Seminar 0
Ecuații diferențiale

Rezolvați următoarele ecuații diferențiale:

1. $(1 + y^2) + xyy' = 0$, cu condiția inițială $x_0 = 1, y_0 = 0$.

Indicație: Ecuația este cu variabile separabile. Împărțim cu $x(1 + y^2)$, pentru $x \neq 0$ (altfel, avem $y^2 = -1$, fals). Folosind și condiția inițială, găsim soluția: $x^2(1 + y^2) = 1$.

2. $y' = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2+2}$.

Indicație: Ecuație cu variabile separabile. Grupînd termenii, obținem:

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\frac{y^2 + 1}{y^2 + 2}.$$

Prin integrare, găsim soluția generală:

$$y + \arctan y = \ln|x| + x + c.$$

Ecuații diferențiale omogene — Observații teoretice

Ecuația diferențială $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, cu $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se numește *omogenă* dacă funcțiile P, Q sînt funcții omogene de același grad de omogenitate. Mai precis, dacă $P(\alpha x, \alpha y) = \alpha^k P(x, y)$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, unde k se numește *gradul de omogenitate*.

O ecuație diferențială omogenă poate fi scrisă sub forma:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), x \neq 0$$

și atunci, făcînd substituția $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, obținem o ecuație cu variabile separabile în z:

$$xz' = f(z) - z.$$

Un alt caz ce poate fi rezolvat algoritmic este:

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right), a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

- Dacă $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$, facem schimbarea de variabile $x = u + x_0$ și $y = v + y_0$, pentru $ax_0 + by_0 + c = 0, a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$;
- Dacă $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$, facem schimbarea de funcție $u(x) = a_1x + b_1y(x)$, unde $u(x)$ devine noua funcție necunoscută.

3. $y' = \frac{y^2+x^2}{xy}$, cu $x_0 = -1$ și $y_0 = 0$.

Indicație: Facem schimbarea de funcție $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ și găsim $z'x + z = \frac{1}{z} + z$, care este cu variabile separabile.

4. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$.
Indicație: Facem schimbarea de funcție $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ și găsim:

$$z + (2\sqrt{z} - 1)(z'x + z) = 0.$$

Desfacem parantezele, împărțim prin z și găsim ecuația cu variabile separabile:

$$\frac{dz}{dx}\Big(\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^{\frac{3}{2}}}\Big) = -\frac{1}{x}.$$

5. $(3x + 3y - 1)dx + (x + y + 1)dy = 0$.
Indicație: Observăm că dreptele $3x + 3y - 1 = 0$ și $x + y + 1 = 0$ sînt paralele. Deci facem schimbarea de funcție $x + y = u(x)$, iar ecuația devine:

$$2dx + du + 2\frac{du}{u-1} = 0.$$

Integrăm și găsim:

$$2x + u + 2\ln|u - 1| = c_1,$$

de unde putem reveni la soluția în y și găsim:

$$3x + y + \ln(x + y - 1)^2 = c_1 \Rightarrow (x + y - 1)^2 = ce^{-(3x+y)}.$$

6. $y' + y\cos x = \sin x \cos x$, cu $x_0 = 0, y_0 = 1$.
Indicație: Ecuația este liniară neomogenă. Atașăm ecuația omogenă, care este cu variabile separabile: $y' + y\cos x = 0$ și găsim:

$$-\frac{dy}{y} = \cos x\,dx \Rightarrow \overline{y}(x) = ce^{-\sin x}.$$

Mai departe, aplicăm variația constantelor $y_p(x) = c(x)e^{-\sin x}$ și găsim $c'(x) = \sin x \cos x e^{\sin x}$, de unde $c(x) = e^{\sin x}(\sin x - 1)$.
Soluția generală este $y(x) = \sin x - 1 + ce^{-\sin x}$, iar din condițiile inițiale găsim $c = 2$.

7. $y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}, y \geqslant 0, x \neq 0$.
Indicație: Avem o ecuație Bernoulli cu $\alpha = \frac{1}{2}$, deci facem schimbarea de funcție $z(x) = y^{\frac{1}{2}}$. Obținem o ecuație liniară neomogenă:

$$z' - 2\frac{z}{x} = \frac{x}{2},$$

pe care o rezolvăm corespunzător.

