Matematică 3

Notițe de seminar

Adrian Manea
Curs: Luminița Costache

15 mai 2021

Cuprins

SEMINAR 1

NUMERE ȘI FUNCȚII COMPLEXE — RECAPITULARE

1.1 Numere complexe – Noțiuni de bază

Începem cu cîteva noțiuni esențiale și recapitulative privitoare la mulțimea numerelor complexe. Amintim definiția:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\},$$

precum și faptul că avem, în general, șirul de incluziuni:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Dat un număr complex $z = a + bi$, se numește *partea reală*, notată $\mathrm{Re}(z)$, numărul real a, iar *partea imaginară*, notată $\mathrm{Im}(z)$, numărul real b.

De asemenea, *conjugatul* numărului complex z de mai sus este $\overline{z} = z^* = a - bi$, iar *modulul* numărului complex z este $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Există mai multe forme de reprezentare a numerelor complexe:

- *forma algebrică*, dată mai sus, $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$;

- *forma trigonometrică*, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, unde $r = |z|$, iar $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ se numește *argumentul principal*;

- *forma polară*, $z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta)$, unde r și θ au înțelesul din forma trigonometrică;

- *forma geometrică*, în care $z = a + bi$ reprezintă *afixul* punctului din plan $A(a, b)$. Pentru acest caz, menționăm că $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ reprezintă lungimea vectorului de poziție al punctului A, iar θ reprezintă unghiul pe care îl face acest vector de poziție cu axa OX, măsurat în sens trigonometric.

Operațiile cu numere complexe se fac în modul uzual, ținînd seama de proprietatea $i^2 = -1$. Mai amintim *formula lui Moivre*, utilă în special atunci cînd numărul complex a fost scris sub formă trigonometrică. Fie, așadar, numerele complexe:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

Atunci înmulțirea acestora se face cu formula:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right),$$

formulă care se generalizează ușor în forma:

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \forall n.$$

Tot folosind numere complexe, putem reprezenta și curbe:

- *Cercul* centrat în punctul de afix z_0 și de rază R are ecuația:

$$|z - z_0| = r;$$

- *Elipsa* cu focarele în punctele de afixe z_0 și w_0, iar axa mare are lungimea d are ecuația:

$$|z - z_0| + |z - w_0| = d.$$

Amintim și *formele canonice* ale ecuațiilor acestor conice:

- *Cercul* centrat în (x_0, y_0) și de rază R are ecuația:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2;$$

- *Elipsa* de semiaxe a, b are ecuația:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tot din punct de vedere geometric, mai amintim și că *distanța* între două puncte $A(z)$ și $B(w)$ este $AB = |z - w|$.

1.2 Funcții complexe elementare

Cea mai simplă funcție complexă este *funcția exponențială*, definită prin:

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \exp z = e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

Se observă imediat că au loc proprietățile așteptate:

- $\exp(0) = 1$;
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2), \forall z_{1,2} \in \mathbb{C}$;
- $\exp(iy) = \cos y + i \sin y, \forall y \in \mathbb{R}$ (formula lui Euler).

Mai departe, putem calcula simplu *logaritmul complex*, dacă numărul complex a fost adus în forma polară. Fie, așadar, $z = re^{i\theta}$. Rezultă:

$$\ln z = \ln r + i\theta.$$

În general, cum argumentul unui număr complex nu este unic (θ de mai sus reprezintă *argumentul principal*, dar $\theta + 2k\pi$ este argumentul general), spunem că funcția logaritm este *multiformă*, deoarece valoarea ei generală este:

$$\text{Ln}z = \{\ln|z| + i(\text{Arg}z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

iar $\ln z$ se numește *valoarea principală* a logaritmului.

Funcția putere se definește acum simplu pornind de la formula:

$$a^b = \exp\left(b \ln a\right).$$

Rezultă:

$$z^m = \exp\left(m \ln z\right) = \exp\left(m(\ln|z| + i\text{Arg}z)\right),$$

folosind valoarea principală.

Similar se definește și puterea rațională, adică *funcția radical*:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln z\right).$$

Folosind funcțiile exponențiale și identitatea lui Euler, putem defini și *funcții trigonometrice complexe:*

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$
$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$$
$$\tan z = -i\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{\exp(iz) + \exp(-iz)}$$

Mai avem nevoie și de *funcțiile trigonometrice hiperbolice*:

$$\sinh z = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$$
$$\cosh z = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$$
$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

și au loc legăturile:

$$\sinh z = -i \sin(iz), \quad \cosh z = \cos(iz).$$

Funcțiile trigonometrice inverse se pot obține din rezolvarea unor ecuații trigonometrice[1]:

$$w = \mathrm{arcsin} z \Longrightarrow z = \sin w \Longrightarrow z = \frac{\exp(iw) - \exp(-iw)}{2i} \Longleftrightarrow \exp(2iw) - 2iz \exp(iw) - 1 = 0,$$

care se rezolvă (pentru w) ca o ecuație de gradul al doilea și se obține:

$$w = \mathrm{arcsin} z = -i \ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$$

și se procedează similar pentru arccos și arctan.

1.3 Funcții olomorfe

Fie o funcție complexă oarecare $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, cu $A \subseteq \mathbb{C}$. Pentru orice $z \in A \subseteq \mathbb{C}$, deoarece z are o parte reală și o parte imaginară, și imaginea sa prin f se poate separa. Deci, în general, orice funcție complexă f ca mai sus poate fi scrisă sub forma

$$f = P + iQ, \quad P, Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Rezultă că noțiunile de *limită, continuitate, derivabilitate* pot fi puse pe componente.

Definiție 1.1: O funcție complexă $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ se numește *olomorfă* dacă este derivabilă în orice punct din domeniul de definiție.

Nu intrăm în detalii, deoarece nu vom rezolva exerciții cu derivate complexe.

Vor fi foarte importante, însă, rezultatele:

Teoremă 1.1: *Funcție $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, f = P + iQ$ este olomorfă dacă $P, Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt diferențiabile, iar derivatele lor parțiale verifică* condițiile Cauchy-Riemann, *adică:*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

[1] Pentru corectitudine, ar trebui să notăm funcțiile trigonometrice cu inițială mare, Arcsin, Arccos etc. Dar vom folosi de fiecare dată doar valoarea principală, astfel că, prin abuz de notație, folosim scrierea din cazul real. Însă trebuie reținut că majoritatea funcțiilor complexe sînt *multiforme*, i.e. pot avea mai multe valori!

Observaţie 1.1: Pentru simplitate, vom mai nota derivatele parțiale cu indici, adică, de exemplu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \stackrel{\text{not.}}{=} f_x$$

și similar $f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}$ etc.

Corola 1.1: *Dacă funcția complexă $f = P + iQ$ este olomorfă, atunci P și Q sînt armonice, adică:*

$$\Delta P = P_{xx} + P_{yy} = \Delta Q = Q_{xx} + Q_{yy} = 0.$$

Atenție, însă, la formularea rezultatului: condiția de olomorfie este *necesară*, în niciun caz suficientă! Negarea corolarului de mai sus este:

Corola 1.2: *Dacă una dintre funcțiile P sau Q nu este armonică, atunci funcția $f = P + iQ$ nu poate fi olomorfă.*

1.4 Exerciții

1. Verificați dacă funcția de mai jos este olomorfă:

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2 + \exp(iz).$$

Indicație: Se separă partea reală și partea imaginară a funcției și se verifică condițiile Cauchy-Riemann și faptul că cele două componente sînt armonice.

2. Fie $P(x, y) = e^{3x} \cos 2y + y^2 - x^2$. Determinați funcția olomorfă $f = P + iQ$ astfel încît $f(0) = 1$.

Indicație: Verificăm dacă $\Delta P = 0$ (condiție necesară!). Apoi, prin integrarea condițiilor Cauchy-Riemann, se obține componenta Q. În final, $f(z) = e^{2z} - z^2 + ki, k \in \mathbb{C}$ și folosind condiția din enunț, obținem $k = 0$.

3. Rezolvați ecuațiile:

(a) $\exp w = -2i$;

(b) $z^3 + 2 - 2i = 0$;

(c) $\sin z = 2$.

4. Calculați:

(a) $\sin(1 + i)$;

(b) $\sinh(1 - i)$;

(c) $\ln i$;

(d) $\ln(1-i)$;

(e) $(1+i)^{20}$;

(f) $\sqrt[5]{1-i}$;

(g) $\arcsin(i\sqrt{3})$;

(h) $\arccos(i\sqrt{3})$;

(i) $\tan(1-i)$.

5. Verificați dacă funcțiile date sînt armonice și, în caz afirmativ, determinați funcția complexă $f = P + iQ$, pentru:

(a) $P(x, y) = x^2 - y^2 - 2y$, știind că $f(0) = 1$;

(b) $P(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, știind că $f(1) = 1$;

(c) $P(x, y) = (x\cos y - y\sin y)e^x$;

(d) $P(x, y) = xy + x + 2y$, știind că $f(2i) = -1 + 5i$;

(e) $P(x, y) = 4xy^3 - 4x^3y + x$, știind că $f(1+i) = 5 + 4i$;

(f) $P(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$;

(g) $P(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^2$;

(h) $Q(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

6. Determinați $k \in \mathbb{C}$ astfel încît funcția:

$$P(x, y) = x^3 - kxy^2 + 12xy - 12x$$

să fie armonică și determinați f olomorfă pentru care $P = \mathrm{Re}(f)$.

7. Scrieți sub formă trigonometrică și polară numerele complexe:

(a) $z = 3 - i$;

(b) $z = 3 + i$;

(c) $z = i$;

(d) $z = 1$;

(e) $z = 1 + 2i$;

(f) $z = 2 + i$.

8. Găsiți forma canonică și ecuația complexă pentru:

(a) Cercul centrat în $(0, 1)$ și cu raza 2;

(b) Cercul centrat în $(1, 0)$ și cu raza 1;

(c) Cercul centrat în $(1, 2)$ și cu raza 1;

(d) Elipsa cu focarele în $(-1, 0)$ și $(3, 0)$ și cu axa mare de lungime 6;

(e) Elipsa cu focarele în $(0, 1)$ și $(0, -2)$ și cu axa mare de lungime 5.

Reprezentați grafic fiecare dintre cazurile de mai sus.

9. Fie punctele $A(1 + 2i)$ și $B(-1)$, iar M, mijlocul segmentului $[AB]$. Calculați distanța de la punctul M la punctul N, de afix $-2 + 3i$. Reprezentare grafică.

SEMINAR 2

INTEGRALE COMPLEXE

2.1 Teorema lui Cauchy

În multe situații, putem calcula integralele complexe direct, într-o manieră asemănătoare cu integralele curbilinii. Un exemplu simplu:

$$I_1 = \int_{|z|=1} z|dz|.$$

Folosind forma polară, $z = e^{it}$, deoarece integrala se face pe $|z| = 1$, iar $t \in [0, 2\pi]$. Rezultă $dz = ie^{it}dt$, deci $|dz| = dt$. Atunci:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} e^{it}dt = \frac{1}{i}e^{it}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Un alt exemplu:

$$I_2 = \int_S z|dz|,$$

unde S este segmentul care unește pe 0 și i. Putem parametriza acest segment: $S : z = ti, t \in [0, 1]$, deci $dz = idt$ și din nou $|dz| = dt$. Rezultă:

$$I_2 = \int_0^1 tidt = \frac{i}{2}.$$

Dar în unele situații, putem calcula chiar mai ușor:

Teoremă 2.1 (Cauchy)**:** *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex și $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe D, cu $P = \mathrm{Re} f$ și $Q = \mathrm{Im} f$, funcții de clasă $\mathcal{C}^1(D)$.*

Fie $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ o curbă închisă și jordaniană (fără autointersecții) de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porțiuni, astfel încît $\operatorname{Int}\gamma$ *să verifice condițiile formulei Green-Riemann.*

Atunci $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Acesta este un caz simplu în care calculul se termină imediat cu rezultat nul.

În exerciții, vom folosi adesea următoarea:

Teoremă 2.2 (Formula integrală Cauchy)**:** *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu și $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe D. Fie $\overline{\Delta} \subseteq D$, unde Δ este un domeniu simplu conex, mărginit, cu frontiera γ, care este o curbă închisă, jordaniană, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porțiuni, orientată pozitiv.*

Atunci pentru orice $a \in \Delta$ fixat are loc:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

Principala aplicație a acestei teoreme este să ne ajute să calculăm integrale pe domenii în interiorul cărora funcția pe care o integrăm are probleme. Un exemplu:

$$\int_{|z-2i|=1} \frac{1}{z^2 + 4} dz.$$

Observăm că $z = 2i$ este un punct cu probleme pentru funcția considerată și aplicăm formula integrală Cauchy.

Putem rescrie integrala astfel, izolînd punctul cu probleme:

$$\int_{|z-2i|=1} \frac{1}{z^2 + 4} dz = \int_{|z-2i|=1} \frac{\frac{1}{z+2i}}{z - 2i} dz = \frac{f(z)}{z - 2i} dz,$$

unde am introdus exact funcția cu probleme, adică $f(z) = \dfrac{1}{z + 2i}$.

Aplicăm formula integrală Cauchy și obținem:

$$f(2i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-2i|=1} \frac{f(z)}{z - 2i} dz \Longrightarrow \int_{|z-2i|=1} \frac{f(z)}{z - 2i} dz = 2\pi i f(2i) = \frac{\pi}{2}.$$

Vor exista situații cînd punctul izolat nu poate fi eliminat atît de ușor (sau chiar deloc), cazuri în care vom aplica un rezultat fundamental, *teorema reziduurilor*.

Esențialmente, formula integrală Cauchy se aplică atunci cînd avem *un singur pol simplu*, aflat în interiorul domeniului de integrare. În afara teoremei reziduurilor, pe care o vom studia imediat, mai există un rezultat care ne permite să calculăm pentru cazul cînd avem un pol multiplu:

Teoremă 2.3 (Formula integrală Cauchy pentru derivate)**:** *În condițiile și ipoteza formulei integrale Cauchy, are loc și rezultatul:*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Această formulă permite calculul atunci cînd avem *un pol multiplu*. În cazul în care sînt mai mulți poli, se poate aplica descompunerea în fracții elementare sau teorema reziduurilor.

2.2 Exerciții

1. Calculați integrala $\int_\Gamma z^2 dz$, unde:

(a) $\Gamma = [-1, i] \cup [i, 1]$;

(b) $\Gamma = \{z(t) = 2 + it^2 \mid 0 \le t \le 1\}$;

(c) $\Gamma = \{z(t) = t + i\cos\frac{\pi t}{2} \mid -1 \le t \le 1\}$;

(d) $\Gamma = OA$, cu $O(0,0)$ și $A(2,1)$.

Indicații: Se parametrizează drumurile și se calculează ca în exemplele de mai sus.

2. Folosind teorema Cauchy sau formula integrală Cauchy, calculați:

(a) $\int_{|z-1|=3} z^4 dz$;

(b) $\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2 - 6z + 5} dz$;

(c) $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z(z-2)} dz$;

(d) $\int_\Gamma \frac{\exp(z^2)}{z^2 - 6z} dz$, unde $\Gamma : |z-2| = r, r \in \{1, 3, 5\}$;

(e) $\int_{|z|=1} \frac{\exp(3z)}{z^4} dz$;

(f) $\int_{|z-i|=1} \frac{1}{(z^2+1)^2} dz$;

(g) $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2(z-2)} dz$.

Indicații: Ideea de bază este să identificăm punctele cu probleme ale funcțiilor de integrat în interiorul domeniilor pe care integrăm, apoi să descompunem integrandul cu o funcție căreia i se poate aplica teorema Cauchy.

(a) funcția z^4 este olomorfă, deci integrala este nulă;

(b) avem $\frac{\cos z}{(z-1)(z-5)}$, dar singurul punct cu probleme din interiorul domeniului este $z_1 = 1$. Definim $f(z) = \frac{\cos z}{z-5}$, iar integrala devine $\int_{|z|=4} \frac{f(z)}{z-1} dz$, care se calculează cu formula Cauchy.

(c) pentru $r = 1$, funcția este olomorfă, deci integrala este nulă. Pentru $r = 3$, $z = 0$ este punct cu probleme, deci definim $f(z) = \dfrac{\exp(z^2)}{z-6}$.

3. Folosind formula integrală Cauchy pentru derivate, calculați:

(a) $I_1 = \displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z+2}{z^3(z-1)} dz$;

(b) $I_2 = \displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z+2}{z^3(z-1)} dz$.

Indicație: Pentru punctul (a), observăm că ambii poli ($z = 0$ și $z = 1$) se află în interiorul domeniului, astfel că, înainte de calcul, trebuie aplicată descompunerea în fracții simple.

Pentru punctul (b), singurul pol în interiorul domeniului este $z = 0$, care este pol triplu, deci se poate aplica direct formula.

2.3 Teorema reziduurilor

Similar cu orice funcție reală, și funcțiile complexe pot fi dezvoltate în serii de puteri. În cazul complex, seriile se numesc *serii Laurent* și pot conține și puteri negative.

Informal, punctele cu probleme care ne interesează se numesc *poli* sau *puncte singulare*. Ordinul unui pol $z = a$ este multiplicitatea algebrică a rădăcinii $z = a$ în dezvoltarea în serie Laurent a funcției f. În particular, avem *poli simpli, dubli* etc.

Definiţie 2.1: Fie $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcție complexă și dezvoltarea sa în serie Laurent în jurul unui punct $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

Se numește *reziduul* funcției f în punctul singular z_0 coeficientul a_{-1} din dezvoltarea de mai sus, notat $\mathrm{Rez}(f, z_0)$.

Următoarea teoremă ne dă metode de calcul al reziduurilor, în funcție de multiplicitatea lor:

Teoremă 2.4 (Calculul reziduurilor)**:** *(1)* $\mathrm{Rez}(f, a) = c_{-1}$*, unde* c_{-1} *este coeficientul lui* $\dfrac{1}{z-a}$ *în dezvoltarea în serie Laurent a funcției* f *în vecinătatea singularității* $z = a$*.*

(2) Dacă $z = a$ *este pol de ordinul* $p \geq 2$ *pentru* f*, atunci:*

$$\mathrm{Rez}(f, a) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to a} \Big[(z-a)^p f(z)\Big]^{(p-1)};$$

(3) Dacă $z = a$ *este pol simplu pentru* f*, atunci, particularizînd formula de mai sus, avem:*

$$\mathrm{Rez}(f, a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z);$$

(4) Dacă f se poate scrie ca un cît de funcții, $f = \frac{A}{B}$, olomorfe în jurul lui a și dacă $z = a$ este pol simplu pentru f, adică $B(a) = 0$, atunci:

$$\mathrm{Rez}(f, a) = \lim_{z \to a} \frac{A(z)}{B'(z)}.$$

Rezultatul esențial al acestei secțiuni ne arată că, dacă integrăm o funcție cu probleme, valoarea integralei este dată în mod esențial de reziduurile sale:

Teoremă 2.5 (Teorema reziduurilor): *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu și $f : D - \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pentru care α_i sînt poli.*

Fie $K \subseteq D$ un compact cu frontiera $\Gamma = \partial K$, o curbă de clasă $\mathcal{C}^1$, jordaniană, orientată pozitiv și care conține toate α_i în interior. Atunci:

$$\int_\Gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Rez}(f, \alpha_j).$$

De exemplu, să calculăm integrala:

$$I = \int_{|z|=r} \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} dz, r > 0, r \neq 1, 2.$$

Soluție: Dacă $0 < r < 1$, putem aplica teorema lui Cauchy (2.1) și găsim $I = 0$.

