Коллоквиум по Математическому анализу-2, семестр 2

Виноградова Дарья, Залялов Александр, Миронов Алексей, Стрельцов Артём, Шамаилов Гершон

Содержание

Реклама

@applied_memes
@fcs_channels

1 Пространство кусочно-непрерывных функций на отрезке как пример евклидова пространства. Неравенство Коши-Буняковского на этом пространстве (б.д.). Ортогональные и ортонормированные системы в евклидовом пространстве. Главный пример: $C([-\pi;\pi])$

Напомним, что евклидово пространство - это векторное пространство над полем вещественных чисел со скалярным произведением.

Свойства скалярного произведения:
1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
2. $\langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v\rangle = \lambda_1\langle u_1, v\rangle + \lambda_2\langle u_1, v\rangle$
3. $\langle v,v\rangle \geq 0$
3'. $\langle v,v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0$

Рассмотрим векторное пространство $V = \hat{C}([a;b])$ - множество кусочно-непрерывных функций на $[a;b]$ (имеющих конечное число точек разрыва первого рода), обладающих также следующим свойством:
$f(c) = \frac{1}{2}(\lim\limits_{x\to c-0} f(x) + \lim\limits_{x\to c+0} f(x))$

Определим на $\hat{C}$ скалярное произведение $\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ и проверим свойства, чтобы показать его корректность.

1-3 очевидны. 3' сначала рассмотрим для непрерывной на отрезке функции. От противного: пусть на отрезке существует какая-то точка c, в которой функция принимает ненулевое значение. Тогда $f^2(c) > 0$. В силу непрерывности есть такая окрестность $(c-\delta; c+\delta)$, в которой $f^2(x) \geq \epsilon > 0$.
$\int\limits_a^b f^2(x) \geq \int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} f^2(x) \geq 2\delta\epsilon > 0$
Для $\hat{C}$ отрезок разваливается на конечное число отрезков непрерывности, применим к ним предыдущее.

Теорема. *(неравенство Коши-Буняковского)* $\langle f, g\rangle^2 \leq \langle f, f\rangle \cdot \langle g, g\rangle$

Для нашего пространства оно имеет вид
$\int\limits_a^b f^2(x)g^2(x)dx \leq \int\limits_a^b f^2(x)dx \int\limits_a^b g^2(x)dx$

Определение. Множество элементов $\psi_i \in V$ называется *ортогональной* системой, если для любой пары $\langle \psi_i, \psi_j\rangle = 0$. Если при этом $\|\psi_i\| = 1\ \forall i$, то система *отронормирована*.

В $C([-\pi;\pi])$ следующая система является ортонормированной:
$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \cdots\}$

Проверим норму на примере cos:
$\|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx\| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kx)dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(2kx)+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = 1$
Любая функция с cos ортогональна любой с sin в силу нечетности. Проверим ортогональность двух функций с cos:
$\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(lx)\rangle = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(lx)dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\cos((k+l)x) + \cos((k-l)x))dx = 0$
Остальное оставим в качестве упражнения для пытливого читателя.

2 Задача о наилучшем приближении элемента евклидова пространства элементом конечномерного пространства (б.д.). Ряд Фурье по произвольной ортонормированной системе. Ряд Фурье по тригонометрической системе.

Пусть имеется ортонормированная система $\{\psi_i\}$ в векторном пространстве V. Хотим найти наилучшее приближение элемента f этого пространства вида $\sum c_k\psi_k$ (т.е. $\|f - \sum c_k\psi_k\| \to min$). Утверждается, что $c_k = \langle f, \psi_k\rangle$.

Определение. *Ряд Фурье по произвольной ортонормированной системе* $\{\psi_i\}$ - это сумма вида $\sum c_k\psi_k$

Определение. *Ряд Фурье по тригонометрической системе* - это сумма вида $\frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum \frac{f_k}{\sqrt{\pi}}cos(kx) + \frac{\hat{f}_k}{\sqrt{\pi}}sin(kx)$, где $f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $f_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)$, $\hat{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)dx$

Обычно ряд Фурье записывают как $\frac{a_0}{2} + \sum a_k cos(kx) + b_k sin(kx)$,
где $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx), b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)dx$

3 Неравенство Бесселя (идея доказательства). Определения замкнутой и полной ортонормированных систем (ОНС). Тождество Парсеваля для замкнутой ОНС.

Теорема. *(неравенство Бесселя)* $\sum_{i=1}^{\infty}\langle f, \psi_i\rangle^2 \le \|f\|^2$*, где* f *- элемент векторного пространства* V *с ортонормированной системой* $\{\psi_i\}$*. Далее* $f_i = \langle f, \psi_i\rangle$

Доказательство. $0 \le \|f - \sum_{i=1}^{n}\langle f\psi_i\rangle\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\|\langle f, \psi_i\rangle\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} f_i^2$
$\sum_{i=1}^{n} f_i^2$ ограничена сверху $\|f\|^2 \Rightarrow$ сходится. Переходим к пределу, получаем требуемое. □

Определение. Ортонормированная система *замкнута*, если $\forall\epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists c1, \cdots, c_n\ \|f - \sum_{i=1}^{n} c_k\psi_k\| < \epsilon$

Определение. Ортонормированная система *полна*, если $[\ \forall k \in \mathbb{N}\ \Rightarrow f \perp \psi_k] \Rightarrow f \equiv 0$

Теорема. *(тождество Парсеваля) Для замкнутой ортонормированной системы* $\sum_{i=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$

Доказательство. Зафиксируем ϵ. Из определения замкнутости $\exists n \in \mathbb{N}\ \exists c1, \cdots, c_n\ \|f - \sum_{i=1}^{n} c_k\psi_k\| < \epsilon$.
Из неравенства Бесселя $\|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \le \|f - \sum_{i=1}^{n} c_k\psi_k\|^2 \le \epsilon^2$.
Тогда для $m \ge n$ и подавно $\|f\|^2 - \sum_{i=1}^{m} f_i^2 \le \|f - \sum_{i=1}^{n} c_k\psi_k\|^2 \le \epsilon^2$
Значит, $\forall\epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall m \ge n\ \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{m} f_i^2 \le \epsilon^2$, и из этого и следует равенство в пределе. □

4 Бывают ли замкнутые ортонормированные системы, но не полные?

Не бывает. Пусть $\forall i\ f \perp \psi_i$. Значит, $f_i = 0$. В силу замкнутости справедливо тождество Парсеваля. то есть $\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} f_i = 0$

5 Дайте определение свертки двух функций $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Докажите, что операция свертки коммутативна. Дайте определение свертки двух 2π-периодических функций $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Определение. *Сверткой* функций $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется $(f * g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(t-x)dx$

Теорема. $(f * g) \equiv (g * f)$

Доказательство. Положим $\tau = t - x$.
$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(t-x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ - область интегрирования не поменялась, а функция домножилась на модуль якобиана замены. В данном случае он равен 1. □

Определение. *Сверткой* 2π-периодических функций $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется $(f * g)(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(t-x)dx$

6 Дайте определения ядра Дирихле и ядра Фейера. Какой смысл у свертки произвольной периодической функции с этими ядрами? (б.д.)

Определение. *Ядром Дирихле* называется $D_n(t) = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})t]}{2\sin\frac{t}{2}}$

Обозначим $S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k cos(kx) + b_k sin(kx)$, где f - 2π-периодическая и интегрируемая на $[-\pi;\pi]$.

Тогда справедливо $S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt$ - то есть свертка с ядром Дирихле дает нам n-ю частичную сумму ряда Фурье.

Определение. *Ядром Фейера* называется $\Phi_n(t) = \frac{\sin^2(\frac{tn}{2})}{2\sin^2\frac{t}{2}}$

Обозначим $\sigma_n(x,f) = \frac{S_0(x,f)+\dots+S_{n-1}(x,f)}{n}$ - среднее арифметическое ряда Фурье.

