Seminar 9
Integrale complexe

Teorema lui Cauchy

Definiția și proprietățile esențiale ale integralelor din cazul real rămîn valabile și în cazul complex, motiv pentru care le vom omite, începînd cu elementele de noutate. De fapt, dat fiind că numerele complexe impun o structură bidimensională prin reprezentarea în plan, majoritatea calculelor de integrale complexe vor fi similare cu integralele curbilinii.

De exemplu, două calcule simple:

$$I_1 = \int_{|z|=1} z|dz|.$$

Scriind polar $z = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$, avem $dz = ie^{it}dt$, deci $|dz| = dt$. Atunci:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} e^{it}dt = \frac{1}{i}e^{it}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

$$I_2 = \int_S z|dz|,$$

unde S este segmentul care unește pe 0 și i.

Putem scrie segmentul parametric $z = ti, t \in [0, 1]$, deci $dz = idt$ și $|dz| = dt$. Atunci:

$$I_2 = \int_0^1 tidt = \frac{i}{2}.$$

O teoremă foarte utilă pentru calculul integralelor complexe în lungul unor curbe speciale este următoarea.

Teoremă 1 (Cauchy)**:** *Fie* $D \subseteq \mathbb{C}$ *un domeniu simplu conex și fie* $f : D \to \mathbb{C}$ *o funcție olomorfă pe* D, *astfel încît* $P = \text{Re} f, Q = \text{Im} f$ *să fie de clasă* $\mathcal{C}^1(D)$.

Fie $\gamma : [a, b] \to D$ *o curbă închisă jordaniană*[1] *de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe porțiuni astfel încît compactul* Intγ *să verifice condițiile formulei Green-Riemann, atunci* $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Teorema are loc, de fapt, pentru orice curbă γ închisă, jordaniană și *omotopă cu zero*, adică poate fi deformată continuu, fără rupere, la un punct.

În particular, avem:

Corolar 1: *Fie* $f : D \to \mathbb{C}$ *o funcție olomorfă pe un domeniu simplu conex* $D \subseteq \mathbb{C}$ *și fie* γ_1, γ_2 *două drumuri de clasă* $\mathcal{C}^1$ *avînd aceleași capete și situate în* D. *Atunci:*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

[1] fără autointersecții

De exemplu:

$$\int_{|z|=r} \frac{e^z \sin z}{1-z^3} dz = 0,$$

deoarece putem considera cercul $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r > 0\}$ ca pe un drum închis jordanian, de clasă $\mathcal{C}^1$, orientat pozitiv, parcurs o singură dată în sens trigonometric direct.

Următorul rezultat este esențial în calculele ce vor urma.

Teoremă 2 (Formula integrală Cauchy)**:** *Fie* $D \subseteq \mathbb{C}$ *un domeniu și* $f : D \to \mathbb{C}$ *o funcție olomorfă pe* D. *Fie* $\overline{\Delta} \subseteq D$, *unde* Δ *este un domeniu simplu conex, mărginit cu frontiera* γ, *o curbă închisă jordaniană, de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe porțiuni, orientată pozitiv.*

Atunci pentru orice punct $a \in \Delta$ *fixat are loc formula:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

De exemplu, să calculăm $\displaystyle\int_{|z-2i|=1} \frac{1}{z^2+4} dz$.

Putem scrie integrala astfel:

$$\int_{|z-2i|=1} \frac{1}{z^2+4} dz = \int_{|z-2i|=1} \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i} dz = \int_{|z-2i|=1} \frac{f(z)}{z-2i} dz,$$

unde am introdus $f(z) = \frac{1}{z+2i}$.

Aplicînd formula integrală a lui Cauchy, obținem:

$$f(2i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-2i|=1} \frac{f(z)}{z-2i} dz \Rightarrow \int_{|z-2i|=1} \frac{f(z)}{z-2i} dz = 2\pi i f(2i) = \frac{\pi}{2}.$$

Funcții analitice. Serii Laurent

Noțiunile care urmează sînt adaptate din cazul seriilor reale de puteri.