Dacă $1 < r < 2$, aplicăm formula integrală a lui Cauchy (2.2) și găsim:

$$\int_{|z|=r} \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} dz = \int_{|z|=r} \frac{\frac{e^z}{z-2}}{z-i} dz = \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z-i} dz,$$

unde $f(z) = \frac{e^z}{z-2}$. Rezultă:

$$\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z-i} dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{e^i}{i-2}.$$

Dacă $r > 2$, aplicăm teorema reziduurilor, cu i și 2 poli simpli. Avem:

$$\mathrm{Rez}(f, i) = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} = \frac{e^i}{i-2}$$
$$\mathrm{Rez}(f, 2) = \lim_{z \to 2} \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} = \frac{e^2}{2-i}.$$

Rezultă, din teorema reziduurilor:

$$\int_{|z|=r} \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} dz = 2\pi i \left(\frac{e^i}{i-2} + \frac{e^2}{2-i} \right).$$

2.4 Exerciții

1. Calculați reziduurile funcțiilor în punctele a indicate:

(a) $f(z) = \dfrac{\exp\left(z^2\right)}{z-1}, a = 1;$

(b) $f(z) = \dfrac{\exp\left(z^2\right)}{(z-1)^2}, a = 1;$

(c) $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2-2z}, a = 0;$

(d) $f(z) = \dfrac{1+e^z}{z^4}, a = 0;$

(e) $f(z) = \dfrac{\sin z}{4z^2}, a = 0;$

(f) $f(z) = \dfrac{z}{1-\cos z}, a = 0.$

Indicație: Verificăm multiplicitatea polului $z = a$ și aplicăm formula corespunzătoare din teorema 2.4.

2. Să se calculeze următoarele integrale:

(a) $I = \displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1};$

(b) $I = \displaystyle\int_{\gamma} \frac{dz}{z^4+1}, \gamma : x^2+y^2-2x = 0;$

(c) $I = \displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)} dz.$

Soluție: (a) Punctele $z = \pm 1$ sînt poli de ordinul 1 pentru funcția $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$. Ele sînt situate în interiorul discului pe care integrăm, cu $|z| = 2$, deci putem aplica teorema reziduurilor:

$$I = 2\pi i \cdot \Big(\operatorname{Rez}(f, z_1) + \operatorname{Rez}(f, z_2)\Big).$$

Calculăm separat reziduurile:

$$\operatorname{Rez}(f, z_1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}$$
$$\operatorname{Rez}(f, z_2) = \lim_{z\to -1}(z+1)\cdot\frac{1}{z^2-1} = -\frac{1}{2}.$$

Rezultă:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

(b) Curba γ este un cerc centrat în $(1, 0)$ și cu raza 1. Căutăm polii funcției $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ care se află în interiorul lui γ.

Avem succesiv:

$$\begin{aligned} z^4 + 1 = 0 \Longrightarrow z^4 &= -1 = \cos\pi + i\sin\pi \Longrightarrow \\ z &= \sqrt[4]{\cos\pi + i\sin\pi} \Longrightarrow \\ z_k &= \cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}, \, k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Doar punctele z_0, z_3 se află în interiorul discului delimitat de γ și calculăm reziduurile în aceste puncte.

Putem aplica formula din Teorema 2.4 (4) și avem:

$$\begin{aligned} \mathrm{Rez}(f, z_0) &= \left.\frac{A(z)}{B'(z)}\right|_{z_0} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z_0} = -\frac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}} \\ \mathrm{Rez}(f, z_3) &= \left.\frac{A(z)}{B'(z)}\right|_{z_3} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z_3} = -\frac{1}{4}e^{\frac{7\pi i}{4}}. \end{aligned}$$

Rezultă:

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\left(-\frac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}} - \frac{1}{4}e^{\frac{7\pi i}{4}}\right) = -\frac{\pi\sqrt{2}i}{2}.$$

(c) Avem doi poli, $z = 1, z = -2$ în interiorul conturului. Se vede că $z_1 = 1$ este pol de ordinul 2, iar $z_2 = -2$ este pol de ordinul 1. Calculăm reziduurile:

$$\begin{aligned} \mathrm{Rez}(f, z_1) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)}\right] \\ &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{z^2+4z-1}{(z+2)^2} \\ &= \frac{2}{9} \\ \mathrm{Rez}(f, z_2) &= \lim_{z\to -2}(z+2)\frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Rezultă:

$$I = \int_{|z|=3} \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)}\,dz = \frac{14}{9}\pi i.$$

3. Să se calculeze integralele:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{\sin z}$;

(b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2}\,dz$;

(c) $\displaystyle\int_{|z|=5} z e^{\frac{3}{z}}\,dz$;

(d) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3}$;

(e) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4}\,dz$.

Indicații: (a) $z = 0$ este singurul pol din interiorul domeniului;

(b), (c): Dezvoltăm în serie Laurent și identificăm reziduurile folosind definiția.

(d) Avem $z = 1$ pol de ordin 3 și $z = -1$ pol simplu. Doar $z = 1$ se află în interiorul domeniului și dezvoltăm în serie Laurent după puterile lui $z - 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{2-(-(z-1))}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n}\\ &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

pentru $|z-1| < 2$.

Rezultă:

$$\frac{1}{(z+1)(z-1)^3} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(z-1)^{n-3}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2(z-1)^3} - \frac{1}{4(z-1)^2} + \frac{1}{8(z-1)} - \frac{1}{16} + \dots,$$

deci $\mathrm{Rez}(f,1) = \dfrac{1}{8}$.

2.5 Aplicații ale teoremei reziduurilor

Putem folosi teorema reziduurilor pentru a calcula integrale trigonometrice de forma:

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta,$$

unde R este o funcție rațională.

Facem schimbarea de variabilă $z = e^{i\theta}$ și atunci, pentru $\theta \in [0, 2\pi]$, z descrie cercul $|z| = 1$, o dată, în sens direct.

Folosim formulele lui Euler:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

Atunci, dacă $z = e^{i\theta}$, rezultă $dz = ie^{i\theta}\, d\theta = iz d\theta$, iar integrala devine:[1]

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = \oint_{|z|=1} R_1(z) dz,$$

unde:

$$R_1(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right).$$

Această funcție poate avea poli și deci putem folosi teorema reziduurilor. Dacă $a_1, \dots, a_n$ sînt polii din interiorul cercului unitate, avem:

$$I_1 = 2\pi i \sum_{k \geq 1} \operatorname{Rez}(R_1, a_k).$$

Să vedem cîteva exemple:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\,\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$;

(b) $\displaystyle\int_0^{2\,\pi} \frac{d\theta}{1 + 3\cos^2\theta}$;

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{1 + i\sin\theta}\, d\theta$;

[1] $\oint$ marchează o integrală pe un contur *închis*

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\sin\theta}, |a| < 1, a \in \mathbb{R}$;

(e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 3t}{5 - 4\cos t} dt$.

Soluție:

(a) Notăm $z = e^{i\theta}$, cu $\theta \in [0, 2\pi]$. Atunci avem succesiv:

$$\begin{aligned}
dz &= ie^{i\theta} d\theta = iz dz \Longrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz} \\
\cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\
\frac{1}{2 + \cos\theta} &= \frac{2z}{z^2 + 4z + 1} \\
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta} &= \oint_{|z|=1} \frac{2z}{z^2 + 4z + 1} \frac{dz}{iz} \\
&= -2i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4z + 1}.
\end{aligned}$$

Acum folosim teorema reziduurilor. Singularitățile funcției $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4z + 1}$ sînt $z = -2 \pm \sqrt{3}$, care sînt poli simpli. Numai $z = -2 + \sqrt{3}$ se află în interiorul cercului $|z| = 1$ și calculăm reziduul folosind Teorema 2.4(2).

SEMINAR 3

SERII LAURENT ȘI REZIDUURI

3.1 Serii de puteri. Serii Laurent

Noțiunile privitoare la scrierea funcțiilor cu ajutorul seriilor de puteri, întîlnite în cazul real prin serii Taylor, se pot generaliza și în cazul complex. Situația este ceva mai problematică în acest caz, deoarece argumentele sînt obiecte bidimensionale. În orice caz, multe dintre noțiunile din cazul real pot fi preluate aproape fără modificare și în cazul complex.

Definiţie 3.1: O serie de forma $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$, cu $z \in \mathbb{C}$ oarecare, $z_0 \in \mathbb{C}$ fixat și $a_n \in \mathbb{C}$ coeficienți, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, se numește *serie de puteri* centrată în z_0.

Ca în cazul real, se poate calcula *raza de convergență* a seriilor de puteri cu una dintre formulele:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Atunci, deoarece lucrăm în planul complex, se definește *discul de convergență* al seriei prin:

$$B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}.$$

Știm, de asemenea, că:

- seria este absolut convergentă pe $|z - z_0| < R$;
- seria este divergentă pe $|z - z_0| > R$;
- seria este uniform convergentă pe $|z - z_0| \leq \rho$, pentru orice $\rho < R$,

iar pe frontiera discului trebuie testat separat.

În interiorul discului de convergență, suma seriei este o funcție olomorfă $S(z)$ și au sens rezultate de forma derivării sau integrării termen cu termen.

Definiție 3.2: O funcție $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ se numește *analitică* dacă poate fi dezvoltată într-o serie de puteri complexă cu discul de convergență inclus în A.

Dacă acesta este cazul, avem formula cunoscută:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Are loc rezultatul important:

Teoremă 3.1 (Weierstrass-Riemann-Cauchy)**:** *O funcție complexă definită pe o mulțime deschisă este analitică dacă și numai dacă este olomorfă.*

Deducem de aici că, dacă domeniul de definiție A al funcției complexe studiate, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, este o mulțime deschisă, atunci olomorfia (pe care o verificăm cu condițiile Cauchy-Riemann, de exemplu) este echivalentă cu analiticitatea, verificată cu ajutorul seriilor de puteri. Rezultă implicit că orice funcție olomorfă definită pe un deschis poate fi dezvoltată în serie de puteri.

Dar pentru cazul complex, avem și serii ceva mai complicate:

Definiție 3.3: O serie de puteri de forma $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n$, cu $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$ se numește *serie Laurent* centrată în punctul $z_0 \in \mathbb{C}$.

O serie Laurent este convergentă dacă și numai dacă atît partea pozitivă $a_n > 0$, cît și partea negativă, $a_n \leq 0$ sînt simultan convergente.

Partea pozitivă se numește *partea Taylor*, iar partea negativă se numește *partea principală.*

Pentru cazul Taylor, seriile uzuale pentru funcțiile elementare, împreună cu domeniile de convergență, sînt date mai jos. În toate cazurile, $x \in \mathbb{R}$ se poate înlocui cu $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n, x \in \mathbb{R} \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n\geq 0} x^n, |x| < 1 \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n, |x| < 1 \\
\cos x &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, x \in \mathbb{R} \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, |x| < 1, \alpha \in \mathbb{R} \\
\arctan x &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, |x| \leq 1.
\end{aligned}$$

Seriile pentru alte funcții se pot obține fie prin calcul direct, fie prin substituții, fie prin derivare sau integrare termen cu termen a seriilor de mai sus.

3.2 Singularități și reziduuri

În cazul funcțiilor reale, domeniul de definiție trebuie ales atent astfel încît să evităm „punctele cu probleme". Exemplele tipice sînt cele în care se anulează numitorul unei fracții, cînd apar logaritmi sau radicali etc. Pentru funcții reale, cel mult putem calcula asimptote verticale în acele „puncte cu probleme". Dar în cazul complex, distincția se face mult mai fin.

Definiție 3.4: Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă nevidă și $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcție complexă, olomorfă pe A. Fie un punct $z_0 \in \mathbb{C}$.

Punctul z_0 se numește *punct singular izolat* (*singularitate izolată*) pentru f dacă există un disc centrat în z_0, de forma $B(z_0, r)$, cu $r \neq 0$, astfel încît, dacă eliminăm centrul discului, funcția este olomorfă pe $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Amintim că, dacă funcția este olomorfă pe *discul punctat* (i.e. discul $B(z_0, r)$, din care am scos centrul), atunci ea are o dezvoltare în serie Laurent, conform teoremei Weierstrass-Riemann-Cauchy.

Definiție 3.5: În condițiile și cu notațiile din definiția anterioară, punctul $z_0 \in \mathbb{C}$ se numește *punct singular izolat* (*singularitate izolată*) dacă seria Laurent asociată funcției f are partea principală nulă, adică este o serie Taylor.

Definiţie 3.6: În condițiile și cu notațiile din definiția anterioară, punctul $z_0 \in \mathbb{C}$ se numește *pol* dacă în seria Laurent asociată funcției f există un număr finit de termeni nenuli în partea principală. Indicele ultimului termen nenul m (în sensul că $|m|$ este cel mai mare, iar $m < 0$) se numește *ordinul polului.*

Definiţie 3.7: În condițiile și cu notațiile din definiția anterioară, punctul $z_0 \in \mathbb{C}$ se numește *punct singular esențial* (*singularitate esențială*) dacă în partea principală a seriei Laurent asociată funcției f există o infinitate de termeni nenuli.

Idee intuitivă: Singularitățile, în general, sînt „puncte cu probleme". Chiar și în cazul real există această noțiune, întîlnită în analiză. De exemplu, un punct unghiular sau de întoarcere al unei funcții reale se numește singularitate. Alt exemplu la îndemînă: găurile negre sînt interpretate în cosmologie (ramura fizicii teoretice care utilizează geometria pentru studiul „formei" Universului) ca *singularități ale spațiu-timpului.* Dar, din fericire, în majoritatea cazurilor, singularitățile fie pot fi „ignorate" sau „eliminate" i.e. se poate extrage informația de bază și din domeniul din care ele au fost scoase. Amintiți-vă, de exemplu, că în analiza de liceu există o teoremă care afirmă că *dacă se scoate un număr numărabil de puncte din graficul unei funcții, integrala sa definită nu se schimbă.*

Similar este și cazul singularităților din analiza complexă: toate, cu excepția celor esențiale, pot fi „eliminate", adică se poate extrage informație foarte importantă despre comportamentul funcțiilor și în lipsa lor (sau, uneori, chiar *numai* din ele, ca în cazul reziduurilor, precum vom vedea).

Polii vor fi elementul central de studiu mai departe. Pentru ei, mai avem o caracterizare utilă:

Propoziţie 3.1: *În condițiile și cu notațiile de mai sus, punctul $z_0 \in \mathbb{C}$ este pol pentru funcția f dacă și numai dacă $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.*

Exemplu: Putem vedea foarte simplu acest lucru pentru funcția $f(z) = \dfrac{z}{z-1}$. Atunci $z = 1$ este pol simplu, deoarece $\lim\limits_{z \to 1} f(z) = \infty$ și mai mult, putem scrie dezvoltarea în serie Laurent a funcției f în jurul lui $z = 1$, sub forma:

$$f(z) = \frac{1 + z - 1}{z - 1} = \frac{1}{z - 1} + 1,$$

care are partea principală $\dfrac{1}{z-1}$, cu un singur termen (care dă ordinul polului).

Propoziţie 3.2: *În condițiile și cu notațiile de mai sus, punctul $z_0 \in \mathbb{C}$ este singularitate esențială dacă și numai dacă nu există $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.*

Ajungem la o altă noțiune esențială:

Definiţie 3.8: În condițiile și cu notațiile de mai sus, fie z_0 o singularitate izolată a funcției f. Coeficientul a_{-1} din seria Laurent a funcției f în coroana $B(z_0; 0, r)$ se numește *reziduul* funcției în z_0 și se notează $\text{Rez}(f, z_0)$.

Observaţie 3.1: În multe situații, reziduurile se pot calcula simplu cu teorema 2.4, dar uneori sîntem obligați să folosim definiția, pentru că limitele complexe se calculează mult mai dificil decît în cazul real.

Un exemplu este următorul: considerăm funcția $f(z) = \dfrac{1}{z \sin z^2}$. Vrem să calculăm $\text{Rez}(f, 0)$. Evident, acest punct este pol, deoarece $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = \infty$, dar orice formulă am folosi din teorema 2.4, nedeterminarea nu este eliminată. Astfel că sîntem obligați să folosim definiția, cu ajutorul seriei Laurent.

Ca în cazul seriei Taylor pentru funcția sinus, avem:

$$\begin{aligned}
\sin z &= \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \\
\Longrightarrow z \sin z^2 &= z \cdot \left(\frac{z^2}{1!} - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \dots \right) \\
&= z^3 \left(1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \dots \right).
\end{aligned}$$

Atunci, inversînd, obținem funcția scrisă sub forma:

$$f(z) = z^{-3} \cdot \left(1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \dots \right)^{-1}.$$

Vrem să inversăm seria din paranteză (admitem fără demonstrație că acest lucru este posibil), pentru ca în final, să putem scrie toată funcția ca o serie de puteri (în forma actuală nu este așa ceva!). Așadar, căutăm o serie de forma $\sum a_n z^n$, cu $n \in \mathbb{N}$, astfel încît:

$$\left(1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \dots \right) \cdot \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \right) = 1.$$

Prin identificarea coeficienților, rezultă $a_0 = 1, a_2 = 0$. Făcînd acum înmulțirea, avem:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \frac{a_0}{z^3} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z} + a_3 + \dots.$$

Partea principală a seriei are 3 termeni nenuli, deci $z = 0$ este pol triplu (intuitiv, simplu pentru z și dublu pentru $\sin z^2$), deci rezultă $\text{Rez}(f, 0) = a_2 = 0$.

3.3 Exerciții

1. Determinați dezvoltarea în serie Taylor sau Laurent pentru funcțiile următoare, în jurul punctelor indicate z_0, precizînd și domeniile pe care sînt valabile:

(a) $f(z) = \cos^2 z, z_0 = 0;$

(b) $f(z) = \dfrac{z+3}{z^2 - 8z + 15}, z_0 = 4;$

(c) $f(z) = \sin \dfrac{1}{1-z}, z_0 = 1;$

(d) $f(z) = \dfrac{2z^2 + 9z + 5}{z^3 + z^2 - 8z - 12}, z_0 = 1;$

(e) $f(z) = \dfrac{z-1}{z-2}, z_0 = 1;$

(f) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$, pe domeniile $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$ și $|z| > 2$.

Indicație: Se pot folosi seriile uzuale, cu anumite substituții, dar atenție la domeniile de convergență, precum și la eventualii poli ai funcțiilor. A se vedea exemplul rezolvat de mai jos.

2. Determinați punctele singulare și precizați natura lor pentru funcțiile:

(a) $f(z) = \dfrac{z^5}{(z^2+1)^2};$

(b) $f(z) = z^3 \exp\left(-\dfrac{3}{z}\right);$

(c) $f(z) = \sin \dfrac{1}{z};$

(d) $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{z^6};$

(e) $f(z) = \dfrac{6z+1}{z-3};$

(f) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 \sin z};$

Indicație: După identificarea „punctelor cu probleme“, se cercetează existență limitei către punctele respective și/sau se utilizează dezvoltarea în serie Taylor/Laurent.

