

# Коллоквиум по Математическому анализу-2, семестр 2

Виноградова Дарья, Залялов Александр, Миронов Алексей, Стрельцов Артём, Шамаилов Гершон

## Содержание

- 1 Пространство кусочно-непрерывных функций на отрезке как пример евклидова пространства. Неравенство Коши-Буняковского на этом пространстве (б.д.). Ортогональные и ортонормированные системы в евклидовом пространстве. Главный пример:  $C([-π; π])$  4
- 2 Задача о наилучшем приближении элемента евклидова пространства элементом конечномерного пространства (б.д.). Ряд Фурье по произвольной ортонормированной системе. Ряд Фурье по тригонометрической системе. 5
- 3 Неравенство Бесселя (идея доказательства). Определения замкнутой и полной ортонормированных систем (ОНС). Тождество Парсеваля для замкнутой ОНС. 5
- 4 Бывают ли замкнутые ортонормированные системы, но не полные? 5
- 5 Дайте определение свертки двух функций  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Докажите, что операция свертки коммутативна. Дайте определение свертки двух  $2\pi$ -периодических функций  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . 5
- 6 Дайте определения ядра Дирихле и ядра Фейера. Какой смысл у свертки произвольной периодической функции с этими ядрами? (б.д.) 6
- 7 Сформулируйте (б.д.) теоремы о приближении  $2\pi$  периодической функции тригонометрическими многочленами: о сходимости ядра Фурье в точке, и о приближении функции тригонометрическими многочленами в различных функциональных метриках. 6
- 8 Сформулируйте (б.д.) лемму Римана. Какова связь между порядком дифференцируемости  $2\pi$ -периодической функции и асимптотикой ее коэффициентов Фурье? Ответ поясните. 6
- 9 Дайте определение преобразования Фурье для функции  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , приведите пример вычисления преобразования Фурье. Пусть  $f \in L_1(\mathbb{R})$ . Сформулируйте основную теорему об образе преобразования Фурье. 7
- 10 Что вы можете сказать о функции  $\hat{f}$ , если (1)  $f$  четная и вещественнозначная (2)  $f$  нечетная и вещественнозначная. 7
- 11 Дайте определение интеграла Фурье и обратного преобразования Фурье. Сформулируйте и докажите теорему о свертке. Чему равно преобразование Фурье от произведения двух функций? 7
- 12 Выведите формулу для производной  $\hat{f}(y)$ . Какова связь дифференцируемости функции  $f(x)$  и асимптотики ее преобразования Фурье  $\hat{f}(y)$  при  $y \rightarrow \infty$  8
- 13 Сформулируйте и докажите равенство Планшереля для преобразования Фурье. 9
- 14 Дайте определение гладкого  $k$ -мерного подмногообразия в  $\mathbb{R}^n$  и сопутствующее определение гладких координат. Приведите пример параметрической кривой, которая параметрически задана дифференцируемыми функциями, но не является гладким 1-мерным многообразием в какой-нибудь точке 9

- 15 Сформулируйте теорему о неявной функции. Допустим кривая  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  задана уравнением  $f(x, y) = 0$ , и известно, что  $\text{grad}f(x_0, y_0) = (2; 0)$ . Какую из координат  $x, y$  можно использовать в качестве локальной координаты на  $X$  в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ ? 10
- 16 Сформулируйте общую теорему о неявном отображении. Допустим, кривая  $X \subseteq \mathbb{R}^3$  задана уравнениями  $f(x, y, z) = 0$ ,  $g(x, y, z) = 0$ , и известно, что  $\text{grad}f(x_0, y_0, z_0) = (2; 0; 0)$ ,  $\text{grad}g(x_0, y_0, z_0) = (0; 1; 3)$ . Какие из координат  $x, y, z$  можно использовать в качестве локальных координат на  $X$  в окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$ ? 11
- 17 Дайте определение касательного вектора к подмножеству  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  в точке  $A \in X$ . Как устроено множество всех касательных векторов к гладкому подмногообразию в фиксированной точке? 11
- 18 Допустим, что все точки множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  удовлетворяют уравнению  $f(x) = 0$ . Докажите, что в любой точке  $x^{(0)} \in X$  любой касательный вектор к  $X$  перпендикулярен градиенту  $\text{grad}f(x^{(0)})$ . Опишите касательное пространство к  $k$ -мерному подмногообразию  $\mathbb{R}^n$ , заданному системой неявных уравнений (без доказательства). 12
- 19 Необходимое и достаточное условия локального экстремума для функции нескольких переменных (без доказательства). 12
- 20 Дайте определение точки условного минимума 13
- 21 Сформулируйте теорему о множителях Лагранжа. Объясните идею доказательства в случае, если подмножество  $X \subset \mathbb{R}^n$  является гладким многообразием. 13
- 22 Сформулируйте достаточное условие в методе множителей Лагранжа. Объясните, как на практике проверять это условие (скажем, с помощью примера). 14
- 23 Сформулируйте теорему Каруша-Куна-Таккера. Объясните, в чём смысл условий дополняющей нежёсткости? 16
- 24 Дайте определение криволинейного интеграла 1-го рода и объясните, как такие интегралы вычисляются. 17
- 25 Дайте определение криволинейного интеграла 2-го рода и объясните, как такие интегралы вычисляются. 18
- 26 Объясните, почему криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от ориентации кривой, а криволинейный интеграл 2-го рода – зависит. 19
- 27 Сформулируйте формулу Грина и докажите её для области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  вида  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$  (прямоугольник). 19
- 28 Дайте определение элемента площади 2-мерной поверхности в  $\mathbb{R}^3$  и поверхностного интеграла 1-го рода 20
- 29 Дайте определение элемента  $k$ -мерного объёма  $k$ -мерного многообразия в  $\mathbb{R}^n$  и интеграла 1-го рода по  $k$ -мерному многообразию 21
- 30 Объясните, что такое гассманово умножение, гассмановы переменные, гассмановы мономы 21
- 31 Объясните, что такое дифференциальная форма ранга  $k$ , и как вычисляется интеграл (2-го рода) от  $k$ -формы  $\omega$  по  $k$ -мерному многообразию  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Запишите вычислительную формулу для поверхностного интеграла 2-го рода 21
- 32 Что такое ориентация  $k$ -мерного многообразия? Как изменится интеграл 2-го рода от дифференциальной формы при смене ориентации многообразия (б. д.)? 22
- 33 Дайте определение согласованных ориентаций многообразия и его границы. Дайте определение дифференциала от  $k$ -формы. Запишите общую формулу Стокса. 23

34 Выведите из общей формулы Стокса частные случаи: формулу Ньютона-Лейбница, формулу Грина, формулу Гаусса-Остроградского.

23

# Реклама

@applied\_memes  
@fcs\_channels

## 1 Пространство кусочно-непрерывных функций на отрезке как пример евклидова пространства. Неравенство Коши-Буняковского на этом пространстве (б.д.). Ортогональные и ортонормированные системы в евклидовом пространстве. Главный пример: $C([- \pi; \pi])$

Напомним, что евклидово пространство - это векторное пространство над полем вещественных чисел со скалярным произведением.

*Свойства скалярного произведения:*

1.  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
2.  $\langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v \rangle = \lambda_1 \langle u_1, v \rangle + \lambda_2 \langle u_2, v \rangle$
3.  $\langle v, v \rangle \geq 0$
- 3'.  $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$

Рассмотрим векторное пространство  $V = \hat{C}([a; b])$  - множество кусочно-непрерывных функций на  $[a; b]$  (имеющих конечное число точек разрыва первого рода), обладающих также следующим свойством:

$$f(c) = \frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow c-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow c+0} f(x) \right)$$

Определим на  $\hat{C}$  скалярное произведение  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$  и проверим свойства, чтобы показать его корректность.

1-3 очевидны. 3' сначала рассмотрим для непрерывной на отрезке функции. От противного: пусть на отрезке существует какая-то точка  $c$ , в которой функция принимает ненулевое значение. Тогда  $f^2(c) > 0$ . В силу непрерывности есть такая окрестность  $(c - \delta; c + \delta)$ , в которой  $f^2(x) \geq \epsilon > 0$ .

$$\int_a^b f^2(x) dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f^2(x) dx \geq 2\delta\epsilon > 0$$

Для  $\hat{C}$  отрезок разваливается на конечное число отрезков непрерывности, применим к ним предыдущее.

**Теорема.** (неравенство Коши-Буняковского)  $\langle f, g \rangle^2 \leq \langle f, f \rangle \cdot \langle g, g \rangle$

Для нашего пространства оно имеет вид

$$\int_a^b f^2(x)g^2(x)dx \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

**Определение.** Множество элементов  $\psi_i \in V$  называется *ортогональной* системой, если для любой пары  $\langle \psi_i, \psi_j \rangle = 0$ . Если при этом  $\|\psi_i\| = 1 \forall i$ , то система *ортонормирована*.