Teoremă 3: *Fie* $z_0 \in \mathbb{C}$ *fixat și* $S(z) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n (z-z_0)^n, \forall z$, *cu* $|z - z_0| < R$ *suma seriei centrate în* z_0, *iar* R *este raza de convergență.*

Atunci funcția S *este olomorfă în orice punct* $z \in B(z_0, R)$ *și are loc:*

$$S'(z) = \sum_{n \geqslant 0} n a_n (z-z_0)^{n-1}, \forall z \in B(z_0, R).$$

În particular, rezultă:

Corolar 2: *Fie* $z_0 \in \mathbb{C}$ *fixat și* $S(z)$ *ca în teoremă.*

Atunci funcția $S(z)$ *are derivate complexe de orice ordin în orice punct* $z \in B(z_0, R)$ *și* $a_k = \dfrac{S^{(k)}(z_0)}{k!}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Funcțiile complexe cu proprietăți „bune" pentru analiză sînt cele *analitice*.

Definiţie 1: Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă. Funcția $f : A \to \mathbb{C}$ se numește *analitică* pe A dacă $\forall z_0 \in A$, există o serie formală $\sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$ convergentă într-un disc de rază $R > 0$, astfel încît există discul $B(z_0, r) \subseteq A$, cu $0 < r \leqslant R$ cu proprietatea:

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z - z_0)^n, \forall z \in B(z_0, r).$$

Cu alte cuvinte, funcțiile analitice pot fi dezvoltate în serie Laurent convergentă într-un disc de orice rază din domeniul de definiție.

Utilitatea acestei noțiuni rezultă și din:

Propoziţie 1: *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și $f : A \to \mathbb{C}$ o funcție analitică pe A. Atunci există derivatele complexe de orice ordin ale lui f în A și într-o vecinătate a oricărui punct $z_0 \in A$ avem:*

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Legătura dintre analiticitate și olomorfie este dată în următoarea teoremă.

Teoremă 4 (Weierstrass-Riemann-Cauchy)**:** *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și $f : A \to \mathbb{C}$ o funcție complexă.*

Atunci f este analitică pe A dacă și numai dacă f este olomorfă pe A.

Seriile de puteri complexe se definesc mai jos.

Definiţie 2: Se numește *serie Laurent centrată în $z_0 \in \mathbb{C}$* orice serie de funcții de forma

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{C}.$$

Seria se numește convergentă dacă *partea principală* a ei, anume $\sum_{n \geqslant 1} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$ și *partea Taylor*, anume $\sum_{n \geqslant 0} a_n (z - z_0)^n$ sînt simultan convergente.

Puncte singulare. Reziduuri

În continuare, vom studia punctele „cu probleme" ale unei funcții complexe și vom vedea cum putem face calcule analitice coerente care să le evite.

Definiţie 3: Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă nevidă și $f : A \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe A. Un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ se numește *punct singular izolat* al lui f dacă există un disc $D = B(z_0, r > 0)$ astfel încît funcția să fie olomorfă pe discul punctat $D - \{z_0\}$.

De exemplu, punctul $z = 2$ este un punct singular izolat pentru funcția $f(z) = \frac{1}{z-2}$.

Definiţie 4: Fie $f : A \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă, cu $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă nevidă și fie $z_0 \in \mathbb{C}$ un punct singular izolat al lui f.

Punctul z_0 se numește *punct singular aparent* dacă seria Laurent $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ are partea principală nulă, adică $a_n = 0, \forall n < 0$.

În fine:

Definiţie 5: Punctul singular izolat z_0 se numește *pol* dacă în seria Laurent asociată funcției f, partea principală are un număr finit de termeni nenuli, număr care se numește *ordinul polului*.

Punctul singular izolat z_0 se numește *punct singular esențial* dacă partea principală a seriei Laurent asociată funcției are o infinitate de termeni nenuli.

În continuare, cîteva rezultate care ne ajută să identificăm natura punctelor singulare pentru funcții complexe.

Lemă 1: *Fie* $f : B(z_0; 0, r) \to \mathbb{C}$ *o funcție olomorfă pe coroana* $B(z_0; 0, r)$.

Dacă $|f(z)| \leqslant M$ *pentru orice* $z \in B(z_0; 0, r)$, *adică modulul funcției este mărginit, atunci* z_0 *este punct singular aparent al lui* f.

Mai mult, avem:

Propoziţie 2: *În condițiile și cu notațiile din lema de mai sus,* z_0 *este punct singular aparent pentru* f *dacă și numai dacă există și este finită limita:*

$$\ell = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

De exemplu, $z = 0$ este singularitate aparentă pentru funcția $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, deoarece, ca în cazul real, $\lim_{z \to 0} f(z) = 1$.