Для f с теми же свойствами будет верно $\sigma_n(x,f) = \frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t)dt$

7 Сформулируйте (б.д.) теоремы о приближении 2π периодической функции тригонометрическими многочленами: о сходимости ядра Фурье в точке, и о приближении функции тригонометрическими многочленами в различных функциональных метриках.

Теорема. *Если 2π-периодическая функция имеет в точке производную слева и справа, то ряд Фурье в ней сходится к среднему арифметическому этих производных.*

Заметим, что в условиях данной теоремы функция может быть разрывной.

Еще раз напомним, что $\sigma_n(x,f) = \frac{S_0(x,f)+\dots+S_{n-1}(x,f)}{n}$

Теорема. *Пусть f - непрерывная 2π-периодическая функция. Тогда $\sigma_n \to f$ на $[-\pi,\pi]$ в смысле метрики d_∞*

Теорема. *Пусть f - кусочно-непрерывная. Тогда ее можно приблизить тригонометрическим многочленом в смысле метрики d_2.*

8 Сформулируйте (б.д.) лемму Римана. Какова связь между порядком дифференцируемости 2π-периодической функции и асимптотикой ее коэффицинтов Фурье? Ответ поясните.

Лемма. *(Риман). Пусть f абсолютно интегрируема на промежутке (a,b). Тогда*

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(\omega x)dx = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(\omega x)dx = 0$$

Теорема. *Если f интегрируемая и 2π-периодическая, то ее коэффициенты a_n, b_n ряда Фурье стремятся к 0ю*

Теорема. *Пусть f – 2π-периодическая и имеет $s-1$ производную, а $f^{(s-1)}$ – кусочно-гладкая. Тогда ряд Фурье для $f^{(s)}$ получается s-кратным почленным дифференцированием ряда Фурье для f. При этом, $a_n, b_n = \overline{o}\left(\frac{1}{k^s}\right)$ при $k \to \infty$*

Почему второе следствие верно? Интуитивно: чтобы выполнялась лемма Римама, требуется, чтобы коэффициенты стремились к 0. При дифференцировании $s-1$ раз у нас столько же раз «вылезет» k из косинуса и синуса, поэтому, чтобы все еще выполнялась сходимость к 0, нужно, чтобы $a_n, b_n = \overline{o}\left(\frac{1}{k^s}\right)$.

9 Дайте определение преобразования Фурье для функции $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, приведите пример вычисления преобразования Фурье. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Сформулируйте основную теорему об образе преобразования Фурье.

Определение. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Если выражение

$$\hat{f}(y) = F[f](y) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}dx$$

определено для всех $y \in \mathbb{R}$, то $\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется преобразованием Фурье.

Например, пусть $f(x) = I_{[-1,1]}(x)$. Тогда

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_{[-1,1]}(x)e^{ixy}dx = \int_{-1}^{1} e^{ixy}dx = \int_{-1}^{1}\cos(xy)dx + i\int_{-1}^{1}\sin(xy)dx = \frac{\sin(xy)}{y}\Big|_{-1}^{1} = 2\frac{\sin y}{y}$$

Определение. $L_1(\mathbb{R})$ – пространство функций, абслолютно интегрируемых на $\mathbb{R}$.

Теорема. *(Основная теорема об образе Фурье) Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то*

1. *Функция $\hat{f}$ корректно определена.*
2. *Функция $\hat{f}$ непрерывна.*
3. $\lim\limits_{y\to\pm\infty} \hat{f}(y) = 0$

10 Что вы можете сказать о функции $\hat{f}$, если (1) f четная и вещественнозначная (2) f нечетная и вещественнозначная.

Лемма. 1. *Если f – четная, то $F[f]$ – четная и вещественнозначная.*

2. *Если f – нечетная, то $F[f]$ – нечетная мнимозначная*

Доказательство. Напрямую следует из того, что

$$F[f](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixy}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(xy)dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(xy)dx$$

Если f четная, то второй слагаемое зануляется, тогда Фурье-образ вещественнозначный и вещественнозначный и четный (не забываем, что четность смотрим по y, а не по x). Аналогично, если f нечетная, то зануляется первое, а Фурье-образ будет нечетный и мнимозначный. □

11 Дайте определение интеграла Фурье и обратного преобразования Фурье. Сформулируйте и докажите теорему о свертке. Чему равно преобразование Фурье от произведения двух функций?

Определение. Интегралом Фурье от функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ в точке x называется выражение

$$\frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)e^{-ixy}dy$$

Определение. Пусть f дифференцируемая функция, тогда преобразование

$$\hat{f}(y) \mapsto f(x) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)e^{-ixy}dy$$

называется обратным преобразованием Фурье.

Теорема. *(О свертке) Если $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, то $F(f \star g) = F[f] \cdot f[g]$.*

Доказательство.

$$F[f \star g](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f - g)(x) e^{ixy} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) g(x-s) ds \right) e^{ixy} dx$$

Благодаря абсолютной интегрируемости, можем поменять порядки интегрирования, а следовательно, просто в виде кратного:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(s) g(x-s) e^{ixy} dx ds = \begin{bmatrix} u = s \\ v = x - s \\ dxds = dudv \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{iuy} du \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) e^{ivy} dv = F[f] \cdot F[g].$$

Аналогично можно доказать для обратного преобразования. $\square$

Теорема. $F[f \cdot g] = \frac{1}{2\pi} F[f] \star F[g]$

12 Выведите формулу для производной $\hat{f}(y)$. Какова связь дифференцируемости функции $f(x)$ и асимптотики ее преоразования Фурье $\hat{f}(y)$ при $y \to \infty$

Утверждение. *Пусть $f(x)$ такова, что $f(x)(1 + |x|)^k \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $\hat{f} = F[f]$ дифференцируема k раз, причем производные $\hat{f}$ можно вычислить дифференцированием под знаком интеграла.*

Доказательство. Это следует из теорем прошлого семестра (что можно дифференцировать по параметру, в нашем случае по y, под знаком интеграла, если есть равномерная сходимость по x).

$$F[f](y) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy} dx$$

$\forall\ m \le k$ верно

$$\left| f(x) e^{ixy} (ix)^m \right| \le \left| f(x) \right| (1 + |x|)^m$$

В левой части стоит просто продифференцированное m раз подынтегральное выражение в преобразовании Фурье. Неравенство следует из ограниченности $\left| e^{ixy} \cdot i^m \right| \le 1$. В правой части стоит функция, интегрируемая на $\mathbb{R}$ (по условию).
При этом левая часть сходится равномерно по y. Значит, можем пользоваться теоремой из прошлого семестра:

$$\frac{d^m}{dy^m} \hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy} (ix)^m dx$$

Отсюда же получаем формулу:

$$\frac{d^m}{dy^m} F[f](y) = F[(ix)^m f(x)]$$

$\square$

Утверждение. *Пусть f дифференцируема k раз во всех точках, причем $f^{(m)} \in L_1(\mathbb{R})$ при $m = 0, \dots, k$ и $f^{(m)}(x) \to 0$ при $x \to \infty$ и $m = 0, \dots, k$, тогда $\hat{f}(y) = \overline{o}\left(\frac{1}{|y|^k}\right)$ при $t \to \infty$*

Доказательство. Запишем $F[f^(k)]$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(x) e^{ixy} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} df^(k-1) = e^{ixy} f^{(k-1)}(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k-1)}(x) \cdot (iy) e^{ixy} dx = \begin{bmatrix} \text{Далее аналогично.} \\ \text{Также пользуемся тем, что} \\ \lim\limits_{x \to \infty} f^{(m)} = 0 \ \ \forall m = 0, \dots, k \end{bmatrix}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy} (-1)^m (iy)^m dx = (-iy)^k F[f](y) = (-iy)^k \hat{f}(y)$$

Также мы знаем, что если функция абсолютно интегрируемая, то ее Фурье-образ стремится к 0 (см. билет 9). Тогда

$$f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow \left|F[f^(k)](y)\right| = y^k F[f](y) \to 0 \Rightarrow \hat{f}(y) = \overline{o}\left(\frac{1}{|y^k|}\right)$$

P.S. И также, абсолютно аналогично с предыдущим пунктом выведем:

$$F\left[\frac{d^m}{dx^m}f(x)\right] = (-iy)^m F[f]$$

□

13 Сформулируйте и докажите равенство Планшереля для преобразования Фурье.

