Analiză 2

Notițe de seminar

Adrian Manea
Curs: M. Olteanu

29 mai 2021

Cuprins

SEMINAR 1

PRIMITIVE ȘI INTEGRALE — RECAPITULARE

Pentru acest prim seminar, ne vom aminti cîteva din formulele de calcul integral, precum și tehnicile de calcul.

Puteți consulta o listă de primitive uzuale în orice manual de clasa a XII-a sau online, de exemplu, aici.

În special, vom avea nevoie în exercițiile de mai jos, de următoarele formule:

- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c;$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c;$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + c;$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) + c;$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c;$
- $\displaystyle\int \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arccos \frac{x}{a} + c.$

Folosind acestea, calculați integralele de mai jos:

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-16}}dx$;

(2) $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2-5x+7}dx$;

(3) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2-5x+6}dx$;

(4) $\displaystyle\int \frac{x-1}{3x^2-6x+11}dx$;

(5) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^4-1}dx$;

(6) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x\log_3 x\,dx$;

(7) $\displaystyle\int_1^{e} \sin(\ln x)dx$;

(8) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3-2x}{2x^2+1}dx$;

(9) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln x}{x(2+\ln x)}dx$;

(10) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{3x^4+x^3-2x^2+x+1}{x^2-5x+6}dx$;

(11) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^5+2x^3-3x^2+2x-1}{x^2+2x+1}dx$;

(12) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^2+x+3}dx$;

(13) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{5}{3x^2+6x+21}dx$.

SEMINAR 2

INTEGRALE IMPROPRII ȘI CU PARAMETRI

Integralele improprii sînt integrale în care fie unul dintre capete este infinit, fie funcția nu este definită în cel puțin un punct din domeniul de integrare. De exemplu:

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x}$ este improprie în $x = 0$;
- $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x}$ este improprie în ambele capete.

Pentru aceste integrale, calculul se poate face trecînd la limită, dacă unul dintre capete este infinit. Mai precis, avem:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

dacă integrala nu este improprie și în capătul $x = a$ sau în alt punct din interiorul domeniului.

Pentru celelalte cazuri, există criterii de convergență, care depășesc scopul acestui seminar. Le includem mai jos, pentru completitudine.

*****

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ o funcție *local integrabilă* (i.e. integrabilă pe orice interval compact $[u, v] \subseteq [a, b)$).

Integrala improprie (în b) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ se numește *convergentă* dacă limita:

$$\lim_{t\to b} \int_a^t f(x)dx$$

există și este finită. Valoarea limitei este valoarea integralei. În caz contrar, integrala se numește *divergentă.*

Dacă $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ este local integrabilă, atunci integrala improprie (la ∞) $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ se numește *convergentă* dacă limita:

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx$$

există și este finită. Valoarea limitei este egală cu valoarea integralei.

Integrala improprie $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ se numește *absolut convergentă* dacă integrala $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ este convergentă.

Criteriile de convergență pentru integralele improprii sînt foarte asemănătoare cu cele pentru serii (amintiți-vă, că, de fapt, integralele definite se construiesc cu ajutorul sumelor infinite, adică serii, v. *sumele Riemann*).

Așadar, avem:

Criteriul lui Cauchy (general): Fie $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ local integrabilă. Atunci integrala $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ este convergentă dacă și numai dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in [a, b) \text{ a.î. } \forall x, y \in (b_\varepsilon, b), \left| \int_x^y f(t)dt \right| < \varepsilon.$$

Criteriul de comparație („termen cu termen“): Fie $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încît $0 \leq f \leq g$.

- Dacă $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ este convergentă, atunci și integrala $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ este convergentă;
- Dacă integrala $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ este divergentă, atunci și integrala $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ este divergentă.

Criteriul de comparație la limită: Fie $f, g : [a, b) \longrightarrow [0, \infty)$, astfel încît să existe limita:

$$\ell = \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- Dacă $\ell \in [0, \infty)$, iar $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ este convergentă, atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ este convergentă;
- Dacă $\ell \in (0, \infty)$ sau $\ell = \infty$, iar $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ este divergentă, atunci și $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Criteriul de comparație cu $\frac{1}{x^\alpha}$: Fie $a \in \mathbb{R}$ și $f : [a, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ local integrabilă, astfel încît să existe:

$$\ell = \lim_{x \to \infty} x^\alpha f(x).$$

- Dacă $\alpha > 1$ și $0 \le \ell < \infty$, atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă;
- Dacă $\alpha \le 1$, iar $0 < \ell \le \infty$, atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă.

Criteriul de comparație cu $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$: Fie $a < b$ și $f : [a, b) \longrightarrow [0, \infty)$, local integrabilă, astfel încît să existe:

$$\ell = \lim_{x \to b} (b-x)^\alpha f(x).$$

- Dacă $\alpha < 1$ și $0 \le \ell < \infty$, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă;
- Dacă $\alpha \ge 1$ și $0 < \ell \le \infty$, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Criteriul lui Abel: Fie $f, g : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, cu proprietățile:

- f este de clasă $\mathcal{C}^1$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, iar $\int_a^\infty f'(x)dx$ este absolut convergentă;
- g este continuă, iar $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ este mărginită pe $[a, \infty)$.

Atunci integrala $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ este convergentă.

Exercițiu: Folosind criteriile de comparație, să se studieze natura integralelor improprii:

(a) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ (D);

(b) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (C);

(c) $\int_0^1 \frac{\sin x}{1-x^2} dx$ (D);

(d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^3-1}}dx$ (C $x=1$, D $x \longrightarrow \infty \Longrightarrow$ D);

(e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x^3-1}}dx$ (C);

(f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}-1}$ (C $x \longrightarrow \infty$, D $x=1 \Longrightarrow$ D);

(g) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}, \alpha > 0$ (D);

*****

Un caz particular care ne interesează este acela al integralelor improprii cu parametri. Un exemplu este:

$$I(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x)dx, \quad m > 0,$$

care se poate rezolva folosind tehnica de derivare în interiorul integralei, adică:

$$I'(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial m} \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x)dx.$$

Exemple rezolvate:

Să se calculeze integralele, folosind derivarea sub integrală:

(a) $I(m) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x)dx, m > 0;$

(b) $I(a) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 \theta)d\theta, a > 1;$

(c) $I(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan ax}{x\sqrt{1-x^2}}dx, a > 0.$

Soluții:

(a) Dacă considerăm funcția:

$$f(x,m) = \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x),$$

observăm că este continuă și admite o derivată parțială continuă în raport cu m.

