Analiză 1

Notițe de seminar

Adrian Manea
Curs: R. Purnichescu-Purtan

21 ianuarie 2021

Cuprins

SEMINAR 1

ȘIRURI DE NUMERE REALE ȘI POZITIVE

1.1 Exerciții recapitulative

În toate cele de mai jos, presupunem că lucrăm cu șiruri de numere reale și pozitive.

1. Găsiți valoarea de adevăr a afirmațiilor de mai jos. Dacă sînt adevărate, justificați. Dacă sînt false, găsiți un contraexemplu.

(a) Orice șir monoton este mărginit.

(b) Orice șir mărginit este monoton.

(c) Orice șir convergent este monoton.

(d) Orice subșir al unui șir monoton este monoton.

(e) Suma a două șiruri monotone este un șir monoton.

(f) Orice șir divergent este nemărginit.

(g) Dacă șirul format din pătratele termenilor unui șir este convergent, atunci șirul inițial este convergent.

2. Calculați limitele șirurilor cu termenul general a_n în cazurile de mai jos:

(a) $a_n = \dfrac{n^3 + 5n^2 + 1}{6n^3 + n + 4}$;

(b) $a_n = \dfrac{n^2 + 2n + 5}{5n^3 - 1}$;

(c) $a_n = \arcsin \dfrac{n+1}{2n+3}$;

(d) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} + 4\sqrt{n^2+n+1}}{n}$;

(e) $a_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2}{n^3}$;

(f) $a_n = \dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

(g) $a_n = \sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2+n}$;

(h) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$;

(i) $a_n = \left(\dfrac{n+5}{3n+2}\right)^n$;

(j) $a_n = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{64} + \cdots + \dfrac{1}{4^n}$;

(k) $a_n = \dfrac{2 + \sin n}{n^2}$;

(l) $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$;

(m) $a_n = \dfrac{\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n}{n+1}$;

(n) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)$;

(o) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

(p) $a_n = \dfrac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}{n^5}$;

(q) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$;

(r) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1}\right)$.

SEMINAR 2

SERII DE NUMERE REALE POZITIVE

Intuitiv, o serie poate fi gîndită ca o sumă infinită, dată de o regulă a unui termen general. De exemplu, seria:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{3n}{5n^2 + 2n - 1}$$

are termenul general de forma $x_n = \dfrac{3n}{5n^2 + 2n - 1}$ și putem rescrie seria mai simplu $\sum x_n$, presupunînd implicit că indicele n ia cea mai mică valoare permisă și merge pînă la ∞.

Natura seriilor este fundamental diferită de cea a șirurilor prin faptul că seriile *acumulează*. De exemplu, să considerăm șirul constant $a_n = 1, \forall n$. Atunci, evident, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Pe de altă parte, dacă luăm seria de termen general a_n, adică $\sum a_n$, observăm că aceasta are suma ∞, deci este divergentă.

În continuare, vom studia criterii prin care putem decide dacă o serie este sau nu convergentă. Dar înainte de aceasta, vom folosi foarte des două serii particulare, pe care le detaliem în continuare.

2.1 Seria geometrică

Pornim de la progresiile geometrice studiate în liceu. Fie (b_n) o progresie geometrică, cu primul termen b_1 și cu rația q. Deci termenul general are formula $b_n = b_1 q^{n-1}$. Atunci suma primilor n termeni ai progresiei se poate calcula cu formula:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Dacă, însă, în această sumă considerăm „toți“ termenii progresiei, obținem *seria* geometrică, anume $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$.

Suma acestei serii coincide cu $\lim_{n\to\infty} S_n$ și se poate observa cu ușurință că seria geometrică este convergentă dacă și numai dacă $|q| < 1$. Mai mult, în caz de convergență, suma seriei se poate calcula imediat ca fiind $b_1 \cdot \frac{1}{1-q}$.

2.2 Seria armonică

Această serie se mai numește *funcția zeta a lui Riemann* și se definește astfel:

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{Q}.$$

Remarcăm cîteva cazuri particulare:

$$\begin{aligned}
\zeta(0) &= \sum 1 = \infty \\
\zeta(1) &= \sum \frac{1}{n} = \infty \\
\zeta(2) &= \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \\
\zeta(-1) &= \sum n = \infty \\
\zeta(-2) &= \sum n^2 = \infty.
\end{aligned}$$

Rezultatul general este:

Teoremă 2.1: *Seria armonică $\zeta(s)$ este convergentă dacă și numai dacă $s > 1$.*

2.3 Criterii de convergență

Ne păstrăm în continuare în contextul seriilor cu termeni reali și pozitivi, pe care le scriem în general $\sum x_n$.

Convergența poate fi decisă ușor folosind criteriile de mai jos.

Criteriul necesar: Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$, atunci seria $\sum x_n$ este divergentă.

Observaţie 2.1: Să remarcăm că, așa cum îi spune și numele, criteriul de mai sus dă doar condiții necesare, nu și suficiente pentru convergență! De exemplu, pentru $\zeta(1)$, termenul general tinde către 0, dar seria este divergentă.

Criteriul de comparație termen cu termen: Fie $\sum y_n$ o altă serie de numere reale și pozitive.

- Dacă $x_n \leq y_n, \forall n$, iar seria $\sum y_n$ este convergentă, atunci și seria $\sum x_n$ este convergentă;
- Dacă $x_n \geq y_n, \forall n$, iar seria $\sum y_n$ este divergentă, atunci și seria $\sum x_n$ este divergentă.

Acest criteriu seamănă foarte mult cu criteriul de comparație de la șiruri. Astfel, avem că un șir mai mare (termen cu termen) decît un șir divergent este divergent, iar un șir mai mic (termen cu termen) decît un șir convergent este convergent. Celelalte cazuri sînt nedecise.

De asemenea, mai remarcăm că, în studiul seriei $\sum x_n$ apare seria $\sum y_n$, care trebuie aleasă convenabil astfel încît să aibă loc condițiile criteriului. În practică, cel mai des vom alege această nouă serie ca fiind o serie geometrică sau una armonică, cu rația, respectiv exponentul alese convenabil.

Criteriul de comparație la limită: Fie $\sum y_n$ o altă serie de numere reale și pozitive, astfel încît $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0, \infty)$. Atunci cele două serii au aceeași natură, adică $\sum x_n$ este convergentă dacă și numai dacă $\sum y_n$ este convergentă.

Criteriul raportului: Fie $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

- Dacă $\ell > 1$, atunci seria $\sum x_n$ este divergentă;
- Dacă $\ell < 1$, atunci seria $\sum x_n$ este convergentă;
- Dacă $\ell = 1$, atunci criteriul nu decide.

Criteriul radical: Fie $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

- Dacă $\ell > 1$, atunci seria $\sum x_n$ este divergentă;
- Dacă $\ell < 1$, atunci seria $\sum x_n$ este convergentă;
- Dacă $\ell = 1$, atunci criteriul nu decide.

2.4 Exerciții

1. Studiați convergența seriilor $\sum x_n$ în cazurile de mai jos:

(a) $x_n = \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$; (D, necesar)

(b) $x_n = \frac{1}{n!}$; (C, raport)

(c) $x_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; (C, comparație la limită cu $\zeta(3/2)$)

(d) $x_n = \arcsin \frac{n+1}{2n+3}$; (D, necesar)

(e) $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$; (D, necesar)

(f) $x_n = \frac{n!}{n^{2n}}$; (C, raport)

(g) $x_n = \left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n$; (C, radical)

(h) $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$; (C, radical)

(i) $x_n = \frac{1}{7^n + 3^n}$; (C, comparație cu geometrică)

(j) $x_n = \frac{2 + \sin n}{n^2}$; (C, comparație cu armonică)

(k) $x_n = \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1}$; (C, comparație cu armonică)

(l) $x_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - n^2$; (D, comparație cu armonică)

2.5 Alte criterii de convergență. Serii oarecare

Pe lîngă criteriile prezentate în secțiunile anterioare, vor mai fi de folos și altele, pe care le enumerăm mai jos. În continuare, menționăm că vom lucra cu o serie de forma $\sum x_n$ și sîntem în ipoteza $x_n \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}$.

Criteriul Raabe-Duhamel: Fie limita următoare:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right).$$

Atunci:

- Dacă $\ell > 1$, seria este convergentă;
- Dacă $\ell < 1$, seria este divergentă;
- Dacă $\ell = 1$ criteriul nu decide.

În multe situații, criteriul Raabe-Duhamel este folositor cînd criteriul raportului nu decide. Remarcați că, în acest caz, limita de mai sus este o nedeterminare de forma $\infty \cdot 0$, care de multe ori se poate calcula și este diferită de 1.

Criteriul logaritmic: Fie limita:

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \frac{-\ln x_n}{\ln n}.$$

- Dacă $\ell > 1$, seria este convergentă;
- Dacă $\ell < 1$, seria este divergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

Criteriul condensării: Dacă (x_n) este un șir descrescător și cu termeni pozitivi, atunci seriile $\sum x_n$ și $\sum 2^n x_{2^n}$ au aceeași natură.

Criteriul integral: Fie $f : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ o funcție descrescătoare și definim șirul:

$$a_n = \int_1^n f(t)dt.$$

Atunci seria $\sum f(n)$ este convergentă dacă și numai dacă șirul (a_n) este convergent.

2.6 Exerciții

1. Studiați natura următoarelor serii cu termeni pozitivi, cu termenul general x_n dat de:

(a) $x_n = \dfrac{1}{\ln n}$; (D, integral/comparație)

(b) $x_n = \dfrac{1}{n \ln n}$; (D, integral/condensare)

(c) $x_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$ (D, Raabe)

(d) $x_n = \left(1 - \dfrac{3 \ln n}{2n}\right)^n$ (C, logaritmic)

(e) $x_n = \dfrac{1}{n \sqrt[n]{n}}$ (D, comparație/logaritmic)

(f) $x_n = \left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\ln(\ln n)}$; (D, logaritmic)

(g) $x_n = n^2 e^{-\sqrt{n}}$ (C, logaritmic)

(h) $x_n = \dfrac{a^n (n!)^2}{(2n)!}, a > 0.$ (raport, discuție a?4)

2.7 Serii alternante

În continuare, discutăm și cazul cînd termenii seriei pot fi negativi. Dar vom fi interesați doar de un caz particular, anume acela al seriilor *alternante*, adică acelea în care un termen este negativ, iar celălalt pozitiv. Mai precis, o serie $\sum x_n$ se numește *alternantă* dacă $x_n \cdot x_{n+1} < 0$, pentru orice n.

Singurul criteriu de convergență pe care îl folosim pentru aceste cazuri este:

Criteriul lui Leibniz: Fie $\sum_n (-1)^n x_n$ o serie alternantă. Dacă șirul (x_n) este descrescător și converge către 0, seria este convergentă.

De asemenea, vom mai fi interesați și de:

- *serii absolut convergente*, adică acele serii pentru care și seria modulelor, și seria dată sînt convergente;
- *serii semiconvergente*, adică acele serii pentru care seria inițială este convergentă, dar seria modulelor este divergentă.

Evident, cum $x \leq |x|$, rezultă că orice serie absolut convergentă este convergentă, dar reciproca nu este adevărată.

Pentru acest caz, avem:

Criteriul Abel-Dirichlet: Presupunem că seria $\sum x_n$ se mai poate scrie sub forma $\sum \alpha_n y_n$, unde (α_n) este un șir monoton și mărginit (deci convergent). Dacă și seria $\sum y_n$ este convergentă, atunci seria inițială $\sum \alpha_n y_n$ este convergentă.