8. $xy' + y = -x^2 + y^2, x_0 = 1, y_0 = 1$.
Indicație: Avem o ecuație Bernoulli cu $\alpha = 2$, deci facem schimbarea de funcție $z(x) = \frac{1}{y}$. Obținem ecuația liniară neomogenă $z' - \frac{2}{x} = x$, pe care o rezolvăm corespunzător.

Ecuații exacte. Factor integrant

Definiție 0.1: Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu și $P, Q : D \to \mathbb{R}$ funcții continue. Se numește *formă diferențială* expresia $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Forma diferențială ω se numește *închisă* dacă $P_y = Q_x$.

Forma diferențială ω se numește *exactă* dacă există o funcție $U \in \mathcal{C}^1(D)$, cu proprietatea că $dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Presupunem că avem o ecuație diferențială de ordinul întîi de forma:

$$y' = f(x,y),$$

pe care o putem rescrie în forma:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

cu $P, Q \in \mathcal{C}^1(D \subseteq \mathbb{R}^2)$, iar $Q \neq 0$ pe D, astfel încît forma diferențială $\omega = Pdx + Qdy$ să fie închisă. Atunci orice soluție a ecuației diferențiale de mai sus se obține în forma implicită $U(x,y) = c$, unde:

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt, \tag{1}$$

cu $(x_0, y_0) \in D$ fixat.

Dacă forma diferențială ω nu este închisă, ea se poate înmulți cu o funcție $\mu : D \to \mathbb{R}$, de clasă $\mathcal{C}^1$, numită *factor integrant*, astfel încît forma $\mu\omega$ să fie închisă.

Pentru a găsi factorul integrant, verificăm:

- Dacă $-\frac{1}{Q}(Q_x - P_y) = g(x)$ este o funcție doar de x, atunci factorul integrant μ este o funcție doar de x și se determină din ecuația diferențială $\frac{d\mu}{\mu} = g(x)dx$;
- Dacă $\frac{1}{P}(Q_x - P_y) = h(y)$ este o funcție doar de y, atunci factorul integrant μ este o funcție doar de y și se determină din ecuația diferențială $\frac{d\mu}{\mu} = h(y)dy$.

9. $(ye^{xy} - 4xy)dx + (xe^{xy} - 2x^2)dy = 0$.

Indicație: Forma diferențială asociată este închisă, deci ecuația se poate rezolva direct găsind U din ecuația (1).

10. $(x\sin y + y\cos y)dx + (x\cos y - y\sin y)dy = 0$.

Indicație: Forma diferențială asociată nu este închisă, dar se poate căuta un factor integrant ca funcție doar de x. Găsim $\frac{d\mu}{\mu} = dx$, deci $\mu = e^x$. Obținem apoi o ecuație exactă și o rezolvăm cu formula (1).

Ecuații Lagrange

Forma generală:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y').$$

Pentru rezolvare, notăm $y' = p$.

11. $y = 2xy' - y'^2$.

Indicație: Facem substituția $y' = p$ și găsim:

$$y = 2xp - p^2.$$

Derivăm în raport cu x și obținem:

$$p = 2p + 2xp' - 2pp' \Rightarrow p'(2p - 2x) = p.$$

Echivalent, putem scrie:

$$\frac{dp}{dx}(2p - 2x) = p \Rightarrow p\frac{dx}{dp} = -2x + 2p.$$

Soluția se obține parametric în forma:

$$x = \frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2}.$$

Înlocuind în ecuația inițială, după introducerea lui p, avem:

$$y = \frac{p^2}{3} + \frac{2c}{p}.$$

Ecuații Clairaut

Ecuațiile Clairaut sînt o formă particulară a ecuațiilor Lagrange, cu $\varphi(y') = y'$:

$$y = xy' + \psi(y').$$

Rezolvarea este similară cu cazul Lagrange.

12. $y = xy' + \frac{1}{y'}$.
Soluție: Notînd $y' = p$ și derivăm, găsim:

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx}\left(x - \frac{1}{p^2}\right) = 0.$$

Avem de tratat cazurile:

- $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$, deci $y = cx + \frac{1}{c}$ este *soluția generală*;
- $x = \frac{1}{p^2}$, de unde $y = \frac{2}{p}$, adică $y^2 = 4x$, care se numește *soluția singulară*.