

# Коллоквиум по Математическому анализу-2, семестр 2

Виноградова Дарья, Залялов Александр, Миронов Алексей, Стрельцов Артём, Т

## Содержание

- 28 Дайте определение элемента площади 2-мерной поверхности в  $\mathbb{R}^3$  и поверхностного интеграла 1-го рода 2
- 29 Дайте определение элемента  $k$ -мерного объёма  $k$ -мерного многообразия в  $\mathbb{R}^n$  и интеграла 1-го рода по  $k$ -мерному многообразию 2
- 30 Объясните, что такое гассманово умножение, гассмановы переменные, гассмановы мономы 2
- 31 Объясните, что такое дифференциальная форма ранга  $k$ , и как вычисляется интеграл (2-го рода) от  $k$ -формы  $\omega$  по  $k$ -мерному многообразию  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Запишите вычислительную формулу для поверхностного интеграла 2-го рода 3
- 32 Что такое ориентация  $k$ -мерного многообразия? Как изменится интеграл 2-го рода от дифференциальной формы при смене ориентации многообразия (б. д.)? 4
- 33 Дайте определение согласованных ориентаций многообразия и его границы. Дайте определение дифференциала от  $k$ -формы. Запишите общую формулу Стокса. 4

## 28 Дайте определение элемента площади 2-мерной поверхности в $\mathbb{R}^3$ и поверхностного интеграла 1-го рода

Пусть имеется двумерная поверхность  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  и у неё зафиксирована параметризация  $\varphi : M \rightarrow \Omega, M \subseteq \mathbb{R}^2$ . Будем обозначать координаты в  $\mathbb{R}^3$  как  $(x, y, z)$ , а в  $\mathbb{R}^2$  — как  $(u, v)$ . Неформально говоря, элементом площади в точке поверхности называется площадь бесконечно малого параллелограмма со сторонами, направленными параллельно касательным векторам в этой точке. Можно провести аналогию с одномерными интегралами, где мы приближаем функцию с помощью ломаной с маленькими звеньями, и сказать, что мы приближаем поверхность маленькими чешуйками в форме параллелограммов. Запишем теперь формулу для элемента площади в точке  $(u, v)$

$$dS = S(P(\varphi'_u(u, v), \varphi'_v(u, v)))dudv;$$

Здесь  $\varphi'_u, \varphi'_v$  — трёхмерные векторы (так как  $\varphi$  имеет три координаты), именно они являются касательными в данной точке;  $P$  — параллелограмм, натянутый на векторы;  $S$  — площадь. Из линейной алгебры мы знаем, что площадь параллелограмма можно считать как корень из определителя матрицы Грама его сторон. Это даёт нам новую формулу для элемента площади.

$$dS = \sqrt{EG - F^2}dudv;$$

Здесь  $E = \langle \varphi'_u, \varphi'_u \rangle = \|\varphi'_u\|^2, G = \langle \varphi'_v, \varphi'_v \rangle = \|\varphi'_v\|^2, F = \langle \varphi'_u, \varphi'_v \rangle$ .

Теперь мы можем естественным образом определить поверхностный интеграл 1-го рода от функции  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  по  $\Omega$ .

$$\iint_{\Omega} f(x, y, z) dS := \iint_M f(\varphi(u, v)) \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} dudv;$$

Здесь мы опираемся на параметризацию при определении интеграла. Можно проверить, что при смене параметризации значение интеграла 1-го рода не изменится.

## 29 Дайте определение элемента $k$ -мерного объёма $k$ -мерного многообразия в $\mathbb{R}^n$ и интеграла 1-го рода по $k$ -мерному многообразию

Пусть имеется  $k$ -мерное многообразие  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  и у него зафиксирована параметризация  $\varphi : M \rightarrow \Omega, M \subseteq \mathbb{R}^k$ . Будем обозначать координаты в  $\mathbb{R}^n$  как  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , а в  $\mathbb{R}^k$  — как  $t = (t_1, \dots, t_k)$ . Аналогично предыдущему билету, определим элемент  $k$ -мерного объёма в точке  $t$ .

$$dVol_k = S(P(\varphi'_{t_1}(t), \dots, \varphi'_{t_k}(t)))dt_1 \dots dt_k;$$

Запишем теперь формулу для интеграла 1-го рода от функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  по  $\Omega$ .

$$\int_{\Omega} f(x) dVol_k := \int_M f(\varphi(t)) S(P(\varphi'_{t_1}(t), \dots, \varphi'_{t_k}(t))) dt_1 \dots dt_k;$$

Опять же, можно проверить, что интеграл 1-го рода не зависит от параметризации.

