

Коллоквиум по Математическому анализу-2, семестр 2

Виноградова Дарья, Залялов Александр, Миронов Алексей, Стрельцов Артём, Т

Содержание

- 14 Дайте определение гладкого k -мерного подмногообразия в \mathbb{R}^n и сопутствующее определение гладких координат. Приведите пример параметрической кривой, которая параметрически задана дифференцируемыми функциями, но не является гладким 1-мерным многообразием в какой-нибудь точке 3
- 15 Сформулируйте теорему о неявной функции. Допустим кривая $X \subseteq \mathbb{R}^2$ задана уравнением $f(x,y) = 0$, и известно, что $\text{grad}f(x_0,y_0) = (2; 0)$. Какую из координат x,y можно использовать в качестве локальной координаты на X в окрестности точки (x_0,y_0) ? 3
- 16 Сформулируйте общую теорему о неявном отображении. Допустим, кривая $X \subseteq \mathbb{R}^3$ задана уравнениями $f(x,y,z) = 0$, $g(x,y,z) = 0$, и известно, что $\text{grad}f(x_0,y_0,z_0) = (2; 0; 0)$, $\text{grad}g(x_0,y_0,z_0) = (0; 1; 3)$. Какие из координат x,y,z можно использовать в качестве локальных координат на X в окрестности точки (x_0,y_0,z_0) ? 4
- 17 Дайте определение касательного вектора к подмножеству $X \subseteq \mathbb{R}^n$ в точке $A \in X$. Как устроено множество всех касательных векторов к гладкому подмногообразию в фиксированной точке? 5
- 18 Допустим, что все точки множества $X \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяют уравнению $f(x) = 0$. Докажите, что в любой точке $x^{(0)} \in X$ любой касательный вектор к X перпендикулярен градиенту $\text{grad}f(x^{(0)})$. Опишите касательное пространство к k -мерному подмногообразию \mathbb{R}^n , заданному системой неявных уравнений (без доказательства). 5
- 19 Необходимое и достаточное условия локального экстремума для функции нескольких переменных (без доказательства). 5
- 20 Дайте определение точки условного минимума 6
- 21 Сформулируйте теорему о множителях Лагранжа. Объясните идею доказательства в случае, если подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ является гладким многообразием. 6
- 28 Дайте определение элемента площади 2-мерной поверхности в \mathbb{R}^3 и поверхностного интеграла 1-го рода 7
- 29 Дайте определение элемента k -мерного объёма k -мерного многообразия в \mathbb{R}^n и интеграла 1-го рода по k -мерному многообразию 8
- 30 Объясните, что такое гассманово умножение, гассмановы переменные, гассмановы мономы 8
- 31 Объясните, что такое дифференциальная форма ранга k , и как вычисляется интеграл (2-го рода) от k -формы ω по k -мерному многообразию $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Запишите вычислительную формулу для поверхностного интеграла 2-го рода 9
- 32 Что такое ориентация k -мерного многообразия? Как изменится интеграл 2-го рода от дифференциальной формы при смене ориентации многообразия (б. д.)? 9
- 33 Дайте определение согласованных ориентаций многообразия и его границы. Дайте определение дифференциала от k -формы. Запишите общую формулу Стокса. 10

34 Выведите из общей формулы Стокса частные случаи: формулу Ньютона-Лейбница, формулу Грина, формулу Гаусса-Остроградского.

10

Реклама

@applied_memes

@fcs_channels

14 Дайте определение гладкого k -мерного подмногообразия в \mathbb{R}^n и сопутствующее определение гладких координат. Приведите пример параметрической кривой, которая параметрически задана дифференцируемыми функциями, но не является гладким 1-мерным многообразием в какой-нибудь точке

Определение. Подмножество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *гладким k -мерным (под)многообразием* в \mathbb{R}^n , если $\forall x \in M$ существует окрестность U , $x \in U$, такая что на $M \cap U$ можно задать гладкие координаты.

