# Corespondența Curry–Howard–Lambek

*— raport de cercetare, anul 1, semestrul I —*

Adrian Manea
coordonator: Conf. dr. Denisa Diaconescu

## Cuprins



## 1 Introducere

Tema de cercetare pe care o abordez este, în termeni largi, *corespondența Curry–Howard–Lambek*, cu multele sale fațete din logică, filosofie, matematică și informatică. Prezentarea curentă urmărește, într-o oarecare măsură, articolul Wadler (2015), în mod special în partea introductivă și cea despre logică.

În multe situații din istoria științei și nu numai s-a dovedit că un punct de vedere dualist asupra unor noțiuni nu aduce decît beneficii, clarificări suplimentare și relevă similitudini care în primă fază nu erau evidente.

A fost cazul, de-a lungul istoriei, în mai multe instanțe, precum:

- sistemul de coordonate al lui Descartes, care a legat geometria de algebră, introducînd totodată și un mod intuitiv de a vizualiza entitățile algebrice abstracte (care în cam aceeași perioadă au primit notațiile pe care le utilizăm astăzi, tot de la Descartes, Viète și alții);
- teoria cuantică a lui Planck, ce a introdus și evidențiat dualitatea undă-corpuscul;
- teoria informației a lui Shannon, cu conexiuni nebănuite cu termodinamica, prin teoria entropiei.

Un astfel de rezultat este și cel pe care îl prezentăm aici, anume legătura între propoziții (logice) și tipuri. Acestea din urmă, la rîndul lor, și-au arătat polivalența, producînd ecouri în algebră, teoria limbajului, filosofie și informatică, pentru a da doar cîteva exemple. Conexiunea, așa cum a apărut ea inițial, poartă numele celor trei matematicieni care au evidențiat-o, anume logicienii Haskell Curry, William Howard și algebristul Joakim Lambek.

Legătura pe care cei trei au evidențiat-o (lucrînd independent și pentru a rezolva probleme aparent diferite) își are originile în filosofie și matematică, mai precis în așa numita *interpretare Brouwer–Heyting–Kolmogorov* (BHK) a logicii (intuiționiste), denumită după filosofii și matematicienii L. E. J. Brouwer, A. Heyting și A. Kolmogorov.

Această interpretare, precum mare parte a logicii intuiționiste, are o abordare constructivistă asupra problemelor matematice și logice, privind propozițiile logice ca pe probleme ce trebuie rezolvate. Putem formula abordarea lor, anticipînd dezvoltările istorice, prin legătura cu teoria mulțimilor sau cu teoria funcțiilor. Astfel, dacă o mulțime (respectiv, o funcție) este privită ca o propoziție, i.e. ca prezentînd o afirmație sau o proprietate, ea este instanțiată (*demonstrată*) de elementele sale, respectiv de argumentele și valorile sale, în cazul funcțiilor. Așa prezentată, teoria se aseamănă cu *teoria realizării*, formulată mai tîrziu de S. Kleene, care se remarcă tot prin abordarea constructivă, însă o prezentare a acesteia din urmă depășește scopurile lucrării prezente.

Conceptul de „propoziții ca tipuri" (preluînd exprimarea din Wadler (2015)) are o profunzime care nu este evidentă de la început. În mare, această legătură afirmă că există o corespondență bijectivă între propozițiile unei logici și tipurile dintr-un limbaj de programare.

Dar legătura merge chiar mai departe. Propoziția respectivă trebuie să aibă o demonstrație, care va corespunde unui program în respectivul limbaj, ce face uz de tipul corespunzător propoziției. Deci obținem mai departe o conexiune de tip „demonstrații ca programe".

Încă mai departe, atunci cînd vrem să simplificăm o propoziție (prin rescriere, după cum vom vedea), aceasta revine la rularea programului, deci avem „simplificarea demonstrațiilor ca evaluarea programelor".

