

Seminar 11

Spații de probabilitate

Noțiuni teoretice

Trecem acum la studiul probabilităților într-un context mai abstract decât în liceu, unde se defineau și studiau evenimentele aleatoare concret.

Definiție 1: Se numește *spațiu (cîmp) discret de probabilitate* o mulțime finită sau numărabilă $\Omega = (\omega_n)_n$, împreună cu un șir $(p_n)_n$, cu $0 \leq p_n \leq 1$, care satisface condiția $\sum_n p_n = 1$.

Orice submulțime $A \subseteq \Omega$ este un *eveniment*, căruia i se atașează o probabilitate

$$P(A) = \sum_{\omega_n \in A} p_n.$$

Intuitiv, putem privi elementele mulțimii Ω drept *experiențe*, pe care le putem colecta în *evenimente*, iar p_n este probabilitatea ca o experiență să se realizeze.

Alte definiții elementare sînt următoarele:

Definiție 2: *Evenimentul sigur* este un eveniment care se realizează cu certitudine la fiecare repetare a experienței.

Evenimentul imposibil nu se produce la nicio efectuare a experienței.

Dat un eveniment $A \subseteq \Omega$, lui i se asociază *evenimentul contrar*, notat \bar{A} , CA sau A^c , care constă în nerealizarea lui A .

Două evenimente $A, B \subseteq \Omega$ se numesc *compatibile* dacă se pot produce simultan și *incompatibile* în caz contrar.

Pentru evenimente incompatibile, avem o definiție alternativă, calculatorie:

Definiție 3: Dacă A și B sînt evenimente incompatibile, atunci:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Mai general, pentru orice șir (A_n) de evenimente două cîte două incompatibile, avem:

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n).$$

Definiția abstractă a contextului în care vom studia teoria probabilităților urmează.

Definiție 4: Se numește *spațiu de probabilitate* un triplet (Ω, \mathcal{K}, P) , unde Ω este o mulțime de evenimente elementare (individuale), \mathcal{K} este o submulțime a $\mathcal{P}(\Omega)$, iar $P : \mathcal{K} \rightarrow [0, 1]$ este o funcție de probabilitate, care satisface:

- $P(\Omega) = 1$;

- $P\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \sum_{n \geq 0} P(A_n)$, pentru orice șir (A_n) de evenimente două câte două incompatibile.

Pornind de la această definiție generală, putem obține cazuri particulare cunoscute:

Definiția clasică a probabilității: Dacă Ω este o mulțime cu N elemente, putem defini un spațiu discret de probabilitate, definind $p_n = \frac{1}{N}$, pentru orice $n \in \{1, \dots, N\}$. În acest caz, probabilitățile sînt egale pentru toate evenimentele, deci spunem că *evenimentele sînt echiprobabile*. Pentru orice eveniment $A \subseteq \Omega$, avem:

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)},$$

care coincide cu definiția clasică a raportului dintre numărul cazurilor favorabile unui eveniment și numărul cazurilor posibile.

Probabilități geometrice: Dacă luăm $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ o submulțime oarecare, pe care considerăm *măsura Lebesgue* (cea cu ajutorul căreia calculăm integralele), atunci obținem un spațiu de probabilitate definind pentru orice eveniment A probabilitatea prin:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

unde μ este măsura Lebesgue din \mathbb{R}^n (în particular, e vorba de lungimea dl pe \mathbb{R} , aria $dA = dx dy$ din \mathbb{R}^2 etc.).

Următoarele sînt proprietăți elementare ale probabilităților:

Fie (Ω, \mathcal{K}, P) un spațiu de probabilitate.

(1) Dacă $A, B \in \mathcal{K}$ și $A \subseteq B$, atunci $P(B - A) = P(B) - P(A)$;

(2) **Poincaré:** Fie n evenimente arbitrare $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{K}$. Atunci are loc:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1, \dots, A_n).$$

(3) Pentru orice șir crescător de evenimente $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$, avem:

$$P\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

Definiție 5: Evenimentele A și B se numesc *independente* dacă $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

În general, evenimentele A_1, \dots, A_n se numesc *independente în ansamblu* dacă pentru orice $m \geq n$ și $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_m \leq n$, avem:

$$P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_m}) = P(A_{j_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{j_m}).$$

Observație 1: Dacă avem n evenimente independente două câte două (cf. primei părți a definiției de mai sus), nu rezultă neapărat că sînt evenimente în ansamblul lor (cf. părții a doua a definiției).

