

Parțial calcul integral 917B

NUMĂRUL 1

1. Folosind derivarea sub semnul integral, calculați:

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x) dx, m > 0.$$

2. Calculați $\int_0^1 \sqrt{\ln \frac{1}{x}} dx$.

3. Fie $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$.

Calculați integrala curbilinie:

$$\int_{\Gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

(a) direct (folosind parametrizarea curbei Γ);

(b) folosind formula Green-Riemann, pe $K = \text{Int}(\Gamma) - \{(0, 0)\}$.

(*) Calculați volumul corpului mărginit de suprafețele de ecuații:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 - 1 \\ z = 4 - x^2 - y^2 \end{cases}.$$

NUMĂRUL 2

1. Folosind derivarea sub integrală, calculați:

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\arctan ax}{x\sqrt{1-x^2}} dx, a > 0.$$

2. Calculați integrala:

$$\int_1^e \frac{1}{x} \ln^3 x \cdot (1 - \ln x)^4 dx.$$

3. Calculați integrala:

$$I = \int_C y^2 dx + x^2 dy,$$

unde curba C este intersecția dintre:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x = t \in [-1, 1] \\ y = 0 \end{cases}$$

(a) folosind parametrizarea curbei (calcul direct);

(b) folosind formula Green-Riemann.

(*) Calculați volumul corpului delimitat de suprafețele:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 - 1 \\ z = 2 - x^2 - y^2 \end{cases}.$$