INTEGRALE IMPROPRII; INTEGRALE CU PARAMETRU

INTEGRALE IMPROPRII CU PARAMETRU

1. INTEGRALE IMPROPRII

O funcție $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este mărginită, deci $\int_a^b f(x)\,dx\in\mathbb{R}$.

Dacă domeniul de definiție NU este compact (de exemplu $[a,b)$ cu $b\in\mathbb{R}$ sau $b=+\infty$ sau interval de forma $(a,b]$ cu $a\in\mathbb{R}$ sau $a=-\infty$) atunci $\int_a^b f(x)\,dx$ este ***integrală improprie***.

Definiție: O funcție $f:D\to\mathbb{R}$ se numește ***local integrabilă*** dacă este integrabilă pe orice compact $[a,b]\subseteq D$.

Observații:

1) Dacă f este integrabilă $\Rightarrow$ local integrabilă;
2) Dacă f este continuă $\Rightarrow$ local integrabilă (pentru că orice funcție continuă este integrabilă);
3) Dacă f este monotonă $\Rightarrow$ local integrabilă.

CONVERGENȚA INTEGRALELOR IMPROPRII

Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ (cu $b\in\mathbb{R}$ sau $b=+\infty$), *local integrabilă*. Atunci integrala improprie (în b)

$\int_a^b f(x)\,dx$ este ***convergentă*** dacă existā și e finită limita: $\lim\limits_{\substack{y\to b\\ y<b}}\int_a^y f(x)\,dx$.

Observații:

1) Pentru $f:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$ avem $\lim\limits_{y\to-\infty}\int_y^a f(x)\,dx$;

2) Pentru $f:(-\infty,+\infty)\to\mathbb{R}$, fixăm un $a\in\mathbb{R}$ (arbitrar) și scriem:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx+\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ iar integrala improprie $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ este:

- *Convergentă* dacă $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ și $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ sunt ambele convergente;
- *Divergentă* dacă $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ sau $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ este divergentă (NU ambele simultan).

Definiție: Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ (cu $b\in\mathbb{R}$ sau $b=+\infty$), *local integrabilă*. Atunci integrala improprie

$\int_a^b f(x)\,dx$ este ***absolut convergentă*** dacă $\int_a^b |f(x)|\,dx$ este convergentă.

Observație: Dacă $\int_a^b f(x)\,dx$ este *absolut convergentă* $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ *convergentă*. Reciproc NU.

CRITERII DE CONVERGENȚĂ

Fie $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ (cu $b \in \mathbb{R}$ sau $b = +\infty$), *local integrabile, pozitive*, cu $0 \le f(x) \le g(x)$.

1. **Criteriul de comparație cu inegalități:**

   a) dacă $\int_a^b g(x)\,dx$ este convergentă $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ convergentă;

   b) dacă $\int_a^b f(x)\,dx$ divergentă $\Rightarrow$ $\int_a^b g(x)\,dx$ divergentă.

2. **Criteriul de comparație la limită:** Dacă există $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$, atunci:

   a) dacă $L \in [0,+\infty)$ ($L \ne +\infty$) și $\int_a^b g(x)\,dx$ convergentă $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ convergentă;

   b) dacă $L \in (0,+\infty]$ ($L \ne 0$) și $\int_a^b g(x)\,dx$ divergentă $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ divergentă.

Cum alegem funcția $g(x)$ *?*

- pentru $[a,+\infty)$: $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$
- pentru $(-\infty,a]$: $g(x) = \dfrac{1}{(-x)^\alpha}$

$\int_a^b g(x)\,dx$ este *convergentă pentru* $\alpha > 1$

divergentă pentru $\alpha \le 1$

- pentru $[a,b)$: $g(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$
- pentru $(a,b]$: $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$

$\int_a^b g(x)\,dx$ este *convergentă pentru* $\alpha < 1$

divergentă pentru $\alpha \ge 1$

- *pentru* $(-\infty,+\infty)$ *"rupem" după un* $a \in \mathbb{R}$ *arbitrar, fixat, în* $(-\infty,a]$ și $[a,+\infty)$.