Seminar 6
Ecuații cu derivate parțiale
de ordinul al doilea

1 Clasificarea și aducerea la forma canonică

Definiţie 1.1: Se numește *ecuație cvasiliniară cu derivate parțiale de ordinul II*, cu două variabile independente, o ecuație de forma:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \tag{1}$$

unde A, B, C sînt funcții reale, continue pe un deschis din $\mathbb{R}^2$, iar funcția D este continuă.

Definiţie 1.2: Se numesc *curbe caracteristice* pentru ecuația (1) curbele care se află pe suprafețele integrale ale ecuației, ale căror proiecții pe planul XOY satisfac *ecuația caracteristică*:

$$A(x,y)dy^2 - 2B(x,y)dxdy + C(x,y)dx^2 = 0. \tag{2}$$

Clasificarea ecuațiilor se face în funcție de curbele caracteristice. Astfel, avem:

- Dacă $AC - B^2 < 0$, ecuația este *de tip hiperbolic*;
- Dacă $AC - B^2 = 0$, ecuația este *de tip parabolic*;
- Dacă $AC - B^2 > 0$, ecuația este *de tip eliptic*.

2 Exemple din fizica matematică

Unele dintre cele mai importante exemple de ecuații de ordinul al doilea cu derivate parțiale provin din fizica matematică.

Ecuația coardei vibrante, care are aceeași formă cu **ecuația undelor plane**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad a^2 = \frac{\rho}{T_0},$$

unde ρ este densitatea liniară a coardei, iar T_0 este tensiunea la care este supusă coarda în poziția de repaus.

Aceasta este o ecuație de tip hiperbolic.

Ecuația căldurii, care are forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}, a^2 = \frac{k}{c\rho},$$

unde k este coeficientul de conductibilitate termică, c este căldura specifică, iar ρ este densitatea.

Această ecuație este de tip parabolic.

Ecuația lui Laplace, cu forma generală:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Să remarcăm că aceasta este echivalentă cu $\Delta u = 0$, adică u să fie funcție armonică (lucru care justifică și numele ecuației).

Ecuația lui Laplace este de tip eliptic.

3 Direcții caracteristice și forma canonică

Definiţie 3.1: Ecuațiile de forma:

$$\frac{dy}{dx} = \mu_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \mu_2(x, y) \tag{3}$$

asociate ecuației curbelor caracteristice (2) se numesc *curbe caracteristice* ale ecuației (1).

Prin integrarea celor două ecuații (3) se obțin două familii de curbe în planul XOY, de forma $\varphi_1(x, y) = c_1$ și $\varphi_2(x, y) = c_2$, cu c_1, c_2 constante arbitrare, curbe care sînt proiecțiile pe planul XOY ale curbelor caracteristice.

Pentru a aduce ecuațiile (1) în forma canonică, distingem următoarele cazuri:

- Dacă ecuația este de *tip hiperbolic*, facem schimbarea de variabile $\tau = \varphi_1(x, y)$ și $\eta = \varphi_2(x, y)$ și *prima forma canonică* se obține a fi:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\tau\partial\eta} + \Psi_1\Big(\tau, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial\tau}, \frac{\partial z}{\partial\eta}\Big) = 0.$$

  Cu transformarea $\tau = x + y$ și $\eta = x - y$ se obține, din ecuația anterioară, *a doua formă canonică*, anume:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \Psi_1'\Big(\tau, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\Big) = 0.$$

- Dacă ecuația este de *tip parabolic*, avem $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y) = \varphi(x, y)$ și putem face schimbarea de variabile $\tau = \varphi(x, y)$ și $\eta = x$, ajungînd la forma canonică:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} + \Psi_2\Big(\tau, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial\tau}, \frac{\partial z}{\partial\eta}\Big) = 0.$$

