ADIL RHOULAM

Devoir de "Méthodes stochastiques pour l'analyse de l'images"

Exercice 1 :

1)- On a $f: x \mapsto -\log(x)$ est une fonction convexe car :

$\forall x>0$: $f'(x) = -\frac{1}{x}$ et $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$

Donc par l'inegalité de Jensen :

$$KL(P||Q) = \sum_{k=1}^{n} P(k) \log\left(\frac{P(k)}{Q(k)}\right) = -\sum_{k=1}^{n} P(k) \log\left(\frac{Q(k)}{P(k)}\right)$$

$$\overset{(*)}{\geq} -\log\left(\sum_{k=1}^{n} P(k) \frac{Q(k)}{P(k)}\right) = -\log\left(\sum_{k=1} Q(k)\right) = -\log(1) = 0$$

Donc $KL(P||Q) \geq 0$

- $\Leftarrow$ si $P=Q$ donc $P(k) = Q(k)$, $\forall k \in \Omega$ et $\log\left(\frac{P(k)}{Q(k)}\right) = 0$

donc $KL(P||Q) = 0$

- $\Rightarrow$ si $KL(P||Q) = 0$; On a donc égalité dans l'inégalité de Jensen $(*)$ et puisque f est strictement convexe et $KL(P||Q) = -E_P\left[f\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)\right]$ donc on a $\frac{P(k)}{Q(k)}$ est constante $\forall k \in \Omega$ càd $\exists c$ such that $\forall k$, $P(k) = c\,Q(k)$ et puisque $\sum_{k=1}^{n} P(k) = \sum_{k=1}^{n} Q(k) = 1$ donc $c = 1$; donc $P(k) = Q(k)$; $\forall k \in \Omega$

Finallement : $P = Q$

2) Mq: $(P,Q) \mapsto KL(P||Q)$

let P_1, P_2, Q_1, Q_2 des distributions de probabilités discrètes définies sur Ω et soit $\lambda \in [0,1]$:

$$KL(\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2 \,||\, \lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda P_1(k) + (1-\lambda)P_2(k)) \log \frac{\lambda P_1(k) + (1-\lambda)P_2(k)}{\lambda Q_1(k) + (1-\lambda)Q_2(k)}$$

considerons la fonction $g: x \mapsto x\log(x)$ définie sur $]0,+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0.

On a : $\sum_{k=1}^{n} (\lambda P_1(k) + (1-\lambda)P_2(k)) \log \frac{\lambda P_1(k) + (1-\lambda)P_2(k)}{\lambda Q_1(k) + (1-\lambda)Q_2(k)} = \sum_{k=1}^{n} [\lambda Q_1(k) + (1-\lambda) Q_2(k)]$

$$\times\, g\left(\frac{\lambda P_1(k) + (1-\lambda)P_2(k)}{\lambda Q_1(k) + (1-\lambda)Q_2(k)}\right)$$

On a $g'(x) = \log(x) + 1$ et $g''(x) = \frac{1}{x} > 0$

Donc g est convexe

considérons $a_1(k) = \lambda P_1(k)$, $a_2(k) = (1-\lambda) P_2(k)$

$b_1(k) = \lambda Q_1(k)$, $b_2(k) = (1-\lambda) Q_2(k)$

$$g\left(\frac{\lambda P_1(k) + (1-\lambda) P_2(k)}{\lambda Q_1(k) + (1-\lambda) Q_2(k)}\right) = g\left(\frac{a_1(k) + a_2(k)}{b_1(k) + b_2(k)}\right)$$

$$= g\left(\frac{b_1(k)}{b_1(k)+b_2(k)} \frac{a_1(k)}{b_1(k)} + \frac{b_2(k)}{b_1(k)+b_2(k)} \frac{a_2(k)}{b_2(k)}\right)$$

