Consultație
Extreme și integrale

1. Să se determine maximul și minimul funcției:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1$$

pe mulțimea $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Indicații:

- mulțimea K este compactă (un disc), funcția este continuă, deci este mărginită și își atinge marginile;
- studiind pe interiorul discului ($x^2 + y^2 < 1$), nu avem soluții;
- pe frontieră, avem legătura $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Folosind metoda multiplicatorilor lui Lagrange, găsim punctele:

$$(x,y) \in \left\{ \left(-\frac{3\sqrt{13}}{13}, -\frac{2\sqrt{13}}{13} \right), \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13} \right) \right\}$$

- pentru a găsi punctele de extrem, putem calcula f în fiecare din aceste valori.

2. Calculați:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$;

(b) $\displaystyle\int_0^1 \ln^p \left(\frac{1}{x}\right), p > -1$.

Indicații:

(a) Vom face schimbarea de variabilă $x^3 = y$ și folosim formula pentru funcția beta:

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy.$$

Rezultatul este: $\frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

(b) Vom face schimbare de variabilă $\ln x = y$ și folosim formula pentru funcția gamma:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0.$$

Rezultatul este $\Gamma(p+1)$.

3. Să se calculeze volumul mulțimii Ω mărginită de suprafețele de ecuații:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 & = 1 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 & = 0 \\ z \geqslant 0 \end{cases}$$

Indicații: Eliminînd z din ecuații, găsim elipsa $4x^2 + 2y^2 = 1$, care este curba de intersecție a suprafețelor. De asemenea, avem și $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Așadar, putem proiecta mulțimea pe planul XOY și găsim:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 2y^2 \leqslant 1\}.$$

Cu definiția, rezultă:

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\sqrt{2x^2+y^2}}^{\sqrt{1-2x^2-y^2}} dz.$$

Trecînd la coordonate polare, găsim rezultatul $\frac{\pi}{3}(\sqrt{2} - 1)$.

4. Să se calculeze circulația cîmpului de vectori $\vec{V}$ de-a lungul curbei Γ, unde:

$$\vec{V} = -(x^2 + y^2)\vec{i} - (x^2 - y^2)\vec{j},$$

iar curba $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ este:

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2, y < 0\}$$
$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x = 0, y \geqslant 0\}.$$

Indicații: Oricărui cîmp vectorial $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ i se asociază o 1-formă diferențial $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$. Atunci circulația cîmpului $\vec{V}$ de-a lungul curbei Γ devine integrala curbilinie de spețа a doua $\int_\Gamma \alpha = \int_\Gamma \vec{V} \cdot d\vec{r}$.

Avem nevoie să parametrizăm curbele. Vom folosi coordonate polare și găsim:

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x(t) &= 2\cos t \\ y(t) &= 2\sin t \end{cases}, t \in [\pi, 2\pi)$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x(t) &= 1 + \cos t \\ y(t) &= \sin t \end{cases}, t \in [0, \pi].$$

Acum putem aplica formula de calcul pentru integrala curbilinie de spețа a doua:

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b (P \circ \Gamma)(t) \cdot x'(t) + (Q \circ \Gamma)(t) \cdot y'(t) + (R \circ \Gamma)(t)z'(t)dt, \quad t \in [a, b].$$

5. Să se calculeze aria paraboloidului $z = x^2 + y^2, z \in [0, h], h \in \mathbb{R}$.

Indicații: Deoarece paraboloidul este dat în forma unei *parametrizări carteziene*, folosim formula corespunzătoare de la integrale de suprafață de spețа întîi. Așadar, avem $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ și aria se calculează folosind formula:

$$\int_\Sigma F(x, y, z)d\sigma = \int_D F(x, y, f(x, y)) \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy,$$

unde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, iar $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, iar $F = 1$ pentru calculul ariei.