Atunci obținem:

$$\frac{\partial f}{\partial m} = I'(m) = 2m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + m^2 \sin^2 x}dx$$

Pentru a calcula integrala, facem schimbarea de variabilă $\tan x = t$ și atunci:

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

Integrala inițială se poate prelucra:

$$I'(m) = 2m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{cos^2 x(1 + m^2 \tan^2 x)} dx.$$

Așadar, pentru a obține $\sin^2 x$ în funcție de t calculăm:

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = t^2 \Longrightarrow \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}.$$

În fine, integrala devine:

$$I'(m) = 2m \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1 + m^2 t^2)(1 + t^2)} dt.$$

Făcînd descompunerea în fracții simple, obținem:

$$\frac{t^2}{(1 + m^2 t^2)(1 + t^2)} = \frac{1}{m^2 - 1} \left(\frac{1}{t^2 + 1} - \frac{1}{m^2 t^2 + 1} \right).$$

și calculăm în fine integrala $I'(m) = \frac{\pi}{m+1}$. Integrăm și găsim $I(m) = \pi \ln(m + 1) + c$. Deoarece $I(1) = 0$, rezultă $c = -\pi \ln 2$ și, în fine:

$$I(m) = \pi \ln \frac{m + 1}{2}.$$

(b) Dacă considerăm funcția:

$$f(\theta, a) = \ln(a^2 - \sin^2 \theta),$$

observăm că este continuă și admite o derivată parțială continuă în raport cu a.

Atunci avem:

$$I'(a) = \frac{\partial f}{\partial a} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2 - \sin^2 \theta} d\theta.$$

Cu schimbarea de variabilă $t = \tan\theta$, avem succesiv:

$$\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^\infty \frac{2a}{a^2 - \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\
&= \int_0^\infty \frac{2a}{t^2(a^2-1) + a^2} dt \\
&= \frac{2a}{a^2-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^2 + \frac{a^2}{a^2-1}} dt \\
&= \frac{2a}{a^2-1} \cdot \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} \cdot \arctan t \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} \Big|_0^\infty \\
&= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.
\end{aligned}$$

Integrăm pentru a obține $I(a)$ și găsim:

$$I(a) = \int \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} da = \pi \ln(a + \sqrt{a^2-1}) + c.$$

Pentru a calcula constanta c, putem rescrie integrala din forma inițială:

$$\begin{aligned}
I(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{a^2}\right)\right) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln a^2 d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{a^2}\right) d\theta.
\end{aligned}$$

Putem considera limita $a \longrightarrow \infty$ și atunci integrala de calculat tinde la 0, deci $c = -\pi \ln 2$.
Concluzie: $I(a) = \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2-1}}{2}$.

(c) Dacă considerăm funcția $f(x,a) = \frac{\arctan ax}{x\sqrt{1-x^2}}$, observăm că este continuă și admite o derivată parțială continuă în raport cu a. Atunci:

$$I'(a) = \frac{\partial f}{\partial a} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Pentru a calcula integrala, facem schimbarea de variabilă $x = \sin t$ și obținem:

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + a^2 \sin^2 t}.$$

Mai departe, aplicăm schimbarea de variabilă $\tan t = u$ și obținem succesiv:

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^\infty \frac{du}{(1+a^2)u^2+1} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}. \end{aligned}$$

Așadar, printr-o integrare în funcție de a, găsim:

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(a + \sqrt{1+a^2}) + c.$$

Cum $I(0) = 0$, găsim $c = 0$.

Însă accentul pentru acest seminar va cădea pe *funcțiile lui Euler*, Beta și Gamma, care se definesc astfel:

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, t > 0 \\ B(p,q) &= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}, p, q > 0. \end{aligned}$$

Remarcăm că integrala Gamma este improprie pentru $x \longrightarrow \infty$, iar integrala Beta nu este improprie, ci doar cu parametri.

Proprietățile pe care le vom folosi în exerciții sînt:

(1) $B(p,q) = B(q,p), \forall p, q > 0;$

(2) $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)};$

(3) $B(p,q) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy;$

(4) $\Gamma(1) = 1;$

(5) $\Gamma(t+1) = t \cdot \Gamma(t), \forall t > 0;$

(6) $\Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

2.1 Exerciții

Calculați, folosind funcțiile B și Γ, integralele:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^p}\,dx, p > 0;$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(x+1)^2}\,dx;$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1};$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x\,dx, p > -1, q > -1;$

(e) $\displaystyle\int_0^1 x^{p+1}(1-x^m)^{q-1}\,dx, p, q, m > 0;$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty x^p e^{-x^q}\,dx, p > -1, q > 0;$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \ln^p x^{-1}\,dx, p > -1;$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}, n \in \mathbb{N};$

(i) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\ln^3 x \cdot (1-\ln x)^4\,dx;$

(j) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx;$

(k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^4)^2}\,dx;$

(l) $\displaystyle\int_{-1}^\infty e^{-x^2-2x+3}\,dx;$

(m) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)};$

(n) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+x^3)};$

(o) $\displaystyle\int_{-3}^\infty e^{-2x^2-12x+5}\,dx;$

(p) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[5]{\ln\frac{3}{x^2}}\,dx;$

(q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}};$

(r) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos^5 x\,dx;$

(s) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$

SEMINAR 3

INTEGRALE DUBLE

3.1 Exerciții

Reprezentați grafic domeniile date de următoarele (in)ecuații:

(a) $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2, y^2 = x\}$

(b) $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2, y = x, xy = 1\}$;

(c) $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2y\}$;

(d) $D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0\}$;

(e) $D_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x + y - 6 = 0, y^2 = 8x\}$;

(f) $D_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2x + 2y - 1\}$.

3.2 Metode de calcul

Cazurile particular care ne interesează sînt de 4 feluri.

Integralele pe dreptunghiuri se calculează direct, ca niște integrale iterate. De exemplu, pentru $D = [a, b] \times [c, d]$, avem:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx,$$

ultima egalitate rezultînd dintr-o teoremă, numită *teorema lui Fubini.*

Integralele pe domenii intergrafic se calculează prin a le descrie ca pe niște dreptunghiuri, cu o latură variabilă.

Considerăm, de exemplu, cazul D_1 de mai sus. Acest domeniu poate fi descris astfel (vedeți desenul):

$$x \in [0,1], y \in [x^2, \sqrt{x}],$$

deci putem calcula integrale duble pe acest domeniu sub forma:

$$\iint_{D_1} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx.$$

Integralele pe cercuri centrate în origine se calculează folosind trecerea la coordonate polare:

$$\begin{cases} x & = r\cos t \\ y & = r\sin t \end{cases}, \quad (r,t) \in [0,\infty) \times [0,2\pi).$$

Aceasta este, de fapt, o schimbare de variabile, deci trebuie schimbate și diferențialele, folosind *matricea jacobiană:*

$$dxdy \mapsto |J|drdt, \quad \text{unde } J = \begin{vmatrix} x_r & x_t \\ y_r & y_t \end{vmatrix} = r.$$

Astfel, de exemplu, dacă $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, putem calcula:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^2 \int_0^{2\pi} f(r,t) \cdot rdtdr.$$

Pentru cercuri necentrate în origine sau alte domenii arbitrare, se explicitează ca domenii intergrafic. De exemplu, pentru domeniul D_4 din primul exercițiu, avem:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}, y \geq 0,$$

care este un disc, centrat în $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ și cu rază $\frac{1}{2}$, din care se ia doar partea superioară, corespunzătoare lui $y \geq 0$. Așadar, acesta poate fi descris astfel (vedeți desenul):

$$x \in [0,1], \quad y \in \left[0, \sqrt{\frac{1}{2} - (x - \frac{1}{2})^2}\right].$$

Integrala se calculează în continuare pe acest domeniu.