$$\leq \frac{b_1(k)}{b_1(k)+b_2(k)} g\left(\frac{a_1(k)}{b_1(k)}\right) + \frac{b_2(k)}{b_1(k)+b_2(k)} g\left(\frac{a_2(k)}{b_2(k)}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_1(k)+a_2(k)) \log\left(\frac{a_1(k)+a_2(k)}{b_1(k)+b_2(k)}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} b_1(k) g\left(\frac{a_1(k)}{b_1(k)}\right) + \sum_{k=1}^{n} b_2(k) g\left(\frac{a_2(k)}{b_2(k)}\right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_1(k) \log\left(\frac{a_1(k)}{b_1(k)}\right) + \sum_{k=1}^{n} a_2(k) \log\left(\frac{a_2(k)}{b_2(k)}\right)$$

$$= \lambda KL(P_1 \| Q_1) + (1-\lambda) KL(P_2 \| Q_2)$$

Donc finallement :

$$KL(\lambda P_1 + (1-\lambda) P_2 \| \lambda Q_1 + (1-\lambda) Q_2) \leq \lambda KL(P_1 \| Q_1) + (1-\lambda) KL(P_2 \| Q_2)$$

Donc KL divergence est convexe

3) considérons $a = \sum_{1}^{m} a_i$ et $b = \sum_{1}^{m} b_i$

$$\sum_{1}^{m} a_i \log\left(\frac{a_i}{b_i}\right) = \sum_{1}^{m} b_i g\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \text{ ; avec } g(x) = x\log(x)$$

$$= b \sum_{1}^{m} \frac{b_i}{b} g\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \underset{g \text{ convexe}}{\geq} b\, g\left(\sum_{1}^{m} \frac{b_i}{b} \frac{a_i}{b_i}\right)$$

$$\geq b\, g\left(\frac{1}{b} \sum_{1}^{m} a_i\right) = \left(\sum_{1}^{m} b_i\right) g\left(\frac{\sum_{1}^{m} a_i}{\sum_{1}^{m} b_i}\right)$$

finalement :

$$\sum_{1}^{m} a_i \log\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \geq \left(\sum_{1}^{m} b_i\right) \frac{\left(\sum_{1}^{m} a_i\right)}{\left(\sum_{1}^{m} b_i\right)} \log\left(\frac{\sum_{1}^{m} a_i}{\sum_{1}^{m} b_i}\right)$$

$$\geq \left(\sum_{1}^{m} a_i\right) \log\left(\frac{\sum_{1}^{m} a_i}{\sum_{1}^{m} b_i}\right)$$

4) soit $h : t \mapsto p\log(t) + (1-p)\log(1-t)$

soient $g(t) = h(p) - h(t) - 2(p-t)^2$ pour $t \in]0,p]$

$$g'(t) = -h'(t) + 4(p-t) = -\left(\frac{p}{t} - \frac{1-p}{1-t}\right) + 4(p-t)$$

$$= -\frac{p-t}{t(1-t)} + 4(p-t)$$

$$= \frac{(p-t)}{t(1-t)}\left(-1 + 4t(1-t)\right) = -\frac{(p-t)(2t-1)^2}{t(1-t)} \leq 0$$

donc g est décroissante sur $]0,p]$ et on a

pour $q \in]0,p]$ $(0 < q \leq p)$: $g(p) \leq g(q)$

puisque $g(p) = 0$ donc $g(q) \geq 0$

ce qui donne : $h(p) - h(q) \geq 2(p-q)^2$

finalement $\forall p,q \in]0,1[$ tq $p \geq q$:

$$p\log\left(\frac{p}{q}\right) + (1-p)\log\left(\frac{1-p}{1-q}\right) \geq 2(p-q)^2$$

si $p = 1^-$ ou $q = 0^+$: $p\log\left(\frac{p}{q}\right) + (1-p)\log\left(\frac{1-p}{1-q}\right) = +\infty$

$$\geq 2(p-q)^2$$

donc $\forall p,q \in [0,1]$ tq $p \geq q$:

$$p\log\left(\frac{p}{q}\right) + (1-p)\log\left(\frac{1-p}{1-q}\right) \geq 2(p-q)^2$$

5) $\Omega_+ = \{k \mid P(k) > Q(k)\}$ et soient :