В  $C([- \pi; \pi])$  следующая система является ортонормированной:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots \right\}$$

Проверим норму на примере  $\cos$ :

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \right\| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2kx) + 1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = 1$$

Любая функция с  $\cos$  ортогональна любой с  $\sin$  в силу нечетности. Проверим ортогональность двух функций с  $\cos$ :

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(lx) \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((k+l)x) + \cos((k-l)x)) dx = 0$$

Остальное оставим в качестве упражнения для пытливого читателя.

## 2 Задача о наилучшем приближении элемента евклидова пространства элементом конечномерного пространства (б.д.). Ряд Фурье по произвольной ортонормированной системе. Ряд Фурье по тригонометрической системе.

Пусть имеется ортонормированная система  $\{\psi_i\}$  в векторном пространстве  $V$ . Хотим найти наилучшее приближение элемента  $f$  этого пространства вида  $\sum c_k \psi_k$  (т.е.  $\|f - \sum c_k \psi_k\| \rightarrow \min$ ). Утверждается, что  $c_k = \langle f, \psi_k \rangle$ .

**Определение.** Ряд Фурье по произвольной ортонормированной системе  $\{\psi_i\}$  - это сумма вида  $\sum c_k \psi_k$

**Определение.** Ряд Фурье по тригонометрической системе - это сумма вида  $\frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum \frac{f_k}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) + \frac{\hat{f}_k}{\sqrt{\pi}} \sin(kx)$ , где  $f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ ,  $f_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$ ,  $\hat{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$

Обычно ряд Фурье записывают как  $\frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ ,

где  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ ,  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$ ,  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$

## 3 Неравенство Бесселя (идея доказательства). Определения замкнутой и полной ортонормированных систем (ОНС). Тождество Парсеваля для замкнутой ОНС.

**Теорема.** (неравенство Бесселя)  $\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, \psi_i \rangle^2 \leq \|f\|^2$ , где  $f$  - элемент векторного пространства  $V$  с ортонормированной системой  $\{\psi_i\}$ . Далее  $f_i = \langle f, \psi_i \rangle$

**Доказательство.**  $0 \leq \|f - \sum_{i=1}^n \langle f, \psi_i \rangle \psi_i\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n \|\langle f, \psi_i \rangle \psi_i\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n f_i^2$

$\sum_{i=1}^n f_i^2$  ограничена сверху  $\|f\|^2 \Rightarrow$  сходится. Переходим к пределу, получаем требуемое.  $\square$

**Определение.** Ортонормированная система замкнута, если  $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \exists c_1, \dots, c_n \|f - \sum_{i=1}^n c_k \psi_k\| < \epsilon$

**Определение.** Ортонормированная система полная, если  $[\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow f \perp \psi_k] \Rightarrow f \equiv 0$

**Теорема.** (тождество Парсеваля) Для замкнутой ортонормированной системы  $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 = \|f\|^2$

**Доказательство.** Зафиксируем  $\epsilon$ . Из определения замкнутости  $\exists n \in \mathbb{N} \exists c_1, \dots, c_n \|f - \sum_{i=1}^n c_k \psi_k\| < \epsilon$ .

Из неравенства Бесселя  $\|f\|^2 - \sum_{i=1}^n f_i^2 \leq \|f - \sum_{i=1}^n c_k \psi_k\|^2 \leq \epsilon^2$ .

Тогда для  $m \geq n$  и подавно  $\|f\|^2 - \sum_{i=1}^m f_i^2 \leq \|f - \sum_{i=1}^n c_k \psi_k\|^2 \leq \epsilon^2$

Значит,  $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall m \geq n \|f\|^2 - \sum_{i=1}^m f_i^2 \leq \epsilon^2$ , и из этого и следует равенство в пределе.  $\square$

## 4 Бывают ли замкнутые ортонормированные системы, но не полные?

Не бывает. Пусть  $\forall i f \perp \psi_i$ . Значит,  $f_i = 0$ . В силу замкнутости справедливо тождество Парсеваля. то есть  $\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 = 0$

## 5 Дайте определение свертки двух функций $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Докажите, что операция свертки коммутативна. Дайте определение свертки двух $2\pi$ -периодических функций $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение.** Сверткой функций  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется  $(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(t-x)dx$

**Теорема.**  $(f * g) \equiv (g * f)$

**Доказательство.** Положим  $\tau = t - x$ .

$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(t-x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$  - область интегрирования не поменялась, а функция домножилась на модуль якобиана замены. В данном случае он равен 1.  $\square$

**Определение.** Сверткой  $2\pi$ -периодических функций  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется  $(f * g)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(t-x)dx$

## 6 Дайте определения ядра Дирихле и ядра Фейера. Какой смысл у свертки произвольной периодической функции с этими ядрами? (б.д.)

**Определение.** Ядром Дирихле называется  $D_n(t) = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})t]}{2\sin\frac{t}{2}}$

Обозначим  $S_n(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ , где  $f$  -  $2\pi$ -периодическая и интегрируемая на  $[-\pi; \pi]$ .

Тогда справедливо  $S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt$  - то есть свертка с ядром Дирихле дает нам  $n$ -ю частичную сумму ряда Фурье.

**Определение.** Ядром Фейера называется  $\Phi_n(t) = \frac{\sin^2(\frac{tn}{2})}{2\sin^2\frac{t}{2}}$

Обозначим  $\sigma_n(x, f) = \frac{S_0(x, f) + \dots + S_{n-1}(x, f)}{n}$  - среднее арифметическое ряда Фурье.

Для  $f$  с теми же свойствами будет верно  $\sigma_n(x, f) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t)dt$

## 7 Сформулируйте (б.д.) теоремы о приближении $2\pi$ периодической функции тригонометрическими многочленами: о сходимости ядра Фурье в точке, и о приближении функции тригонометрическими многочленами в различных функциональных метриках.

**Теорема.** Если  $2\pi$ -периодическая функция имеет в точке производную слева и справа, то ряд Фурье в ней сходится к среднему арифметическому этих производных.

Заметим, что в условиях данной теоремы функция может быть разрывной.

Еще раз напомним, что  $\sigma_n(x, f) = \frac{S_0(x, f) + \dots + S_{n-1}(x, f)}{n}$

**Теорема.** Пусть  $f$  - непрерывная  $2\pi$ -периодическая функция. Тогда  $\sigma_n \rightarrow f$  на  $[-\pi, \pi]$  в смысле метрики  $d_\infty$

**Теорема.** Пусть  $f$  - кусочно-непрерывная. Тогда ее можно приблизить тригонометрическим многочленом в смысле метрики  $d_2$ .

## 8 Сформулируйте (б.д.) лемму Римана. Какова связь между порядком дифференцируемости $2\pi$ -периодической функции и асимптотикой ее коэффициентов Фурье? Ответ поясните.

**Лемма.** (Риман). Пусть  $f$  абсолютно интегрируема на промежутке  $(a, b)$ . Тогда

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(\omega x) dx = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(\omega x) dx = 0$$

**Теорема.** Если  $f$  интегрируемая и  $2\pi$ -периодическая, то ее коэффициенты  $a_n, b_n$  ряда Фурье стремятся к 0

**Теорема.** Пусть  $f$  -  $2\pi$ -периодическая и имеет  $s-1$  производную, а  $f^{(s-1)}$  - кусочно-гладкая. Тогда ряд Фурье для  $f^{(s)}$  получается  $s$ -кратным почленным дифференцированием ряда Фурье для  $f$ . При этом,  $a_n, b_n = \bar{o}\left(\frac{1}{k^s}\right)$  при  $k \rightarrow \infty$

Почему второе следствие верно? Интуитивно: чтобы выполнялась лемма Римана, требуется, чтобы коэффициенты стремились к 0. При дифференцировании  $s-1$  раз у нас столько же раз «вылезет»  $k$  из косинуса и синуса, поэтому, чтобы все еще выполнялась сходимость к 0, нужно, чтобы  $a_n, b_n = \bar{o}\left(\frac{1}{k^s}\right)$ .

**9** Дайте определение преобразования Фурье для функции  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , приведите пример вычисления преобразования Фурье. Пусть  $f \in L_1(\mathbb{R})$ . Сформулируйте основную теорему об образе преобразования Фурье.

**Определение.** Пусть  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Если выражение

$$\hat{f}(y) = F[f](y) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy} dx$$

определено для всех  $y \in \mathbb{R}$ , то  $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  называется преобразованием Фурье.

