

# Коллоквиум по Математическому анализу-2, семестр 2

Виноградова Дарья, Залялов Александр, Миронов Алексей, Стрельцов Артём, Т

## Содержание

- 1 Пространство кусочно-непрерывных функций на отрезке как пример евклидова пространства. Неравенство Коши-Буняковского на этом пространстве (б.д.). Ортогональные и ортонормированные системы в евклидовом пространстве. Главный пример:  $C([-π; π])$  2
- 2 Задача о наилучшем приближении элемента евклидова пространства элементом конечномерного пространства (б.д.). Ряд Фурье по произвольной ортонормированной системе. Ряд Фурье по тригонометрической системе. 2
- 3 Неравенство Бесселя (идея доказательства). Определения замкнутой и полной ортонормированных систем (ОНС). Тождество Парсеваля для замкнутой ОНС. 3
- 4 Бывают ли замкнутые ортонормированные системы, но не полные? 3
- 5 Дайте определение свертки двух функций  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Докажите, что операция свертки коммутативна. Дайте определение свертки двух  $2\pi$  периодических функций  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . 3
- 6 Дайте определения ядра Дирихле и ядра Фейера. Какой смысл у свертки произвольной периодической функции с этими ядрами? (б.д.) 4
- 7 Сформулируйте (б.д.) теоремы о приближении  $2\pi$  периодической функции тригонометрическими многочленами: о сходимости ядра Фурье в точке, и о приближении функции тригонометрическими многочленами в различных функциональных метриках. 4

# 1 Пространство кусочно-непрерывных функций на отрезке как пример евклидова пространства. Неравенство Коши-Буняковского на этом пространстве (б.д.). Ортогональные и ортонормированные системы в евклидовом пространстве. Главный пример: $C([- \pi; \pi])$

Напомним, что евклидово пространство - это векторное пространство над полем вещественных чисел со скалярным произведением.

*Свойства скалярного произведения:*

1.  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
2.  $\langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v \rangle = \lambda_1 \langle u_1, v \rangle + \lambda_2 \langle u_2, v \rangle$
3.  $\langle v, v \rangle \geq 0$
- 3'.  $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$

Рассмотрим векторное пространство  $V = \hat{C}([a; b])$  - множество кусочно-непрерывных функций на  $[a; b]$  (имеющих конечное число точек разрыва первого рода), обладающих также следующим свойством:

$$f(c) = \frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow c-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow c+0} f(x) \right)$$

Определим на  $\hat{C}$  скалярное произведение  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$  и проверим свойства, чтобы показать его корректность.

1-3 очевидны. 3' сначала рассмотрим для непрерывной на отрезке функции. От противного: пусть на отрезке существует какая-то точка  $c$ , в которой функция принимает ненулевое значение. Тогда  $f^2(c) > 0$ . В силу непрерывности есть такая окрестность  $(c - \delta; c + \delta)$ , в которой  $f^2(x) \geq \epsilon > 0$ .

$$\int_a^b f^2(x) dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f^2(x) dx \geq 2\delta\epsilon > 0$$

Для  $\hat{C}$  отрезок разваливается на конечное число отрезков непрерывности, применим к ним предыдущее.

**Теорема.** (неравенство Коши-Буняковского)  $\langle f, g \rangle^2 \leq \langle f, f \rangle \cdot \langle g, g \rangle$

Для нашего пространства оно имеет вид

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

**Определение.** Множество элементов  $\psi_i \in V$  называется *ортогональной* системой, если для любой пары  $\langle \psi_i, \psi_j \rangle = 0$ . Если при этом  $\|\psi_i\| = 1 \forall i$ , то система *ортонормирована*.

В  $C([- \pi; \pi])$  следующая система является ортонормированной:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots \right\}$$

Проверим норму на примере  $\cos$ :

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \right\| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2kx) + 1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = 1$$

Любая функция с  $\cos$  ортогональна любой с  $\sin$  в силу нечетности. Проверим ортогональность двух функций с  $\cos$ :

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(lx) \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((k+l)x) + \cos((k-l)x)) dx = 0$$

Остальное оставим в качестве упражнения для пытливого читателя.

# 2 Задача о наилучшем приближении элемента евклидова пространства элементом конечномерного пространства (б.д.). Ряд Фурье по произвольной ортонормированной системе. Ряд Фурье по тригонометрической системе.

Пусть имеется ортонормированная система  $\{\psi_i\}$  в векторном пространстве  $V$ . Хотим найти наилучшее приближение элемента  $f$  этого пространства вида  $\sum c_k \psi_k$  (т.е.  $\|f - \sum c_k \psi_k\| \rightarrow \min$ ). Утверждается, что  $c_k = \langle f, \psi_k \rangle$ .