Istoria modernă a dezvoltării acestei conexiuni se poate trasa de la sfîrșitul secolului al XIX-lea și începutul secolului XX. Inspirat de puterea de expresie a logicii formale, precum a fost relevat de Russell și Whitehead în a lor monumentală *Principia Mathematica*, Hilbert a pornit un program pentru rezolvarea *problemei deciziei*, adică de a dezvolta o procedură calculabilă eficient care să determine dacă o afirmație dată este adevărată sau falsă. Programul său conține o presupunere implicită de *completitudine* a matematicii, anume că, dată o propoziție, fie ea ori negația ei are o demonstrație.

Dar Gödel a arătat că aritmetica este incompletă și mai mult, programul lui Hilbert s-a mai lovit de o dificultate, anume aceea de a stabili precis ce înseamnă o „calculabilitate rezonabilă" a metodei de decizie.

Asemenea definiții au apărut abia în anii '30, cu 3 alternative diferite:

- $\lambda$-calculul lui Alonzo Church (1936);
- teoria funcțiilor recursive, a lui Gödel și Kleene (1934, 1936);
- mașinile Turing, propuse de Alan Turing (1937).

Pe scurt, teoria lui Church a pornit din dorința matematicienilor de clarifica noțiunea de *funcție*. Astfel, Church introduce $\lambda$-abstracția, în primă fază privită ca un concept tehnic, utilizat la notație și care să ia din misterul și dificultatea definirii conceptului de funcție.

Gödel nu a fost convins de aborarea lui Church și, atunci cînd a vizitat Princeton, într-o serie de cursuri, a dezvoltat teoria funcțiilor recursive, împreună cu Kleene. Church, încrezător, dorea inițial să arate că această teorie este inclusă în teoria sa de $\lambda$-calcul, dar, pînă la urmă, cele două s-au dovedit echivalente.

Turing, de cealaltă parte a Oceanului, la Cambridge, a pornit cu o motivație complet diferită. El și-a propus să înțeleagă conceptul de calculabilitate cît mai uman. Astfel, el a introdus multe condiții de finitudine sau mărginire a resurselor folosite, deoarece a modelat teoria pe capacitățile umane.

De asemenea, și teoria lui Turing a fost demonstrat a fi echivalentă cu celelalte două. Însă Kleene a demonstrat că, în forma originală, sistemul de $\lambda$-calcul conduce la inconsistență, arătînd cazuri cînd o abordare de tip paradoxul lui Russell (i.e. prin autoaplicare) poate conduce la calcule infinite. De aceea, Church, ca și Russell, a introdus o ierarhie de forma teoriei tipurilor, formulînd sistemul $\lambda$ cu tipuri. Totodată, introducînd tipurile, sistemul lui Church beneficiază și de existența unei forme normale pentru fiecare termen.

## 2 Aspecte logice — Sistemul lui Gentzen

În 1935, Gerhard Gentzen a introdus 2 formulări ale logicii care să ajute teoria demonstrației: *deducția naturală* și *calculul secvent*. Prin aceste sisteme, el a arătat cum se poate obține o formă normală pentru demonstrații, care să asigure că acestea nu sînt circulare sau infinite. El a introdus și cuantificarea universală, ca o paralelă la cuantificarea existențială introdusă deja de Peano. Simbolurile folosite de Gentzen sînt $\supset$ pentru implicație, & pentru conjuncție și $\vee$ pentru disjuncție.

Una dintre ideile originale ale lui Gentzen a fost de a impune ca regulile de demonstrație să apară în perechi, în cazul deducției naturale fiind vorba despre *reguli de introducere* și *reguli de eliminare*. Regula de introducere arată cînd se poate formula o aserțiune care conține un conector logic, iar regula de eliminare arată cum se poate folosi conectorul (e.g. în *modus ponens*, care arată cum se folosește conectorul $\supset$).

