บทที่ 7 ปัจจัยและประเด็นแวดล้อมที่สำคัญ

7.2 ปัญหาที่ขึ้นกับเวลาและไม่เป็นเชิงเส้น

ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ที่แสดงในบทที่ 6 ที่ผ่านมานั้น ถือเป็นตัวแบบที่มีความง่ายในโครงสร้างและเงื่อนไขประกอบ อย่างไรก็ตาม ในบริบทของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น จะยังมีรูปแบบอื่นๆที่เพิ่มความซับซ้อนมากขึ้นในกระบวนการหาผลเฉลย (ทั้งในแบบเชิงวิเคราะห์ และแบบเชิงตัวเลข) และส่วนประกอบที่เพิ่มความซับซ้อนนี้ ก็มาจาก 2 ส่วนหลักคือ

- **ส่วนของสมการ และเงื่อนไขประกอบ** ได้แก่ มีความขึ้นกับเวลา มีการประกอบกกันในระบบมากกว่า 1 สมการ (เรียกว่า “ระบบสมการ”) และมีความเป็นไม่เป็นเชิงเส้น เป็นต้น
- **ส่วนของโดเมนของปัญหา** ได้แก่ โดเมนที่มีมิติมากขึ้น หรือ มีการหักเหลี่ยมขอบ เว้า และโค้ง ที่ทับซ้อนกัน เป็นต้น

ในหัวข้อนี้ เราสาธิตการประยุกต์ระเบียบวิธีโคโลเคชั่นกับปัญหาประเภทหนึ่งที่เป็นที่ยอมรับกันว่า มีความซับซ้อนอย่างยิ่งในความเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ นั่นคือ ประกอบด้วยการขึ้นกับเวลา มีความเป็นไม่เป็นเชิงเส้น และยังมีกันเป็นสมการคู่ (นั่นคือ มี 2 สมการในระบบเดียว) และสมการนี้ได้รับความนิยมให้เป็นสมการทดสอบ สำหรับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ถูกสร้างและพัฒนาขึ้นสำหรับการทดสอบเพื่อประกาศและยืนยันประสิทธภาพของระเบียบวิธีนั้นๆ อีกด้วย สมการดังกล่าวนี้ เรียกว่า สมการคู่เบอรเกอร์ Coupled-Burgers’ equations ซึ่งมีสมการที่นิยามบนโดเมน Ω ที่มีขอบเป็น $\partial\Omega$ ในรูปทั่วไป คือ

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]-u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2}$$

ที่ประกอบด้วยเงื่อนไข ดังนี้

<u>เงื่อนไขเริ่มต้น สำหรับ</u> $(x,y)\in\Omega$

$$u(x,y,t_0)=\psi_1(x,y) \tag{3}$$

$$v(x,y,t_0)=\psi_2(x,y) \tag{4}$$

<u>เงื่อนไขขอบเขต สำหรับ</u> $(x,y)\in\partial\Omega$

$$Bu(x,y,t)=\varphi_3(x,y,t) \tag{5}$$

$$Bv(x,y,t)=\varphi_4(x,y,t) \qquad (6)$$

เมื่อ u	คือ	ความเร็วในทิศทางตามแนวนอน หรือแนวแกน x
v	คือ	ความเร็วในทิศทางตามแนวตั้ง หรือแนวแกน y
t	คือ	เวลา
Re	คือ	เลขเรย์โนล์นัมเบอร์ (Reynolds number)
B	คือ	คือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์
ψ_1 , ψ_2	คือ	ฟังก์ชันที่ทราบค่า (ที่ขึ้นกับตำแหน่ง) และ
φ_3 , φ_4	คือ	ฟังก์ชันที่ทราบค่า (ที่ขึ้นกับทั้งตำแหน่ง และเวลา)