Formulare alternativă: Dacă (α_n) este un șir monoton, care tinde către 0, iar șirul cu termenul general $Y_n = y_1 + \cdots + y_n$ este mărginit, atunci seria $\sum \alpha_n y_n$ este convergentă.

De exemplu, studiem seria $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{n}$. Este o serie alternantă, deci:

- seria modulelor este $\zeta(1)$, care este divergentă;
- pentru seria dată, aplicăm criteriul lui Leibniz, cu șirul $x_n = \frac{1}{n}$, care este descrescător către 0, deci seria este convergentă.

Concluzia este că seria $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ este *semiconvergentă.*

Exercițiu: Folosind criteriul Leibniz, studiați natura seriei cu termenul general:

$$x_n = (-1)^n \frac{\log_a n}{n}, a > 1.$$

2.8 Aproximarea sumelor seriilor convergente

Presupunem că avem o serie convergentă și alternantă. Se poate arăta foarte simplu că, dacă notăm cu S suma seriei, iar cu s_n suma primilor n termeni, cu x_n termenul general al seriei, are loc inegalitatea:

$$\varepsilon = |S - s_n| \leq x_{n+1}. \tag{2.1}$$

Cu alte cuvinte, eroarea aproximației are ordinul de mărime al primului termen neglijat.

Deocamdată, exemplele simple pe care le studiem sînt de forma:

Exercițiu: Să se aproximeze cu o eroare mai mică decît ε sumele seriilor definite de termenul general x_n de mai jos:

(a) $x_n = \frac{(-1)^n}{n!}, \varepsilon = 10^{-3}$;

(b) $x_n = \frac{(-1)^n}{n^3 \sqrt{n}}, \varepsilon = 10^{-2}$.

În ambele cazuri, se folosește inegalitatea din (2.1), de unde se scoate n. Se obține $n = 6$ pentru primul exercițiu și $n = 4$ pentru al doilea.

Concluzia este că, pentru a obține valoarea sumei seriei cu o precizie de 3, respectiv 2 zecimale, este suficient să considerăm primii 5, respectiv primii 3 termeni ai seriei. Eroarea este comparabilă cu primul termen *neglijat* din serie.

SEMINAR 3

CONVERGENȚA SERIILOR — EXERCIȚII

Studiați convergența seriilor de forma $\sum x_n$. În cazul seriilor alternante, decideți și convergența absolută sau semiconvergența:

(1) $x_n = (\arctan 1)^n$; (C, radical)

(2) $x_n = \sqrt{n} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$; (D, comparație la limită)

(3) $x_n = \frac{1}{n - \ln n}$; (D, comparație la limită)

(4) $x_n = (-1)^n \frac{n+1}{n^3}$; (C, Leibniz)

(5) $x_n = \frac{\ln n}{2n^3 - 1}$; (C, comparație)

(6) $x_n = \frac{\sqrt[n]{2}}{n^2}$; (C, comparație/integral)

(7) $x_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}}$; (C, comparație)

(8) $x_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$; (C, integral)

(9) $x_n = \frac{\ln n}{n^2}$; (C, comparație)

(10) $x_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}$; (D, comparație la limită)

(11) $x_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$; (C, Leibniz)

(12) $x_n = \dfrac{(-1)^n n!}{(2n)!}$; (C, Leibniz)

(13) $x_n = \dfrac{\arctan n}{n^2 + 1}$; (C, comparație/integral)

(14) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\ln(n+1)}$; (D, necesar)

(15) $x_n = (-1)^{n+1} \dfrac{2n+1}{3^n}$; (C, Leibniz)

(16) $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n}{n^2}$; (parțial 2018–2019)

(17) $x_n = (-1)^n \dfrac{n}{n^2 - 1}$; (parțial 2018–2019)

(18) $x_n = (-1)^n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$; (parțial 2018–2019)

(19) $x_n = \dfrac{a^n}{2n^2 + 1}$; (discuție după a)

(20) $x_n = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{n^n}$; (parțial FIA)

(21) $x_n = \left(\dfrac{n}{n+a}\right)^{n^2}$, $a > 0$; (discuție după a)

(22) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n} \cdot n!}$ (parțial FIA)

(23) $x_n = \dfrac{a^n}{n^3}$, $a > 0$. (discuție după a)

SEMINAR 4

ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII

4.1 Șiruri de funcții

4.1.1 Convergență punctuală și convergență uniformă

Fie $(f_n)_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un șir (o familie) de funcții, adică pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, avem cîte o funcție $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Putem gîndi aceste șiruri de funcții ca pe niște generalizări ale șirurilor de numere reale. Dacă în cazul acela, regula generală era fixată, dată de $x_n = x(n)$, în cazul șirurilor de funcții, pentru fiecare indice n, putem avea cîte o regulă diferită, dată de o funcție f_n.

Dacă șirurile de numere reale au drept limită un număr real și astfel putem spune că un șir de numere reale aproximează un număr real, în cazul șirurilor de funcții, limita va fi, în general, o funcție. Deci putem spune că aceste șiruri aproximează funcții. Însă noțiunea de convergență în cazul șirurilor de funcții este ceva mai subtilă.

Definiție 4.1: Fie $(f_n)_n : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un șir de funcții.

Spunem că șirul $(f_n)_n$ *converge punctual (simplu)* la funcția f dacă are loc:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in D.$$

Pe scurt, putem nota aceasta prin $f_n \xrightarrow{PC} f$ sau $f_n \xrightarrow{s} f$, iar funcția f se va numi *limita punctuală* a șirului (f_n).

Acest tip de convergență este foarte puternic, deoarece este definit destul de grosier, astfel că avem nevoie de rafinări ale conceptului.

Celălalt tip de convergență este definit mai jos.

Definiție 4.2: În condițiile și cu notațiile de mai sus, spunem că șirul (f_n) este *uniform convergent* la funcția f dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 \text{ a. î. } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in D.$$

Notația va fi $f_n \xrightarrow{UC} f$ sau $f_n \xrightarrow{u} f$.

Cu alte cuvinte, șirul (f_n) se păstrează arbitrar de aproape de funcția limită, de la un anumit rang încolo.

Ca și în cazul șirurilor de numere, se va folosi mai des în exerciții o teoremă de caracterizare.

Propoziție 4.1: *În condițiile și cu notațiile de mai sus, are loc:*

$$f_n \xrightarrow{u} f \iff \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Se poate vedea că proprietatea de convergență uniformă o implică pe cea de convergență punctuală, însă reciproca este falsă.

De exemplu, fie $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n, n \geq 1$.

Atunci se poate vedea imediat că:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

De aici rezultă că $f_n \xrightarrow{s} f$, unde funcția f este definită pe cazuri mai sus.

Dar un calcul simplu arată că:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0,$$

deci șirul nu este uniform convergent.

4.1.2 Transferul proprietăților

În unele situații, putem verifica proprietățile de convergență simplă și mai ales uniformă prin transferul proprietăților. Cu alte cuvinte, vom ști ce proprietăți analitice (continuitate, integrabilitate) ale funcțiilor se păstrează prin convergență și aceasta ne va da condiții necesare pentru a studia acel tip de convergență.

Teoremă 4.1 (Transfer de continuitate)**:** *Fie $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un șir de funcții.*

Dacă fiecare f_n este funcție continuă, iar șirul f_n converge uniform la funcția f, atunci f este continuă.

Această teoremă ne ajută să verificăm convergență uniformă astfel: dacă știm (am demonstrat) că fiecare termen f_n este funcție continuă, iar funcția f, obținută prin convergența *punctuală* a șirului (singurul candidat posibil și pentru convergența uniformă!) nu este o funcție continuă, atunci știm sigur că șirul nu converge uniform la f.

Teoremă 4.2 (Integrare termen cu termen)**:** *Fie* $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *un șir de funcții și* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *o funcție.*

Dacă $f_n \xrightarrow{u} f$*, atunci are loc proprietatea de integrare termen cu termen, adică:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Cu alte cuvinte, dacă știm că are loc convergența uniformă, atunci limita și integrala pot comuta.

Teoremă 4.3 (Derivare termen cu termen)**:** *Fie* $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *un șir de funcții și* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *o funcție.*

Presupunem că funcțiile f_n *sînt derivabile, pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*. Dacă* $f_n \xrightarrow{s} f$ *și dacă există o funcție* $g : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *astfel încît* $f_n' \xrightarrow{u} g$*, atunci* f *este derivabilă și* $f' = g$.

Această proprietate este similară celei de integrabilitate și ne arată că, dacă are loc convergența punctuală a șirului funcțiilor și uniformă a șirului derivatelor, atunci limita și derivata pot comuta.

4.2 Serii de funcții

Pasul următor este să studiem serii de funcții. Pentru convergența acestora, avem un singur criteriu de utilizat.

Teoremă 4.4 (Weierstrass)**:** *Fie* (a_n) *un șir cu termeni pozitivi,* $\sum f_n(x)$ *o serie de funcții, cu fiecare* $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, astfel încît* $|f_n(x)| \leq a_n$ *pentru orice* $x \in D$*, iar seria* $\sum a_n$ *este convergentă, atunci seria* $\sum f_n$ *converge uniform.*

Transferul proprietăților se formulează pe scurt astfel (vom păstra notațiile și contextul din teorema lui Weierstrass de mai sus):

- *Transfer de continuitate:* Dacă f_n sînt funcții continue, iar seria $\sum f_n$ converge uniform la f, atunci funcția f este continuă.

- *Integrare termen cu termen:* Dacă seria $\sum f_n$ converge uniform la f, atunci f este integrabilă și are loc:

  $$\int_a^b \sum_n f_n(x)dx = \sum_n \int_a^b f_n(x)dx,$$

  pentru orice interval $[a, b] \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ din domeniul de definiție al funcțiilor f_n.

- *Derivare termen cu termen*: Presupunem că toate funcțiile f_n sînt derivabile. Dacă seria $\sum f_n$ converge punctual la f și dacă există $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încît $\sum f_n'$ converge uniform la g, atunci f este derivabilă și $f' = g$.

Toate aceste proprietăți, însă, vor fi utile într-un caz particular de serii de funcții, anume acela al seriilor de puteri.

4.3 Serii de puteri

Pornim cu o serie de funcții $\sum f_n$, dar în care fiecare termen f_n este o funcție de tip polinomial. Astfel că, de fapt, seriile de puteri pot fi scrise în general sub forma $\sum a_n(x-a)^n$, cu $a_n, a \in \mathbb{R}$, caz în care se numesc *serii de puteri centrate în a*, definite de șirul (a_n).

În majoritatea cazurilor, vom lucra cu serii de puteri centrate în origine, care se vor scrie, în general, $\sum a_n x^n$.

Toate rezultatele de la serii de funcții sînt valabile și cu demonstrații imediate, dat fiind că funcțiile polinomiale sînt ușor de studiat. Rezultatele specifice sînt următoarele.

Teoremă 4.5 (Abel)**:** *Fie $\sum a_n(x-a)^n$ o serie de puteri centrată în $a \in \mathbb{R}$. Atunci există un număr $0 \leq R \leq \infty$ astfel încît:*

- *Seria este absolut convergentă pe intervalul $(a-R, a+R)$;*
- *Seria este divergentă pentru $|x| > R$;*
- *Seria este uniform convergentă pentru $[-r, r]$, pentru $0 < r < R$.*

Numărul R se numește raza de convergență a seriei*, iar intervalul $(a-R, a+R)$ se numește* intervalul de convergență.