Pentru toate cazurile de mai sus, **aria domeniului** D se calculează prin:

$$A(D) = \iint_D dxdy.$$

3.3 Exerciții

1. Calculați $\iint_D f(x,y)dxdy$ în următoarele cazuri:

(a) $D = [0,1] \times [2,3]$, iar $f(x,y) = xy^2$;

(b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 2x \le y \le x^2+1\}$, iar $f(x,y) = x$;

(c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x, y = x^2\}$, iar $f(x,y) = 3x - y + 2$;

(d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$, iar $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$;

(e) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0, y \ge 0\}$, iar $f(x,y) = e^{-2(x^2+y^2)}$;

(f) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le x, y \ge 0\}$, iar $f(x,y) = xy$;

(g) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + x^2 - 2 = 0, y = 1\}$, iar $f(x,y) = xy + e^x$;

(h) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + 3x - 1 = 0, 1 \ge y \le 7, -2 \le x \le 0\}$, iar $f(x,y) = y^2 + x^2 - x$;

(i) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x + 3 = 0, 0 \le x \le 3\}$, iar $f(x,y) = x^2 + 2$;

(j) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 3x + 2, y \le 0\}$, iar $f(x,y) = xy$;

(k) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x^2 + 6x - 8, x \ge 3, y \ge 0\}$, iar $f(x,y) = -x^2 + 6x$.

2. Calculați ariile domeniilor de mai sus.

3. Calculați aria domeniului:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \le x^2 + y^2 \le 4, x + y \ge 0\}.$$

4. Calculați ariile domeniilor de la începutul lecției.

SEMINAR 4

INTEGRALE TRIPLE

Integralele triple pe care le vom calcula se rezolvă folosind o abordare de tipul domeniilor inter-grafic. Astfel, dacă Ω este un domeniu de tip corp tridimensional, delimitat de suprafețe de ecuații date, se poate calcula *volumul* domeniului Ω cu formula:

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz,$$

iar de cele mai multe ori, se calculează inițial integrala după z, deoarece suprafețele sînt date în această formă.

Exercițiu: Calculați volumul corpului delimitat de suprafețele de ecuații date:

(a) $z = x^2 + y^2$ (paraboloid) și $z = x + y$ (plan);

(b) $z = x^2 + y^2 - 1$ și $z = 2 - x^2 - y^2$ (2 paraboloizi);

(c) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (sferă) și $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}$ (cilindru).

Indicații: (a) Se calculează mai întîi integrala după z, deoarece o reprezentare grafică ne va ajuta să vedem că în sensul crescător al axei OZ întîlnim mai întîi paraboloidul, apoi planul, conform figurii 4.1.

Astfel, avem de calculat:

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \iint_D \int_{x+y}^{x^2+y^2} dzdxdy,$$

unde D este proiecția pe planul XOY a figurii, care se poate obține foarte simplu eliminînd z din cele două ecuații, adică:

$$x^2 + y^2 = x + y,$$

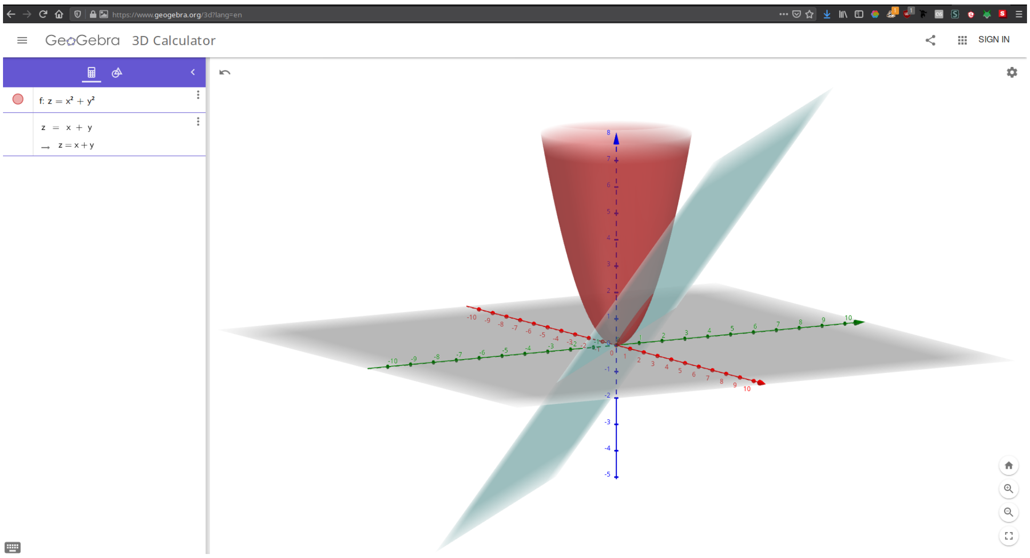

Figura 4.1: Intersecția între paraboloidul $z = x^2 + y^2$ și planul $z = x + y$

care este un cerc. După aceea, integrala pe D se calculează ca o integrală dublă.

Atenție! Volumul unui corp, ca și aria unui domeniu bidimensional, trebuie să fie pozitiv! Dacă din calcule corecte rezultă un volum negativ, înseamnă că s-au luat greșit capetele de integrare (în exemplul de mai sus s-a luat z de la paraboloid la plan).

În unele exerciții, în special cînd apar sfere sau cilindri, se pot folosi coordonate specifice:
Coordonatele sferice: $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times [0, \pi) \times [0, 2\pi)$, reprezentate în figura 4.2.

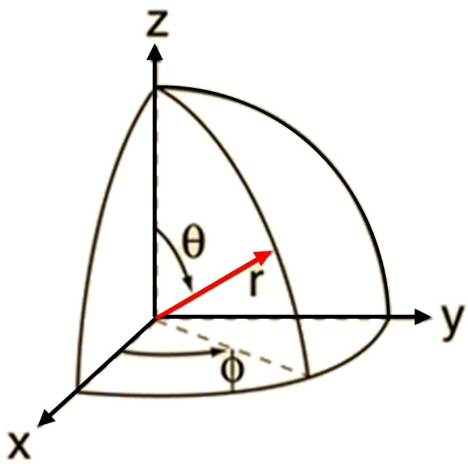

Figura 4.2: Coordonatele sferice r, θ, φ

Schimbare de coordonate este dată de:

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{cases}.$$

Nu uitați, în acest caz, să calculați și jacobianul schimbării de coordonate:

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix}.$$

Coordonate cilindrice: $(r, t, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$, care sînt, practic, coordonatele polare, „mutate“ în lungul axei OZ. De aceea, schimbarea de coordonate este dată de:

$$\begin{cases} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \\ z &= z \end{cases}.$$

Iar jacobianul transformării se calculează similar, cu derivatele lui x, y, z în raport cu r, t și respectiv z.