Un aspect foarte util al sistemului lui Gentzen a fost așa-numitul „principiu al subformulelor". Conform acestuia, într-o demonstrație a unei formule nu pot apărea decît subformule ale acesteia sau termeni ai subformulelor. Aceasta este condiția de normalizare a demonstrației. O consecință imediată a fost consistența. Pentru a putea demonstra o contradicție, ar trebui să putem demonstra folosind subformule ale acesteia, dar așa ceva nu există! Rezultatul este formulat foarte sugestiv de Wadler prin "*What part of* no *don't you understand?*".

Calculul secvent (eng. *sequent calculus*) a fost introdus și folosit de Gentzen mai mult ca un instrument tehnic, cu ajutorul lui demonstrînd principiul subformulelor de mai sus.

Vom prezenta acum pe scurt aspecte din deducția naturală, pentru a evidenția ulterior legătura cu $\lambda$-calculul cu tipuri simple și categorii cartezian închise. Pentru simplitate, vom discuta doar doi conectori, & și $\supset$. Regulile, așa cum au fost introduse de Gentzen, sînt:

- introducerea conjuncției: $\dfrac{A \quad B}{A\&B}$ &I;
- eliminarea conjuncției, de pe poziția 1 sau 2: $\dfrac{A\&B}{A}$ &E1, respectiv $\dfrac{A\&B}{B}$ &E2;
- introducerea implicației: $\dfrac{\begin{array}{c}[A]^x \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \supset B} \supset I^x$;
- eliminarea implicației (sau *modus ponens*): $\dfrac{A \supset B \quad A}{B} \supset E$.

Regula de introducere a implicației afirmă că dacă din presupunerea că $A$ are loc putem obține $B$, atunci putem concluziona că are loc $A \supset B$ și să neglijăm presupunerea $A$. Demonstrația se încheie doar cînd fiecare presupunere din ea a fost eliminată, folosind regula $\supset I$. Am notat cu indicele superior $x$ pentru a arăta care presupunere este eliminată atunci cînd se aplică introducerea corespunzătoare.

**Observație 2.1:** Putem face o remarcă filosofică de felul următor. Într-o regulă de deducție care folosește implicația drept premisă, implicația însăși este un fel de deducție, la nivel meta (deducția care ne interesează fiind la nivel de obiect). Această dificultate aparentă, cum că ar trebui să înțelegem mai întîi implicația pentru a înțelege implicația, a fost discutată de Per Martin–Löf în articolul Martin-Löf (1983).

Regulile de rescriere pentru simplificarea demonstrațiilor sînt:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ A\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots \\ B\end{array}}{A\&B}\,\&\,\mathrm{I}}{A}\,\&\mathrm{E1} \Longrightarrow \begin{array}{c}\vdots \\ A\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[A]^x \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \supset B} \supset I^x \quad \begin{array}{c}\vdots \\ A\end{array}}{B} \supset E \Longrightarrow \begin{array}{c}\vdots \\ A \\ \vdots \\ B\end{array}$$

Regulile de simplificare ne arată cum să rescriem o demonstrație atunci cînd apar consecutiv regulile de introducere și de eliminare pentru același conector. Numim *redex* varianta nesimplificată și *reduct* varianta rescrisă.

Regula de simplificare pentru &, de exemplu, neglijează orice apariție a lui $B$, pentru că, de fapt, vrem să demonstrăm $A$.

Regula de simplificare pentru $\supset$ ține seama de faptul că vrem să obținem $B$ via $A$, dar elimină ocolișul nenecesar prin demonstrația lui $A \supset B$.

Aduse în forma normală, i.e. aplicînd toate rescrierile posibile, este clar că demonstrațiile respectă principiul subformulei.

# 3 $\lambda$-calcul cu tipuri

Descriem acum $\lambda$-calculul cu tipuri simple al lui Church. Pentru simplitate, putem presupune că produsele și funcțiile sînt obiecte primitive (în articolul original, Church a derivat produsele din funcții). În loc de formule, judecățile de forma $M : A$ servesc drept premise și concluzii și notează că termenul $M$ are tipul $A$.