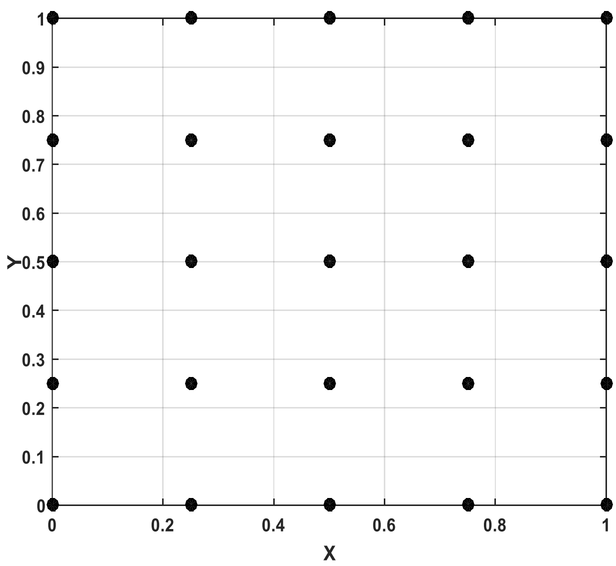
7.2.1 การกำหนดข้อมูลเกี่ยวกับปัญหาตัวอย่าง

Chapter7_CPBurgerproblems_MQ_PorTest_TBU

ในการแสดงตัวอย่างการคำนวณ เรากำหนดส่วนประกอบของปัญหาให้ชัดมากขึ้น ดังนี้

1. กำหนดโดเมน คือ $\Omega=[0,1]\times[0,1]$

2. เลือกจุดเซ็นเตอร์และจุดประมาณค่าเป็นจุดเดียวกัน จำนวน 25 จุด $X^c=\{\mathbf{x}_1^c,\mathbf{x}_2^c,\ldots,\mathbf{x}_{25}^c\}$, $\mathbf{x}_i\in\mathbb{R}^2$, $i=1,2,\ldots,25$ (ดังแสดงในรูป)



ซึ่งสามารถแสดงผลเป็นพิกัดจุดได้ดังนี้

จุดบนขอบ		จุดภายใน	
x	y	x	y
0	0	0.25	0.25
0.25	0	0.25	0.5
0.5	0	0.25	0.75
0.75	0	0.5	0.25

1	0	0.5	0.5
1	0.25	0.5	0.75
1	0.5	0.75	0.25
1	0.75	0.75	0.5
0.25	1	0.75	0.75
0.5	1		
0.75	1		
1	1		
0	0.25		
0	0.5		
0	0.75		
0	1		

3. เลือก ค่าเลขเรย์โนล์ คือ $\mathrm{Re} = 100$

4. กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (กำหนด $t = 0$) และ เงื่อนไขขอบเขต โดยใช้ผลเฉลยแม่นตรง ซึ่งอยู่ในรูป

$$u(x, y, t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}[1 + \Phi]^{-1} \tag{7}$$

และ

$$v(x, y, t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}[1 + \Phi]^{-1} \tag{8}$$

เมื่อ $\Phi = e^{\left((-4x+4y-t)\frac{\mathrm{Re}}{32}\right)}$

5. เลือกฟังก์ชันรัศมีฐานหลักประเภทมัลติควอร์ดดริกซ์ ในรูป $\varphi = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$

6. คำนวนหาค่าประมาณของผลเฉลย ณ เวลา $t = 1.0$ และใช้ $\Delta t = 0.5$

และเงื่อนไขอื่นๆที่เกี่ยวข้องนั้น จะได้มีการกำหนดในระหว่างการแสดงการคำนวณต่อไป

7.2.2 การประมาณค่าผลเฉลยตามหลักการโคโลเคชั่น

เริ่มต้นด้วยการเขียนการประมาณค่าฟังก์ชันผลเฉลย ณ เวลา n ด้วยผลบวกเชิงเส้นของฟังก์ชันรัศมีฐานหลักดังกล่าว ตามแนวคิดของระเบียบวิธีโคโลเคชัน ดังนี้

$$u^{(n)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^{(n)} \varphi\left(\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\right\|\right) \tag{9}$$

และ

$$v^{(n)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{N} \beta_j^{(n)} \varphi\left(\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\right\|\right) \tag{10}$$

เมื่อ α_j, β_j เป็นสัมประสิทธิ์ที่ต้องมีการคำนวณค่าต่อไป

ดังนั้น เราสามารถหาค่าประมาณของพจน์อนุพันธ์เชิงพื้นที่ทุกพจน์ที่ปรากฏในสมการปัญหา สำหรับแต่ละจุดเซ็นเตรอ์ $\mathbf{x}$ ได้ ดังนี้