**Определение.** Ряд Фурье по произвольной ортонормированной системе  $\{\psi_i\}$  - это сумма вида  $\sum c_k \psi_k$

**Определение.** Ряд Фурье по тригонометрической системе - это сумма вида  $\frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum \frac{f_k}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) + \frac{\hat{f}_k}{\sqrt{\pi}} \sin(kx)$ ,  
где  $f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ ,  $f_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$ ,  $\hat{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$

Обычно ряд Фурье записывают как  $\frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ ,

где  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ ,  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$ ,  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$

### 3 Неравенство Бесселя (идея доказательства). Определения замкнутой и полной ортонормированных систем (ОНС). Тождество Парсеваля для замкнутой ОНС.

**Теорема.** (неравенство Бесселя)  $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \leq \|f\|^2$ , где  $f$  - элемент векторного пространства  $V$  с ортонормированной системой  $\{\psi_i\}$ ,  $f_i = \langle f, \psi_i \rangle$

**Доказательство.**  $0 \leq \|f - \sum_{i=1}^n f_i \psi_i\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n \|\langle f, \psi_i \rangle\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n f_i^2$   
 $\sum_{i=1}^n f_i^2$  ограничена сверху  $\Rightarrow$  сходится. Переходим к пределу, получаем требуемое.  $\square$

**Определение.** Ортонормированная система замкнута, если  $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \exists c_1, \dots, c_n \|f - \sum_{i=1}^n c_i \psi_i\| < \epsilon$

**Определение.** Ортонормированная система полная, если  $[\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow f \perp \psi_k] \Rightarrow f \equiv 0$

**Теорема.** (тождество Парсеваля) Для замкнутой ОНС  $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 = \|f\|^2$

**Доказательство.** Зафиксируем  $\epsilon$ . Из определения замкнутости  $\exists n \in \mathbb{N} \exists c_1, \dots, c_n \|f - \sum_{i=1}^n c_i \psi_i\| < \epsilon$ .

Из неравенства Бесселя  $\|f\|^2 - \sum_{i=1}^n f_i^2 \leq \|f - \sum_{i=1}^n c_i \psi_i\|^2 \leq \epsilon^2$ .

Тогда для  $m \geq n$  и подавно  $\|f\|^2 - \sum_{i=1}^m f_i^2 \leq \|f - \sum_{i=1}^n c_i \psi_i\|^2 \leq \epsilon^2$

Значит,  $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall m \geq n \|f\|^2 - \sum_{i=1}^m f_i^2 \leq \epsilon^2$ , и из этого и следует равенство в пределе.  $\square$

### 4 Бывают ли замкнутые ортонормированные системы, но не полные?

Не бывает. Пусть  $\forall i f \perp \psi_i$ . Значит,  $f_i = 0$ . В силу замкнутости справедливо тождество Парсеваля. то есть  $\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 = 0$

### 5 Дайте определение свертки двух функций $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Докажите, что операция свертки коммутативна. Дайте определение свертки двух $2\pi$ периодических функций $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение.** Сверткой функций  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется  $(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(t - x) dx$

**Теорема.**  $(f * g) \equiv (g * f)$

**Доказательство.** Положим  $\tau = t - x$ .

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(t - x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau - t) g(\tau) d\tau = \int_{\mathbb{R}^n} f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

$\square$

**Определение.** Сверткой  $2\pi$  периодических функций  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется  $(f * g)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(t - x) dx$

**6 Дайте определения ядра Дирихле и ядра Фейера. Какой смысл у свертки произвольной периодической функции с этими ядрами? (б.д.)**

**Определение.** Ядром Дирихле называется  $D_n(t) = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})t]}{2\sin\frac{t}{2}}$

Обозначим  $S_n(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ , где  $f$  -  $2\pi$  периодическая и интегрируемая на  $[-\pi; \pi]$ .

Тогда справедливо  $S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt$  - то есть свертка с ядром Дирихле дает нам  $n$ -ю частичную сумму ряда Фурье.

**Определение.** Ядром Фейера называется  $\Phi_n(t) = \frac{\sin^2(\frac{tn}{2})}{2\sin^2\frac{t}{2}}$

Обозначим  $\sigma_n(x, f) = \frac{S_0(x, f) + \dots + S_{n-1}(x, f)}{n}$  - среднее арифметическое ряда Фурье.

Для  $f$  с теми же свойствами будет верно  $\sigma_n(x, f) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \Phi_n(t) dt$

**7 Сформулируйте (б.д.) теоремы о приближении  $2\pi$  периодической функции тригонометрическими многочленами: о сходимости ядра Фурье в точке, и о приближении функции тригонометрическими многочленами в различных функциональных метриках.**