Analiză 1

Notițe de seminar

Adrian Manea
Curs: L. Costache

28 ianuarie 2021

Cuprins

SEMINAR 1

ȘIRURI DE NUMERE REALE ȘI POZITIVE

1.1 Exerciții recapitulative

În toate cele de mai jos, presupunem că lucrăm cu șiruri de numere reale și pozitive.

1. Găsiți valoarea de adevăr a afirmațiilor de mai jos. Dacă sînt adevărate, justificați. Dacă sînt false, găsiți un contraexemplu.

(a) Orice șir monoton este mărginit.

(b) Orice șir mărginit este monoton.

(c) Orice șir convergent este monoton.

(d) Orice subșir al unui șir monoton este monoton.

(e) Suma a două șiruri monotone este un șir monoton.

(f) Orice șir divergent este nemărginit.

(g) Dacă șirul format din pătratele termenilor unui șir este convergent, atunci șirul inițial este convergent.

2. Calculați limitele șirurilor cu termenul general a_n în cazurile de mai jos:

(a) $a_n = \dfrac{n^3 + 5n^2 + 1}{6n^3 + n + 4}$;

(b) $a_n = \dfrac{n^2 + 2n + 5}{5n^3 - 1}$;

(c) $a_n = \arcsin \dfrac{n+1}{2n+3}$;

(d) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} + 4\sqrt{n^2+n+1}}{n}$;

(e) $a_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2}{n^3}$;

(f) $a_n = \dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

(g) $a_n = \sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2+n}$;

(h) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$;

(i) $a_n = \left(\dfrac{n+5}{3n+2}\right)^n$;

(j) $a_n = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{64} + \cdots + \dfrac{1}{4^n}$;

(k) $a_n = \dfrac{2 + \sin n}{n^2}$;

(l) $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$;

(m) $a_n = \dfrac{\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n}{n+1}$;

(n) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)$;

(o) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

(p) $a_n = \dfrac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}{n^5}$;

(q) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$;

(r) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1}\right)$.

SEMINAR 2

SERII CU TERMENI POZITIVI

2.1 Seria geometrică și seria armonică

Intuitiv, seriile sînt *sume infinite*. Înainte de a le studia mai amănunțit, începem cu două exemple foarte utilizate.

Dacă (b_n) este o progresie geometrică de rație q, atunci suma primilor n termeni se poate scrie sub forma:

$$S_n = b_0 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

În cazul seriilor, ne punem problema să calculăm suma *tuturor* termenilor progresiei, adică:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n \geq 0} b_n.$$

Folosind formula de mai sus, se poate vedea ușor că seria geometrică este convergentă, adică limita de mai sus este finită, dacă și numai dacă $|q| < 1$. Mai mult, în acest caz, suma seriei este:

$$\sum_{n \geq 0} b_n = b_0 \cdot \frac{1}{1 - q}.$$

Un alt exemplu foarte important de serie este *seria armonică*, numită și *funcția zeta a lui Riemann*. Aceasta se definește astfel:

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{Q}.$$

Cîteva exemple imediate:

$$\begin{aligned}
\zeta(0) &= \sum 1 = \infty \\
\zeta(1) &= \sum \frac{1}{n} = \infty \\
\zeta(2) &= \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \\
\zeta(-1) &= \sum n = \infty \\
\zeta(-2) &= \sum n^2 = \infty.
\end{aligned}$$

Un rezultat general este următorul:

Teoremă 2.1: *Seria armonică este convergentă dacă și numai dacă exponentul s este strict supraunitar, adică* $s > 1$.

2.2 Criterii de convergență

Putem afla dacă o serie este convergentă aplicînd unul dintre criteriile care urmează. Fixăm mai întîi notația: presupunem că vorbim despre o serie cu termenul general x_n, adică $\sum_{n\geq 1} x_n = \sum x_n$.

Criteriul necesar: Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$, atunci seria $\sum x_n$ este divergentă.

Observaţie 2.1: Să remarcăm că acest criteriu dă o condiție necesară, care nu este suficientă! Într-adevăr, seria $\zeta(1)$ are termenul general tinzînd spre 0, dar seria este divergentă!

Criteriul de comparație termen cu termen: Fie $\sum y_n$ o altă serie de numere reale și pozitive.

- Dacă $x_n \leq y_n, \forall n$ și $\sum y_n$ este convergentă, atunci și seria $\sum x_n$ este convergentă;
- Dacă $x_n \geq y_n, \forall n$ și $\sum y_n$ este divergentă, atunci și seria $\sum x_n$ este divergentă.

Criteriul de comparație la limită: Fie $\sum y_n$ o altă serie de numere reale și pozitive. Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in (0, \infty)$, atunci cele două serii au aceeași natură (seria $\sum x_n$ este convergentă dacă și numai dacă seria $\sum y_n$ este convergentă).

Observaţie 2.2: În ambele criterii de comparație, un candidat foarte bun pentru seria y_n este fie seria armonică, cu un anume exponent s, fie seria geometrică, cu o anume rație, alese convenabil.

Observaţie 2.3: Criteriul de comparație la limită poate fi folosit și în cazuri care nu sînt cuprinse în enunțul de mai sus. De exemplu, dacă $\frac{x_n}{y_n} \longrightarrow 0$, înseamnă că $x_n \leq y_n, \forall n$, deci putem folosi un argument de tip comparație termen cu termen:

- dacă seria $\sum y_n$ este convergentă, atunci seria $\sum x_n$ este convergentă;
- dacă seria $\sum x_n$ este divergentă, atunci seria $\sum y_n$ este divergentă.

În celelalte cazuri nu putem decide.

Criteriul raportului (D'Alembert): Fie $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

- Dacă $\ell > 1$, atunci seria este divergentă;
- Dacă $\ell < 1$, atunci seria este convergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

Criteriul radical (rădăcinii, Cauchy): Fie $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

- Dacă $\ell > 1$, atunci seria este divergentă;
- Dacă $\ell < 1$, atunci seria este convergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

Criteriul Raabe-Duhamel: Fie $\ell = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$.