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{x}^2} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{\partial^2 \varphi\left(\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j\right\|\right)}{\partial \mathbf{x}^2}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 v(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{x}^2} = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \frac{\partial^2 \varphi\left(\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j\right\|\right)}{\partial \mathbf{x}^2}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{\partial \varphi\left(\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j\right\|\right)}{\partial \mathbf{x}}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial v(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \frac{\partial \varphi\left(\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j\right\|\right)}{\partial \mathbf{x}}, \tag{14}$$

ดังนั้น สำหรับจุดเซ็นเตอร์ที่ i

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_i = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\sum_{j=1}^{N}\alpha_j H_{ij}^{xx} + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j H_{ij}^{yy}\right] - u_i \sum_{j=1}^{N}\alpha_j H_{ij}^{x} - v_i \sum_{j=1}^{N}\alpha_j H_{ij}^{y} \tag{15}$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]_i = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\sum_{j=1}^{N}\beta_j H_{ij}^{xx} + \sum_{j=1}^{N}\beta_j H_{ij}^{yy}\right] - u_i \sum_{j=1}^{N}\beta_j H_{ij}^{x} - v_i \sum_{j=1}^{N}\beta_j H_{ij}^{y} \tag{16}$$

เมื่อ $H_{ij}^{xx} = \dfrac{\partial^2 \varphi\left(\left\|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j\right\|\right)}{\partial x^2}$, $H_{ij}^{yy} = \dfrac{\partial^2 \varphi\left(\left\|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j\right\|\right)}{\partial y^2}$, $H_{ij}^{x} = \dfrac{\partial \varphi\left(\left\|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j\right\|\right)}{\partial x}$, $H_{ij}^{y} = \dfrac{\partial \varphi\left(\left\|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j\right\|\right)}{\partial y}$

และเมื่อกำหนด $\psi_{ij} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(H_{ij}^{xx} + H_{ij}^{yy}\right) - u_i H_{ij}^{x} - v_i H_{ij}^{y}$ จะสามารถเขียนเป็นแมทริกซ์แทนผลคูณของพจน์ทางขวามือของทั้ง 2 สมการได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} u_1^t \\ u_2^t \\ \vdots \\ u_N^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \cdots & \psi_{1N} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \cdots & \psi_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{N1} & \psi_{N2} & \cdots & \psi_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} v_1^t \\ v_2^t \\ \vdots \\ v_N^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \cdots & \psi_{1N} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \cdots & \psi_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{N1} & \psi_{N2} & \cdots & \psi_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix}$$

หรือ

$$\mathbf{U^t} = \mathbf{H\alpha} \tag{17}$$

และ

$$\mathbf{V^t} = \mathbf{H\beta} \tag{18}$$

7.2.3 การดำเนินการกับพจน์ของเวลา

จากสมการทั้ง 2 สมการด้านบน พจน์ $\mathbf{U^t}$ และ $\mathbf{V^t}$ จะถูกประมาณค่าด้วยระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับที่ 4 (ดังที่อธิบายไว้ในบทที่ผ่านมา) นั่นคือในรูปของ

xx $$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{U}^{\mathbf{t}} = \mathbf{H}\boldsymbol{\alpha} = F(\mathbf{u}) \tag{19}$$

และyy $$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{V}^{\mathbf{t}} = \mathbf{H}\boldsymbol{\beta} = G(\mathbf{v}) \tag{20}$$

7.2.4 ขั้นตอนการคำนวณ

ขั้นที่ 1 : ในการคำนวณนั้น จะเริ่มจากการใช้เงื่อนไขเริ่มต้นเพื่อตั้งเป็นระบบสมการที่มีตัวไม่ทราบค่าเป็นค่าสัมประสิทธิ์ α , β นั่นคือ จากเงื่อนไขเริ่มต้น

$$u_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^{(0)} \varphi\left(\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|\right) = \psi_1(\mathbf{x}_i, t_0) \tag{21}$$

$$v_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{N} \beta_j^{(n)} \varphi\left(\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|\right) = \psi_2(\mathbf{x}_i, t_0) \tag{22}$$

สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, N,$ จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์แต่งเติมได้ตามลำดับ ดังนี้

aa $$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}^{(0)} = \mathbf{F}^{(0)} \quad \text{นั่นคือ} \quad \boldsymbol{\alpha}^{(0)} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}^{(0)} \tag{23}$$

และ

bb $$\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}^{(0)} = \mathbf{G}^{(0)} \quad \text{นั่นคือ} \quad \boldsymbol{\beta}^{(0)} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{G}^{(0)} \tag{24}$$

เมื่อ $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N]^T$, $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N]^T$, $\mathbf{F}_i = \psi_1(\mathbf{x}_i, t_0)$ และ $\mathbf{G}_i = \psi_2(\mathbf{x}_i, t_0)$ และ เมทริกซ์ $\mathbf{A}_{ij} = \varphi\left(\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|\right) = \sqrt{1 + \mathbf{r}_{ij}}$ สำหรับ $i, j = 1, 2, \ldots, 25$ มีค่าคือ

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.000 & 1.601 & 2.693 & \ldots & 5.099 & 5.250 & 5.679 & 6.329 & 7.141 \\ 1.601 & 1.000 & 1.601 & \ldots & 5.250 & 5.099 & 5.250 & 5.679 & 6.329 \\ 2.693 & 1.601 & 1.000 & \ldots & 5.679 & 5.250 & 5.099 & 5.250 & 5.679 \\ 3.881 & 2.693 & 1.601 & \ldots & 6.329 & 5.679 & 5.250 & 5.099 & 5.250 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 5.250 & 5.099 & 5.250 & \ldots & 1.601 & 1.000 & 1.601 & 2.693 & 3.881 \\ 5.679 & 5.250 & 5.099 & \ldots & 2.693 & 1.601 & 1.000 & 1.601 & 2.693 \\ 6.329 & 5.679 & 5.250 & \ldots & 3.881 & 2.693 & 1.601 & 1.000 & 1.601 \\ 7.141 & 6.329 & 5.679 & \ldots & 5.099 & 3.881 & 2.693 & 1.601 & 1.000 \end{bmatrix}_{25\times 25}$$

ขั้นที่ 2 : จากนั้นนำ $\boldsymbol{\alpha}^{(0)}, \beta^{(0)}, u^{(0)}$ และ $v^{(0)}$ ที่ได้มาในการใช้เงื่อนไขเริ่มต้นนี้ ไปแทนในสมการที่ xx , yy และเข้ากระบวนการใช้รุงเง-กุตตา เพื่อให้ได้ค่า $u_i^{(0+\Delta t)} = u_i^{(0.5)}$ และ $v_i^{(0+\Delta t)} = v_i^{(0.5)}$ ออกมา ซึ่งจะได้ค่าเป็น

i	$u_i^{(0.5)}$	$v_i^{(0.5)}$	i	$u_i^{(0.5)}$	$v_i^{(0.5)}$
1	0.5105	0.9895	14	0.6678	0.8005
2	0.625	0.875	15	0.7395	0.7605
3	0.7395	0.7605	16	0.5	1

4	0.7495	0.7505	17	0.5103	0.9943
5	0.75	0.75	18	0.4768	0.9922
6	0.5005	0.9995	19	0.5368	0.9487
7	0.5235	0.9495	20	0.625	0.875
8	0.6806	0.8037	21	0.5	1
9	0.7428	0.755	22	0.5	1
10	0.7495	0.7505	23	0.5	1
11	0.5	1	24	0.5005	0.9995
12	0.5008	0.9857	25	0.5105	0.9895
13	0.5406	0.9581			

ซึ่งมีข้อสังเกตว่า ค่าที่ปรากฏในตารางนี้ ได้มีการปรับค่าบนขอบให้เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตเรียบร้อยแล้ว

ขั้นที่ 3 : จากนั้น นำค่า $u_i^{(0.5)}$ และ $u_i^{(0.5)}$ เหล่านี้แทนในระบบสมการ aa and bb เพื่อให้ได้ค่า $\alpha_i^{(0.5)}$ และ $\beta_i^{(0.5)}$ ได้ว่า