Теорема. *(Равенство Планшереля) Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ ($f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) и, кроме того, $f'' \in L_1(\mathbb{R})$, а также $f(x), f'(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\overline{\hat{g}(y)}dy$$

Доказательство. Функция дифференцируема, поэтому для нее работает формула обращения Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)e^{-ixy}dy$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(y)e^{ixy}dy\right)\overline{g(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(y)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{g(x)}\cdot\overline{e^{ixy}}dx\right)dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(y)\overline{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)e^{ixy}dx\right)}dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(y)\overline{\hat{g}(y)}dy$$

□

14 Дайте определение гладкого k-мерного подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ и сопутствующее определение гладких координат. Приведите пример параметрической кривой, которая параметрически задана дифференцируемыми функциями, но не является гладким 1-мерным многообразием в какой-нибудь точке

Определение. Подмножество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *гладким k-мерным (под)многообразием* в $\mathbb{R}^n$, если $\forall x \in M$ существует окрестность U, $x \in U$, такая что на $M \cap U$ можно задать гладкие координаты.

Определение. *Гладкие координаты* — отображение $\Phi : V \to M$, где $V \subseteq \mathbb{R}^k$, задаваемое уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(t_1, \dots, t_k) \\ \vdots \\ x_n = \phi_n(t_1, \dots, t_k) \end{cases}$$

где $(x_1, \ldots, x_n)$ — координаты в $\mathbb{R}^n$, $(t_1, \ldots, t_k)$ — координаты в $\mathbb{R}^k$, при этом $(t_1, \ldots, t_k) \in V$ тогда и только тогда, когда $(x_1, \ldots, x_n) \in M$. При этом $\phi_1, \ldots, \phi_n$ дифференцируемы по каждой переменной и матрица частных производных невырождена.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\phi_n}{\partial t_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial t_k} & \frac{\partial\phi_2}{\partial t_k} & \cdots & \frac{\partial\phi_n}{\partial t_k} \end{pmatrix}$$

Ранг этой матрицы должен быть k в любой точке $t \in V$ (то есть все строки должны быть линейно независимы).

Пример:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

Обе функции дифференцируемые, но в точке $t = 0$ обе производные обращаются в ноль. Поэтому кривая не гладкая.

15 Сформулируйте теорему о неявной функции. Допустим кривая $X \subseteq \mathbb{R}^2$ задана уравнением $f(x,y) = 0$, и известно, что $\mathrm{grad} f(x_0,y_0) = (2;0)$. Какую из координат x,y можно использовать в качестве локальной координаты на X в окрестности точки (x_0,y_0)?

Теорема. *Пусть есть функция $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для которой выполнены условия:*

1. *F определена и непрерывна в окрестности (x_0,y_0)*
2. *$F'_y(x_0,y_0) \neq 0$ и F'_y непрерывна в (x_0,y_0)*
3. *$F(x_0, y_0) = 0$.*

Тогда найдётся окрестность $U_{\delta,\epsilon}(x_0,y_0) = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ y \in (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon) \end{array} \right\}$ и непрерывная функция f такая, что в $U_{\delta,\epsilon}(x_0,y_0) \quad F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ (то есть можно выразить y от x в данной окрестности при выполненных выше условиях).
Если кроме всех условий выше F дифференцируема в $U_{\delta,\epsilon}(x_0,y_0)$, то f дифференцируема в $U_\delta(x_0)$ и

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$$

Задача: проверяем условия теоремы, производная по x не равна нулю, а производная по y равна. Значит в качестве координаты можно взять y, а x — нельзя. Обратите внимание, координата — эта не та переменная, по которой дифференцируем.

16 Сформулируйте общую теорему о неявном отображении. Допустим, кривая $X \subseteq \mathbb{R}^3$ задана уравнениями $f(x,y,z) = 0$, $g(x,y,z) = 0$, и известно, что $\mathrm{grad} f(x_0,y_0,z_0) = (2;0;0)$, $\mathrm{grad} f(x_0,y_0,z_0) = (0;1;3)$. Какие из координат x,y,z можно использовать в качестве локальных координат на X в окрестности точки (x_0,y_0,z_0)?

Обозначения: $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots y_m)$, $(x,y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_m)$.
Ещё обозначения: если функции $g_1, \dots, g_s$ зависят от $t_1, \dots, t_r$, то

$$\frac{D(g_1,\dots,g_s)}{D(t_1,\dots,t_r)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1} & \frac{\partial g_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial t_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_s}{\partial t_1} & \frac{\partial g_s}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial g_s}{\partial t_r} \end{pmatrix}$$

(по строкам матрицы записаны градиенты (да, в 14 билете градиенты были записаны по столбцам, но так Айз давал на той лекции)).

Разрешим теперь m уравнений относительно m неизвестных.

Теорема. *Пусть*

1. $F_1(x,y), \dots, F_m(x,y)$ *— непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $(x^{(0)}, y^{(0)})$ *(здесь верхние индексы, чтобы не путать с координатами)*
2. $F_j(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$
3. $det \frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}\big|_{(x^{(0)},y^{(0)})} \neq 0$

Тогда существует окрестность $U_\delta(x^{(0)}) \times U_\epsilon(y^{(0)})$ *и набор дифференцируемых функций* $f_1(x_1,\dots,x_n), \dots, f_m(x_1,\dots,x_m)$, *таких что в этой окрестности*

$$\{F_j(x,y) = 0\}_{j=1}^m \Leftrightarrow \{y_j = f_j(x)\}_{j=1}^m$$

при этом $f_j(x^{(0)}) = y_j^{(0)}$.
Более того,

$$\frac{D(f_1,\dots,f_m)}{D(x_1,\dots,x_n)}\Big|_{x^{(0)}} = -\Big(\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}\Big)^{-1}\Big|_{(x^{(0)},y^{(0)})} \cdot \frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(x_1,\dots,x_n)}\Big|_{x^{(0)}}$$

Задача: Запишем матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Видим, что линейно независимы первый и второй столбец, и первый и третьей. Значит координатой может быть z или y. Обратите внимание, если матрица производных по x и y невырождена, то подходит как координата z.

17 Дайте определение касательного вектора к подмножеству $X \subseteq \mathbb{R}^n$ в точке $A \in X$. Как устроено множество всех касательных векторов к гладкому подмногообразию в фиксированной точке?

Определение. Пусть $x^{(0)} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$. Построим какую-нибудь кривую, которая целиком лежит в X и проходит через $x^{(0)}$. Пусть эта кривая задаётся параметрически $x_i = \psi_i(s), s \in (-\epsilon, \epsilon)$, и $(\psi_1(s), \dots, \psi_n(s)) \in X \ \forall s \in (-\epsilon,\epsilon)$, и $(\psi_1(0), \dots, \psi_n(0)) = x^{(0)}$. Тогда вектор $(\frac{d\psi_1}{ds}(0), \dots, \frac{d\psi_n}{ds}(0))$ называется *касательным* к X в точке $x^{(0)}$ (если такой вектор определён, конечно).

Замечание. Касательных векторов может быть бесконечно много, т. к. бесконечно много таких кривых.