Например, пусть  $f(x) = I_{[-1,1]}(x)$ . Тогда

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_{[-1,1]}(x)e^{ixy} dx = \int_{-1}^1 e^{ixy} dx = \int_{-1}^1 \cos(xy) dx + i \int_{-1}^1 \sin(xy) dx = \frac{\sin(xy)}{y} \Big|_{-1}^1 = 2 \frac{\sin y}{y}$$

**Определение.**  $L_1(\mathbb{R})$  – пространство функций, абсолютно интегрируемых на  $\mathbb{R}$ .

**Теорема.** (Основная теорема об образе Фурье) Если  $f \in L_1(\mathbb{R})$ , то

1. Функция  $\hat{f}$  корректно определена.
2. Функция  $\hat{f}$  непрерывна.
3.  $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(y) = 0$

**10** Что вы можете сказать о функции  $\hat{f}$ , если (1)  $f$  четная и вещественнозначная (2)  $f$  нечетная и вещественнозначная.

**Лемма.** 1. Если  $f$  – четная, то  $F[f]$  – четная и вещественнозначная.

2. Если  $f$  – нечетная, то  $F[f]$  – нечетная мнимозначная

*Доказательство.* Напрямую следует из того, что

$$F[f](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(xy) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(xy) dx$$

Если  $f$  четная, то второй слагаемое зануляется, тогда Фурье-образ вещественнозначный и четный (не забываем, что четность смотрим по  $y$ , а не по  $x$ ). Аналогично, если  $f$  нечетная, то зануляется первое, а Фурье-образ будет нечетный и мнимозначный.  $\square$

**11** Дайте определение интеграла Фурье и обратного преобразования Фурье. Сформулируйте и докажите теорему о свертке. Чему равно преобразование Фурье от произведения двух функций?

**Определение.** Интегралом Фурье от функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  в точке  $x$  называется выражение

$$\frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)e^{-ixy} dy$$

**Определение.** Пусть  $f$  дифференцируемая функция, тогда преобразование

$$\hat{f}(y) \mapsto f(x) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)e^{-ixy} dy$$

называется обратным преобразованием Фурье.

**Теорема.** (О свертке) Если  $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ , то  $F(f \star g) = F[f] \cdot f[g]$ .

*Доказательство.*

$$F[f \star g](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f - g)(x) e^{ixy} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) g(x-s) ds \right) e^{ixy} dx$$

Благодаря абсолютной интегрируемости, можем поменять порядки интегрирования, а следовательно, просто в виде кратного:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(s) g(x-s) e^{ixy} dx ds = \left[ \begin{array}{l} u = s \\ v = x - s \\ dx ds = du dv \end{array} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{iuy} du \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) e^{ivy} dv = F[f] \cdot F[g].$$

Аналогично можно доказать для обратного преобразования. □

**Теорема.**  $F[f \cdot g] = \frac{1}{2\pi} F[f] \star F[g]$

## 12 Выведите формулу для производной $\hat{f}(y)$ . Какова связь дифференцируемости функции $f(x)$ и асимптотики ее преобразования Фурье $\hat{f}(y)$ при $y \rightarrow \infty$

**Утверждение.** Пусть  $f(x)$  такова, что  $f(x)(1+|x|)^k \in L_1(\mathbb{R})$ . Тогда  $\hat{f} = F[f]$  дифференцируема  $k$  раз, причем производные  $\hat{f}$  можно вычислить дифференцированием под знаком интеграла.

*Доказательство.* Это следует из теорем прошлого семестра (что можно дифференцировать по параметру, в нашем случае по  $y$ , под знаком интеграла, если есть равномерная сходимость по  $x$ ).

$$F[f](y) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy} dx$$

$\forall m \leq k$  верно

$$\left| f(x) e^{ixy} (ix)^m \right| \leq |f(x)| (1+|x|)^m$$

В левой части стоит просто продифференцированное  $m$  раз подынтегральное выражение в преобразовании Фурье. Неравенство следует из ограниченности  $|e^{ixy} \cdot i^m| \leq 1$ . В правой части стоит функция, интегрируемая на  $\mathbb{R}$  (по условию).

При этом левая часть сходится равномерно по  $y$ . Значит, можем пользоваться теоремой из прошлого семестра:

$$\frac{d^m}{dy^m} \hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy} (ix)^m dx$$

Отсюда же получаем формулу:

$$\frac{d^m}{dy^m} F[f](y) = F[(ix)^m f(x)]$$

□

**Утверждение.** Пусть  $f$  дифференцируема  $k$  раз во всех точках, причем  $f^{(m)} \in L_1(\mathbb{R})$  при  $m = 0, \dots, k$  и  $f^{(m)}(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  и  $m = 0, \dots, k$ , тогда  $\hat{f}(y) = o\left(\frac{1}{|y|^k}\right)$  при  $y \rightarrow \infty$

*Доказательство.* Запишем  $F[f^{(k)}]$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(x) e^{ixy} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} df^{(k-1)} = e^{ixy} f^{(k-1)}(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k-1)}(x) \cdot (iy) e^{ixy} dx = \left[ \begin{array}{l} \text{Далее аналогично.} \\ \text{Также пользуемся тем, что} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f^{(m)} = 0 \quad \forall m = 0, \dots, k \end{array} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy} (-1)^m (iy)^m dx = (-iy)^k F[f](y) = (-iy)^k \hat{f}(y) \end{aligned}$$



Также мы знаем, что если функция абсолютно интегрируемая, то ее Фурье-образ стремится к 0 (см. билет 9). Тогда

$$f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow \left| F[f^{(k)}](y) \right| = y^k F[f](y) \rightarrow 0 \Rightarrow \hat{f}(y) = \bar{o}\left(\frac{1}{|y^k|}\right)$$

P.S. И также, абсолютно аналогично с предыдущим пунктом выведем:

$$F\left[\frac{d^m}{dx^m} f(x)\right] = (-iy)^m F[f]$$

□

### 13 Сформулируйте и докажите равенство Планшереля для преобразования Фурье.

**Теорема.** (Равенство Планшереля) Пусть  $f, g \in L_1(\mathbb{R})$  ( $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ) и, кроме того,  $f'' \in L_1(\mathbb{R})$ , а также  $f(x), f'(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) \overline{\hat{g}(y)} dy$$

*Доказательство.* Функция дифференцируема, поэтому для нее работает формула обращения Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{-ixy} dy$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{ixy} dy \right) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{g(x)} \cdot e^{ixy} dx \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) \overline{\left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{ixy} dx \right)} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) \overline{\hat{g}(y)} dy \end{aligned}$$

□

### 14 Дайте определение гладкого $k$ -мерного подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ и сопутствующее определение гладких координат. Приведите пример параметрической кривой, которая параметрически задана дифференцируемыми функциями, но не является гладким 1-мерным многообразием в какой-нибудь точке

**Определение.** Подмножество  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  называется *гладким  $k$ -мерным (под)многообразием* в  $\mathbb{R}^n$ , если  $\forall x \in M$  существует окрестность  $U$ ,  $x \in U$ , такая что на  $M \cap U$  можно задать гладкие координаты.

**Определение.** *Гладкие координаты* — отображение  $\Phi: V \rightarrow M$ , где  $V \subseteq \mathbb{R}^k$ , задаваемое уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(t_1, \dots, t_k) \\ \vdots \\ x_n = \phi_n(t_1, \dots, t_k) \end{cases}$$

где  $(x_1, \dots, x_n)$  — координаты в  $\mathbb{R}^n$ ,  $(t_1, \dots, t_k)$  — координаты в  $\mathbb{R}^k$ , при этом  $(t_1, \dots, t_k) \in V$  тогда и только тогда, когда  $(x_1, \dots, x_n) \in M$ . При этом  $\phi_1, \dots, \phi_n$  дифференцируемы по каждой переменной и матрица частных производных невырождена.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial t_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial t_k} & \frac{\partial \phi_2}{\partial t_k} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial t_k} \end{pmatrix}$$

Ранг этой матрицы должен быть  $k$  в любой точке  $t \in V$  (то есть все строки должны быть линейно независимы).

**Пример:**

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

Обе функции дифференцируемые, но в точке  $t = 0$  обе производные обращаются в ноль. Поэтому кривая не гладкая.

**15 Сформулируйте теорему о неявной функции.** Допустим кривая  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  задана уравнением  $f(x, y) = 0$ , и известно, что  $\text{grad} f(x_0, y_0) = (2; 0)$ . Какую из координат  $x, y$  можно использовать в качестве локальной координаты на  $X$  в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ ?

**Теорема.** Пусть есть функция  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , для которой выполнены условия:

1.  $F$  определена и непрерывна в окрестности  $(x_0, y_0)$
2.  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$  и  $F'_y$  непрерывна в  $(x_0, y_0)$
3.  $F(x_0, y_0) = 0$ .

