Коллоквиум по Математическому анализу-2, семестр 2

Виноградова Дарья, Залялов Александр, Миронов Алексей, Стрельцов Артём, Т

Содержание

28 Дайте определение элемента площади 2-мерной поверхности в $\mathbb{R}^3$ и поверхностного интеграла 1-го рода **2**

29 Дайте определение элемента k-мерного объёма k-мерного многообразия в $\mathbb{R}^n$ и интеграла 1-го рода по k-мерному многообразию **2**

30 Объясните, что такое грассманово умножение, грассмановы переменные, грассмановы мономы **2**

28 Дайте определение элемента площади 2-мерной поверхности в $\mathbb{R}^3$ и поверхностного интеграла 1-го рода

Пусть имеется двумерная поверхность $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ и у неё зафиксирована параметризация $\varphi : M \to \Omega, M \subseteq \mathbb{R}^2$. Будем обозначать координаты в $\mathbb{R}^3$ как (x, y, z), а в $\mathbb{R}^2$ — как (u, v). Неформально говоря, элементом площади в точке поверхности называется площадь бесконечно малого параллелограмма со сторонами, направленными параллельно касательным векторам в этой точке. Можно провести аналогию с одномерными интегралами, где мы приближаем функцию с помощью ломаной с маленькими звеньями, и сказать, что мы приближаем поверхность маленькими чешуйками в форме параллелограммов. Запишем теперь формулу для элемента площади в точке (u, v)

$$\mathrm{d}S = S(P(\varphi'_u(u,v), \varphi'_v(u,v)))\mathrm{d}u\mathrm{d}v;$$

Здесь φ'_u, φ'_v — трёхмерные векторы (так как φ имеет три координаты), именно они являются касательными в данной точке; P — параллелограмм, натянутый на векторы; S — площадь. Из линейной алгебры мы знаем, что площадь параллелограмма можно считать как корень из определителя матрицы Грама его сторон. Это даёт нам новую формулу для элемента площади.

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v;$$

Здесь $E = \langle \varphi'_u, \varphi'_u \rangle = \|\varphi'_u\|^2, G = \langle \varphi'_v, \varphi'_v \rangle = \|\varphi'_v\|^2, F = \langle \varphi'_u, \varphi'_v \rangle$.

Теперь мы можем естественным образом определить поверхностный интеграл 1-го рода от функции $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ по Ω.

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}S := \iint\limits_{M} f(\varphi(u,v))\sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v;$$

Здесь мы опираемся на параметризацию при определении интеграла. Можно проверить, что при смене параметризации значение интеграла 1-го рода не изменится.

29 Дайте определение элемента k-мерного объёма k-мерного многообразия в $\mathbb{R}^n$ и интеграла 1-го рода по k-мерному многообразию

Пусть имеется k-мерное многообразие $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ и у него зафиксирована параметризация $\varphi : M \to \Omega, M \subseteq \mathbb{R}^k$. Будем обозаначать координаты в $\mathbb{R}^n$ как $x = (x_1, \dots, x_n)$, а в $\mathbb{R}^k$ — как $t = (t_1, \dots, t_k)$. Аналогично предыдущему билету, определим элемент k-мерного объёма в точке t.

$$\mathrm{d}Vol_k = S(P(\varphi'_{t_1}(t), \dots, \varphi'_{t_k}(t)))\mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_k;$$

Запишем теперь формулу для интеграла 1-го рода от функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по Ω.

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\mathrm{d}Vol_k = \int\limits_{M} f(\varphi(t))S(P(\varphi'_{t_1}(t), \dots, \varphi'_{t_k}(t)))\mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_k;$$

Опять же, можно проверить, что интеграл 1-го рода не зависит от параметризации.

30 Объясните, что такое грассманово умножение, грассмановы переменные, грассмановы мономы

Пусть у нас имеется кольцо[1] R и конечный[2] набор сущностей $a_1, \dots, a_n$ — грассмановых переменных. Научимся естественным образом эти сущности складывать и умножать на элементы R. При этом у нас будут получаться какие-то новые сущности, с ними мы тоже будем уметь это делать. Например, сумма a_1 и a_2 — это новая сущность $a_1 + a_2$. Она, умноженная на 2[3], даст новую сущность $2(a_1 + a_2)$. При этом мы накладываем стандартные ограничения на эти операции: сложение имеет нейтральный 0, ассоциативно и коммутативно, умножение ассоциативно

[1] Будем считать, что ассоциативное коммутативное кольцо с единицей.
[2] Можно, конечно, брать и бесконечный. Но нам не нужно.
[3] Как известно, 2 это 1 + 1.

и со всех сторон дистрибутивно, умножение на 1 не меняет элемент... Напомним, из этого можно вывести что умножение чего угодно на 0 даёт 0, а умножение на -1 даёт обратный по сложению. В случае если R это поле, можно просто сказать, что мы живём в векторном пространстве над ним с базисом $a_1, \ldots, a_n$.

Теперь мы хотим ввести новую операцию — научиться умножать наши сущности друг на друга. Опять же, при этом возникнут новые сущности, и с ними мы естественным образом будем уметь выполнять все наши операции. Наше умножение будет обозначаться символом $\wedge$ и называться грассмановым умножением. Наложим мы на него такие требования:

1. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
2. $(x + y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z$;
3. $z \wedge (x + y) = z \wedge x + z \wedge y$;
4. $a_i \wedge a_j = -a_i \wedge a_j$;

Обратите внимание, пункты 1-3 относятся к любым сущностям, а пункт 4 только к исходным $a_1, \ldots, a_n$. Простые следствия из свойств: $0 \wedge x = 0, a_i \wedge a_i = 0$. Приведём пример, как с этим умножением работать:

$$(a_1 \wedge a_2 + a_3) \wedge (a_1 \wedge a_2 + a_3) = a_1 \wedge a_2 \wedge (a_1 \wedge a_2 + a_3) + a_3 \wedge (a_1 \wedge a_2 + a_3) = 0 + a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 + a_3 \wedge a_1 \wedge a_2 + 0 =$$

$$= a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 - a_1 \wedge a_3 \wedge a_2 = a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 + a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 = 2a_1 \wedge a_2 \wedge a_3;$$

Определение. *Грассмановым мономом* называется элемент вида $\alpha a_{i_1} \wedge \ldots \wedge a_{i_k}$, где $\alpha \in R, i_1, \ldots i_k \in \{0, \ldots, n\}$.

Заметим, что если среди $i_1, \ldots i_k$ есть повторения, то моном равен нулю. Переменные в грассмановом мономе можно отсортировать, возможно, поменяв при этом знак. Точнее, при сортировке моном домножится на -1 в степени равной числу инверсий, то есть на знак перестановки.