$p_+ = \sum_{k \in \Omega_+} P(k)$ et $q_+ = \sum_{k \in \Omega_+} Q(k)$

$$\|P-Q\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |P(k) - Q(k)| = \sum_{k \in \Omega_+} \underbrace{|P(k)-Q(k)|}_{\geq 0} + \sum_{k \notin \Omega_+} \underbrace{|P(k)-Q(k)|}_{\leq 0}$$

$$= p_+ - q_+ + \sum_{k \notin \Omega_+} Q(k) - \sum_{k \notin \Omega_+} P(k)$$

puisque $\sum_{k=1}^{n} P(k) = \sum_{k=1}^{n} Q(k) = 1$ donc $\sum_{k \notin \Omega_+} P(k) = 1 - p_+$

et $\sum_{k \notin \Omega_+} Q(k) = 1 - q_+$

Donc : $\|P-Q\|_1 = P_+ - q_+ + 1 - q_+ - (1-P_+)$

$= 2(P_+ - q_+)$

$$KL(P\|Q) = \sum_{k=1}^{n} P(k) \log\left(\frac{P(k)}{Q(k)}\right) = \sum_{k\in\Omega_+} P(k)\log\left(\frac{P(k)}{Q(k)}\right) +$$

$$\sum_{k\notin\Omega_+} P(k)\log\left(\frac{P(k)}{Q(k)}\right)$$

en utilisant la question 3), on a :

$$KL(P\|Q) \geq \left(\sum_{k\in\Omega_+} P(k)\right)\log\left(\frac{\sum_{k\in\Omega_+} P(k)}{\sum_{k\in\Omega_+} Q(k)}\right) + \left(\sum_{k\notin\Omega_+} P(k)\right)\log\left(\frac{\sum_{k\notin\Omega_+} P(k)}{\sum_{k\notin\Omega_+} Q(k)}\right)$$

$$= P_+ \log\left(\frac{P_+}{q_+}\right) + (1-P_+)\log\left(\frac{1-P_+}{1-q_+}\right)$$

puisque $P_+ = \sum_{k\in\Omega_+} P(k) > \sum_{k\in\Omega_+} Q(k) = q_+$

en utilisant la question 4) on a :

$KL(P\|Q) \geq 2(P_+ - q_+)^2$

et puisque $P_+ - q_+ = \frac{1}{2}\|P-Q\|_1$

donc $KL(P\|Q) \geq \frac{1}{2}\|P-Q\|_1^2$

Exercice 2 :

1) La transformée de Hough est :

$x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = \rho \qquad (\theta,\rho) \in [0,\pi[\times \mathbb{R}$

a) si $(x,y) \in [-1,1]^2$

soit $\theta \in [0,\pi[$:

considerons pour $(\theta,x,y) \in [0,\pi[\times [-1,1]^2$ la fonction :

$f : (\theta,x,y) \longmapsto x\cos(\theta) + y\sin(\theta)$

on a f est continue sur $[0,\pi[\times [-1,1]^2$ et :

$-(|\cos(\theta)| + |\sin(\theta)|) \leq f(\theta,x,y) \leq |\cos(\theta)| + |\sin(\theta)|$

$g(\theta) = |\cos(\theta)| + |\sin(\theta)|$ avec $\theta \in [0,\pi[$

si $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$: $g'(\theta) = -\sin(\theta) + \cos(\theta)$

$g'(\theta) = 0 \Rightarrow \sin(\theta) = \cos(\theta) \Rightarrow \theta = \pi/4$.

celui ci est un point maximal puisque :

$g''(\theta) = -\cos(\theta) - \sin(\theta) < 0$ est concave

de même si $\theta \in [\frac{\pi}{2},\pi[$:

$g(\theta) = -\cos(\theta) + \sin(\theta) \Rightarrow g'(\theta) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$

$g'(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$

qui est aussi un point maximal puisque :

$g''(\theta) = -\sin(\theta) + \cos(\theta) < 0$ (concave)

donc : puisque : $g(\frac{\pi}{4}) = g(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

on a : $g(\theta) \leq \sqrt{2}$ et ce maximum est atteignable.