3. Calculați:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^2 + \exp(z)}{z^3} dz$;

(b) $\displaystyle\int_\gamma (z+1)\exp\left(\frac{1}{z+1}\right) dz$, unde $\gamma \,:\, x^2 + y^2 + 2x = 0$;

(c) $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{\exp(z^{-1})}{1-z} dz$, pentru $r \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$.

Indicație: Se folosește teorema reziduurilor.

Exemplu rezolvat pentru seria Laurent: Să se dezvolte funcția

$$f(z) = \frac{2z^2 + 3z - 1}{z^3 + z^2 - z - 1}$$

în jurul originii și în jurul punctelor $z = \pm 1$.

Soluție: Numitorul se descompune sub forma $(z-1)(z+1)^2$, deci avem un pol simplu $z = 1$ și un pol dublu $z = -1$.

Putem descompune funcția în fracții simple, sub forma:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}.$$

Primii doi termeni sînt sume de serii geometrice, iar al treilea poate fi obținut prin derivarea seriei geometrice:

$$\frac{1}{z+1} = \sum (-1)^n z^n \Rightarrow -\frac{1}{(z+1)^2} = \sum (-1)^{n+1}(n+1)z^n,$$

după ce am făcut trecerea $n \mapsto n+1$, întrucît seria derivatelor ar fi pornit de la $n = 1$, dat fiind termenul z^{n-1}.

Pe cazuri acum:

Pentru $|z| < 1$: funcția este olomorfă, deoarece nu avem niciun pol în acest disc deschis. Atunci putem scrie direct seria ca sumă a celor trei serii corespunzătoare:

$$f(z) = -\sum_{n\geq 0} z^n + \sum_{n\geq 0} (-1)^n z^n + \sum_{n\geq 0} (-1)^n (n+1) z^n = \sum_{n\geq 0} z^n \left(-1 + (-1)^n + (-1)^n (n+1)\right).$$

În jurul punctului $z = -1$, unde avem pol, trebuie să rescriem funcția sub forma:

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}},$$

astfel punînd în evidență puteri (negative!) ale lui $z+1$. Primii doi termeni nu necesită prelucrare, iar pentru al treilea, întrucît ne aflăm în domeniul de convergență a seriei geometrice, adică $|z+1| < 2$ putem scrie:

$$\frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{z+1}{2}\right)^n.$$

În jurul punctului $z = 1$, unde avem din nou pol, rescriem funcția sub forma:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{z-1}{2}\right)^2}.$$

Primul termen nu necesită prelucrare, iar pentru al doilea, remarcăm că ne aflăm în interiorul domeniului său de convergență, căci $|z-1| < 2$ și atunci avem direct suma seriei geometrice:

$$\frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\frac{z-1}{2}\right)^n.$$

Al treilea termen se obține prin derivarea termen cu termen a seriei de mai sus (ca în cazul de la început) și avem:

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{z-1}{2}\right)^2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(n+1)(z-1)^n}{2^n}$$

și în fine, funcția se obține ca sumă a acestor trei serii, adică, după calcule:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{n+3}{2^{n+2}} (z-1)^n.$$

SEMINAR 4

RECAPITULARE ANALIZĂ COMPLEXĂ

1. Determinați funcția olomorfă $f = P + iQ$ în cazurile:

(a) $Q(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$;

(b) $P(x, y) = x^2 - y^2$ și știind $f(0) = 0$;

(c) $P(x, y) = x^2 - y^2 - 2y$;

(d) $Q(x, y) = x^3 - 3xy^2$;

2. Calculați:

(a) $\exp\left(-\frac{5\pi i}{2}\right)$;

(b) $\mathrm{Ln}(-2)$;

(c) i^{3i};

(d) i^{1+i};

(e) $(1 + i\sqrt{3})^{42}$.

3. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui z funcția $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$ în domeniile $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$ și $|z| > 2$.

4. Determinați singularitățile, precizați natura lor și calculați reziduurile pentru funcțiile:

(a) $f(z) = \dfrac{z^5}{(z^2+1)^2}$;

(b) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$;

(c) $f(z) = z^2 \cdot \cos \dfrac{1}{z}$;

(d) $f(z) = \dfrac{\exp(z^{-1})}{z^4}$.

5. Calculați integralele complexe:

(a) $\displaystyle\int_0^{1+i} z^2 dz$;

(b) $\displaystyle\int_C (z^2 + \overline{z}^2) dz$, unde C este segmentul care unește punctele 0 și $2 + 2i$.

(c) $\displaystyle\int_{|z|=3} \overline{z}^2 dz$;

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2 + \cos^2 \theta} d\theta$;

(e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1 + \sin \theta}{(3 - 2\cos \theta)^2} d\theta$;

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^4)^2}$;

(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^4}$.

Indicații: (f,g): Se definește un contur închis de forma $C = [-r, r] \cup \Gamma_r$, unde Γ_r este cercul centrat în origine și de rază r. Considerăm funcția complexă asociată $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^4)^2}$ sau, respectiv, $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^4}$ și se calculează reziduurile pentru integrarea lui $f(z)$ pe C. Integrala reală revine la a calcula limita $r \longrightarrow \infty$ a integralei complexe, deoarece conform lemei Jordan, integrala pe semicercul Γ_r este nulă. Rămîne calculul cu reziduuri.

Pe scurt:

Luăm $\Gamma : (-r, r) \cup \gamma$, unde $\gamma : |z| = r, \mathrm{Im}(z) > 0$ și fie $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$.

Calculăm:

$$
\begin{aligned}
I_r &= \int_\Gamma f(z)dz = \int_{-r}^{r} f(x)dx + \int_\gamma f(z)dz \\
&= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Rez}(f, z_k),
\end{aligned}
$$

Apoi:

$$
\lim_{r\to\infty} I_r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \lim_{r\to\infty} \int_\gamma f(z)dz.
$$

Și, deoarece $\lim\limits_{z\to\infty} |zf(z)| = 0$, rezultă, cu lema Jordan, că integrala pe semicerc e nulă, adică $\lim\limits_{r\to\infty} \int_\gamma f(z)dz = 0$, deci integrala reală căutată este egală cu rezultatul obținut cu teorema reziduurilor.

SEMINAR 5

TRANSFORMATA LAPLACE

5.1 Definiții și proprietăți

Transformata Laplace este o transformare integrală, care se poate aplica unor funcții speciale, numite *funcții original*.

Definiție 5.1: O funcție $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ se numește *original* dacă:

(a) $f(t) = 0$ pentru orice $t < 0$;

(b) f este continuă (eventual pe porțiuni) pe intervalul $[0, \infty)$;

(c) Este mărginită de o exponențială, adică există $M > 0$ și $s_0 \geq 0$ astfel încît:

$$|f(t)| \leq Me^{s_0 t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Numărul s_0 se mai numește *indicele de creștere* al funcției f.

Vom nota cu $\mathcal{O}$ mulțimea funcțiilor original.

Pornind cu o funcție original, definiția transformatei Laplace este:

Definiție 5.2: Păstrînd contextul și notațiile de mai sus, fie $f \in \mathcal{O}$ și mulțimea:

$$S(s_0) = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > s_0\}.$$

Funcția:

$$F : S(s_0) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

se numește *transformata Laplace* a lui f sau *imaginea Laplace* a originalului f.

Vom mai folosi notația $F = \mathcal{L}f$ sau, explicit, $\mathcal{L}f(t) = F(s)$.

Proprietățile esențiale ale transformatei Laplace sînt date mai jos. Fiecare dintre ele va fi folosită pentru a calcula o transformată Laplace pentru o funcție care nu se regăsește direct într-un tabel de valori.

- **Liniaritate:** $\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{L}f + \beta\mathcal{L}g$, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, iar f, g funcții original;
- **Teorema asemănării:**
$$\mathcal{L}f(\alpha t) = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{s}{\alpha}\right);$$
- **Teorema deplasării:**
$$\mathcal{L}\left(f(t)e^{s_0 t}\right) = F(s - s_0);$$
- **Teorema întîrzierii:** Definim *întîrziata cu* τ a funcției $f \in \mathcal{O}$ prin:
$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ f(t-\tau), & t \geq \tau \end{cases}.$$
Atunci, dacă $\mathcal{L}f(t) = F(s)$, $\mathcal{L}f_\tau(t) = e^{-s\tau}F(s)$;
- **Teorema derivării imaginii:**
$$\mathcal{L}\left(t^n f(t)\right) = (-1)^n F^{(n)}(s);$$
- **Teorema integrării originalului:** Fie $f \in \mathcal{O}, \mathcal{L}f(t) = F(s)$ și $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau$. Atunci:
$$\mathcal{L}g(t) = \frac{1}{s}F(s);$$
- **Teorema integrării imaginii:** Fie $\mathcal{L}f(t) = F(s)$ și G o primitivă a lui F în $S(s_0)$, cu $G(\infty) = 0$. Atunci:
$$\mathcal{L}\frac{f(t)}{t} = -G(s).$$
- **Teorema de convoluție:** Definim *produsul de convoluție* al două funcții, $h = f * g$, prin formula:
$$h(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau)d\tau$$
și fie F, G transformatele Laplace ale funcțiilor f și respectiv g, presupuse original. Dacă H este imaginea Laplace a funcției h, atunci $H(s) = F(s) \cdot G(s)$. Cu alte cuvinte, transformata Laplace acționează ca înmulțire pe produsul de convoluție.

5.2 Tabel de transformate Laplace

În tabelul de mai jos, vom considera funcțiile $f(t)$ ca fiind funcții original, adică nule pentru argument negativ. Echivalent, putem gîndi $f(t)$ ca fiind, de fapt, înmulțite cu *funcția lui Heaviside*:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$u(t-\tau)$	$\frac{1}{s}e^{-\tau s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$
$\cosh(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$
$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha^2)+\omega^2}$
$\ln t$	$-\frac{1}{s}\left(\ln s + \gamma\right)$[1]

[1]Constanta Euler-Mascheroni, $\gamma \simeq 0,577\cdots \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

5.3 Exerciții

1. Calculați transformatele Laplace pentru funcțiile (presupuse original):

(a) $f(t) = 1, t \geq 0$;

(b) $f(t) = t, t \geq 0$;

(c) $f(t) = t^n, n \in \mathbb{N}$;

(d) $f(t) = e^{at}, t \geq 0, a \in \mathbb{R}$;

(e) $f(t) = \sin(at), t \geq 0, a \in \mathbb{R}$.

Soluție: (a) Avem direct din definiție:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \lim_{n \to \infty} \int_0^n e^{-st} dt = \frac{1}{s}, s > 0.$$

(b) Integrăm prin părți și obținem $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$.

(c) Facem substituția $st = \tau$ și găsim:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^n d\tau = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

pentru $s > 0$, folosind funcția Gamma a lui Euler:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx, a > 0, \quad \Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}.$$

(d) $F(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}, s > a.$

(e) Integrăm prin părți și ajungem la:

$$F(s) = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2} F(s) \Longrightarrow F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0.$$

2. Folosind tabelul de valori și proprietățile, să se determine transformatele Laplace pentru funcțiile (presupuse original):

(a) $f(t) = 5$;

(b) $f(t) = 3t + 6t^2$;

(c) $f(t) = e^{-3t}$;

(d) $f(t) = 5e^{-3t}$;

(e) $f(t) = \cos(5t)$;

(f) $f(t) = \sin(3t)$;

(g) $f(t) = 3(t-1) + e^{-t-1}$;

(h) $f(t) = 3t^3(t-1) + e^{-5t}$;

(i) $f(t) = 5e^{-3t}\cos(5t)$;

(j) $f(t) = e^{2t}\sin(3t)$;

(k) $f(t) = te^{-t}\cos(4t)$;

(l) $f(t) = t^2\sin(3t)$;

(m) $f(t) = t^3\cos t$.

Indicații: În majoritatea cazurilor, se folosește tabelul și proprietatea de liniaritate. În plus:
(i, j) Folosim $\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$;
(k) Folosim $\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f(t))$;
(l) Folosim $\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$;

3. Folosind teorema derivării imaginii, să se determine transformatele Laplace pentru funcțiile (presupuse original):

(a) $f(t) = t$;

(b) $f(t) = t^2$;

(c) $f(t) = t\sin t$;

(d) $f(t) = te^t$.

Indicație: Conform proprietății de derivare a imaginii, avem:

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f(t)).$$

4. Folosind teorema integrării originalului, să se determine transformatele Laplace pentru funcțiile (presupuse original):

(a) $f(t) = \int_0^t \cos(2\tau)d\tau$;

(b) $f(t) = \int_0^t e^{3\tau} \cos(2\tau) d\tau$;

(c) $f(t) = \int_0^t \tau e^{-3\tau} d\tau$.

Indicație: Conform proprietății de integrare a originalului, avem:

$$\mathcal{L} \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{F(s)}{s}.$$

5.4 Aplicații ale transformatei Laplace

Principala aplicație a transformatei Laplace este pentru rezolvarea ecuațiilor și sistemelor diferențiale de ordinul întîi sau superior.

Aceste aplicații se bazează pe calculele care se pot obține imediat din definiția transformatei Laplace și a proprietăților sale:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f' &= s\mathcal{L}f - f(0) \\ \mathcal{L}f'' &= s^2\mathcal{L}f - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

De fapt, în general, avem:

$$\mathcal{L}f^{(n)} = s^n\mathcal{L}f - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

De asemenea, pentru integrale, știm deja teorema integrării originalului:

$$\mathcal{L} \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{s} F(s), \quad F(s) = \mathcal{L}f(t).$$

Rezultă, folosind transformarea inversă:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}F(s)\right).$$

De exemplu, pentru a rezolva ecuația diferențială:

$$y'' + ay' + by = r(t), \quad y(0) = K_0, y'(0) = K_1,$$

aplicăm transformata Laplace și folosim proprietățile de mai sus. Fie $Y = \mathcal{L}y(t)$

Se obține ecuația algebrică:

$$(s^2 Y - sy(0) - y'(0)) + a(sY - y(0)) + bY = R(s),$$

unde $R(s) = \mathcal{L}r$. Forma echivalentă este:

$$(s^2 + as + b)Y = (s + a)y(0) + y'(0) + R(s).$$

Împărțim prin $s^2 + as + b$ și folosim formula:

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1}{(s + \frac{1}{2}a)^2 + b - \frac{1}{4}a^2},$$

de unde rezultă:

$$Y(s) = \big((s + a)y(0) + y'(0)\big)Q(s) + R(s)Q(s).$$

În forma aceasta, descompunem $Y(s)$ în fracții simple, dacă este nevoie și folosim tabelul de transformate Laplace, pentru a afla $y = \mathcal{L}^{-1}(Y)$.

De exemplu:

$$y'' - y = t, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

Soluție: Aplicăm transformata Laplace și ajungem la ecuația:

$$s^2 Y - sy(0) - y'(0) - Y = \frac{1}{s^2}$$
$$(s^2 - 1)Y = s + 1 + \frac{1}{s^2}.$$

Rezultă $Q = \dfrac{1}{s^2 - 1}$ și ecuația devine:

$$\begin{aligned} Y &= (s + 1)Q + \frac{1}{s^2}Q \\ &= \frac{s + 1}{s^2 - 1} + \frac{1}{s^2(s^2 - 1)} \\ &= \frac{1}{s - 1} + \left(\frac{1}{s^2 - 1} - \frac{1}{s^2}\right) \end{aligned}$$

Folosind tabelul și proprietățile transformatei Laplace, obținem soluția:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}Y \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{-1}}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 - 1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) \\ &= e^t + \sinh t - t. \end{aligned}$$

5.5 Exerciții

1. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy, folosind transformata Laplace:

(a) $y'(t) + 2y(t) = 4t, y(0) = 1$;

(b) $y'(t) + y(t) = \sin 4t, y(0) = 0$;

(c) $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$;

(d) $2y''(t) - 6y'(t) + 4y(t) = 3e^{3t}, y(0) = 1, y'(0) = -1$;

(e) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^t, y(0) = -2, y'(0) = -3$;

(f) $y''(t) + 4y(t) = 3\cos^2(t), y(0) = 1, y'(0) = 2$.

2. Să se rezolve următoarele sisteme diferențiale:

(a) $\begin{cases} x' + x + 4y & = 10 \\ x - y' - y & = 0 \\ x(0) = 4, & y(0) = 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' + x - y & = e^t \\ y' + y - x & = e^t \\ x(0) = 1, & y(0) = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' + 2y' + x - y & = 5\sin t \\ 2x' + 3y' + x - y & = e^t \\ x(0) = 2, & y(0) = 1 \end{cases}$

Indicație: Aplicăm transformata Laplace fiecărei ecuații și notăm $\mathcal{L}x(t) = X(s)$ și $\mathcal{L}y(t) = Y(s)$. Apoi rezolvăm sistemul *algebric* obținut cu necunoscutele X și Y, cărora la final le aplicăm transformata Laplace inversă.

5.6 Formula de inversare Mellin-Fourier

În cazul simplu, dacă se dă o imagine Laplace și vrem să recuperăm funcția original, putem pur și simplu să citim tabelul de transformate de la stînga la dreapta, eventual după prelucrarea imaginii Laplace, precum am văzut în exemplele de mai sus. Dar avem nevoie și de o metodă care să funcționeze pe cazul general. Mai precis, avem nevoie de o metodă de a *inversa* transformatele Laplace. Această metodă este dată de formula de inversare Mellin-Fourier, pe care o prezentăm mai jos într-o variantă simplificată, mai potrivită pentru aplicații.

Teoremă 5.1 (Mellin-Fourier): *Fie f o funcție original, $F = \mathcal{L}f$.*

Atunci are loc egalitatea:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Rez}\left(F(s)e^{st}, s_k\right).$$

Deoarece avem mai multe moduri particulare de a calcula reziduurile, distingem și aici două calcule speciale:

- Dacă $s_1, s_2, \dots, s_r$ sînt poli de ordin $n_1, n_2, \dots, n_r$, atunci formula de inversare se mai scrie:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{(n_k - 1)!} \cdot \lim_{s \to s_k} \frac{d^{n_k - 1}}{ds^{n_k - 1}} \left[F(s)(s - s_k)^{n_k} e^{st}\right];$$

- Dacă imaginea Laplace se poate scrie $F(s) = \dfrac{A(s)}{B(s)}$, unde A și B sînt polinoame cu coeficienți reali, astfel încît $\text{grad}(A) < \text{grad}B$, atunci formula de inversare devine:

$$f(t) = \sum_k \operatorname{Rez}\left(\frac{A(s)}{B(s)}e^{st}, s_k\right) + \sum_k 2\operatorname{Re}\left(\operatorname{Rez}\left(\frac{A(s)}{B(s)}e^{st}, s_k\right)\right),$$

  unde prima sumă se calculează pentru polii reali, iar cea de-a doua, pentru polii complecși cu partea imaginară pozitivă.