Problema centrală acum va fi calculul razei de convergență, care se poate face cu unul dintre criteriile de mai jos.

Teoremă 4.6 (Cauchy-Hadamard)**:** *Fie $\sum a_n(x-a)^n$ o serie de puteri. Fie R raza sa de convergență și fie $\omega = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Atunci:*

- *$R = \omega^{-1}$, pentru $0 < \omega < \infty$;*
- *$R = 0$, dacă $\omega = \infty$;*
- *$R = \infty$, dacă $\omega = 0$.*

Teoremă 4.7: *În condițiile și cu notațiile de mai sus, raza de convergență se poate calcula și cu formula:*

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Observaţie 4.1: Remarcăm că proprietățile de transfer sînt imediate în cazul seriilor de puteri. Rezultă că, dacă $\sum a_n(x-a)^n$ este o serie de puteri convergentă la $S(x)$, atunci:

- Seria derivatelor, $\sum n a_n (x-a)^{n-1}$, are aceeași rază de convergență cu seria inițială și are suma $S'(x)$;

- Seria primitivelor, $\sum \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ are aceeași rază de convergență cu seria inițială, iar suma sa este o primitivă a funcției S.

În exerciții, se va folosi foarte des seria geometrică, împreună cu derivata și o primitivă a ei. Astfel, pentru cazul convergent ($|q| < 1$), avem:

$$\begin{aligned} \sum aq^n &= \frac{a}{1-q} \Rightarrow \\ \sum a\frac{q^{n+1}}{n+1} &= -a\ln(1-q) \\ \sum anq^{n-1} &= \frac{-a}{(1-q)^2}. \end{aligned}$$

4.4 Polinomul Taylor și seria Taylor

Orice funcție cu proprietăți analitice „bune“ poate fi aproximată cu un polinom.

Definiție 4.3: Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis și $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă $\mathcal{C}^m(D)$, adică este continuă și are derivata continuă, pînă la a m-a iterație.

Pentru orice $a \in D$ definim *polinomul Taylor* de grad $n \leq m$ asociat funcției f în punctul a prin:

$$T_{n,f,a} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Restul (eroarea de aproximare), numit și *restul Lagrange* este definit prin:

$$R_{n,f,a} = f(x) - T_{n,f,a}(x).$$

Pentru cazul particular al polinomului Taylor de grad 1, acesta se mai numește *aproximația liniară* a funcției f, iar pentru gradul 2, *aproximația pătratică.*

Evident, acest polinom poate fi folosit mai departe pentru a studia *seria* Taylor asociată unei funcții. Formal, conceptul este definit mai jos.

Teoremă 4.8 (Seria Taylor)**:** *Fie $a < b$ și $f \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$, astfel încît să existe $M > 0$ cu $|f^{(n)}(x)| \leq M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, x \in [a,b]$.*

Atunci pentru orice $x_0 \in (a,b)$, se definește seria Taylor a lui f în jurul punctului x_0, care va fi uniform convergentă pe $[a,b]$, iar suma sa este funcția f, adică avem:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x \in [a,b].$$

Pentru cazul particular $x_0 = 0$, seria se numește Maclaurin.

Observaţie 4.2: Dacă nu se specifică punctul în jurul căruia să se facă dezvoltarea în serie Taylor pentru funcția f, vom presupune că lucrăm cu serii Maclaurin.

Observaţie 4.3: Conform proprietăților de aproximare a sumelor seriilor convergente din seminarul anterior, știm că eroarea de aproximare (restul Lagrange, în acest caz) este comparabilă cu primul termen neglijat din seria Taylor (echivalent, cu următorul termen din polinomul Taylor).

Seriile Taylor uzuale pentru funcțiile elementare, împreună cu domeniile de convergență, sînt date mai jos.

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n, x \in \mathbb{R} \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n\geq 0} x^n, |x| < 1 \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n, |x| < 1 \\
\cos x &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, x \in \mathbb{R} \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, |x| < 1, \alpha \in \mathbb{R} \\
\arctan x &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, |x| \leq 1.
\end{aligned}$$

Seriile pentru alte funcții se pot obține fie prin calcul direct, fie prin derivare sau integrare termen cu termen a seriilor de mai sus.

4.5 Exerciții

1. Să se studieze convergența punctuală și uniformă a șirurilor de funcții:

(a) $f_n : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}, n \geq 0;$

(b) $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n - x^{2n}, n \geq 0;$

(c) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}, n > 0;$

(d) $f_n : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2};$

(e) $f_n : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x}$;

(f) $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$;

(g) $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{x+n}{x+n+1}$;

(h) $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$.

2. Să se arate că șirul de funcții dat de:

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n}\arctan x^n$$

converge uniform pe $\mathbb{R}$, dar:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(1).$$

Rezultatele diferă deoarece șirul derivatelor nu converge uniform pe $\mathbb{R}$.

3. Să se arate că șirul de funcții dat de:

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nxe^{-nx^2}$$

este convergent, dar:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Rezultatul se explică prin faptul că șirul nu este uniform convergent. De exemplu, pentru $x_n = \dfrac{1}{n}$, avem $f_n(x_n) \longrightarrow 1$, dar, în general, $f_n(x) \longrightarrow 0$.

4. Să se dezvolte următoarele funcții în serie Maclaurin, precizînd și domeniul de convergență:

(a) $f(x) = e^x$;

(b) $f(x) = \sin x$;

(c) $f(x) = \cos x$;

(d) $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$;

(e) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$;

(f) $f(x) = \ln(1+x)$;

(g) $f(x) = \arctan x$;

(h) $f(x) = \ln(1+5x)$;

(i) $f(x) = 3\ln(2+3x)$.

5. Să se calculeze raza de convergență și mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

(a) $\sum_{n\geq 0} x^n$;

(b) $\sum_{n\geq 1} n^n x^n$;

(c) $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}$;

(d) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^n x^n}{n!}$;

(e) $\sum \dfrac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$;

(f) $\sum \dfrac{(x+3)^n}{n^2}$;

(g) $\sum \dfrac{n+2}{n^2+1}(x-2)^n$;

(h) $\sum \dfrac{n+1}{\sqrt{n^4+n^3+1}} \left(\dfrac{x+1}{2x+3}\right)^n$.

6. Găsiți mulțimea de convergență și suma seriilor:

(a) $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(b) $\sum \dfrac{2^n}{2n+1} x^n$;

(c) $\sum \dfrac{n}{n+1} x^n$.

7. Să se calculeze cu o eroare mai mică decît 10^{-3} integralele:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$;

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^{1} e^{-x^2} dx$.

8. Să se calculeze polinomul Taylor de grad 3 în jurul originii pentru funcțiile:

(a) $f(x) = 3\ln(2+x)$;

(b) $f(x) = \arctan x$;

(c) $f(x) = \sqrt{1+2x}$.

9. Găsiți aproximarea liniară și pătratică a funcțiilor:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

(b) $f(x) = \sin(\cos x)$;

(c) $f(x) = e^{\sin x}$;

(d) $f(x) = \arcsin x$.

10. Folosind seria Taylor, aproximați cu o eroare mai mică decît 10^{-3} numerele:

(a) $\sqrt[3]{65}$;

(b) $\sin 32$;

(c) $\arctan \frac{1}{2}$;

(d) $e^{-0,2}$;

(e) $\ln 1,1$;

(f) $\ln 4$;

(g) $\ln 5$.

Indicație: Atenție la domeniile de convergență!

11*. Arătați că seriile numerice de mai jos sînt convergente și calculați sumele lor, folosind serii de puteri:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)^2}{n!}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2(3^n-2^n)}{6^n}$.

Indicații:

(a) Seria satisface criteriul lui Leibniz, deci este convergentă.

Pentru a găsi suma, pornim cu seria de puteri $\sum(-1)^n \dfrac{x^{3n+1}}{3n+1}$.

Intervalul de convergență este $(-1, 1)$, iar pentru $x = 1$, avem seria dată.

Fie f suma acestei serii de puteri în intervalul $(-1, 1)$. Derivăm termen cu termen și obținem:

$$f'(x) = \sum(-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3},$$

pentru $|x| < 1$, ca suma unei serii geometrice alternate.

Rezultă:

$$f(x) = \int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan 2x - 1\sqrt{3} + c,$$

pentru $|x| < 1$. Calculînd $f(0)$, găsim $c = \dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

(b) Se folosește seria pentru e^x, din care obținem seria pentru $(x+x^2)e^x$, pe care o derivăm termen cu termen.

Pentru $x = 1$, se obține seria cerută, cu suma $5e$.

(c) Descompunem seria în două, apoi folosim seria de puteri $\sum n^2x^n$, pe care o derivăm termen cu termen, pentru a obține seria pentru nx^{n-1}, apoi seria pentru nx^n.

12. Studiați convergența seriilor de funcții:

(a) $\sum \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$, cu $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$;

(b) $\sum \frac{nx}{1 + n^5 x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

(c) $\sum \frac{\cos(3^n x)}{2^n}$, $x \in \mathbb{R}$;

(d) $\sum x^n(1 - x)$, $x \in [0, 1]$;

(e) $\sum \frac{(x + n)^2}{n^4}$, $x \in [0, 2]$;

(f) $\sum \frac{\ln(1 + nx)}{nx^n}$, $x > 0$;

(g) $\sum \frac{xe^{-nx}}{\sqrt{n}}$, $x \geq 0$;

(h) $\sum ne^{-nx}$, $x \geq 1$.

Indicații: În fiecare caz, se găsește valoarea maximă a funcției $|f_n|$, pe care o notăm cu a_n, apoi studiem convergența seriei numerice $\sum a_n$.

SEMINAR 5

DERIVATE PARȚIALE

În general, putem lucra cu funcții de mai multe variabile, sub forma $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, funcții care acceptă n variabile ca „date de intrare" și rezultatul este o variabilă reală, deci $f(x_1, \dots, x_n) = y \in \mathbb{R}$, pentru orice n-tuplu $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Cazurile pe care le vom întîlni cel mai des la acest seminar vor fi, însă, $n = 2$ și $n = 3$, cazuri în care variabilele de intrare se vor nota, respectiv (x, y) sau (x, y, z).

Fie, deci, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție de 3 variabile reale, cu valori reale, $f = f(x, y, z)$.

Putem defini *derivata parțială* a funcției f după variabila x, de exemplu, ca fiind derivata obținută prin tratarea lui y și z ca parametri („constante"). Notația este $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sau f_x sau $\partial_x f$.

Similar se pot defini și celelalte derivate parțiale. Un exemplu simplu:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = 3x^2 y + 5xe^y + \sin(yz).$$

Avem:

$$\begin{aligned} f_x &= 6xy + 5e^y \\ f_y &= 3x^2 + 5xe^y + z\cos(yz) \\ f_z &= y\cos(yz). \end{aligned}$$

Calculele pot continua și putem defini *derivatele parțiale de ordin superior*:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

și similar pentru derivate mixte de forma f_{xy}, f_{yx} sau derivate de ordin și mai mare.

În cazul funcțiilor pe care le vom folosi, are loc:

Teoremă 5.1 (Teorema de simetrie a lui Schwarz)**:** *În anumite ipoteze*[1]*, derivatele mixte au proprietatea de simetrie, adică* $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ *sau, scris pe larg:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \forall x_i, x_j.$$

În exercițiile pe care le vom aborda, vor fi de folos derivatele de ordinul întîi și cele de ordinul al doilea. În plus, pentru o funcție de 3 variabile reale, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f = f(x, y, z)$, se definește *laplacianul* (sau *operatorul Laplace*) prin:

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$$

Similar, desigur, putem defini laplacianul și pentru funcții de 2 variabile reale prin:

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}.$$

O funcție se numește *armonică* dacă $\Delta f = 0$.