4.1 Exerciții suplimentare

Calculați volumul corpurilor delimitate de suprafețele de ecuații:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ și $x^2 + y^2 - 2z = 0$;

(b) $z = 4 - x^2 - y^2$ și $2z = 5 + x^2 + y^2$;

(c) $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$ și $2x^2 + y^2 = z^2$, pentru $z \geq 0$;

(d) $x^2 + y^2 = 1$ și $z^2 = x^2 + y^2$, pentru $z \geq 0$.

4.2 Resurse suplimentare

- Lecțiile online ale Prof. Travis Kowalski, în special lista `Calculus 3`, începînd cu lecția 17 pentru integrale duble: link;
- `GeoGebra`, pentru reprezentări grafice, în special tridimensionale: link;
- Exerciții rezolvate ale Prof. R. Purtan de la ETTI: integrale duble și integrale triple.

SEMINAR 5

INTEGRALE CURBILINII

5.1 Elemente de teorie

Integrale curbilinii de speța întîi

Fie $\gamma = \gamma(t)$ o curbă netedă, definită pe un interval $t \in [a, b]$. Se definește integrala curbilinie a unei funcții $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f = f(x, y, z)$ prin formula:

$$\int_\gamma f(x, y, z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt.$$

De asemenea, cîteva cazuri particulare de interes sînt:

- *lungimea curbei* γ se obține pentru $f = 1$, deci:

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt;$$

- dacă funcția f reprezintă *densitatea* unui fir pe care îl aproximăm cu o curbă netedă γ, atunci *masa firului* se calculează cu formula:

$$M(\gamma) = \int_\gamma f(x, y, z)ds;$$

- în aceeași ipoteză de mai sus, *coordonatele centrului de greutate* al firului, x_i^G se calculează cu formula (am notat $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$):

$$x_i^G = \frac{1}{M}\int_\gamma x_i f(x_1, x_2, x_3)ds,$$

unde M este masa calculată mai sus.

Integrala curbilinie de speța a doua

Fie $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ o 1-formă diferențială. Se definește integrala curbilinie a formei ω în lungul curbei γ ca mai sus prin formula:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b (P \circ \gamma)x' + (Q \circ \gamma)y' + (R \circ \gamma)z' dt,$$

unde $\gamma = \gamma(t), t \in [a, b]$ este o parametrizare a curbei γ.

O aplicație fizică importantă a integralelor curbilinii de speța a doua este calculul *circulației* cîmpurilor vectoriale.

Fie, deci, un cîmp vectorial în spațiu:

$$\vec{V} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Atunci *circulația*[1] cîmpului vectorial în lungul unei curbe netede γ se calculează cu integrala curbilinie:

$$\int_\gamma P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

și putem asocia o 1-formă diferențială cîmpului, anume:

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

5.2 Formula Green-Riemann

Această formulă, care face parte din formulele integrale esențiale pe care le vom studia, ne permite să transformăm o integrală curbilinie de speța a doua într-una dublă.

Mai precis, avem formula:

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy,$$

unde K este suprafața bidimensională închisă de curba γ.

Observație importantă: Pentru a putea aplica formula Green-Riemann, este necesar ca drumul γ să fie închis, pentru a putea descrie o suprafață închisă K! De asemenea, evident, forma diferențială trebuie să fie de clasă $\mathcal{C}^1$, inclusiv în K, pentru a putea calcula derivatele parțiale.

[1] Circulația unui cîmp vectorial este analogul fluxului, dar în dimensiune 1. Astfel, dacă fluxul se calculează pentru cîmpuri care traversează o suprafață (vom întîlni conceptul în lecția despre integrale de suprafață), circulația se calculează pentru cîmpuri în lungul unor curbe.

5.2.1 Forme diferențiale închise

Fie $\alpha = Pdx + Qdy$ o 1-formă diferențială de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a $K = \text{Int}(\gamma)$. Această formă diferențială se numește *închisă* dacă are loc:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Se poate observa, folosind formula Green-Riemann, că pentru forme diferențiale închise, integrala curbilinie în lungul oricărui drum este nulă. Această observație se mai numește *independența de drum a integralei curbilinii* sau *teorema Poincaré.*

5.3 Exerciții

1. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speța întîi:

(a) $\displaystyle\int_\gamma x ds$, unde $\gamma : y = x^2, x \in [0, 2]$;

(b) $\displaystyle\int_\gamma y^5 ds$, unde $\gamma : x = \frac{y^4}{4}, y \in [0, 2]$;

(c) $\displaystyle\int_\gamma x^2 ds$, unde $\gamma : x^2 + y^2 = 2, x, y \geq 0$;

(d) $\displaystyle\int_\gamma y^2 ds$, unde $\gamma : x^2 + y^2 = 4, x \leq 0, y \geq 0$.

2. Calculați, direct și aplicînd formula Green-Riemann, integrala curbilinie $\displaystyle\int_\gamma \alpha$ în următoarele cazuri:

(a) $\alpha = y^2 dx + x dy$, unde γ este pătratul cu vîrfurile $A(0, 0), B(2, 0), C(2, 2), D(0, 2)$;

(b) $\alpha = y dx + x^2 dy$, unde γ este cercul centrat în origine și de rază 2.

3. Calculați următoarele integrale curbilinii de speța a doua:

(a) $\displaystyle\int_\gamma x dy - y dx$, unde $\gamma : x^2 + y^2 = 4, y = x\sqrt{3} \geq 0$ și $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$;

(b) $\displaystyle\int_\gamma (x + y) dx + (x - y) dy$, pe domeniul:

$$\gamma : x^2 + y^2 = 4, y \geq 0;$$

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y}{x+1}dx + dy$, unde γ este triunghiul cu vîrfurile $A(2,0), B(0,0), C(0,2)$.

4. Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma ydx + xdy$ pe un drum de la $A(2,1)$ la $B(1,3)$.

5. Să se calculeze circulația cîmpului de vectori $\vec{V}$ de-a lungul curbei γ, pentru: $\vec{V} = -(x^2 + y^2)\vec{i} - x^2 \vec{-} y^2\vec{j}$, cu:

$$\gamma \,:\, \{x^2 + y^2 = 4, y < 0\} \cup \{x^2 + y^2 - 2x = 0, y \geq 0\}$$

6. Să se calculeze masa firului material γ, cu ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= t^2/2, t \in [0,1] \\ z(t) &= t^3/3 \end{cases}$$

iar densitatea $f(x,y,z) = \sqrt{2y}$.

7. Fie forma diferențială:

$$\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma \alpha$, unde γ este cercul centrat în origine și cu raza 2.