Mai departe, identificarea polilor se poate face cu următorul rezultat:

Propoziţie 3: *Fie* $f : B(z_0; 0, r) \to \mathbb{C}$ *o funcție olomorfă pe coroana de definiție.*

Atunci punctul z_0 *este pol pentru* f *dacă și numai dacă:*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

De exemplu, considerînd funcția $f(z) = \frac{z}{z-1}$, observăm că $z = 1$ este pol simplu, deoarece $\lim_{z \to 1} f(z) = \infty$, iar dezvoltarea în serie Laurent a funcției f se scrie:

$$f(z) = \frac{1 + z - 1}{z - 1} = \frac{1}{z - 1} + 1,$$

care are partea principală $\frac{1}{z-1}$. Așadar, avem un pol simplu (de ordinul 1).

Singularitățile esențiale se identifică astfel:

Propoziţie 4: *Fie* $f : B(z_0; 0, r) \to \mathbb{C}$ *o funcție olomorfă pe coroana* $B(z_0; 0, r)$.

Atunci punctul z_0 *este singularitate esențială pentru* f *dacă și numai dacă nu există limita* $\lim_{z \to z_0} f(z)$.

De exemplu, pentru funcția $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$, punctul $z = 0$ este singularitate esențială. Pe de o parte, putem vedea că limita din propoziție nu există (depinde de direcția $z \to 0$), iar pe de alta, seria Laurent este:

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{z}\right) &= 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{1!}z^{-1} + \frac{1}{2!}z^{-2} + \dots,\end{aligned}$$

care are partea principală cu o infinitate de termeni nenuli.

Vom fi interesați de următorul obiect:

Definiţie 6: Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă nevidă și fie $f : A \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă. Considerăm discul punctat (coroana) $B(z_0; 0, r) \subseteq A$, astfel încît punctul z_0 să fie singularitate izolată a lui f.

Considerînd dezvoltarea în serie Laurent a funcției f în coroana $B(z_0; 0, r)$ sub forma:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n,$$

coeficientul a_{-1} se numește *reziduul funcției* f în punctul singular z_0, notat $\text{Rez}(f, z_0)$.

Reziduurile pot fi calculate în mai multe moduri, aparent indirecte.

Propoziţie 5: *Păstrînd condițiile și notațiile din definiția de mai sus, fie un cerc de rază* ρ, *anume* $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \rho < r\}$, *parcurs în sens trigonometric direct. Atunci:*

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz.$$

De asemenea, avem și:

Propoziţie 6: *Fie* $z_0 \in \mathbb{C}$ *un pol de ordinul* $k > 0$ *pentru* f. *Atunci:*

$$\text{Rez}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^k f(z) \right]^{(k-1)}.$$

În particular, obținem:

Corolar 3: *Fie* $f : B(z_0; 0, r) \to \mathbb{C}$ *o funcție olomorfă pe coroana de definiție, astfel încît se poate scrie* $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \forall z \in B(z_0; 0, r)$, *cu* P, Q *funcții olomorfe în discul* $B(z_0, r)$ *și* $P(z_0) \neq 0, Q(z_0) = 0$, *iar* $Q'(z_0) \neq 0$.

Atunci $z_0 \in \mathbb{C}$ *este un pol de ordinul întîi pentru* f *și:*

$$\text{Rez}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

Un caz particular este următorul:

Definiţie 7: Fie $f : B(0; r, \infty) \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă în exteriorul discului $B(0, r)$, adică $z = \infty$ este un punct singular izolat pentru f.

Se numește *reziduul funcției* f *în punctul* ∞ reziduul funcției $\left(-\frac{1}{t^2}\right) f\left(\frac{1}{t}\right)$ în punctul $t = 0$.