Определение. *Гладкие координаты* — отображение $\Phi : V \rightarrow M$, где $V \subseteq \mathbb{R}^k$, задаваемое уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(t_1, \dots, t_k) \\ \vdots \\ x_n = \phi_n(t_1, \dots, t_k) \end{cases}$$

где (x_1, \dots, x_n) — координаты в \mathbb{R}^n , (t_1, \dots, t_k) — координаты в \mathbb{R}^k , при этом $(t_1, \dots, t_k) \in V$ тогда и только тогда, когда $(x_1, \dots, x_n) \in M$. При этом ϕ_1, \dots, ϕ_n дифференцируемы по каждой переменной и матрица частных производных невырождена.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial t_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial t_k} & \frac{\partial \phi_2}{\partial t_k} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial t_k} \end{pmatrix}$$

Ранг этой матрицы должен быть k в любой точке $t \in V$ (то есть все строки должны быть линейно независимы).

Пример:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

Обе функции дифференцируемые, но в точке $t = 0$ обе производные обращаются в ноль. Поэтому кривая не гладкая.

15 Сформулируйте теорему о неявной функции. Допустим кривая $X \subseteq \mathbb{R}^2$ задана уравнением $f(x, y) = 0$, и известно, что $\text{grad} f(x_0, y_0) = (2; 0)$. Какую из координат x, y можно использовать в качестве локальной координаты на X в окрестности точки (x_0, y_0) ?

Теорема. Пусть есть функция $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, для которой выполнены условия:

1. F определена и непрерывна в окрестности (x_0, y_0)
2. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ и F'_y непрерывна в (x_0, y_0)
3. $F(x_0, y_0) = 0$.

Тогда найдётся окрестность $U_{\delta,\epsilon}(x_0,y_0) = \left\{ (x,y) \mid \begin{array}{l} x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ y \in (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon) \end{array} \right\}$ и непрерывная функция f такая, что в $U_{\delta,\epsilon}(x_0,y_0)$ $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ (то есть можно выразить y от x в данной окрестности при выполнении выше условий).

Если кроме всех условий выше F дифференцируема в $U_{\delta,\epsilon}(x_0,y_0)$, то f дифференцируема в $U_\delta(x_0)$ и

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$$

Задача: проверяем условия теоремы, производная по x не равна нулю, а производная по y равна. Значит в качестве координаты можно взять y , а x — нельзя. Обратите внимание, координата — эта не та переменная, по которой дифференцируем.

16 Сформулируйте общую теорему о неявном отображении. Допустим, кривая $X \subseteq \mathbb{R}^3$ задана уравнениями $f(x,y,z) = 0$, $g(x,y,z) = 0$, и известно, что $\text{grad}f(x_0,y_0,z_0) = (2; 0; 0)$, $\text{grad}g(x_0,y_0,z_0) = (0; 1; 3)$. Какие из координат x,y,z можно использовать в качестве локальных координат на X в окрестности точки (x_0,y_0,z_0) ?

Обозначения: $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $(x,y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$.

Ещё обозначения: если функции g_1, \dots, g_s зависят от t_1, \dots, t_r , то

$$\frac{D(g_1, \dots, g_s)}{D(t_1, \dots, t_r)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1} & \frac{\partial g_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial t_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_s}{\partial t_1} & \frac{\partial g_s}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial g_s}{\partial t_r} \end{pmatrix}$$

(по строкам матрицы записаны градиенты (да, в 14 билете градиенты были записаны по столбцам, но так Айз давал на той лекции)).

Разрешим теперь m уравнений относительно m неизвестных.

Теорема. Пусть

1. $F_1(x,y), \dots, F_m(x,y)$ — непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ (здесь верхние индексы, чтобы не путать с координатами)
2. $F_j(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$
3. $\det \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \big|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \neq 0$

Тогда существует окрестность $U_\delta(x^{(0)}) \times U_\epsilon(y^{(0)})$ и набор дифференцируемых функций $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$, таких что в этой окрестности

$$\{F_j(x,y) = 0\}_{j=1}^m \Leftrightarrow \{y_j = f_j(x)\}_{j=1}^m$$

при этом $f_j(x^{(0)}) = y_j^{(0)}$.