8. Să se calculeze integrala curbilinie $\displaystyle\int_\gamma xydx + \frac{x^2}{2}dy$, pe conturul:

$$\gamma \,:\, \{x^2 + y^2 = 1, x \leq 0 \leq y\} \cup \{x + y = -1, x, y < 0\}.$$

Indicație: Curba γ nu este închisă, deci nu putem aplica formula Green-Riemann. Considerăm segmentul orientat $[AB]$, cu $A(0,-1), B(0,1)$, cu care închidem curba. Definim $C = \gamma \cup [AB]$ și acum putem aplica Green-Riemann pe C. Vom avea, de fapt:

$$\int_C \alpha = \int_\gamma \alpha + \int_{[AB]} \alpha,$$

unde α este forma diferențială de integrat.

Putem calcula acum integrala pe C cu Green-Riemann, iar cea pe $[AB]$ cu definiția, obținînd în final integrala pe γ.

9. Calculați, folosind integrala curbilinie:

(a) lungimea unui cerc de rază 2;

(b) lungimea segmentului AB, cu $A(1,2)$ și $B(3,5)$;

(c) lungimea arcului de parabolă $y = 3x^2$, cu $x \in [-2, 2]$;

(d) lungimea arcului de hiperbolă $xy = 1$, cu $x \in [1, 2]$.

5.4 Exerciții suplimentare (ETTI)

Calculați integralele curbilinii de mai jos:

Speța întîi:

(a) $\int_\gamma ye^{-x} ds$, unde parametrizarea curbei γ este dată de:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) & = \ln(1+t^2) \\ y(t) & = 2\arctan t - t \end{cases}, \quad t \in [0,1];$$

(b) $\int_\gamma (x^2 + y^2) \ln z ds$, unde parametrizarea curbei γ este dată de:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) & = e^t \cos t \\ y(t) & = e^t \sin t \\ z(t) & = e^t \end{cases}, \quad t \in [0,1];$$

(c) $\int_\gamma xyz ds$, unde parametrizarea curbei γ este:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) & = t \\ y(t) & = \dfrac{2}{3}\sqrt{2t^3} \\ z(t) & = \dfrac{1}{2}t^2 \end{cases}, \quad t \in [0,1];$$

(d) $\int_\gamma x^2 y ds$, unde $\gamma = [AB] \cup [BC]$, iar capetele segmentelor sînt $A(-1,1), B(2,1), C(2,5)$;

(e) $\int_\gamma x^2 ds$, unde γ este dată de:

$$\gamma : x^2 + y^2 = 2, \quad x, y \geq 0;$$

(f) $\int_\gamma (x^2 + y^2) ds$, unde γ este sectorul de cerc $x^2 + y^2 = 1$, parcurs de la $A(0, -1)$ la $B(1, 0)$;

(g) Calculați lungimea segmentului $[AB]$, unde $A(1, 2), B(3, 5)$.

Speța a doua: $\int_\gamma \omega$ pentru:

(a) $\omega = (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, unde γ este dată de:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) &= \sqrt{t} \\ y(t) &= \sqrt{t+1} \end{cases}, \quad t \in [1, 4];$$

(b) $\omega = \dfrac{1}{y^2 + 1} dx + \dfrac{y}{x^2 + 1} dy$, unde γ este dată de:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) &= t^2 \\ y(t) &= t \end{cases}, \quad t \in [0, 1];$$

(c) $\omega = \sqrt{x} dx + xy^2 dy$, unde γ este parabola $y = x^2$, pentru $x \in [0, 1]$.

SEMINAR 6

RECAPITULARE PARȚIAL

Integrale B, Γ

Folosind integralele Euler B, Γ, calculați:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^4)^2}dx;$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^6+1}dx;$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)};$

(d) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2+2x-3}dx.$

Integrale duble

1. Calculați integralele duble:

(a) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 16, x, y \ge 0\}$;

(b) $\displaystyle\iint_D 3-\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 9, x, y \ge 0\}$.

2. Calculați ariile domeniilor:

(a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \le y \le 3x^3, x \in [0,2]\}$;

(b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^3 \le y \le 5x^2, x \in [0,1]\}$;

(c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \geq y \geq x^2 + 2x - 3, -1 \leq x \leq 1\}$.

Integrale triple

Calculați volumul mulțimilor $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, delimitate de cuadricele date:

(a) $z = 2x^2 + 2y^2$ și $\frac{9}{2} - z = x^2 + y^2$;

(b) $z = 3x^2 + 3y^2$ și $2 - z = x^2 + y^2$;

(c) $2z = x^2 + y^2$ și $1 - z = 2x^2 + 2y^2$.

Integrale curbilinii

1. Aflați $m \geq 0$ astfel încît lungimea drumului parametrizat:

$$\gamma : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (t, m\cos t, -m\sin t)$$

să fie $\pi\sqrt{10}$.

2. Fie funcția $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 + x^2$. Calculați masa unui fir de densitate $\rho(x) = x$, definit de graficul funcției date.

3. Calculați circulația cîmpului vectorial $\vec{v} = (xy^2 + x^3, x + y^2)$ de-a lungul curbei:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4, x < 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y \in [-2, 2]\}.$$

4. Aceeași cerință ca la exercițiul 3 pentru cîmpul $\vec{v} = (x^2y + y^3, xy + x)$, de-a lungul curbei:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9, y < 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x \in [-3, 3]\}$$

SEMINAR 7

INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ

7.1 Integrale de suprafață de speța întîi

Integralele de suprafață reprezintă generalizarea într-o dimensiune superioară pentru integralele curbilinii. Astfel, multe dintre formulele și abordările de calcul pe care le vom folosi vor fi similare.

Fie $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o pînză parametrizată și fie $\Sigma = \Phi(D)$ imaginea ei (i.e. suprafață pe care vom integra). Fie $f : U \subseteq \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă (deci integrabilă), definită pe (o porțiune din) imaginea pînzei.

Vom fi interesați de un caz particular (și, totodată, cel mai des întîlnit) pentru integrala de suprafață, anume cînd pînza este dată într-o *parametrizare carteziană*. Adică ecuația suprafeței poate fi scrisă în forma $z = z(x, y)$.

Integrala de suprafață de speța întîi a funcției f pe suprafața Σ parametrizată cartezian prin $z = z(x, y)$ este:

$$\int_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2} dxdy,$$

unde:

- D este domeniul de definiție al parametrizării carteziene, adică proiecția pe planul XOY a suprafeței ($z : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$);
- coeficienții de sub radical sînt $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ și $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

În cazul particular în care $f = 1$, se obține *aria suprafeței* Σ.

