Seminar 9
Polinom Taylor. Serii Taylor

1 Formula lui Taylor

Orice funcție cu anumite proprietăți poate fi aproximată cu un polinom. Rezultatul formal este următorul.

Definiţie 1.1: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă $C^m(I)$. Pentru orice $a \in I$, definim *polinomul Taylor* de gradul $n \leqslant m$ asociat funcției f în punctul a prin:

$$T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Restul (eroarea de aproximare) este definit prin:

$$R_{n,f,a} = f(x) - T_{n,f,a}(x).$$

Primele polinoame (de gradul întîi și al doilea) se numesc, respectiv, *aproximarea liniară* și *pătratică* a lui f, în jurul lui a.

Acest polinom se regăsește și în *formula lui Taylor*, care ne arată legătura lui strînsă cu orice funcție.

Teoremă 1.1 (Formula lui Taylor cu restul Lagrange)**:** *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă $C^{n+1}(I)$ și $a \in I$. Atunci, pentru orice $x \in I$, există $\xi \in (a, x)$ sau (x, a) astfel încît:*

$$f(x) = T_{n,f,a}(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Așadar, din această teoremă știm mai precis eroarea aproximării unei funcții cu polinomul Taylor asociat.

Următoarele sînt consecințe ale teoremei:

(a) Restul poate fi scris sub *forma Peano*: există o funcție $\omega : I \to \mathbb{R}$, cu $\lim\limits_{x\to a} \omega(x) = \omega(a) = 0$ și restul se scrie:
$$R_{n,f,a}(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}\omega(x).$$

(b) Restul poate fi scris și sub *formă integrală*:
$$R_{n,f,a}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt;$$

(c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{R_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$

Aceste noțiuni pot fi mai departe utilizate pentru a studia *seria Taylor* asociată unei funcții.

Definiţie 1.2: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis și fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă $C^\infty(I)$. Pentru orice $x_0 \in I$, se definește *seria Taylor* asociată funcției f în punctul x_0 seria de puteri:

$$T = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Dacă $x_0 = 0$, seria se mai numește *Maclaurin*.

Importanța seriilor Taylor este dată de rezultatul următor:

Teoremă 1.2: *Fie* $a < b$ *și fie* $f \in C^{\infty}([a, b])$ *astfel încît să existe* $M > 0$ *cu proprietatea că* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b], |f^{(n)}(x)| \leqslant M$.

Atunci pentru orice $x_0 \in (a, b)$, *seria Taylor a lui* f *în jurul lui* x_0 *este uniform convergentă pe* $[a, b]$ *și suma ei este funcția* f. *Adică avem:*

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \forall x \in [a, b].$$

2 Exerciții

1. Să se dezvolte în serie Maclaurin funcțiile, indicînd și domeniul de convergență:

(a) $f(x) = (1 + x)^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x) = \frac{1}{1+x}$;

(c) $f(x) = \sqrt{1 + x}$;

(d) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$;

(e) $f(x) = \sin^2 x$;

(f) $f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$;

(g) $f(x) = \arcsin x$.

2. Să se dezvolte în jurul punctului $a \in \mathbb{R}$ funcțiile:

(a) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}, a = 1$;

(b) $f : \mathbb{R} - \{-2, -1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}, a = -4$;

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos^2 x, a = \frac{\pi}{4}$.

3. Să se determine aproximările liniare și pătratice ale următoarelor funcții în jurul punctelor indicate:

(a) $f(x) = x \ln x$ în jurul punctului $a = 1$;

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x + 1} \sin x$, în jurul punctului $a = 0$.

4. Să se arate că seria numerică $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n + 1}$ este convergentă și să se afle suma ei cu ajutorul seriilor de puteri.

Indicație: Considerăm seria $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n + 1}$ și luăm $x = 1$. Derivăm termen cu termen și obținem seria pentru $\frac{1}{1+x^3}$.

5. Să se afle suma seriilor:

(a) $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(b) $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$;

(c) $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{(n+1)^2}{n!}$;

(d) $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{n^2(3^n-2^n)}{6^n}$;

(e) $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$;

(f) $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$.

Indicații:

(a) Se folosește seria pentru $\arctan x$, derivată termen cu termen;

(b) Folosim seria pentru $e^x + xe^x$, din care o obținem pe cea pentru $(x+x^2)e^x$, pe care o derivăm termen cu termen. Pentru $x=1$, avem seria cerută.

(c) Se calculează seria $\sum_{n\geqslant 1} n^2x^n$, obținută din seria pentru x^n;

(d) Se folosește seria pentru $\arctan x$.

(e)

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \lim_{x\to 1}\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1} = \lim_{x\to 1}\int_0^x \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^{3n}\,dx.$$

6. Să se calculeze $\sqrt[4]{10004}$ cu 4 zecimale exacte.
Indicație: Se folosește dezvoltarea binomială:

$$\sqrt[4]{10004} = 10\sqrt[4]{1+\frac{4}{10000}}.$$

7. Să se calculeze cu o eroare mai mică decît 10^{-3} integralele:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{\arctan x}{x}dx$;

(b) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$;

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-\cos x^2}{x^2}dx$.