1 Exerciţii rezolvate

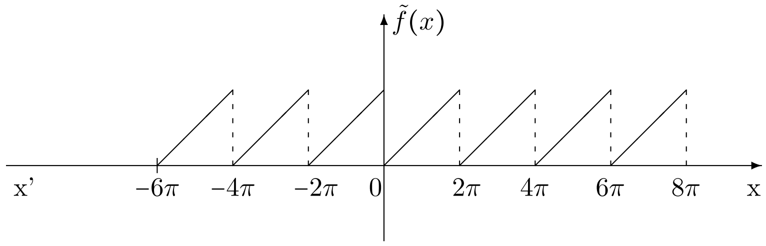
1. Să se găsească seria Fourier a funcţiei

$$f(x) = x,\ \ 0 \le x \le 2\pi,$$

periodică, de perioadă 2π.

Soluţie.

Prelungind funcţia $f(x)$ prin periodicitate, construim funcţia $\tilde{f}(x)$, definită pe $\mathbb{R}$ minus punctele $x_n = 2n\pi$, $(n \in \mathbb{Z})$, care sunt discontinuităţi de speţa întâia pentru această funcţie. Graficul său, pentru un număr finit de perioade, este următorul:



Avem: $\tilde{f}(2k\pi - 0) = 2\pi$, $\tilde{f}(2k\pi + 0) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Calculăm coeficienţii Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx dx\right] = 0,\ \ n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx dx\right] = -\frac{2}{n},\ \ n \in \mathbb{N}$$

Avem,

$$f(x) \to \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \begin{cases}\tilde{f}(x) & \text{pentru } x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{2k\pi\}, k \in \mathbb{Z}\\ \pi & \text{pentru } x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{cases},$$

adică seria Fourier este convergentă către ordonatele graficului funcţiei $\tilde{f}(x)$ în orice punct de continuitate a acestei funcţii şi are suma egală cu media aritmetică a limitelor laterale ale funcţiei $\tilde{f}(x)$, în toate punctele sale de discontinuitate. Pe intervalele $(2n\pi, 2(n+1)\pi)_{n\in\mathbb{Z}}$ convergenţa seriei este chiar uniformă către $\tilde{f}(x)$.

Din precedentele rezultă formula

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2},\ \ x \in (0, 2\pi), \tag{1}$$

care dă suma seriei trigonometrice $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ pentru orice valoare a lui x din intervalul $(0, 2\pi)$.

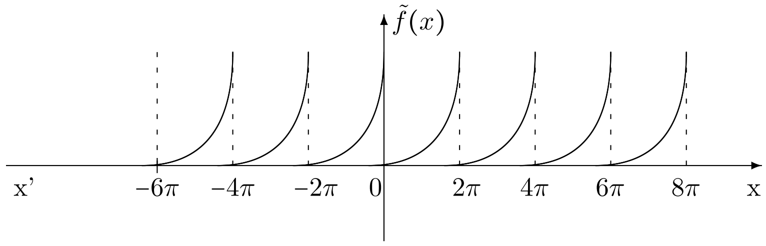
2. Să se găsească seria Fourier a funcţiei

$$f(x) = x^2,\ 0 \le x \le 2\pi,$$

funcţia fiind periodică de perioadă $T = 2\pi$, să se precizeze apoi suma seriei pentru $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie.

Graficul funcţiei $f(x)$ este următorul:



Avem: $\tilde{f}(2k\pi - 0) = 4\pi^2,\ \tilde{f}(2k\pi + 0) = 0,\ k \in \mathbb{Z}$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4}{n^2},\ n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = -\frac{4\pi}{n},\ n = 1, 2, \dots$$

Rezultă atunci:

$$f(x) \to \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{pentru } x \ne 2k\pi \\ 2\pi^2 & \text{pentru } x = 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

Ca o consecinţă a acestei dezvoltări, obţinem pentru $x = \pi$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

De asemenea, înlocuind (1) în (2) se obţine suma primei serii din dezvoltarea de mai sus sub forma

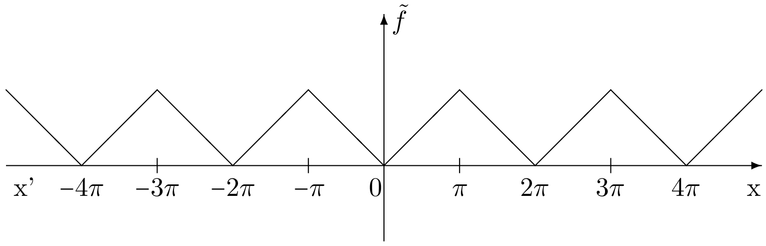
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12},\ 0 \le x \le 2\pi, \tag{3}$$

egalitatea fiind valabilă chiar pentru $x = 0$ şi $x = 2\pi$, deoarece prelungirea funcţiei din membrul drept al egalităţii (3) este continuă pentru $x \in \mathbb{R}$ (ea ia valori egale cu $\pi^2/6$ la capetele intervalului $[0, 2\pi]$).

3. Să se dezvolte în serie Fourier de cosinusuri funcţia $f(x) = |x|, 0 \le x \le \pi$, periodică, de perioadă 2π.

Soluţie.