Exemplu: Determinați funcția original corespunzătoare imaginii Laplace:

$$F(s) = \frac{3s - 4}{s^2 - s - 6}.$$

Soluție: Observăm că avem $s_1 = 3, s_2 = -2$ poli simpli. Atunci rezultă:

$$f(t) = \operatorname{Rez}\left(\frac{3s - 4}{s^2 - s - s}e^{st}, 3\right) + \operatorname{Rez}\left(\frac{3s - 4}{s^2 - s - 6}e^{st}, -2\right).$$

Cum ambii sînt poli simpli, reziduurile se calculează folosind formula din teorma 2.4(3) și se obține în final $f(t) = e^{3t} + 2e^{-2t}$.

Observaţie 5.1: Această problemă, ca și altele, pot fi rezolvate și fără formula de inversare. Trebuie doar atenție și suficient exercițiu astfel încît, în afară de citirea „invers" a tabelului de transformate Laplace, să putem folosi și teoreme de tip întîrziere, derivarea originalului etc. De exemplu, exercițiul de mai sus putea începe cu descompunerea în fracții simple:

$$\frac{3s - 4}{s^2 - s - 6} = \frac{A}{s - 3} + \frac{B}{s + 2}.$$

Se determină A și B, apoi se folosește tabelul de transformate.

5.7 Exerciții

Folosind, eventual, formula de inversare Mellin-Fourier, aflați funcțiile original care au transformatele Laplace date:

(1) $F(s) = \dfrac{s+3}{s^3+4s^2}$;

(2) $F(s) = \dfrac{s^2+3s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$;

(3) $F(s) = \dfrac{2s+1}{s(s+1)}$;

(4) $F(s) = \dfrac{4s+10}{s^2-12s+32}$;

(5) $F(s) = \dfrac{5s+1}{s^2+1}$;

(6) $F(s) = \dfrac{s+2}{s^2(s+3)}$;

(7) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s-2)^2}$;

(8) $F(s) = \dfrac{2s-7}{s^2+2s+6}$.

SEMINAR 6

TRANSFORMATA Z

Această transformată se definește pe un caz discret, pornind de la:

Definiţie 6.1: Se numește *semnal discret* o funcție $x : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ dată de $n \mapsto x_n$ sau, echivalent, $x(n)$ ori $x[n]$.

Mulțimea semnalelor discrete se va nota cu S_d, iar cele cu suport pozitiv (nule pentru $n < 0$ se va nota S_d^+.

Un semnal particular este *impulsul unitar discret* la momentul k, definit prin:

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases},$$

definit pentru $k \in \mathbb{Z}$ fixat.

Pentru $k = 0$, vom nota $\delta_0 = \delta$.

Definiţie 6.2: Fie $x \in S_d$ și $k \in \mathbb{Z}$ fixat. Semnalul $y = (x_{n-k})$ se numește *întîrziatul lui x cu k momente.*

O operație foarte importantă, pe care se vor baza unele proprietăți esențiale ale transformatei Z este *convoluția:*

Definiţie 6.3: Fie $x, y \in S_d$. Dacă seria $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{n-k} y_k$ este convergentă pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ și are suma z_n, atunci semnalul $z = (z_n)$ se numește *convoluția* semnalelor x și y și se notează $z = x * y$.

Trei proprietăți imediate sînt:

- $x * y = y * x$;

- $x * \delta = x$;
- $(x * \delta_k)(n) = x_{n-k}$.

Ajungem acum la definiția principală:

Definiţie 6.4: Fie $s \in S_d$, cu $s = (a_n)_n$. Se numește *transformata Z* sau *transformata Laplace discretă* a acestui semnal funcția definită prin:

$$L_s(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n},$$

care se definește în domeniul de convergență al seriei Laurent din definiție.

Principalele proprietăți pe care le vom folosi în calcule sînt:

(1) **Liniaritatea:** Transformata Z este liniară în raport cu înmulțirea cu scalari și adunarea semnalelor discrete;

(2) **Inversarea transformării Z:** Fie $s \in S_d^+$, cu $s = (a_n)$. Presupunem că $L_s(z)$ este olomorfă în domeniul $|z| \in (r, R)$. Atunci putem recupera semnalul a_n prin formula:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z^{n-1} L_s(z) dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

unde γ este discul de rază $\rho \in (r, R)$.

(3) **Teorema de convoluție:** Fie $s, t \in S_d^+$. Atunci $s * t = S_d^+$ și are loc $L_{s*t} = L_s \cdot L_t$. În particular:

$$L_{s*\delta_k}(z) = z^{-k} L_s(z), \quad k \in \mathbb{Z};$$

Cîteva transformate uzuale sînt:

s	$L_s(z)$
$\begin{cases} h_n = 0, & n < 0 \\ h_n = 1, & n \geq 0 \end{cases}$	$\dfrac{z}{z-1}$
$\delta_k, k \in \mathbb{Z}$	$\dfrac{1}{z^k}$
$s = (n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$s = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$s = (a^n)_{n\in\mathbb{N}}, a \in \mathbb{C}$	$\dfrac{z}{z-a}$
$s = (e^{an})_{n\in\mathbb{N}}, a \in \mathbb{R}$	$\dfrac{z}{z-e^a}$
$s = (\sin(\omega n))_{n\in\mathbb{N}}, \omega \in \mathbb{R}$	$\dfrac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$
$s = (\cos(\omega n))_{n\in\mathbb{N}}, \omega \in \mathbb{R}$	$\dfrac{z(z-\cos\omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$

6.1 Exerciții

1. Să se determine semnalul $x \in S_d^+$, a cărui transformată Z este dată de:

(a) $L_x(z) = \dfrac{z}{(z-3)^2}$;

(b) $L_x(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z^2+1)}$;

(c) $L_x(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z^2+z-6)}$;

(d) $L_x(z) = \dfrac{z}{z^2+2az+2a^2}$, $a > 0$ parametru.

Soluție:

(a) Avem:

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} z^{n-1}L_s(z)dz \\
&= \mathrm{Rez}(z^{n-1}L_s(z),3) \\
&= \mathrm{Rez}\left(\frac{z^n}{(z-3)^2},3\right) \\
&= \lim_{z\to 3}\left((z-3)^2\cdot\frac{z^n}{(z-3)^2}\right)' \\
&= \lim_{z\to 3} nz^{n-1} \\
&= n3^{n-1}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} z^{n-1}L_s(z)dz \\
&= \mathrm{Rez}(z^{n-1}L_s(z),1)+\mathrm{Rez}(z^{n-1}L_s(z),i)+\mathrm{Rez}(z^{n-1}L_s(z),-i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rez}(z^{n-1}L_s(z),1) &= \lim_{z\to 1} z^{n-1}\frac{z}{(z-1)(z^2+1)}\cdot(z-1)=\frac{1}{2} \\
\mathrm{Rez}(z^{n-1}L_s(z),i) &= \frac{i^n}{2i\cdot(i-1)} \\
\mathrm{Rez}(z^{n-1}L_s(z),-i) &= \frac{(-1)^n i^n}{2i(i+1)}.
\end{aligned}$$

Remarcăm că pentru $n=4k$ și $n=4k+1$, avem $x_n=0$, iar în celelalte două cazuri, $x_n=1$.

(c)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rez}(z^{n-1}L_s(z),1) &= \lim_{z\to 1}\left[z^{n-1}\cdot(z-1)^2\cdot\frac{z^2}{(z-1)^2\cdot(z^2+z-6)}\right]' \\
&= -\frac{4n+3}{16}. \\
\mathrm{Rez}(z^{n-1}L_s(z),2) &= \frac{2^n}{5} \\
\mathrm{Rez}(z^{n-1}L_s(z),-3) &= -\frac{(-3)^n}{80}.
\end{aligned}$$

Obținem $x_n=-\dfrac{4n+3}{16}+\dfrac{2^n}{5}-\dfrac{(-3)^n}{80}$.

(d) $z_{1,2} = a(-1 \pm i)$ sînt poli simpli. Avem:

$$\begin{aligned} x_n &= \operatorname{Rez}\Big(\frac{z^n}{(z^2 + 2a + 2a^2)}, z_1 \Big) + \operatorname{Rez}\Big(\frac{z^n}{(z^2 + 2a + 2a^2)}, z_2 \Big) \\ &= \frac{a^n(-1+i)^n}{2z_1 + 2a} + \frac{a^n(-1-i)^n}{2z_1 + 2a} \\ &= -\frac{i}{2a}(z_1^n - z_2^n). \end{aligned}$$

Putem scrie trigonometric numerele z_1 și z_2:

$$\begin{aligned} z_1 &= a(-1+i) = a\sqrt{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} \Big) \\ z_2 &= a(-1-i) = a\sqrt{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4} \Big). \end{aligned}$$

Deci: $x_n = 2^{\frac{n}{2}} a^{n-1} \sin\frac{3n\pi}{4}$.

2. Fie $x = (x_n) \in S_d^+$ și $y = (y_n)$, unde $y_n = x_0 + \cdots + x_n$. Să se arate că $Y(z) = \frac{z}{z-1}X(z)$, unde $Y(z) = L_x(z)$ și $X(z) = L_x(z)$ sînt transformatele Z pentru semnalele x și y.:

Soluție:

Avem $Y(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n}$. Dar:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \text{ și } \sum_{n=0}^{\infty} x_{n-1} z^n = \frac{1}{z}X(z),$$

deoarece $x_{-1} = 0$. Putem continua și obținem $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_{n-k} z^{-n} = \frac{1}{z^k}X(z)$. Așadar:

$$Y(z) = X(z) \cdot \Big(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots \Big) = X(z) \cdot \frac{z}{z-1}.$$

3. Cu ajutorul transformării Z, să se determine șirurile (x_n) definite prin următoarele relații:

(a) $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, n \in \mathbb{N}$ (șirul lui Fibonacci);

(b) $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} = x_{n+1} - x_n, n \in \mathbb{N}$;

(c) $x_0 = x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 0, x_{n+4} + 2x_{n+3} + 3x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0, n \in \mathbb{N}$;

(d) $x_0 = 2, x_{n+1} + 3x_n = 1, n \in \mathbb{Z}$;

(e) $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = (n+1)4^n, n \in \mathbb{N}$.

Soluție:

Abordarea generală este să considerăm șirul (x_n) ca fiind restricția unui semnal $x \in S_d^+$ la $\mathbb{N}$ și rescriem relațiile de recurență sub forma unor ecuații de convoluție $a * x = y$, pe care le rezolvăm în S_d^+.

(a) Fie $x \in S_d^+$, astfel încît restricția lui la $\mathbb{N}$ să fie șirul căutat. Deoarece avem:

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = y_n, n \in \mathbb{Z},$$

cu $y_n = 0$ pentru $n \neq -1$ și $y_{-1} = 1$, avem ecuația de convoluție:

$$a * x = y, \text{ unde } a = \delta_{-2} - \delta_{-1} - \delta, y = \delta_{-1}.$$

Aplicăm transformata Z și rezultă:

$$L_x(z) \cdot (z^2 - z - 1) = z \Longrightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

(b) Ca în cazul anterior, avem $a * x = y$, cu $a = \delta_{-2} - \delta_{-1} + \delta$, unde $y = \delta_{-1}$. Aplicînd transformata Z, obținem:

$$L_x(z) \cdot (z^2 - z + 1) = z \Longrightarrow L_x(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1}.$$

Obținem:

$$x_n = \operatorname{Rez}\left(z^{n-1}\frac{z}{z^2 - z + 1}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{Rez}\left(z^{n-1}\frac{z}{z^2 - z + 1}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Calculăm reziduurile, cu notația $\varepsilon = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ și $\overline{\varepsilon} = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rez}\left(\frac{z^n}{z^2 - z + 1}, \varepsilon\right) &= \lim_{z \to \varepsilon} \frac{z^n}{z^2 - z + 1}(z - \varepsilon) \\
&= \frac{\varepsilon^n}{i\sqrt{3}} \\
&= \frac{\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}}{i\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Similar:

$$\operatorname{Rez}\left(\frac{z^n}{z^2 - z + 1}, \overline{\varepsilon}\right) = \frac{\cos\frac{2n\pi}{3} - i\sin\frac{2n\pi}{3}}{-i\sqrt{3}}.$$

Rezultă:

$$x_n = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n\pi}{3}, n \in \mathbb{N}.$$

(c) Ecuația $a * x = y$ este valabilă pentru:

$$a = \delta_{-4} + 2\delta_{-3} + 3\delta_{-2} + 2\delta_{-1} + \delta, \quad y = -\delta_{-2} - 2\delta_{-1}.$$

Aplicăm transformata Z și obținem: $L_x(z) = -\dfrac{z(z+2)}{(z^2+z+1)^2}$. Descompunem în fracții simple, calculăm reziduurile și ținem cont de faptul că rădăcinile numitorului, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sînt poli de ordinul 2, obținem:

$$x_n = \frac{(2n-4)(\varepsilon_1^n - \varepsilon_2^n) - (n+1)(\varepsilon_1^{n-1} + \varepsilon_1^{n-2} - \varepsilon_2^{n-1} - \varepsilon_2^{n-2})}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^3} = \frac{2(n-1)}{\sqrt{3}} \sin \frac{2n\pi}{3}, n \in \mathbb{N}.$$

(d) Ecuația corespunzătoare este $a * x = y$, cu $a = \delta_{-1} + 3\delta$ și $y_n = 1, \forall n \geq 1$, iar $y_{-1} = x_0 + 3x_{-1} = 2$, cu $y_n = 0, \forall n \leq -2$, adică $y = 1 + 2\delta_{-1}$.

Așadar:

$$\delta_{-1} * x + 3\delta * x = 1 + 2\delta_{-1}.$$

Aplicăm transformata Z și obținem:

$$\begin{aligned}
zL_x(z) + 3L_x(z) &= \frac{z}{z-1} + 2z \\
&= \frac{2z^2+3z}{z-1} \\
\Longrightarrow L_x(z) &= \frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)} \\
\Longrightarrow x_n &= \mathrm{Rez}(z^{n-1} \cdot \frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)}, 1) + \mathrm{Rez}(z^{n-1} \cdot \frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)}, -3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rez}(z^{n-1} \cdot \frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)}, 1) &= \lim_{z \to 1} (z-1) \cdot z^{n-1} \cdot \frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)} = \frac{5}{4} \\
\mathrm{Rez}(z^{n-1} \cdot \frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)}, -3) &= \lim_{z \to -3} (z+3) z^{n-1} \cdot \frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)} \\
&= (-3)^{n-1} \cdot \frac{12}{-4} = -3 \cdot (-3)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Rezultă: $x_n = \dfrac{5}{4} - 3 \cdot (-3)^{n-1}$.

(e) Avem ecuația: $a * x = y$, unde $a = \delta_{-2} - 4\delta_{-1} + 3\delta$, cu $y_n = 0, \forall n \leq -2, y_{-1} = 1$ și $y_n = (n+1)4^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Fie $s_1 = (n4^n)_n$, $s_2 = (4^n)_n$. Atunci:

$$
\begin{aligned}
L_{s_1}(z) &= -zL_{s_2'}(z) = -z\Big(\frac{z}{z-4}\Big)' = \frac{4z}{(z-4)^2} \\
\Longrightarrow L_x(z)(z^2 - 4z + 3) &= \frac{4z}{(z-4)^2} + \frac{z}{z-4} + z \\
&= \frac{z^2}{(z-4)^2} + z \\
\Longrightarrow L_x(z) &= \frac{z(z^2 - 7z + 16)}{(z-4)^2(z-1)(z-3)}.
\end{aligned}
$$

Descompunem în fracții simple și obținem, în fine:

$$
x_n = \frac{1}{9}\Big[18 \cdot 3^n + (3n - 13)4^n - 5\Big], n \in \mathbb{N}.
$$

OBSERVAȚIE: Toate exercițiile cu recurențe se mai pot rezolva în alte două moduri:

(1) Se poate aplica teorema de convoluție relației de recurență. De exemplu, din recurența:

$$
x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2
$$

putem obține:

$$
L_{x_{n+2}}(z) - 2L_{x_{n+1}}(z) + L_{x_n}(z) = 2L_1(z),
$$

iar $L_{x_{n+2}}(z) = L_{x_n * \delta_{-2}}(z) = L_{x_n}(z) \cdot L_{\delta_{-2}}(z)$ etc.

(2) Se poate aplica teorema de deplasare. În aceeași recurență de mai sus, de exemplu, avem:

$$
L_{x_{n+2}}(z) = z^n \left(L_{x_n}(z) - x_0 - x_1 z^{-1}\right)
$$

și la fel pentru celelalte.

6.2 Exerciții suplimentare (L. Costache)

1. Să se determine semnalul $x \in S_d^+$ a cărui transformată Z este:

(a) $L_x(z) = \dfrac{2z + 3}{z^2 - 5z + 6}$;

(b) $L_x(z) = \dfrac{z^2 + 1}{z^2 - z + 1}$;

(c) $L_x(z) = \dfrac{z}{(z-5)^2}$;

(d) $L_x(z) = \dfrac{z + 2}{z^2 + z + 1}$.

2. Cu ajutorul transformatei Z, să se determine șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite prin următoarele relații de recurență:

(a) $x_0 = 4, x_1 = 6$ și $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$;

(b) $x_0 = 0, x_1 = 11, x_2 = -8, x_3 = 6$ și $x_{n+4} - \frac{5}{2}x_{n+3} + \frac{5}{2}x_{n+1} - x_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$;

(c) $x_0 = 0, x_1 = 3$ și $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}$;

(d) $x_0 = 0, x_1 = -1$ și $x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = n, \forall n \in \mathbb{N}$;

(e) $x_0 = 0, x_1 = 1$ și $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 4 \cdot 5^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

SEMINAR 7

TRANSFORMAREA FOURIER

Transformarea Fourier, cu diversele sale variante (discretă, rapidă etc.) este foarte utilă pentru studiul undelor sinusoidale. Dacă o *serie* Fourier dezvoltă o funcție într-o serie în care termenii sînt sinusuri și cosinusuri, *transformata* Fourier este o transformare integrală, în care aspectele periodice corespunzătoare funcțiilor trigonometrice se păstrează.

De aceea, veți întîlni foarte des transformatele Fourier în cazul analizelor semnalelor sonore, fie pentru digitalizare sau pentru diverse descompuneri. Un exemplu concret este în inteligența artificială și învățarea automată, unde se lucrează la programe care să facă recunoaștere vocală, transcrieri și traduceri. În toate aceste aplicații, o analiză a semnalului audio cu ajutorul transformatei Fourier este indispensabil.

7.1 Elemente teoretice

Foarte pe scurt, vom da definițiile și principalele proprietăți care vor fi de folos în exerciții.

Avem nevoie de următoarea noțiune:

Definiţie 7.1: Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție reală. Spunem că ea este L^1 (formal, *aparține mulțimii* $L^1(\mathbb{R})$), dacă are proprietatea:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Intuitiv, mutînd tot graficul funcției deasupra axei Ox (prin oglindire pe intervalele negative), aria de sun grafic este finită. Deci funcția nu are nicio zonă în care „explodează“ spre $\pm\infty$ asimptotic.

Acestea sînt funcțiile cărora le vom defini transformările Fourier. Deci, dacă nu se precizează altfel, toate funcțiile care se transformă vor fi presupuse L^1.