6. Să se calculeze fluxul cîmpului de vectori $\vec{V}$ prin suprafața Σ pentru:

$$\vec{V} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k}, \quad \Sigma : z^2 = x^2 + y^2, z \in [0, 1].$$

Indicații: Folosind formula de definiție pentru flux, avem:

$$F_\Sigma(\vec{V}) = \int_\Sigma \vec{V} \cdot \vec{n}d\sigma = \iint_D (\vec{V} \circ \Sigma) \cdot \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\Big)dudv,$$

unde $\Phi = \Phi(u,v) : D \to \mathbb{R}^3$ este o parametrizare a suprafeței Σ.

Putem folosi parametrizarea carteziană $z = \sqrt{x^2+y^2}$ sau, echivalent:

$$\begin{cases} x(u,v) &= u \\ y(u,v) &= v \\ z(u,v) &= \sqrt{u^2+v^2} \end{cases}$$

Putem calcula acum componentele *versorului* normal, apoi produsul scalar și, în fine, integrala.

7. Să se calculeze integrala curbilinie $\int_\Gamma \alpha$, unde:

$$\alpha = y\,dx + x^2 dy,$$

iar Γ este pătratul cu vîrfurile $A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2)$.

Indicație: Se folosește formula Green-Riemann, unde compactul K este interiorul pătratului. Integrala devine:

$$\iint_K (1-2y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^2 (1-2y)\,dy = -4.$$

8. Fie forma diferențială $\alpha = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$.

Să se calculeze $\int_\Gamma \alpha$, unde Γ este cercul de centru 0 și rază $R > 0$.

Indicație: În acest caz **NU** se poate aplica formula Green-Riemann, deoarece α nu este definită în $(0,0)$, care se găsește în interiorul compactului delimitat de Γ (mai general, conform teoriei, α trebuie să fie de clasă $\mathcal{C}^1$ în interior).

Așadar, folosim definiția și parametrizăm cercul, cu coordonate polare, apoi folosim definiția integralei curbilinii de speța a doua.

9. Să se calculeze circulația cîmpului de vectori $\vec{V}$ pe curba Γ pentru:

$$\vec{V} = y^2\vec{i} + xy\vec{j}, \quad \Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1, y > 0\}.$$

Indicații: Pe lîngă metoda de la exercițiul 4, putem aplica și formula Green-Riemann. Obținem (cu K, compactul mărginit de Γ):

$$\int_\Gamma \vec{V}\cdot d\vec{r} = \iint_K -y\,dx\,dy = -\int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dx\,dy.$$

10. Să se calculeze fluxul cîmpului $\vec{V} = (x+z^2, y+z^2, -2z)$ prin suprafața

$$\Sigma : x^2+y^2+z^2 = 1, z \geqslant 0.$$

Indicații: Suprafața nu este închisă! Așadar, nu se poate aplica formula Gauss-Ostrogradski. Trebuie să o închidem cu cercul $C : x^2+y^2 = 1, z = 0$, formînd suprafața S. Rezultă $\Sigma \cup C = S$, deci $\mathcal{F}_\Sigma(\vec{V}) + \mathcal{F}_C(\vec{V}) = \mathcal{F}_S(\vec{V})$.

Pe S avem flux nul, deoarece $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, iar pe C se poate calcula cu definiția (vezi și exercițiul 6).

11. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, integrala curbilinie $\int_\Gamma \alpha$, pentru:

$$\alpha = (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz, \quad \Gamma : z = x^2 + y^2, z = 1.$$

Indicații: Definind $\Sigma = \{(x, y, z) \mid z = x^2 + y^2, z \leqslant 1\}$ avem că Γ este bordul lui Σ. Putem aplica formula lui Stokes și găsim succesiv:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \alpha &= \int_\Sigma -2(dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy) \\ &= -2 \iint_D (-2x - 2y + 1)dxdy,\end{aligned}$$

unde D este discul unitate. La primul pas am folosit formula lui Stokes, iar la al doilea, formula de calcul pentru integrala de suprafață de speța a doua.

Problema se finalizează trecînd la coordonate polare.