Prelungim mai întâi funcţia prin paritate pe intervalul $[-\pi, 0]$ şi apoi prin periodicitate pe toată axa. Se obţine o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$, pe care o notăm cu $\tilde{f}$ şi al cărui grafic este următorul:



Avem:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^\pi = \begin{cases} 0 & \text{pentru } n \text{ par} \\ \dfrac{-4}{\pi(2n-1)^2} & \text{pentru } n \text{ impar}\end{cases}$$

Prin urmare,

$$\begin{cases} a_{2n} = 0, \ n = 1,2,\dots \\ a_{2n-1} = \dfrac{-4}{\pi(2n-1)^2}, \ n = 1,2,\dots \\ b_n = 0, \ n = 1,2,\dots\end{cases}$$

rezultă că,

$$|x| \to \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \tilde{f}(x), \ x \in \mathbb{R}.$$

Din această dezvoltare rezultă că putem scrie egalitatea:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \ -\pi \le x \le \pi. \tag{4}$$

Egalitatea (4) are loc şi în punctele $x = \pi$ şi $x = -\pi$, în virtutea continuităţii funcţiei. Seria obţinută este absolut şi uniform convergentă pentru $x \in \mathbb{R}$, concluzie ce rezultă atât din criteriul lui Dirichlet cât şi prin aplicarea criteriului lui Weierstrass, comparând seria dată cu seria Riemann $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$, care este convergentă.

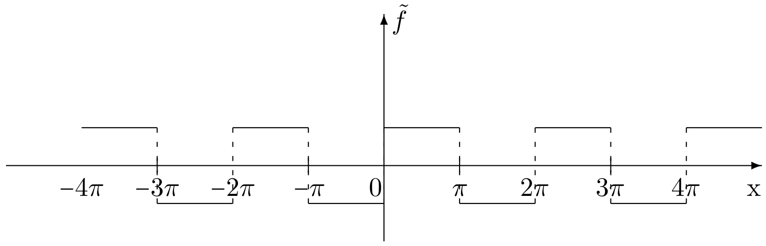
4. Să se dezvolte în serie Fourier de sinusuri, funcţia $f(x) = 1, \ 0 \le x \le \pi$, periodică, de perioadă 2π.

Soluţie.

Rezolvarea problemei constă în a prelungi mai întâi funcţia dată prin imparitate pe intervalul $[-\pi, 0]$, obţinând

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } -\pi \le x \le 0 \\ 1 & \text{pentru } 0 < x \le \pi\end{cases}$$

şi apoi prin periodicitate pe toată axa, obţinând în final funcţia $\tilde{f}(x)$, al cărei grafic are următorul aspect:



După această operaţie, calculăm coeficienţii corespunzători funcţiei impare date:

$$a_n = 0,\ (n = 0, 1, 2, \dots),$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 1 \cdot \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi}\cos nx|_0^\pi = \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right],$$

de unde rezultă,

$$b_{2n} = 0,\ (n = 0, 1, 2, \dots),$$
$$b_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)},\ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Rezultă că avem

$$f(x) \to \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \begin{cases}\tilde{f}(x) & \text{pentru } x \neq k\pi \\ 0 & \text{pentru } x = k\pi\end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Această serie este chiar uniform convergentă pe toate subintervalele aparţinând intervalelor $(n\pi, (n+1)\pi),\ n \in \mathbb{Z}$.

Din dezvoltarea precedentă mai rezultă egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{\pi}{4},\ 0 < x < \pi.$$

Acest rezultat este interesant prin faptul că suma seriei este constantă, cu toate că seria este o serie de funcţii.

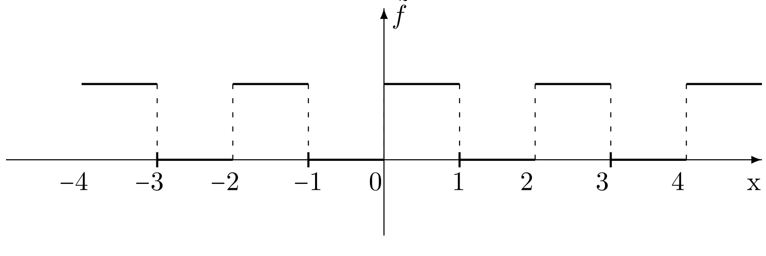
5. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia

$$f(x) = \begin{cases}1 & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{dacă } -1 < x < 0\end{cases},$$

a cărei perioadă este $T = 2$.

Soluţie.

Graficul funcţiei prelungite este de forma prezentată în figura alăturată



Acum calculăm coeficienţii Fourier corespunzători pentru $l = 1$ şi ţinând seama că $f(x) = 0$ pe intervalul $[-1, 0]$:

$$a_0 = \int_0^1 dx = 1;$$

$$a_n = \int_0^1 \cos n\pi x dx = \frac{1}{n\pi} \sin nx \Big|_0^1 = 0, \ (n = 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \int_0^1 \sin n\pi x dx = -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^1 = \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

de unde rezultă

$$b_{2n} = 0, \ b_{2n-1} = \frac{2}{\pi(2n-1)}, \ (n = 1, 2, \dots).$$

Prin urmare,

$$f(x) \to \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1} = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{pentru } x \neq k \\ \frac{1}{2} & \text{pentru } x = k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

De aici mai rezultă egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1} = \frac{\pi}{4}, \ 0 < x < 1,$$

din care pot fi obţinute pentru valori particulare ale lui x sumele unor serii alternate.