Definiția principală urmează.

Definiţie 7.2: Fie f o funcție L^1. Se definește *transformata Fourier* a lui f, notată $\mathcal{F}$ (alternativ, $\mathcal{F}[f]$ sau, și mai explicit, $\mathcal{F}[f(t)](\omega)$)[1]funcția complexă definită prin:

$$\mathcal{F}[f] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Se vede aici importanța faptului că f este L^1.

Folosind formula lui Euler pentru exponențiala complexă care apare în integrală, precum și paritatea funcțiilor trigonometrice, facem următoarele observații imediate:

- Dacă f este funcție pară, atunci transformata Fourier are partea imaginară nulă (integrala sinsului pe un interval simetric față de origine — în acest caz special, $(-\infty, \infty)$ — este nulă, iar integrala funcției pare cosinus este dublul integralei calculate pe jumătate din interval) și rămînem cu:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt;$$

- Dacă f este funcție impară, folosind argumentul din cazul anterior, transformarea Fourier are partea reală nulă și rămînem cu:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = -2i\int_0^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt.$$

Cele două cazuri speciale se numesc, respectiv, *transformarea (Fourier) prin sinus* și *transformarea (Fourier) prin cosinus* ale funcției f.

Transformarea Fourier se poate inversa relativ simplu:

Teoremă 7.1 (Transformarea Fourier inversă)**:** *Fie f o funcție L^1 și $\mathcal{F}[f]$ transformata sa Fourier. Presupunem că și $\mathcal{F}[f]$ este funcție L^1 și atunci se poate recupera funcția f prin formula:*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f]e^{i\omega t}d\omega.$$

Dacă funcția f care se transformă are „puncte cu probleme“ (care sigur aparțin domeniului de integrare, deoarece acesta este întreg $\mathbb{R}$), atunci transformarea Fourier se calculează cu ajutorul reziduurilor. Fie, așadar, $p_1, \dots, p_n$ poli ai funcției f și presupunem că $\lim\limits_{|z|\longrightarrow\infty} f(z) = 0$. Atunci:

- Dacă $\mathrm{Im} p_k > 0$, atunci:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Rez}\left(f(z)e^{-i\omega z}, p_k\right), \quad \text{pentru } \omega < 0;$$

[1]Pentru a nu încărca inutil notația, vom folosi această variantă explicită doar aici. Regula care se va păstra în continuare este următoarea: argumentul funcției f care se transformă este t, iar argumentul transformatei $\mathcal{F}[f]$ este ω. De asemenea, argumentul t al funcției f se mai numește *timp*, iar argumentul ω al transformatei se mai numește *frecvență*.

- Dacă $\mathrm{Im} p_k < 0$, atunci:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Rez}\left(f(z)e^{-i\omega z}, p_k\right), \quad \text{pentru } \omega > 0;$$

În exerciții, ne vor mai fi de folos și următoarele proprietăți ale transformatei Fourier:

(1) **Liniaritatea:** $\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathcal{F}[f] + \beta\mathcal{F}[g]$, pentru orice f, g funcții L^1 și $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ scalari;

(2) **Simetria:** $\mathcal{F}\left[\mathcal{F}[f](\omega)\right] = 2\pi f(-\omega)$;

(3) **Rescalarea:** Fie $\alpha \in \mathbb{C}$. Atunci:

$$\mathcal{F}\left[f(\alpha t)\right](\omega) = \frac{1}{|\alpha|}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

(4) **Translația după t:**

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \mathcal{F}[f(t)] \cdot e^{-i\omega t_0}, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R};$$

(5) **Translația după ω:**

$$\mathcal{F}\left[e^{i\omega_0 t} f(t)\right] = \mathcal{F}[f(t)](\omega - \omega_0), \quad \forall \omega_0 \in \mathbb{R};$$

(6) **Derivarea după t:**

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (i\omega)^n \mathcal{F}[f](\omega),$$

în ipoteza că f este de n ori derivabilă, pentru un anume n;

(7) **Derivarea după ω:**

$$\mathcal{F}\left[(-it)^n f(t)\right] = \mathcal{F}^{(n)}[f](\omega),$$

în ipoteza că derivatele de pînă la n ori au sens;

(8) **Transformata conjugatei complexe:** Notăm $f^*(t)$ funcția conjugată complexă asociată lui $f(t)$. Atunci:

$$\mathcal{F}[f^*(t)] = \left(\mathcal{F}[f(t)]\right)^*(-\omega).$$

Altfel spus, se transformă funcția inițială, apoi se ia conjugatul rezultatului și se schimbă semnul argumentului;

(9) **Convoluția în timp:** Definim:

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

produsul de convoluție al funcțiilor f și g. Atunci:

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g];$$

(10) **Convoluția în frecvență:**

$$\mathcal{F}\left[f(t) \cdot g(t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](y) \cdot \mathcal{F}[g](\omega - y)dy.$$

7.2 Aplicații la ecuații integrale

Folosind formula de transformare Fourier, precum și inversarea acesteia, putem rezolva ecuații integrale. Vom prezenta acest lucru pe un exemplu.

Exemplu: Rezolvăm ecuația integrală:

$$\int_0^\infty y(t)\cos txdt = \frac{1}{x^2+1}.$$

Soluție: Pentru a face legătura cu transformările Fourier, avem nevoie să prelungim funcția y (astfel încît integrala să fie pe $(-\infty,\infty)$). Deoarece integrandul este par, acest lucru conduce la dublarea rezultatului. Deci avem:

$$\int_{-\infty}^\infty y(t)\cos txdt = \frac{2}{x^2+1}, \quad \int_{-\infty}^\infty y(t)\sin txdt = 0.$$

Acest lucru conduce la:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty y(t)e^{-itx}dt = \frac{1}{\pi(x^2+1)}.$$

Recunoaștem în membrul stîng formula de trasnformare Fourier, deci rezultă:

$$\mathcal{F}[y(t)](x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}.$$

Folosim acum formula de inversare și rezultă:

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}e^{itx}dx.$$

Acest calcul se poate face cu teorema reziduurilor, deoarece integrandul are doi poli, $p_{1,2} = \pm i$, ambii simpli. Obținem:

- Pentru $t < 0$ și polul $p_1 = i$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi i\text{Rez}\left(\frac{1}{x^2+1}e^{itx}, i\right) \\ &= 2i\cdot\lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{z^2+1}e^{itz} \\ &= 2i\cdot e^{-t}; \end{aligned}$$

- Pentru $t > 0$ și polul $p_2 = -i$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{pi}\cdot -2\pi i\text{Rez}\left(\frac{1}{x^2+1}e^{itx}, -i\right) \\ &= -2i\cdot\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{1}{z^2+1}e^{itz} \\ &= 2ie^t. \end{aligned}$$

Concluzia este că soluția arată astfel:

$$y(t) = \begin{cases} 2i \cdot \exp(-t), & t < 0 \\ 2i \cdot \exp(t), & t > 0 \end{cases} = 2i \cdot \exp(|t|)\,.$$

7.3 Exerciții

1. Rezolvați ecuațiile integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty f(t) \sin txdt = e^{-x}, \quad x > 0;$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty f(t) \cos txdt = \frac{1}{(1+x^2)^2};$

2. Calculați transformatele Fourier pentru funcțiile:

(a) $f(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & t \in [-1, 1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases};$

(b) $f(t) = \dfrac{t}{t^2 + a^2},\ a > 0;$

(c) $f(t) = \dfrac{1}{(t^2+1)^2};$

(d) $f(t) = \begin{cases} \exp(2t), & t \leq 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases};$

(e) $f(t) = \begin{cases} t^2 - t, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases};$

(f) $f(t) = \begin{cases} t, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}.$

3. Calculați transformatele Fourier pentru funcțiile de mai jos, folosind teorema reziduurilor:

(a) $f(t) = \dfrac{2}{t^2+9};$

(b) $f(t) = \dfrac{t}{(t^2+9)(t^2+1)};$

(c) $f(t) = \dfrac{1}{(t^2+4)^2}.$

SEMINAR 8

RECAPITULARE TEST (L. COSTACHE)

Integrale complexe
Calculați:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{z\,dz}{\sin z(1-\cos z)}$;

(b) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{dz}{3\sin z - \sin 3z}$;

(c) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^n \cdot e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1}\,dz$;

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 4\theta}{1-2a\cos\theta + a^2}\,d\theta,\ a > 1$;

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-6x+13}\,dx$;

(f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin ax}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\,dx,\ b, c > 0.$

Transformata Laplace
1. Să se determine transformata Laplace a funcției:

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 1 \\ \dfrac{t^2}{2}, & 1 < t < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos t, & t > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

2. Folosind transformata Laplace, rezolvați ecuațiile diferențiale:

(a) $y'' + 3y' + 2y = u(t-1) - u(t-2)$, știind $y(0) = 0, y'(0) = 0$;

(b) $y'' + 4y = \begin{cases} 8t^2, & 0 < t < 5 \\ 200, & t > 5 \end{cases}$, știind $y(1) = 1 + \cos 2$ și $y'(1) = 4 - 2\sin 2$;

(c) $x''(t) - 2x'(t-1) = t$, știind $x(0) = x'(0) = 0$;

(d) $y'' + 2y' - 2y = \begin{cases} 3\sin t - \cos t, & 0 < t < 2\pi \\ 3\sin 2t - \cos 2t, & t > 2\pi \end{cases}$, știind $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

3. Folosind transformata Laplace, rezolvați ecuația integrală:

$$x(t) = t + 2\int_0^t [t - \tau - \sin(t-\tau)] \cdot x(\tau) d\tau$$

Transformata Fourier

1. Determinați transformata Fourier a semnalului:

$$f(t) = (t+2)e^{-(t+2)(3i+5)}, \quad t > 0.$$

2. Rezolvați ecuația integrală, folosind transformata Fourier:

$$\int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)dt = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\sin\omega, & \omega \in (0,\pi) \\ 0, & \omega \geq \pi \end{cases}$$

SEMINAR 9

SPAȚII DE PROBABILITATE

9.1 Noțiuni teoretice

Trecem acum la studiul probabilităților într-un context mai abstract decît în liceu, unde se defineau și studiau evenimentele aleatoare concret.

Definiţie 9.1: Se numește *spațiu (cîmp) discret de probabilitate* o mulțime finită sau numărabilă $\Omega = (\omega_n)_n$, împreună cu un șir $(p_n)_n$, cu $0 \leq p_n \leq 1$, care satisface condiția $\sum_n p_n = 1$.

Orice submulțime $A \subseteq \Omega$ este un *eveniment*, căruia i se atașează o probabilitate

$$P(A) = \sum_{\omega_n \in A} p_n.$$

Intuitiv, putem privi elementele mulțimii Ω drept *experiențe*, pe care le putem colecta în *evenimente*, iar p_n este probabilitatea ca o experiență să se realizeze.

Alte definiții elementare sînt următoarele:

Definiţie 9.2: *Evenimentul sigur* este un eveniment care se realizează cu certitudine la fiecare repetare a experienței.

Evenimentul imposibil nu se produce la nicio efectuare a experienței.

Dat un eveniment $A \subseteq \Omega$, lui i se asociază *evenimentul contrar*, notat $\overline{A}$, CA sau A^c, care constă în nerealizarea lui A.

Două evenimente $A, B \subseteq \Omega$ se numesc *compatibile* dacă se pot produce simultan și *incompatibile* în caz contrar.

Pentru evenimente incompatibile, avem o definiție alternativă, calculatorie:

Definiţie 9.3: Dacă A și B sînt evenimente incompatibile, atunci:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Mai general, pentru orice șir (A_n) de evenimente două cîte două incompatibile, avem:

$$P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n).$$

Definiția abstractă a contextului în care vom studia teoria probabilităților urmează.

Definiţie 9.4: Se numește *spațiu de probabilitate* un triplet $(\Omega, \mathcal{K}, P)$, unde Ω este o mulțime de evenimente elementare (individuale), $\mathcal{K}$ este o submulțime a $\mathcal{P}(\Omega)$, iar $P : \mathcal{K} \longrightarrow [0,1]$ este o funcție de probabilitate, care satisface:

- $P(\Omega) = 1$;
- $P\Big(\bigcup_{n\geq 0} A_n\Big) = \sum_{n\geq 0} P(A_n)$, pentru orice șir (A_n) de evenimente două cîte două incompatibile.

Pornind de la această definiție generală, putem obține cazuri particulare cunoscute:

Definiția clasică a probabilității: Dacă Ω este o mulțime cu N elemente, putem defini un spațiu discret de probabilitate, definind $p_n = \frac{1}{N}$, pentru orice $n \in \{1, \dots, N\}$. În acest caz, probabilitățile sînt egale pentru toate evenimentele, deci spunem că *evenimentele sînt echiprobabile*. Pentru orice eveniment $A \subseteq \Omega$, avem:

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)},$$

care coincide cu definiția clasică a raportului dintre numărul cazurilor favorabile unui eveniment și numărul cazurilor posibile.

Probabilități geometrice: Dacă luăm $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ o submulțime oarecare, pe care considerăm *măsura Lebesgue* (cea cu ajutorul căreia calculăm integralele), atunci obținem un spațiu de probabilitate definind pentru orice eveniment A probabilitatea prin:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

unde μ este măsura Lebesgue din $\mathbb{R}^n$ (în particular, e vorba de lungimea dl pe $\mathbb{R}$, aria $dA = dxdy$ din $\mathbb{R}^2$ etc.).

Următoarele sînt proprietăți elementare ale probabilităților:

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un spațiu de probabilitate.

(1) Dacă $A, B \in \mathcal{K}$ și $A \subseteq B$, atunci $P(B - A) = P(B) - P(A)$;

(2) **Poincaré**: Fie n evenimente arbitrare $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{K}$. Atunci are loc:

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1, \dots, A_n).$$

(3) Pentru orice șir crescător de evenimente $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$, avem:

$$P\Big(\bigcup_{n \geq 0}\Big) = \lim_{n \longrightarrow \infty} P(A_n).$$

Definiţie 9.5: Evenimentele A și B se numesc *independente* dacă $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

În general, evenimentele $A_1, \dots, A_n$ se numesc *independente în ansamblu* dacă pentru orice $m \geq n$ și $1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_m \leq n$, avem:

$$P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_m}) = P(A_{j_1}) \cdots P(A_{j_m}).$$

Observaţie 9.1: Dacă avem n evenimente independente două cîte două (cf. primei părți a definiției de mai sus), nu rezultă neapărat că sînt evenimente în ansamblul lor (cf. părții a doua a definiției).

Un contraexemplu, datorat lui S. N. Bernstein este următorul. Considerăm un tetraedru omogen cu fețele colorate alb, negru, roșu, iar a patra, cu toate cele trei culori. Aruncăm acest corp și notăm cu A_i probabilitatea ca tetraedrul să se așeze (cu baza) pe fața cu numărul $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Aceste evenimente sînt elementare și $P(A_i) = \frac{1}{4}, \forall i$. Acum fie $A = A_1 \cup A_2$, $B = A_1 \cup A_3$ și $C = A_1 \cup A_4$. Atunci $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, deoarece pentru fiecare culoare sînt 4 cazuri posibile și 2 favorabile (fața cu culoarea respectivă și fața cu toate culorile).

În plus, avem:

$$P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = \frac{1}{4},$$

deci evenimentele sînt independente două cîte două.

În plus, avem:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A_1) = \frac{1}{4}$$
$$P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8},$$

deci evenimentele nu sînt independente în ansamblul lor.

Mai avem nevoie de următorul concept:

Definiţie 9.6: Fie A și B două evenimente, cu $P(B) \neq 0$.

Probabilitatea lui A condiționată de B, notată $P(A/B)$ sau $P_B(A)$ se definește prin:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

De asemenea, în calcule, vom mai folosi:
Formula de înmulțire a probabilităților: Fie $A_1, \ldots A_n$ evenimente. Atunci are loc:

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n/A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Formula probabilității totale: Dacă avem descompunerea evenimentului sigur Ω în reuniunea de n evenimente incompatibile $H_1, \ldots H_n$, atunci pentru orice eveniment $A \in \mathcal{K}$, are loc:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i) \cdot P(H_i).$$

Formula lui Bayes: În contextul și cu notațiile de mai sus:

$$P(H_j/A) = \frac{P(A/H_j) \cdot P(H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i) \cdot P(H_i)}.$$

În particular, pentru două evenimente A, B, avem:

$$P(A) = P(A/B) \cdot P(B) + P(A/B^c) \cdot P(B^c)$$
$$P(B/A) = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A/B) \cdot P(B) + P(A/B^c) \cdot P(B^c)}.$$

9.2 Exerciții

9.2.1 Calcul „clasic“

1. Într-un spațiu de probabilitate se considerăm evenimentele A, B, cu:

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

Determinați $P(A^c), P(A^c \cup B), P(A \cup B^c), P(A^c \cup B^c), P(A^c \cap B^c)$.

2. Care dintre următoarele evenimente rezultate în urma aruncării cu zarul este mai probabil:

(a) obținerea numărului 6 în cel puțin una din 4 aruncări;

(b) obținerea cel puțin a unei duble de 6 în 24 aruncări cu 2 zaruri?

3. O urnă conține 12 bile numerotate de la 1 la 12. Să se determine probabilitatea ca bilele numerotate cu 5, 7, 11 să iasă la extragerile cu numărul de ordine 5, 7, 11.
Soluție: Cazurile posibile sînt 12! la număr.

Cazurile favorabile sînt 9!, deoarece dacă fixăm de fiecare dată bilele cu numerele $5, 7, 11$, rămîn 9! libere.

Rezultă $P = \dfrac{9!}{12!} = \dfrac{1}{1320}$.

4. O urnă conține 50 bile, dintre care 10 sînt negre, iar restul albe. Se scot la întîmplare 5 bile. Care e probabilitatea ca între cele 5 bile să fie bile negre?

Indicație: Se calculează mai ușor probabilitatea evenimentului complementar.

5. Coeficienții întregi ai ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ sînt obținuți prin aruncarea unui zar de 3 ori. Să se determine probabilitatea ca rădăcinile ecuației să fie reale.

Indicație: Calculăm clasic probabilitatea ca $\dfrac{b^2}{4} \geq ac$, unde $a, b, c \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.

6. Într-o cameră întunecoasă se găsesc 5 perechi de pantofi. Se aleg la întîmplare 5 pantofi.

(a) Care este probabilitatea ca între cei 5 pantofi aleși să fie cel puțin o pereche, în ipoteza că cele 5 perechi sînt identice (deci este suficient să avem un pantof stîng și unul drept)?

(b) Care e probabilitatea ca între cei 5 pantofi aleși să fie cel puțin o pereche, dacă toate cele 5 perechi sînt distincte (culoare, număr)?

7. **Problema aniversării:** Într-o cameră sînt k persoane. Care este probabilitatea ca cel puțin două din aceste persoane să aibă aceeași zi de naștere, adică aceeași zi și lună a anului?

8. Se aruncă 3 zaruri. Calculați probabilitatea ca suma punctelor obținute să fie:

(a) mai mică decît 8;

(b) mai mare decît 7;

(c) egală cu 12.