Dată o funcție de 3 variabile, se poate defini *diferențiala totală*, care conține laolaltă informațiile furnizate de derivatele parțiale. Pentru o funcție $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, diferențiala totală se notează df și se calculează cu formula:

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz,$$

unde dx, dy, dz sînt diferențialele elementare (nu se calculează! ele constituie vectori-bază întrun anumit spațiu vectorial).

O expresie ca mai sus, de forma df, se numește *1-formă diferențială*, pe care o vom reîntîlni în studiul integralelor curbilinii.

Avem mai departe și diferențiala totală de ordinul al doilea, definită pentru aceeași funcție de mai sus prin:

$$d^2 f = f_{xx} dx^2 + 2 f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2,$$

expresie care se mai numește *2-formă diferențială* și pe care o vom reîntîlni în studiul integralelor de suprafață.

De asemenea, o altă noțiune utilă este aceea a *polinoamelor Taylor* pentru funcții de mai multe variabile. Fie $f = f(x, y)$ o funcție de 2 variabile și fie $A(x_A, y_A) \in \mathbb{R}^2$ un punct arbitrar. În exerciții, vom întîlni doar polinoamele Taylor de grad 1 și 2, care se definesc astfel, în jurul punctului A:

$$T_1(X, Y) = f(A) + \frac{1}{1!} \left[f_x(A)(X - x_A) + f_y(A)(Y - y_A) \right]$$
$$T_2(X, Y) = T_1(X, Y) + \frac{1}{2!} \left[f_{xx}(A)(X - x_A)^2 + f_{yy}(A)(Y - y_A)^2 + 2 f_{xy}(A)(X - x_A)(Y - y_A) \right].$$

[1] O prezentare a teoremei se poate găsi aici, iar în exercițiile de la seminar, ipotezele vor fi verificate automat.

Ca în cazul seriilor Taylor pentru funcțiile de o singură variabilă, eroarea aproximației folosind aceste polinoame este comparabilă cu primul termen neglijat.

5.1 Extreme libere

Fie o funcție de 2 variabile $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f = f(x, y)$. Ne propunem să studiem valorile sale extreme, adică să îi găsim minimul și maximul, considerînd că funcția este definită, derivabilă și continuă pe tot domeniul de definiție.

Pașii pe care îi urmăm sînt:

(1) Rezolvăm sistemul de ecuații dat de anularea derivatelor parțiale de ordinul întîi, din care aflăm *punctele critice*, care *este posibil* să fie de extrem. Așadar, rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \end{cases} \Longrightarrow A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2) \dots$$

(2) Pentru fiecare dintre punctele critice A_i se alcătuiește *matricea hessiană* a funcției, alcătuită din derivatele de ordinul al doilea și se evaluează matricea în punctele critice:

$$H_f(A_i) = \begin{pmatrix} f_{xx}(A_i) & f_{xy}(A_i) \\ f_{yx}(A_i) & f_{yy}(A_i) \end{pmatrix}$$

(3) Fie A_i un punct critic fixat. Calculăm valorile proprii $\lambda_{1,2}$ ale matricei hessiene $H_f(A_i)$ și decidem astfel:

- Dacă $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, atunci punctul A_i este de *minim local*;
- Dacă $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, punctul A_i este *maxim local*;
- Dacă $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, punctul A_i *nu este de extrem*;
- Dacă $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, nu putem decide.

(4) Se repetă procedura pentru fiecare dintre punctele critice.

5.2 Metoda celor mai mici pătrate

Această metodă este strîns legată de conceptul de *interpolare*, care ne ajută să găsim cea mai potrivită curbă, pornind de la un set de puncte (reprezentînd, eventual, date experimentale).

Cazul particular pe care îl vom discuta este acela al curbelor liniare, deci atunci cînd se caută cea mai potrivită *dreaptă* pentru un set de puncte. Această dreaptă se mai numește *dreaptă de regresie* și spunem că ea *mediază* între un set de puncte date, în sensul că optimizează erorile.

Pe scurt, dacă se dă un set de date experimentale, distribuite într-un anume fel în plan și avem de găsit cea mai potrivită dreaptă care să medieze între aceste puncte, sîntem în situația din figura 5.1.

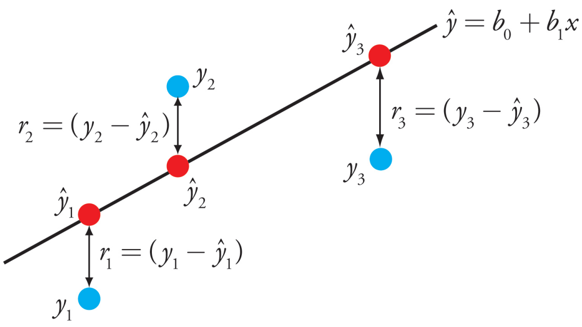

Figura 5.1: *Dreapta $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ care mediază între punctele y_i, cu calculul erorilor r_i*

Această dreaptă se va găsi astfel încît *suma pătratelor erorilor* să fie minimă. Motivul simplu este că erorile pot fi și pozitive, și negative, iar mai mult, erorile mari vrem să fie „amplificate“ de metodă, erorile mai mici fiind de o importanță inferioară. De aceea, metoda se numește *metoda celor mai mici pătrate.*

Fie, deci, dreapta $y = ax + b$, dreapta de regresie liniară pe care o căutăm, care să medieze între punctele $P_i(x_i, y_i)$.

Echivalent, putem scrie relația și funcțional, în sensul că dreapta căutată se asociază unei funcții $f(x) = ax+b$. Atunci, dacă punctul P_i se găsește pe această dreaptă, are loc relația $f(x_i) = y_i$. Rezultă că eroarea poate fi calculată prin diferența $|y_i - f(x_i)|$ și vom fi interesați de suma pătratelor acestor erori. Aceasta va fi funcția pe care încercăm să o minimizăm, iar argumentele sale sînt coeficienții a, b care definesc dreapta căutată

Așadar, definim:

$$F(a, b) = \sum_i (f(x_i) - y_i)^2 = \sum_i (ax_i + b - y_i)^2.$$

Metoda dorește, deci, să minimizeze eroarea, deci problema revine la a găsi $M(a, b)$ *punctul de minim* al funcției $F(a, b)$ de mai sus. Coordonatele punctului vor defini dreapta de regresie căutată.

5.3 Funcții implicite

Funcțiile implicite sînt definite de ecuații care, în general, nu se pot rezolva sau se rezolvă foarte dificil. De exemplu, dacă avem o ecuație de forma:

$$xy + 2x \sin y = 0$$

și vrem să exprimăm de aici funcția $y = y(x)$, constatăm că acest lucru nu este posibil, deoarece ecuația nu poate fi rezolvată pentru y. Astfel, vom spune în acest caz că y a fost definită *implicit* de ecuația de mai sus.

Trecem direct la exemplificarea noțiunilor teoretice pe exerciții rezolvate.

1. Funcția $z = z(x, y)$ este definită implicit de ecuația:

$$(y + z)\sin z - y(x + z) = 0.$$

Calculați expresia:

$$E = z\sin z\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Soluție: Notăm expresia implicită dată cu $F(x, y, z)$. Pentru a putea exprima $z = z(x, y)$, deci ca funcție, este necesar ca expresia F să depindă *funcțional* de z, adică să nu aibă pe z doar ca parametru ori drept constantă. Așadar, avem o *condiție de existență* a funcției implicite $z = z(x, y)$, anume $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Presupunem acum că ne aflăm în ipoteza de mai sus, i.e. condiția de existență este satisfăcută. Atunci, pentru a exprima $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$, vom deriva expresia F, deoarece doar acolo apare funcția z. Obținem:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\sin z + (y + z)\cos z\frac{\partial z}{\partial x} - y\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

Rezultă:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{\sin z + (y + z)\cos z - y}.$$

Similar:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right)\sin z + (y + z)\cos z\frac{\partial z}{\partial y} - (x + z) - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Rezultă:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + z - \sin z}{\sin z + (y + z)\cos z - y}.$$

Înlocuind în expresia cerută, obținem $E = 0$.

Un alt tip de exercițiu de care sîntem interesați este acela al extremelor pentru funcții definite implicit.

2. Să se determine extremele funcției $y = y(x)$, definită implicit de ecuația:

$$x^3 + y^3 - 2xy = 0.$$

Soluție: Fie $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$, astfel încît condiția dată este $F(x, y) = 0$.

Pentru a extrage funcția $y = y(x)$, este necesar să punem condiția de existență:

$$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \Longrightarrow 3y^2 - 2x \neq 0.$$

Acum, știind că avem funcția $y = y(x)$, extremele acesteia se determină folosind derivata $y'(x)$, pe care nu o putem obține altfel decît prin intermediul funcției F. Avem, așadar:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 y' - 2y - 2xy' = 0.$$

Obținem de aici:

$$y'(x) = \frac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}.$$

Pentru extreme, avem condițiile:

$$\begin{cases} y'(x) & = 0 \\ F(x, y) & = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & \neq 0 \end{cases}$$

Rezultă $y = \dfrac{3x^2}{2}$ și înlocuim, obținînd perechea de soluții:

$$(x, y) = \left(\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}, \frac{2\sqrt[3]{4}}{3} \right).$$

Pentru a decide natura punctului de mai sus, este necesar să calculăm y'', care se obține derivînd din nou expresia pentru $y'(x)$. Avem:

$$y''(x) = \frac{(2y' - 6x)(3y^2 - 2x) - (6yy' - 2)(2y - 3x^2)}{(3y^2 - 2x)^2}.$$

Evaluînd pentru $x = \dfrac{2\sqrt[3]{2}}{3}$, unde $y' = 0$, găsim:

$$y''\left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{4} \right) = -3 < 0,$$

deci punctul este de maxim local.

5.4 Exerciții

1. Verificați dacă următoarele funcții de 2 variabile sînt armonice (presupunem că domeniile de definiție au fost date corect):

(a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$;

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

(c) $f(x, y) = \arctan \dfrac{x}{y} + \arctan \dfrac{y}{x}$;

(d) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$.

2. Găsiți punctele de extrem pentru funcțiile de 2 sau 3 variabile, definite corespunzător pe $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$:

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$;

(b) $f(x, y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9$;

(c) $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$;

(d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y - 6z$;

(e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$;

(f) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + z, x, y, z \neq 0$.

3. Arătați că funcțiile următoare verifică ecuațiile indicate:

(a) $f(x, y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$,

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

(b) $f(x, y, z) = \varphi(xy, x^2 + y^2 + z^2)$,

$$xz\frac{\partial f}{\partial x} - yz\frac{\partial f}{\partial y} + (y^2 - x^2)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

(c) $f(x, y) = y\varphi(x^2 - y^2)$,

$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^2}f(x, y);$$

(d) $f(x, y, z) = \dfrac{xy}{z} \ln x + x\varphi\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{z}{x}\right)$, pentru $x > 0$ și $z \neq 0$, ecuația fiind:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{xy}{z} - f(x, y, z) = 0.$$

4. Găsiți dreptele de regresie care mediază între punctele:

(a) $(1,3),(2,4),(-1,0)$;

(b) $(2,3),(-1,-1),(0,2)$;

(c) $(1,0),(2,1),(3,2),(-1,2)$;

(d) $(1,1),(2,1),(-1,0),(-2,1)$;

(e) $(1,0),(2,1),(-1,1),(-2,-2)$.