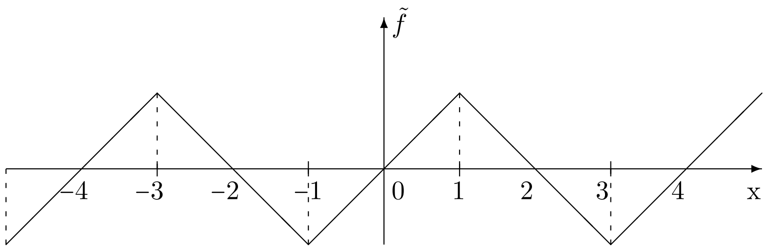
6. Să se dezvolte în serie de sinusuri funcţia periodică

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{pentru } 1 < x \leq 2 \end{cases},$$

perioada sa fiind $T = 2l = 4, \ (l = 2)$.

Soluţie.

Prelungind prin imparitate funcţia $f(x)$ pe intervalul $[-2, 0]$ şi apoi prin periodicitate pe toată axa, obţinem funcţia continuă $f(x)$, al cărei grafic are următorul aspect:



Suma seriei Fourier corespunzătoare va coincide cu $\tilde{f}(x)$ pe $\mathbb{R}$, seria fiind absolut şi uniform convergentă (după cum se va putea constata aplicându-i criteriul lui Weierstrass).

Funcţia $f(x)$ fiind impară, rezultă $a_n = 0, (n = 0, 1, 2, \dots)$, iar

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{s}dx = \int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{s}dx = \\ &= \int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{2},\ (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Din ultima expresie rezultă

$$b_{2n} = 0,\ (n \in \mathbb{N});\ b_{2n-1} = \frac{8(-1)^{n-1}}{\pi^2(2n-1)^2},\ (n \in \mathbb{N}).$$

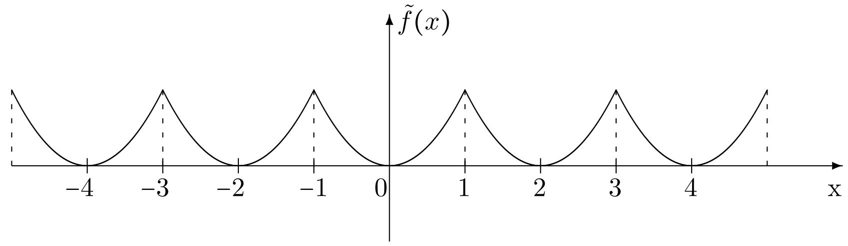
Drept consecinţă, putem scrie

$$\tilde{f}(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2},\ x \in \mathbb{R}.$$

7. Să se dezvolte în serie de cosinusuri funcţia periodică de perioadă $T = 2l = 2,\ f(x) = x^2,\ x \in [0, 1]$.

Soluţie.

Se prelungeşte mai întâi funcţia $f(x)$ prin paritate pe intervalul $[-1, 0]$ şi apoi prin periodicitate pe toată axa, obţinându-se funcţia $\tilde{f}(x)$, continuă pe $\mathbb{R}$, al cărei grafic îl prezentăm în continuare:



Funcţia dată fiind pară, avem $b_n = 0,\ (n \in \mathbb{N})$.

Avem încă

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{l}\int_0^l x^2 dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}; \\ a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l x^2\cos\frac{n\pi x}{s}dx = 2\int_0^1 x^2\cos n\pi x dx = \frac{4\cdot(-1)^n}{n^2\pi^2}\ (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Urmează atunci, în virtutea continuităţii funcţiei $\tilde{f}(x)$ că avem

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos n\pi x}{n^2},\ x \in \mathbb{R}$$

Mai rezultă că putem scrie încă egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos n\pi x}{n^2} = \frac{\pi^2(3x^2-1)}{12},\ x \in [-1, 1] \tag{5}$$

Luând în (5) pe $x = 1$, obţinem suma seriei Riemann

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

De asemenea, pentru $x = 0$, din (5) obţinem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Din exemplele considerate se poate constata că din dezvoltări Fourier corespunzătoare, se pot obţine sumele unor serii numerice, pentru care, de cele mai multe ori nu putem preciza decât cel mult natura.

2 Temă

1. Să se dezvolte în serie Fourier trigonometrică pe intervalul $[-l, l]$, $l > 0$ funcţia

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-l, 0) \\ x, & x \in [0, l] \end{cases}$$

2. Să se dezvolte în serie Fourier trigonometrică numai de sinusuri pe intervalul $[0, \pi]$ funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

3. Să se dezvolte în serie Fourier trigonometrică numai de cosinusuri pe intervalul $[0, \pi]$ funcţia

$$f(x) = \pi - 2x$$