Seminar 4
Șiruri și serii de funcții

1 Convergență punctuală și convergență uniformă

Definiţie 1.1 (Convergență punctuală)**:** Fie (X, d) un spațiu metric și fie $f_n : X \to \mathbb{R}$ un șir de funcții. Fie $f : X \to \mathbb{R}$ o funcție.

Spunem că șirul (f_n) *converge punctual (simplu)* la f dacă:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in X.$$

Scriem $f_n \xrightarrow{PC} f$ și numim funcția f *limita punctuală* a șirului (f_n).

Definiţie 1.2 (Convergență uniformă)**:** În condițiile și cu notațiile din teorema anterioară, spunem că șirul (f_n) este *uniform convergent* la f dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 \text{ a.î. } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geqslant N_\varepsilon, \forall x \in X.$$

Echivalent, în exerciții, se va folosi caracterizarea:

Propoziţie 1.1: *În condițiile și cu notațiile de mai sus, șirul (f_n) converge uniform la f dacă și numai dacă:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Legătura între aceste două tipuri de convergență este foarte importantă:

Teoremă 1.1: *Orice șir de funcții $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, uniform convergent pe $[a, b]$ este punctual convergent pe $[a, b]$.*

Reciproca este falsă.

Iată un contraexemplu pentru reciprocă. Fie $[a, b] = [0, 1]$ și $f_n(x) = x^n, n \geqslant 1$.

Pentru orice argument $x \in [a, b]$, avem:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Din aceasta, rezultă că $f_n \xrightarrow{PC} f$, unde f este funcția definită de limita de mai sus. Dar:

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &= \sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \max\big(\sup_{x\in[0,1)} \big(|f_n(x) - f(x)|, |f_n(1) - f(1)|\big)\big) \\ &= \max\big(\sup_{x\in[0,1)} (x^n, 0)\big) \\ &= 1, \end{aligned}$$

de unde rezultă că $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 1 \neq 0$. Rezultă că (f_n) este punctual convergent, nu uniform convergent pe $[0, 1)$.

Pentru funcții mărginite, convergența uniformă coincide cu noțiunea clasică de convergență.

De asemenea, proprietatea de continuitate nu se transferă automat în cazul șirurilor de funcții. Dacă funcțiile f_n sînt continue, iar șirul f_n converge simplu la f, nu rezultă, în general, că f este continuă. De exemplu, să luăm șirul de funcții continue:

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$$

Acesta converge punctual la funcția discontinuă:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Continuitatea se transferă în următorul caz:

Teoremă 1.2 (Transfer de continuitate)**:** *Dacă f_n sînt funcții continue, iar șirul f_n converge uniform la f, atunci funcția f este continuă.*

2 Derivare și integrare termen cu termen

Pentru șiruri de funcții, operația de integrare și cea de derivare pot comuta, în anumite situații. Fie $f_n, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcții continue. Dacă f_n converge uniform la f, atunci are loc proprietatea de integrare termen cu termen:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Similar, pentru cazul derivatelor, să luăm un exemplu. Considerăm șirul $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x}, x \in \mathbb{R}$. Acest șir converge uniform la funcția nulă:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Următorul rezultat dă condiții suficiente pentru convergența șirului derivatelor:

Teoremă 2.1 (Derivare termen cu termen)**:** *Presupunem că funcțiile f_n sînt derivabile, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Dacă șirul f_n converge punctual la f și dacă există $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, astfel încît f'_n converge uniform la g, atunci f este derivabilă și avem $f' = g$.*

3 Serii de funcții

Pentru studiul seriilor de funcții, vom folosi noțiunile cunoscute de la serii de numere, transferînd proprietățile la șirul sumelor parțiale.

Fie $u_n : X \to \mathbb{R}$ un șir de funcții și fie $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ șirul sumelor parțiale.

Spunem că seria $\sum u_n$ este punctual (simplu) convergentă dacă s_n este punctual convergent, ca șir de funcții.

Seria se numește *uniform convergentă* dacă s_n converge uniform.

Suma seriei este limita (punctuală sau uniformă) a șirului sumelor parțiale.

În calcule, se va folosi următorul rezultat:

Teoremă 3.1 (Weierstrass)**:** *Dacă există un șir cu termeni pozitivi a_n, astfel încît $|u_n(x)| \leqslant a_n$, pentru orice $x \in X$, iar seria $\sum a_n$ converge, atunci seria $\sum u_n$ converge uniform.*

Rezultatul privitor la transferul de continuitate se regăsește și în acest caz:

Teoremă 3.2 (Transfer de continuitate)**:** *Dacă u_n sînt funcții continue, iar seria $\sum u_n$ converge uniform la f, atunci funcția f este continuă.*

De asemenea, avem și rezultatele privitoare la *derivare și integrare termen cu termen* pentru serii de funcții.