Тогда найдётся окрестность  $U_{\delta, \epsilon}(x_0, y_0) = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ y \in (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon) \end{array} \right\}$  и непрерывная функция  $f$  такая, что в  $U_{\delta, \epsilon}(x_0, y_0)$   $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$  (то есть можно выразить  $y$  от  $x$  в данной окрестности при выполненных выше условиях).

Если кроме всех условий выше  $F$  дифференцируема в  $U_{\delta, \epsilon}(x_0, y_0)$ , то  $f$  дифференцируема в  $U_\delta(x_0)$  и

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

**Задача:** проверяем условия теоремы, производная по  $x$  не равна нулю, а производная по  $y$  равна. Значит в качестве координаты можно взять  $y$ , а  $x$  — нельзя. Обратите внимание, координата — это не та переменная, по которой дифференцируем.

**16** Сформулируйте общую теорему о неявном отображении. Допустим, кривая  $X \subseteq \mathbb{R}^3$  задана уравнениями  $f(x, y, z) = 0$ ,  $g(x, y, z) = 0$ , и известно, что  $\text{grad} f(x_0, y_0, z_0) = (2; 0; 0)$ ,  $\text{grad} g(x_0, y_0, z_0) = (0; 1; 3)$ . Какие из координат  $x, y, z$  можно использовать в качестве локальных координат на  $X$  в окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$ ?

**Обозначения:**  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m)$ ,  $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ .

**Ещё обозначения:** если функции  $g_1, \dots, g_s$  зависят от  $t_1, \dots, t_r$ , то

$$\frac{D(g_1, \dots, g_s)}{D(t_1, \dots, t_r)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1} & \frac{\partial g_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial t_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_s}{\partial t_1} & \frac{\partial g_s}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial g_s}{\partial t_r} \end{pmatrix}$$

(по строкам матрицы записаны градиенты (да, в 14 билете градиенты были записаны по столбцам, но так Айз давал на той лекции)).

Разрешим теперь  $m$  уравнений относительно  $m$  неизвестных.

**Теорема.** Пусть

1.  $F_1(x, y), \dots, F_m(x, y)$  — непрерывно дифференцируемы в окрестности точки  $(x^{(0)}, y^{(0)})$  (здесь верхние индексы, чтобы не путать с координатами)
2.  $F_j(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$
3.  $\det \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \neq 0$

Тогда существует окрестность  $U_\delta(x^{(0)}) \times U_\epsilon(y^{(0)})$  и набор дифференцируемых функций  $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$ , таких что в этой окрестности

$$\{F_j(x, y) = 0\}_{j=1}^m \Leftrightarrow \{y_j = f_j(x)\}_{j=1}^m$$

при этом  $f_j(x^{(0)}) = y_j^{(0)}$ .

Более того,

$$\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_n)} \Big|_{x^{(0)}} = - \left( \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \right)^{-1} \Big|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \cdot \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(x_1, \dots, x_n)} \Big|_{x^{(0)}}$$

**Задача:** Запишем матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Видим, что линейно независимы первый и второй столбец, и первый и третий. Значит координатой может быть  $z$  или  $y$ . Обратите внимание, если матрица производных по  $x$  и  $y$  невырождена, то подходит как координата  $z$ .

**17** Дайте определение касательного вектора к подмножеству  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  в точке  $A \in X$ . Как устроено множество всех касательных векторов к гладкому подмногообразию в фиксированной точке?

**Определение.** Пусть  $x^{(0)} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ . Построим какую-нибудь кривую, которая целиком лежит в  $X$  и проходит через  $x^{(0)}$ . Пусть эта кривая задаётся параметрически  $x_i = \psi_i(s)$ ,  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ , и  $(\psi_1(s), \dots, \psi_n(s)) \in X \quad \forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$ , и  $(\psi_1(0), \dots, \psi_n(0)) = x^{(0)}$ . Тогда вектор  $(\frac{d\psi_1}{ds}(0), \dots, \frac{d\psi_n}{ds}(0))$  называется *касательным* к  $X$  в точке  $x^{(0)}$  (если такой вектор определён, конечно).

*Замечание.* Касательных векторов может быть бесконечно много, т. к. бесконечно много таких кривых.

Пусть  $X$  теперь — гладкое  $k$ -мерное многообразие и  $x_i = \phi_i(t_1, \dots, t_k)$  — гладкие координаты в окрестности точки  $x^{(0)} = \Phi(t^{(0)})$ . Тогда множество касательных векторов в точке  $x^{(0)}$  образует  $k$ -мерное векторное пространство (обозначается  $T_{x^{(0)}}X$ ), линейно порождённое следующими векторами

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial t_1}(t^{(0)}), \dots, \frac{\partial \phi_n}{\partial t_1}(t^{(0)}) \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial t_k}(t^{(0)}), \dots, \frac{\partial \phi_n}{\partial t_k}(t^{(0)}) \end{pmatrix}$$

*Замечание.* Эти векторы задают аффинное пространство, чтобы получить геометрическое касательное пространство, нужно сдвинуть  $T_{x^{(0)}}X$  в точку  $x^{(0)}$ .

**18 Допустим, что все точки множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  удовлетворяют уравнению  $f(x) = 0$ . Докажите, что в любой точке  $x^{(0)} \in X$  любой касательный вектор к  $X$  перпендикулярен градиенту  $\text{grad} f(x^{(0)})$ . Опишите касательное пространство к  $k$ -мерному подмногообразию  $\mathbb{R}^n$ , заданному системой неявных уравнений (без доказательства).**

Имеем  $\forall x \in X \ f(x) = 0$ . Тогда для любой кривой  $\{x_i = \phi_i(s)\} \subset X$  имеем  $f(\phi_1(s), \dots, \phi_n(s)) = 0$ . продифференцируем это по  $s$ , получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{f\phi_1}{ds} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{f\phi_n}{ds} = 0$$

$$< \text{grad} f(x^{(0)}), \text{ касательный вектор к } X \text{ в точке } x^{(0)} > = 0$$

Из того, что скалярное произведение равно нулю, следует, что градиент  $f$  перпендикулярен касательному вектору к множеству  $X$ .

Касательное пространство — ортогональное дополнение к линейной комбинации градиентов неявных уравнений.

**19 Необходимое и достаточное условия локального экстремума для функции нескольких переменных (без доказательства).**

**Определение.** Точка  $x^{(0)}$  функции  $f$  называется *стационарной*, когда  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0 \quad \forall i \in [1; n]$ .

Необходимое условие:

**Теорема.** Если  $f(x^{(0)})$  - локальный экстремум, то  $x^{(0)}$  — стационарная.

**Определение.** Матрицей Гессе называется симметричная квадратичная форма

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

**Определение.** Положительно определённой квадратичной формой называется такая, что все собственные значения положительны.

**Определение.** Отрицательно определённой квадратичной формой называется такая, что все собственные значения отрицательны.

**Теорема.** Теперь, пусть дана дважды дифференцируемая функция  $f(x_1, \dots, x_n)$ , пусть  $x^{(0)}$  — стационарная точка. Тогда:

- Если матрица Гессе положительно определена, то  $x^{(0)}$  — локальный минимум.
- Если матрица Гессе отрицательно определена, то  $x^{(0)}$  — локальный максимум.
- Если матрица Гессе имеет и положительные и отрицательные собственные значения, но при этом не вырождена, то  $x^{(0)}$  — не локальный экстремум.
- В остальных случаях  $x^{(0)}$  может как являться локальным экстремумом, так и не являться.

## 20 Дайте определение точки условного минимума

**Определение.** Точка  $x^{(0)}$  называется строгим условным минимумом функции  $f$  подмножества  $X \subset \mathbb{R}^n$ , если  $\forall x \in X \quad f(x) > f(x^{(0)})$ .

**Определение.** Точка  $x^{(0)}$  называется условным локальным минимумом функции  $f$  подмножества  $X \subset \mathbb{R}^n$ , если существует окрестность  $U(x^{(0)})$ , такая что  $\forall x \in U(x^{(0)}) \cap X \quad f(x) > f(x^{(0)})$ .

*Замечание.* Далее будем считать, что такое множество задаётся набором уравнений вида  $\phi(x) = 0$ .

## 21 Сформулируйте теорему о множителях Лагранжа. Объясните идею доказательства в случае, если подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ является гладким многообразием.

Пусть у нас есть задача вида

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \text{extr} \\ \phi_1(x) = 0 \\ \vdots \\ \phi_m(x) = 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \\ m < n \end{cases}$$

**Определение.** Функцией Лагранжа называется

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) &= f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \\ x &\in \mathbb{R}^n \\ \lambda &\in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

$\lambda$  называют множителями Лагранжа.