- Dacă $\ell > 1$, atunci seria este convergentă;
- Dacă $\ell < 1$, atunci seria este divergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

2.3 Exerciții

1. Studiați convergența seriilor $\sum x_n$ în cazurile de mai jos:

(a) $x_n = \left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n$; (D, necesar)

(b) $x_n = \dfrac{1}{n!}$; (C, raport)

(c) $x_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$; (C, comparație la limită cu $\zeta(3/2)$)

(d) $x_n = \arcsin \dfrac{n+1}{2n+3}$; (D, necesar)

(e) $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$; (D, necesar)

(f) $x_n = \dfrac{n!}{n^{2n}}$; (C, raport)

(g) $x_n = \left(\dfrac{n+1}{3n+1}\right)^n$; (C, radical)

(h) $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$; (C, radical)

(i) $x_n = \dfrac{1}{7^n + 3^n}$; (C, comparație cu geometrică)

(j) $x_n = \dfrac{2 + \sin n}{n^2}$; (C, comparație cu armonică)

(k) $x_n = \dfrac{\sin^2 n}{n^2 + 1}$; (C, comparație cu armonică)

(l) $x_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - n^2$; (D, comparație cu armonică)

(m) $x_n = \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{2^n}$; (D, descompunere în 2 serii)

(n) $x_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$; (D, Raabe)

(o) $x_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$; (C, raport)

(p) $x_n = \dfrac{n! \cdot 3^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$; (D, raport)

(q) $x_n = \dfrac{3n-1}{5n^2+2}$; (D, comparație la limită)

(r) $x_n = (\arctan 1)^n$; (C, radical)

2*. Studiați convergența *seriilor* cu termenul general dat de șirurile de la exercițiul 2 al secțiunii anterioare.

SEMINAR 3

CRITERII DE CONVERGENȚĂ (CONT.). SERII OARECARE

Pe lîngă criteriile prezentate în seminarul anterior, vor mai fi de folos și altele, pe care le enumerăm mai jos. În continuare, menționăm că vom lucra cu o serie de forma $\sum x_n$ și sîntem în ipoteza $x_n \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}$.

Criteriul logaritmic: Fie limita:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln x_n}{\ln n}.$$

- Dacă $\ell > 1$, seria este convergentă;
- Dacă $\ell < 1$, seria este divergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

Criteriul condensării: Dacă (x_n) este un șir descrescător și cu termeni pozitivi, atunci seriile $\sum x_n$ și $\sum 2^n x_{2^n}$ au aceeași natură.

Criteriul integral: Fie $f : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ o funcție descrescătoare și definim șirul:

$$a_n = \int_1^n f(t)dt.$$

Atunci seria $\sum f(n)$ este convergentă dacă și numai dacă șirul (a_n) este convergent.

3.1 Exerciții

1. Studiați natura următoarelor serii cu termeni pozitivi, cu termenul general x_n dat de:

(a) $x_n = \dfrac{1}{\ln n}$; (D, integral/comparație)

(b) $x_n = \dfrac{1}{n \ln n}$; (D, integral/condensare)

(c) $x_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$ (D, Raabe)

(d) $x_n = \left(1 - \dfrac{3 \ln n}{2n}\right)^n$ (C, logaritmic)

(e) $x_n = \dfrac{1}{n \sqrt[n]{n}}$ (D, comparație/logaritmic)

(f) $x_n = \left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\ln(\ln n)}$; (D, logaritmic)

(g) $x_n = n^2 e^{-\sqrt{n}}$ (C, logaritmic)

(h) $x_n = \dfrac{a^n (n!)^2}{(2n)!}$, $a > 0$. (raport, discuție a?4)

3.2 Serii alternante

În continuare, discutăm și cazul cînd termenii seriei pot fi negativi. Dar vom fi interesați doar de un caz particular, anume acela al seriilor *alternante*, adică acelea în care un termen este negativ, iar celălalt pozitiv. Mai precis, o serie $\sum x_n$ se numește *alternantă* dacă $x_n \cdot x_{n+1} < 0$, pentru orice n.

Singurul criteriu de convergență pe care îl folosim pentru aceste cazuri este:

Criteriul lui Leibniz: Fie $\sum_n (-1)^n x_n$ o serie alternantă. Dacă șirul (x_n) este descrescător și converge către 0, seria este convergentă.

De asemenea, vom mai fi interesați și de:

- *serii absolut convergente*, adică acele serii pentru care și seria modulelor, și seria dată sînt convergente;

- *serii semiconvergente*, adică acele serii pentru care seria inițială este convergentă, dar seria modulelor este divergentă.

Evident, cum $x \leq |x|$, rezultă că orice serie absolut convergentă este convergentă, dar reciproca nu este adevărată.

Pentru acest caz, avem:

Criteriul Abel-Dirichlet*: Presupunem că seria $\sum x_n$ se mai poate scrie sub forma $\sum \alpha_n y_n$, unde (α_n) este un șir monoton și mărginit (deci convergent). Dacă și seria $\sum y_n$ este convergentă, atunci seria inițială $\sum \alpha_n y_n$ este convergentă.

Formulare alternativă: Dacă (α_n) este un șir monoton, care tinde către 0, iar șirul cu termenul general $Y_n = y_1 + \cdots + y_n$ este mărginit, atunci seria $\sum \alpha_n y_n$ este convergentă.

De exemplu, studiem seria $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{n}$. Este o serie alternantă, deci:

- seria modulelor este $\zeta(1)$, care este divergentă;
- pentru seria dată, aplicăm criteriul lui Leibniz, cu șirul $x_n = \dfrac{1}{n}$, care este descrescător către 0, deci seria este convergentă.

Concluzia este că seria $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ este *semiconvergentă.*

Exercițiu: Folosind criteriul Leibniz, studiați natura seriei cu termenul general:

$$x_n = (-1)^n \frac{\log_a n}{n}, a > 1.$$

3.3 Aproximarea sumelor seriilor convergente

Presupunem că avem o serie convergentă și alternantă. Se poate arăta foarte simplu că, dacă notăm cu S suma seriei, iar cu s_n suma primilor n termeni, cu x_n termenul general al seriei, are loc inegalitatea:

$$\varepsilon = |S - s_n| \leq x_{n+1}. \tag{3.1}$$

Cu alte cuvinte, eroarea aproximației are ordinul de mărime al primului termen neglijat.

Deocamdată, exemplele simple pe care le studiem sînt de forma:

Exercițiu: Să se aproximeze cu o eroare mai mică decît ε sumele seriilor definite de termenul general x_n de mai jos:

(a) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}, \varepsilon = 10^{-3}$;

(b) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3 \sqrt{n}}, \varepsilon = 10^{-2}$.