Пусть X теперь — гладкое k-мерное многообразие и $x_i = \phi_i(t_1, \dots, t_k)$ — гладкие координаты в окрестности точки $x^{(0)} = \Phi(t^{(0)})$. Тогда множество касательных векторов в точке $x^{(0)}$ образует k-мерное векторное пространство (обозначается $T_{x^{(0)}}X$), линейно порождённое следующими векторами

$$\Big(\frac{\partial \phi_1}{\partial t_1}(t^{(0)}), \dots, \frac{\partial \phi_n}{\partial t_1}(t^{(0)})\Big)$$
$$\vdots$$
$$\Big(\frac{\partial \phi_1}{\partial t_k}(t^{(0)}), \dots, \frac{\partial \phi_n}{\partial t_k}(t^{(0)})\Big)$$

Замечание. Эти векторы задают аффинное пространство, чтобы получить геометрическое касательное пространство, нужно сдвинуть $T_{x^{(0)}}X$ в точку $x^{(0)}$.

18 Допустим, что все точки множества $X \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяют уравнению $f(x) = 0$. Докажите, что в любой точке $x^{(0)} \in X$ любой касательный вектор к X перпендикулярен градиенту $\mathrm{grad} f(x^{(0)})$. Опишите касательное пространство к k-мерному подмногообразию $\mathbb{R}^n$, заданному системой неявных уравнений (без доказательства).

Имеем $\forall x \in X$ $f(x) = 0$. Тогда для любой кривой $\{x_i = \phi_i(s)\} \subset X$ имеем $f(\phi_1(s), \dots, \phi_n(s)) = 0$. продифференцируем это по s, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{f\phi_1}{ds} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{f\phi_n}{ds} = 0$$
$$< \mathrm{grad} f(x^{(0)}), \quad \text{касательный вектор к } X \text{ в точке } x^{(0)} >= 0$$

Из того, что скалярное произведении равно нулю, следует, что градиент f перпендикулярен касательному вектору к множеству X.

Касательное пространство — ортогональное дополнение к линейной комбинации градиентов неявных уравнений.

19 Необходимое и достаточное условия локального экстремума для функции нескольких переменных (без доказательства).

Определение. Точка $x^{(0)}$ функции f называется *стационарной*, когда $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0 \quad \forall x \in [1; n]$.

Необходимое условие:

Теорема. *Если $f(x^{(0)})$ - локальный экстремум, то $x^{(0)}$ — стационарная.*

Определение. *Матрицей Гессе* называется симметричная квадратичная форма

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Определение. *Положительно определённой* квадратичной формой называется такая, что все собственные значения положительны.

Определение. *Отрицательно определённой* квадратичной формой называется такая, что все собственные значения отрицательны.

Теорема. *Теперь, пусть дана дважды дифференцируемая функция $f(x_1,\ldots,x_n)$, пусть $x^{(0)}$ — стационарная точка. Тогда:*

- *Если матрица Гессе положительна определена, то $x^{(0)}$ — локальный минимум.*
- *Если матрица Гессе отрицательна определена, то $x^{(0)}$ — локальный максимум.*
- *Если матрица Гессе имеет и положительные и отрицательные собственные значения, но при этом не вырождена, то $x^{(0)}$ — не локальный экстремум.*
- *В остальных случаях $x^{(0)}$ может как являться локальным экстремумом, так и не являться.*

20 Дайте определение точки условного минимума

Определение. Точка $x^{(0)}$ называется *строгим условным минимумом* функции f подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$, если $\forall x \in X \quad f(x) > f(x^{(0)})$.

Определение. Точка $x^{(0)}$ называется *условным локальным минимумом* функции f подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$, если существует окрестность $U(x^{(0)})$, такая что $\forall x \in U(x^{(0)}) \cap X \quad f(x) > f(x^{(0)})$.

Замечание. Далее будем считать, что такое множество задаётся набором уравнений вида $\phi(x) = 0$.

21 Сформулируйте теорему о множителях Лагранжа. Объясните идею доказательства в случае, если подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ является гладким многообразием.

Пусть у нас есть задача вида

$$\begin{cases} f(x) \to \mathrm{extr} \\ \phi_1(x) = 0 \\ \vdots \\ \phi_m(x) = 0 \end{cases}$$
$$x \in \mathbb{R}^n$$
$$m < n$$

Определение. *Функцией Лагранжа* называется

$$L(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$
$$x \in \mathbb{R}^n$$
$$\lambda \in \mathbb{R}^m$$

λ называют *множителями Лагранжа.*

Теорема. *Пусть $x^{(0)}$ — точка условного локального экстремума в задаче выше, и пусть в окрестности точки $x^{(0)}$ X — гладкое многообразие. Тогда существуют такие $\lambda^{(0)}$, что точка $(x^{(0)},\lambda^{(0)}) = (x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)},\lambda_1^{(0)},\ldots,\lambda_m^{(0)}) \in \mathbb{R}^{m+n}$ является стационарной для $L(x,\lambda)$.*

То есть

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^{(0)},\lambda^{(0)}) = 0 \quad \forall i \in [1;n]$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x^{(0)},\lambda^{(0)}) = 0 \quad \forall i \in [1;m]$$

Второе в силу линейности по λ эквивалентно $g_i(x^{(0)}) = 0$, что означает, что $x^{(0)} \in X$.
Посмотрим теперь на первое

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)) = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \end{pmatrix} - \ldots - \lambda_m \begin{pmatrix} \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Это значит, что

$$\mathrm{grad} f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathrm{grad} g_i$$

Так как, все наши переходы были равносильными, нам осталось доказать, что найдутся такие λ, то есть, что $\mathrm{grad} f$ является линейной комбинацией $\mathrm{grad} g_i$ в данной точке.
Поскольку X гладкая в точке $x^{(0)}$, будем предполагать, что X удовлетворяет условию теоремы о неявном отображении, то есть градиенты $\mathrm{grad} g_i$ линейно независимы. Без ограничения общности будем считать $x^{(0)} \in X \subset \mathbb{R}^n$ — точка условного локального минимума. Тогда, если возьмём какую-нибудь кривую $\{x_i = \phi(t)\} \subseteq X$, такую, что $\phi_i(0) = x_i^{(0)}$, то на ней это также будет точка локального минимума, запишем касательный вектор

$$u = (\frac{d\phi_1}{dt}(0), \ldots, \frac{d\phi_n}{dt}(0)) \in T_{x^{(0)}} X$$

Функция $\alpha(t) = f(\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$ имеет в $t = 0$ локальный минимум. По теореме Ферма $\frac{d\alpha}{dt}(0) = 0$. А это

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}) \cdot \frac{d\phi_1}{dt}(0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^{(0)}) \cdot \frac{d\phi_n}{dt}(0) = < \mathrm{grad} f(x^0), u >= 0$$

Таким образом, градиент целевой функции в точки экстремума перпендикулярен любому касательному вектору $u \in T_{x^{(0)}} X$, то есть $\mathrm{grad} f(x^{(0)}) \perp T_{x^{(0)}} X$. А это значит, что этот градиент лежит в ортогональном дополнении

$$\mathrm{grad} f(x^{(0)}) \in (T_{x^{(0)}} X)^{\perp} = < \mathrm{grad} g_1(x^{(0)}), \ldots, \mathrm{grad} g_m(x^{(0)}) >$$

А раз $\mathrm{grad} f(x^{(0)})$ лежит в линейной оболочке $\mathrm{grad} g_i(x^{(0)})$, то он является их линейной комбинацией.

22 Сформулируйте достаточное условие в методе множителей Лагранжа. Объясните, как на практике проверять это условие (скажем, с помощью примера).

