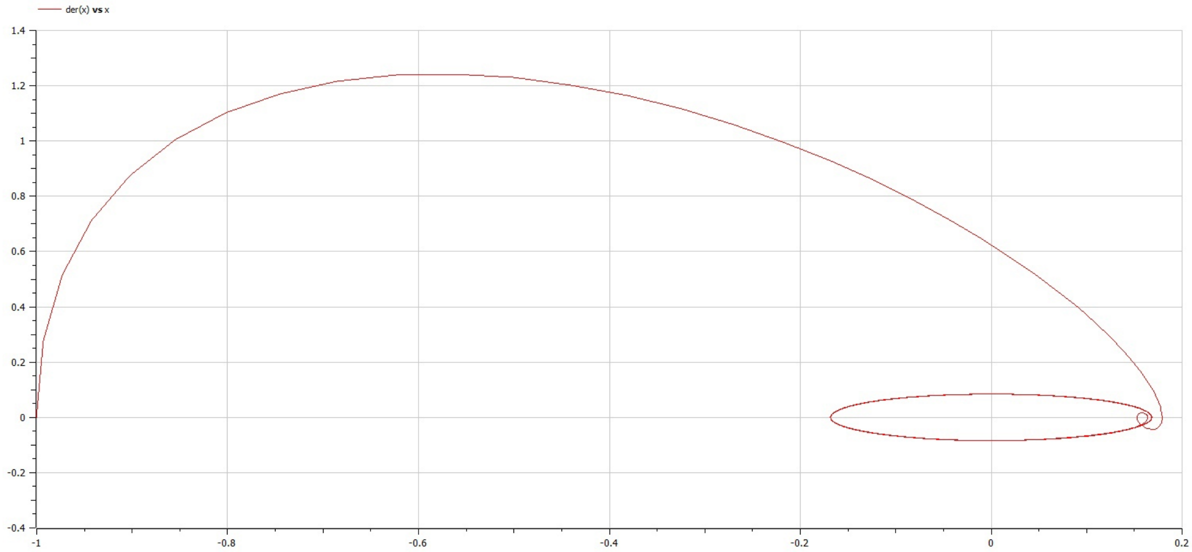




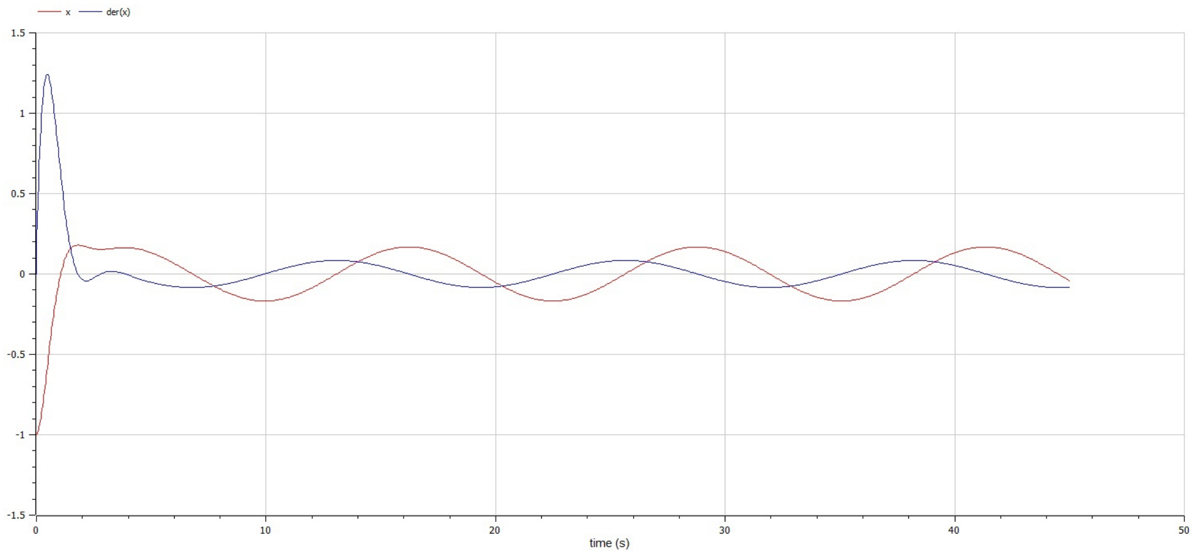
3 случай на *OpenModelica*

```
model Lab4
parameter Real x0 = -1;
parameter Real y0 = 0;
parameter Real omega = 6;
parameter Real gamma = 3;

Real P;
Real x(start=x0);
Real y(start=y0);

equation
P = sin(0.5*time);
der(x) = y;
der(y) = P-gamma*der(x)-omega*x;
end Lab4;
```

Видим графики решения уравнения и фазовый портрет гармонического осцил-



лятора.



3.1 Вывод

Во время решения данной лабораторной работы мы поняли как работать с математической маделью гармоническим осциллятором. Изучили разные случаи решения как на Julia, так и на OpenModelica.