5. Fie funcția $z = z(x,y)$, definită implicit prin:

$$g(y^2 - x^2, z - xy) = 0,$$

unde $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Calculați expresia:

$$E = y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y}.$$

6. Să se determine extremele funcției $y = y(x)$, definită implicit de ecuațiile:

(a) $x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0$;

(b) $2x^2y + y^2 - 4x - 3 = 0$;

(c) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$;

(d) $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y = -1$;

(e) $x^2 + y^2 - e^{2\arctan\frac{x}{y}} = 0$.

7. Fie funcția $z = z(x,y)$, definită implicit de ecuația:

$$F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4z = 12.$$

Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întîi și al doilea pentru funcția z.

SEMINAR 6

EXTREME CU LEGĂTURI

În seminarul anterior am văzut cum se studiază punctele de extrem și valorile extreme pentru funcții de 2 sau 3 variabile, definite pe întreg domeniu, $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$. În multe situații, însă, domeniul de definiție va fi doar o porțiune a planului sau spațiului, definită prin (in)ecuații.

Există mai multe posibilități pentru a delimita domeniul de definiție și le prezentăm în ordinea crescătoare a dificultății.

Considerăm, pentru simplitate, că lucrăm cu o funcție de două variabile:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f = f(x, y).$$

Pentru toate cazurile cînd domeniul de definiție are o frontieră (chiar și interval deschis), studiul se împarte în 2 etape: pe interior și pe frontieră.

Pentru **domenii de tip dreptunghiular**, $D = [a, b] \times [c, d]$:

- se studiază mai întîi pe interiorul domeniului, adică $\text{Int}D = (a, b) \times (c, d)$, cu metoda din cazul extremelor libere. Se impune condiția ca punctele critice să aparțină interiorul domeniului.
- se studiază apoi pe frontieră ($\text{Fr}D = \partial D$), care poate fi împărțită în mai multe bucăți: $x = a, y \in [c, d]$ și celelalte, caz pentru care funcția devine de o singură variabilă. În exemplul dat, avem $f(x, y) = f(a, y) = g(y)$, pentru care se studiază extremele ca în liceu, fiind vorba de o funcție de o singură variabilă.

Pentru **domenii delimitate de ecuații sau inecuații de gradul întîi**, de forma $D = \{x \in [a, b], m_1 x + n_1 \leq y \leq m_2 x + n_2\}$, studiul se poate face ca mai sus pe interior, iar pe frontieră, se substituie $x \in [a, b]$, iar $y = m_1 x + n_1$, respectiv $x \in [a, b]$, iar $y = m_2 x + n_2$, în ambele cazuri avînd funcții de o singură variabilă.

Domeniile delimitate de ecuații oarecare se studiază folosind o metodă generală (care, de altfel, poate fi folosită și în celelalte cazuri), numită *metoda multiplicatorilor lui Lagrange*. Astfel, să presupunem că avem un domeniu de forma $D : E(x, y) \leq \alpha \in \mathbb{R}$, cum ar fi, de exemplu, interiorul unui disc:

$$D : x^2 + (y - 2)^2 \leq 9.$$

Metoda constă în:

- studiul pe interiorul domeniului, ca în cazul extremelor libere, dar se impune condiția ca punctele critice să satisfacă *inegalitatea strictă* $E(x, y) < \alpha$;
- pe frontieră, se definește *funcția lui Lagrange*:

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda E(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

și se reia calculul, pentru funcția F, cu parametrul λ. Mai precis, avem de rezolvat sistemul:

$$\begin{cases} F_x & = 0 \\ F_y & = 0 \\ E(x, y) - \alpha & = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x, y, \lambda), \text{ puncte critice.}$$

Din aceste puncte, extragem perechile (x, y), pe care le folosim mai departe. Rezultatul central este:

Teoremă 6.1: *O funcție continuă definită pe un domeniu* compact[1] *este mărginită și își atinge marginile.*

Mai departe, putem continua ca în cazul extremelor libere, i.e. cu matricea hessiană pentru punctele critice (x_c, y_c) obținute, fie putem cita teorema și va fi suficient să calculăm $f(x_c, y_c)$. Aceasta deoarece punctele de extrem sigur sînt printre punctele critice (teorema lui Fermat din liceu) și deci, valoarea maximă dintre $f(x_c, y_c)$ va fi punctul de maxim, iar cea minimă, punctul de minim.

6.1 Exerciții

0. Reprezentați grafic domeniile date de următoarele (in)ecuații:

(a) $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, y^2 \leq x\}$

(b) $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 2, 0 \leq y \leq x, xy \leq 1\}$;

(c) $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2y\}$;

[1]Compacitatea este un concept matematic destul de subtil și nu ușor de înțeles. Intuitiv, însă, va fi suficient să menționăm că domeniile care din punct de vedere geometric nu au „găuri" sînt compacte. În particular, ceea ce vom folosi în exerciții (discuri, elipse, triunghiuri etc.) vor fi toate compacte, deci sîntem în ipotezele teoremei.

(d) $D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le x, y \ge 0\}$;

(e) $D_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge 0, x + y - 6 \le 0, y^2 \le 8x\}$;

(f) $D_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 2x + 2y - 1\}$.

1. Fie funcția $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$. Determinați valorile extreme ale funcției pentru:

(a) $D = [0, 1] \times [0, 1]$;

(b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0, y \ge 0, x + y \ge 5\}$.

2. Fie funcția $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y + 3$. Determinați valorile extreme ale funcției, dacă D este domeniul maxim de definiție (extreme libere!).

3. Fie funcția $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9$.

(a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați valorile extreme ale funcției.

(b) Pentru $D = [-4, 4] \times [-3, 3]$, determinați valorile extreme ale funcției.

4. Fie funcția $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$. Determinați valorile extreme ale funcției pentru:

(a) $D = \mathbb{R}^2$;

(b) $D = [-1, 2] \times [0, 2]$;

5. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$. Aceeași cerință ca mai sus pentru:

(a) $D = \mathbb{R}^2$;

(b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0, y \ge 0, 3y + x \le 3\}$.

6. Determinați valorile extreme pentru funcțiile f, definite pe domeniile D, unde:

(a) $f(x, y) = xy(1 - x - y)$, $\quad D = [0, 1] \times [0, 1]$;

(b) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$, $\quad D = (-\infty 0) \times (0, \infty)$;

(c) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 2xy$, $\quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \ge 0, y + 2x \le 2\}$;

(d) $f(x, y) = x^4 + y^3 - 4x^3 - 3y^2 + 3y$, $\quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$.

7. (Parțial ETTI, Prof. Purtan) Fie funcția: $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x - y$. Pentru $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -x^2 + 2x\}$, determinați valorile extreme ale funcției.

8. (Examen ACS, Prof. Olteanu) Aflați valorile extreme ale funcției:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1$$

pe mulțimea $K : x^2 + y^2 \leq 1$.

9*. Dintre toate paralelipipedele dreptunghice cu volum constant 1, determinați pe cel cu aria totală minimă.

10. Fie funcția $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x + 2y - 2z$. Găsiți extremele funcției pentru $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$.

11. Fie funcția $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = -4x - 3y + 6z$. Găsiți extremele funcției pentru $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

12. Fie funcția $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy^2(x + y - 2)$. Găsiți extremele funcției pentru $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 3, x, y \geq 0\}$.

13. Fie funcția $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy$. Găsiți extremele funcție pentru $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

SEMINAR 7

INTEGRALE IMPROPRII ȘI CU PARAMETRI

Integralele improprii sînt integrale în care fie unul dintre capete este infinit, fie funcția nu este definită în cel puțin un punct din domeniul de integrare. De exemplu:

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x}$ este improprie în $x = 0$;
- $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x}$ este improprie în ambele capete.

Pentru aceste integrale, calculul se poate face trecînd la limită, dacă unul dintre capete este infinit. Mai precis, avem:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

dacă integrala nu este improprie și în capătul $x = a$ sau în alt punct din interiorul domeniului.

Pentru celelalte cazuri, există criterii de convergență, care depășesc scopul acestui seminar. Le includem mai jos, pentru completitudine.

*****

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ o funcție *local integrabilă* (i.e. integrabilă pe orice interval compact $[u, v] \subseteq [a, b)$).

Integrala improprie (în b) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ se numește *convergentă* dacă limita:

$$\lim_{t\to b} \int_a^t f(x)dx$$

există și este finită. Valoarea limitei este valoarea integralei. În caz contrar, integrala se numește *divergentă*.

Dacă $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ este local integrabilă, atunci integrala improprie (la ∞) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ se numește *convergentă* dacă limita:

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx$$

există și este finită. Valoarea limitei este egală cu valoarea integralei.

Integrala improprie $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ se numește *absolut convergentă* dacă integrala $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ este convergentă.

Criteriile de convergență pentru integralele improprii sînt foarte asemănătoare cu cele pentru serii (amintiți-vă, că, de fapt, integralele definite se construiesc cu ajutorul sumelor infinite, adică serii, v. *sumele Riemann*).

Așadar, avem:

Criteriul lui Cauchy (general): Fie $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ local integrabilă. Atunci integrala $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ este convergentă dacă și numai dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in [a, b) \text{ a.î. } \forall x, y \in (b_\varepsilon, b), \left| \int_x^y f(t)dt \right| < \varepsilon.$$

Criteriul de comparație („termen cu termen"): Fie $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încît $0 \le f \le g$.

- Dacă $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ este convergentă, atunci și integrala $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ este convergentă;
- Dacă integrala $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ este divergentă, atunci și integrala $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ este divergentă.

Criteriul de comparație la limită: Fie $f, g : [a, b) \longrightarrow [0, \infty)$, astfel încît să existe limita:

$$\ell = \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- Dacă $\ell \in [0, \infty)$, iar $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ este convergentă, atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ este convergentă;
- Dacă $\ell \in (0, \infty)$ sau $\ell = \infty$, iar $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ este divergentă, atunci și $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Criteriul de comparație cu $\frac{1}{x^\alpha}$: Fie $a \in \mathbb{R}$ și $f : [a, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ local integrabilă, astfel încît să existe:

$$\ell = \lim_{x \to \infty} x^\alpha f(x).$$

- Dacă $\alpha > 1$ și $0 \leq \ell < \infty$, atunci $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă;
- Dacă $\alpha \leq 1$, iar $0 < \ell \leq \infty$, atunci $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă.

Criteriul de comparație cu $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$: Fie $a < b$ și $f : [a, b) \longrightarrow [0, \infty)$, local integrabilă, astfel încît să existe:

$$\ell = \lim_{x \to b} (b - x)^\alpha f(x).$$

- Dacă $\alpha < 1$ și $0 \leq \ell < \infty$, atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ este convergentă;
- Dacă $\alpha \geq 1$ și $0 < \ell \leq \infty$, atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Criteriul lui Abel: Fie $f, g : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, cu proprietățile:

- f este de clasă $\mathcal{C}^1$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, iar $\displaystyle\int_a^\infty f'(x)dx$ este absolut convergentă;
- g este continuă, iar $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ este mărginită pe $[a, \infty)$.

Atunci integrala $\displaystyle\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ este convergentă.