Un contraexemplu, datorat lui S. N. Bernstein este următorul. Considerăm un tetraedru omogen cu fețele colorate alb, negru, roșu, iar a patra, cu toate cele trei culori. Aruncăm acest corp și notăm cu A_i probabilitatea ca tetraedrul să se așeze (cu baza) pe fața cu numărul $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Aceste evenimente sînt elementare și $P(A_i) = \frac{1}{4}, \forall i$. Acum fie $A = A_1 \cup A_2$, $B = A_1 \cup A_3$ și $C = A_1 \cup A_4$. Atunci $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, deoarece pentru fiecare culoare sînt 4 cazuri posibile și 2 favorabile (fața cu culoarea respectivă și fața cu toate culorile).

În plus, avem:

$$P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = \frac{1}{4},$$

deci evenimentele sînt independente două cîte două.

În plus, avem:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A_1) = \frac{1}{4}$$

$$P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8},$$

deci evenimentele nu sînt independente în ansamblul lor.

Mai avem nevoie de următorul concept:

Definiție 6: Fie A și B două evenimente, cu $P(B) \neq 0$.

Probabilitatea lui A condiționată de B , notată $P(A/B)$ sau $P_B(A)$ se definește prin:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

De asemenea, în calcule, vom mai folosi:

Formula de înmulțire a probabilităților: Fie A_1, \dots, A_n evenimente. Atunci are loc:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n/A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Formula probabilității totale: Dacă avem descompunerea evenimentului sigur Ω în reuniunea de n evenimente incompatibile H_1, \dots, H_n , atunci pentru orice eveniment $A \in \mathcal{K}$, are loc:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A/H_i) \cdot P(H_i).$$

Formula lui Bayes: În contextul și cu notațiile de mai sus:

$$P(H_j/A) = \frac{P(A/H_j) \cdot P(H_j)}{\sum_{i=1}^n P(A/H_i) \cdot P(H_i)}.$$

În particular, pentru două evenimente A, B , avem:

$$P(A) = P(A/B) \cdot P(B) + P(A/B^c) \cdot P(B^c)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A/B) \cdot P(B) + P(A/B^c) \cdot P(B^c)}.$$

Exerciții

Calcul „clasic”

1. Într-un spațiu de probabilitate se considerăm evenimentele A, B , cu:

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

Determinați $P(A^c), P(A^c \cup B), P(A \cup B^c), P(A^c \cup B^c), P(A^c \cap B^c)$.

2. Care dintre următoarele evenimente rezultate în urma aruncării cu zarul este mai probabil:

- (a) obținerea numărului 6 în cel puțin una din 4 aruncări;
- (b) obținerea cel puțin a unei duble de 6 în 24 aruncări cu 2 zaruri?

3. O urnă conține 12 bile numerotate de la 1 la 12. Să se determine probabilitatea ca bilele numerotate cu 5, 7, 11 să iasă la extragerile cu numărul de ordine 5, 7, 11.

Soluție: Cazurile posibile sînt $12!$ la număr.

Cazurile favorabile sînt $9!$, deoarece dacă fixăm de fiecare dată bilele cu numerele 5, 7, 11, rămîn $9!$ libere.

Rezultă $P = \frac{9!}{12!} = \frac{1}{1320}$.

4. O urnă conține 50 bile, dintre care 10 sînt negre, iar restul albe. Se scot la întîmplare 5 bile. Care e probabilitatea ca între cele 5 bile să fie bile negre?

Indicație: Se calculează mai ușor probabilitatea evenimentului complementar.

5. Coeficienții întregi ai ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ sînt obținuți prin aruncarea unui zar de 3 ori. Să se determine probabilitatea ca rădăcinile ecuației să fie reale.