În ambele cazuri, se folosește inegalitatea din (3.1), de unde se scoate n. Se obține $n = 6$ pentru primul exercițiu și $n = 4$ pentru al doilea.

Concluzia este că, pentru a obține valoarea sumei seriei cu o precizie de 3, respectiv 2 zecimale, este suficient să considerăm primii 5, respectiv primii 3 termeni ai seriei. Eroarea este comparabilă cu primul termen *neglijat* din serie.

SEMINAR 4

CONVERGENȚA SERIILOR — EXERCIȚII

Studiați convergența seriilor de forma $\sum x_n$. În cazul seriilor alternante, decideți și convergența absolută sau semiconvergența:

(1) $x_n = (\arctan 1)^n$; (D, radical)

(2) $x_n = \sqrt{n} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$; (D, comparație la limită)

(3) $x_n = \frac{1}{n - \ln n}$; (D, comparație la limită)

(4) $x_n = (-1)^n \frac{n+1}{n^3}$; (C, Leibniz)

(5) $x_n = \frac{\ln n}{2n^3 - 1}$; (C, comparație)

(6) $x_n = \frac{\sqrt[n]{2}}{n^2}$; (C, comparație/integral)

(7) $x_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}}$; (C, comparație)

(8) $x_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$; (C, integral)

(9) $x_n = \frac{\ln n}{n^2}$; (C, comparație)

(10) $x_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}$; (D, comparație la limită)

(11) $x_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$; (C, Leibniz)

(12) $x_n = \dfrac{(-1)^n n!}{(2n)!}$; (C, Leibniz)

(13) $x_n = \dfrac{\arctan n}{n^2 + 1}$; (C, comparație/integral)

(14) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\ln(n+1)}$; (D, necesar)

(15) $x_n = (-1)^{n+1} \dfrac{2n+1}{3^n}$; (C, Leibniz)

(16) $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n}{n^2}$; (parțial 2018–2019)

(17) $x_n = (-1)^n \dfrac{n}{n^2 - 1}$; (parțial 2018–2019)

(18) $x_n = (-1)^n(\sqrt{n^2+1} - n)$; (parțial 2018–2019)

(19) $x_n = \dfrac{a^n}{2n^2 + 1}$; (discuție după a)

(20) $x_n = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{n^n}$; (parțial FIA)

(21) $x_n = \left(\dfrac{n}{n+a}\right)^{n^2}, a > 0$; (discuție după a)

(22) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n} \cdot n!}$ (parțial FIA)

(23) $x_n = \dfrac{a^n}{n^3}, a > 0$. (discuție după a)

SEMINAR 5

SPAȚII METRICE

5.1 Noțiuni teoretice

Definiție 5.1: Fie X o mulțime nevidă. O aplicație $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ se numește *distanță* (metrică) pe X dacă:

(a) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

(b) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(c) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$;

(d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*inegalitatea triunghiului*).

În acest context, perechea (X, d) se numește *spațiu metric*.

Această noțiune generalizează calculul distanțelor cu ajutorul modulului, cum se procedează în cazul mulțimii numerelor reale, de exemplu. În consecință, avem că $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ este spațiu metric.
Principala noțiune teoretică de interes folosește următoarea:

Definiție 5.2: Fie (X, d) un spațiu metric și fie $f : X \longrightarrow X$ o funcție.
Aplicația f se numește *contracție* pe X dacă există $k \in [0, 1)$ astfel încît:

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Numărul k se numește *factor de contracție*.

Rezultatul fundamental este:

Teoremă 5.1 (Banach)**:** *Fie (X, d) un spațiu metric complet*[1] *și fie $f : X \longrightarrow X$ o contracție de factor k. Atunci există un unic punct $\xi \in X$ astfel încît $f(\xi) = \xi$.*

În acest context, ξ se numește punct fix *pentru f.*

Putem folosi *metoda aproximațiilor succesive* pentru a găsit punctul fix al unei aplicații. Se construiește un șir recurent astfel. Fie $x_0 \in X$ arbitrar. Definim șirul $x_{n+1} = f(x_n)$. Se poate demonstra că șirul x_n este convergent, iar limita sa este punctul fix căutat. În plus, eroarea aproximației cu acest șir este dată de:

$$d(x_n, \xi) \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x_0, x_1), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

5.2 Exemplu rezolvat

Vom aproxima cu o eroare mai mică decît 10^{-3} soluția reală a ecuației

$$x^3 + 4x - 1 = 0.$$

Soluție: Folosind, eventual, metode de analiză (e.g. șirul lui Rolle), se poate arăta că ecuația are o singură soluție reală $\xi \in (0, 1)$. Folosim mai departe metoda aproximațiilor succesive pentru a o găsi.

Fie $X = [0, 1]$ și $f : X \longrightarrow X, f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$. Se vede că, pînă la o translație (constantă), ecuația dată este echivalentă cu $f(x) = x$, adică a găsi un punct fix pentru f.

Spațiul metric X este complet, ca orice subspațiu al lui $\mathbb{R}$. Mai demonstrăm că f este contracție pe X. Derivata este:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)^2} \Longrightarrow \sup_{x \in X} |f'(x)| = -f'(1) = \frac{2}{25} < 1.$$

Am obținut că f este o contracție de factor $\dfrac{2}{25}$.

Construim șirul aproximațiilor succesive. Alegem $x_0 = 0$ (pentru simplitate) și:

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{x_n^2 + 4}.$$

Evaluarea erorii:

$$|x_n - \xi| < \frac{k^n}{1-k}|x_0 - x_1| = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{25}\right)^2 \leq 10^{-3}$$

de unde rezultă că putem lua:

$$\xi \simeq x_3 = f\left(\frac{16}{65}\right) \simeq 0,235.$$

Observație 5.1: Alternativ, puteam lucra cu $g(x) = \dfrac{1}{4}(1 - x^3)$, cu $x \in [0, 1]$. Se arată că și g este o contracție, de factor $k = \dfrac{3}{4}$. În acest caz, șirul aproximațiilor succesive converge mai încet și avem $\xi \simeq x_6$.