Donc : $-\sqrt{2} \leq f(\theta,x,y) \leq \sqrt{2}$

et pour $(\theta,x,y) = (\frac{\pi}{4}, 1, 1)$, le max est atteint ainsi que $(\theta,x,y) = (\pi/4,-1,-1)$, le min est atteint finalement puisque f est continue :

$$f([0,\pi[\times [-1,1]^2) = [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$$

Donc l'ensemble parcouru par (θ,ρ) est :

$$[0,\pi[\times [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$$

b) si $(x,y) \in D(0,R)$ (Disque de centre O et de rayon R), donc $\exists\, 0 \leq r \leq R$ et $\phi \in [0,2\pi]$ que :

$$x = r\cos(\phi) \text{ et } y = r\sin(\phi)$$

Donc la transformée de Hough devient :

$$x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = \rho \Rightarrow r(\cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi)) = \rho$$

$$\Rightarrow r\cos(\theta - \phi) = \rho$$

Considérons pour $\theta \in [0,\pi[$ fixé :

$$f_\theta(r,\phi) = r\cos(\theta-\phi) \text{ définie sur } [0,R]\times[0,$$

f_θ est continue sur cette ensemble.

et : $$-R \leq f_\theta(r,\phi) \leq R$$

ces deux extremas sont atteint lorsque :

$r = R$ et $\phi = \theta$ ou $\theta + \pi$

Donc : $$f_\theta([0,R]\times[0,2\pi]) = [-R,R]$$

Finalement l'ensemble parcouru par (θ,ρ) est : $[0,\pi[\times [-R,R]$

2)- soit (x,y), (x',y') deux uplets quelconques sur $\mathbb{R}^2$:

$C_{(x,y)}$: est la courbe d'équation :

$$f_{(x,y)} : \theta \longmapsto x\cos(\theta) + y\sin(\theta)$$

soit $(\theta, z) \in C_{(x,y)} \cap C_{(x',y')}$

donc : $z = f_{(x,y)}(\theta) = f_{(x',y')}(\theta)$

ce qui donne :

$$x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = x'\cos(\theta) + y'\sin(\theta)$$

$(x-x')\cos(\theta)+(y-y')\sin(\theta)=0$

Si $x=x'$ et $y=y'$ rien à montrer !

Sinon :

$$\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\cos(\theta)+\frac{y-y'}{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}}\sin(\theta)=0$$

$\exists\ \phi\in[0,2\pi]$ tq : $\cos(\phi)=\dfrac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}$

et $\sin(\phi)=\dfrac{y-y'}{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}}$

Ce qui donne :

$\cos(\phi)\cos(\theta)+\sin(\phi)\sin(\theta)=0$

$\Rightarrow \cos(\phi+\theta)=0 \Rightarrow -\phi+\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

On a : $0\leq\theta<\pi \Rightarrow 0\leq\phi+\frac{\pi}{2}+k\pi<\pi$

Donc : $-\phi-\frac{\pi}{2}\leq k\pi<-\phi+\frac{\pi}{2}$

donc : $-\frac{\phi}{\pi}-\frac{1}{2}\leq k<-\frac{\phi}{\pi}+\frac{1}{2}$

puisque : $-\frac{\phi}{\pi}+\frac{1}{2}-\left(-\frac{\phi}{\pi}-\frac{1}{2}\right)=1$

et que l'inégalité de droite est stricte

donc il y'a un seul k vérifiant l'inégalité en étant un nombre entier

donc $C_{(x,y)}\cap C_{(x',y')}\neq\emptyset$ et son cardinal est égale à 1 :

$$|C_{(x,y)}\cap C_{(x',y')}|=1$$

3)- $\|X\|_2\leq r \Leftrightarrow \|X\|_2^2\leq r^2 \Leftrightarrow x^2+y^2\leq r^2$