Indicație: Calculăm clasic probabilitatea ca $\frac{b^2}{4} \geq ac$, unde $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

6. Într-o cameră întunecoasă se găsesc 5 perechi de pantofi. Se aleg la întîmplare 5 pantofi.

- (a) Care este probabilitatea ca între cei 5 pantofi aleși să fie cel puțin o pereche, în ipoteza că cele 5 perechi sînt identice (deci este suficient să avem un pantof stîng și unul drept)?
- (b) Care e probabilitatea ca între cei 5 pantofi aleși să fie cel puțin o pereche, dacă toate cele 5 perechi sînt distincte (culoare, număr)?

7. **Problema aniversării:** Într-o cameră sînt k persoane. Care este probabilitatea ca cel puțin două din aceste persoane să aibă aceeași zi de naștere, adică aceeași zi și lună a anului?

8. Se aruncă 3 zaruri. Calculați probabilitatea ca suma punctelor obținute să fie:

- (a) mai mică decât 8;
- (b) mai mare decât 7;
- (c) egală cu 12.

9. Un scafandru are 2 sisteme de oxigen independente. Presupunem că probabilitatea ca primul sistem să funcționeze este 0,9, iar probabilitatea ca al doilea sistem să funcționeze este 0,8.

- (a) Găsiți probabilitatea ca niciun sistem să nu se defecteze;
- (b) Găsiți probabilitatea ca cel puțin unul din sisteme să funcționeze.

Soluție: Fie $S_{1,2}$ evenimentul ca sistemul 1,2 să funcționeze. (a) Cum evenimentele sînt independente, avem:

$$P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) \cdot P(S_2) = 0,72.$$

(b)

$$P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2) = 0,98.$$

Probabilități geometrice

10. Care este probabilitatea ca suma a 3 numere din intervalul $[0, a]$ alese la întîmplare să fie mai mare decât a ?

Soluție: Spațiul de probabilitate este $\Omega = [0, a]^3$. Evenimentul cerut este dat de punctele mulțimii:

$$E = \{(x, y, z) \in \Omega \mid x + y + z \geq a\}.$$

Alegem un sistem ortogonal de axe și Ω devine un cub de latură a situat în primul octant. În acest caz, E este una din regiunile lui Ω separate de planul $x + y + z = a$. Rezultă:

$$P(E) = \frac{a^3 - \frac{a^3}{6}}{a^3} = \frac{5}{6}.$$

11. Pe un plan orizontal considerăm un sistem de axe XOY și mulțimea E a punctelor cu coordonate întregi. O monedă cu diametrul $\frac{1}{2}$ este aruncată la întîmplare pe acest plan. Care e probabilitatea ca moneda să acopere un punct din E ?

Soluție: Fie $C(x_0, y_0)$ cel mai apropiat punct din E de centrul M al monedei, deci coordonatele lui M sînt de forma:

$$(x_0 + x, y_0 + y), \quad -\frac{1}{2} < x, y < \frac{1}{2}.$$

Spațiul de probabilitate este:

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} < x, y < \frac{1}{2} \right\}.$$

Mulțimea evenimentelor favorabile este dată de:

$$A = \left\{ (x, y) \in \Omega \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \frac{1}{16} \right\},$$

deoarece raza monedei este $\frac{1}{4}$.

Rezultă:

$$p = \frac{\text{aria}(A)}{\text{aria}(\Omega)} = \frac{\pi}{16}.$$

12. Se alege aleatoriu un număr real x în intervalul $[0, 3]$. Care este probabilitatea ca x să fie mai apropiat de 0 decât de 1?

Soluție: Interpretând problema geometric, ne putem gândi la x ca fiind un punct pe axa reală. Atunci cazurile favorabile se află în segmentul $[0; 0,5)$, iar cazurile posibile sînt pe tot segmentul.

Probabilitatea, calculată cu formula geometrică, este dată de raportul lungimilor celor două segmente:

$$P = \frac{0,5}{3} = \frac{1}{6} \simeq 17\%.$$

13. Se trage cu o săgeată la o țintă circulară de rază r . Care este probabilitatea ca săgeata să ajungă mai aproape de centru decât de margine?

Soluție: Aria cercului, care ne dă și „cazurile posibile”, este πr^2 .

