Seminar 3
Ecuații și sisteme diferențiale
Ecuații Euler

1. Rezolvați următoarele ecuații și sisteme:

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0$;

(b) $y''' - 4y'' + 4y' = 0$;

(c) $y''' - 3y'' - 12y' - 8y = 0$;

(d) $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$;

(e) $\begin{cases} x'(t) &= 2x + y \\ y'(t) &= 3x + 3y \end{cases}$ (2 metode);

(f) $\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x + 2y \end{cases}$ (2 metode);

(g) $\begin{cases} x' &= x - 2y \\ y' &= 2x - 3y \end{cases}$ (2 metode);

(h) $\begin{cases} x' &= -2x - 4y \\ y' &= x + 3y \end{cases}$, cu $x(0) = 1, y(0) = 2$ (2 metode);

(i) $\begin{cases} x' &= 3x - y \\ y' &= 10x - 4y \end{cases}$, cu $x(0) = 1, y(0) = 5$ (2 metode);

(j) $\begin{cases} x' &= 3x - 2y \\ y' &= 2x - 2y \end{cases}$, cu $x(0) = 3, y(0) = 3$ (2 metode).

Ecuații Euler

O ecuație diferențială liniară de ordinul n de forma:

$$L[y] = a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = f(x)$$

cu a_i constante și $f \in \mathcal{C}^1(I)$ se numește *ecuație Euler*.

Ecuațiile Euler se pot transforma în ecuații cu coeficienți constanți prin schimbarea de variabilă $|x| = e^t$. De remarcat că, deoarece funcția necunoscută este $y = y(x)$, pentru a obține $y' = \frac{dy}{dx}$ trebuie să aplicăm regula de derivare a funcțiilor compuse.

Notăm $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ și atunci avem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \dot{y} \cdot e^{-y}.$$

Mai departe, de exemplu:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt}\Big(\dot{y} \cdot e^{-y}\Big) \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= e^{-2y}(\ddot{y} - \dot{y}). \end{aligned}$$

Exemplu: $x^2y^{(2)} + xy' + y = x$.
Facem substituția $|x| = e^t$ și obținem:

$$e^{2t} \cdot e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) - e^t \cdot \dot{y} \cdot e^{-t} + y(t) = e^t.$$

Echivalent:

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = e^t.$$

Aceasta este o ecuație liniară de ordinul al doilea, neomogenă. Asociem ecuația algebrică $f(r) = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$, deci soluția generală a ecuației omogene este:

$$y(t) = c_1e^t + c_2te^t.$$

Folosind apoi metoda variației constantelor, obținem succesiv:

$$y(t) = c_1e^t + c_2te^t + \frac{t^2e^t}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y(x) = c_1x + c_2x\ln x + \frac{x\ln^2 x}{2}.$$

2. Să se rezolve ecuațiile Euler:

(a) $x^2y^{(2)} - 3xy' + 4y = 5x, \quad x > 0;$

(b) $x^2y^{(2)} - xy' + y = x + \ln x, \quad x > 0;$

(c) $4(x+1)^2y^{(2)} + y = 0, \quad x > -1;$

(d) $xy'' + 3y' = e^x;$

(e) $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = \frac{1}{x^2}.$