Коллоквиум по Математическому анализу-2, семестр 2

Виноградова Дарья, Залялов Александр, Миронов Алексей, Стрельцов Артём, Т

Содержание

1 Пространство кусочно-непрерывных функций на отрезке как пример евклидова пространства. Неравенство Коши-Буняковского на этом пространстве (б.д.). Ортогональные и ортонормированные системы в евклидовом пространстве. Главный пример: $C([-\pi;\pi])$

Напомним, что евклидово пространство - это векторное пространство над полем вещественных чисел со скалярным произведением.

Свойства скалярного произведения:

1. $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$
2. $\langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v\rangle = \lambda_1\langle u_1,v\rangle + \lambda_2\langle u_1,v\rangle$
3. $\langle v,v\rangle \geq 0$

3'. $\langle v,v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0$

Рассмотрим векторное пространство $V = \hat{C}([a;b])$ - множество кусочно-непрерывных функций на $[a;b]$ (имеющих конечное число точек разрыва первого рода), обладающих также следующим свойством:

$f(c) = \frac{1}{2}(\lim\limits_{x\to c-0} f(x) + \lim\limits_{x\to c+0} f(x))$

Определим на $\hat{C}$ скалярное произведение $\langle f,g\rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ и проверим свойства, чтобы показать его корректность.

1-3 очевидны. 3' сначала рассмотрим для непрерывной на отрезке функции. От противного: пусть на отрезке существует какая-то точка c, в которой функция принимает ненулевое значение. Тогда $f^2(c) > 0$. В силу непрерывности есть такая окрестность $(c-\delta; c+\delta)$, в которой $f^2(x) \geq \epsilon > 0$.

$\int\limits_a^b f^2(x) \geq \int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) \geq 2\delta\epsilon > 0$

Для $\hat{C}$ отрезок разваливается на конечное число отрезков непрерывности, применим к ним предыдущее.

Теорема. *(неравенство Коши-Буняковского)* $\langle f,g\rangle^2 \leq \langle f,f\rangle \cdot \langle g,g\rangle$

Для нашего пространства оно имеет вид

$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq \int\limits_a^b f^2(x)dx \int\limits_a^b g^2(x)dx$

Определение. Множество элементов $\psi_i \in V$ называется *ортогональной* системой, если для любой пары $\langle\psi_i,\psi_j\rangle = 0$. Если при этом $\|\psi_i\| = 1\ \forall i$, то система *отронормирована*.

В $C([-\pi;\pi])$ следующая система является ортонормированной:

$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \cdots\}$

Проверим норму на примере cos:

$\|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx\| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kx)dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(2kx)+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = 1$

Любая функция с cos ортогональна любой с sin в силу нечетности. Проверим ортогональность двух функций с cos:

$\langle\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(lx)\rangle = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(lx)dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\cos((k+l)x) + \cos((k-l)x))dx = 0$

Остальное оставим в качестве упражнения для пытливого читателя.

2 Задача о наилучшем приближении элемента евклидова пространства элементом конечномерного пространства (б.д.). Ряд Фурье по произвольной ортонормированной системе. Ряд Фурье по тригонометрической системе.

Пусть имеется ортонормированная система $\{\psi_i\}$ в векторном пространстве V. Хотим найти наилучшее приближение элемента f этого пространства вида $\sum c_k\psi_k$ (т.е. $\|f - \sum c_k\psi_k\| \to min$). Утверждается, что $c_k = \langle f,\psi_k\rangle$.

Определение. *Ряд Фурье по произвольной ортонормированной системе* $\{\psi_i\}$ - это сумма вида $\sum c_k\psi_k$

Определение. *Ряд Фурье по тригонометрической системе* - это сумма вида $\frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum \frac{f_k}{\sqrt{\pi}} cos(kx) + \frac{\hat{f}_k}{\sqrt{\pi}} sin(kx)$, где $f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $f_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)$, $\hat{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx$

Обычно ряд Фурье записывают как $\frac{a_0}{2} + \sum a_k cos(kx) + b_k sin(kx)$,
где $a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx), b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx$

3 Неравенство Бесселя (идея доказательства). Определения замкнутой и полной ортонормированных систем (ОНС). Тождество Парсеваля для замкнутой ОНС.