## 30 Объясните, что такое гассманово умножение, гассмановы переменные, гассмановы мономы

Пусть у нас имеется набор символов  $a_1, \dots, a_n$  — гассмановых переменных и мы умеем брать их линейные комбинации. То есть, например, у нас есть отдельные элементы  $a_2 - a_1, 0, -5a_3$  и т. п. Теперь мы хотим ввести новую операцию — научиться умножать наши элементы друг на друга. Наше умножение будет обозначаться символом  $\wedge$  и называться гассмановым умножением. Умножение будет удовлетворять всем стандартным требованиям, кроме коммутативности, которую мы заменим на более странное свойство 4:

1.  $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z);$
2.  $(x + y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z;$

$$3. z \wedge (x + y) = z \wedge x + z \wedge y;$$

$$4. a_i \wedge a_j = -a_j \wedge a_i;$$

Обратите внимание, пункты 1-3 относятся к любым элементам, а пункт 4 только к исходным  $a_1, \dots, a_n$ . Простые следствия из свойств:  $0 \wedge x = 0, a_i \wedge a_i = 0$ . Для примера посчитаем «квадрат» элемента  $a_1 \wedge a_2 + a_3$ .

$$\begin{aligned} (a_1 \wedge a_2 + a_3) \wedge (a_1 \wedge a_2 + a_3) &= a_1 \wedge a_2 \wedge (a_1 \wedge a_2 + a_3) + a_3 \wedge (a_1 \wedge a_2 + a_3) = 0 + a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 + a_3 \wedge a_1 \wedge a_2 + 0 = \\ &= a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 - a_1 \wedge a_3 \wedge a_2 = a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 + a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 = 2a_1 \wedge a_2 \wedge a_3; \end{aligned}$$

**Определение.** Грассмановым мономом степени  $k$  называется элемент вида  $\alpha a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_k}$ , где  $i_1, \dots, i_k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\alpha$  — некоторый коэффициент.

Заметим, что если среди  $i_1, \dots, i_k$  есть повторения, то моном равен нулю. Переменные в грассмановом мономе можно отсортировать, возможно, поменяв при этом знак. Точнее, при сортировке моном домножится на  $-1$  в степени равной числу инверсий, то есть на знак перестановки.

## 31 Объясните, что такое дифференциальная форма ранга $k$ , и как вычисляется интеграл (2-го рода) от $k$ -формы $\omega$ по $k$ -мерному многообразию $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Запишите вычислительную формулу для поверхностного интеграла 2-го рода

**Определение.** Дифференциальной формой ранга  $k$  (или дифференциальной  $k$ -формой) на  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  называется выражение вида  $\sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}} f_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ , где  $f_{i_1 \dots i_k}$  — некоторые дифференцируемые<sup>1</sup> функции  $f_{i_1 \dots i_k} : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Если вам очень понравился предыдущий билет, можно сказать, что это сумма грассмановых мономов степени  $k$  от переменных  $dx_1, \dots, dx_n$  с дифференцируемыми функциями в качестве коэффициентов. Можно считать, что среди чисел  $i_1, \dots, i_k$  нет повторений, так как мономы с повторениями всё равно зануляются.

Пусть имеются  $k$ -мерное многообразие  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  с параметризацией  $\varphi : M \rightarrow \Omega, M \subseteq \mathbb{R}^k$  и дифференциальная  $k$ -форма  $\omega = \sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}} f_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  на  $\Omega$ . Определим интеграл (2-го рода)  $\omega$  по  $\Omega$ .

$$\int_{\Omega} \omega := \int_M \sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}} f_{i_1 \dots i_k}(\varphi(t)) d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k};$$

Поясним, что творится в этой формуле. Во-первых,  $\varphi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  — это функция, соответствующая  $i$ -й координате  $\varphi$ . Во-вторых,  $d\varphi_i$  — это привычный дифференциал функции нескольких переменных, но теперь мы говорим, что это линейная комбинация грассмановых переменных  $dt_1, \dots, dt_k$ . Когда мы грассманово перемножим эти дифференциалы, у нас останется выражение вида  $f(t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k$ . Это так, ведь в любом слагаемом результата будут перемножаться  $k$  переменных, одинаковые занулятся, останутся только слагаемые с различными, возможно, не в том порядке. Но мы можем привести порядок к правильному. После этих преобразований мы считаем интеграл как обычный кратный интеграл.

$$\int_M f dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k = \int_M f dt_1 \dots dt_k;$$

Для случая  $k = 2$  это всё можно записать в следующую формулу.