Cel mai important rezultat al secțiunii este:

Teoremă 5 (Teorema reziduurilor)**:** *Fie* $D \subseteq \mathbb{C}$ *un domeniu și* $f : D - \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \to \mathbb{C}$ *o funcție olomorfă pentru care* α_i *sînt singularități izolate.*

Fie $K \subseteq D$ *un compact cu frontiera* $\Gamma = \partial K$, *o curbă de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe porțiuni, jordaniană, orientată pozitiv și care conține toate* α_i *în interior. Atunci:*

$$\int_\Gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \text{Rez}(f, \alpha_j).$$

În particular:

Corolar 4: *În contextul și notațiile teoremei de mai sus, avem:*

$$\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Rez}(f, \alpha_j) + \mathrm{Rez}(f, \infty) = 0.$$

De exemplu, să calculăm integrala:

$$I = \int_{|z|=r} \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} dz, r > 0, r \neq 1, 2.$$

Soluție: Dacă $0 < r < 1$, putem aplica teorema lui Cauchy (1) și găsim $I = 0$.
Dacă $1 < r < 2$, aplicăm formula integrală a lui Cauchy (2) și găsim:

$$\int_{|z|=r} \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} dz = \int_{|z|=r} \frac{\frac{e^z}{z-2}}{z-i} dz = \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z-i} dz,$$

unde $f(z) = \frac{e^z}{z-2}$. Rezultă:

$$\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z-i} dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{e^i}{i-2}.$$

Dacă $r >$ 2, aplicăm teorema reziduurilor, cu i și 2 poli simpli. Avem:

$$\mathrm{Rez}(f, i) = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} = \frac{e^i}{i-2}$$
$$\mathrm{Rez}(f, 2) = \lim_{z \to 2} \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} = \frac{e^2}{2-i}.$$

Rezultă, din teorema reziduurilor:

$$\int_{|z|=r} \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} dz = 2\pi i \Big(\frac{e^i}{i-2} + \frac{e^2}{2-i} \Big).$$

Exerciții

1. Să se calculeze integrala $\int_\Gamma z^2 dz$, unde:

(a) $\Gamma = [-1, i] \cup [i, 1]$;

(b) $\Gamma = \{z(t) = 2 + it^2, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$;

(c) $\Gamma = \Big\{z(t) = t + i\cos\frac{\pi t}{2}, -1 \leqslant t \leqslant 1\Big\}$.

2. Să se calculeze integrala $\int_\Gamma (z-a)^n dz$, unde Γ este un cerc cu centrul în a și rază $r > 0$, iar $n \in \mathbb{Z}$.

3. Folosind funcția $f(z) = z, z \in \mathbb{C}$ să se calculeze o integrală curbilinie în două variante:

(a) $I_1 = \int_{AB} z dz$, unde drumul de integrare este sfertul de elipsă $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ din primul cadran, iar $A(a, 0)$ și $B(0, b)$;

(b) $I_2 = \int_{AOB} z dz$, unde drumul de integrare se obține mergînd pe axele de coordonate.

4. Să se calculeze integrala $I = \int_C z^2 dz$, unde C este segmentul care unește originea $O(0, 0)$ cu punctul $A(2, 1)$.

5. Arătați că punctul $z = a$ este singularitate aparentă pentru funcțiile:

(a) $f : \mathbb{C} - \{z \mid z^3 + 1 = 0\} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{z^2-1}{z^3+1}$, cu $a = -1$;

(b) $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, g(z) = \frac{\sin z}{z}, a = 0$;

(c) $h : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, h(z) = \frac{z}{\tan z}, a = 0$;

(d) $k : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, k(z) = \frac{\cos z - 1}{z}, a = 0$.

6. Arătați că punctul $z = a$ este pol pentru funcțiile:

(a) $f(z) = \frac{1}{z-2}, a = 2$;

(b) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}, a = -i$;

(c) $f(z) = \frac{\cos z}{z}, a = 0$;

(d) $f(z) = \frac{z^2+1}{z(z-1)}, a = 0$;

(e) $f(z) = \frac{1}{1-\cos z}, a = 0$;

(f) $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}, a = 0$;

(g) $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1)^3}, a = \pm 1$.

7. Calculați reziduurile funcțiilor în punctele a indicate:

(a) $f(z) = \frac{\exp\left(z^2\right)}{z-1}, a = 1$;

(b) $f(z) = \frac{\exp\left(z^2\right)}{(z-1)^2}, a = 1$;

(c) $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z}, a = 0$;

(d) $f(z) = \frac{1+e^z}{z^4}, a = 0$;

(e) $f(z) = \frac{\sin z}{4z^2}, a = 0$;

(f) $f(z) = \frac{z}{1-\cos z}, a = 0$.