Более того,

$$\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_n)} \bigg|_{x^{(0)}} = - \left(\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \right)^{-1} \bigg|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \cdot \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(x_1, \dots, x_n)} \bigg|_{x^{(0)}}$$

Задача: Запишем матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Видим, что линейно независимы первый и второй столбец, и первый и третий. Значит координатой может быть z или y . Обратите внимание, если матрица производных по x и y невырождена, то подходит как координата z .

17 Дайте определение касательного вектора к подмножеству $X \subseteq \mathbb{R}^n$ в точке $A \in X$. Как устроено множество всех касательных векторов к гладкому подмногообразию в фиксированной точке?

Определение. Пусть $x^{(0)} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$. Построим какую-нибудь кривую, которая целиком лежит в X и проходит через $x^{(0)}$. Пусть эта кривая задаётся параметрически $x_i = \psi_i(s)$, $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, и $(\psi_1(s), \dots, \psi_n(s)) \in X \forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$, и $(\psi_1(0), \dots, \psi_n(0)) = x^{(0)}$. Тогда вектор $(\frac{d\psi_1}{ds}(0), \dots, \frac{d\psi_n}{ds}(0))$ называется *касательным* к X в точке $x^{(0)}$ (если такой вектор определён, конечно).

Замечание. Касательных векторов может быть бесконечно много, т. к. бесконечно много таких кривых.

Пусть X теперь — гладкое k -мерное многообразие и $x_i = \phi_i(t_1, \dots, t_k)$ — гладкие координаты в окрестности точки $x^{(0)} = \Phi(t^{(0)})$. Тогда множество касательных векторов в точке $x^{(0)}$ образует k -мерное векторное пространство (обозначается $T_{x^{(0)}}X$), линейно порождённое следующими векторами

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial t_1}(t^{(0)}), \dots, \frac{\partial \phi_n}{\partial t_1}(t^{(0)}) \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial t_k}(t^{(0)}), \dots, \frac{\partial \phi_n}{\partial t_k}(t^{(0)}) \end{pmatrix}$$

Замечание. Эти векторы задают аффинное пространство, чтобы получить геометрическое касательное пространство, нужно сдвинуть $T_{x^{(0)}}X$ в точку $x^{(0)}$.

18 Допустим, что все точки множества $X \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяют уравнению $f(x) = 0$. Докажите, что в любой точке $x^{(0)} \in X$ любой касательный вектор к X перпендикулярен градиенту $\text{grad} f(x^{(0)})$. Опишите касательное пространство к k -мерному подмногообразию \mathbb{R}^n , заданному системой неявных уравнений (без доказательства).

Имеем $\forall x \in X \ f(x) = 0$. Тогда для любой кривой $\{x_i = \phi_i(s)\} \subset X$ имеем $f(\phi_1(s), \dots, \phi_n(s)) = 0$. продифференцируем это по s , получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{f\phi_1}{ds} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{f\phi_n}{ds} = 0$$

$$< \text{grad} f(x^{(0)}), \text{ касательный вектор к } X \text{ в точке } x^{(0)} > = 0$$

Из того, что скалярное произведение равно нулю, следует, что градиент f перпендикулярен касательному вектору к множеству X .

Касательное пространство — ортогональное дополнение к линейной комбинации градиентов неявных уравнений.

19 Необходимое и достаточное условия локального экстремума для функции нескольких переменных (без доказательства).

Определение. Точка $x^{(0)}$ функции f называется *стационарной*, когда $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0 \quad \forall i \in [1; n]$.

Необходимое условие:

Теорема. Если $f(x^{(0)})$ — локальный экстремум, то $x^{(0)}$ — стационарная.

Определение. Матрицей Гессе называется симметричная квадратичная форма

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Определение. Положительно определённой квадратичной формой называется такая, что все угловые миноры положительны.

Определение. Отрицательно определённой квадратичной формой называется такая, что все угловые миноры отрицательны.

Теорема. Теперь, пусть дана дважды дифференцируемая функция $f(x_1, \dots, x_n)$, пусть $x^{(0)}$ — стационарная точка. Тогда:

- Если матрица Гессе положительно определена, то $x^{(0)}$ — локальный минимум.
- Если матрица Гессе отрицательно определена, то $x^{(0)}$ — локальный максимум.
- Если матрица Гессе имеет и положительные и отрицательные миноры, но при этом не вырождена, то $x^{(0)}$ — не локальный экстремум.
- В остальных случаях $x^{(0)}$ может как являться локальным экстремумом, так и не являться.