Cazurile favorabile se află în cercul concentric de rază $< \frac{r}{2}$, care are aria $\frac{\pi r^2}{4}$. Atunci:

$$P = \frac{1}{4}.$$

14. **Problema autobuzului (cu așteptare):** Să presupunem că ajungeți în stația de autobuz la o oră aleatorie din intervalul 12 și 1. Așteptați 20 minute în stație, iar dacă autobuzul nu vine, plecați. Același „program” îl are și autobuzul, dar cu condiția că așteaptă 5 minute în stație, apoi pleacă.

Care este probabilitatea să prindeți autobuzul?¹

Soluție: Avem două variabile independente: momentul în care ajungeți în stație și momentul în care autobuzul ajunge. Deci putem modela problema bidimensional. Mai precis, să luăm un pătrat cu latura de 60 de unități (1/minut) și-i notăm laturile cu c și a („călător” și „autobuz”).

Remarcăm că avem cazurile (cf. Figura 1):

- Pentru a prinde autobuzul la fix, ar trebui să ne situăm pe segmentul $a = c$;
- Cum autobuzul așteaptă 5 minute, de fapt putem să ne situăm în zona $c \leq a + 5$, neținînd seama de faptul că și călătorul așteaptă (deocamdată)!;

¹Mai multe exemple și explicații puteți găsi, de exemplu, aici.

- Cum călătorul așteaptă 20 minute, ne situăm în zona $c \geq a - 20$ (neținând seama că și autobuzul așteaptă!);
- Luând toate restricțiile în considerare, ne interesează, de fapt, zona dintre cele două puncte anterioare, deci sub segmentul $c = a + 5$ și deasupra lui $c = a - 20$.

Acum trebuie doar să calculăm aria zonei corespunzătoare și să o împărțim la aria pătrului:

$$P = \frac{60^2 - \frac{55^2}{2} - \frac{40^2}{2}}{60^2} \simeq 36\%.$$

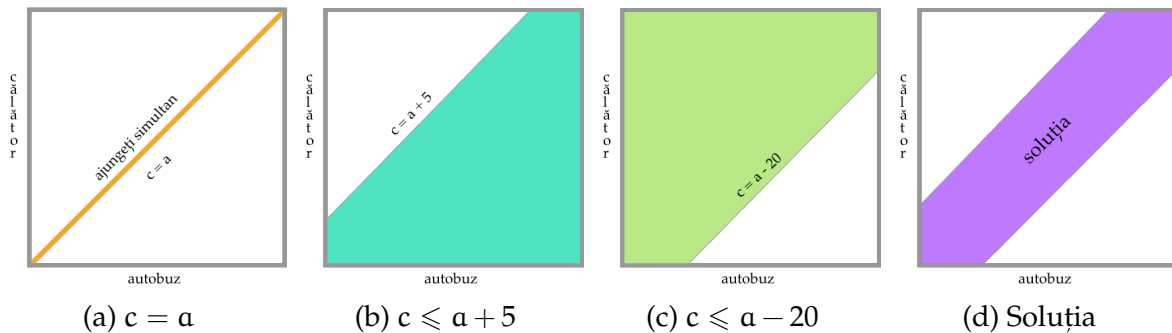


Figura 1: Problema autobuzului (cu așteptare)

15. Trei persoane aleg la întâmplare un număr real între 0 și 1. Care este probabilitatea ca suma pătratelor numerelor alese de ei să nu depășească 1?

Soluție: Pentru a modela problema geometric, e clar că o putem gândi ca pe alegerea unui punct din cubul unitate, $(x, y, z) \in [0, 1]^3$. Cazurile posibile sînt, atunci, date de volumul cubului, care este 1.

Pentru cazurile favorabile, avem nevoie de $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, care este sfera unitate. Dar, cum ne interesează doar alegerile de numere pozitive, i.e. partea din sferă care se găsește în interiorul cubului, adică $\frac{1}{8}$ din ea.

Avem, deci:

$$P = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi \cdot 1^3}{3}}{1} \simeq 52\%.$$

Mult mai multe exemple sofisticate de probabilități geometrice se pot găsi la Wolfram MathWorld.