Замечание. Пусть $Q = Q(y_1, ..., y_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j$ – квадратичная форма на $\mathbb{R}^n = V$. Пусть $W \subset V$ – векторное подпространство. Тогда определена операция ограничения Q на подпространство W: $Q|_W$

Теорема. ***Достаточное условие локального условного экстремума.***
Пусть $X = \{g_i(x) = 0 | \ i = 1,...,m\} \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x^{(0)} \in X$ является гладким многообразием и $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – целевая функция (та, которую хотим оптимизировать на этом многобразии). Ограничим квадратичную форму d^2L на касательное пространство к X в точке $x^{(0)}$:

$$d^2 L(x^{(0)}, \lambda^{(0)})|_{T_{x^{(0)}} X}$$

Допустим, в точке $x^{(0)}$ выполнены условия Лагранжа:

$$grad f|_{x^{(0)}} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(0)} grad g_i|_{x^{(0)}} \ \text{и} \ g_i(x^{(0)}) = 0$$

Тогда:

- *Если квадратичная форма положительно определена при этом ограничении, то $x^{(0)}$ – точка условного локального минимума для f;*
- *Если квадратичная форма отрицательно определена при этом ограничении, то $x^{(0)}$ – точка условного локального максимума для f;*
- *Если квадратичная форма знаконеопределённая при этом ограничении, то $x^{(0)}$ не является точкой условного локального экстремума для f;*
- *Если квадратичная форма неотрицательно или неположительно определена при этом ограничении, то теорема ничего не говорит о точке $x^{(0)}$.*

Пример 1. Оптимизируем $f = 3x + 4y$ на окружности $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Запишем функцию Лагранжа:

$$L(x,\, y,\, \lambda) = 3x + 4y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_x &= 0 \\ L'_y &= 0 \\ L'_\lambda &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2\lambda x + 3 = 0 \\ -2\lambda y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \frac{3}{2\lambda} \\ y &= \frac{4}{2\lambda} \\ \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{4}{2\lambda}\right)^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \frac{5}{2} \\ x_1 = \frac{3}{5} \\ y_1 = \frac{4}{5} \end{cases} \text{или} \begin{cases} \lambda_2 = -\frac{5}{2} \\ x_2 = -\frac{3}{5} \\ y_2 = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Исследуем точку $(x_1,\, y_1)$ при помощи условия второго порядка:

$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2 + 2L''_{x\lambda}dxd\lambda + 2L''_{y\lambda}dyd\lambda + L''_{\lambda\lambda}d\lambda^2$$

Заметим, что $L''_{\lambda\lambda}d\lambda^2 = 0$, т.к. L линейна по λ (это верно всегда, а не только в этом примере). Теперь найдём полный дифференциал условия:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow d(x^2 + y^2 - 1) = d0 \Rightarrow 2xdx + 2ydy = 0$$

Также заметим, что $L''_{x\lambda} = -g'_x$, $L''_{y\lambda} = -g'_y$. Тогда:

$$L''_{x\lambda}dxd\lambda + L''_{y\lambda}dyd\lambda = d\lambda(g'_x dx + g'_y dy) = d\lambda dg = 0 \text{ (это верно всегда)}$$

Вычислим d^2L в точке $(\frac{3}{5},\, \frac{4}{5},\, \frac{5}{2})$:

$$d^2L(\frac{3}{5},\, \frac{4}{5},\, \frac{5}{2}) = -5dx^2 - 5dy^2$$

Видим, что, без всякого ограничения, квадратичная форма d^2L в нужной точке отрицательно определена $\Rightarrow$ при ограничении форма $d^2L|_{T_{(x_1,\, y_1)}X}$ тоже определена отрицательно $\Rightarrow$ $(x_1,\, y_1)$ – точка локального максимума. Вторая точка исследуется аналогично.

Пример 2. Оптимизируем $f = 2x^2 - y^2$ при условии $e^y - \sin x - 1 = 0$. Запишем функцию Лагранжа:

$$L(x,\, y,\, \lambda) = 2x^2 - y^2 - \lambda(e^y - \sin x - 1)$$

Найдём стационарные точки (аналогично примеру 1):

$$\begin{cases} 4x + \lambda\cos x = 0 \\ -2y - \lambda e^y = 0 \\ e^y - \sin x - 1 = 0 \end{cases}$$

Исследуем решение $(x_0,\, y_0, \lambda_0) = (0,\, 0,\, 0)$ при помощи условия второго порядка:

$$d^2L = (4 - \lambda\sin x)dx^2 + (-2 - \lambda e^y)dy^2$$

Подставим точку $(0,\, 0,\, 0)$:

$$d^2L = 4dx^2 - 2dy^2 \text{ – знаконеопределённая квадратичная форма}$$

Необходимо исследовать ограничение $d^2L|_{T_{x_0,y_0}X}$. Возьмём полный дифференциал от уравнения связи:

$$dg = d(e^y - \sin x - 1) = e^y dy - \cos x dx = 0$$

Подставим точку (0, 0):

$$dg(0,0) = dy - dx = 0 \Rightarrow dy = dx$$

Таким образом, «ограничить d^2L на $T_{x^{(0)}}X$ означает «подставить в d^2L линейные соотношения на дифференциалы, полученные из уравнения $dg = 0$». Подставим в $4dx^2 - 2dy^2$ уравнение $dy = dx$:

$$d^2L|_{T_{(x_0,\, y_0)}X} = 2dx^2 > 0 \Rightarrow (0,0) \text{ – точка условного локального минимума.}$$

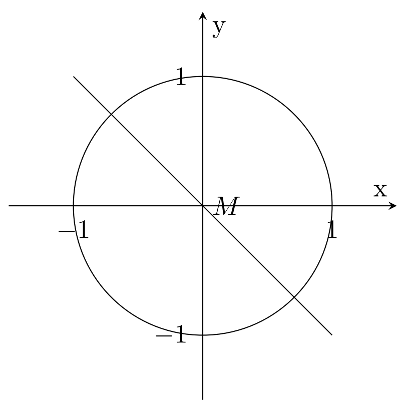
23 Сформулируйте теорему Каруша-Куна-Таккера. Объясните, в чём смысл условий дополняющей нежёсткости?

Мотивация. Помимо задач с ограничениями типа равенств, часто встречаются задачи с ограничениями типа неравенств. Например, вместо окружности $x^2 + y^2 = 1$ нужно исследовать круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Такие задачи называются задачами нелинейного программирования. Пусть $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, тогда сформулируем задачу:

$$\begin{cases} f(x) \to extr \\ g_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, ..., m \ (m \text{ может быть больше } n) \end{cases}$$

Пример.

$$\begin{cases} f(x,\, y) \to extr \\ g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \leqslant 0 \\ g_2(x, y) = -x - y \leqslant 0 \end{cases}$$



Пусть M – множество, которое задаётся ограничениями g_i. Разбор случаев (при помощи метода множителей Лагранжа):

1. Кандидатов в точки экстремума внутри M:

$$\begin{cases} f_x' = 0 \\ f_y' = 0 \\ g_1 < 0 \\ g_2 < 0 \end{cases}$$

2. Кандидаты на дуге окружности:

$$\begin{cases} f_x' - \lambda_1 (g_1)_x' = 0 \\ f_y' - \lambda_1 (g_2)_y' = 0 \\ g_1 = 0 \\ g_2 < 0 \end{cases}$$

3. Кандидаты на отрезке внутри круга:
$$\begin{cases} f_x^{'} - \lambda_2 (g_2)_x^{'} = 0 \\ f_y^{'} - \lambda_2 (g_2)_y^{'} = 0 \\ g_2 = 0 \\ g_1 < 0 \end{cases}$$

4. Кандидаты на пересечении окружности и прямой:
$$\begin{cases} f_x^{'} - \lambda_1 (g_1)_x^{'} - \lambda_2 (g_2)_x^{'} = 0 \\ f_y^{'} - \lambda_1 (g_1)_y^{'} - \lambda_2 (g_2)_y^{'} = 0 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{cases}$$

Далее во всех полученных кандидатах вычисляем целевую функцию.