7.2 Integrale de suprafață de speța a doua

Fie, ca mai sus, o pînză tridimensională, pe care o considerăm a fi parametrizată:

$$\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)).$$

Fie, de asemenea, o 2-formă diferențială[1]:

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy.$$

Integrala pe suprafața orientată $\Sigma = \Phi(D)$ a 2-formei diferențiale ω se definește prin:

$$\int_\Sigma \omega = \iint_D (P \circ \Phi) \cdot \frac{D(Y, Z)}{D(u, v)} + (Q \circ \Phi) \cdot \frac{D(Z, X)}{D(u, v)} + (R \circ \Phi) \cdot \frac{D(X, Y)}{D(u, v)} dudv,$$

unde D este domeniul parametrizării ($(u, v) \in D$), iar $\frac{D(Y, Z)}{D(u, v)}$ etc. sînt jacobienii parametrizării (X, Y, Z) în funcție de u, v. Concret, de exemplu, avem:

$$\frac{D(X, Y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{vmatrix},$$

și celelalte, folosind notația simplificată $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$ etc. [2]

Într-o formă simplificată, putem scrie integrala folosind un determinant formal:

$$\int_\Sigma \omega = \int \begin{vmatrix} P \circ \Phi & Q \circ \Phi & R \circ \Phi \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} dudv.$$

7.3 Formula Gauss-Ostrogradski

Această formulă ne permite să schimbăm o integrală de suprafață de speța a doua cu una triplă, similar formulei Green-Riemann, dar în dimensiune superioară.

[1] ω este o **2**-formă diferențială deoarece ea conține produse de cîte 2 elemente diferențiale dx, dy, dz. De asemenea, notația $\wedge$ (citită „wedge“ sau „produs exterior“) este o notație specifică pentru produsul care se definește între diferențialele dx, dy, dz. Alternativ, puteți găsi scrierea și prin juxtapunere:

$$\omega = Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Însă acest produs *nu este comutativ*, deci ordinea în care scriem 2-forma diferențială este esențială! (observați permutările circulare: $dydz \longrightarrow dzdx \longrightarrow dxdy$).

[2] Ordinea scrierii jacobienilor este, evident, esențială. Pentru a-i reține mai ușor, observați că ordinea urmează tot o permutare circulară, asemănătoare diferențialelor din 2-forma diferențială ω.

Păstrînd notațiile și contextul de mai sus, formula Gauss-Ostrogradski se scrie:

$$\int_{\Sigma} \omega = \iiint_{K} P_x + Q_y + R_z dxdydz,$$

unde $K = \text{Int}\Sigma$ este solidul care are drept frontieră suprafața Σ, iar P_x, Q_y, R_z notează derivatele parțiale corespunzătoare coeficienților din 2-forma diferențială ω.

Observaţie 7.1: Formula Gauss-Ostrogradski are, ca și formula Green-Riemann, *condiții de aplicare (existență)*. Încercați să le formulați, analizînd formula.

Formula Gauss-Ostrogradski se mai numește *formula flux-divergență*. Într-adevăr, folosind o interpretare fizică, se poate asocia 2-formei diferențiale ω cîmpul vectorial $\vec{V} = (P, Q, R)$, iar membrul stîng, adică integrala de suprafață, calculează *fluxul cîmpului* $\vec{V}$ *prin suprafața* Σ. În fizică, acesta se definește ca produsul scalar dintre cîmpul vectorial și versorul normal la suprafață. Membrul drept este, după cum se poate vedea ușor, divergența cîmpului vectorial *în solidul* $\text{Int}\Sigma$, deci avem:

$$\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_{K} \nabla \cdot \vec{V} dxdydz.$$

Pentru cazul cînd suprafața este parametrizată, adică avem:

$$\Phi = \Phi(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)),$$

se pot calcula *vectorii tangenți* la suprafață, după direcțiile lui u și v, prin derivate parțiale:

$$\vec{T}_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \qquad \vec{T}_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Apoi, normala la suprafață se poate calcula prin produs vectorial[3]. O variantă simplă de a reține formula de calcul pentru produsul vectorial folosește determinantul formal:

$$\vec{N} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{T}_u^1 & \vec{T}_u^2 & \vec{T}_u^3 \\ \vec{T}_v^1 & \vec{T}_v^2 & \vec{T}_v^3 \end{vmatrix},$$

unde $\vec{T}_{u,v}^i$ notează componenta i a vectorului $\vec{T}_{u,v}$.

Ulterior, *vectorul* normal $\vec{N}$ devine *versorul* normal $\vec{n}$, prin normare, adică $\vec{n} = \frac{1}{||\vec{N}||}\vec{N}$.

Dar, ținînd cont că avem relația între diferențiale $d\sigma = ||\vec{N}||dudv$, rezultă că obținem:

$$\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \frac{1}{||\vec{N}||}\vec{N} \cdot ||\vec{N}||dudv = \iint_{D} \vec{V} \cdot \vec{N} dudv.$$

[3]amintiți-vă, produsul vectorial al doi vectori este un vector perpendicular pe planul dat de cei doi factori

7.4 Parametrizări uzuale

Următoarele formule de parametrizare pot fi folosite în calcule:

(1) **Sfera:** Fie $R > 0$ și $(u, v) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi)$. Parametrizarea sferei $\Phi = \Phi(u, v)$ este:

$$\Phi(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u);$$

(2) **Elipsoidul:** Fie $a, b, c > 0$ și $(u, v) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi)$. Parametrizarea elipsoidului este:

$$\Phi(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u);$$

(3) **Paraboloidul:** Fie $a > 0, h > 0$ și $(u, v) \in D = [0, h] \times [0, 2\pi)$. Parametrizarea paraboloidului este:

$$\Phi(u, v) = (au \cos v, au \sin v, u^2);$$

(4) **Conul:** Fie $h > 0$ și $(u, v) \in D = [0, 2\pi) \times [0, h]$. Parametrizarea conului este:

$$\Phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v);$$

(5) **Cilindrul:** Fie $a > 0, 0 \le h_1 \le h_2$ și $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [h_1, h_2]$. Parametrizarea cilindrului este:

$$\Phi(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v).$$

7.5 Exerciții

1. Calculați vectorii tangenți și versorul normalei la suprafețele parametrizate din secțiunea anterioară.

2. Să se calculeze integrala de suprafață de prima speță:

$$\int_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma,$$

unde $f(x, y, z) = y\sqrt{z}$, iar $\Sigma : x^2 + y^2 = 6z, z \in [0, 2]$.

3. Folosind integrala de suprafață, calculați aria suprafeței Σ, unde:

$$\Sigma : 2z = 4 - x^2 - y^2, \quad z \in [0, 1].$$

4. Calculați fluxul cîmpului vectorial $\vec{V}$ prin suprafața Σ pentru:

$$\vec{V} = y\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}, \quad \Sigma : z = x^2 + y^2, z \in [0, 1].$$

5. Calculați $\int_{\Sigma} \omega$, unde:

(a)
- $\omega = ydy \wedge dz + zdz \wedge dx + xdx \wedge dy$;
- $\Sigma : x^2 + y^2 = z^2, z \in [1, 2]$.

(b)
- $\omega = x(z + 3)dy \wedge dz + yzdz \wedge dx - (z + z^2)dx \wedge dy$;
- $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.

6. Calculați fluxul cîmpului:

$$\vec{V} = (x + y)dy \wedge dz + (y + z)dz \wedge dx - 2zdx \wedge dy$$

prin emisfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z > 0$.