1	0.6525	0.8826	14	0.0575	-0.2083
2	-0.6357	-1.1261	15	-0.2991	0.0255
3	-0.2991	0.0255	16	-0.598	-1.1638
4	-0.8244	-0.9375	17	1.0755	2.0704
5	0.7035	0.8315	18	-0.0627	-0.088
6	-0.6757	-1.0861	19	1.1643	1.9815
7	1.1643	1.9815	20	-0.6357	-1.1261
8	0.0575	-0.2083	21	0.5207	1.0143
9	1.5331	1.6128	22	-0.598	-1.1638
10	-0.8244	-0.9375	23	-0.0852	-0.1884
11	-0.0852	-0.1884	24	-0.6757	-1.0861
12	-0.0627	-0.088	25	0.6525	0.8826
13	-1.0024	-1.3615			

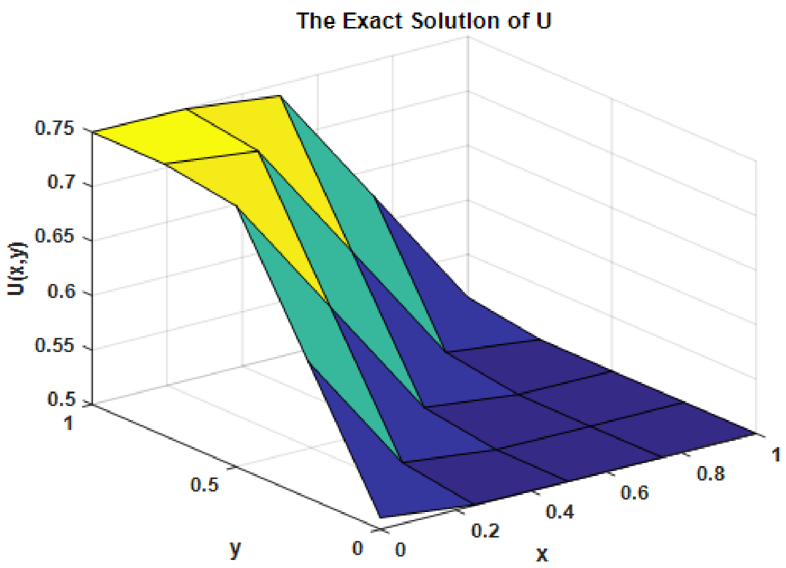
ขั้นที่ 4 : จากนั้นนำค่าเหล่านี้ไปแทนใน xx and yy อีกครั้ง ก็จะได้ผลเฉลยในช่วงเวลาถัดไปคือ $t=1.0$ (ซึ่งเป็นตำแหน่งเวลาที่โจทย์ต้องการ และเราสามารถเปรียบเทียบผลเฉลยกับค่าแม่นตรงได้ ดังแสดงในตารางนี้

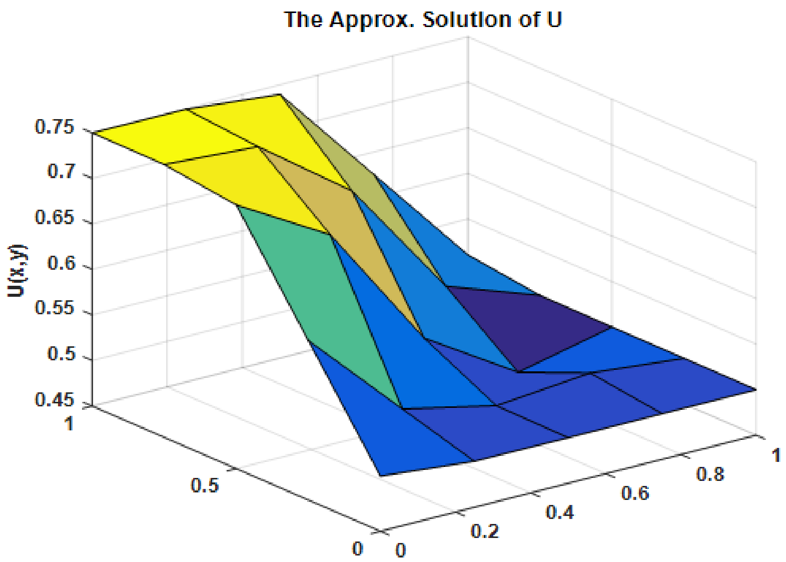
i	$u_i^{approx.}$	u_i^{exact}	$v_i^{approx.}$	v_i^{exact}	i	$u_i^{approx.}$	u_i^{exact}	$v_i^{approx.}$	v_i^{exact}
1	0.5105	0.5105	0.9895	0.9895	14	0.6678	0.625	0.8005	0.875
2	0.625	0.625	0.875	0.875	15	0.7395	0.7395	0.7605	0.7605
3	0.7395	0.7395	0.7605	0.7605	16	0.5	0.5	1	1
4	0.7495	0.7495	0.7505	0.7505	17	0.5103	0.5	0.9943	1
5	0.75	0.75	0.75	0.75	18	0.4768	0.5005	0.9922	0.9995
6	0.5005	0.5005	0.9995	0.9995	19	0.5368	0.5105	0.9487	0.9895
7	0.5235	0.5105	0.9495	0.9895	20	0.625	0.625	0.875	0.875