Теорема. *(неравенство Бесселя)* $\sum_{i=1}^{\infty} f_k^2 \leq \|f\|^2$*, где* f *- элемент векторного пространства* V *с ортонормированной системой* $\{\psi_i\}$*,* $f_i = \langle f, \psi_i\rangle$

Доказательство. $0 \leq \|f - \sum_{i=1}^{n} f_i\psi_i\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \|\langle f, \psi_i\rangle\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} f_i^2$
$\sum_{i=1}^{n} f_i^2$ ограничена сверху $\Rightarrow$ сходится. Переходим к пределу, получаем требуемое. □

Определение. Ортонормированная система *замкнута*, если $\forall\epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists c1, \cdots, c_n\ \|f - \sum_{i=1}^{n} c_k\psi_k\| < \epsilon$

Определение. Ортонормированная система *полна*, если $[\ \forall k \in \mathbb{N}\ \Rightarrow f \perp \psi_k] \Rightarrow f \equiv 0$

Теорема. *(тождество Парсеваля) Для замкнутой ОНС* $\sum_{i=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$

Доказательство. Зафиксируем ϵ. Из определения замкнутости $\exists n \in \mathbb{N}\ \exists c1, \cdots, c_n\ \|f - \sum_{i=1}^{n} c_k\psi_k\| < \epsilon$.
Из неравенства Бесселя $\|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \leq \|f - \sum_{i=1}^{n} c_k\psi_k\|^2 \leq \epsilon^2$.
Тогда для $m \geq n$ и подавно $\|f\|^2 - \sum_{i=1}^{m} f_i^2 \leq \|f - \sum_{i=1}^{n} c_k\psi_k\|^2 \leq \epsilon^2$
Значит, $\forall\epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall m \geq n\ \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{m} f_i^2 \leq \epsilon^2$, и из этого и следует равенство в пределе. □

4 Бывают ли замкнутые ортонормированные системы, но не полные?

Не бывает. Пусть $\forall i\ f \perp \psi_i$. Значит, $f_i = 0$. В силу замкнутости справедливо тождество Парсеваля. то есть $\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} f_i = 0$

5 Дайте определение свертки двух функций $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Докажите, что операция свертки коммутативна. Дайте определение свертки двух 2π-периодических функций $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Определение. *Сверткой* функций $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется $(f * g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(t - x)dx$

Теорема. $(f * g) \equiv (g * f)$

Доказательство. Положим $\tau = t - x$.
$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(t - x)dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\tau - t)g(\tau)d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t - \tau)g(\tau)d\tau$ □

Определение. *Сверткой* 2π-периодических функций $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется $(f * g)(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(t - x)dx$

6 Дайте определения ядра Дирихле и ядра Фейера. Какой смысл у свертки произвольной периодической функции с этими ядрами? (б.д.)

Определение. *Ядром Дирихле* называется $D_n(t) = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})t]}{2\sin\frac{t}{2}}$

Обозначим $S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k cos(kx) + b_k sin(kx)$, где f - 2π-периодическая и интегрируемая на $[-\pi;\pi]$.

Тогда справедливо $S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt$ - то есть свертка с ядром Дирихле дает нам n-ю частичную сумму ряда Фурье.

Определение. *Ядром Фейера* называется $\Phi_n(t) = \frac{\sin^2(\frac{tn}{2})}{2\sin^2\frac{t}{2}}$

Обозначим $\sigma_n(x,f) = \frac{S_0(x,f)+\dots+S_{n-1}(x,f)}{n}$ - среднее арифметическое ряда Фурье.

Для f с теми же свойствами будет верно $\sigma_n(x,f) = \frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t)dt$

7 Сформулируйте (б.д.) теоремы о приближении 2π периодической функции тригонометрическими многочленами: о сходимости ядра Фурье в точке, и о приближении функции тригонометрическими многочленами в различных функциональных метриках.

Теорема. *Если 2π-периодическая функция имеет в точке производную слева и справа, то ряд Фурье в ней сходится к среднему арифметическому этих производных.*

Заметим, что в условиях данной теоремы функция может быть разрывной.

Еще раз напомним, что $\sigma_n(x,f) = \frac{S_0(x,f)+\dots+S_{n-1}(x,f)}{n}$

Теорема. *Пусть f - непрерывная 2π-периодическая функция. Тогда $\sigma_n \to f$ на $[-\pi,\pi]$ в смысле метрики d_∞*

Теорема. *Пусть f - кусочно-непрерывная. Тогда ее можно приблизить тригонометрическим многочленом в смысле метрики d_2.*