**Теорема.** Пусть  $x^{(0)}$  — точка условного локального экстремума в задаче выше, и пусть в окрестности точки  $x^{(0)}$   $X$  — гладкое многообразие. Тогда существуют такие  $\lambda^{(0)}$ , что точка  $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}) = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}) \in \mathbb{R}^{m+n}$  является стационарной для  $L(x, \lambda)$ .

То есть

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^{(0)}, \lambda^{(0)}) &= 0 \quad \forall i \in [1; n] \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x^{(0)}, \lambda^{(0)}) &= 0 \quad \forall i \in [1; m] \end{aligned}$$

Второе в силу линейности по  $\lambda$  эквивалентно  $g_i(x^{(0)}) = 0$ , что означает, что  $x^{(0)} \in X$ .  
Посмотрим теперь на первое

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} (f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)) = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \end{pmatrix} - \dots - \lambda_m \begin{pmatrix} \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Это значит, что

$$\text{grad} f = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{grad} g_i$$

Так как, все наши переходы были равносильными, нам осталось доказать, что найдутся такие  $\lambda$ , то есть, что  $\text{grad} f$  является линейной комбинацией  $\text{grad} g_i$  в данной точке.

Поскольку  $X$  гладкая в точке  $x^{(0)}$ , будем предполагать, что  $X$  удовлетворяет условию теоремы о неявном отображении, то есть градиенты  $\text{grad} g_i$  линейно независимы. Без ограничения общности будем считать  $x^{(0)} \in X \subset \mathbb{R}^n$  — точка условного локального минимума. Тогда, если возьмём какую-нибудь кривую  $\{x_i = \phi(t)\} \subseteq X$ , такую, что  $\phi_i(0) = x_i^{(0)}$ , то на ней это также будет точка локального минимума, запишем касательный вектор

$$u = \left( \frac{d\phi_1}{dt}(0), \dots, \frac{d\phi_n}{dt}(0) \right) \in T_{x^{(0)}} X$$

Функция  $\alpha(t) = f(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))$  имеет в  $t = 0$  локальный минимум. По теореме Ферма  $\frac{d\alpha}{dt}(0) = 0$ . А это

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}) \cdot \frac{d\phi_1}{dt}(0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^{(0)}) \cdot \frac{d\phi_n}{dt}(0) = \langle \text{grad} f(x^{(0)}), u \rangle = 0$$

Таким образом, градиент целевой функции в точки экстремума перпендикулярен любому касательному вектору  $u \in T_{x^{(0)}} X$ , то есть  $\text{grad} f(x^{(0)}) \perp T_{x^{(0)}} X$ . А это значит, что этот градиент лежит в ортогональном дополнении

$$\text{grad} f(x^{(0)}) \in (T_{x^{(0)}} X)^\perp = \langle \text{grad} g_1(x^{(0)}), \dots, \text{grad} g_m(x^{(0)}) \rangle$$

А раз  $\text{grad} f(x^{(0)})$  лежит в линейной оболочке  $\text{grad} g_i(x^{(0)})$ , то он является их линейной комбинацией.

## 22 Сформулируйте достаточное условие в методе множителей Лагранжа. Объясните, как на практике проверять это условие (скажем, с помощью примера).

*Замечание.* Пусть  $Q = Q(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j$  — квадратичная форма на  $\mathbb{R}^n = V$ . Пусть  $W \subset V$  — векторное подпространство. Тогда определена операция ограничения  $Q$  на подпространство  $W$ :  $Q|_W$

**Теорема. Достаточное условие локального условного экстремума.**

Пусть  $X = \{g_i(x) = 0 \mid i = 1, \dots, m\} \subset \mathbb{R}^n$  в точке  $x^{(0)} \in X$  является гладким многообразием и  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — целевая функция (та, которую хотим оптимизировать на этом многообразии). Ограничим квадратичную форму  $d^2 L$  на касательное пространство к  $X$  в точке  $x^{(0)}$ :

$$d^2 L(x^{(0)}, \lambda^{(0)})|_{T_{x^{(0)}} X}$$

Допустим, в точке  $x^{(0)}$  выполнены условия Лагранжа:

$$\text{grad} f|_{x^{(0)}} = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(0)} \text{grad} g_i|_{x^{(0)}} \text{ и } g_i(x^{(0)}) = 0$$

Тогда:

- Если квадратичная форма положительно определена при этом ограничении, то  $x^{(0)}$  – точка условного локального минимума для  $f$ ;
- Если квадратичная форма отрицательно определена при этом ограничении, то  $x^{(0)}$  – точка условного локального максимума для  $f$ ;
- Если квадратичная форма знаконеопределённая при этом ограничении, то  $x^{(0)}$  не является точкой условного локального экстремума для  $f$ ;
- Если квадратичная форма неотрицательно или неположительно определена при этом ограничении, то теорема ничего не говорит о точке  $x^{(0)}$ .

**Пример 1.** Оптимизируем  $f = 3x + 4y$  на окружности  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Запишем функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = 3x + 4y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2\lambda x + 3 = 0 \\ -2\lambda y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{3}{2\lambda} \\ y = \frac{4}{2\lambda} \\ \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{4}{2\lambda}\right)^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \frac{5}{2} \\ x_1 = \frac{3}{5} \\ y_1 = \frac{4}{5} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \lambda_2 = -\frac{5}{2} \\ x_2 = -\frac{3}{5} \\ y_2 = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Исследуем точку  $(x_1, y_1)$  при помощи условия второго порядка:

$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2 + L''_{x\lambda}dxd\lambda + L''_{y\lambda}dyd\lambda + L''_{\lambda\lambda}d\lambda^2$$

Заметим, что  $L''_{\lambda\lambda}d\lambda^2 = 0$ , т.к.  $L$  линейна по  $\lambda$  (это верно всегда, а не только в этом примере). Теперь найдём полный дифференциал условия:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow d(x^2 + y^2 - 1) = d0 \Rightarrow 2xdx + 2ydy = 0$$

Также заметим, что  $L''_{x\lambda} = -g'_x$ ,  $L''_{y\lambda} = -g'_y$ . Тогда:

$$L''_{x\lambda}dxd\lambda + L''_{y\lambda}dyd\lambda = d\lambda(g'_x dx + g'_y dy) = d\lambda dg = 0 \text{ (это верно всегда)}$$

Вычислим  $d^2L$  в точке  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{2})$ :

$$d^2L(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{2}) = -5dx^2 - 5dy^2$$

Видим, что, без всякого ограничения, квадратичная форма  $d^2L$  в нужной точке отрицательно определена  $\Rightarrow$  при ограничении форма  $d^2L|_{T_{(x_1, y_1)}X}$  тоже определена отрицательно  $\Rightarrow (x_1, y_1)$  – точка локального максимума. Вторая точка исследуется аналогично.

**Пример 2.** Оптимизируем  $f = 2x^2 - y^2$  при условии  $e^y - \sin x - 1 = 0$ . Запишем функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = 2x^2 - y^2 - \lambda(e^y - \sin x - 1)$$

Найдём стационарные точки (аналогично примеру 1):

$$\begin{cases} 4x + \lambda \cos x = 0 \\ -2y - \lambda e^y = 0 \\ e^y - \sin x - 1 = 0 \end{cases}$$

Исследуем решение  $(x_0, y_0, \lambda_0) = (0, 0, 0)$  при помощи условия второго порядка:

$$d^2L = (4 - \lambda \sin x)dx^2 + (-2 - \lambda e^y)dy^2$$

Подставим точку  $(0, 0, 0)$ :

$$d^2L = 4dx^2 - 2dy^2 - \text{знаконеопределённая квадратичная форма}$$

Необходимо исследовать ограничение  $d^2L|_{T_{x_0, y_0}X}$ . Возьмём полный дифференциал от уравнения связи:

$$dg = d(e^y - \sin x - 1) = e^y dy - \cos x dx = 0$$

Подставим точку  $(0, 0)$ :

$$dg(0, 0) = dy - dx = 0 \Rightarrow dy = dx$$

Таким образом, «ограничить  $d^2L$  на  $T_{x(0)}X$  означает «подставить в  $d^2L$  линейные соотношения на дифференциалы, полученные из уравнения  $dg = 0$ ». Подставим в  $4dx^2 - 2dy^2$  уравнение  $dy = dx$ :

$$d^2L|_{T_{(x_0, y_0)}X} = 2dx^2 > 0 \Rightarrow (0, 0) - \text{точка условного локального минимума.}$$

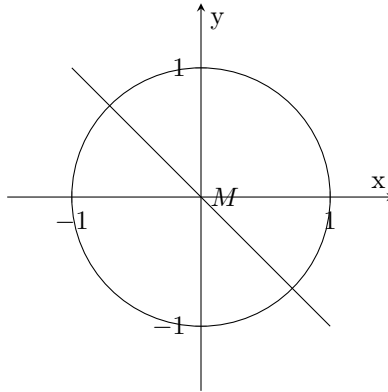
## 23 Сформулируйте теорему Каруша-Куна-Таккера. Объясните, в чём смысл условий дополняющей нежёсткости?

