Seminar suplimentar
Recapitulare pentru parțial

1. Să se determine coordonatele vectorului $u \in \mathbb{R}^3$ în baza canonică, dacă în baza

$$B = \{(2,1,2),(1,1,0),(3,0,0)\}$$

el are coordonatele $(4,0,5)$.

2. În spațiul real $\mathbb{R}^3$, considerăm vectorii:

$$x_1 = (1,0,2), x_2 = (4,1,-1), y_1 = (1,2,3), y_2 = (0,5,4), y_3 = (1,1,1)$$

și spațiile vectoriale:

$$V_1 = Sp(x_1, x_2), \quad V_2 = Sp(y_1, y_2, y_3).$$

Să se determine o bază pentru $V_1, V_2, V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$ și un subspațiu $U \subseteq \mathbb{R}^3$, astfel încît $U \oplus V_1 = \mathbb{R}^3$.

3. Fie $V_1 = \{P \in \mathbb{R}[X]_3 \mid P(1) = 0\}$ și subspațiul:

$$V_2 = Sp(X+8, X^2, 2X+3X^2+4X^3).$$

Să se determine cîte o bază în spațiile vectoriale reale $V_1, V_2, V_1+V_2, V_1 \cap V_2$ și un subspațiu $V \subseteq \mathbb{R}[X]_3$ (dacă există), astfel încît $V \oplus (V_1+V_2) = \mathbb{R}[X]_3$.

4. Fie aplicația liniară:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y,z) = (x-2y, z-8y).$$

Să se determine nucleul și imaginea sa și cîte o bază în fiecare subspațiu. Completați baza nucleului pînă la o bază a lui $\mathbb{R}^3$.

5. Fie aplicația liniară:

$$f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}[X]_2, \quad f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = aX^2 + (b-c)X + 8d.$$

(a) Găsiți matricea asociată aplicației liniare în bazele canonice;

(b) Determinați $\mathrm{Ker} f$ și $\mathrm{Im} f$ și verificați teorema rang-defect.

6. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a) Găsiți aplicația liniară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, a cărei matrice în baza canonică este matricea A de mai sus;

(b) Găsiți $a \in \mathbb{R}$ astfel încît aplicația determinată mai sus să fie izomorfism;

(c) Determinați defectul aplicației f (discuție după a).

7. Fie $V = \mathbb{R}[X]_2$ și mulțimea:

$$B' = \{p_1 = 3X^2 + 2, p_2 = X - 5, p_3 = X^2 + 4\}.$$

(a) Arătați că B' este bază a lui V;

(b) Determinați matricea de trecere de la baza canonică la baza B';

(c) Fie $f : V \to \mathbb{R}[X]_1$ morfismul de derivare (în raport cu X). Determinați matricea lui f în baza canonică a lui V, față de baza canonică alui $\mathbb{R}[X]_1$, precum și matricea lui f în baza B' a lui V față de baza $B'' = \{q_1 = 7, q_2 = X - 2\}$ a lui $\mathbb{R}[X]_1$.

8. Fie spațiul $V = \mathbb{R}^3$ și mulțimile:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 4z - y \text{ și } z = 2x - y\}$$

(a) Arătați că $S_1 \hookrightarrow V$ și $S_2 \hookrightarrow V$;

(b) Determinați $S_1 \cap S_2$ și o bază în acest subspațiu;

(c) Este suma $S_1 + S_2$ directă?

(d) Determinați $S_1 + S_2$ și o bază în acest subspațiu.

9. Să se determine vectorii și valorile proprii pentru matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

10. Fie aplicația liniară $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, definită prin:

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b + d & 2b + 4c + 5d \\ 2c + d & 8d \end{pmatrix}$$

Să se arate că f nu este diagonalizabilă.

11. Determinați vectorii și valorile proprii pentru aplicațiile:

(a) $f : \mathbb{R}[X]_3 \to \mathbb{R}[X]_3, f(P) = 2P'$;

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(a, b, c) = (a - b + c, b, b - c)$.