7.6 Formula lui Stokes

Această ultimă formulă integrală ne permite să schimbăm o integrală curbilinie de speța a doua cu una de suprafață de speța a doua.

Fie Σ o suprafață cu bord (frontieră) și fie o 1-formă diferențială

$$\alpha = Pdx + Qdy + Rdz,$$

care este de clasă $\mathcal{C}^1$ într-o vecinătate a lui Σ.

Notăm frontiera lui Σ prin $\partial\Sigma$, care este o curbă (conturul suprafeței) sau, mai precis, un *drum neted.*

Are loc *formula lui Stokes:*

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy.$$

În notație vectorială, dacă asociem cîmpul vectorial $\vec{V} = (P, Q, R)$ 1-formei diferențiale α, atunci formula lui Stokes se scrie:

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{n} d\sigma,$$

unde $\nabla \times \vec{V} = \mathrm{rot}\vec{V}$ se numește *rotorul* cîmpului vectorial, calculat cu ajutorul produsului vectorial formal între operatorul diferențial $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ și cîmpul $\vec{V} = (P, Q, R)$.

7.7 Exerciții

7. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, integrala curbilinie $\int_{\gamma} \alpha$ pentru cazurile:

(a) $\alpha = (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, iar curba γ este frontiera suprafeței $\Sigma : z = x^2 + y^2, z = 1$;

(b) $\alpha = ydx + zdy + xdz$, iar curba γ este frontiera suprafeței $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$.

7.8 Resurse suplimentare

Formula Green-Riemann, formula Gauss-Ostrogradski și **formula Stokes** se numesc, în general, *formule integrale*. Pentru coerență, le-am introdus în capitolele potrivite, în loc să le dedic un capitol separat.

Recomand materialele Prof. Purtan, care conțin exerciții rezolvate complet:

- integrale de suprafață;
- formule integrale.

7.9 Exerciții suplimentare

1. Calculați $\int_\Sigma x^2 d\sigma$, unde Σ este suprafața sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2. Calculați aria suprafeței paraboloidului $z = x^2 + y^2$, aflat sub planul de ecuație $z = 2$.

3. Calculați aria suprafeței paraboloidului $z = 4 - x^2 - y^2$, care se află deasupra planului XOY.

4. Calculați aria suprafeței paraboloidului $z = x^2 + y^2$, aflată între planele XOY și $z = 4$.

5. Calculați aria emisferei superioare a sferei centrate în origine și cu raza $R = 2$.

6. Fie cîmpul vectorial $\vec{V} = (-x, z, y^2)$. Aflați fluxul cîmpului $\vec{V}$ prin suprafața Σ, delimitată de partea paraboloidului $z = x^2 + y^2$, situată sub planul $z = 3$.

7. Calculați $\int_\Sigma xydy \wedge dz + yzdz \wedge dx + (x + y)dx \wedge dy$, unde Σ este suprafața definită prin:

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4, x > 0, y > 0, 0 < z < 4\}.$$

8. Determinați fluxul cîmpului vectorial $\vec{V} = (0, y, -z)$ prin suprafața delimitată de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, situată în primul octant.

9. Determinați fluxul cîmpului vectorial $\vec{V} = (x, 0, z)$ prin suprafața delimitată de paraboloidul $y = x^2 + z^2$, cu $0 \le y \le 1$.

10. Calculați $\int_\Sigma xdy \wedge dz + xydz \wedge dx + (x - y)dx \wedge dy$, unde Σ este definită prin:

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, y \ge 0\}.$$

SEMINAR 8

RECAPITULARE FORMULE INTEGRALE

Folosind, eventual, **formula Green-Riemann**, calculați integralele:

(a) $\displaystyle\int_\gamma xydx + xy^2dy$, unde $\gamma : x^2 - 4x + y^2 = 0$;

(b) $\displaystyle\int_\gamma y^2dx + (x+y)dy$, unde $\gamma : x^2 + y^2 + 4y = 0$;

(c) $\displaystyle\int_\gamma (x+y)dx + (x^2 - y)dy$, unde γ este pătratul cu vîrfurile în $A(1,1), B(3,1), C(3,3), D(1,3)$;

(d) $\displaystyle\int_\gamma (x^2 - y)dx + (2x+3y)dy$, unde γ este triunghiul cu vîrfurile în $A(1,1), B(1,3), C(4,1)$;

(e) $\displaystyle\int_\gamma 2xydx + x^2dy$, unde $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4, x \leq 0\}$;

(f) $\displaystyle\int_\gamma xdx + 2x^2ydy$, unde $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9, x, y \leq 0\}$;

(g) $\displaystyle\int_\gamma 2xydx + (x-y)dy$, unde $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4, x \geq y\}$.

Folosind, eventual, **formula Gauss-Ostrogradski**, calculați fluxul cîmpului vectorial V prin suprafața Σ, unde:

(a) $\vec{V} = (2x, y, 2xy), \Sigma = x^2 + y^2 + z^2 = 9$;

(b) $\vec{V} = (x^2, y, 3z-1), \Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, z \leq 2\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 2, z = 2\}$;

(c) $\vec{V} = (xz, z, z^2 - 1), \Sigma = x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0$;

(d) $\vec{V} = (x^2, xz, xz), \Sigma = z = 2x^2 + 2y^2, z \leq 6$;

(e) $\vec{V} = (yz, x^2, y^2), \Sigma = y = x^2 + z^2, y \leq 2$;

(f) $\vec{V} = (x + z, y + x, z + y), \Sigma = 2x = y^2 + z^2, x \leq 1$.

Folosind, eventual, **formula Stokes**, calculați circulația cîmpului vectorial V, prin curba de intersecție a suprafețelor Σ_1 și Σ_2 date:

(a) $\vec{V} = (x, y, z), \Sigma_1 = x^2 + y^2 + z^2 = 4, \Sigma_2 = x = 1$;

(b) $\vec{V} = (x - y, z - y, x - z), \Sigma_1 = z = x^2 + y^2, z \leq 3, \Sigma_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

(c) $\vec{V} = (2xy, x, x), \Sigma_1 = y = x^2 + z^2, y \leq 1, \Sigma_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Bonus: Calculați ariile suprafețelor:

(a) $\Sigma = 2y = x^2 + z^2, y \leq 2$;

(b) $\Sigma = x = 3y^2 + 3z^2, x \leq 1$;

(c) $\Sigma = x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0$.

SEMINAR 9

SERII FOURIER

Pentru funcțiile care au proprietăți de periodicitate (sau pot fi transformate în unele cu astfel de proprietăți), ne interesează o dezvoltare specială a lor, anume în serii de sinusuri și cosinusuri, numită *serie Fourier*.