*Мотивация.* Помимо задач с ограничениями типа равенств, часто встречаются задачи с ограничениями типа неравенств. Например, вместо окружности  $x^2 + y^2 = 1$  нужно исследовать круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Такие задачи называются задачами нелинейного программирования. Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , тогда сформулируем задачу:

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \text{extr} \\ g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \text{ (} m \text{ может быть больше } n \text{)} \end{cases}$$

**Пример.**

$$\begin{cases} f(x, y) \rightarrow \text{extr} \\ g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ g_2(x, y) = -x - y \leq 0 \end{cases}$$



Пусть  $M$  — множество, которое задаётся ограничениями  $g_i$ . Разбор случаев (при помощи метода множителей Лагранжа):

1. Кандидатов в точки экстремума внутри  $M$ :

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ g_1 < 0 \\ g_2 < 0 \end{cases}$$

2. Кандидаты на дуге окружности:

$$\begin{cases} f'_x - \lambda_1 (g_1)'_x = 0 \\ f'_y - \lambda_1 (g_1)'_y = 0 \\ g_1 = 0 \\ g_2 < 0 \end{cases}$$



3. Кандидаты на отрезке внутри круга:

$$\begin{cases} f'_x - \lambda_2(g_2)'_x = 0 \\ f'_y - \lambda_2(g_2)'_y = 0 \\ g_2 = 0 \\ g_1 < 0 \end{cases}$$

4. Кандидаты на пересечении окружности и прямой:

$$\begin{cases} f'_x - \lambda_1(g_1)'_x - \lambda_2(g_2)'_x = 0 \\ f'_y - \lambda_1(g_1)'_y - \lambda_2(g_2)'_y = 0 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{cases}$$

Далее во всех полученных кандидатах вычисляем целевую функцию.

**Теорема. Каруша-Куна-Таккера (простая версия для задачи с ограничениями типа неравенств).**

Допустим, что  $x^{(0)}$  – решение задачи  $\begin{cases} f(x) \rightarrow \text{extr} \\ g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \end{cases}$

Пусть  $L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$  – функция Лагранжа. Тогда в точке  $x^{(0)}$  выполнено:

$$\begin{cases} L'_{x_j} = 0, j = 1, \dots, n \\ g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \\ \lambda_i g_i(x) = 0, i = 1, \dots, m - \text{условия дополняющей нежёсткости} \end{cases}$$

*Замечание.* В чём смысл условий дополняющей нежёсткости?

Если  $\lambda_i > 0$ , то соответствующее ограничение  $g_i(x) \leq 0$  в решении задачи выполняется как равенство  $g_i(x) = 0$  (т.е. это ограничение «активно»).

Если же  $g_i(x) < 0$ , то соответствующий множитель Лагранжа  $\lambda_i$  должен быть равен нулю, и это ограничение не участвует в функции Лагранжа.

## 24 Дайте определение криволинейного интеграла 1-го рода и объясните, как такие интегралы вычисляются.

Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  и  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная функция,  $\gamma \subset U$  – кривая и  $\gamma = \{x_j = \varphi_j(t) | j = 1, \dots, n, t \in [a, b]\}$ . Пусть  $(\tau, c)$  – размеченное разбиение отрезка  $[a, b]$ , т.е.  $\tau = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b)$ ,  $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ .

**Определение.**  $|\tau| = \max_i (t_i - t_{i-1})$  – диаметр разбиения  $\tau$ .

*Замечание.* Более общее определение:  $|\tau| = \max_i (d_2(\varphi[t_i], \varphi[t_{i-1}]))$ , где  $d_2$  – евклидова метрика.

**Определение.** Определим интегральную сумму (1-го рода) по кривой  $\gamma$ :

$$S_{\tau, f, \gamma}^I = \sum_{i=1}^m f[\varphi(c_i)] \Delta l_i$$

$$\Delta l_i = d_2(\varphi(t_i), \varphi(t_{i-1})) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1}))^2}$$

**Определение.** Предел  $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} S_{\tau, f, \gamma}^I = \int_{\gamma} f(x_1, \dots, x_n) dl$  называется криволинейным интегралом 1-го рода от функции  $f$  по кривой  $\gamma$ .

*Замечание.*  $\int_{\gamma} f(x_1, \dots, x_n) dl$  не зависит от параметризации кривой  $\gamma$ .

*Замечание.*  $dl$  называется элементом длины кривой. По теореме Пифагора:

$$dl = \sqrt{(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2} = [x_j = \varphi_j(t)] = \sqrt{(\varphi_1'(t)dt)^2 + \dots + (\varphi_n'(t)dt)^2} = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \dots + \varphi_n'(t)^2} dt$$

**Утверждение.** Пусть  $\gamma$  задана параметрически:  $x_j = \varphi_j(t), t \in [a, b]$  и  $\varphi_j \in C^1([a, b])$ . Тогда:

$$\int_{\gamma} f(x_1, \dots, x_n) dl = \int_a^b f[\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)] \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \dots + \varphi_n'(t)^2} dt$$

**Пример.**

$$\int_{\gamma} 1 dl = \int_a^b \sqrt{\sum_i (\varphi_i')^2} dt - \text{длина кривой.}$$

## 25 Дайте определение криволинейного интеграла 2-го рода и объясните, как такие интегралы вычисляются.

Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  и  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная функция,  $\gamma \subset U$  – кривая и  $\gamma = \{x_j = \varphi_j(t) | j = 1, \dots, n, t \in [a, b]\}$ . Пусть  $(\tau, c)$  – размеченное разбиение отрезка  $[a, b]$ , т.е.  $\tau = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b), c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ .

*Мотивация.* Хотим определить  $\int_{\gamma} f(x_1, \dots, x_n) dx_1$ .

**Определение.** Определим интегральную сумму (2-го рода) по кривой  $\gamma$ :

$$S_{\tau, f, \gamma}^{II, x_1} = \sum_{i=1}^m f[\varphi(c_i)] \Delta x_1$$

$$\Delta x_1 = \varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1})$$

**Определение.** Предел  $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} S_{\tau, f, \gamma}^{II, x_1} = \int_{\gamma} f(x_1, \dots, x_n) dx_1$  называется криволинейным интегралом 2-го рода от функции  $f$  по кривой  $\gamma$  по переменной  $x_1$ .

*Замечание.*  $\int_{\gamma} f(x_1, \dots, x_n) dx_1$  «почти» (т.е. с точностью до знака) не зависит от параметризации кривой  $\gamma$ .

*Замечание.*  $dx_1 = d\varphi_1(t) = \varphi_1'(t) dt$

**Утверждение.** Пусть  $\gamma$  задана параметрически:  $x_j = \varphi_j(t), t \in [a, b]$  и  $\varphi_j \in C^1([a, b])$ . Тогда:

$$\int_{\gamma} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 = \int_a^b f[\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)] \varphi_1'(t) dt$$

Аналогично определяются интегралы по любой другой координате.

**Пример.**

$$\int_{\gamma} 1 dx_1 = \int_a^b \varphi_1'(t) dt = \int_a^b d(\varphi_1(t)) = \varphi_1(b) - \varphi_1(a) - \text{полное изменение первой координаты при движении по кривой.}$$

*Замечание.* Более общо, можно брать интегралы от выражений вида  $P_1(x_1, \dots, x_n) dx_1 + P_2(x_1, \dots, x_n) dx_2 + \dots + P_n(x_1, \dots, x_n) dx_n = \omega$ :

$$\int_{\gamma} \omega := \int_{\gamma} P_1 dx_1 + \dots + \int_{\gamma} P_n dx_n = \int_a^b [P_1(\varphi(t)) P_1' + P_n(\varphi(t)) P_n'] dt$$

**Определение.** Выражения вида  $P_1(x_1, \dots, x_n) dx_1 + P_2(x_1, \dots, x_n) dx_2 + \dots + P_n(x_1, \dots, x_n) dx_n$  называются дифференциальными 1-формами (или формами ранга 1).

**Определение.** Выражения вида  $\int_{\gamma} \omega$  называются интегралами 2-го рода от 1-формы  $\omega$  по кривой  $\gamma$ .

## 26 Объясните, почему криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от ориентации кривой, а криволинейный интеграл 2-го рода – зависит.

**Определение.** Предел  $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} S_{\tau, f, \gamma}^I = \int_{\gamma} f(x_1, \dots, x_n) dl$  называется криволинейным интегралом 1-го рода от функции  $f$  по кривой  $\gamma$ .