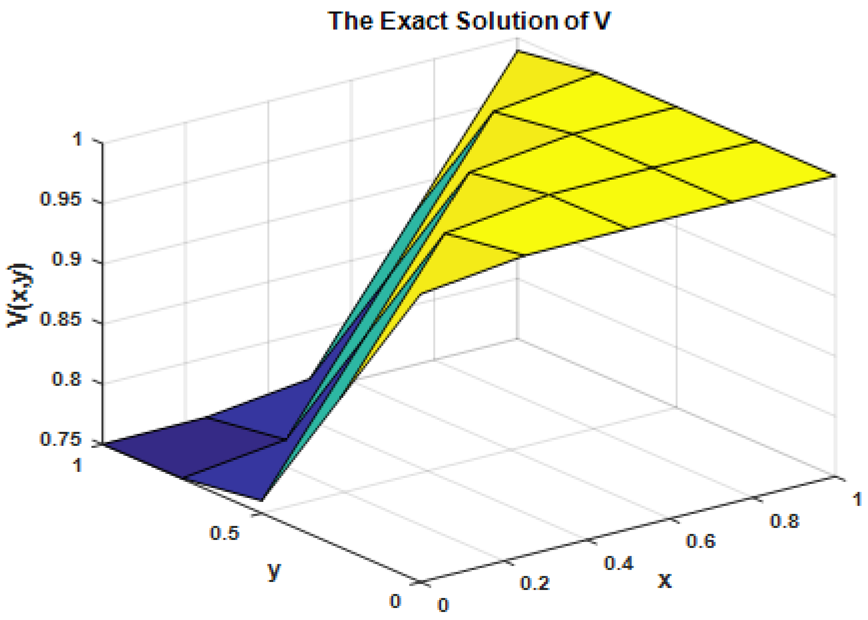
8	0.6806	0.625	0.8037	0.875	21	0.5	0.5	1	1
9	0.7428	0.7395	0.755	0.7605	22	0.5	0.5	1	1
10	0.7495	0.7495	0.7505	0.7505	23	0.5	0.5	1	1
11	0.5	0.5	1	1	24	0.5005	0.5005	0.9995	0.9995
12	0.5008	0.5005	0.9857	0.9995	25	0.5105	0.5105	0.9895	0.9895
13	0.5406	0.5105	0.9581	0.9895					