5.3 Exerciții propuse

Găsiți soluția reală a ecuațiilor de mai jos, cu eroarea ε:

(a) $x^3 + 12x - 1 = 0$, $\varepsilon = 10^{-3}$;

(b) $x^5 + x - 15 = 0$, $\varepsilon = 10^{-3}$;

(c) $3x + e^{-x} = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$;

(d) $x^3 - x + 5 = 0$, $\varepsilon = 10^{-2}$;

(e) $x^5 + 3x - 2 = 0$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

SEMINAR 6

ȘIRURI DE FUNCȚII

6.1 Convergență punctuală și convergentă uniformă

Fie (f_n) un șir de funcții, adică fiecare $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcție reală. Dacă în cazul șirurilor de numere reale, limita este un număr real, în cazul șirurilor de funcții, limita este o funcție.

Însă noțiunea de convergență este mai fină în cazul șirurilor de funcții.

Astfel, avem două tipuri de convergență:

Definiţie 6.1: Fie (f_n) un șir de funcții reale ca mai sus.

Spunem că șirul (f_n) *converge punctual (simplu)* la funcția f dacă are loc:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in D.$$

Vom nota aceasta pe scurt prin $f_n \xrightarrow{pc} f$ sau $f_n \xrightarrow{s} f$, iar funcția f se va numi *limita punctuală* a șirului (f_n).

De asemenea, un alt tip de convergență de interes este *convergența uniformă.* Formal, ea se definește folosind criterii de caracterizare cu ε, dar în exerciții vom folosi cel mai des teorema de mai jos.

Teoremă 6.1: *În condițiile și cu notațiile de mai sus, spunem că șirul (f_n) converge uniform la funcția f, notat $f_n \xrightarrow{uc} f$ sau $f_n \xrightarrow{u} f$ dacă:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Evident, funcția f folosită în convergența uniformă va fi limita punctuală a șirului, deci este clar că proprietatea de convergență uniformă o implică pe cea de convergență punctuală.

Proprietatea reciprocă este falsă, după cum se vede din exemplul simplu de mai jos.

Fie $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n, \forall n \geq 1$.

Atunci se poate vedea imediat că:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Rezultă că $f_n \xrightarrow{s} f$, unde f este funcția definită pe ramuri mai sus.

Un calcul simplu arată însă că:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0,$$

deci șirul nu este uniform convergent.

6.2 Transferul proprietăților analitice

În continuare, ne punem problema următoare: presupunem că fiecare termen al șirului de funcții (f_n) are o proprietate analitică de un anumit tip (privitoare la continuitate, derivabilitate, integrabilitate etc.). Întrebarea este care dintre aceste proprietăți se transferă și funcției limită (punctuală sau uniformă) și în ce condiții.

În tot ceea ce urmează, vom păstra notațiile și ipoteza de mai sus, adică vom lucra cu șirul de funcții (f_n), cu fiecare $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Teoremă 6.2 (Transfer de continuitate)**:** *Dacă fiecare f_n este funcție continuă, pentru orice n, iar șirul (f_n) converge uniform la funcția f, atunci funcția f este continuă.*

Proprietatea de mai sus poate fi folosită ca o condiție suficientă în felul următor: dacă limita simplă a unui șir de funcții nu este continuă, atunci șirul nu poate fi uniform convergent. Aceasta deoarece funcția care este limita simplă a șirului este singurul candidat pentru convergența uniformă.

Teoremă 6.3 (Integrare termen cu termen)**:** *Dacă $f_n \xrightarrow{u} f$, atunci are loc proprietatea de integrare termen cu termen, adică:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \quad \forall [a,b] \subseteq D.$$

Cu alte cuvinte, în ipoteza convergenței uniforme, limita și integrala pot comuta.

Teoremă 6.4 (Derivare termen cu termen)**:** *Presupunem că funcțiile f_n sînt derivabile, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Dacă $f_n \xrightarrow{s} f$ și dacă există o funcție $g : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încît $f'_n \xrightarrow{u} g$, atunci f este derivabilă și $f' = g$.*

6.3 Exerciții

1. Să se studieze convergența punctuală și uniformă a șirurilor de funcții:

(a) $f_n : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}, n \geq 0;$

(b) $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n - x^{2n}, n \geq 0;$

(c) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}, n > 0;$

(d) $f_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2};$

(e) $f_n : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x};$

(f) $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2};$

(g) $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{x+n}{x+n+1};$

(h) $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}.$

2. Să se arate că șirul de funcții dat de:

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan x^n$$

converge uniform pe $\mathbb{R}$, dar:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right)'_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(1).$$

Rezultatele diferă deoarece șirul derivatelor nu converge uniform pe $\mathbb{R}$.

3. Să se arate că șirul de funcții dat de:

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nxe^{-nx^2}$$

este convergent, dar:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Rezultatul se explică prin faptul că șirul nu este uniform convergent. De exemplu, pentru $x_n = \frac{1}{n}$, avem $f_n(x_n) \longrightarrow 1$, dar, în general, $f_n(x) \longrightarrow 0$.

SEMINAR 7

SERII DE FUNCȚII

Șirurile de funcții studiate în seminarul anterior se pot studia și în *serii de funcții*, cu forma generală $\sum f_n(x)$, pentru $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, un șir de funcții. Convergența acestora se studiază folosind *criteriul lui Weierstrass.*

Teoremă 7.1 (Weierstrass)**:** *Fie* $\sum f_n(x)$ *o serie de funcții, cu* $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *și fie* $\sum a_n$ *o serie convergentă de numere reale pozitive.*

Dacă $|f_n(x)| \leq a_n$, *pentru orice* $x \in [a, b]$ *și* $n \geq N$, *cu* N *fixat, atunci seria de funcții* $\sum f_n(x)$ *este uniform convergentă pe* $[a, b]$.

În exercițiii, pentru a găsi termenul general al seriei numerice a_n, studiem funcțiile $f_n(x)$, cărora le căutăm valoarea maximă. Astfel, inegalitatea cerută:

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in [a, b], n \geq N$$

este automată.

7.1 Exerciții

1. Studiați convergența seriilor de funcții:

(a) $\sum \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$, cu $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$;

(b) $\sum \frac{nx}{1 + n^5 x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

(c) $\sum \frac{\cos(3^n x)}{2^n}$, $x \in \mathbb{R}$;

(d) $\sum x^n(1-x), x \in [0,1]$;

(e) $\sum \dfrac{(x+n)^2}{n^4}, x \in [0,2]$;

(f) $\sum \dfrac{\ln(1+nx)}{nx^n}, x > 0$;

(g) $\sum \dfrac{xe^{-nx}}{\sqrt{n}}, x \geq 0$;

(h) $\sum ne^{-nx}, x \geq 1$.