Mai exact, în general, pentru o funcție cu proprietățile potrivite, vom avea o dezvoltare de forma:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Sumele parțiale ale acestei serii se numesc polinoame trigonometrice, notate în general $P_n(x)$ și definite prin:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

Problema principală de interes este determinarea coeficienților care apar în seria Fourier. Vom ține cont de identitățile de mai jos, datorate parității funcțiilor trigonometrice:

$$\int_0^{2\pi} \cos kx dx = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 2\pi, & k = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx dx = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 2\pi, & k = 0 \end{cases}$$

Obținem, înlocuind în serie, că:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = a_0 \cdot 2\pi,$$

de unde putem calcula primul coeficient imediat:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx.$$

Din motive teoretice explicate la curs, de obicei, în calculul de mai sus se ia coeficientul din fața integralei $\frac{1}{\pi}$.

Prelucrări simple conduc apoi și la calculul celorlalți coeficienți și avem $b_0 = 0$ și în rest:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 1$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \geq 1.$$

Mai general, dacă funcția are perioada principală $T = 2\ell$, atunci coeficienții se calculează cu:

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx$$
$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 1$$
$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \geq 1.$$

De asemenea, scurtături de calcul ne mai ajută să concluzionăm că:

- Dacă f este impară, atunci toți coeficienții $a_n = 0$;
- Dacă f este pară, atunci toți coeficienții $b_n = 0$.

Amintim, de asemenea, din liceu, că:

- Dacă f este o funcție pară, atunci $\int_{-a}^{a} f(x) dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx$;
- Dacă f este o funcție impară, atunci $\int_{-a}^{a} f(x) dx = 0$.

Problema convergenței seriei Fourier este rezolvată de rezultatele de mai jos.

Teoremă 9.1 (G. L. Dirichlet)**:** *Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție periodică (de perioadă $T = 2\pi$), mărginită, cu un număr finit de discontinuități de speța întîi și cu derivate laterale în orice punct.*

Atunci seria Fourier asociată lui f converge punctual în orice $x \in \mathbb{R}$ la

$$\frac{1}{2} \left[f(x+0) + f(x-0) \right].$$

În particular, dacă f este continuă, atunci suma seriei Fourier este chiar funcția $f(x)$ și avem:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \left[a_n \cos nx + b_n \sin nx \right], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Convergența uniformă se obține dacă f este de clasă $\mathcal{C}^1$ (măcar pe porțiuni) pe domeniul de definiție.

În exerciții, mai este de folos și **identitatea lui Parseval**:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n\geq 1} |a_n|^2 + |b_n|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Exemplu: Fie funcția $f(x) = |x|$, cu $x \in [-\pi, \pi]$.

(a) Calculați coeficienții Fourier și seria Fourier a lui f, prelungind-o la $\mathbb{R}$.

(b) Calculați suma seriei $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$.

Soluție: Prelungim funcția la $\mathbb{R}$ prin „repetarea" acesteia pe toată axa reală. Apoi, calculăm coeficienții, pe rînd:

- $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \pi$;
- $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1)$;
- $b_n = 0, \forall n \geq 0$, deoarece f este impară.

Așadar, seria Fourier (care este convergentă, deoarece f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porțiuni) este:

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] \cos nx.$$

Remarcăm, în plus, că pentru n par, seria este nulă.
În plus, pentru $n = 0$, se obține exact suma seriei cerute, anume:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

9.1 Exerciții

Găsiți dezvoltarea în serie Fourier pentru funcțiile:

(1) $f(x) = x, x \in (-\pi, \pi)$.

(2) $f(x) = x^2, x \in (-\pi, \pi]$. Calculați apoi suma $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

(3) $f(x) = e^{ax}, x \in (-\pi, \pi]$, cu $a \in \mathbb{R}$. Calculați apoi suma $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 + a^2}$.

(4) $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}, x \in [0, 2\pi)$.

(5) $f(x) = \pi^2 - x^2, x \in (-\pi, \pi)$. Calculați apoi suma $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$.

(6) $f(x) = |\sin x|, x \in (-\pi, \pi]$.

(7) $f(x) = |\cos x|, x \in (-\pi, \pi)$.

SEMINAR 10

RECAPITULARE EXAMEN

MODEL 1

1. Folosind eventual formula Green-Riemann, calculați $\int_\gamma 3xy^2dx + 2x^2ydy$, unde γ este triunghiul ΔABC, cu $A(1, 1), B(3, 3), C(3, 1)$. Reprezentare grafică.

2. Calculați aria suprafeței $\Sigma : 2y = 3x^2 + 3z^2, y \leq 2$. Reprezentare grafică.

3. Calculați fluxul cîmpului vectorial $\vec{V} = 3x\vec{i} + (x^2 + z^2)\vec{j} - 2z\vec{k}$, prin suprafața exterioară a emisferei $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \leq 0$, orientată cu normala spre exterior. Reprezentare grafică.

4. Calculați circulația cîmpului vectorial $\vec{V} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + z^2\vec{k}$ de-a lungul curbei de intersecție între suprafețele $\Sigma_1 : z = x^2 + y^2$ și $\Sigma_2 : z = 4$. Reprezentare grafică.

5. Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f(x) = x^3, x \in (-\pi, \pi)$.

MODEL 2

1. Folosind eventual formula Green-Riemann, calculați $\int_\gamma (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, unde $\gamma : x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0, y \geq 0$. Reprezentare grafică.

2. Calculați aria suprafeței $\Sigma : x^2 = 3y^2 + 3z^2, 0 \leq x \leq 2$. Reprezentare grafică.

3. Calculați fluxul cîmpului vectorial $\vec{V} = y^2\vec{i} + 2x^2\vec{j} + 3z^2\vec{k}$ prin suprafața exterioară a paraboloidului $\Sigma : z = 2x^2 + 2y^2, z \leq 2$, orientată cu normala spre exterior. Reprezentare grafică.

4. Calculați circulația cîmpului vectorial $\vec{V} = (x + y)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (y + z)\vec{k}$ de-a lungul curbei

de intersecție între suprafețele $\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ și $\Sigma_2 : y = 1$. Reprezentare grafică.

5. Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f(x) = |x^3|, x \in (-\pi, \pi)$.

MODEL 3

1. Folosind eventual formula Green-Riemann, calculați $\int_\gamma x^3 dx + (x^2 + y)dy$, unde $\gamma : 3x^2 + 2y^2 = 5$. Reprezentare grafică.

2. Calculați aria suprafeței $\Sigma : y^2 = 2x^2 + 2z^2, 0 \le y \le 3$. Reprezentare grafică.

3. Calculați fluxul cîmpului vectorial $\vec{V} = z^2\vec{i} + 2y^2\vec{j} + x^2\vec{k}$ prin suprafața exterioară a cilindrului $\Sigma : x^2 + y^2 = 4, z \in [1, 3]$, orientat cu normala spre exterior. Reprezentare grafică.

4. Calculați circulația cîmpului vectorial $\vec{V} = (x, 2y, y - z)$ de-a lungul curbei de intersecție între suprafețele $\Sigma_1 : z = 3x^2 + 3y^2, \Sigma_2 : z = 3$. Reprezentare grafică.

5. Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f(x) = 1 - x, x \in (0, 1)$.

INDEX