20 Дайте определение точки условного минимума

Определение. Точка $x^{(0)}$ называется строгим условным минимумом функции f подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$, если $\forall x \in X \quad f(x) > f(x^{(0)})$.

Определение. Точка $x^{(0)}$ называется условным локальным минимумом функции f подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$, если существует окрестность $U(x^{(0)})$, такая что $\forall x \in U(x^{(0)}) \cap X \quad f(x) > f(x^{(0)})$.

Замечание. Далее будем считать, что такое множество задаётся набором уравнений вида $\phi(x) = 0$.

21 Сформулируйте теорему о множителях Лагранжа. Объясните идею доказательства в случае, если подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ является гладким многообразием.

Пусть у нас есть задача вида

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \text{extr} \\ \phi_1(x) = 0 \\ \vdots \\ \phi_m(x) = 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \\ m < n \end{cases}$$

Определение. Функцией Лагранжа называется

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) &= f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \\ x &\in \mathbb{R}^n \\ \lambda &\in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

λ называют множителями Лагранжа.

Теорема. Пусть $x^{(0)}$ — точка условного локального экстремума в задаче выше, и пусть в окрестности точки $x^{(0)}$ X — гладкое многообразие. Тогда существуют такие $\lambda^{(0)}$, что точка $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}) = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}) \in \mathbb{R}^{m+n}$ является стационарной для $L(x, \lambda)$.

То есть

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^{(0)}, \lambda^{(0)}) &= 0 \quad \forall i \in [1; n] \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x^{(0)}, \lambda^{(0)}) &= 0 \quad \forall i \in [1; m]\end{aligned}$$

Второе в силу линейности по λ эквивалентно $g_i(x^{(0)}) = 0$, что означает, что $x^{(0)} \in X$. Посмотрим теперь на первое

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}(f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)) = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} &- \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \end{pmatrix} - \dots - \lambda_m \begin{pmatrix} \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Это значит, что

$$\text{grad} f = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{grad} g_i$$

Так как, все наши переходы были равносильными, нам осталось доказать, что найдутся такие λ , то есть, что $\text{grad} f$ является линейной комбинацией $\text{grad} g_i$ в данной точке.

Поскольку X гладкая в точке $x^{(0)}$, будем предполагать, что X удовлетворяет условию теоремы о неявном отображении, то есть градиенты $\text{grad} g_i$ линейно независимы. Без ограничения общности будем считать $x^{(0)} \in X \subset \mathbb{R}^n$ — точка условного локального минимума. Тогда, если возьмём какую-нибудь кривую $\{x_i = \phi(t)\} \subseteq X$, такую, что $\phi_i(0) = x_i^{(0)}$, то на ней это также будет точка локального минимума, запишем касательный вектор

$$u = \left(\frac{d\phi_1}{dt}(0), \dots, \frac{d\phi_n}{dt}(0) \right) \in T_{x^{(0)}} X$$

Функция $\alpha(t) = f(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))$ имеет в $t = 0$ локальный минимум. По теореме Ферма $\frac{d\alpha}{dt}(0) = 0$. А это

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}) \cdot \frac{d\phi_1}{dt}(0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^{(0)}) \cdot \frac{d\phi_n}{dt}(0) = \langle \text{grad} f(x^{(0)}), u \rangle = 0$$

Таким образом, градиент целевой функции в точки экстремума перпендикулярен любому касательному вектору $u \in T_{x^{(0)}} X$, то есть $\text{grad} f(x^{(0)}) \perp T_{x^{(0)}} X$. А это значит, что этот градиент лежит в ортогональном дополнении

$$\text{grad} f(x^{(0)}) \in (T_{x^{(0)}} X)^\perp = \langle \text{grad} g_1(x^{(0)}), \dots, \text{grad} g_m(x^{(0)}) \rangle$$

А раз $\text{grad} f(x^{(0)})$ лежит в линейной оболочке $\text{grad} g_i(x^{(0)})$, то он является их линейной комбинацией.