*Замечание.*  $dl$  называется элементом длины кривой. По теореме Пифагора:

$$dl = \sqrt{(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2} = [x_j = \varphi_j(t)] = \sqrt{(\varphi_1'(t)dt)^2 + \dots + (\varphi_n'(t)dt)^2} = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \dots + \varphi_n'(t)^2} dt$$

**Определение.** Предел  $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} S_{\tau, f, \gamma}^{II} = \int_{\gamma} f(x_1, \dots, x_n) dx_1$  называется криволинейным интегралом 2-го рода от функции  $f$  по кривой  $\gamma$  по переменной  $x_1$ .

*Замечание.*  $dx_1 = d\varphi_1(t) = \varphi_1'(t)dt$

При изменении направления обхода интеграл 2-го рода меняет знак, а интеграл 1-го рода не меняет знак. Почему? Заметим следующее: в интегралах 2-го рода стоят выражения  $dx_1, \dots, dx_n$ , которые меняют знак при изменении направления обхода, а элемент длины  $dl = \sqrt{(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2}$  не зависит от знаков выражений  $dx_1, \dots, dx_n$ .

*Замечание.* Подробнее про смену знака  $dx_i$  (из билета 25).

Определим интегральную сумму (2-го рода) по кривой  $\gamma$ :

$$S_{\tau, f, \gamma}^{II, x_1} = \sum_{i=1}^m f[\varphi(c_i)] \Delta x_1$$

$$\Delta x_1 = \varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1})$$

Видим, что  $\Delta x_i$  в определении интегральной суммы зависит от порядка обхода сегментов разбиения.

## 27 Сформулируйте формулу Грина и докажите её для области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ вида $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ (прямоугольник).

**Теорема.** Формула Грина.

Пусть  $U \subset \mathbb{R}^2$  – связное подмножество, ограниченное кусочно-гладкой кривой  $\partial U = \Gamma$  (граница множества  $U$ ). Зафиксируем ориентацию на  $\Gamma$ , обход вдоль которой всегда оставляет область  $U$  слева. Пусть функции  $P(x, y), Q(x, y)$  дифференцируемы в некоторой окрестности  $U$ . Тогда верно следующее:

1.

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx = \iint_U -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

2.

$$\int_{\Gamma} Q(x, y) dy = \iint_U \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

3.

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_U \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \text{формула Грина}$$

*Доказательство.* План:

1. Докажем формулу 1.
2. Формула 2 доказывается аналогично при помощи замены  $x \leftrightarrow y$ .
3. Формула 3 суть сумма формул 1 и 2.

Будем предполагать, что  $U = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , т.е.  $U$  – прямоугольник.

$\Gamma = \partial U = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ , где  $\Gamma_1, \Gamma_2$  – горизонтальные отрезки ( $y = c, y = d$ ), а  $\Gamma_3, \Gamma_4$  – вертикальные отрезки. Тогда:

$$\int_{\Gamma} P dx = \int_{\Gamma_1} P dx + \int_{\Gamma_2} P dx + \int_{\Gamma_3} P dx + \int_{\Gamma_4} P dx$$

Заметим, что  $\int_{\Gamma_3} P dx + \int_{\Gamma_4} P dx = 0$ , т.к. на вертикальных отрезках выполнено, что  $x = const \Rightarrow dx = 0$ .

Параметризуем:  $\Gamma_1 = \begin{cases} x = t \\ y = c \end{cases} \quad t \in [a, b], \Gamma_2 = \begin{cases} x = t \\ y = d \end{cases} \quad t \in [b, a]$ . Интегрируем по определению:

$$\int_a^b P(t, c) dt - \int_a^b P(t, d) dt = \int_a^b [P(t, c) - P(t, d)] dt = \star$$

Заметим, что подынтегральное выражение равно (по формуле Ньютона-Лейбница):

$$\int_d^c \frac{\partial P}{\partial y}(t, s) ds = - \int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(t, s) ds$$

Подставим:

$$\star = - \int_a^b \left[ \int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(t, s) ds \right] dt = [\text{Переходим к кратному интегралу}] = - \iint_U \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

□

## 28 Дайте определение элемента площади 2-мерной поверхности в $\mathbb{R}^3$ и поверхностного интеграла 1-го рода

Пусть имеется двумерная поверхность  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  и у неё зафиксирована параметризация  $\varphi : M \rightarrow \Omega, M \subseteq \mathbb{R}^2$ . Будем обозначать координаты в  $\mathbb{R}^3$  как  $(x, y, z)$ , а в  $\mathbb{R}^2$  – как  $(u, v)$ . Неформально говоря, элементом площади в точке поверхности называется площадь бесконечно малого параллелограмма со сторонами, направленными параллельно касательным векторам в этой точке. Можно провести аналогию с одномерными интегралами, где мы приближаем функцию с помощью ломаной с маленькими звеньями, и сказать, что мы приближаем поверхность маленькими чешуйками в форме параллелограммов. Запишем теперь формулу для элемента площади в точке  $(u, v)$

$$dS = S(P(\varphi'_u(u, v), \varphi'_v(u, v))) du dv;$$

Здесь  $\varphi'_u, \varphi'_v$  – трёхмерные векторы (так как  $\varphi$  имеет три координаты), именно они являются касательными в данной точке;  $P$  – параллелограмм, натянутый на векторы;  $S$  – площадь. Из линейной алгебры мы знаем, что площадь параллелограмма можно считать как корень из определителя матрицы Грама его сторон. Это даёт нам новую формулу для элемента площади.

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv;$$

Здесь  $E = \langle \varphi'_u, \varphi'_u \rangle = \|\varphi'_u\|^2, G = \langle \varphi'_v, \varphi'_v \rangle = \|\varphi'_v\|^2, F = \langle \varphi'_u, \varphi'_v \rangle$ .

Теперь мы можем естественным образом определить поверхностный интеграл 1-го рода от функции  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  по  $\Omega$ .

$$\iint_{\Omega} f(x, y, z) dS := \iint_M f(\varphi(u, v)) \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} du dv;$$

Здесь мы опираемся на параметризацию при определении интеграла. Можно проверить, что при смене параметризации значение интеграла 1-го рода не изменится.

## 29 Дайте определение элемента $k$ -мерного объёма $k$ -мерного многообразия в $\mathbb{R}^n$ и интеграла 1-го рода по $k$ -мерному многообразию

Пусть имеется  $k$ -мерное многообразие  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  и у него зафиксирована параметризация  $\varphi : M \rightarrow \Omega, M \subseteq \mathbb{R}^k$ . Будем обозначать координаты в  $\mathbb{R}^n$  как  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , а в  $\mathbb{R}^k$  — как  $t = (t_1, \dots, t_k)$ . Аналогично предыдущему билету, определим элемент  $k$ -мерного объёма в точке  $t$ .

$$dVol_k = S(P(\varphi'_{t_1}(t), \dots, \varphi'_{t_k}(t))) dt_1 \dots dt_k;$$

Запишем теперь формулу для интеграла 1-го рода от функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  по  $\Omega$ .

$$\int_{\Omega} f(x) dVol_k := \int_M f(\varphi(t)) S(P(\varphi'_{t_1}(t), \dots, \varphi'_{t_k}(t))) dt_1 \dots dt_k;$$

Опять же, можно проверить, что интеграл 1-го рода не зависит от параметризации.

## 30 Объясните, что такое гассманово умножение, гассмановы переменные, гассмановы мономы

Пусть у нас имеется набор символов  $a_1, \dots, a_n$  — гассмановых переменных и мы умеем брать их линейные комбинации. То есть, например, у нас есть отдельные элементы  $a_2 - a_1, 0, -5a_3$  и т. п. Теперь мы хотим ввести новую операцию — научиться умножать наши элементы друг на друга. Наше умножение будет обозначаться символом  $\wedge$  и называться гассмановым умножением. Умножение будет удовлетворять всем стандартным требованиям, кроме коммутативности, которую мы заменим на более странное свойство 4:

1.  $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ ;
2.  $(x + y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z$ ;
3.  $z \wedge (x + y) = z \wedge x + z \wedge y$ ;
4.  $a_i \wedge a_j = -a_j \wedge a_i$ ;

Обратите внимание, пункты 1-3 относятся к любым элементам, а пункт 4 только к исходным  $a_1, \dots, a_n$ . Простые следствия из свойств:  $0 \wedge x = 0, a_i \wedge a_i = 0$ . Для примера посчитаем «квадрат» элемента  $a_1 \wedge a_2 + a_3$ .

$$\begin{aligned} (a_1 \wedge a_2 + a_3) \wedge (a_1 \wedge a_2 + a_3) &= a_1 \wedge a_2 \wedge (a_1 \wedge a_2 + a_3) + a_3 \wedge (a_1 \wedge a_2 + a_3) = 0 + a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 + a_3 \wedge a_1 \wedge a_2 + 0 = \\ &= a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 - a_1 \wedge a_3 \wedge a_2 = a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 + a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 = 2a_1 \wedge a_2 \wedge a_3; \end{aligned}$$

**Определение.** Гассмановым мономом степени  $k$  называется элемент вида  $\alpha a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_k}$ , где  $i_1, \dots, i_k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\alpha$  — некоторый коэффициент.