9. Un scafandru are 2 sisteme de oxigen independente. Presupunem că probabilitatea ca primul sistem să funcționeze este 0,9, iar probabilitatea ca al doilea sistem să funcționeze este 0,8.

(a) Găsiți probabilitatea ca niciun sistem să nu se defecteze;

(b) Găsiți probabilitatea ca cel puțin unul din sisteme să funcționeze.

Soluție: Fie $S_{1,2}$ evenimentul ca sistemul $1, 2$ să funcționeze. (a) Cum evenimentele sînt independente, avem:

$$P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) \cdot P(S_2) = 0,72.$$

(b)

$$P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2) = 0,98.$$

9.2.2 Probabilități geometrice

10. Care este probabilitatea ca suma a 3 numere din intervalul $[0, a]$ alese la întîmplare să fie mai mare decît a?

Soluție: Spațiul de probabilitate este $\Omega = [0, a]^3$. Evenimentul cerut este dat de punctele mulțimii:

$$E = \{(x, y, z) \in \Omega \mid x + y + z \geq a\}.$$

Alegem un sistem ortogonal de axe și Ω devine un cub de latură a situat în primul octant. În acest caz, E este una din regiunile lui Ω separate de planul $x + y + z = a$. Rezultă:

$$P(E) = \frac{a^3 - \frac{a^3}{2}}{a^3} = \frac{1}{2}.$$

11. Pe un plan orizontal considerăm un sistem de axe XOY și mulțimea E a punctelor cu coordonate întregi. O monedă cu diametrul $\frac{1}{2}$ este aruncată la întîmplare pe acest plan. Care e probabilitatea ca moneda să acopere un punct din E?

Soluție: Fie $C(x_0, y_0)$ cel mai apropiat punct din E de centrul M al monedei, deci coordonatele lui M sînt de forma:

$$(x_0 + x, y_0 + y), \quad -\frac{1}{2} < x, y < \frac{1}{2}.$$

Spațiul de probabilitate este:

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} < x, y < \frac{1}{2}\right\}.$$

Mulțimea evenimentelor favorabile este dată de:

$$A = \left\{(x, y) \in \Omega \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \frac{1}{16}\right\},$$

deoarece raza monedei este $\frac{1}{4}$.

Rezultă:

$$p = \frac{\text{aria}(A)}{\text{aria}(\Omega)} = \frac{\pi}{16}.$$

12. Se alege aleatoriu un număr real x în intervalul $[0, 3]$. Care este probabilitatea ca x să fie mai apropiat de 0 decît de 1?

Soluție: Interpretînd problema geometric, ne putem gîndi la x ca fiind un punct pe axa reală. Atunci cazurile favorabile se află în segmentul $[0; 0,5)$, iar cazurile posibile sînt pe tot segmentul.

Probabilitatea, calculată cu formula geometrică, este dată de raportul lungimilor celor două segmente:

$$P = \frac{0,5}{3} = \frac{1}{6} \simeq 17\%.$$

13. Se trage cu o săgeată la o țintă circulară de rază r. Care este probabilitatea ca săgeata să ajungă mai aproape de centru decît de margine?

Soluție: Aria cercului, care ne dă și „cazurile posibile", este πr^2.

Cazurile favorabile se află în cercul concentric de rază $< \frac{r}{2}$, care are aria $\frac{\pi r^2}{4}$. Atunci:

$$P = \frac{1}{4}.$$

14. **Problema autobuzului (cu așteptare):** Să presupunem că ajungeți în stația de autobuz la o oră aleatorie din intervalul 12 și 1. Așteptați 20 minute în stație, iar dacă autobuzul nu vine, plecați. Același „program" îl are și autobuzul, dar cu condiția că așteaptă 5 minute în stație, apoi pleacă.

Care este probabilitatea să prindeți autobuzul?[1]

Soluție: Avem două variabile independente: momentul în care ajungeți în stație și momentul în care autobuzul ajunge. Deci putem modela problema bidimensional. Mai precis, să luăm un pătrat cu latura de 60 de unități (1/minut) și-i notăm laturile cu c și a („călător" și „autobuz").

Remarcăm că avem cazurile (cf. Figura 9.1):

- Pentru a prinde autobuzul la fix, ar trebui să ne situăm pe segmentul $a = c$;
- Cum autobuzul așteaptă 5 minute, de fapt putem să ne situăm în zona $c \leq a + 5$, *nețiind seama de faptul că și călătorul așteaptă (deocamdată)!*;
- Cum călătorul așteaptă 20 minute, ne situăm în zona $c \geq a - 20$ (*nețiind seama că și autobuzul așteaptă!*);
- Luînd toate restricțiile în considerare, ne interesează, de fapt, zona dintre cele două puncte anterioare, deci sub segmentul $c = a + 5$ și deasupra lui $c = a - 20$.

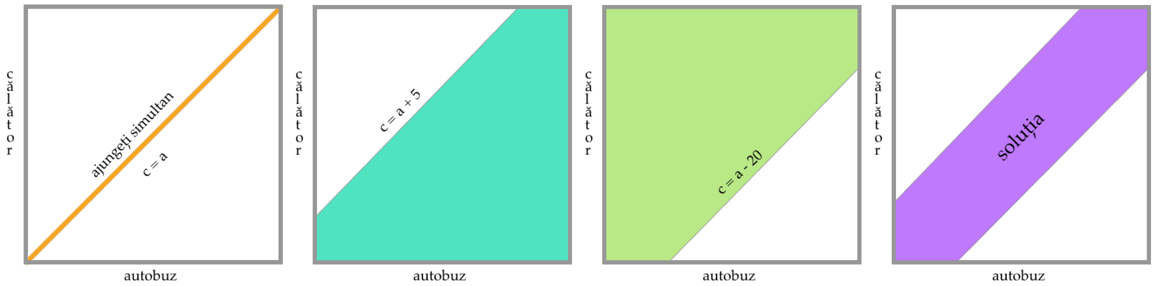
Acum trebuie doar să calculăm aria zonei corespunzătoare și să o împărțim la aria pătratului:

$$P = \frac{60^2 - \frac{55^2}{2} - \frac{40^2}{2}}{60^2} \simeq 36\%.$$

15. Trei persoane aleg la întîmplare un număr real între 0 și 1. Care este probabilitatea ca suma pătratelor numerelor alese de ei să nu depășească 1?

Soluție: Pentru a modela problema geometric, e clar că o putem gîndi ca pe alegerea unui punct din cubul unitate, $(x, y, z) \in [0, 1]^3$. Cazurile posibile sînt, atunci, date de volumul cubului, care este 1.

[1] Mai multe exemple și explicații puteți găsi, de exemplu, aici.



(a) $c = a$ (b) $c \leq a + 5$ (c) $c \leq a - 20$ (d) Soluția

Figura 9.1: *Problema autobuzului (cu așteptare)*

Pentru cazurile favorabile, avem nevoie de $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, care este sfera unitate. Dar, cum ne interesează doar alegerile de numere pozitive, i.e. partea din sferă care se găsește în interiorul cubului, adică $\dfrac{1}{8}$ din ea.

Avem, deci:

$$P = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi \cdot 1^3}{3}}{1} \simeq 52\%.$$

Mult mai multe exemple sofisticate de probabilități geometrice se pot găsi la Wolfram MathWorld.

SEMINAR 10

SCHEME CLASICE DE PROBABILITATE

Schemele clasice de probabilitate sînt modele matematice care ne permit calculul probabilității de realizare a unui eveniment în cazul unor distribuții anume.

10.1 Schema lui Poisson

Schema lui Poisson se formulează astfel. Presupunem că avem n urne U_i, $1 \leq i \leq n$, care conțin bile albe și bile negre în proporții cunoscute. Fie p_i probabilitatea de extragere a unei bile albe din urna U_i, respectiv q_i, probabilitatea de extragere a unei bile negre din urna U_i.

Extragem cîte o bilă din fiecare urnă. Probabilitatea de a obține k bile albe este coeficientul lui X^k din polinomul:

$$\prod_{i=1}^{n}(p_i X + q_i) = (p_1 X + q_1)(p_2 X + q_2) \cdots (p_n X + q_n).$$

Observație: În cazul schemei lui Poisson, extragerea se face *fără revenire*. O bilă, după ce a fost extrasă, nu este repusă în urnă, astfel că, după fiecare extragere, numărul de bile din urnă scade.

Exemplu: Avem 3 sisteme de siguranță, primul funcționează cu probabilitatea de 80%, al doilea, de 70%, iar al treilea, în 90% din cazuri. Să se determine probabilitatea ca oricare două dintre sisteme să funcționeze simultan.

Soluție: Ne aflăm în cazul schemei lui Poisson, „bilele“ fiind sistemele de siguranță, iar „extragerea“ înseamnă funcționarea lor. Așadar, căutăm coeficientul lui X^2 din polinomul:

$$\pi = (0,8 \cdot X + 0,2)(0,7 \cdot X + 0,3)(0,9 \cdot X + 0,1),$$

coeficient care este $p = 0,398$.

10.2 Schema lui Bernoulli (binomială)

Situația este similară cu cea din cazul Poisson, doar că acum extragerile se fac *cu repunere*. Adică, după ce fiecare bilă este extrasă și se înregistrează culoarea sa, este repusă în urnă, pentru a putea fi extrasă din nou, eventual.

Așadar, schema lui Bernoulli se formulează astfel. Avem o urnă cu a bile albe și b bile negre. Extragem cu repunere n bile. Probabilitatea să extragem k bile albe, cu $0 \leq k \leq n$ este dată de:

$$p(n,k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{unde } p = \frac{a}{a+b}, q = \frac{b}{a+b}.$$

De remarcat că în acest caz, p corespunde evenimentului favorabil, iar $q = 1 - p$.

Exemplu: Se aruncă două zaruri de 10 ori. Care este probabilitatea să se obțină de exact 4 ori suma 7?

Soluție: Ne aflăm în cazul schemei lui Bernoulli, unde „bilele“ sînt sumele de pe zaruri, iar „extragerea“ este aruncarea zarului. Evident, modelul potrivit este acela al extragerii cu revenire, deoarece orice sumă poate fi obținută la fiecare aruncare.

În acest caz, avem $p = \frac{1}{6}$, deoarece suma 7 poate fi obținută în 6 moduri din punctele de pe două zaruri, iar cazurile posibile sînt 36. Rezultă $q = \frac{5}{6}$.

În plus, avem $n = 10, k = 4$, deci:

$$p(10,4) = C_{10}^4 \frac{1}{6^4} \cdot \frac{5^6}{6^6}.$$

10.3 Schema multinomială

Schema lui Bernoulli se mai numește *schema binomială*, deoarece $p(n,k)$ este, de fapt, coeficientul lui X^k din dezvoltarea binomului $(pX+q)^n$.

O generalizare a acestei situații este *schema multinomială*, în care presupunem că avem o urnă cu bile de $s \in \mathbb{N}$ culori și se extrag cu repunere n bile. Probabilitatea de a extrage k_i bile de culoare i, cu $1 \leq i \leq s$ este dată de formula:

$$p(n; k_1, \ldots, k_s) = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_s!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s},$$

unde $n = k_1 + \cdots + k_s$ și $p_1 + \cdots + p_s = 1$, iar p_i este probabilitatea de a extrage o bilă de culoare i.

Exemplu: Se aruncă cu un zar de 10 ori. Care este probabilitatea ca exact de 2 ori să apară fața cu 1 punct și de 3 ori să apară fața cu 2 puncte?

Soluție: Evident, sîntem în cazul schemei multinomiale. „Culorile“ sînt punctele de pe zaruri și vrem să „extragem 2 bile de culoarea 1 și 3 bile de culoarea 2“.

Atunci $n = 10$, deoarece facem 10 „extrageri“, $k_1 = 2$ și $k_2 = 3$. În plus, avem $p_1 = p_2 = \frac{1}{6}$, deoarece orice număr de pe zar are aceeași probabilitate de a apărea. Rezultă, de asemenea, că avem nevoie și de $k_3 = n - k_1 - k_2 = 5$ și $p_3 = 1 - p_1 - p_2 = \frac{2}{3}$.

Probabilitatea cerută este:

$$p(10; 2, 3, 5) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!} \cdot \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{6^3} \cdot \frac{2^5}{3^5}.$$

10.4 Schema geometrică

Dintr-o urnă cu a bile albe și b bile negre, extragem fără repunere n bile, cu $n \leq a + b$. Probabilitatea de a obține $k \leq a$ bile albe, *fără repunere*, este dată de:

$$p_{a,b}^{k,n-k} = \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}.$$

Mai general, dacă avem a_i bile de culoarea i, $1 \leq i \leq s$ și extragem n bile fără repunere, atunci probabilitatea de a extrage k_i, cu $k_1 + \cdots + k_s = n$ bile de culoarea i este dată de formula:

$$p_{a_1,\ldots,a_s}^{k_1,\ldots,k_s} = \frac{C_{a_1}^{k_1} \cdots C_{a_s}^{k_s}}{C_{k_1+\cdots+k_s}^n}.$$

Exemplu: Avem un lot de 100 articole, dintre care 80 sînt corespunzătoare, 15 sînt cu defecțiuni remediabile și 5 rebuturi. Alegem 6 articole. Care este probabilitatea ca dintre acestea, 3 să fie bune, 2 cu defecțiuni remediabile și un rebut?

Soluție: Presupunem că extragerile se fac cu repunere. Atunci sîntem în cazul schemei multinomiale, deci:

$$p(6; 3, 2, 1) = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} \left(\frac{80}{100}\right)^3 \cdot \left(\frac{15}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{100}\right)^1.$$

Dacă extragerile se fac fără repunere, ne aflăm în cazul schemei geometrice și avem:

$$p_{80,15,5}^{3,2,1} = \frac{C_{80}^3 \cdot C_{15}^2 \cdot C_5^1}{C_{100}^6}.$$

10.5 Exerciții

1. Un lot de 50 de procesoare conține 3 defecte. Alegem la întîmplare 10, simultan, și le verificăm. Care este probabilitatea ca 2 să fie defecte?

Indicație: Schema geometrică (fără repunere).

2. (a) Un semnal este transmis pe 3 canale diferite, iar probabilitățile de recepționare corectă sînt 0,9; 0,8 și 0,7. Care este probabilitatea să se recepționeze corect un semnal?

(b) Dar dacă semnalul este transmis pe un canal ales la întîmplare și presupunem că orice canal poate fi ales cu aceeași probabilitate?

Indicație: (a) Schema lui Poisson.

(b) Formula probabilității totale: $\frac{1}{3} \cdot (0,9 + 0,8 + 0,7)$.

3. O urnă conține 2 bile albe și 3 bile negre. Alegem la întîmplare 2 bile, fără repunere. Care este probabilitatea ca acestea să fie ambele negre?

Dar dacă extragerea se face cu repunere?

4. Se testează 5 dispozitive care funcționează în condiții identice, independent și cu randament de 0,9 fiecare. Care este probabilitatea ca exact două să funcționeze?

Indicație: Schema Bernoulli.

5. Se consideră 3 urne: U_1, care conține 5 bile albe și 5 negre, U_2, care conține 4 bile albe și 6 negre și U_3, care conține 4 bile albe și 5 negre. Din fiecare urnă se extrag cu repunere cîte 5 bile.

Care este probabilitatea ca din 2 urne să obținem cîte 2 bile albe și 3 negre, iar din a treia urnă să obținem o altă combinație?

Indicație: Schema Poisson sau Bernoulli, după cazuri (cu/fără repunere).

6. Se consideră urnele din problema precedentă. Din fiecare urnă se extrage cîte o bilă. Dacă se repetă experiența de 5 ori, care este probabilitatea ca de 3 ori să se obțină o bilă albă și 2 negre?

Indicație: Schema Poisson.

7. Fie 8 canale de transmisie a informației care funcționează independent. Presupunem că un canal este activ cu probabilitatea 1/3.

Să se calculeze probabilitatea ca la un moment dat să fie mai mult de 6 canale active.

Indicație: Schema Bernoulli.

8. Șase vînători au zărit o vulpe și au tras simultan. Presupunem că de la distanța de la care au tras, fiecare vînător nimerește în mod obișnuit vulpea cu o probabilitate de $\frac{1}{3}$. Aflați probabilitatea ca vulpea să fie nimerită.

9. Se aruncă o monedă de 8 ori. Aflați probabilitatea ca stema să apară de 6 ori. Aflați probabilitatea ca stema să apară de *cel puțin* 6 ori.

10. Un muncitor produce piese astfel încît 99% sînt bune, 7% au defecte remediabile și 3% sînt rebuturi.

Se aleg aleatoriu 3 piese produse de muncitor. Care este probabilitatea ca dintre aceste 3 piese, cel puțin una să fie bună și cel puțin una să fie rebut?

SEMINAR 11

VARIABILE ALEATOARE

11.1 Cazul discret

Variabilele aleatoare sînt moduri de reprezentare a informației în calculul probabilităților, precum matricele ne pot ajuta să „codificăm“ informații geometrice sau algebrice. De obicei, ele se reprezintă asemenea permutărilor, anume ca tablouri bidimensionale.

Începem cu definițiile fundamentale.

Definiţie 11.1: O variabile a cărei valoare se determină de un eveniment rezultat în urma unei experiențe se numește *variabilă aleatoare.*

Definiţie 11.2: Fie X o variabilă aleatoare care poate lua valorile $x_1, \dots, x_n$, cu probabilitățile $f(x_1)$, $\dots, f(x_n)$. Mulțimea de perechi ordonate $\{(x_i, f(x_i))\}_i$ definește *repartiția* variabilei aleatoare.

Mai general, dacă X este o variabilă aleatoare reală (adică $\mathrm{Im} f \subseteq \mathbb{R}$), atunci funcția $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$F_X(x) = P(X < x), \forall x \in \mathbb{R}$$

se numește *funcția de repartiție* a variabilei aleatoare X.

Putem interpreta funcția de repartiție în sensul următor: calculată în x, ea ne dă probabilitatea ca valorile variabilei aleatoare să fie pînă în x.

Se poate vedea din definiție că au loc următoarele *proprietăți*:

(1) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0$, iar $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} F_X(x) = 1$;

(2) F_X este crescătoare (deoarece acumulează) și este continuă la dreapta în orice punct $x \in \mathbb{R}$;

(3) $P(X = x) = F(x) - F(x - 0)$, unde $F(x - 0)$ notează limita la stînga

$$\lim_{x_0 \nearrow x} F(x_0).$$

(4) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Ne vor interesa două cazuri, anume acelea ale variabilelor aleatoare continue și discrete, pe care le definim mai jos.

Definiție 11.3: Variabila aleatoare X se numește *discretă* dacă mulțimea valorilor ei este o mulțime cel mult numărabile de numere reale sau complexe (în bijecție cu o submulțime [nestrictă] a lui $\mathbb{N}$), $\{a_n\}_n$.

În acest caz, dacă $P(X = a_n) = p_n$, atunci condiția de normare este $\sum p_n = 1$, iar funcția de repartiție F_X este o funcție în scară, cu:

$$F_X(x) = \sum_{a_n < x} p_n.$$

În acest caz, putem reprezenta variabila aleatoare într-o formă matriceală:

$$X \sim \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & \dots \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix},$$

matrice care se numește *matricea de repartiție* a lui X sau *distribuția* sa.