- Pentru ecuații de *tip eliptic*, funcțiile $\varphi_1(x, y)$ și $\varphi_2(x, y)$ sînt complex conjugate și putem nota $\alpha(x, y) = \mathrm{Re}\varphi_1(x, y)$, iar $\beta(x, y) = \mathrm{Im}\varphi_1(x, y)$. Atunci, cu schimbarea de variabile de forma $\tau = \alpha(x, y)$ și $\eta = \beta(x, y)$, ajungem la forma canonică:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\tau^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} + \Psi_3\Big(\tau, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial\tau}, \frac{\partial z}{\partial\eta}\Big) = 0.$$

4 Cazul coeficienților constanți

Dacă avem o ecuație liniară și omogenă în raport cu derivatele parțiale de ordinul al doilea, cu coeficienți constanți:

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

cu A, B, C constante, atunci ecuația diferențială a proiecțiilor curbelor caracteristice pe planul XOY are forma particulară:

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0.$$

Direcțiile caracteristice sînt date, atunci, de:

$$\begin{cases} dy - \mu_1 dx &= 0 \\ dy - \mu_2 dx &= 0 \end{cases}$$

care dau simplu soluția:

$$\begin{cases} y - \mu_1 x &= c_1 \\ y - \mu_2 x &= c_2 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aducerea la forma canonică se face mai simplu:

- Dacă ecuația este *de tip hiperbolic*, facem schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} \tau &= y - \mu_1 x \\ \eta &= y - \mu_2 x \end{cases},$$

  iar ecuația devine:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \tau \partial \eta} = 0,$$

  care are soluția generală $z = f(\tau) + g(\eta)$, unde f, g sînt funcții arbitrare. Înlocuind pentru a reveni la vechile variabile, avem:

$$z(x, y) = f(y - \mu_1 x) + g(y - \mu_2 x).$$

- Pentru *cazul parabolic*, avem $\mu_1 = \mu_2 = \frac{B}{A}$, iar ecuația curbelor devine atunci $A dy - B dx = 0$, cu integrala generală $Ay - Bx = c \in \mathbb{R}$. Schimbarea de variabile $\tau = Ax - By$ și $\eta = x$ conduce la forma canonică:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0.$$

  Soluția generală este $z = \eta f(\tau) + g(\tau)$, unde f, g sînt funcții arbitrare.

- Pentru *cazul eliptic*, forma canonică este chiar ecuația Laplace:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0.$$

5 Exerciții

1. Aduceți la forma canonică următoarele ecuații:

(a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0;$

(b) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

(c) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0;$

(d) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 10\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0;$

(e) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 7\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

(f) $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x + y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

(g) $(1 + x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0;$

(h) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$

Soluție: (a) Deoarece avem $A = 1, B = 1, C = -3$, rezultă $B^2 - AC = 4 > 0$, deci ecuația este de tip hiperbolic.

Scriem ecuația caracteristică:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} - 3 = 0,$$

care poate fi rezolvată ca o ecuație de gradul al doilea, de unde:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 3 & \Rightarrow y - 3x = c_1 \\ \frac{dy}{dx} = -1 & \Rightarrow y + x = c_2 \end{cases}.$$

Cu schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} \tau & = y - 3x \\ \eta & = y + x \end{cases},$$

funcția căutată $u(x, y)$ devine $u(\tau, \eta)$, astfel că toate derivatele parțiale se calculează acum folosind formula funcțiilor implicite și derivarea funcțiilor compuse. Obținem, succesiv:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
&= -3\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot 5\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\right] \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} + \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\right] \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \\
&+ \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \cdot \left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \eta \partial \tau} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \eta} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \\
&+ \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\
&= 9\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
&= -3\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}$$

Toate derivatele parțiale în raport cu x și y se calculează, deci, ținînd cont de legătura cu noile variabile η și τ. Practic, avem:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x}$$

și similar pentru y.

Rezultă că, în final, forma canonică este:

$$-16\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} + 8\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

2. Determinați soluția ecuației:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

care satisface condițiile:

$$\begin{cases} u(x, y) & = 3x^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) & = \cos x \end{cases}.$$

3. Rezolvați ecuația:

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

cu condițiile:

$$\begin{cases} u(x, y) & = x^3 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) & = 2x^2 \end{cases}.$$