Spunem că o serie de funcții $\sum f_n$ are proprietatea de integrare termen cu termen pe intervalul $[a, b]$ dacă:

$$\int_a^b \Big(\sum_n f_n(x) \Big) dx = \sum_n \Big(\int_a^b f_n(x) dx \Big).$$

Similar, spunem că o serie de funcții are proprietatea de derivare termen cu termen pe mulțimea D dacă:

$$\Big(\sum_n f_n(x) \Big)' = \sum_n f_n'(x), \forall x \in D.$$

Aceste proprietăți sînt verificate în condițiile date de rezultatul următor.

Teoremă 3.3: *Fie* $u_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ *un șir de funcții continue.*

(a) Dacă seria $\sum u_n$ *converge uniform la* f, *atunci* f *este integrabilă și avem:*

$$\int_a^b \sum_n u_n(x) dx = \sum_n \int_a^b u_n(x) dx.$$

(b) Presupunem că toate funcțiile u_n *sînt derivabile. Dacă seria* $\sum u_n$ *converge punctual la* f *și dacă există* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, *astfel încît* $\sum_n u_n'$ *converge uniform la* g, *atunci* f *este derivabilă și* $f' = g$.

Observaţie 3.1: Se poate arăta că mai sus avem condiții *suficiente*, nu și necesare pentru ca o serie să se poată integra (respectiv deriva) termen cu termen.

4 Formula lui Taylor

Orice funcție cu anumite proprietăți poate fi aproximată cu un polinom. Rezultatul formal este următorul.

Definiţie 4.1: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă $C^m(I)$. Pentru orice $a \in I$, definim *polinomul Taylor* de gradul $n \leqslant m$ asociat funcției f în punctul a prin:

$$T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Restul (eroarea de aproximare) este definit prin:

$$R_{n,f,a} = f(x) - T_{n,f,a}(x).$$

Primele polinoame (de gradul întîi și al doilea) se numesc, respectiv, *aproximarea liniară* și *pătratică* a lui f, în jurul lui a.

Acest polinom se regăsește și în *formula lui Taylor*, care ne arată legătura lui strînsă cu orice funcție.

Teoremă 4.1 (Formula lui Taylor cu restul Lagrange)**:** *Fie* $f : I \to \mathbb{R}$ *o funcție de clasă* $C^{n+1}(I)$ *și* $a \in I$. *Atunci, pentru orice* $x \in I$, *există* $\xi \in (a, x)$ *sau* (x, a) *astfel încît:*

$$f(x) = T_{n,f,a}(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Așadar, din această teoremă știm mai precis eroarea aproximării unei funcții cu polinomul Taylor asociat.

Următoarele sînt consecințe ale teoremei:

(a) Restul poate fi scris sub *forma Peano*: există o funcție $\omega : I \to \mathbb{R}$, cu $\lim_{x\to a} \omega(x) = \omega(a) = 0$ și restul se scrie:

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}\omega(x).$$

(b) Restul poate fi scris și sub *formă integrală*:

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt;$$

(c) $\lim_{x\to a} \frac{R_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$

Aceste noțiuni pot fi mai departe utilizate pentru a studia *seria Taylor* asociată unei funcții.

Definiţie 4.2: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis și fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă $C^\infty(I)$. Pentru orice $x_0 \in I$, se definește *seria Taylor* asociată funcției f în punctul x_0 seria de puteri:

$$T = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Dacă $x_0 = 0$, seria se mai numește *Maclaurin*.

Importanța seriilor Taylor este dată de rezultatul următor:

Teoremă 4.2: *Fie* $a < b$ *și fie* $f \in C^\infty([a,b])$ *astfel încît să existe* $M > 0$ *cu proprietatea că* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], |f^{(n)}(x)| \leqslant M$.

Atunci pentru orice $x_0 \in (a,b)$, *seria Taylor a lui* f *în jurul lui* x_0 *este uniform convergentă pe* $[a,b]$ *și suma ei este funcția* f. *Adică avem:*

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \forall x \in [a,b].$$

5 Serii de puteri

Seriile de puteri constituie un caz particular al seriilor de funcții, luînd funcții de tip polinomial.

