Probleme propuse de Prof. Oprina

1. Definim mulțimea:

$$\mathbb{C}_n[X] = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \text{grad} P \le n\}.$$

Arătați că:

(a) $(\mathbb{C}_n[X], +)$ este un $\mathbb{C}$-spațiu vectorial de dimensiune $n + 1$;

(b) $\forall a \in \mathbb{C}$ fixat, mulțimea:

$$B = \{1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n\}$$

este o bază în $\mathbb{C}_n[X]$;

(c) Dacă $f \in \mathbb{C}_n[X]$, atunci:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(X - a)^k \quad \text{(Taylor).}$$

2. Fie $\Bbbk$ un corp comutativ și considerăm sistemul liniar $AX = 0$, cu $A \in M_n(\Bbbk)$.
Arătați că:

(a) $S \le \Bbbk^n$, unde S este mulțimea soluțiilor sistemului;

(b) Există $\varphi : \Bbbk^n \longrightarrow \Bbbk^n$ liniară astfel încît $\text{Ker}\varphi = S$ (Indicație: $\varphi(x) = Ax$);

(c) $\dim_{\Bbbk} S = n - r$, unde $R = \text{rang}(A)$.

3. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$, cu $A \ne 0$ și $\det A = 0$.
Să se arate că există $B \in M_n(\mathbb{R})$, cu $B \ne 0$, astfel încît $AB = 0$.