$\Leftrightarrow (x,y)\in D(0,r)$

donc puisque la distribution sur $\Omega = D(0,R)$ est uniforme :

$$P(\|X\| \leq r) = \frac{Sur(D(0,r))}{Sur(D(0,R))}$$

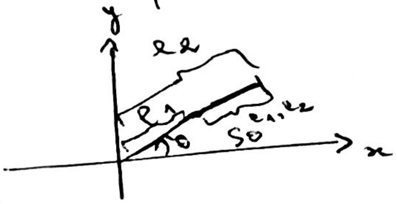
avec $Sur(D(0,r)) = \pi r^2$ est la surface du disque de centre o et de rayon r.

de même : $Sur(D(0,R)) = \pi R^2$

d'où : $\boxed{P(\|X\| \leq r) = \frac{r^2}{R^2}}$

4) Soient e_1, e_2 tq : $-R \leq e_1 \leq e_2 \leq R$ et :

$S_\theta^{e_1,e_2} = [(\theta, e_1), (\theta, e_2)]$ dans l'espace des paramètres des droites



La projection des coordonnées des bornes de ce segment dans l'espace des coordonnées cartésiennes donne :

$$\begin{cases} e_{1x} = e_1 \cos(\theta) \\ e_{2x} = e_2 \cos(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e_{1y} = e_1 \sin(\theta) \\ e_{2y} = e_2 \sin(\theta) \end{cases}$$

Puisque pour chaque (x,y) : et la distance de $(\theta, x\cos(\theta) + y\sin(\theta))$ et la distance de l'origine $e = x\cos(\theta) + y\sin(\theta)$ avec une rotation de θ.

Donc pour que $C_{(x,y)} \cap S_\theta^{e_1,e_2}$ soit non-vide :

il faut que : $\begin{cases} e_{1x} \leq x \leq e_{2x} \\ \text{et} \\ e_{1y} \leq y \leq e_{2y} \end{cases}$

c à d : $\begin{cases} e_1 \cos(\theta) \leq x \leq e_2 \cos(\theta) \\ e_1 \sin(\theta) \leq y \leq e_2 \sin(\theta) \end{cases}$

Donc l'ensemble des points (x,y) du plan tel que: $C(x,y) \cap S_\theta^{e_1,e_2} \neq \phi$ est : A_{θ,e_1,e_2} :

$$A_{\theta,e_1,e_2} = \{(x,y) \ / \ e_1\cos(\theta) \leq x \leq e_2\cos(\theta),\ e_1\sin(\theta) \leq y \leq e_2\sin(\theta)\}$$

$$-P(\theta,e_1,e_2) = P(C_x \cap S_\theta^{e_1,e_2} \neq \phi)$$

$$= P(X \in A_{\theta,e_1,e_2})$$

$$= P(e_1\cos(\theta) \leq x \leq e_2\cos(\theta)\ ;\ e_1\sin(\theta) \leq y \leq e_2\sin(\theta))$$

$$= P(e_1\cos(\theta) \leq x \leq e_2\cos(\theta))\ P(e_1\sin(\theta) \leq y \leq e_2\sin(\theta))$$

$$= \frac{e_2 - e_1}{2R}\ \frac{e_2 - e_1}{2R} \cos(\theta)\sin(\theta)$$

$$\boxed{P(\theta,e_1,e_2) = \frac{(e_2-e_1)^2}{2R^2}\cos(\theta)\sin(\theta)}$$

5) - soit D une droite paramétrée par les coordonnées polaires : ϕ et ψ : $\psi = x\cos(\phi) + y\sin(\phi)$

soient (i,j) un couple et $(x,y) \in \Omega \cap D$.

$C_{(x,y)} \cap S_i^j \neq \phi \Leftrightarrow (x,y) \in A_{\theta_i, e_{j-1}, e_{j+1}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_{j-1}\cos(\theta_i) \leq x \leq e_{j+1}\cos(\theta_i) \\ e_{j-1}\sin(\theta_i) \leq y \leq e_{j+1}\sin(\theta_i) \end{cases}$$

$$e_{j-1}\cos(\phi-\theta_i) \leq \psi \leq e_{j+1}\cos(\phi-\theta_i)$$

puisque ψ est fixe et ϕ aussi il va exister i_0, j_0 tq : $e_{j_0-1} \leq \psi \leq e_{j_0+1}$ et : $\theta_{i_0} \leq \phi \leq \theta_{i_0+1}$

....