Заметим, что если среди  $i_1, \dots, i_k$  есть повторения, то моном равен нулю. Переменные в гассмановом мономе можно отсортировать, возможно, поменяв при этом знак. Точнее, при сортировке моном домножится на  $-1$  в степени равной числу инверсий, то есть на знак перестановки.

## 31 Объясните, что такое дифференциальная форма ранга $k$ , и как вычисляется интеграл (2-го рода) от $k$ -формы $\omega$ по $k$ -мерному многообразию $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Запишите вычислительную формулу для поверхностного интеграла 2-го рода

**Определение.** Дифференциальной формой ранга  $k$  (или дифференциальной  $k$ -формой) на  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  называется выражение вида  $\sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}} f_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ , где  $f_{i_1 \dots i_k}$  — некоторые дифференцируемые<sup>1</sup> функции  $f_{i_1 \dots i_k} : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

<sup>1</sup>Часто ограничиваются гладкими функциями.

Если вам очень понравился предыдущий билет, можно сказать, что это сумма грассмановых мономов степени  $k$  от переменных  $dx_1, \dots, dx_n$  с дифференцируемыми функциями в качестве коэффициентов. Можно считать, что среди чисел  $i_1, \dots, i_k$  нет повторений, так как мономы с повторениями всё равно зануляются.

Пусть имеются  $k$ -мерное многообразие  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  с параметризацией  $\varphi : M \rightarrow \Omega, M \subseteq \mathbb{R}^k$  и дифференциальная  $k$ -форма  $\omega = \sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}} f_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  на  $\Omega$ . Определим интеграл (2-го рода)  $\omega$  по  $\Omega$ .

$$\int_{\Omega} \omega := \int_M \sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}} f_{i_1 \dots i_k}(\varphi(t)) d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k};$$

Поясним, что творится в этой формуле. Во-первых,  $\varphi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  — это функция, соответствующая  $i$ -й координате  $\varphi$ . Во-вторых,  $d\varphi_i$  — это привычный дифференциал функции нескольких переменных, но теперь мы говорим, что это линейная комбинация грассмановых переменных  $dt_1, \dots, dt_k$ . Когда мы грассманово перемножим эти дифференциалы, у нас останется выражение вида  $f(t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k$ . Это так, ведь в любом слагаемом результата будут перемножаться  $k$  переменных, одинаковые занулятся, останутся только слагаемые с различными, возможно, не в том порядке. Но мы можем привести порядок к правильному. После этих преобразований мы считаем интеграл как обычный кратный интеграл.

$$\int_M f dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k = \int_M f dt_1 \dots dt_k;$$

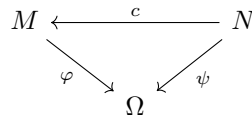
Для случая  $k = 2$  это всё можно записать в следующую формулу.

$$\iint_{\Omega} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iint_M \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{vmatrix} du dv;$$

Обратите внимание, при  $Q$  стоит  $dz \wedge dx$ , а не  $dx \wedge dz$ .

## 32 Что такое ориентация $k$ -мерного многообразия? Как изменится интеграл 2-го рода от дифференциальной формы при смене ориентации многообразия (б. д.)?

Пусть  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  —  $k$ -мерное связное<sup>2</sup> многообразие, и у него имеются две параметризации  $\varphi : M \rightarrow \Omega, \psi : N \rightarrow \Omega; M, N \subseteq \mathbb{R}^k$ . Предположим, что функция замены координат  $c = \varphi^{-1} \circ \psi$  биективна и непрерывно дифференцируема.



Посмотрим на якобиан  $J(c)$ . Если бы где-то он был равен нулю, в окрестности этой точки  $c$  была бы необратима. Значит он не равен нулю нигде. Поскольку  $J(c)$  непрерывен и  $\Omega$  связно, из этого следует, что он имеет постоянный знак. Тогда если он положителен, будем говорить, что  $\varphi$  и  $\psi$  задают одну и ту же ориентацию, а если отрицателен — то разные. Таким образом мы определяем ориентацию как отношение эквивалентности с двумя классами на параметризациях многообразия.

Ориентация задаёт ориентацию на любом касательном пространстве  $T_x \Omega$  как на векторном пространстве. Если мы назвали ориентацию некоторой параметризации положительной, то назовём положительным базис  $T_x \Omega$ , полученный из её производных.

При смене параметризации на имеющую противоположную ориентацию интеграл 2-го рода меняет знак.

<sup>2</sup>Напомним, многообразие называется гладким, если любые две его точки можно соединить проходяще по нему непрерывной кривой.

### 33 Дайте определение согласованных ориентаций многообразия и его границы. Дайте определение дифференциала от $k$ -формы. Запишите общую формулу Стокса.

Будем обозначать границу многообразия  $\Omega$  как  $\partial\Omega$ . Заметим, что если у  $k$ -мерного многообразия есть граница, то она имеет размерность  $k - 1$ .

**Определение.** Будем говорить, что ориентации  $\Omega$  и  $\partial\Omega$  согласованы, если для любой точки  $x \in \partial\Omega$  для любого положительного базиса  $v_1, \dots, v_{k-1}$  в  $T_x\partial\Omega$ , базис  $v_1, \dots, v_{k-1}, \vec{n}$  положителен в  $T_x\Omega$ , где  $\vec{n}$  — это вектор в  $T_x\Omega$ , перпендикулярный  $T_x\partial\Omega$  и смотрящий наружу<sup>3</sup>  $\Omega$ .

Мы привыкли, что дифференциал суммы равен сумме дифференциалов. Поэтому для определения дифференциала от дифференциальной формы достаточно определить дифференциал от грассманова монома.

$$d(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) := df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k};$$

*Замечание.* Дифференциал  $k$ -формы является  $(k + 1)$ -формой.

Для примера посчитаем дифференциал от дифференциала некоторой функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$d(df) = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i;$$

При этом слагаемые вида  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} dx_i \wedge dx_i$  сразу зануляются, а слагаемые вида  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i$  сократятся с  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_i \wedge dx_j$ . Значит  $d(df) = 0$ .

Пусть теперь  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  —  $k$ -мерное многообразие с согласованными ориентациями на самом многообразии и на границе, а  $\omega$  — дифференциальная  $(k - 1)$ -форма на  $\Omega$ . Тогда верна (общая) формула Стокса:

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega;$$

### 34 Выведите из общей формулы Стокса частные случаи: формулу Ньютона-Лейбница, формулу Грина, формулу Гаусса-Остроградского.

#### Формула Ньютона-Лейбница, $n = k = 1$

Пусть наше многообразие это отрезок на прямой  $[a; b]$ . Его границей будет множество из двух точек  $\{a, b\}$ . Заметим, что точка — это нульмерное многообразие и по нему можно интегрировать 0-формы (то есть просто функции). При чём этот интеграл будет с точностью до знака (знак как всегда определяется ориентацией) равен значению функции в точке. Если на отрезке мы берём стандартную ориентацию «слева направо», то для границы это будет означать взятие  $b$  с плюсом и  $a$  с минусом. Итак, формула Стокса принимает следующий вид:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b dF;$$

Перепишем в более привычную запись.

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a);$$

<sup>3</sup>Это можно формализовать, например, как отрицательное скалярное произведение с любым вектором, соединяющим  $x$  и точку из окрестности  $x$  из  $\Omega$ . Но лектор это никак не формализовал.

### Формула Грина, $n = k = 2$

Дифференциальная 1-форма в  $\mathbb{R}^2$  имеет вид  $Pdx + Qdy$ . Посчитаем её дифференциал

$$\begin{aligned} d(Pdx + Qdy) &= \left( \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \\ &= \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy; \end{aligned}$$

Формула Стокса принимает следующий вид:

$$\int_{\partial U} Pdx + Qdy = \iint_U \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy;$$

Здесь условие согласованности ориентации можно сформулировать как «при обходе  $\partial U$  по заданной параметризации  $U$  всегда находится слева».

### Формула Гаусса-Остроградского, $n = k = 3$

Дифференциальная 2-форма в  $\mathbb{R}^3$  имеет вид  $Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ . Посчитаем её дифференциал.

$$\begin{aligned} d(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy) &= \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = \\ &= \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz; \end{aligned}$$

Формула Стокса принимает следующий вид:

$$\iint_{\partial V} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz;$$