Exercițiu: Folosind criteriile de comparație, să se studieze natura integralelor improprii:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ (D);

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (C);

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{1-x^2}dx$ (D);

(d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3-1}}dx$ (C $x = 1$, D $x \longrightarrow \infty \Longrightarrow$ D);

(e) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3-1}}dx$ (C);

(f) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}-1}dx$ (C $x \longrightarrow \infty$, D $x = 1 \Longrightarrow$ D);

(g) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}, \alpha > 0$ (D);

*****

Un caz particular care ne interesează este acela al integralelor improprii cu parametri. Un exemplu este:

$$I(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x)dx, \quad m > 0,$$

care se poate rezolva folosind tehnica de derivare în interiorul integralei, adică:

$$I'(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial m} \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x)dx.$$

Exemple rezolvate:

Să se calculeze integralele, folosind derivarea sub integrală:

(a) $I(m) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x)dx, m > 0;$

(b) $I(a) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 \theta)d\theta, a > 1;$

(c) $I(a) = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\arctan ax}{x\sqrt{1-x^2}}dx, a > 0.$

Soluții:

(a) Dacă considerăm funcția:

$$f(x, m) = \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x),$$

observăm că este continuă și admite o derivată parțială continuă în raport cu m.

Atunci obținem:

$$\frac{\partial f}{\partial m} = I'(m) = 2m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + m^2 \sin^2 x}dx$$

Pentru a calcula integrala, facem schimbarea de variabilă $\tan x = t$ și atunci:

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

Integrala inițială se poate prelucra:

$$I'(m) = 2m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{cos^2 x(1 + m^2 \tan^2 x)} dx.$$

Așadar, pentru a obține $\sin^2 x$ în funcție de t calculăm:

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = t^2 \Longrightarrow \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}.$$

În fine, integrala devine:

$$I'(m) = 2m \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1 + m^2 t^2)(1 + t^2)} dt.$$

Făcînd descompunerea în fracții simple, obținem:

$$\frac{t^2}{(1 + m^2 t^2)(1 + t^2)} = \frac{1}{m^2 - 1}\left(\frac{1}{t^2 + 1} - \frac{1}{m^2 t^2 + 1}\right).$$

și calculăm în fine integrala $I'(m) = \frac{\pi}{m+1}$. Integrăm și găsim $I(m) = \pi \ln(m + 1) + c$. Deoarece $I(1) = 0$, rezultă $c = -\pi \ln 2$ și, în fine:

$$I(m) = \pi \ln \frac{m + 1}{2}.$$

(b) Dacă considerăm funcția:

$$f(\theta, a) = \ln(a^2 - \sin^2 \theta),$$

observăm că este continuă și admite o derivată parțială continuă în raport cu a.

Atunci avem:

$$I'(a) = \frac{\partial f}{\partial a} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2 - \sin^2 \theta} d\theta.$$

Cu schimbarea de variabilă $t = \tan\theta$, avem succesiv:

$$\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^\infty \frac{2a}{a^2 - \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\
&= \int_0^\infty \frac{2a}{t^2(a^2-1) + a^2} dt \\
&= \frac{2a}{a^2-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^2 + \frac{a^2}{a^2-1}} dt \\
&= \frac{2a}{a^2-1} \cdot \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} \cdot \arctan t \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} \Big|_0^\infty \\
&= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.
\end{aligned}$$

Integrăm pentru a obține $I(a)$ și găsim:

$$I(a) = \int \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} da = \pi \ln(a + \sqrt{a^2-1}) + c.$$

Pentru a calcula constanta c, putem rescrie integrala din forma inițială:

$$\begin{aligned}
I(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{a^2}\right)\right) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln a^2 d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{a^2}\right) d\theta.
\end{aligned}$$

Putem considera limita $a \longrightarrow \infty$ și atunci integrala de calculat tinde la 0, deci $c = -\pi \ln 2$.
Concluzie: $I(a) = \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2-1}}{2}$.

(c) Dacă considerăm funcția $f(x, a) = \frac{\arctan ax}{x\sqrt{1-x^2}}$, observăm că este continuă și admite o derivată parțială continuă în raport cu a. Atunci:

$$I'(a) = \frac{\partial f}{\partial a} = \int_0^1 \frac{dx}{(1 + a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Pentru a calcula integrala, facem schimbarea de variabilă $x = \sin t$ și obținem:

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + a^2 \sin^2 t}.$$

Mai departe, aplicăm schimbarea de variabilă $\tan t = u$ și obținem succesiv:

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^\infty \frac{du}{(1+a^2)u^2+1} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}. \end{aligned}$$

Așadar, printr-o integrare în funcție de a, găsim:

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(a + \sqrt{1+a^2}) + c.$$

Cum $I(0) = 0$, găsim $c = 0$.

Însă accentul pentru acest seminar va cădea pe *funcțiile lui Euler*, Beta și Gamma, care se definesc astfel:

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, t > 0 \\ B(p,q) &= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}, p, q > 0. \end{aligned}$$

Remarcăm că integrala Gamma este improprie pentru $x \longrightarrow \infty$, iar integrala Beta nu este improprie, ci doar cu parametri.

Proprietățile pe care le vom folosi în exerciții sînt:

(1) $B(p,q) = B(q,p), \forall p, q > 0$;

(2) $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$;

(3) $B(p,q) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy$;

(4) $\Gamma(1) = 1$;

(5) $\Gamma(t+1) = t \cdot \Gamma(t), \forall t > 0$;

(6) $\Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

7.1 Exerciții

Calculați, folosind funcțiile B și Γ, integralele:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^p} dx, p > 0$;

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(x+1)^2}\,dx;$

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1};$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x\,dx,\ p > -1,\ q > -1;$

(e) $\displaystyle\int_0^{1} x^{p+1}(1-x^m)^{q-1}\,dx,\ p, q, m > 0;$

(f) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^p e^{-x^q}\,dx,\ p > -1,\ q > 0;$

(g) $\displaystyle\int_0^{1} \ln^p x^{-1}\,dx,\ p > -1;$

(h) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}},\ n \in \mathbb{N};$

(i) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{1}{x}\ln^3 x \cdot (1-\ln x)^4\,dx;$

(j) $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx;$

(k) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)^2}\,dx;$

(l) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} e^{-x^2-2x+3}\,dx.$

SEMINAR 8

INTEGRALE DUBLE

8.1 Exerciții

Reprezentați grafic domeniile date de următoarele (in)ecuații:

(a) $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2, y^2 = x\}$

(b) $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2, y = x, xy = 1\}$;

(c) $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2y\}$;

(d) $D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0\}$;

(e) $D_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x + y - 6 = 0, y^2 = 8x\}$;

(f) $D_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2x + 2y - 1\}$.

8.2 Metode de calcul

Cazurile particular care ne interesează sînt de 4 feluri.

Integralele pe dreptunghiuri se calculează direct, ca niște integrale iterate. De exemplu, pentru $D = [a, b] \times [c, d]$, avem:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx,$$

ultima egalitate rezultînd dintr-o teoremă, numită *teorema lui Fubini.*

Integralele pe domenii intergrafic se calculează prin a le descrie ca pe niște dreptunghiuri, cu o latură variabilă.

Considerăm, de exemplu, cazul D_1 de mai sus. Acest domeniu poate fi descris astfel (vedeți desenul):

$$x \in [0,1], y \in [x^2, \sqrt{x}],$$

deci putem calcula integrale duble pe acest domeniu sub forma:

$$\iint_{D_1} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx.$$

Integralele pe cercuri centrate în origine se calculează folosind trecerea la coordonate polare:

$$\begin{cases} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{cases}, \quad (r,t) \in [0,\infty) \times [0,2\pi).$$

Aceasta este, de fapt, o schimbare de variabile, deci trebuie schimbate și diferențialele, folosind *matricea jacobiană:*

$$dxdy \mapsto |J|drdt, \quad \text{unde } J = \begin{vmatrix} x_r & x_t \\ y_r & y_t \end{vmatrix} = r.$$

Astfel, de exemplu, dacă $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, putem calcula:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^2 \int_0^{2\pi} f(r,t) \cdot rdtdr.$$

Pentru cercuri necentrate în origine sau alte domenii arbitrare, se explicitează ca domenii intergrafic. De exemplu, pentru domeniul D_4 din primul exercițiu, avem:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}, y \geq 0,$$

care este un disc, centrat în $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ și cu rază $\frac{1}{2}$, din care se ia doar partea superioară, corespunzătoare lui $y \geq 0$. Așadar, acesta poate fi descris astfel (vedeți desenul):

$$x \in [0,1], \quad y \in \left[0, \sqrt{\frac{1}{2} - (x - \frac{1}{2})^2}\right].$$

Integrala se calculează în continuare pe acest domeniu.

Pentru toate cazurile de mai sus, **aria domeniului** D se calculează prin:

$$A(D) = \iint_D dxdy.$$

8.3 Exerciții

1. Calculați $\iint_D f(x, y)dxdy$ în următoarele cazuri:

(a) $D = [0, 1] \times [2, 3]$, iar $f(x, y) = xy^2$;

(b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 2x \le y \le x^2 + 1\}$, iar $f(x, y) = x$;

(c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x, y = x^2\}$, iar $f(x, y) = 3x - y + 2$;

(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$, iar $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$;

(e) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0, y \ge 0\}$, iar $f(x, y) = e^{-2(x^2+y^2)}$;

(f) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le x, y \ge 0\}$, iar $f(x, y) = xy$.

2. Calculați ariile domeniilor de mai sus.

3. Calculați aria domeniului:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \le x^2 + y^2 \le 4, x + y \ge 0\}.$$

SEMINAR 9

INTEGRALE TRIPLE

Integralele triple pe care le vom calcula se rezolvă folosind o abordare de tipul domeniilor intergrafic. Astfel, dacă Ω este un domeniu de tip corp tridimensional, delimitat de suprafețe de ecuații date, se poate calcula *volumul* domeniului Ω cu formula:

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz,$$

iar de cele mai multe ori, se calculează inițial integrala după z, deoarece suprafețele sînt date în această formă.

Exercițiu: Calculați volumul corpului delimitat de suprafețele de ecuații date:

(a) $z = x^2 + y^2$ (paraboloid) și $z = x + y$ (plan);

(b) $z = x^2 + y^2 - 1$ și $z = 2 - x^2 - y^2$ (2 paraboloizi);

(c) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (sferă) și $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ (cilindru).

Indicații: (a) Se calculează mai întîi integrala după z, deoarece o reprezentare grafică ne va ajuta să vedem că în sensul crescător al axei OZ întîlnim mai întîi paraboloidul, apoi planul, conform figurii 9.1.

Astfel, avem de calculat:

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \iint_D \int_{x+y}^{x^2+y^2} dzdxdy,$$

unde D este proiecția pe planul XOY a figurii, care se poate obține foarte simplu eliminînd z din cele două ecuații, adică:

$$x^2 + y^2 = x + y,$$

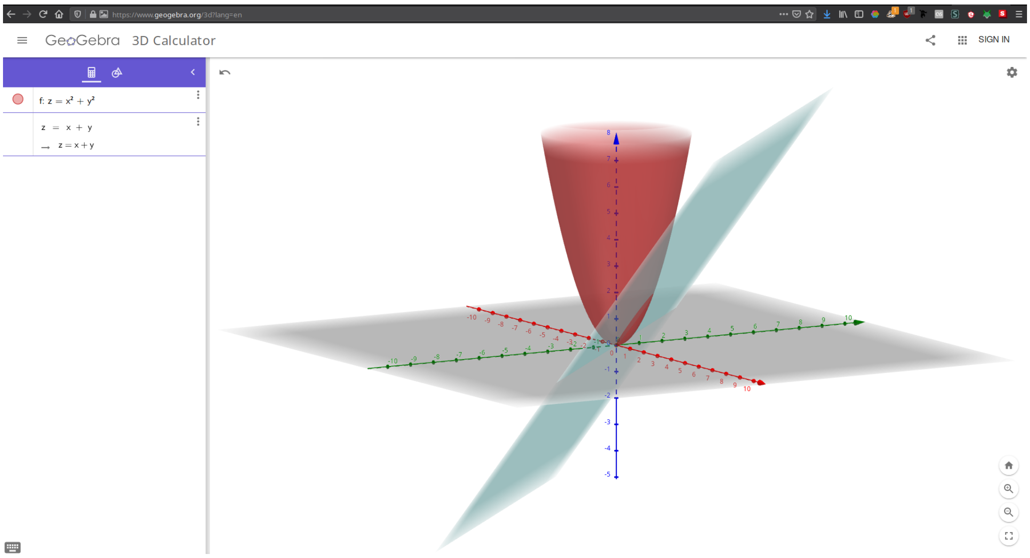

Figura 9.1: Intersecția între paraboloidul $z = x^2 + y^2$ și planul $z = x + y$

care este un cerc. După aceea, integrala pe D se calculează ca o integrală dublă.