Indicații: În fiecare caz, se găsește valoarea maximă a funcției $|f_n|$, pe care o notăm cu a_n, apoi studiem convergența seriei numerice $\sum a_n$.

7.2 Serii de puteri

Seriile de puteri sînt cazuri particulare ale seriilor de funcții, în care funcțiile sînt polinomiale. De aceea, în general, o serie de puteri se va nota:

$$\sum a_n(x-\alpha)^n, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

care se numește *serie de puteri centrată în $x = \alpha$* sau *serie de puteri ale lui $x - \alpha$*.

În general, o serie de puteri este absolut convergentă pentru $x \in (\alpha - R, \alpha + R)$, unde $R \in \mathbb{R}$ se numește *raza de convergență* și se calculează după una dintre formulele:

- $R = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$;
- $R = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

În plus, se studiază separat cazurile $x = \pm R$.

7.3 Exerciții

1. Să se calculeze raza de convergență și mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

(a) $\sum_{n \geq 0} x^n$;

(b) $\sum_{n \geq 1} n^n x^n$;

(c) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$;

(d) $\sum_{n\geq 1}\dfrac{n^n x^n}{n!}$;

(e) $\sum \dfrac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$;

(f) $\sum \dfrac{(x+3)^n}{n^2}$.

(g) $\sum \dfrac{n-1}{n^2+2}(x-2)^2$;

(h) $\sum \dfrac{n+1}{\sqrt{n^4+n^3+1}}\left(\dfrac{x+1}{2x+3}\right)$.

2. Găsiți mulțimea de convergență și suma seriilor:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{2n+1}x^n$; (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n}{n+1}x^n$.

Indicații: Se pornește de la seria geometrică, pentru cazul convergent:

$$S(x)=\sum x^n=\frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,1).$$

Putem să o derivăm sau integrăm termen cu termen și obținem serii convergente pe același domeniu:

$$S'(x)=\sum nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1)$$
$$\int S(x)dx=\sum\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-x),\quad x\in(-1,1).$$

Se prelucrează seriile date pînă se ajunge la una dintre aceste formule:

(a) se derivează termen cu termen;

(b) se notează $2x=\pm t^2$, în funcție de semnul lui x;

(c) se descompune, folosind $\dfrac{n}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}$, apoi cele două serii se studiază separat.

Dacă este necesar, se poate și înmulți sau împărți prin x.

Atenție! Pentru $x=0$, majoritatea metodelor de mai sus nu funcționează, dar avem $S(0)=0$, ca valoare particulară.

7.4 Serii Taylor

Orice funcție cu anumite proprietăți poate fi aproximată cu un polinom:

Definiție 7.1: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis și $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă $\mathcal{C}^m(I)$. Pentru orice $a \in I$, definim *polinomul Taylor* de gradul $n \leq m$ asociat funcției f în punctual a prin:

$$T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Restul (eroarea de aproximare) este definit prin:

$$R_{n,f,a} = f(x) - T_{n,f,a}(x).$$

Acest polinom poate fi mai departe utilizat pentru a studia *seria Taylor* asociată unei funcții.

Teoremă 7.2: *Fie $a < b$ și $f \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$ astfel încît să existe $M > 0$ cu proprietatea că $\forall n \in \mathbb{N}$ și $x \in [a,b]$, avem $|f^{(n)}(x)| \leq M$.*

Atunci pentru orice $x_0 \in (a,b)$, seria Taylor a lui f în jurul punctului x_0 este uniform convergentă pe $[a,b]$ și suma ei este funcția f, adică avem:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x \in [a,b].$$

Pentru cazul particular $x_0 = 0$, seria se numește *Maclaurin.*

Serii Taylor uzuale, pentru funcții elementare, împreună cu domeniile de convergență, sînt date mai jos:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n, x \in \mathbb{R} \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n\geq 0} x^n, |x| < 1 \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n, |x| < 1 \\
\cos x &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, x \in \mathbb{R} \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, |x| < 1, \alpha \in \mathbb{R} \\
\arctan x &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, |x| \leq 1.
\end{aligned}$$

Seriile pentru alte funcții se pot obține fie prin calcul direct, fie prin derivare sau integrare termen cu termen a seriilor de mai sus.

7.5 Exerciții

1. Să se dezvolte următoarele funcții în serie Maclaurin, precizînd și domeniul de convergență:

(a) $f(x) = e^x$;

(b) $f(x) = \sin x$;

(c) $f(x) = \cos x$;

(d) $f(x) = (1 + x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$;

(e) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$;

(f) $f(x) = \ln(1 + x)$;

(g) $f(x) = \arctan x$;

(h) $f(x) = \ln(1 + 5x)$;

(i) $f(x) = \ln(2 + 3x)^3$;

(j) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$;

(k) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

2. Să se calculeze polinomul Taylor de grad 3 în jurul originii pentru funcțiile:

(a) $f(x) = 3\ln(2 + x)$;

(b) $f(x) = \arctan x$;

(c) $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$.

3. Găsiți aproximarea liniară și pătratică a funcțiilor:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$;

(b) $f(x) = \sin(\cos x)$;

(c) $f(x) = e^{\sin x}$;

(d) $f(x) = \arcsin x$.

4. Calculați mulțimea de convergență și suma seriei:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n-1}}{5^n}.$$

5. Calculați cu o eroare mai mică decît 10^{-3} integralele:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$;

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^{1} e^{-x^2} dx$;

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$;

(e) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-e^x}{x} dx$;

6. Folosind dezvoltarea în serie Taylor, calculați cu o eroare de maximum 10^{-3}:

(a) $\sqrt[3]{65}$;

(b) $\sqrt[4]{10005}$;

(c) $\cos\dfrac{1}{2}$;

(d) $\sin\dfrac{1}{3}$;

(e) $3\arctan\dfrac{1}{2}$;

(f) $e^{-0,2}$;

(g) $\ln(1,1)$;

(h) $\ln 4$;

(i) $\ln 5$.

7. Estimați eroarea pentru calculele de la exercițiul anterior.

8.

(a) Fie funcția $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

   (i) Scrieți polinoamele Taylor T_1 și T_2 în jurul originii.

   (ii) Calculați $\sqrt[3]{29}$ folosind T_2.

   (iii) Estimați eroarea calculului de mai sus.

(b) Fie funcția $f(x) = \sin x + \cos x, x \in [0, \pi]$.

   (i) Scrieți polinoamele Taylor T_1 și T_2 în jurul originii.