6)- Lorsque $NFA(S_i^j) \leq \varepsilon$, on dira que le segment S_i^j est ε-significatif c'est à dire que le test est positive et que le nombre de points qui ne votent pas pour le segment S_i^j est en moyenne negligeable.

7)- En utilisant l'inegalité de Hoeffding.

on a : si : $k(S_i^j) \geq n p_j + \sqrt{\frac{n}{2}(\log(T) - \log(\varepsilon))}$

posons $r = \frac{k(S_i^j)}{n}$

donc : $r - p_j \geq \frac{1}{\sqrt{2n}} \sqrt{\log(T) - \log(\varepsilon)}$

càd : $2n(r - p_j)^2 \geq \log(T) - \log(\varepsilon)$

Par Hoeffding :

$$\sum_{k=k(S_i^j)}^{n} \binom{n}{k} p_j^k (1-p_j)^{n-k} = P(k(S_i^j), n)$$

$$\leq \exp\left(nr \ln\left(\frac{p_j}{r}\right) + n(1-r)\ln\left(\frac{1-p_j}{1-r}\right)\right)$$

$$\leq \exp(-n(r-p_j)^2 h(p_j))$$

avec : $h(p) = \frac{1}{1-2p} \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)$ si $0 < p < \frac{1}{2}$

et $= \frac{1}{2p(1-p)}$ si $\frac{1}{2} \leq p < 1$

h est continue sur $]0,1[$, croissante sur $[\frac{1}{2},1[$ et decroissante sur $]0,\frac{1}{2}]$ donc :

$h(p) \geq h(\frac{1}{2}) = 2 \quad \forall p \in]0,1[$

donc : $P(k(S_i^j), n) \leq \exp(-2n(r-p_j)^2) \leq \exp(-\log(T) - \log(\varepsilon))$

$= \frac{\varepsilon}{T}$

finalement : $\boxed{NFA(S_i^j) = T.P(k(S_i^j), n) \leq \varepsilon}$

Exercice 3 :

1) soit $m \geq 1$ et Ω_m l'ensemble des chaînes de caractère de longueur m.

soit $\sigma = b_2 b_3 \ldots b_{k-1} \in \Omega_{k-2}$

Dans le modèle de n-gram :

$$P_k^{(n)}(a_1 \sigma a_k) = P_n(a_1 b_2 \ldots b_n) \prod_{i=n+1}^{k} P_n(b_i | b_{i-n+1} \ldots b_{i-1})$$

with : $b_k = a_k$

On peut écrire :

$$P_k^{(n)}(a_1 \sigma a_k) = P_n(a_1 b_2 \ldots b_n) \prod_{i=n+1}^{k-1} P_n(b_i | b_{i-n+1} \ldots b_{i-1})$$
$$P_n(a_k | b_{k-n+1} \ldots b_{k-1})$$

2)- puisque : $P(b_{i-n+2} \ldots b_i | b_{i-n+1} \ldots b_{i-1}) = P(b_i | b_{i-n+1} \ldots b_{i-1})$
$\forall i = n+1, \ldots, k-1$

On a :

$$-\log(P_k^{(n)}(a_1 \sigma a_k)) = -\log[P_n(a_1 b_2 \ldots b_n) P_n(b_{n+1} | b_2 \ldots b_n)]$$
$$- \sum_{i=n+2}^{k-1} \log[P_n(b_i | b_{i-n+1} \ldots b_{i-1})] - \log[P_n(a_k | b_{k-n+1} \ldots b_{k-1})]$$

$$= -\log[P_n(a_1 b_2 \ldots b_n) P_n(b_3 \ldots b_{n+1} | b_2 \ldots b_n)] - \sum_{i=n+2}^{k-1} \log[P_n(b_{i-n+2} \ldots b_i | b_{i-n+1} \ldots b_{i-1})] - \log[P_n(b_{k-n+2} \ldots b_{k-1} a_k / b_{k-n+1} \ldots b_{k-1})]$$