Regulile de tipizare sînt:

- introducerea produselor: $\dfrac{M : A \quad N : B}{\langle M, N \rangle : A \times B} \times I$;
- introducerea $\lambda$-abstracției: $\dfrac{\begin{matrix}[x : A]^x \\ \vdots \\ N : B\end{matrix}}{\lambda x.N : A \longrightarrow B} \longrightarrow I^x$;
- eliminarea produsului, pe prima sau a doua componentă, prin proiecțiile canonice, $\pi_1(L : A \times B) : A$, respectiv $\pi_2(L : A \times B) : B$;
- eliminarea $\lambda$-abstracției, prin aplicare: $\dfrac{L : A \longrightarrow B \quad M : A}{LM : B} \longrightarrow E$.

Observăm, de asemenea, că în regula de introducere a $\lambda$-abstracției, variabila $x$ apare liberă în $N$ în premisă și legată în concluzia $\lambda x.N$.

**Observaţie 3.1:** Distincția între nivelul meta si nivelul obiect în ce privește implicația este mai clară în $\lambda$-calcul. În cazul premiselor, avem o implicație, dar la nivel de obiect, în concluzie, avem *funcții*, obiecte diferite.

Demonstrațiile în $\lambda$-calculul tipizat se numesc *programe*, care pot fi evaluate prin rescriere, conform regulilor:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ M : A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ N : B\end{matrix}}{\langle M, N \rangle : A \times B} \times I}{\pi_1 \langle M, N \rangle : A} \times E1 \Longrightarrow \begin{matrix}\vdots \\ M : A\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[x : A]^x \\ \vdots \\ N : B\end{matrix}}{\lambda x.N : A \longrightarrow B} \longrightarrow I^x \quad \begin{matrix}\vdots \\ M : A\end{matrix}}{(\lambda x.N)M : B} \longrightarrow E \Longrightarrow \begin{matrix}\vdots \\ M : A \\ \vdots \\ N[M/x] : B\end{matrix}$$

Regulile de rescriere păstrează tipizarea, proprietate numită *corectitudinea tipizării* (eng. *type soundness*).

Termenul $N[M/x]$ din a doua regulă de rescriere notează că se înlocuiesc toate aparițiile libere ale lui $x$ din $N$ cu $M$. De asemenea, acest termen substituit poate fi, în general, mai mare decît cel inițial (în funcție de numărul de apariții ale lui $x$). Dar, în orice caz, el este mai simplu, deoarece nu mai are un subtermen de tip $A \longrightarrow B$. Astfel, eliminarea asumpțiilor poate fi înțeleasă ca aplicarea funcțiilor.

Prezentate astfel, legăturile între deducția naturală și $\lambda$-calculul cu tipuri simple sînt evidente. Așa cum am menționat la început, ele merg mult mai profund decît atît, fiind prezente la mai multe niveluri. Fiecare dintre aceste niveluri suplimentare cer o aprofundare a subiectelor, ce va fi obiectul cercetărilor ulterioare.

## 4 Categorii — Privire de ansamblu

Trecem acum la un alt nivel care evidențiază legătura prezentată, anume acela al categoriilor, conexiune introdusă de J. Lambek începînd cu anul 1968. Prezentarea sumară ce urmează se bazează pe articolul Lambek (1989) și presupune o familiarizare preliminară cu teoria categoriilor.

