

---

---

## SEMINAR 6

---

### RECAPITULARE PARȚIAL

#### 6.1 Model 1

1. Să se studieze natura seriilor:

(a)  $\sum \frac{2^n \cdot n!}{n^n};$

(b)  $\sum (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$

2. Studiați convergența uniformă a șirului de funcții:

$$f_n : [3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{n}{x(x^2 + n)}, n \geq 1.$$

3. Calculați, cu o eroare de maxim  $10^{-2}$  integrala:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

4. Să se dezvolte în serie Taylor în jurul lui  $x_0 = 0$  funcția:

$$f(x) = \ln(2 + 3x).$$

Găsiți domeniul de convergență al dezvoltării.

5.

- (a) Să se aproximeze, folosind polinomul Taylor de gradul 2 în jurul originii, funcția  $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ ;
- (b) Să se calculeze, folosind aproximația de mai sus,  $\sqrt[3]{28}$ .
- (c) Estimați eroarea aproximației de mai sus.

(\*) Verificați dacă funcția  $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$  este armonică.

## 6.2 Model 2

1. Studiați convergența seriilor:

$$\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n^4 + 2n + 1} - n^2), \quad \sum_{n \geq 1} \frac{a^n n!}{n^n}, a > 0.$$

2. Studiați convergența uniformă a șirului de funcții:

$$f_n : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{1 + nx} - \sqrt{nx}, n \geq 1.$$

3. Găsiți domeniul de convergență pentru seria de puteri:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n + 1} x^{3n+1}.$$

Calculați suma seriei numerice  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n + 1}$  folosind această serie de puteri.

4. Să se calculeze cu o eroare mai mică decât  $10^{-2}$  integrala:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} dx.$$

5. Scrieți polinomul Taylor de gradul 3 pentru funcția  $f(x) = e^x$  și, folosindu-l, aproximați  $e^{\sqrt{2}}$ . Estimați eroarea aproximației.

(\*) Fie funcția  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Calculați  $\Delta f$ .

## 6.3 Model 3

1. Studiați convergența seriilor:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n}{n^2}, \quad \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

2. Studiați convergența punctuală și uniformă a șirului de funcții:

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n - x^{n+1}.$$

3. Determinați mulțimea de convergență și suma seriei:

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

4. Calculați, cu o eroare de maxim  $10^{-3}$  integrala:

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

5. Aproximați, folosind polinomul Taylor de gradul 3, funcția  $f(x) = \arctan 2x$  și calculați, folosind această aproximație,  $\arctan \frac{1}{2}$ . Estimați eroarea.

(\*) Calculați laplacianul funcției  $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$  în punctul  $A(1, 2, 1)$ .