   (ii) Calculați $\sqrt{2}$ folosind T_2.

   (iii) Estimați eroarea calculului de mai sus.

(c) Fie funcția $f(x) = \ln(1 + 3x)^2$.

   (i) Scrieți polinoamele Taylor T_1 și T_2 în jurul originii.

   (ii) Calculați $\ln 49$ folosind T_2.

   (iii) Estimați eroarea calculului de mai sus.

(d) Fie funcția $f(x) = \arctan \sqrt{x+1}, x \geq 0$.

   (i) Scrieți polinoamele Taylor T_1 și T_2 în jurul originii.

   (ii) Calculați $\arctan 0,1$ folosind T_2.

   (iii) Estimați eroarea calculului de mai sus.

SEMINAR 8

FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

8.1 Limite și continuitate

În cazul funcțiilor de mai multe variabile, atît studiul continuității, cît și al derivabilității și calculului limitelor sau derivatelor parțiale, se fac cu variabilele pe rînd, adică dînd prioritate uneia dintre ele și considerînd pe celelalte drept parametri.

8.1.1 Exerciții rezolvate

1. Să se arate, folosind definiția, că următoarele funcții nu au limită în origine:

(a) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0)$;

(b) $f(x,y) = \dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}, (x,y) \neq (0,0)$.

Soluție: Vom folosi definiția cu șiruri, punînd în evidență șiruri de puncte, convergente către $(0,0)$.

(a) Folosim șiruri de puncte care se află pe drepte care trec prin origine. Aceste drepte au ecuații de forma $y = mx$. Dacă funcția ar avea limită în origine, ar trebui ca:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0, y=mx} \frac{2x(mx)}{x^2+x^2m^2} = \frac{2m}{1+m^2}.$$

Cu această limită depinde de șirul folosit (de m, mai exact), rezultă că limita nu există, în general.

(b) Calculăm, similar:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0, y=mx} \frac{m^2x^2+2x}{m^2x^2-2x} = -1.$$

Însă, dacă luăm $y^2 = px$, adică $(x, y) \longrightarrow (0,0)$ pe parabola care trece prin origine, cu $p \in \mathbb{R} - \{2\}$, obținem:

$$\lim_{x \to 0, y^2 = px} \frac{px + 2x}{px - 2x} = \frac{p+2}{p-2}.$$

Rezultă că, pentru șiruri diferite, obținem limite diferite, deci funcția nu are limită în origine.

2. Să se calculeze limitele:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x}$;

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$.

Soluție: (a) Calculăm direct:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} &= \lim_{u\to 0} \frac{u}{\sqrt{u+1}-1} \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{(\sqrt{u+1}+1)u}{u} \\ &= 2.\end{aligned}$$

(b) Similar:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{xy} \cdot y = 2.$$

(c) Pentru $x, y > 0$, avem:

$$0 < \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} \le \frac{x}{x^2} + \frac{y}{y^2}.$$

Cum $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 0$, rezultă că și limita inițială este nulă.

3. Să se arate că funcția:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 + \sin(x^3+y^5)}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este continuă parțial în origine, dar nu este continuă în acest punct.

Soluție: Considerăm variabilele separat. Funcția:

$$f(x,0)=\begin{cases}\dfrac{\sin x^3}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

este continuă în origine, deoarece $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=0=f(0,0)$.

Similar, funcția $f(0,y)$ este continuă în $y=0$.

Dar funcția $f(x,y)$ nu este continuă în origine, deoarece avem:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{x\to 0, y^2=px} \frac{px^2+\sin(x^3+p^{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}})}{x^2+p^2x^2}\\ &= \lim_{x\to 0, y^2=px}\left[\frac{p}{1+p^2}+\frac{\sin(x^3+p^{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}})}{x^3+p^{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{x^3+p^{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{x^2+p^2x^2}\right]\\ &= \frac{p}{1+p^2},\end{aligned}$$

care depinde de p.

4. Să se arate că funcția:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte, dar nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor.

Indicație: Considerăm $y=b$, fixat. Avem $f(x,b)$ continuă. Similar, $f(a,y)$.

Pentru continuitatea globală în origine, luăm $y=mx$ și obținem o limită care depinde de m.

5. Să se arate că funcția:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy+x^2y\ln|x+y|}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

este continuă parțial în origine, dar nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor în acest punct.

Indicație: Limitele iterate în origine sînt ambele nule, indiferent de ordine.

Însă pentru $x\longrightarrow 0$ și $y=mx$, limita globală depinde de m.

8.2 Derivate parțiale

Dată o funcție de mai multe variabile, se pot calcula derivatele parțiale ale acesteia în funcție de fiecare dintre variabile, pe rînd. De exemplu, fie funcția:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 3x \sin y + e^y + 4xy.$$

Calculăm:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \sin y + 4y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x \cos y + e^y + 4x.$$

Mai departe, putem calcula și derivatele de ordin superior, după regula:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

și similar pentru celelalte derivate parțiale, adică $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, respectiv $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

De asemenea, pentru o funcție de două variabile $f = f(x, y)$, se definește *laplacianul* funcției ca fiind:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Definiția se extinde natural pentru n variabile.

Dacă f este astfel încît $\Delta f = 0$, atunci funcția f se numește *armonică.*

În plus, dată o funcție de două variabile $f = f(x, y)$, se definește *diferențiala totală df* ca fiind:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Similar se poate defini pentru funcții de n variabile, precum și diferențiala totală de ordinul 2:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy.$$

8.3 Exerciții

0. Calculați următoarele derivate parțiale folosind definiția:

(a) pentru $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 5y^2 - 3x + 2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$;

(b) pentru $f(x, y) = 5x^2 + xy - 3x + 2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1)$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$;

(c) pentru $f(x, y) = 3x - 2y^2 + 2xy + 5$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 0)$.

1. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi pentru funcțiile:

(a) $f(x,y) = e^{x-y^2}$;

(b) $f(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y} + \arctan\dfrac{y}{x}$;

(c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$;

(d) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

(e) $f(x,y) = x^{\sqrt{y}}$.