Теорема. ***Каруша-Куна-Таккера (простая версия для задачи с ограничениями типа неравенств).*** *Допустим, что* $x^{(0)}$ *– решение задачи* $\begin{cases} f(x) \to extr \\ g_i(x) \leqslant 0, i = 1, ..., m \end{cases}$

Пусть $L(x, \lambda) = f(x) - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ *– функция Лагранжа. Тогда в точке* $x^{(0)}$ *выполнено:*
$$\begin{cases} L_{x_j}^{'} = 0, j = 1, ..., n \\ g_i(x) \leqslant 0, i = 1, ..., m \\ \lambda_i g_i(x) = 0, i = 1, ..., m \text{ – условия дополняющей нежёсткости} \end{cases}$$

Замечание. В чём смысл условий дополняющей нежёсткости?
Если $\lambda_i > 0$, то соответствующее ограничение $g_i(x) \leqslant 0$ в решении задачи выполняется как равенство $g_i(x) = 0$ (т.е. это ограничение «активно»).
Если же $g_i(x) < 0$, то соответствующий множитель Лагранжа λ_i должен быть равен нулю, и это ограничение не участвует в функции Лагранжа.

24 Дайте определение криволинейного интеграла 1-го рода и объясните, как такие интегралы вычисляются.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ и $f : U \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $\gamma \subset U$ – кривая и $\gamma = \{x_j = \varphi_j(t) | \, j = 1, ..., n, \, t \in [a, b]\}$. Пусть (τ, c) – размеченное разбиение отрезка $[a, b]$, т.е. $\tau = (a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b), c_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Определение. $|\tau| = \max\limits_i (t_i - t_{i-1})$ – диаметр разбиения τ.

Замечание. Более общее определение: $|\tau| = \max\limits_i (d_2(\varphi[t_i], \varphi[t_{i-1}])$, где d_2 – евклидова метрика.

Определение. Определим интегральную сумму (1-го рода) по кривой γ:
$$S^I_{\tau, f, \gamma} = \sum_{i=1}^{m} f \left[\varphi(c_i)\right] \Delta l_i$$
$$\Delta l_i = d_2(\varphi(t_i), \, \varphi(t_{i-1})) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1}))^2}$$

Определение. Предел $\lim\limits_{|\tau| \to 0} S^I_{\tau, f, \gamma} = \int\limits_{\gamma} f(x_1, ..., x_n) dl$ называется криволинейным интегралом 1-го рода от функции f по кривой γ.

Замечание. $\int\limits_\gamma f(x_1, ..., x_n)dl$ не зависит от параметризации кривой γ.

Замечание. dl называется элементом длины кривой. По теореме Пифагора:

$$dl = \sqrt{(dx_1)^2 + ... + (dx_n)^2} = \left[x_j = \varphi_j(t)\right] = \sqrt{(\varphi_1'(t)dt)^2 + ... + (\varphi_n'(t)dt)^2} = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + ... + \varphi_n'(t)^2}dt$$

Утверждение. *Пусть γ задана параметрически: $x_j = \varphi_j(t), t \in [a, b]$ и $\varphi_j \in C^1([a, b])$. Тогда:*

$$\int\limits_\gamma f(x_1, ..., x_n)dl = \int\limits_a^b f[\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)]\sqrt{\varphi_1'(t)^2 + ... + \varphi_n'(t)^2}dt$$

Пример.

$$\int\limits_\gamma 1dl = \int\limits_a^b \sqrt{\sum_i (\varphi_i')^2}dt \text{ – длина кривой.}$$

25 Дайте определение криволинейного интеграла 2-го рода и объясните, как такие интегралы вычисляются.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ и $f : U \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $\gamma \subset U$ – кривая и $\gamma = \{x_j = \varphi_j(t) | \, j = 1, ..., n, \, t \in [a, b]\}$. Пусть (τ, c) – размеченное разбиение отрезка $[a, b]$, т.е. $\tau = (a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b), c_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Мотивация. Хотим определить $\int\limits_\gamma f(x_1, ..., x_n)dx_1$.

Определение. Определим интегральную сумму (2-го рода) по кривой γ:

$$S^{II,\,x_1}_{\tau,f,\gamma} = \sum_{i=1}^m f\left[\varphi(c_i)\right]\Delta x_1$$

$$\Delta x_1 = \varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1})$$

Определение. Предел $\lim\limits_{|\tau|\to 0} S^{II}_{\tau,f,\gamma} = \int\limits_\gamma f(x_1, ..., x_n)dx_1$ называется криволинейным интегралом 2-го рода от функции f по кривой γ по переменной x_1.

Замечание. $\int\limits_\gamma f(x_1, ..., x_n)dx_1$ «почти» (т.е. с точностью до знака) не зависит от параметризации кривой γ.

Замечание. $dx_1 = d\varphi_1(t) = \varphi_1^{'}(t)dt$

Утверждение. *Пусть γ задана параметрически: $x_j = \varphi_j(t), t \in [a, b]$ и $\varphi_j \in C^1([a, b])$. Тогда:*

$$\int\limits_\gamma f(x_1, ..., x_n)dx_1 = \int\limits_a^b f[\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)]\varphi_1^{'}(t)dt$$

Аналогично определяются интегралы по любой другой координате.

Пример.

$$\int\limits_\gamma 1dx_1 = \int\limits_a^b \varphi_1^{'}(t)dt = \int\limits_a^b d(\varphi_1(t)) = \varphi_1(b) - \varphi_1(a) \text{ – полное изменение первой координаты при движении по кривой.}$$

Замечание. Более общо, можно брать интегралы от выражений вида $P_1(x_1, ..., x_n)dx_1 + P_2(x_1, ..., x_n)dx_2 + ... + P_n(x_1, ..., x_n)dx_n = \omega$:

$$\int\limits_\gamma \omega := \int\limits_\gamma P_1dx_1 + ... + \int\limits_\gamma P_ndx_n = \int\limits_a^b \left[P_1(\varphi(t))P_1^{'} + P_n(\varphi(t))P_n^{'}\right]dt$$

Определение. Выражения вида $P_1(x_1, ..., x_n)dx_1 + P_2(x_1, ..., x_n)dx_2 + ... + P_n(x_1, ..., x_n)dx_n$ называются дифференциальными 1-формами (или формами ранга 1).

Определение. Выражения вида $\int\limits_\gamma \omega$ называются интегралами 2-го рода от 1-формы ω по кривой γ.

26 Объясните, почему криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от ориентации кривой, а криволинейный интеграл 2-го рода – зависит.

Определение. Предел $\lim\limits_{|\tau|\to 0} S^{I}_{\tau,f,\gamma} = \int\limits_{\gamma} f(x_1,...,x_n)dl$ называется криволинейным интегралом 1-го рода от функции f по кривой γ.

Замечание. dl называется элементом длины кривой. По теореме Пифагора:

$$dl = \sqrt{(dx_1)^2 + ... + (dx_n)^2} = \left[x_j = \varphi_j(t)\right] = \sqrt{(\varphi_1'(t)dt)^2 + ... + (\varphi_n'(t)dt)^2} = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + ... + \varphi_n'(t)^2}dt$$

Определение. Предел $\lim\limits_{|\tau|\to 0} S^{II}_{\tau,f,\gamma} = \int\limits_{\gamma} f(x_1,...,x_n)dx_1$ называется криволинейным интегралом 2-го рода от функции f по кривой γ по переменной x_1.

Замечание. $dx_1 = d\varphi_1(t) = \varphi_1^{'}(t)dt$

При изменении направления обхода интеграл 2-го рода меняет знак, а интеграл 1-го рода не меняет знак. Почему? Заметим следующее: в интегралах 2-го рода стоят выражения $dx_1,...,dx_n$, которые меняют знак при изменении направления обхода, а элемент длины $dl = \sqrt{(dx_1)^2 + ... + (dx_n)^2}$ не зависит от знаков выражений $dx_1,...,dx_n$.