Cazul continuu este definit mai jos.

Definiție 11.4: Dacă $P(X = x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci variabila aleatoare X se numește *continuă*. Echivalent, funcția ei de repartiție este o funcție reală continuă (v. proprietatea (3)).

În multe situații, vom lucra cu variabile aleatoare discrete, reprezentate matriceal. Va fi util să definim cîteva operații elementare între aceste obiecte.

Fie, așadar, două variabile aleatoare discrete:

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}$$

Definim $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \forall i, j$. Atunci au loc formulele de calcul:

$$p_i = \sum_j p_{ij}$$
$$q_j = \sum_i p_{ij}$$
$$1 = \sum_{i,j} p_{ij}.$$

Variabilele X și Y se numesc **independente** dacă $p_{ij} = p_i \cdot q_j$.

Suma variabilelor are repartiția:

$$X + Y : \begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}.$$

Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ este o constantă reală, atunci variabila $X + \alpha$ are repartiția:

$$X + \alpha \ : \ \begin{pmatrix} x_i + \alpha \\ p_i \end{pmatrix}.$$

Produsul variabilelor X și Y are repartiția:

$$XY \ : \ \begin{pmatrix} x_i y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}$$

Produsul αX, pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ are repartiția:

$$\alpha X \ : \ \begin{pmatrix} \alpha x_i \\ p_i \end{pmatrix}.$$

Să vedem un exemplu de calcul:
Exemplu: Se dau variabilele independente:

$$X \ : \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad Y \ : \ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Determinați repartițiile variabilelor $X + Y, XY, 2 + X, X^2, 3Y$.

Soluție: Vom prezenta repartițiile punînd valorile pentru evenimente în ordine crescătoare. De exemplu, $X + Y$ poate lua valorile 1, 2, 3, 4, iar X^2 poate lua valorile 0, 1, 4.

Folosim independența și formulele de calcul pentru probabilități și obținem, de exemplu:

$$\begin{aligned} P(X + Y = 1) &= P(X = 0 \wedge Y = 1) \\ &= P(X = 0) \cdot P(Y = 1) \\ &= 0,12 \\ P(X + Y = 2) &= P\Big((X = 0 \wedge Y = 2) \vee (X = 1 \wedge Y = 1)\Big) \\ &= P(X = 0 \wedge Y = 2) + P(X = 1 \wedge Y = 1) \\ &= 0,32 \end{aligned}$$

Similar se calculează și celelalte valori și, folosind definițiile operațiilor, obținem:

$$X+Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,12 & 0,32 & 0,4 & 0,16 \end{pmatrix}$$
$$XY : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0,2 & 0,24 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$
$$2+X : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$$
$$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$$
$$3Y : \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Pentru studiul variabilelor aleatoare se folosesc mai multe mărimi, pe care le introducem, pe rînd.

Definiţie 11.5: Fie X o variabilă aleatoare discretă.

(1) Dacă seria $\sum_{n\geq 0} x_n p_n$ este absolut convergentă, atunci spunem că X admite medie, iar numărul:

$$E(X) = \sum_{n\geq 0} x_n p_n$$

se numește *media* lui X;

(2) Pentru $n \neq 0$, media $E(X^n)$ a variabilei X^n se numește *momentul de ordinul n* al lui X;

(3) Media variabilei $(X - E(X))^2$ se numește *varianța* sau *dispersia* lui X, notată $\mathrm{Var}(X)$ sau $D^2(X)$.

Funcția de medie are următoarele proprietăți esențiale:

(a) **Liniaritatea:** $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

(b) **Monotonia:** Dacă $X \leq Y$, atunci $E(X) \leq E(Y)$;

(c) Dacă X este o constantă c, atunci $E(X) = c$;

(d) Dacă X și Y sînt variabile aleatoare independente, adică descriu evenimente independente, atunci $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

Funcția de dispersie are proprietățile:

(a) $D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2$;

(b) $D^2(X) \geq 0$;

(c) $D^2(X) = 0 \iff P(X = E(X)) = 1$, adică X este o constantă cu probabilitatea 1 (X descrie doar evenimentul sigur);

(d) **Cebîșev:** Pentru orice $\varepsilon > 0$, are loc:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) < \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}.$$

Echivalent, se mai poate scrie:

$$P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}.$$

(e) $D^2(\alpha X) = \alpha^2 D^2(X)$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{C}$;

(f) Dacă X și Y sînt independente, atunci:

$$D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y).$$

Mai definim două mărimi care se asociază variabilelor aleatorii.

Definiţie 11.6: Fie X și Y două variabile aleatoare. Numim *covarianță* a variabilelor X și Y, notată $\text{cov}(X, Y)$ numărul:

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Proprietățile esențiale ale covarianței sînt date de:

(a) Dacă X și Y sînt variabile aleatoare independente, atunci $\text{cov}(X, Y) = 0$;

(b) Dacă $X_1, \ldots, X_n$ sînt variabile aleatoare cu dispersiile D_i^2 și covarianțele $\text{cov}(X_i, X_j)$, $i \neq j$, atunci are loc:

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D_i^2 + 2\sum_{i<j} \text{cov}(X_i, X_j).$$

Definiţie 11.7: Dacă X și Y sînt variabile aleatoare, se numește *coeficient de corelație* al lor, notat $\rho(X, Y)$, numărul calculat prin:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D^2(X) \cdot D^2(Y)}}$$

Se poate vedea din definiție că, atît covarianța, cît și corelația arată „gradul de independență“ a variabilelor aleatoare X și Y. Într-adevăr, dacă X și Y sînt independente, atunci avem $\rho(X, Y) = 0$. Afirmația reciprocă este, însă, falsă!

Să luăm un exemplu: Fie $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, cu $P(a_i) = \frac{1}{4}$.

Presupunem că variabila aleatoare X realizează corespondența:

$$X(a_1) = 1, X(a_2) = -1, X(a_3) = 2, X(a_4) = -2.$$

Atunci, ea are matricea de repartiție:

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Presupunem că o altă variabilă aleatoare Y realizează corespondența:

$$Y(a_1) = 1, Y(a_2) = 1, Y(a_3) = -1, Y(a_4) = -1.$$

Atunci matricea ei se poate reduce la:

$$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Produsul celor două variabile aleatoare are matricea de repartiție:

$$XY : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Rezultă că $E(X) = E(Y) = E(XY)$, deci $\text{cov}(X, Y) = 0$. Însă putem observa că X și Y nu sînt independente. Într-adevăr, avem:

$$P(X = 1 \wedge Y = 1) = P(a_1) = \frac{1}{4} \neq P(X = 1) \cdot P(Y = 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}.$$

În fine, o altă noțiune de care avem nevoie este *funcția generatoare.*

Definiție 11.8: Fie X o variabilă aleatoare discretă care ia valori naturale.

Funcția $G_X(t)$, definită prin:

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n \geq 0} p_n t^n,$$

cu $t \leq 1$ și $p_n = P(X = n)$ se numește *funcția generatoare* a variabilei aleatoare X.

Funcția generatoare codifică, de fapt, în coeficienții unei serii formale, repartiția unei variabile aleatoare. Ea are următoarele proprietăți:

(a) Dacă avem variabilele aleatoare independente $X_1, \ldots, X_n$, iar $X = X_1 + \cdots + X_n$, atunci:

$$G_X(t) = G_{X_1}(t) \cdots G_{X_n}(t);$$

(b) $E(X) = G'_X(1)$;

(c) $D^2(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2$;

(d) Două variabile aleatoare cu aceeași funcție generatoare au aceeași repartiție.

11.2 Exemple de repartiții discrete

Vom regăsi acum, în contextul teoriei variabilelor aleatoare, scheme clasice de probabilitate.

11.2.1 Repartiția binomială (Bernoulli)

Presupunem că se fac n experiențe independente, în fiecare din experiențe, probabilitatea de realizare a unui eveniment A fiind constantă și egală cu p (rezultă că probabilitatea ca A să nu se realizeze este $q = 1 - p$).

Numărul de realizări ale evenimentului A în cele n experiențe se constituie ca o variabilă aleatoare X, ale cărei valori posibile sînt $k = 0, 1, \ldots, n$, în funcție de cîte din experiențe realizează A. Așadar, avem $P(X = k) = p_k$.

Cînd considerăm fiecare k, cu probabilitatea sa de realizare, mulțimea perechilor (k, p_k), $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ se numește *repartiție binomială* sau *repartiție Bernoulli*.

Pentru acestea, valorile principalilor parametri sînt:

- $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$;
- $E(X) = np$;
- $D^2(X) = npq$;
- $G_X(t) = (pt + q)^n$.

Observație: Pentru $n \longrightarrow \infty, p \longrightarrow 0$, astfel încît $np = \lambda$, probabilitățile $P(X = k)$ pot fi aproximate prin valorile repartiției Poisson (vezi mai jos).

11.2.2 Repartiția geometrică

Fie X numărul de experimente de tip Bernoulli, cu probabilitatea p de succes, care trebuie repetate pînă la apariția primului succes. Atunci:

- $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*$;

- $E(X) = \frac{1}{p}$;
- $D^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$;
- $G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}$.

11.2.3 Repartiția binomial negativă

Fie X numărul de experimente de tip Bernoulli cu probabilitatea de succes p care trebuie efectuate pentru a obține m succese. Atunci:

- $P(X = n) = C_{n-1}^{m-1} p^m q^{n-m}$ (pentru $m = 1$, găsim repartiția geometrică);
- $E(X) = \frac{m}{p}$;
- $D^2(X) = \frac{mq}{p^2}$;
- $G_X(t) = \frac{p^m t^m}{(1-qt)^m}$.

11.2.4 Repartiția hipergeometrică

Fie X o variabilă aleatoare care reprezintă numărul de bile albe obținute după n extrageri fără repunere dintr-o urnă ce conține a bile albe și b bile negre. Atunci avem:

- $P(X = x) = \frac{C_a^x C_b^{n-x}}{C_{a+b}^n}, 0 \leq x \leq n$;
- $E(X) = np$;
- $D^2(X) = xpq \cdot \frac{a+b-x}{a+b-1}$, unde $p = \frac{a}{a+b}$, iar $q = 1 - p = \frac{b}{a+b}$.

11.2.5 Repartiția Poisson

Repartiția Poisson se caracterizează printr-un parametru $\lambda > 0$ (v. repartiția binomială [Bernoulli] mai sus). Avem:

- $P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}, n \in \mathbb{N}$;
- $E(X) = \lambda$;

- $D^2(X) = \lambda$;
- $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

11.3 Cazul continuu

Definiţie 11.9: Variabila aleatoare X se numește *absolut continuă* dacă există o funcție integrabilă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ astfel încît funcția de repartiție $F(x)$ a lui X să fie dată de:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

În acest caz, f se numește *densitatea de probabilitate* a lui X.

Ca în cazul discret, avem următoarele proprietăți esențiale:

(a) Funcția f este pozitivă și are loc condiția de normare

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

(b) În orice punct de continuitate a lui f, avem $F'(x) = f(x)$;

(c) $P(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$;

(d) $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$;

(e) Dacă X are densitatea X, iar $Y = aX + b$ este o altă variabilă aleatoare, cu $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, atunci Y are densitatea:

$$f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Definiţie 11.10: Pentru orice variabilă aleatoare X, funcția:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX})$$

se numește *funcția caracteristică* a lui X.

Funcția caracteristică joacă un rol similar funcției generatoare din cazul discret. Astfel, ea are următoarele proprietăți:

(a) Dacă $X_1, \ldots, X_n$ sînt variabile aleatoare independente, iar $X = X_1 + \cdots + X_n$, atunci:

$$\varphi_X(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t);$$

(b) Dacă X admite moment de ordinul n, atunci:

$$E(X^k) = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{i^k}, \quad 1 \le k \le n;$$

(c) Două variabile aleatoare cu aceeași funcție caracteristică au aceeași repartiție;

(d) Dacă X este discretă, atunci obținem:

$$\varphi_X(t) = \sum_n e^{ita_n} p_n;$$

(e) Dacă X are densitatea de repartiție $f(x)$, atunci:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx,$$

iar în punctele de continuitate ale lui f, are loc relația:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt.$$

În continuare, prezentăm cele mai cunoscute repartiții absolut continue.

11.4 Repartiții absolut continue

11.4.1 Repartiția normală (gaussiană)

Dată media m și abaterea pătratică σ, repartiția variabilei aleatoare X are densitatea:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

În acest caz, se mai notează $X \sim N(m, \sigma)$.

Pentru cazul particular $m = 0$ și $\sigma = 1$, X se numește *variabilă aleatoare standard.*

Funcția caracteristică este dată de $\varphi_X(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

Pentru cazul variabilelor normale standard, funcția de repartiție are o formă particulară și se numește *funcția lui Laplace* (eng. CDF, *Cumulative Distribution Function*):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Observație: Valorile funcției Laplace sînt tabelate și, de obicei, se dau în probleme.

În general, dacă avem o variabilă aleatoare normală de tip $N(m, \sigma)$, atunci funcția ei de repartiție F se poate obține din funcția lui Laplace în forma:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right).$$

Așadar, avem:

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - m}{\sigma}\right), \tag{11.1}$$

de unde putem obține mai departe:

$$P(|X - m| < \varepsilon\sigma) = \Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon) - 1.$$

11.4.2 Repartiția uniformă

Pentru un interval $[a, b]$, densitatea de repartiție este:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

În acest caz, avem media $E(X) = \dfrac{a + b}{2}$ și $D^2(X) = \dfrac{(b - a)^2}{12}$.

11.4.3 Repartiția exponențială

Dat un parametru $\lambda > 0$, repartiția exponențială are densitatea:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Pentru aceasta, avem:

- $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$;
- $D^2(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$;
- $\varphi_X(t) = \left(1 - \dfrac{it}{\lambda}\right)^{-1}$.

11.4.4 Repartiția Gamma

Dați parametrii $\lambda, p > 0$, densitatea variabilei aleatoare de repartiție Gamma este:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases},$$

unde Γ este funcția lui Euler. În acest caz, avem:

- $E(X) = \dfrac{p}{\lambda}$;
- $D^2(X) = \dfrac{p}{\lambda^2}$;
- $\varphi_X(t) = \left(1 - \dfrac{it}{\lambda}\right)^{-p}$.

Din repartiția Gamma, putem obține alte cîteva cazuri particulare:

- pentru $p = 1$, se obține repartiția exponențială;
- pentru $\lambda = \dfrac{1}{2}, p = \dfrac{n}{2}$, se obține repartiția numită *hi pătrat*, cu n grade de libertate, notată $\chi^2(n)$.

11.4.5 Repartiția Cauchy

Aceasta are densitatea $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$.

În acest caz, X nu admite valoare medie.

11.5 Exerciții rezolvate

1. Doi parteneri egal cotați boxează 12 runde. Probabilitatea ca oricare dintre ei să cîștige o rundă este 50%. Să se calculeze valoarea medie, dispersia și abaterea medie pătratică a variabilei aleatoare care reprezintă numărul de runde cîștigate de unul din parteneri.

Soluție: Variabila aleatoare are o distribuție binomială. Astfel, avem:

- $P(X = k) = C_{12}^k \dfrac{1}{2^k} \cdot \dfrac{1}{2^{12-k}}$;
- $E(X) = np = 12 \cdot \dfrac{1}{2}$;

- $D^2(X) = npq = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3$;
- $D(X) = \sqrt{D^2(X)} = \sqrt{3}$.

2. La o agenție de turism s-a constatat că 5% dintre persoanele care au făcut rezervări renunță. Se presupune că s-au făcut 100 de rezervări pentru un hotel cu 95 locuri. Care este probabilitatea ca toate persoanele ce se prezintă la hotel să aibă loc?

Soluție: Fie X variabila aleatoare corespunzătoare numărului de persoane care se prezintă la hotel. X urmează o repartiție binomială, cu $n = 100$ și $p = 0,95$. Atunci avem:

$$P(X \leq 95) = 1 - P(X > 95) = 1 - \sum_{k=96}^{100} C_{100}^{k}(0,05)^{100-k} \cdot (0,95)^{k}.$$

3. La examenul de matematică, probabilitatea ca o teză să fie notată cu notă de trecere este 75%. Se aleg la întîmplare 10 lucrări. Fie X variabila aleatoare ce reprezintă numărul tezelor ce vor fi notate cu notă de trecere. Calculați:

(a) repartiția lui X ;

(b) $E(X), D^2(X)$;

(c) $P(X \geq 5), P(7 \leq X \leq 10/X \geq 8), P(X = 10)$;

(d) funcția caracteristică a lui X.

Soluție: (a) Avem o variabilă aleatoare cu repartiție binomială și $n = 10$, $p = 0,75$. Atunci X ia valorile $x \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ cu probabilitățile corespunzătoare distribuției binomiale, deci:

$$p(x) = C_{10}^{x}(0,75)^{x} \cdot (0,25)^{10-x}.$$

(b) Conform formulelor de calcul, avem:

$$E(X) = np = 10 \cdot 0,75 = 7,5$$
$$D^2(X) = npq = 10 \cdot 0,75 \cdot 0,25 = 1,875.$$

(c)

$$P(X \geq 5) = \sum_{x=5}^{10} C_{10}^{x}(0,75)^{x} \cdot (0,25)^{10-x}$$

Pentru $P(7 \leq X \leq 10/X \geq 8)$ avem un *eveniment condiționat.* Dacă A și B sînt două evenimente, amintim că probabilitatea $P(A/B)$, adică probabilitatea evenimentului A condiționat de evenimentul prealabil B este:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Atunci, obținem:

$$\begin{aligned}
P(7 \le X \le 10/X \ge 8) &= \frac{P(8 \le X \le 10)}{P(X \ge 8)} \\
&= \frac{\sum_{x=8}^{10} C_{10}^{x}(0,75)^{x}(0,25)^{10-x}}{\sum_{x=8}^{10} C_{10}^{x}(0,75)^{x}(0,25)^{10-x}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

În fine:

$$P(X = 10) = C_{10}^{10}(0,75)^{x}(0,25)^{0}.$$

(d) Calculăm succesiv:

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= E(e^{itX}) \\
&= \sum_{x=0}^{10} e^{itx} C_{10}^{x}(0,75)^{x}(0,25)^{10-x} \\
&= (0,75 \cdot e^{it} + 0,25)^{10}.
\end{aligned}$$

4. Presupunem că la 100 de convorbiri telefonice au loc 1000 de bruiaje. Care este probabilitatea de a avea o convorbire fără bruiaje? Dar una cu cel puțin 2 bruiaje?

Variabila aleatoare ce reprezintă numărul de bruiaje se consideră a fi repartizată Poisson, cu $\lambda = E(X)$.

Soluție: Avem $E(X) = \dfrac{1000}{100} = 10 = \lambda$, care este și parametrul distribuției Poisson. Atunci:

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= e^{-10} \cdot \frac{10^{0}}{0!} = e^{-10} \\
P(X \ge 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\
&= 1 - e^{-10} - 10 \cdot e^{-10}.
\end{aligned}$$

5. Într-o mină au loc în medie 2 accidente pe săptămînă, distribuite după legea Poisson. Să se calculeze probabilitatea de a avea cel mult 2 accidente:

(a) într-o săptămînă;

(b) în 2 săptămîni;

(c) în fiecare săptămînă dintr-un interval de 2 săptămîni.