2. Calculați derivatele parțiale de ordinul întâi pentru funcțiile compuse:

(a) $f(x,y) = \ln(u^2+v)$, $u(x,y) = e^{x+y^2}$, $v(x,y) = x^2+y$;

(b) $f(x,y) = \varphi(2xe^y + 3y\sin 2x)$;

(c) $f(x,y) = \varphi(u,v,w)$, unde $u(x,y) = xy$, $v(x,y) = x^2+y^2$ și $w(x,y) = 2x+3y$;

(d) $f(x,y) = \arctan\dfrac{2u}{v}$, unde $u(x,y) = x\sin y$ și $v(x,y) = x\cos y$;

3. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi și al doilea pentru funcțiile:

(a) $f(x,y) = e^x\cos y$;

(b) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, $(x,y) \neq (0,0)$;

(c) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $(x,y) \neq (0,0)$;

(d) $f(x,y) = x^3 + xy$;

(e) $f(x,y,z) = y\sin(x+z)$;

(f) $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$, $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.

4. Să se calculeze derivatele parțiale în punctele indicate:

(a) $f(x,y) = 2x^2 + xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,2)$;

(b) $f(x,y) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(c) $f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$;

(d) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-2,2)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-2,2)$;

(e) $f(x,y)=xy\ln x$, $x\neq 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y}\partial x(1,1)$.

5. Arătați că funcțiile următoare verifică ecuațiile indicate:

(a) $f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

(b) $f(x,y,z)=\varphi(xy,x^2+y^2+z^2)$,

$$xz\frac{\partial f}{\partial x}-yz\frac{\partial f}{\partial y}+(y^2-x^2)\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

(c) $f(x,y)=y\varphi(x^2-y^2)$,

$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{y^2}f(x,y);$$

(d) $f(x,y,z)=\dfrac{xy}{z}\ln x+x\varphi\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{z}{x}\right)$, pentru $x>0$ și $z\neq 0$, ecuația fiind:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{xy}{z}-f(x,y,z)=0.$$

6. Verificați dacă următoarele funcții sînt armonice:

(a) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$;

(b) $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$;

(c) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;

(d) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

(e) $f(x,y)=(x^2+y^2)^{-1}$;

(f) $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1}$.

7. Fie funcția $f(x, y) = xy\varphi\left(\ln(x+y) + \frac{x}{y}\right)$, unde $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x, y) = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{x+y}{xy}f(x, y).$$

SEMINAR 9

EXTREME LIBERE

9.1 Polinomul Taylor în 2 variabile

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două variabile, de clasă $\mathcal{C}^\infty$. *Polinomul Taylor* al lui f în jurul punctului $A(x_0, y_0)$ se scrie:

$$\begin{aligned}
T(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \frac{1}{1!}\Big[(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(A) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(A)\Big] + \\
&+ \frac{1}{2!}\Big[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)\Big] + \\
&+ \frac{1}{3!}\Big[(x-x_0)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(A) + 3(x-x_0)^2(y-y_0)\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y}(A) + \\
&+ 3(x-x_0)(y-y_0)^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}(A) + (y-y_0)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(A)\Big] \\
&+ \ldots
\end{aligned}$$

Gradul polinomului Taylor este dat de ordinul ultimei derivate parțiale care se calculează. Astfel, avem, în particular:

$$\begin{aligned}
T_1(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\Big[(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(A) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(A)\Big] \\
T_2(x,y) &= T_1(x,y) + \frac{1}{2!}\Big[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)\Big].
\end{aligned}$$

9.2 Extreme libere

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două variabile. Pentru a găsi punctele de extrem ale funcției, parcurgem următoarele etape:

(1) rezolvăm sistemul de ecuații dat de anularea derivatelor parțiale:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = 0 \end{cases}$$

Soluțiile acestui sistem se numesc *puncte critice* ale funcției.

(2) scriem *matricea hessiană* a funcției, adică:

$$H_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

(3) Evaluăm matricea în fiecare punct critic. Astfel, dacă $A(x_0, y_0)$ este punct critic, calculăm $H_f(x_0, y_0)$;

(4) Determinăm *valorile proprii*[1] $\lambda_{1,2}$ ale matricei hessiene, adică rădăcinile polinomului caracteristic $P_M(X) = \det(M - XI_2)$, unde $M = H_f(x_0, y_0)$.

- Dacă $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, atunci punctul $A(x_0, y_0)$ este *punct de minim local*;
- Dacă $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, atunci punctul $A(x_0, y_0)$ este *punct de maxim local*;
- Dacă $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, atunci punctul $A(x_0, y_0)$ *nu este de extrem*;
- Dacă $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, problema necesită un studiu separat, acesta fiind un caz mai dificil și pe care îl omitem. Formal, trebuie studiat semnul diferenței $f(x, y) - f(x_0, y_0)$, pentru fiecare punct critic $A(x_0, y_0)$, iar pentru aceasta se folosește polinomul Taylor.

(5) Se repetă procedura pentru fiecare punct critic.

Procedura de mai sus se aplică în cazul așa-numitelor *extreme libere*, adică atunci cînd domeniul este $D = \mathbb{R}^2$ sau un dreptunghi dat de un produs cartezian de intervale.

Pentru cazul cînd domeniul este dat de (in)ecuații, procedura este diferită și o vom exemplifica în seminarul următor.

[1] Există o metodă alternativă, aceea care se bazează pe *criteriul lui Sylvester* pentru forme pătratice, studiată la curs. Cîteva indicații teoretice puteți găsi și în notițele mele aici.

Vom prefera, în seminar, să folosim această metodă a valorilor proprii, însă.

9.3 Exerciții rezolvate

Fie funcția $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

(a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte.

(b) Pentru $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 5\}$, determinați punctele de extrem și valorile extreme.

Soluție:
(a) Punctele critice se determină din anularea derivatelor parțiale. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 6x.$$

Se obțin $A(0, 0)$ și $B(2, 2)$.
Apoi matricea hessiană:

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 6y \end{pmatrix}$$

Pentru $A(0, 0)$, hessiana este:

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = M.$$

Polinomul caracteristic $P_M(X) = \det(M - XI_2) = X^2 - 36 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 6$. Rezultă că punctul A nu este de extrem.
Pentru $B(2, 2)$, hessiana este:

$$H_f(B) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} = M.$$

Polinomul caracteristic $P_M(X) = (12 - X)^2 - 36 \Longrightarrow \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 18$. Cum ambele valori proprii sînt pozitive, punctul B este punct de minim local.
Valoarea minimă a funcției este $f(2, 2) = -8$.