Замечание. Подробнее про смену знака dx_i (из билета 25).
Определим интегральную сумму (2-го рода) по кривой γ:

$$S^{II,\,x_1}_{\tau,f,\gamma} = \sum_{i=1}^{m} f\left[\varphi(c_i)\right]\Delta x_1$$

$$\Delta x_1 = \varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1})$$

Видим, что Δx_i в определении интегральной суммы зависит от порядка обхода сегментов разбиения.

27 Сформулируйте формулу Грина и докажите её для области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ вида $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ (прямоугольник).

Теорема. *Формула Грина.*
Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ – связное подмножество, ограниченное кусочно-гладкой кривой $\partial U = \Gamma$ (граница множества U). Зафиксируем ориентацию на Γ, обход вдоль которой всегда оставляет область U слева. Пусть функции $P(x,y), Q(x,y)$ дифференцируемы в некоторой окрестности U. Тогда верно следующее:

1.
$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx = \iint\limits_{U} -\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

2.
$$\int\limits_{\Gamma} Q(x,y)dy = \iint\limits_{U} \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy$$

3.
$$\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint\limits_{U} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \text{ – \textit{формула Грина}}$$

Доказательство. План:

1. Докажем формулу 1.

2. Формула 2 доказывается аналогично при помощи замены $x \leftrightarrow y$.

3. Формула 3 суть сумма формул 1 и 2.

Будем предполагать, что $U = \{(x,y)\,|a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$, т.е. U – прямоугольник.
$\Gamma = \partial U = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, где Γ_1, Γ_2 – горизонтальные отрезки ($y = c, y = d$), а Γ_3, Γ_4 – вертикальные отрезки.
Тогда:

$$\int\limits_{\Gamma} Pdx = \int\limits_{\Gamma_1} Pdx + \int\limits_{\Gamma_2} Pdx + \int\limits_{\Gamma_3} Pdx + \int\limits_{\Gamma_4} Pdx$$

Заметим, что $\int\limits_{\Gamma_3} Pdx + \int\limits_{\Gamma_4} Pdx = 0$, т.к. на вертикальных отрезках выполнено, что $x = const \Rightarrow dx = 0$.
Параметризуем: $\Gamma_1 = \begin{cases} x = t \\ y = c \end{cases} \quad t \in [a,b]$, $\Gamma_2 = \begin{cases} x = t \\ y = d \end{cases} \quad t \in [b,a]$. Интегрируем по определению:

$$\int\limits_a^b P(t,c)dt - \int\limits_a^b P(t,d)dt = \int\limits_a^b \big[P(t,c) - P(t,d)\big]\,dt = \star$$

Заметим, что подынтегральное выражение равно (по формуле Ньютона-Лейбница):

$$\int\limits_d^c \frac{\partial P}{\partial y}(t,s)ds = -\int\limits_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(t,s)ds$$

Подставим:

$$\star = -\int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(t,s)ds\right] dt = [\text{Переходим к кратному интегралу}] = -\iint\limits_U \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

$\square$

28 Дайте определение элемента площади 2-мерной поверхности в $\mathbb{R}^3$ и поверхностного интеграла 1-го рода

Пусть имеется двумерная поверхность $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ и у неё зафиксирована параметризация $\varphi : M \to \Omega, M \subseteq \mathbb{R}^2$. Будем обозначать координаты в $\mathbb{R}^3$ как (x,y,z), а в $\mathbb{R}^2$ — как (u,v). Неформально говоря, элементом площади в точке поверхности называется площадь бесконечно малого параллелограмма со сторонами, направленными параллельно касательным векторам в этой точке. Можно провести аналогию с одномерными интегралами, где мы приближаем функцию с помощью ломаной с маленькими звеньями, и сказать, что мы приближаем поверхность маленькими чешуйками в форме параллелограммов. Запишем теперь формулу для элемента площади в точке (u,v)

$$\mathrm{d}S = S(P(\varphi'_u(u,v), \varphi'_v(u,v)))\mathrm{d}u\mathrm{d}v;$$

Здесь φ'_u, φ'_v — трёхмерные векторы (так как φ имеет три координаты), именно они являются касательными в данной точке; P — параллелограмм, натянутый на векторы; S — площадь. Из линейной алгебры мы знаем, что площадь параллелограмма можно считать как корень из определителя матрицы Грама его сторон. Это даёт нам новую формулу для элемента площади.

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v;$$

Здесь $E = \langle\varphi'_u, \varphi'_u\rangle = \|\varphi'_u\|^2, G = \langle\varphi'_v, \varphi'_v\rangle = \|\varphi'_v\|^2, F = \langle\varphi'_u, \varphi'_v\rangle$.

Теперь мы можем естественным образом определить поверхностный интеграл 1-го рода от функции $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ по Ω.

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}S := \iint\limits_{M} f(\varphi(u,v))\sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v;$$

Здесь мы опираемся на параметризацию при определении интеграла. Можно проверить, что при смене параметризации значение интеграла 1-го рода не изменится.

29 Дайте определение элемента k-мерного объёма k-мерного многообразия в $\mathbb{R}^n$ и интеграла 1-го рода по k-мерному многообразию

Пусть имеется k-мерное многообразие $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ и у него зафиксирована параметризация $\varphi : M \to \Omega, M \subseteq \mathbb{R}^k$. Будем обозаначать координаты в $\mathbb{R}^n$ как $x = (x_1, \ldots, x_n)$, а в $\mathbb{R}^k$ — как $t = (t_1, \ldots, t_k)$. Аналогично предыдущему билету, определим элемент k-мерного объёма в точке t.

$$\mathrm{d}Vol_k = S(P(\varphi'_{t_1}(t), \ldots, \varphi'_{t_k}(t)))\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k;$$

Запишем теперь формулу для интеграла 1-го рода от функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по Ω.

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\mathrm{d}Vol_k := \int\limits_{M} f(\varphi(t))S(P(\varphi'_{t_1}(t), \ldots, \varphi'_{t_k}(t)))\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k;$$

Опять же, можно проверить, что интеграл 1-го рода не зависит от параметризации.

30 Объясните, что такое грассманово умножение, грассмановы переменные, грассмановы мономы

Пусть у нас имеется набор символов $a_1, \ldots, a_n$ — грассмановых переменных и мы умеем брать их линейные комбинации. То есть, например, у нас есть отдельные элементы $a_2 - a_1, 0, -5a_3$ и т. п. Теперь мы хотим ввести новую операцию — научиться умножать наши элементы друг на друга. Наше умножение будет обозначаться символом $\wedge$ и называться грассмановым умножением. Умножение будет удовлетворять всем стандартным требованиям, кроме коммутативности, которую мы заменим на более странное свойство 4:

1. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
2. $(x + y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z$;
3. $z \wedge (x + y) = z \wedge x + z \wedge y$;
4. $a_i \wedge a_j = -a_j \wedge a_i$;

Обратите внимание, пункты 1-3 относятся к любым элементам, а пункт 4 только к исходным $a_1, \ldots, a_n$. Простые следствия из свойств: $0 \wedge x = 0, a_i \wedge a_i = 0$. Для примера посчитаем «квадрат» элемента $a_1 \wedge a_2 + a_3$.

$$(a_1 \wedge a_2 + a_3) \wedge (a_1 \wedge a_2 + a_3) = a_1 \wedge a_2 \wedge (a_1 \wedge a_2 + a_3) + a_3 \wedge (a_1 \wedge a_2 + a_3) = 0 + a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 + a_3 \wedge a_1 \wedge a_2 + 0 =$$

$$= a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 - a_1 \wedge a_3 \wedge a_2 = a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 + a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 = 2a_1 \wedge a_2 \wedge a_3;$$

Определение. *Грассмановым мономом* степени k называется элемент вида $\alpha a_{i_1} \wedge \ldots \wedge a_{i_k}$, где $i_1, \ldots i_k \in \{0, \ldots, n\}$, α — некоторый коэффициент.

