Seminar 10
Transformata Fourier

Integrala Fourier

Seriile Fourier sînt utile pentru dezvoltarea unor funcții periodice (sau convertibile în unele periodice). Însă dacă funcțiile sînt arbitrare, se folosește o metodă care extinde pe cea a seriilor Fourier, anume integralele Fourier.

Amintim că o funcție periodică $f_L(x)$, de perioadă $2L$, poate fi dezvoltată în serie Fourier cu formula:

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{n \geqslant 1} (a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x), \quad w_n = \frac{n\pi}{L}.$$

În această serie punem $L \to \infty$ și, după impunerea unor condiții de convergență, ajungem la *integrala Fourier* a funcției f, anume:

$$f(x) = \int_0^\infty A(w) \cos wx + B(w) \sin wx dw,$$

unde funcțiile A și B sînt date de:

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \cos wv dv, \quad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \sin wv dv.$$

Ca în cazul seriilor Fourier, dacă f este o funcție pară, atunci $B(w) = 0$, iar integrala Fourier devine o integrală de cosinusuri:

$$f(x) = \int_0^\infty A(w) \cos wx dw, \text{ unde } A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(v) \cos wv dv.$$

Similar, pentru f funcție impară, avem $A(w) = 0$, iar integrala Fourier devine o integrală de sinusuri:

$$f(x) = \int_0^\infty B(w) \sin wx dw, \text{ unde } B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(v) \sin wv dv.$$

Transformata Fourier

Ideea de bază a unei transformări Fourier este următoarea. Dacă se dă o funcție periodică (sau convertită la una periodică printr-un artificiu de repetiție, practic), ei i se asociază *seria Fourier*. Aceasta o aproximează cu o serie de sinusuri și cosinusuri, funcțiile periodice cel mai des întîlnite. Practic, are loc o superpoziție de termeni cu sinusuri și cosinusuri, un fel de interferență a undelor electromagnetice. La pasul următor, *transformata Fourier* preia minimele și maximele acestor „interferențe“, iar rezultatul este un semnal (aproape) discret („digitalizat“), care reprezintă valorile cele mai importante din semnal.[1]

[1] O explicație animată este dată aici.

Rescriem formula integralei Fourier, înlocuind funcțiile A și B:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(v)\cdot\big(\cos wv \cos wx + \sin wv \sin wx\big)\,dv dw.$$

Acum putem folosi formule trigonometrice uzuale și observăm că putem rescrie:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Big(\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(wx - wv)\,dv\Big)dw.$$

Cum funcția cos este pară, integrala de la 0 la ∞ este jumătate din integrala pe tot $\mathbb{R}$, deci putem rescrie în forma:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \Big(\int_{-\infty}^\infty f(v)\cdot\cos(wx - wv)\,dv\Big)dw.$$

Observaţie 1: Să remarcăm că, dacă în integrala de mai sus aveam funcția sin în loc de cos, integrala ar fi fost nulă, din imparitatea funcției sin.

Conform observației de mai sus, putem adăuga un termen similar cu sin, fără a schimba valoarea integralei. Acest lucru este util pentru a trece pe domeniu complex, unde putem porni de la formula lui Euler de scriere polară a unui număr complex. Așadar, avem:

$$f(v)\cos(wx - wv) + i f(v)\sin(wx - wv) = f(v)e^{i(wx-wv)}.$$

Trecînd la integrală, obținem *integrala Fourier complexă:*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(v)e^{iw(x-v)}\,dv dw. \tag{1}$$

Dacă descompunem funcția exponențială într-un produs și scriem ca produs de integrale, obținem:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(v)e^{-iwv}dv\Big]e^{iwx}dw.$$

Integrala din interior este exact **transformata Fourier** a lui f:

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-iwx}dx. \tag{2}$$

Atunci, dacă înlocuim în formula de mai sus, obținem:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(w)e^{iwx}dw, \tag{3}$$

care este formula *transformării Fourier inverse*.

O altă notație pentru transformata Fourier este $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$ și pentru transformata inversă, $f = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})$.

Pentru orice funcție care satisface anumite proprietăți, transformata Fourier există:

Teoremă 1: *Dacă* f *este absolut integrabilă (adică integrala funcției* $|f(x)|$ *este convergentă) și continuă pe orice interval finit, atunci transformata Fourier dată de formula* (2) *există.*

Să vedem cîteva exemple.

Exemplu 1: Găsiți transformata Fourier a funcției:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Soluție: Folosind definiția, integrăm:

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-iwx}}{-iw}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{-iw\sqrt{2\pi}}(e^{-iw} - e^{iw}).$$

Folosind formula lui Euler pentru $e^{\pm iw}$, avem, în fine:

$$\widehat{f}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin w}{w}.$$

Un alt exemplu:

Exemplu 2: Găsiți transformata Fourier a funcției:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, a > 0.$$

Soluție: Din definiție, avem:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-iwx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(a+iw)x}}{-(a+iw)}\Big|_{x=0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+iw)} \end{aligned}$$

Proprietăți ale transformatei Fourier

Liniaritate: Transformata Fourier este o operație liniară:

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g),$$

pentru orice funcții f, g care admit transformată Fourier și $a, b \in \mathbb{R}$.