$$= -\log[P_n(\lambda_1) P_n(\lambda_2 | \lambda_1)] - \sum_{i=2}^{k-n-1} \log[P_n(\lambda_{i+1} | \lambda_i)] - \log[P_n(\lambda_{k-n+1} | \lambda_{k-n})]$$

avec : $\lambda_i = b_{i+1} \ldots b_{i+n-1} \quad \forall i = 2, \ldots, k-n$

et : $\lambda_1 = a_1 b_2 \ldots b_n$; $\lambda_{k-n+1} = b_{k-n+2} \ldots b_{k-1} a_k$

donc : $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-n+1}) = \sum_{i=1}^{k-n} f_i(\lambda_i, \lambda_{i+1})$

avec :

$$\begin{cases} f_1(\lambda_1,\lambda_2) = -\log\left[P_n(\lambda_1)\, P_n(\lambda_2 \mid \lambda_1)\right] \\ f_i(\lambda_i,\lambda_{i+1}) = -\log\left[P_n(\lambda_{i+1}\mid\lambda_i)\right] \quad \forall i = 2,\dots,k-n \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} \lambda_1 = a_1 b_2 b_3 \dots b_n \quad ; \text{ with } a_1 \text{ being constant (not a random variable)} \\ \lambda_i = b_{i+1} \dots b_{i+n-1} \quad ; \forall i = 2,\dots,k-n \\ \lambda_{k-n+1} = b_{k-n+2} \dots b_{k-1} a_k \quad ; \text{ with } a_k \text{ being constant} \end{cases}$$

3)- Pseudo-code :

First we initialize h_2 and ϕ_2 by:

1)- First we initialize

$$\forall \lambda_2 \in \Omega_{n-1} : \quad h_2(\lambda_2) = \min_{\lambda_1 \in \Omega_n} f_1(\lambda_1,\lambda_2)$$

$$\forall \lambda_2 \in \Omega_{n-1} : \quad \phi_2(\lambda_2) = \underset{\lambda_1 \in \Omega_n}{\operatorname{argmin}}\, f_1(\lambda_1,\lambda_2)$$

2)- then we loop over the variable p :

$$\forall \lambda_p \in S_p : \quad h_p(\lambda_p) = \min_{\lambda_1 \dots \lambda_{p-1}} \left[f_1(\lambda_1,\lambda_2) + \dots + f_{p-1}(\lambda_{p-1},\lambda_p)\right]$$

and:

$$\phi_p(\lambda_p) = \underset{\lambda_{p-1}}{\operatorname{argmin}} \left[\min_{\lambda_1 \dots \lambda_{p-2}} \left[f_1(\lambda_1,\lambda_2) + \dots + f_{p-1}(\lambda_{p-1},\lambda_p)\right]\right]$$

then we define :

$$\forall \lambda_{p+1} \in S_{p+1}, \quad h_{p+1}(\lambda_{p+1}) = \min_{\lambda_p} \left[h_p(\lambda_p) + f_p(\lambda_p,\lambda_{p+1})\right]$$

and:

$$\phi_{p+1}(\lambda_{p+1}) = \underset{\lambda_p}{\operatorname{argmin}} \left[h_p(\lambda_p) + f_p(\lambda_p,\lambda_{p+1})\right]$$

with:

$$S_p = \Omega_{n-1} \quad \forall p = 2 \dots k-n$$

$$S_{k-n+1} = S_1 = \Omega_n$$

3)- Finally, we put : $h = \min_{\lambda_{k-n+1}} \left[h_{k-n+1}(\lambda_{k-n+1})\right]$ and set:

$$\overline{\lambda_{k-n+1}} = \underset{\lambda_{k-n+1}}{\operatorname{argmin}} \left[h_{k-n+1}(\lambda_{k-n+1})\right]; \quad \overline{\lambda_{k-n}} = \phi_{k-n}(\overline{\lambda_{k-n+1}})$$

$$\dots, \quad \overline{\lambda_1} = \phi_2(\overline{\lambda_2})$$

then h is the minimum of F and: $F(\overline{\lambda_1} \dots \overline{\lambda_{k-n+1}}) = h$.