Заметим, что если среди $i_1, \ldots i_k$ есть повторения, то моном равен нулю. Переменные в грассмановом мономе можно отсортировать, возможно, поменяв при этом знак. Точнее, при сортировке моном домножится на -1 в степени равной числу инверсий, то есть на знак перестановки.

31 Объясните, что такое дифференциальная форма ранга k, и как вычисляется интеграл (2-го рода) от k-формы ω по k-мерному многообразию $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Запишите вычислительную формулу для поверхностного интеграла 2-го рода

Определение. *Дифференциальной формой* ранга k (или дифференциальной k-формой) на $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется выражение вида $\sum\limits_{\{i_1,\ldots,i_k\} \subseteq \{1,\ldots,n\}} f_{i_1 \ldots i_k}(x)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$, где $f_{i_1 \ldots i_k}$ — некоторые дифференцируемые[1] функции $f_{i_1 \ldots i_k} : M \to \mathbb{R}$.

[1] Часто ограничиваются гладкими функциями.

Если вам очень понравился предыдущий билет, можно сказать, что это сумма грассмановых мономов степени k от переменных $\mathrm{d}x_1, \ldots \mathrm{d}x_n$ с дифференцируемыми функциями в качестве коэффициентов. Можно считать, что среди чисел $i_1, \ldots, i_k$ нет повторений, так как мономы с повторениями всё равно зануляются.

Пусть имеются k-мерное многообразие $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ с параметризацией $\varphi : M \to \Omega, M \subseteq \mathbb{R}^k$ и дифференциальная k-форма $\omega = \sum\limits_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,\ldots,n\}} f_{i_1\ldots i_k}(x)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$ на Ω. Определим интеграл (2-го рода) ω по Ω.

$$\int\limits_{\Omega} \omega := \int\limits_{M} \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,\ldots,n\}} f_{i_1\ldots i_k}(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\varphi_{i_k};$$

Поясним, что творится в этой формуле. Во-первых, $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$ — это функция, соответствующая i-й координате φ. Во-вторых, $\mathrm{d}\varphi_i$ — это привычный дифференциал функции нескольких переменных, но теперь мы говорим, что это линейная комбинация грассмановых переменных $\mathrm{d}t_1, \ldots, \mathrm{d}t_k$. Когда мы грассманово перемножим эти дифференциалы, у нас останется выражение вида $f(t)\mathrm{d}t_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}t_k$. Это так, ведь в любом слагаемом результата будут перемножаться k переменных, одинаковые занулятся, останутся только слагаемые с различными, возможно, не в том порядке. Но мы можем привести порядок к правильному. После этих преобразований мы считаем интеграл как обычный кратный интеграл.

$$\int\limits_{M} f\mathrm{d}t_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}t_k = \int\limits_{M} f\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k;$$

Для случая $k = 2$ это всё можно записать в следующую формулу.

$$\iint\limits_{\Omega} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \iint\limits_{M} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v} \end{vmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v;$$

Обратите внимание, при Q стоит $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$, а не $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$.

32 Что такое ориентация k-мерного многообразия? Как изменится интеграл 2-го рода от дифференциальной формы при смене ориентации многообразия (б. д.)?

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — k-мерное связное[2] многообразие, и у него имеются две параметризации $\varphi : M \to \Omega, \psi : N \to \Omega; M, N \subseteq \mathbb{R}^k$. Предположим, что функция замены координат $c = \varphi^{-1} \circ \psi$ биективна и непрерывно дифференцируема.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, "\varphi"'] & & N \arrow[ll, "c"'] \arrow[dl, "\psi"] \\ & \Omega & \end{tikzcd}$$

Посмотрим на якобиан $J(c)$. Если бы где-то он был равен нулю, в окрестности этой точки c была бы необратима. Значит он не равен нулю нигде. Поскольку $J(c)$ непрерывен и Ω связно, из этого следует, что он имеет постоянный знак. Тогда если он положителен, будем говорить, что φ и ψ задают одну и ту же ориентацию, а если отрицателен — то разные. Таким образом мы определяем ориентацию как отношение эквивалентности с двумя классами на параметризациях многообразия.

Ориентация задаёт ориентацию на любом касательном пространстве $T_x\Omega$ как на векторном пространстве. Если мы назвали ориентацию некоторой параметризации положительной, то назовём положительным базис $T_x\Omega$, полученный из её производных.

При смене параметризации на имеющую противоположную ориентацию интеграл 2-го рода меняет знак.

[2]Напомним, многообразие называется гладким, если любые две его точки можно соединить проходяще по нему непрерывной кривой.

33 Дайте определение согласованных ориентаций многообразия и его границы. Дайте определение дифференциала от k-формы. Запишите общую формулу Стокса.

Будем обозначать границу многообразия Ω как $\partial\Omega$. Заметим, что если у k-мерного многообразия есть граница, то она имеет размерность $k-1$.

Определение. Будем говорить, что ориентации Ω и $\partial\Omega$ согласованы, если для любой точки $x \in \partial\Omega$ для любого положительного базиса $v_1, \dots v_{k-1}$ в $T_x\partial\Omega$, базис $v_1, \dots, v_{k-1}, \vec{n}$ положителен в $T_x\Omega$, где $\vec{n}$ — это вектор в $T_x\Omega$, перпендикулярный $T_x\partial\Omega$ и смотрящий наружу[3] Ω.

Мы привыкли, что дифференциал суммы равен сумме дифференциалов. Поэтому для определения дифференциала от дифференциальной формы достаточно определить дифференциал от грассманова монома.

$$\mathrm{d}(f\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}) := \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k};$$

Замечание. Дифференциал k-формы является $(k+1)$-формой.

Для примера посчитаем дифференциал от дифференциала некоторой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i;$$

При этом слагаемые вида $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i$ сразу зануляются, а слагаемые вида $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$ сократятся с $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$. Значит $\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$.

Пусть теперь $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — k-мерное многообразие с согласованными ориентациями на самом многообразии и на границе, а ω — дифференциальная $(k-1)$-форма на Ω. Тогда верна (общая) формула Стокса:

$$\int\limits_{\partial\Omega} \omega = \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}\omega;$$

34 Выведите из общей формулы Стокса частные случаи: формулу Ньютона-Лейбница, формулу Грина, формулу Гаусса-Остроградского.

Формула Ньютона-Лейбница, $n = k = 1$

Пусть наше многообразие это отрезок на прямой $[a; b]$. Его границей будет множество из двух точек $\{a, b\}$. Заметим, что точка — это нульмерное многообразие и по нему можно интегрировать 0-формы (то есть просто функции). При чём этот интеграл будет с точностью до знака (знак как всегда определяется ориентацией) равен значению функции в точке. Если на отрезке мы берём стандартную ориентацию «слева направо», то для границы это будет означать взятие b с плюсом и a с минусом. Итак, формула Стокса принимает следующий вид:

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b \mathrm{d}F;$$

Перепишем в более привычную запись.

$$\int\limits_a^b F'(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a);$$

[3] Это можно формализовать, например, как отрицательное скалярное произведение с любым вектором, соединяющим x и точку из окрестности x из Ω. Но лектор это никак не формализовал.

Формула Грина, $n = k = 2$

Дифференциальная 1-форма в $\mathbb{R}^2$ имеет вид $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$. Посчитаем её дифференциал

$$\mathrm{d}(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \wedge \mathrm{d}y = \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y =$$
$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y;$$

Формула Стокса принимает следующий вид:

$$\int\limits_{\partial U} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_{U} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

Здесь условие согласованности ориентации можно сформулировать как «при обходе ∂U по заданной параметризации U всегда находится слева».

Формула Гаусса-Остроградского, $n = k = 3$

Дифференциальная 2-форма в $\mathbb{R}^3$ имеет вид $P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Посчитаем её дифференциал.

$$\mathrm{d}(P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y =$$
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z;$$

Формула Стокса принимает следующий вид:

$$\iint\limits_{\partial V} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$