Seminar 4 — Supliment
Densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$

1 Principiul lui Arhimede

Vom aborda problema densității lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$ pas cu pas:

Lemă 1.1: *Fie $S \subseteq \mathbb{Z}$ o submulțime nevidă. Presupunem că S este mărginită superior. Atunci S are un cel mai mare element.*

Demonstrație. Deoarece S este nevidă și mărginită superior, rezultă că există $w = \sup S$. Arătăm că $w \in S$.

Dacă o mulțime conține supremumul, acela este și cel mai mare element al său, evident. Ne vom baza pe această observație pentru a demonstra. Presupunem că $w \notin S$. Deoarece $w - 1 < 2$, rezultă că există $m \in S$, cu $w - 1 < m \leqslant w$. Cum $w \notin S$, inegalitățile pot fi ambele luate ca stricte.

Continuăm, putînd găsi $n \in S$, cu $m < n < w$. Deci:

$$w - 1 < m < n < w.$$

Dar, din $n < w$, avem $-w < -n$, pe care o putem aduna cu cea de mai sus și obținem $-1 < m - n$. Deoarece $m < n$, avem $n - m > 0$, deci $0 < n - m < 1$. Cum $m, n \in S$, sînt numere întregi, deci $n - m \in \mathbb{Z}$, contradicție.

Concluzia este că $w \in S$. □

Observaţie 1.1: De remarcat este faptul că acest argument nu poate funcționa pentru o mulțime continuă. În demonstrație, am folosit în mod esențial faptul că orice număr întreg are un predecesor și un succesor, lucru care nu este adevărat pentru $\mathbb{R}$, de exemplu.

Similar se demonstrează și:

Lemă 1.2: *Fie $S \subseteq \mathbb{Z}$ și presupunem $S \neq \emptyset$ și S mărginită inferior. Atunci S are un cel mai mic element.*

Din aceste rezultate, avem:

Teoremă 1.1: *$\mathbb{Z}$ este nemărginită și superior, și inferior.*

Demonstrație. Rezultatul reiese imediat din cele două leme de mai sus, deoarece $\mathbb{Z}$ nu are nici un cel mai mare element, nici un cel mai mic element. □

Teoremă 1.2 (Principiul lui Arhimede)**:** *Fie $x \in \mathbb{R}$ și $x > 0$. Atunci există un întreg pozitiv n, astfel încît $\frac{1}{n} < x$.*

Demonstrație. Fie x ca în teoremă. Atunci $\frac{1}{x}$ nu poate fi o margine superioară pentru $\mathbb{Z}$, deoarece $\mathbb{Z}$ nu este mărginită superior. Așadar, putem găsi $n \in \mathbb{Z}$, chiar $n > 0$, cu $\frac{1}{x} < n$.

Rezultă $\frac{1}{n} < x$. □

Această teoremă ne arată că, alegînd n suficient de mare, putem face $\frac{1}{n}$ cît de aproape de 0 dorim.

2 Densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$

Definiţie 2.1: O submulțime $S \subseteq \mathbb{R}$ se numește *densă în* $\mathbb{R}$ dacă între oricare două numere reale există un element al lui S.

Echivalent, $\forall a < b \in \mathbb{R}, S \cap (a, b) \neq \emptyset$.

Rezultatul principal este următorul:

Teoremă 2.1: $\mathbb{Q}$ *este densă în* $\mathbb{R}$. *Cu alte cuvinte, între oricare două numere reale există un număr rațional.*

Demonstraţie. Fie $a < b$ două numere reale. Atunci $b - a > 0$, iar din principiul lui Arhimede, putem alege $n \in \mathbb{Z}$, astfel încît:

$$0 < \frac{1}{n} < b - a \Leftrightarrow a < a + \frac{1}{b} < b.$$

Demonstrația se încheie dacă arătăm că există $m \in \mathbb{Z}$, cu $a < \frac{m}{n} < b$.

Definim:

$$S = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{n} > a\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > na, n > 0\}.$$

Această mulțime este mărginită inferior de na și este nevidă, deoarece $\mathbb{Z}$ nu este mărginită superior. Așadar, S are un cel mai mic element, m. Arătăm că m este întregul căutat.

Cum $\frac{m}{n} > a$, dar $\frac{m-1}{n} \leqslant a$, putem scrie:

$$\frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} \Rightarrow a < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n}.$$

Totodată, avem și $a < \frac{m}{n} \leqslant a + \frac{1}{n} < b$, ceea ce încheie demonstrația. □

3 Mulțimi complete

Definiţie 3.1: O submulțime $S \subseteq \mathbb{R}$ se numește *completă* dacă satisface proprietatea supremumului (implicit, și pe cea a infimumului).

Cu alte cuvinte, S este completă dacă orice submulțime nevidă și mărginită a lui S are și un supremum, și un infimum *în* S.

De exemplu, $[0, 1]$ este completă, $(0, 1)$ nu este completă, iar $\mathbb{R}$ este completă.

Propoziţie 3.1: $\mathbb{Q}$ *nu este completă.*

Demonstraţie. Fie $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < \sqrt{2}\} \subseteq \mathbb{Q}$.

Arătăm că $\mathbb{Q}$ nu este completă, deoarece S nu satisface proprietatea supremumului.

Cum $\sqrt{2}$ este o margine superioară pentru S, avem $\sup S \leqslant \sqrt{2}$. Presupunem inegalitatea strictă. Din densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$, găsim $q \in \mathbb{Q}$ cu $\sup S < q < \sqrt{2}$. Atunci $q \in S$ și rezultă $q \leqslant \sup S$, iar nu $\sup S < q < \sqrt{2}$.

Așadar, $\sup S = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, iar demonstrația este încheiată. □