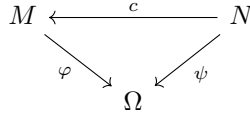
$$\iint_{\Omega} P dy \wedge dx + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iint_M \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{vmatrix} du dv;$$

Обратите внимание, при  $Q$  стоит  $dz \wedge dx$ , а не  $dx \wedge dz$ .

<sup>1</sup>Часто ограничиваются гладкими функциями.

### 32 Что такое ориентация $k$ -мерного многообразия? Как изменится интеграл 2-го рода от дифференциальной формы при смене ориентации многообразия (б. д.)?

Пусть  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  —  $k$ -мерное связное многообразие, и у него имеются две параметризации  $\varphi : M \rightarrow \Omega, \psi : N \rightarrow \Omega; M, N \subseteq \mathbb{R}^k$ . Предположим, что функция замены координат  $c = \varphi^{-1} \circ \psi$  биективна и непрерывно дифференцируема.



Посмотрим на якобиан  $J(c)$ . Если бы где-то он был равен нулю, в окрестности этой точки  $c$  была бы необратима. Значит он не равен нулю нигде. Поскольку  $J(c)$  непрерывен и  $\Omega$  связно, из этого следует, что он имеет постоянный знак. Тогда если он положителен, будем говорить, что  $\varphi$  и  $\psi$  задают одну и ту же ориентацию, а если отрицателен — то разные. Таким образом мы определяем ориентацию как отношение эквивалентности с двумя классами на параметризациях многообразия.

Ориентация задаёт ориентацию на любом касательном пространстве  $T_x\Omega$  как на векторном пространстве. Если мы назвали ориентацию некоторой параметризации положительной, то назовём положительным базис  $T_x\Omega$ , полученный из её производных.

При смене параметризации на имеющую противоположную ориентацию интеграл 2-го рода меняет знак.

### 33 Дайте определение согласованных ориентаций многообразия и его границы. Дайте определение дифференциала от $k$ -формы. Запишите общую формулу Стокса.

Будем обозначать границу многообразия  $\Omega$  как  $\partial\Omega$ . Заметим, что если у  $k$ -мерного многообразия есть граница, то она имеет размерность  $k - 1$ .

**Определение.** Будем говорить, что ориентации  $\Omega$  и  $\partial\Omega$  согласованы, если для любой точки  $x \in \partial\Omega$  для любого положительного базиса  $v_1, \dots, v_{k-1}$  в  $T_x\partial\Omega$ , базис  $v_1, \dots, v_{k-1}, \vec{n}$  положителен в  $T_x\Omega$ , где  $\vec{n}$  — это вектор в  $T_x\Omega$ , перпендикулярный  $T_x\partial\Omega$  и смотрящий наружу<sup>2</sup>  $\Omega$ .

Мы привыкли, что дифференциал суммы равен сумме дифференциалов. Поэтому для определения дифференциала от дифференциальной формы достаточно определить дифференциал от гассманова монома.

$$d(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) := df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k};$$

Для примера посчитаем дифференциал от дифференциала некоторой функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$d(df) = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i;$$

При этом слагаемые вида  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} dx_i \wedge dx_i$  сразу зануляются, а слагаемые вида  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i$  сократятся с  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_i \wedge dx_j$ . Значит  $d(df) = 0$ .

Пусть теперь  $\Omega$  —  $k$ -мерное многообразие с согласованными ориентациями на самом многообразии и на границе, а  $\omega$  — дифференциальная  $(k - 1)$ -форма на  $\Omega$ . Тогда верна (общая) формула Стокса:

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega;$$

<sup>2</sup>Это можно формализовать, например, как отрицательное скалярное произведение с любым вектором, соединяющим  $x$  и точку из окрестности  $x$  из  $\Omega$ . Но лектор это никак не формализовал.