28 Дайте определение элемента площади 2-мерной поверхности в \mathbb{R}^3 и поверхностного интеграла 1-го рода

Пусть имеется двумерная поверхность $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ и у неё зафиксирована параметризация $\varphi : M \rightarrow \Omega, M \subseteq \mathbb{R}^2$. Будем обозначать координаты в \mathbb{R}^3 как (x, y, z) , а в \mathbb{R}^2 — как (u, v) . Неформально говоря, элементом площади в точке поверхности называется площадь бесконечно малого параллелограмма со сторонами, направленными параллельно касательным векторам в этой точке. Можно провести аналогию с одномерными интегралами, где мы приближаем функцию с помощью ломаной с маленькими звеньями, и сказать, что мы приближаем поверхность маленькими чешуйками в форме параллелограммов. Запишем теперь формулу для элемента площади в точке (u, v)

$$dS = S(P(\varphi'_u(u, v), \varphi'_v(u, v))) du dv;$$

Здесь φ'_u, φ'_v — трёхмерные векторы (так как φ имеет три координаты), именно они являются касательными в данной точке; P — параллелограмм, натянутый на векторы; S — площадь. Из линейной алгебры мы знаем, что

площадь параллелограмма можно считать как корень из определителя матрицы Грама его сторон. Это даёт нам новую формулу для элемента площади.

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv;$$

Здесь $E = \langle \varphi'_u, \varphi'_u \rangle = \|\varphi'_u\|^2$, $G = \langle \varphi'_v, \varphi'_v \rangle = \|\varphi'_v\|^2$, $F = \langle \varphi'_u, \varphi'_v \rangle$.

Теперь мы можем естественным образом определить поверхностный интеграл 1-го рода от функции $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ по Ω .

$$\iint_{\Omega} f(x, y, z) dS := \iint_M f(\varphi(u, v)) \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} du dv;$$

Здесь мы опираемся на параметризацию при определении интеграла. Можно проверить, что при смене параметризации значение интеграла 1-го рода не изменится.

29 Дайте определение элемента k -мерного объёма k -мерного многообразия в \mathbb{R}^n и интеграла 1-го рода по k -мерному многообразию

Пусть имеется k -мерное многообразие $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ и у него зафиксирована параметризация $\varphi : M \rightarrow \Omega$, $M \subseteq \mathbb{R}^k$. Будем обозначать координаты в \mathbb{R}^n как $x = (x_1, \dots, x_n)$, а в \mathbb{R}^k — как $t = (t_1, \dots, t_k)$. Аналогично предыдущему билету, определим элемент k -мерного объёма в точке t .

$$dVol_k = S(P(\varphi'_{t_1}(t), \dots, \varphi'_{t_k}(t))) dt_1 \dots dt_k;$$

Запишем теперь формулу для интеграла 1-го рода от функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ по Ω .

$$\int_{\Omega} f(x) dVol_k := \int_M f(\varphi(t)) S(P(\varphi'_{t_1}(t), \dots, \varphi'_{t_k}(t))) dt_1 \dots dt_k;$$

Опять же, можно проверить, что интеграл 1-го рода не зависит от параметризации.

30 Объясните, что такое гассманово умножение, гассмановы переменные, гассмановы мономы

Пусть у нас имеется набор символов a_1, \dots, a_n — гассмановых переменных и мы умеем брать их линейные комбинации. То есть, например, у нас есть отдельные элементы $a_2 - a_1$, 0 , $-5a_3$ и т. п. Теперь мы хотим ввести новую операцию — научиться умножать наши элементы друг на друга. Наше умножение будет обозначаться символом \wedge и называться гассмановым умножением. Умножение будет удовлетворять всем стандартным требованиям, кроме коммутативности, которую мы заменим на более странное свойство 4:

1. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
2. $(x + y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z$;
3. $z \wedge (x + y) = z \wedge x + z \wedge y$;
4. $a_i \wedge a_j = -a_j \wedge a_i$;

Обратите внимание, пункты 1-3 относятся к любым элементам, а пункт 4 только к исходным a_1, \dots, a_n . Простые следствия из свойств: $0 \wedge x = 0$, $a_i \wedge a_i = 0$. Для примера посчитаем «квадрат» элемента $a_1 \wedge a_2 + a_3$.