Atenție! Volumul unui corp, ca și aria unui domeniu bidimensional, trebuie să fie pozitiv! Dacă din calcule corecte rezultă un volum negativ, înseamnă că s-au luat greșit capetele de integrare (în exemplul de mai sus s-a luat z de la paraboloid la plan).

În unele exerciții, în special cînd apar sfere sau cilindri, se pot folosi coordonate specifice:
Coordonatele sferice: $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times [0, \pi) \times [0, 2\pi)$, reprezentate în figura 9.2.

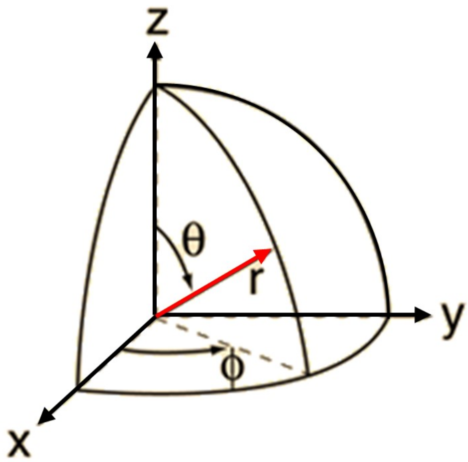

Figura 9.2: Coordonatele sferice r, θ, φ

Schimbare de coordonate este dată de:

$$\begin{cases} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{cases}.$$

Nu uitați, în acest caz, să calculați și jacobianul schimbării de coordonate:

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix}.$$

Coordonate cilindrice: $(r, t, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$, care sînt, practic, coordonatele polare, „mutate" în lungul axei OZ. De aceea, schimbarea de coordonate este dată de:

$$\begin{cases} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \\ z &= z \end{cases}.$$

Iar jacobianul transformării se calculează similar, cu derivatele lui x, y, z în raport cu r, t și respectiv z.

9.1 Resurse suplimentare

- Lecțiile online ale Prof. Travis Kowalski, în special lista `Calculus 3`, începînd cu lecția 17 pentru integrale duble: link;
- `GeoGebra`, pentru reprezentări grafice, în special tridimensionale: link;
- Exerciții rezolvate ale Prof. R. Purtan de la ETTI: integrale duble și integrale triple.

SEMINAR 10

INTEGRALE CURBILINII

10.1 Elemente de teorie

Integrale curbilinii de speța întîi

Fie $\gamma = \gamma(t)$ o curbă netedă, definită pe un interval $t \in [a, b]$. Se definește integrala curbilinie a unei funcții $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f = f(x, y, z)$ prin formula:

$$\int_\gamma f(x, y, z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt.$$

De asemenea, cîteva cazuri particulare de interes sînt:

- *lungimea curbei* γ se obține pentru $f = 1$, deci:

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt;$$

- dacă funcția f reprezintă *densitatea* unui fir pe care îl aproximăm cu o curbă netedă γ, atunci *masa firului* se calculează cu formula:

$$M(\gamma) = \int_\gamma f(x, y, z)ds;$$

- în aceeași ipoteză de mai sus, *coordonatele centrului de greutate* al firului, x_i^G se calculează cu formula (am notat $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$):

$$x_i^G = \frac{1}{M}\int_\gamma x_i f(x_1, x_2, x_3)ds,$$

unde M este masa calculată mai sus.

Integrala curbilinie de speța a doua

Fie $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ o 1-formă diferențială. Se definește integrala curbilinie a formei ω în lungul curbei γ ca mai sus prin formula:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b (P \circ \gamma)x' + (Q \circ \gamma)y' + (R \circ \gamma)z' dt,$$

unde $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$ este o parametrizare a curbei γ.

O aplicație fizică importantă a integralelor curbilinii de speța a doua este calculul *circulației* cîmpurilor vectoriale.

Fie, deci, un cîmp vectorial în spațiu:

$$\vec{V} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Atunci *circulația*[1] cîmpului vectorial în lungul unei curbe netede γ se calculează cu integrala curbilinie:

$$\int_\gamma P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

și putem asocia o 1-formă diferențială cîmpului, anume:

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

10.2 Formula Green-Riemann

Această formulă, care face parte din formulele integrale esențiale pe care le vom studia, ne permite să transformăm o integrală curbilinie de speța a doua într-una dublă.

Mai precis, avem formula:

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy,$$

unde K este suprafața bidimensională închisă de curba γ.

Observație importantă: Pentru a putea aplica formula Green-Riemann, este necesar ca drumul γ să fie închis, pentru a putea descrie o suprafață închisă K! De asemenea, evident, forma diferențială trebuie să fie de clasă $\mathcal{C}^1$, inclusiv în K, pentru a putea calcula derivatele parțiale.

[1] Circulația unui cîmp vectorial este analogul fluxului, dar în dimensiune 1. Astfel, dacă fluxul se calculează pentru cîmpuri care traversează o suprafață (vom întîlni conceptul în lecția despre integrale de suprafață), circulația se calculează pentru cîmpuri în lungul unor curbe.

10.2.1 Forme diferențiale închise

Fie $\alpha = Pdx + Qdy$ o 1-formă diferențială de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a $K = \text{Int}(\gamma)$. Această formă diferențială se numește *închisă* dacă are loc:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Se poate observa, folosind formula Green-Riemann, că pentru forme diferențiale închise, integrala curbilinie în lungul oricărui drum este nulă. Această observație se mai numește *independența de drum a integralei curbilinii* sau *teorema Poincaré.*

10.3 Exerciții

1. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speța întîi:

(a) $\int_\gamma x ds$, unde $\gamma : y = x^2, x \in [0, 2]$;

(b) $\int_\gamma y^5 ds$, unde $\gamma : x = \frac{y^4}{4}, y \in [0, 2]$;

(c) $\int_\gamma x^2 ds$, unde $\gamma : x^2 + y^2 = 2, x, y \geq 0$;

(d) $\int_\gamma y^2 ds$, unde $\gamma : x^2 + y^2 = 4, x \leq 0, y \geq 0$.

2. Calculați, direct și aplicînd formula Green-Riemann, integrala curbilinie $\int_\gamma \alpha$ în următoarele cazuri:

(a) $\alpha = y^2 dx + x dy$, unde γ este pătratul cu vîrfurile $A(0, 0), B(2, 0), C(2, 2), D(0, 2)$;

(b) $\alpha = y dx + x^2 dy$, unde γ este cercul centrat în origine și de rază 2.

3. Calculați următoarele integrale curbilinii de speța a doua:

(a) $\int_\gamma x dy - y dx$, unde $\gamma : x^2 + y^2 = 4, y = x\sqrt{3} \geq 0$ și $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$;

(b) $\displaystyle\int_\gamma (x+y)dx + (x-y)dy$, pe domeniul:

$$\gamma \,:\, x^2 + y^2 = 4,\, y \geq 0;$$

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y}{x+1}dx + dy$, unde γ este triunghiul cu vîrfurile $A(2,0), B(0,0), C(0,2)$.

4. Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma ydx + xdy$ pe un drum de la $A(2,1)$ la $B(1,3)$.

5. Să se calculeze circulația cîmpului de vectori $\vec{V}$ de-a lungul curbei γ, pentru:

(a) $\vec{V} = -(x^2+y^2)\vec{i} - x^2 \vec{-} y^2\vec{j}$, cu:

$$\gamma \,:\, \{x^2 + y^2 = 4,\, y < 0\} \cap \{x^2 + y^2 - 2x = 0,\, y \geq 0\}$$

(b) $\vec{V} = x\vec{y} + xy\vec{j}$, unde:

$$\gamma \,:\, \{x^2 + y^2 = 1\} \cap \{x + y = 3\}.$$

6. Să se calculeze masa firului material γ, cu ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= t^2/2,\, t \in [0,1] \\ z(t) &= t^3/3 \end{cases}$$

iar densitatea $f(x,y,z) = \sqrt{2y}$.

7. Fie forma diferențială:

$$\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma \alpha$, unde γ este cercul centrat în origine și cu raza 2.

8. Să se calculeze integrala curbilinie $\displaystyle\int_\gamma xydx + \frac{x^2}{2}dy$, pe conturul:

$$\gamma \,:\, \{x^2 + y^2 = 1,\, x \leq 0 \leq y\} \cap \{x + y = -1,\, x, y < 0\}.$$

Indicație: Curba γ nu este închisă, deci nu putem aplica formula Green-Riemann. Considerăm segmentul orientat $[AB]$, cu $A(0,-1), B(0,1)$, cu care închidem curba. Definim $C = \gamma \cup [AB]$ și acum putem aplica Green-Riemann pe C. Vom avea, de fapt:

$$\int_C \alpha = \int_\gamma \alpha + \int_{[AB]} \alpha,$$

unde α este forma diferențială de integrat.

Putem calcula acum integrala pe C cu Green-Riemann, iar cea pe $[AB]$ cu definiția, obținînd în final integrala pe γ.

9. Calculați, folosind integrala curbilinie:

(a) lungimea unui cerc de rază 2;

(b) lungimea segmentului AB, cu $A(1,2)$ și $B(3,5)$;

(c) lungimea arcului de parabolă $y = 3x^2$, cu $x \in [-2,2]$;

(d) lungimea arcului de hiperbolă $xy = 1$, cu $x \in [1,2]$.

10.4 Exerciții suplimentare (ETTI)

Calculați integralele curbilinii de mai jos:

Speța întîi:

(a) $\displaystyle\int_\gamma ye^{-x} ds$, unde parametrizarea curbei γ este dată de:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) &= \ln(1+t^2) \\ y(t) &= 2\arctan t - t \end{cases}, \quad t \in [0,1];$$

(b) $\displaystyle\int_\gamma (x^2+y^2)\ln z ds$, unde parametrizarea curbei γ este dată de:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) &= e^t \cos t \\ y(t) &= e^t \sin t \\ z(t) &= e^t \end{cases}, \quad t \in [0,1];$$

(c) $\int_\gamma xyzds$, unde parametrizarea curbei γ este:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= \dfrac{2}{3}\sqrt{2t^3} \\ z(t) &= \dfrac{1}{2}t^2 \end{cases}, \quad t \in [0,1];$$

(d) $\int_\gamma x^2 yds$, unde $\gamma = [AB] \cup [BC]$, iar capetele segmentelor sînt $A(-1,1), B(2,1), C(2,5)$;

(e) $\int_\gamma x^2 ds$, unde γ este dată de:

$$\gamma : x^2 + y^2 = 2, \quad x, y \geq 0;$$

(f) $\int_\gamma (x^2 + y^2)ds$, unde γ este sectorul de cerc $x^2 + y^2 = 1$, parcurs de la $A(0,-1)$ la $B(1,0)$;

(g) Calculați lungimea segmentului $[AB]$, unde $A(1,2), B(3,5)$.