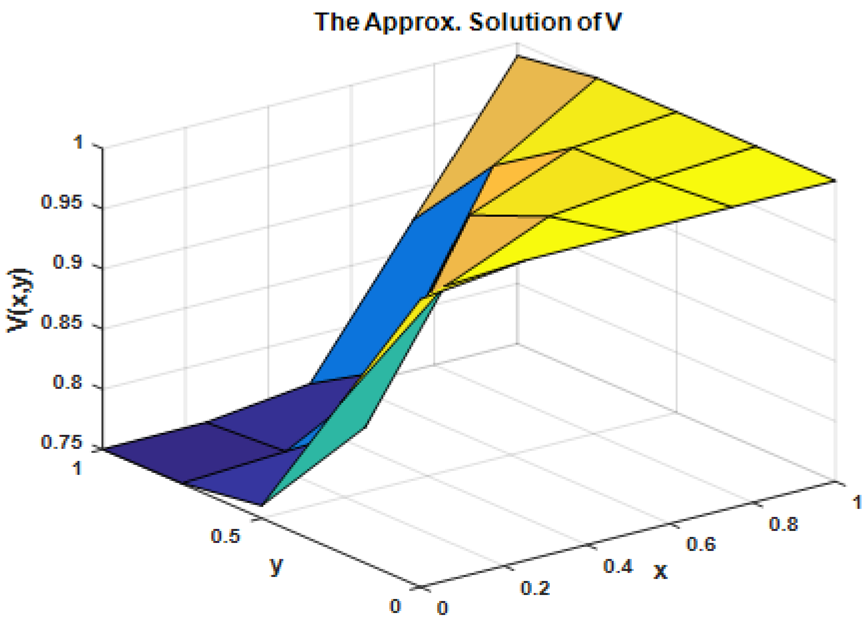
และแสดงเป็นแผนภาพได้ ดังนี้

(25)









7.2.1 อิทธิพลของค่าพารามิเตอร์

7.2.2 อิทธิพลของจำนวนเซ็นเตอร์

7.2.3 อิทธิพลของเลยเรย์โนล์

************************** SAYAN LINE **************************

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{G} \tag{26}$$

where $\mathbf{A}_{ij} = \varphi\left(\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|\right), i, j = 1, 2, \ldots, N$, $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N]^T$, $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N]^T$, $\mathbf{F}_i = \psi_1(\mathbf{x}_i, t_0), i = 1, 2, \ldots, N$, and $\mathbf{G}_i = \psi_2(\mathbf{x}_i, t_0), i = 1, 2, \ldots, N$.

Then, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ can be obtained by solving () and (), respectively.

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F} \tag{27}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{G} \tag{28}$$

The governing equations are discretized as

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\sum_{j=1}^{N}\alpha_j \frac{\partial^2 \varphi\left(\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|\right)}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j \frac{\partial^2 \varphi\left(\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|\right)}{\partial y^2}\right] \\ - u\sum_{j=1}^{N}\alpha_j \frac{\partial \varphi\left(\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|\right)}{\partial x} - v\frac{\partial \varphi\left(\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|\right)}{\partial y},\end{aligned} \tag{29}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\sum_{j=1}^{N}\beta_j \frac{\partial^2 \varphi\left(\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|\right)}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^{N}\beta_j \frac{\partial^2 \varphi\left(\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|\right)}{\partial y^2}\right] - u\sum_{j=1}^{N}\beta_j \frac{\partial \varphi\left(\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|\right)}{\partial x} - v\sum_{j=1}^{N}\beta_j \frac{\partial \varphi\left(\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|\right)}{\partial y}, \tag{30}$$

where $\mathbf{u} = \left[u_1, u_2, \ldots, u_N\right]^T$, $\mathbf{v} = \left[v_1, v_2, \ldots, v_N\right]^T$. Then it is written in the system of ordinary differential equations as follows:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = F\left(\mathbf{u}\right) \tag{31}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = G\left(\mathbf{v}\right) \tag{32}$$

and the system of ODEs (31) and (32) are then advanced in time with an ODE method. Then the approximate solution obtained by RBFCM is expressed in term of the radial basis function at N nodes as follows;

$$\tilde{u}\left(\mathbf{x}_i\right) = \sum_{j=1}^{N}\alpha_j \varphi_j\left(\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|\right),\ i = 1, 2, \ldots, N, \tag{33}$$

$$\tilde{v}\left(\mathbf{x}_i\right) = \sum_{j=1}^{N}\beta_j \varphi_j\left(\left\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right\|\right),\ i = 1, 2, \ldots, N. \tag{34}$$

Let $\tilde{\mathbf{u}} = \left[\tilde{u}\left(\mathbf{x}_1\right), \tilde{u}\left(\mathbf{x}_2\right), \ldots, \tilde{u}\left(\mathbf{x}_N\right)\right]^T$, and $\tilde{\mathbf{v}} = \left[\tilde{v}\left(\mathbf{x}_1\right), \tilde{v}\left(\mathbf{x}_2\right), \ldots, \tilde{v}\left(\mathbf{x}_N\right)\right]^T$.

แบบฝึกหัดท้ายบท