$$\begin{aligned} (a_1 \wedge a_2 + a_3) \wedge (a_1 \wedge a_2 + a_3) &= a_1 \wedge a_2 \wedge (a_1 \wedge a_2 + a_3) + a_3 \wedge (a_1 \wedge a_2 + a_3) = 0 + a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 + a_3 \wedge a_1 \wedge a_2 + 0 = \\ &= a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 - a_1 \wedge a_3 \wedge a_2 = a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 + a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 = 2a_1 \wedge a_2 \wedge a_3; \end{aligned}$$

Определение. Гассмановым мономом степени k называется элемент вида $\alpha a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_k}$, где $i_1, \dots, i_k \in \{0, \dots, n\}$, α — некоторый коэффициент.

Заметим, что если среди i_1, \dots, i_k есть повторения, то моном равен нулю. Переменные в гассмановом мономе можно отсортировать, возможно, поменяв при этом знак. Точнее, при сортировке моном домножится на -1 в степени равной числу инверсий, то есть на знак перестановки.

31 Объясните, что такое дифференциальная форма ранга k , и как вычисляется интеграл (2-го рода) от k -формы ω по k -мерному многообразию $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Запишите вычислительную формулу для поверхностного интеграла 2-го рода

Определение. Дифференциальной формой ранга k (или дифференциальной k -формой) на $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется выражение вида $\sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}} f_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, где $f_{i_1 \dots i_k}$ — некоторые дифференцируемые¹ функции $f_{i_1 \dots i_k} : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Если вам очень понравился предыдущий билет, можно сказать, что это сумма грасмановых мономов степени k от переменных dx_1, \dots, dx_n с дифференцируемыми функциями в качестве коэффициентов. Можно считать, что среди чисел i_1, \dots, i_k нет повторений, так как мономы с повторениями всё равно зануляются.

Пусть имеются k -мерное многообразие $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ с параметризацией $\varphi : M \rightarrow \Omega, M \subseteq \mathbb{R}^k$ и дифференциальная k -форма $\omega = \sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}} f_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ на Ω . Определим интеграл (2-го рода) ω по Ω .

$$\int_{\Omega} \omega := \int_M \sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}} f_{i_1 \dots i_k}(\varphi(t)) d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k};$$

Поясним, что творится в этой формуле. Во-первых, $\varphi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ — это функция, соответствующая i -й координате φ . Во-вторых, $d\varphi_i$ — это привычный дифференциал функции нескольких переменных, но теперь мы говорим, что это линейная комбинация грасмановых переменных dt_1, \dots, dt_k . Когда мы грасманово перемножим эти дифференциалы, у нас останется выражение вида $f(t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k$. Это так, ведь в любом слагаемом результата будут перемножаться k переменных, одинаковые занулятся, останутся только слагаемые с различными, возможно, не в том порядке. Но мы можем привести порядок к правильному. После этих преобразований мы считаем интеграл как обычный кратный интеграл.

$$\int_M f dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k = \int_M f dt_1 \dots dt_k;$$

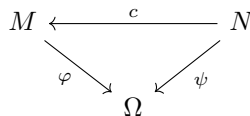
Для случая $k = 2$ это всё можно записать в следующую формулу.

$$\iint_{\Omega} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iint_M \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{vmatrix} du dv;$$

Обратите внимание, при Q стоит $dz \wedge dx$, а не $dx \wedge dz$.

32 Что такое ориентация k -мерного многообразия? Как изменится интеграл 2-го рода от дифференциальной формы при смене ориентации многообразия (б. д.)?

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — k -мерное связное² многообразие, и у него имеются две параметризации $\varphi : M \rightarrow \Omega, \psi : N \rightarrow \Omega; M, N \subseteq \mathbb{R}^k$. Предположим, что функция замены координат $c = \varphi^{-1} \circ \psi$ биективна и непрерывно дифференцируема.



Посмотрим на якобиан $J(c)$. Если бы где-то он был равен нулю, в окрестности этой точки c была бы необратима. Значит он не равен нулю нигде. Поскольку $J(c)$ непрерывен и Ω связно, из этого следует, что он имеет постоянный знак. Тогда если он положителен, будем говорить, что φ и ψ задают одну и ту же ориентацию, а если отрицателен

¹Часто ограничиваются гладкими функциями.