(b) Problema se studiază pe 2 cazuri: pe interiorul lui D și pe frontiera lui D.
Pentru frontieră, avem $x \geq 0, y \geq 0$ și $x + y = 5$. Atunci putem studia funcția $g(x) = f(x, 5 - x) = 21x^2 - 105x + 125$, care are un punct de minim în vîrful acestei parabole. Se obține $f(2,5; 2,5) = -6,25$. De asemenea, mai avem și valorile $f(0, 5) = 125$, respectiv $f(5, 0) = 125$.
Apoi mai avem de studiat cazurile $y = 0, x \in [0, 5]$, deci funcția $f(x, 0) = h(x)$, precum și $x = 0, y \in [0, 5]$, deci funcția $f(0, y) = j(y)$.

Pentru interiorul domeniului, avem:

$$\text{Int}(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 5\}.$$

Putem folosi calculele din cazul anterior și constatăm că $B(2, 2) \in \text{Int}(D)$, deci avem o valoare de minim pe interior, cu $f(2, 2) = -8$.

Așadar, răspunsul final este $\max f = 125$ și $\min f = -8$.

9.4 Exerciții propuse

1. Determinați punctele de extrem și valorile extreme pentru funcțiile:

(a) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y + 3$;

(b) $f(x, y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9$, definită (i) pe $\mathbb{R}^2$ și (ii) pe $[-4, 4] \times [-3, 3]$;

(c) $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$, definită (i) pe $\mathbb{R}^2$ și (ii) pe $[-1, 2] \times [0, 2]$;

(d) $f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$ definită (ii) pe $\mathbb{R}^2$ și (ii) pe $D = \{x \geq 0, y \geq 0, 3y + x \leq 3\}$;

(e) $f(x, y) = xy(1 - x - y)$, definită pe $[0, 1] \times [0, 1]$;

(f) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 2xy$, definită pe $D = \{x, y \geq 0, y + 2x \leq 2\}$;

(g) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y - 6z$, definită pe $\mathbb{R}^3$;

(h) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x + y - 2z$, definită pe $\mathbb{R}^3$;

(i) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{z} + z$, definită pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

În toate exercițiile de mai sus este recomandabil să reprezentați grafic domeniile de definiție atunci cînd sînt mărginite.

2. Fie funcția $f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2)$. Calculați polinoamele Taylor de gradul 1 și respectiv 2, T_1, T_2 în jurul punctului $(1, 0)$.

3. Aceeași cerință pentru funcția $f(x, y) = 3xe^{x^2+y^2}$ și pentru funcția $g(x, y) = \arctan \dfrac{x}{y}$.

4. Fie funcția: $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x - y$.

Pentru $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -x^2 + 2x\}$, determinați valoarea minimă și valoarea maximă a funcției.

SEMINAR 10

EXTREME CU LEGĂTURI

10.1 Generalități

În cazul în care domeniul de definiție este specificat cu o ecuație sau este dat de un produs de intervale, se aplică o metodă specifică, numită, în general, *metoda multiplicatorilor lui Lagrange.*

Astfel, fie funcția $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ca mai sus, căreia vrem să îi determinăm extremele și presupunem că vrem să o facem numai într-un domeniu dat de:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}.$$

Atunci, ecuația $x^2 + y^2 = 4$ se numește *legătură* și o scriem sub forma unei funcții $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, pentru ca legătura să devină $g(x, y) = 0$.

Cu aceasta, metoda multiplicatorilor lui Lagrange înseamnă să alcătuim *funcția lui Lagrange*[1]:

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cu aceasta, singura modificare care trebuie aplicată metodei de mai sus este că sistemul pentru găsirea punctelor critice devine:

$$\begin{cases} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \Longrightarrow (x, y, \lambda). \\ g &= 0 \end{cases}$$

Pentru punctele critice, ne putem dispensa de λ, iar rezolvarea funcționează ca mai devreme.

[1]Detalii și explicații geometrice sînt date, de exemplu, foarte clar în această lecție video.

Observaţie 10.1: Nu întotdeauna este nevoie să ne complicăm cu funcția lui Lagrange. Dacă, de exemplu, legătura era $x + y = 3$, putem să o scriem ca $y = 3 - x$, iar funcția inițială devine o funcție de o variabilă, $f(x, 3 - x)$, căreia îi studiem extremele ca în liceu.

Observaţie 10.2: Dacă legăturile sînt multiple, de exemplu, $g_1, g_2, g_3, \dots, g_k$, funcția lui Lagrange corespunzătoare este:

$$F(x, y) = f(x, y) - \sum \lambda_i g_i(x, y),$$

iar sistemul de rezolvat este dat de anularea derivatelor parțiale și a tuturor legăturilor.

10.1.1 Cazul compact

Dacă domeniul de definiție este un *spațiu compact* — ceea ce, în esență, pentru uzul acestui seminar înseamnă un produs de intervale (semi)închise sau legături date de inegalități —, problema se studiază în două etape:

- **În interiorul domeniului**, caz în care legătura este inexistentă;
- **Pe frontieră**, caz în care legătura este dată de egalitate.

De exemplu, pentru domeniile:

$$D_1 = [3, 4] \times [1, 5], \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y \leq 2\}$$

- Interiorul înseamnă:
  - pentru D_1, $\text{Int}D_1 = (3, 4) \times (1, 5)$, caz în care avem doar de verificat că punctele critice se găsesc în intervalele date;
  - pentru D_2, avem legătura $3x + 2y < 2$, caz în care, din nou, verificăm dacă punctele critice satisfac inegalitatea *strictă*.
- Frontierele înseamnă:
  - pentru D_1, cazurile separate $x = 3, y \in [1, 5]$, apoi $x = 4, y \in [1, 5]$ și invers;
  - pentru D_2, legătura devine $3x + 2y = 2$, pe care o putem rezolva cu Lagrange sau cu metoda simplificată din observația 10.1.

10.2 Exerciții

1. Să se determine valorile extreme ale funcțiilor f, cu legătura g în cazurile:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1, g(x, y) = x + y - 2$;

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y + 1, g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1$;

(c) $f(x, y) = 3x + 4y, g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 25$

2. Să se determine valorile extreme pentru funcțiile f, definite pe mulțimea D:

(a) $f(x, y) = 5x^2 + 4xy + 8y^2, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$;

(b) $f(x, y) = xy^2(x + y - 2), D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 3, x, y \geq 0\}$;

(c) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{1 + xy}, D = [0, 1] \times [0, 1]$;

(d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + xz - yz, D = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1, x, y, z \geq 0\}$.

INDEX