Soluție: (a) Fie X variabila aleatoare ce desemnează numărul de accidente dintr-o săptămînă. Distribuția este de tip Poisson, cu $\lambda = E(X) = 2$. Atunci:

$$P(X \leq 2) = e^{-2}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{4}{2!}\right) = 5e^{-2}.$$

(b) Fie Y variabila aleatoare ce desemnează numărul de accidente în 2 săptămîni. Distribuția este de asemenea de tip Poisson, cu $\lambda = 2 + 2 = 4$. Atunci:

$$P(Y \leq 2) = e^{-5}\left(1 + \frac{4}{1!} + \frac{16}{2!}\right) = 13e^{-4}.$$

(c) Probabilitatea cerută este:

$$P(X \leq 2) \cdot P(X \leq 2) = 25e^{-4}.$$

6. La un anumit cîntar erorile de măsurare sînt normal distribuite cu $m = 0$ și $\sigma = 0,1g$. Dacă se cîntărește un obiect la acest aparat, care este probabilitatea ca eroarea de măsurare să fie mai mică decît 0,15g?

Soluție: Fie X variabila aleatoare care reprezintă eroarea de măsurare dată cînd un obiect este cîntărit. Această variabilă este continuă și distribuită normal cu parametrii dați. Notăm acest lucru cu $X \sim N(0; 0,1)$. Vrem să calculăm probabilitatea $P(-0,15 \leq X \leq 0,15)$.

Avem succesiv (cf. (11.1)):

$$\begin{aligned} P(-0,15 \leq X \leq 0,15) &= P\left(\frac{-0,15 - 0}{0,1} \leq X \leq \frac{-0,15 + 0}{0,1}\right) \\ &= P(-1,5 \leq X \leq 1,5) \\ &= \Phi(1,5) - \Phi(-1,5) \\ &= \Phi(1,5) - 1 + \Phi(1,5) \\ &= 0,8664. \end{aligned}$$

11.6 Exerciții propuse

1. Dacă efectuăm o măsurătoare, iar rezultatul este cuprins între valorile k și $k + 1$, îl aproximăm cu $k + \frac{1}{2}$. Astfel, eroarea comisă poate fi presupusă uniform distribuită pe intervalul $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Care este probabilitatea ca eroarea să fie mai mare ca $\frac{1}{4}$?

2. Fie variabila aleatoare X, distribuită uniform pe $(-1, 1)$. Determinați densitățile de probabilitate, mediile și dispersiile pentru variabilele $Y = 2X + 1$ și $Z = 2X^2 + 1$.

3. Durata medie de funcționare a unei baterii este o variabilă aleatoare, pe care o notăm X și care este repartizată normal, $N(m, \sigma^2)$, unde $m = 120$ zile este timpul mediu de funcționare, iar $\sigma = 10$ zile este abaterea față de medie. Determinați:

(a) probabilitatea ca bateria să funcționeze cel puțin 100 zile;

(b) probabilitatea ca bateria să funcționeze între 100 și 150 zile;

(c) intervalul de timp în care se poate spune că bateria funcționează cu o probabilitate de cel puțin 75% („aproape sigur“).

4. Fie $a, b > 0$ și $n \in \mathbb{N}$. Determinați a, b astfel încît funcția $f_n(x) = ax^n e^{-b^2x^2}$ pentru $x > 0$ să fie o densitate de probabilitate pentru o variabilă aleatoare cu media m.

5. Fie densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare X de forma:

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \ln\left(\dfrac{a}{x}\right), & 0 < x < a \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se determine constanta c astfel încît f să fie corect definită și să se calculeze valoarea medie și dispersia variabilei X.

6. Determinați funcția caracteristică a variabilei aleatoare X cu densitatea de probabilitate dată de:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{|x|}{2}\right), & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$$

Aflați funcția caracteristică a acestei variabile aleatoare.

7. Fie X, Y două variabile aleatoare independente, cu $X : N(1, 2)$ și $Y : U(0, 2)$. Determinați $M(X + Y), M(XY), M(X^2), M(X - Y^2), D^2(X + Y), D^2(X - Y)$.

8. Presupunem că emisia de particule dintr-un experiment este modelată de legea Poisson, cu $\lambda = 30$ particule pe oră. Care este probabilitatea ca în 10 minute să fie emise cel mult 20 particule?

9. Fie variabilele aleatoare X, Y, în relația $Y = 2 - 3X$. Calculați media și dispersia pentru Y, precum și corelația și coeficientul de corelație, știind că $m_X = -1, D_X^2 = 4$.

10. Presupunem că modulul vectorului viteză a unei particule este o variabile aleatoare care este repartizată după legea Maxwell, adică are:

$$f(v) = \frac{4h^2}{\sqrt{\pi}} \cdot v^2 \cdot e^{-h^2v^2}, \quad v > 0.$$

Aflați media și dispersia vitezei.

SEMINAR 12

VECTORI ALEATORI BIDIMENSIONALI

Putem gîndi vectorii aleatori bidimensionali ca pe niște *matrice aleatoare.* Însă noțiunea este chiar ceva mai generală. Astfel, dacă X și Y sînt două variabile aleatoare, atunci pur și simplu formăm perechea (X, Y), care se numește *vector aleator bidimensional.* În majoritatea cazurilor, vom lucra cu X și Y definite pe același spațiu de evenimente, deci dacă $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y) = n$, atunci perechea lor devine o matrice aleatoare $2 \times n$.

Repartiția unei astfel de matrice aleatoare se calculează intuitiv folosind repartițiile individuale. Avem, deci:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij},$$

unde se pot considera $1 \leq i \leq n$ și $1 \leq j \leq m$. Mai notăm probabilitățile individuale cu p_i, respectiv q_j, adică $p_i = P(X = x_i)$ și $q_j = P(Y = y_j)$. Aceste mărimi se mai numesc *probabilități marginale.*

Evident, dacă fixăm oricare dintre cele două variabile, obținem, de exemplu, pentru X fixat:

$$\cup_j (X = x_i, Y = y_j) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j p_{ij} = p_i,$$

deoarece ambele variabile aleatoare X și Y sînt, individual, normate. Adică $\sum_i p_i = \sum_i P(X = x_i) = \sum_j q_j = \sum_j P(Y = y_j) = 1$.

Analog, desigur, $\sum_i p_{ij} = q_j$.

Luate împreună, obținem automat condiția de normare pentru perechea de variabile aleatoare, adică $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$, în ipoteza că ambele componente ale perechii sînt normate.

Notăm cu $F_{(X,Y)}(x, y) = P(X < x, Y < y)$ funcția de repartiție a perechii de variabile aleatoare (vectorului aleator bidimensional) (X, Y). Separat, $F_X(x)$ și $F_Y(y)$ se numesc *funcții de repartiție marginale* ale vectorului aleator (X, Y).

Pentru *cazul continuu*, întîlnim noțiunea cunoscută din cazul vectorilor aleatori 1-dimensionali. Mai precis, avem:

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) du dv,$$

unde f este *densitatea de probabilitate* și este o funcție cu valori pozitive, dublu-normată, adică:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dudv = 1.$$

Totodată, putem recupera din această ecuație și densitatea de probabilitate știind funcția de repartiție, prin:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}(x,y)}{\partial x \partial y},$$

evident, pentru punctele (x, y) unde egalitatea are sens.

12.1 Repartiții condiționate

Pornim cu un vector aleator bidimensional (X, Y), discret. Ne punem problema din cazul probabilităților condiționate, i.e. vom nota cu $P(x_i/y_j)$ probabilitatea să aibă loc evenimentul $X = x_i$, știind că a avut loc (i.e. condiționat de) evenimentul $Y = y_j$.

Aceasta se poate calcula simplu, ca în cazul probabilităților condiționate:

$$P(x_i/y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{q_j}.$$

Invers, obținem desigur $P(y_j/x_i) = \dfrac{p_{ij}}{p_i}$.

Dacă fixăm un eveniment $Y = y$, putem defini o *funcție de repartiție condiționată*, $F(x/y) = P(X < x/Y = y)$, asociată vectorului X (deoarece Y este fixat). Aceasta se calculează generalizînd formulele de mai sus pe cazul continuu, anume:

$$F(x/y) = \frac{1}{f_Y(y)} \cdot \int_{-\infty}^{x} f(u,y)du.$$

Prin derivare în raport cu x, obținem densitatea de probabilitate a lui X, în ipoteza că $Y = y$:

$$f_X(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

12.2 Variabile aleatoare independente

Știm deja că două variabile aleatoare X și Y sînt independente dacă evenimentele $X = x_i$ și $Y = y_j$ sînt independente, adică dacă are loc:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j).$$

Egalitatea poate fi formulată și cun funcțiile de repartiție:

$$F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Mai mult decît atît, rezultatul de mai jos ne arată că egalitatea are loc și pentru densitățile de probabilitate:

Teoremă 12.1: *Fie X, Y variabile aleatoare cu densitățile de probabilitate f_X, respectiv f_Y. Atunci X și Y sînt independente dacă și numai dacă are loc:*

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y),$$

unde $f(x, y)$ este densitatea de probabilitate a vectorului (X, Y), format de cele două variabile aleatoare.

Atenție: Dacă lucrăm cu alte variabile aleatoare U, V, obținute din X și Y prin transformări funcționale de forma generală:

$$U = \varphi(X, Y), \quad V = \psi(X, Y),$$

atunci calculele care folosesc densitățile de probabilitate și funcțiile de repartiție se fac folosind schimbări de variabile de forma:

$$u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y) \iff x = \varphi_1(u, v), y = \psi_1(u, v),$$

după care noua densitate de probabilitate se schimbă cu ajutorul jacobianului transformărilor de mai sus:

$$f_{(U,V)}(u, v) = \left|\frac{D(x, Y)}{D(u, v)}\right| \cdot f_{(X,Y)}(\varphi_1(u, v), \psi_1(u, v)),$$

unde:

$$\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix},$$

determinantul matricei jacobiene a transformării ($x_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}$ etc.).

Dintre toate caracteristicile numerice asociate variabilelor aleatoare (medie, dispersie, coeficient de corelație, covarianță), pentru cazul bidimensional avem în plus *media condiționată*. Astfel, fie X, Y variabile aleatoare *discrete*. Atunci putem calcula mediile condiționate prin:

- $E(X/Y = y_j) = \sum_i x_i \cdot P(x_i/y_j)$;
- $E(Y/X = x_i) = \sum_j y_j P(y_j/x_i)$.

Pentru *cazul continuu*, sumele devin integrale, iar probabilitățile devin densități:

- $E(X/Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x/y) dx$;
- $E(Y/X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y/x) dy$.

12.3 Caracteristici numerice

Media și dispersia unei variabile aleatoare au fost discutate anterior. De asemenea, atunci cînd lucrăm cu două sau mai multe variabile aleatoare, devin relevante și alte mărimi, precum *covarianța* și *coeficientul de corelație*. Le redăm mai jos, împreună cu proprietăți importante ale lor și ale mediei și dispersiei.

Funcția de medie are următoarele proprietăți esențiale:

(a) **Liniaritatea:** $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

(b) **Monotonia:** Dacă $X \leq Y$, atunci $E(X) \leq E(Y)$;

(c) Dacă X este o constantă c, atunci $E(X) = c$;

(d) Dacă X și Y sînt variabile aleatoare independente, adică descriu evenimente independente, atunci $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

Funcția de dispersie are proprietățile:

(a) $D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2$;

(b) $D^2(X) \geq 0$;

(c) $D^2(X) = 0 \iff P(X = E(X)) = 1$, adică X este o constantă cu probabilitatea 1 (X descrie doar evenimentul sigur);

(d) **Cebîșev:** Pentru orice $\varepsilon > 0$, are loc:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) < \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}.$$

Echivalent, se mai poate scrie:

$$P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}.$$

(e) $D^2(\alpha X) = \alpha^2 D^2(X)$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{C}$;

(f) Dacă X și Y sînt independente, atunci:

$$D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y).$$

Mai definim două mărimi care se asociază variabilelor aleatorii.

Definiţie 12.1: Fie X și Y două variabile aleatoare. Numim *covarianță* a variabilelor X și Y, notată $\operatorname{cov}(X, Y)$ numărul:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Proprietățile esențiale ale covarianței sînt date de:

(a) Dacă X și Y sînt variabile aleatoare independente, atunci $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$;

(b) Dacă $X_1, \dots, X_n$ sînt variabile aleatoare cu dispersiile D_i^2 și covarianțele $\mathrm{cov}(X_i, X_j)$, $i \neq j$, atunci are loc:

$$D^2\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} D_i^2 + 2\sum_{i<j} \mathrm{cov}(X_i, X_j).$$

Definiție 12.2: Dacă X și Y sînt variabile aleatoare, se numește *coeficient de corelație* al lor, notat $\rho(X, Y)$, numărul calculat prin:

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{D^2(X) \cdot D^2(Y)}}$$

Se poate vedea din definiție că, atît covarianța, cît și corelația arată „gradul de independență“ a variabilelor aleatoare X și Y. Într-adevăr, dacă X și Y sînt independente, atunci avem $\rho(X, Y) = 0$. Afirmația reciprocă este, însă, falsă!

Să luăm un exemplu: Fie $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, cu $P(a_i) = \dfrac{1}{4}$.

Presupunem că variabila aleatoare X realizează corespondența:

$$X(a_1) = 1, X(a_2) = -1, X(a_3) = 2, X(a_4) = -2.$$

Atunci, ea are matricea de repartiție:

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Presupunem că o altă variabilă aleatoare Y realizează corespondența:

$$Y(a_1) = 1, Y(a_2) = 1, Y(a_3) = -1, Y(a_4) = -1.$$

Atunci matricea ei se poate reduce la:

$$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Produsul celor două variabile aleatoare are matricea de repartiție:

$$XY : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Rezultă că $E(X) = E(Y) = E(XY)$, deci $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$. Însă putem observa că X și Y nu sînt independente. Într-adevăr, avem:

$$P(X = 1 \wedge Y = 1) = P(a_1) = \frac{1}{4} \neq P(X = 1) \cdot P(Y = 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}.$$

În fine, o altă noțiune de care avem nevoie este *funcția generatoare*.

Definiţie 12.3: Fie X o variabilă aleatoare discretă care ia valori naturale.
Funcția $G_X(t)$, definită prin:

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n\geq 0} p_n t^n,$$

cu $t \leq 1$ și $p_n = P(X = n)$ se numește *funcția generatoare* a variabilei aleatoare X.

Funcția generatoare codifică, de fapt, în coeficienții unei serii formale, repartiția unei variabile aleatoare. Ea are următoarele proprietăți:

(a) Dacă avem variabilele aleatoare independente $X_1, \dots, X_n$, iar $X = X_1 + \cdots + X_n$, atunci:

$$G_X(t) = G_{X_1}(t) \cdots G_{X_n}(t);$$

(b) $E(X) = G'_X(1)$;

(c) $D^2(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2$;

(d) Două variabile aleatoare cu aceeași funcție generatoare au aceeași repartiție.

12.4 Exerciții

1. Fie variabilele aleatoare:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculați $E(X/Y = 1)$;

(b) Calculați $D^2(X)$ și $D^2(Y)$;

(c) Calculați XY și apoi $E(XY)$;

(d) Determinați coeficientul de corelația $\rho(X, Y)$.

2. Fie vectorul aleator (X, Y), cu densitatea de repartiție:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Determinați:

(a) Densitățile marginale $f_X(x)$ și $f_Y(y)$;

(b) Densitatea variabilei aleatoare Y condiționată de X;

(c) Probabilitatea ca $(x, y) \in (X, Y)$ să aparțină pătratului unitate $[0, 1] \times [0, 1]$.

3. Fie vectorul aleator (X, Y), cu densitatea de repartiție:

$$f(x, y) = \begin{cases} k, & 0 < y \leq x < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases},$$

unde $k \in \mathbb{R}$ este o constantă fixată.

(a) Determinați k, astfel încît funcția de mai sus să fie corect definită, ca densitate de repartiție;

(b) Determinați densitățile de repartiție marginale $f_X(x), f_Y(y)$;

(c) Calculați $P(0 < X < 0.5, 0 < Y < 0.5)$;

(d) Determinați densitățile condiționate $f(y/x)$ și $f(x/y)$.

4. Fie funcția:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xy}{c}, & x \in (0, 1), y \in (0, 2) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

(a) Determinați $c \in \mathbb{R}$ astfel încît $f(x, y)$ să fie o densitate de repartiție;

(b) Determinați funcția de repartiție $F_{(X,Y)}(x, y)$ a vectorului aleator bidimensional (X, Y) care are densitatea de repartiție calculată mai sus;

(c) Determinați densitățile marginale $f_X(x), f_Y(y)$ și funcțiile de repartiție $F_X(x), F_Y(y)$;

(d) Calculați $P(X > 0.5)$ și $P(Y < 0.5/X < 0.5)$;

(e) Calculați densitatea de repartiție condiționată $F(Y|X = x)$.

5. Vectorul aleator (X, Y) se dă prin tabloul de repartiție comună:

$X \mid Y$	$y_1 = -2$	$y_2 = -1$	$y_3 = 4$	$y_4 = 5$
$x_1 = 1$	$p_{11} = 0.1$	$p_{12} = 0.2$	$p_{13} = 0$	$p_{14} = 0.3$
$x_2 = 2$	$p_{21} = 0.2$	$p_{22} = 0.1$	$p_{23} = 0.1$	$p_{24} = 0$

(a) Determinați repartițiile marginale p_X și p_Y ale celor două variabile aleatoare X și Y;

(b) Aflați dacă variabilele aleatoare sînt independente;

(c) Calculați $E(X)$ și $E(Y)$;

(d) Calculați $\mathrm{cov}(X, Y)$ si determinați dacă variabilele aleatoare sînt corelate sau nu;

(e) Calculați $\rho(X, Y)$.

6. Vectorul aleator (X, Y) se dă prin tabloul de repartiție comună:

$X \mid Y$	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$
$x_1 = -1$	$p_{11} = \lambda$	$p_{12} = 3/20$
$x_2 = 0$	$p_{21} = 3/20$	$p_{22} = 1/4$
$x_3 = 1$	$p_{31} = 1/4$	$p_{32} = 3/20$

(a) Determinați parametrul λ;

(b) Determinați $D^2(X)$ și $D^2(Y)$;

(c) Verificați dacă cele două variabile aleatoare sînt independente.

7. Vectorul aleator (X, Y) se dă prin tabloul de repartiție comună:

$X \mid Y$	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$	$y_3 = 2$
$x_1 = 2$	$p_{11} = 0.2$	$p_{12} = 0.3$	$p_{13} = 0.1$
$x_2 = 3$	$p_{21} = 0.1$	$p_{22} = 0.1$	$p_{23} = \lambda$

(a) Determinați parametrul λ;

(b) Determinați repartițiile marginale ale vectorului aleator (X, Y);

(c) Calculați $E(Y/X = 2)$ și $E(X/Y = 2)$.

INDEX