Speța a doua: $\int_\gamma \omega$ pentru:

(a) $\omega = (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, unde γ este dată de:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) &= \sqrt{t} \\ y(t) &= \sqrt{t+1} \end{cases}, \quad t \in [1,4];$$

(b) $\omega = \dfrac{1}{y^2+1}dx + \dfrac{y}{x^2+1}dy$, unde γ este dată de:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) &= t^2 \\ y(t) &= t \end{cases}, \quad t \in [0,1];$$

(c) $\omega = \sqrt{x}dx + xy^2dy$, unde γ este parabola $y = x^2$, pentru $x \in [0,1]$.

SEMINAR 11

INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ

11.1 Integrale de suprafață de speța întîi

Integralele de suprafață reprezintă generalizarea într-o dimensiune superioară pentru integralele curbilinii. Astfel, multe dintre formulele și abordările de calcul pe care le vom folosi vor fi similare.

Fie $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o pînză parametrizată și fie $\Sigma = \Phi(D)$ imaginea ei (i.e. suprafață pe care vom integra). Fie $f : U \subseteq \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă (deci integrabilă), definită pe (o porțiune din) imaginea pînzei.

Vom fi interesați de un caz particular (și, totodată, cel mai des întîlnit) pentru integrala de suprafață, anume cînd pînza este dată într-o *parametrizare carteziană*. Adică ecuația suprafeței poate fi scrisă în forma $z = z(x, y)$.

Integrala de suprafață de speța întîi a funcției f pe suprafața Σ parametrizată cartezian prin $z = z(x, y)$ este:

$$\int_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy,$$

unde:

- D este domeniul de definiție al parametrizării carteziene, adică proiecția pe planul XOY a suprafeței ($z : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$);
- coeficienții de sub radical sînt $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ și $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

În cazul particular în care $f = 1$, se obține *aria suprafeței* Σ.

11.2 Integrale de suprafață de speța a doua

Fie, ca mai sus, o pînză tridimensională, pe care o considerăm a fi parametrizată:

$$\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)).$$

Fie, de asemenea, o 2-formă diferențială[1]:

$$\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

Integrala pe suprafața orientată $\Sigma = \Phi(D)$ a 2-formei diferențiale ω se definește prin:

$$\int_{\Sigma} \omega = \iint_D (P \circ \Phi) \cdot \frac{D(Y, Z)}{D(u, v)} + (Q \circ \Phi) \cdot \frac{D(Z, X)}{D(u, v)} + (R \circ \Phi) \cdot \frac{D(X, Y)}{D(u, v)} du dv,$$

unde D este domeniul parametrizării ($(u, v) \in D$), iar $\frac{D(Y, Z)}{D(u, v)}$ etc. sînt jacobienii parametrizării (X, Y, Z) în funcție de u, v. Concret, de exemplu, avem:

$$\frac{D(X, Y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{vmatrix},$$

și celelalte, folosind notația simplificată $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$ etc. [2]

Într-o formă simplificată, putem scrie integrala folosind un determinant formal:

$$\int_{\Sigma} \omega = \int \begin{vmatrix} P \circ \Phi & Q \circ \Phi & R \circ \Phi \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} du dv.$$

11.3 Formula Gauss-Ostrogradski

Această formulă ne permite să schimbăm o integrală de suprafață de speța a doua cu una triplă, similar formulei Green-Riemann, dar în dimensiune superioară.

[1] ω este o **2**-formă diferențială deoarece ea conține produse de cîte 2 elemente diferențiale dx, dy, dz. De asemenea, notația $\wedge$ (citită „wedge“ sau „produs exterior“) este o notație specifică pentru produsul care se definește între diferențialele dx, dy, dz. Alternativ, puteți găsi scrierea și prin juxtapunere:

$$\omega = P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

Însă acest produs *nu este comutativ*, deci ordinea în care scriem 2-forma diferențială este esențială! (observați permutările circulare: $dydz \longrightarrow dzdx \longrightarrow dxdy$).

[2] Ordinea scrierii jacobienilor este, evident, esențială. Pentru a-i reține mai ușor, observați că ordinea urmează tot o permutare circulară, asemănătoare diferențialelor din 2-forma diferențială ω.

Păstrînd notațiile și contextul de mai sus, formula Gauss-Ostrogradski se scrie:

$$\int_{\Sigma} \omega = \iiint_K P_x + Q_y + R_z dxdydz,$$

unde $K = \mathrm{Int}\Sigma$ este solidul care are drept frontieră suprafața Σ, iar P_x, Q_y, R_z notează derivatele parțiale corespunzătoare coeficienților din 2-forma diferențială ω.

Observaţie 11.1: Formula Gauss-Ostrogradski are, ca și formula Green-Riemann, *condiții de aplicare (existență).* Încercați să le formulați, analizînd formula.

Formula Gauss-Ostrogradski se mai numește *formula flux-divergență.* Într-adevăr, folosind o interpretare fizică, se poate asocia 2-formei diferențiale ω cîmpul vectorial $\vec{V} = (P, Q, R)$, iar membrul stîng, adică integrala de suprafață, calculează *fluxul cîmpului $\vec{V}$ prin suprafața* Σ. În fizică, acesta se definește ca produsul scalar dintre cîmpul vectorial și versorul normal la suprafață. Membrul drept este, după cum se poate vedea ușor, divergența cîmpului vectorial *în solidul* $\mathrm{Int}\Sigma$, deci avem:

$$\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_K \nabla \cdot \vec{V} dxdydz.$$

Pentru cazul cînd suprafața este parametrizată, adică avem:

$$\Phi = \Phi(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)),$$

se pot calcula *vectorii tangenți* la suprafață, după direcțiile lui u și v, prin derivate parțiale:

$$\vec{T}_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \qquad \vec{T}_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Apoi, normala la suprafață se poate calcula prin produs vectorial[3]. O variantă simplă de a reține formula de calcul pentru produsul vectorial folosește determinantul formal:

$$\vec{N} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{T}_u^1 & \vec{T}_u^2 & \vec{T}_u^3 \\ \vec{T}_v^1 & \vec{T}_v^2 & \vec{T}_v^3 \end{vmatrix},$$

unde $\vec{T}_{u,v}^i$ notează componenta i a vectorului $\vec{T}_{u,v}$.

Ulterior, *vectorul* normal $\vec{N}$ devine *versorul* normal $\vec{n}$, prin normare, adică $\vec{n} = \frac{1}{||\vec{N}||}\vec{N}$.

Dar, ținînd cont că avem relația între diferențiale $d\sigma = ||\vec{N}||dudv$, rezultă că obținem:

$$\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \frac{1}{||\vec{N}||}\vec{N} \cdot ||\vec{N}||dudv = \iint_D \vec{V} \cdot \vec{N} dudv.$$

[3]amintiți-vă, produsul vectorial al doi vectori este un vector perpendicular pe planul dat de cei doi factori

11.4 Parametrizări uzuale

Următoarele formule de parametrizare pot fi folosite în calcule:

(1) **Sfera:** Fie $R > 0$ și $(u, v) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi)$. Parametrizarea sferei $\Phi = \Phi(u, v)$ este:

$$\Phi(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u);$$

(2) **Elipsoidul:** Fie $a, b, c > 0$ și $(u, v) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi)$. Parametrizarea elipsoidului este:

$$\Phi(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u);$$

(3) **Paraboloidul:** Fie $a > 0, h > 0$ și $(u, v) \in D = [0, h] \times [0, 2\pi)$. Parametrizarea paraboloidului este:

$$\Phi(u, v) = (au \cos v, au \sin v, u^2);$$

(4) **Conul:** Fie $h > 0$ și $(u, v) \in D = [0, 2\pi) \times [0, h]$. Parametrizarea conului este:

$$\Phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v);$$

(5) **Cilindrul:** Fie $a > 0, 0 \leq h_1 \leq h_2$ și $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [h_1, h_2]$. Parametrizarea cilindrului este:

$$\Phi(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v).$$

11.5 Exerciții

1. Calculați vectorii tangenți și versorul normalei la suprafețele parametrizate din secțiunea anterioară.

2. Să se calculeze integrala de suprafață de prima speță:

$$\int_\Sigma f(x, y, z) d\sigma,$$

unde $f(x, y, z) = y\sqrt{z}$, iar $\Sigma : x^2 + y^2 = 6z, z \in [0, 2]$.

3. Folosind integrala de suprafață, calculați aria suprafeței Σ, unde:

$$\Sigma : 2z = 4 - x^2 - y^2, \quad z \in [0, 1].$$

4. Calculați fluxul cîmpului vectorial $\vec{V}$ prin suprafața Σ pentru:

$$\vec{V} = y\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}, \quad \Sigma : z = x^2 + y^2, z \in [0, 1].$$

5. Calculați $\int_\Sigma \omega$, unde:

(a) • $\omega = ydy \wedge dz + zdz \wedge dx + xdx \wedge dy$;
• $\Sigma : x^2 + y^2 = z^2, z \in [1, 2]$.

(b) • $\omega = x(z + 3)dy \wedge dz + yzdz \wedge dx - (z + z^2)dx \wedge dy$;
• $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.

6. Calculați fluxul cîmpului:

$$\vec{V} = (x + y)dy \wedge dz + (y + z)dz \wedge dx - 2zdx \wedge dy$$

prin emisfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z > 0$.

11.6 Formula lui Stokes

Această ultimă formulă integrală ne permite să schimbăm o integrală curbilinie de speța a doua cu una de suprafață de speța a doua.

Fie Σ o suprafață cu bord (frontieră) și fie o 1-formă diferențială

$$\alpha = Pdx + Qdy + Rdz,$$

care este de clasă $\mathcal{C}^1$ într-o vecinătate a lui Σ.

Notăm frontiera lui Σ prin $\partial\Sigma$, care este o curbă (conturul suprafeței) sau, mai precis, un *drum neted.*

Are loc *formula lui Stokes:*

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy.$$

În notație vectorială, dacă asociem cîmpul vectorial $\vec{V} = (P, Q, R)$ 1-formei diferențiale α, atunci formula lui Stokes se scrie:

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{n} d\sigma,$$

unde $\nabla \times \vec{V} = \text{rot}\vec{V}$ se numește *rotorul* cîmpului vectorial, calculat cu ajutorul produsului vectorial formal între operatorul diferențial $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ și cîmpul $\vec{V} = (P, Q, R)$.

11.7 Exerciții

7. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, integrala curbilinie $\int_\gamma \alpha$ pentru cazurile:

(a) $\alpha = (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, iar curba γ este frontiera suprafeței $\Sigma : z = x^2 + y^2, z = 1$;

(b) $\alpha = ydx + zdy + xdz$, iar curba γ este frontiera suprafeței $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$.

11.8 Resurse suplimentare

Formula Green-Riemann, formula Gauss-Ostrogradski și **formula Stokes** se numesc, în general, *formule integrale*. Pentru coerență, le-am introdus în capitolele potrivite, în loc să le dedic un capitol separat.

Recomand materialele Prof. Purtan, care conțin exerciții rezolvate complet:

- integrale de suprafață;
- formule integrale.

INDEX