²Напомним, многообразие называется гладким, если любые две его точки можно соединить проходяще по нему непрерывной кривой.

— то разные. Таким образом мы определяем ориентацию как отношение эквивалентности с двумя классами на параметризациях многообразия.

Ориентация задаёт ориентацию на любом касательном пространстве $T_x\Omega$ как на векторном пространстве. Если мы назвали ориентацию некоторой параметризации положительной, то назовём положительным базис $T_x\Omega$, полученный из её производных.

При смене параметризации на имеющую противоположную ориентацию интеграл 2-го рода меняет знак.

33 Дайте определение согласованных ориентаций многообразия и его границы. Дайте определение дифференциала от k -формы. Запишите общую формулу Стокса.

Будем обозначать границу многообразия Ω как $\partial\Omega$. Заметим, что если у k -мерного многообразия есть граница, то она имеет размерность $k - 1$.

Определение. Будем говорить, что ориентации Ω и $\partial\Omega$ согласованы, если для любой точки $x \in \partial\Omega$ для любого положительного базиса v_1, \dots, v_{k-1} в $T_x\partial\Omega$, базис $v_1, \dots, v_{k-1}, \vec{n}$ положителен в $T_x\Omega$, где \vec{n} — это вектор в $T_x\Omega$, перпендикулярный $T_x\partial\Omega$ и смотрящий наружу³ Ω .

Мы привыкли, что дифференциал суммы равен сумме дифференциалов. Поэтому для определения дифференциала от дифференциальной формы достаточно определить дифференциал от грассманова монома.

$$d(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) := df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k};$$

Замечание. Дифференциал k -формы является $(k + 1)$ -формой.

Для примера посчитаем дифференциал от дифференциала некоторой функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

$$d(df) = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i;$$

При этом слагаемые вида $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} dx_i \wedge dx_i$ сразу зануляются, а слагаемые вида $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i$ сократятся с $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_i \wedge dx_j$. Значит $d(df) = 0$.

Пусть теперь $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — k -мерное многообразие с согласованными ориентациями на самом многообразии и на границе, а ω — дифференциальная $(k - 1)$ -форма на Ω . Тогда верна (общая) формула Стокса:

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega;$$

34 Выведите из общей формулы Стокса частные случаи: формулу Ньютона-Лейбница, формулу Грина, формулу Гаусса-Остроградского.

Формула Ньютона-Лейбница, $n = k = 1$

Пусть наше многообразие это отрезок на прямой $[a; b]$. Его границей будет множество из двух точек $\{a, b\}$. Заметим, что точка — это нульмерное многообразие и по нему можно интегрировать 0-формы (то есть просто функции). При чём этот интеграл будет с точностью до знака (знак как всегда определяется ориентацией) равен значению функции в точке. Если на отрезке мы берём стандартную ориентацию «слева направо», то для границы это будет означать взятие b с плюсом и a с минусом. Итак, формула Стокса принимает следующий вид:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b dF;$$

Перепишем в более привычную запись.

³Это можно формализовать, например, как отрицательное скалярное произведение с любым вектором, соединяющим x и точку из окрестности x из Ω . Но лектор это никак не формализовал.

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a);$$

Формула Грина, $n = k = 2$

Дифференциальная 1-форма в \mathbb{R}^2 имеет вид $Pdx + Qdy$. Посчитаем её дифференциал

$$\begin{aligned} d(Pdx + Qdy) &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy; \end{aligned}$$

Формула Стокса принимает следующий вид:

$$\int_{\partial U} Pdx + Qdy = \iint_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy;$$

Здесь условие согласованности ориентации можно сформулировать как «при обходе ∂U по заданной параметризации U всегда находится слева».

Формула Гаусса-Остроградского, $n = k = 3$

Дифференциальная 2-форма в \mathbb{R}^3 имеет вид $Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$. Посчитаем её дифференциал.

$$\begin{aligned} d(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy) &= \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz; \end{aligned}$$

Формула Стокса принимает следующий вид:

$$\iint_{\partial V} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz;$$