Definiţie 5.1: Fie (a_n) un șir de numere reale (complexe) și fie $a \in \mathbb{R}$.

Seria $\sum_{n\geqslant 0} a_n(x-a)^n$ se numește *seria de puteri centrată în* a, definită de șirul a_n.

Toate rezultatele privitoare la seriile de funcții sînt valabile și pentru seriile de puteri. În plus, avem:

Teoremă 5.1 (Abel 1)**:** *Pentru orice serie de puteri* $\sum a_n x^n$ *există un număr* $0 \leqslant R \leqslant \infty$, *astfel încît:*

(a) Seria este absolut convergentă pe intervalul $(-R, R)$;

(b) Pentru orice x, *cu* $|x| > R$, *seria este divergentă;*

(c) Pentru orice $0 < r < R$, *seria este uniform convergentă pe* $[-r, r]$.

Numărul R *se numește* raza de convergență *a seriei de puteri, iar intervalul* $(-R, R)$ *se numește* intervalul de convergență *a seriei.*

În plus, datorită naturii sale, suma unei serii de puteri este o funcție continuă în orice punct interior intervalului de convergență.

Teoremă 5.2 (Abel 2)**:** *Fie* $\sum a_n x^n$ *o serie de puteri,* R *raza de convergență și* f *suma sa. Dacă seria este convergentă în* R*, atunci* f *este continuă în* R*.*

Rezultatul similar are loc și pentru punctul $-R$*.*

Calculul razei de convergență se face cu următoarea:

Teoremă 5.3 (Cauchy—Hadamard)**:** *Fie* $\sum a_n x^n$ *o serie de puteri,* R *raza sa de convergență și definim*

$$\omega = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Atunci:

- $R = \omega^{-1}$*, dacă* $0 < \omega < \infty$*;*
- $R = 0$ *dacă* $\omega = \infty$*;*
- $R = \infty$ *dacă* $\omega = 0$*.*

Din nou, mulțumită naturii particulare a seriilor de puteri, teoremele de derivare și integrare termen cu termen sînt verificate. Dacă $\sum a_n(x-a)^n$ este o serie de puteri, iar $S(x)$ este suma sa, atunci:

(a) Seria derivatelor $\sum n a_n (x-a)^{n-1}$ are aceeași rază de convergență cu seria inițială și suma sa este $S'(x)$;

(b) Seria primitivelor $\sum a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ are aceeași rază de convergență cu seria inițială, iar suma sa este o primitivă a lui S.

6 Exerciții

1. Să se studieze convergența punctuală și uniformă a șirurilor de funcții:

(a) $u_n : (0,1) \to \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{1}{nx+1}, n \geqslant 0$;

(b) $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}, u_n(x) = x^n - x^{2n}, n \geqslant 0$ (sup în $\frac{1}{\sqrt{2}}$);

(c) $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, n > 0$;

(d) $u_n : [-1,1] \to \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$;

2. Fie șirul $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, n > 0$.
Să se studieze convergența șirurilor u_n și u_n'.

3. Să se studieze convergența seriilor de funcții și să se decidă dacă se pot deriva termen cu termen:

(a) $\sum n^{-x}, x \in \mathbb{R}$ (Weierstrass, comparație cu armonică);

(b) $\sum \frac{\sin nx}{2^n}, x \in \mathbb{R}$;

(c) $\sum \frac{\sin nx}{n(n+1)}$.

4. Să se dezvolte următoarele funcții în serie Maclaurin, precizînd și domeniul de convergență:

(a) $f(x) = e^x$ ($R = \mathbb{R}$);

(b) $f(x) = \sin x$ ($R = \mathbb{R}$);

(c) $f(x) = \cos x$ ($R = \mathbb{R}$);

(d) $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ ($R = \{|x| < 1\}$);

(e) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ($R = (-1, 1)$);

(f) $f(x) = \ln(1+x)$;

(g) $f(x) = \arctan x$.

5. Să se calculeze cu o eroare mai mică decît 10^{-3} integralele (dezvoltînd integrandul în jurul lui 0, integrînd termen cu termen și aproximînd seria alternată rezultată):

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$;

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\arctan x}{x} dx$;

(d) $\displaystyle\int_0^{1} e^{-x^2} dx$.

6. Să se calculeze raza de convergență și mulțimea de convergență în $\mathbb{R}$ pentru următoarele serii de puteri:

(a) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} x^n$;

(b) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n^n x^n$;

(c) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{n^n x^n}{n!}$.