Transformata derivatei: Dacă f este o funcție continuă și $f(x) \to 0$ pentru $|x| \to \infty$, iar $f'(x)$ este absolut integrabilă, atunci:

$$\mathcal{F}(f'(x)) = iw\mathcal{F}(f).$$

Mai departe, pentru derivate superioare, obținem, de exemplu:

$$\mathcal{F}(f''(x)) = -w^2\mathcal{F}(f(x)).$$

Convoluție: Fie f, g două funcții. Se definește *produsul lor de convoluție* $f * g$ ca fiind funcția:

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)g(p)dp.$$

Comportarea transformatei Fourier față de produsul de convoluție este dată de:

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g).$$

Echivalent, acest rezultat se mai poate scrie prin inversare:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) \cdot \widehat{g}(w) e^{iwx} dw.$$

Exerciții

Calculați transformatele Fourier ale următoarelor funcții:

(a) $f(x) = \begin{cases} e^{2ix}, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1, & a < x < b \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} e^{kx}, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}, k > 0$

(d) $f(x) = \begin{cases} e^{x}, & -a < x < a \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

(e) $f(x) = e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$;

(f) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < a \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & -1 < x < 0 \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$

(h) $f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

(i) $f(x) = \begin{cases} x, & -1 < x < 1 \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$

Tabele de transformate Fourier

$f(x)$	$\widehat{f_c}(w) = \mathcal{F}_c(f)$
$\begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin aw}{w}$
$x^{a-1}, 0 < a < 1$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{w^a} \cos \frac{a\pi}{2}$
$e^{-ax}, a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2+w^2}$
$e^{-x^2/2}$	$e^{-w^2/2}$
$e^{-ax^2}, a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/(4a)}$
$x^n e^{-ax}, a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n!}{(a^2+w^2)^{n+1}} \mathrm{Re}(a + iw)^{n+1}$
$\begin{cases} \cos x, & 0 < x < a \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin a(1-w)}{1-w} + \frac{\sin a(1+w)}{1+w} \right]$
$\cos(ax^2), a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{w^2}{4a} - \frac{\pi}{4} \right)$
$\sin(ax^2), a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{w^2}{4a} + \frac{\pi}{4} \right)$
$\frac{\sin ax}{x}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 - u(w-a))$[2]
$\frac{e^{-x} \sin x}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \arctan \frac{2}{w^2}$

Figura 1: *Transformate Fourier cu cosinusuri (pentru funcții pare)*

[2] $u(t-a)$ este funcția Heaviside (eng. *unit step function*), definită prin:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$$

$f(x)$	$\widehat{f}_s(x) = \mathcal{F}_s(f)$
$\begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$	$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{1-\cos aw}{w}\right]$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{w}}$
$x^{-3/2}$	$2\sqrt{w}$
$x^{a-1}, 0 < a < 1$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma(a)}{w^a}\sin\frac{a\pi}{2}$
$e^{-ax}, a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{w}{a^2+w^2}$
$\frac{e^{-ax}}{x}, a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\arctan\frac{w}{a}$
$x^n e^{-ax}, a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{n!}{(a^2+w^2)^{n+1}}\operatorname{Im}(a+iw)^{n+1}$
$xe^{-x^2/2}$	$we^{-w^2/2}$
$xe^{-ax^2}, a > 0$	$\frac{w}{(2a)^{3/2}}e^{-w^2/(4a)}$
$\begin{cases} \sin x, & 0 < x < a \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin a(1-w)}{1-w} - \frac{\sin a(1+w)}{1+w}\right]$
$\frac{\cos ax}{x}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}u(w-a)$
$\arctan 2ax, a > 0$	$\sqrt{2\pi}\frac{\sin aw}{w}e^{-aw}$

Figura 2: *Transformate Fourier cu sinusuri (pentru funcții impare)*

$f(x)$	$\widehat{f}(w) = \mathcal{F}(f)$
$\begin{cases} 1, & -b < x < b \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin bw}{w}$
$\begin{cases} 1, & b < x < c \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$	$\frac{e^{-ibw} - e^{-icw}}{iw\sqrt{2\pi}}$
$\frac{1}{x^2+a^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a\|w\|}}{a}$
$\begin{cases} e^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}, a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} a + iw$
$\begin{cases} e^{ax}, & b < x < c \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$	$\frac{e^{(a-iw)c} - e^{(a-iw)b}}{\sqrt{2\pi}(a-iw)}$
$\begin{cases} e^{iax}, & -b < x < b \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin b(w-a)}{w-a}$
$\begin{cases} e^{iax}, & b < x < c \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ib(a-w)} - e^{ic(a-w)}}{a-w}$
$e^{-ax^2}, a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/(4a)}$
$\frac{\sin ax}{x}, a > 0$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \|w\| < a \\ 0, & \|w\| > a \end{cases}$

Figura 3: *Transformate Fourier generale (pentru funcții arbitrare)*