Conform lui Lambek, există două moduri nestandard de a privi o categorie, pe care le vom numi *interpretarea logică*, respectiv *interpretarea algebrică*. Prima dintre acestea privește o categorie drept un *sistem deductiv*, în care obiectele sînt formule logice, iar săgețile, deducții. Egalitățile care există în axiomele care definesc categoriile sînt caracteristici bonus, care vor servi atunci cînd avem nevoie de teorii logice cu egalitate. Săgețile identitate pentru fiecare obiect $A$ al unei categorii sînt gîndite ca axiome, iar compunerea săgeților devine tranzitivitatea consecinței logice (eng. *entailment*):

$$\frac{f : A \longrightarrow B \quad g : B \longrightarrow C}{gf : A \longrightarrow C}$$

Egalitățile suplimentare care există (proprietatea săgeții unitate, respectiv asociativitatea compunerii) sugerează necesitatea introducerii unei relații de (tip) egalitate între deducții, discutată de Lambek, Prawitz și alții, dar care depășește scopurile lucrării prezente.

Interpretarea algebrică privește o catgorie drept o *teorie algebrică unară, multisortată*. Obiectele sînt numite sorturi sau tipuri, iar săgețile sînt operații unare. Aceasta diferă în mod esențial de abordarea mai des întîlnită, conform căreia teoria este uni-sortată, iar operațiile (funcțiile) sînt $n$-are. Î̂n abordarea curentă, o asemenea interpretare ar implica $n$-categorii.

Î̂n general, teoria categoriilor are meritul de a nu mai lucra cu variabile, dar aici vom reintroduce variabilele și vom vedea cît ajută la formularea rezultatelor. De fapt, este cunoscut faptul că se poate da o reformulare a teoriei categoriilor folosind doar săgeți, cu anumite constrîngeri (care vor avea loc în cazurile ce ne interesează aici), iar un element $x$ al unui obiect $A$ poate fi gîndit ca o săgeată $x : 1 \longrightarrow A$ de la obiectul inițial al categoriei (în ipoteza că există un asemenea obiect).

Fie, deci, $x$ o variabilă de sort $A$ (în terminologia de mai sus, adică un element $x$ al obiectului $A$ din categorie). Fie, de asemenea, $f : A \longrightarrow B$ o operație. Atunci $fx$ este un termen de sort $B$ în ceea ce vom numi *limbajul intern* al categoriei, privită ca o teorie algebrică unară, multisortată.

O asemenea abordare va fi de folos și în interpretarea logică (constructivistă): variabila $x$ de sort $A$ poate fi gîndită ca o presupunere că $A$ are loc, iar $fx$, de sort $B$, să fie demonstrația lui $B$ din această presupunere.

Să prespunem, așadar, că lucrăm într-o categorie care are produse finite. Aceasta implică existența unui produs vid, care este un obiect unic 1, numit *obiect terminal* în categorie, împreună cu o săgeată unică, pentru fiecare obiect $A$, de forma $0_A : A \longrightarrow 1$. Pentru obiectele $A$ și $B$, produsul se identifică cu produsul cartezian (în cazul în care $A$ și $B$ sînt mulțimi) și avem săgețile canonice date de proiecții, care induc o corespondență bijectivă între perechi de săgeți $(C \longrightarrow A, C \longrightarrow B)$ și săgeți $C \longrightarrow A \times B$. Astfel definită, extinzînd produsul și la cazul finit arbitrar, se obține o *categorie carteziană*.

Interpretarea logică a acestei construcții este imediată: obiectul terminal poate fi gîndit ca $\top$ (adevărat), iar produsul $A \times B$, drept conjuncția $A \wedge B$. Atunci avem axiomele:

$$0_A : A \longrightarrow \top, \quad \pi_1 : A \wedge B \longrightarrow A, \quad \pi_2 : A \wedge B \longrightarrow B$$

și o regulă de inferență:

$$\frac{f : C \longrightarrow A \quad g : C \longrightarrow B}{\langle f, g \rangle : C \longrightarrow A \wedge B}$$

Suplimentar, sînt satisfăcute și:

- $k = 0_A$ pentru orice săgeată $k : A \longrightarrow \top$;
- $\pi_1 \langle f, g \rangle = f, \pi_2 \langle f, g \rangle = g$;

- $\langle \pi_1 h, \pi_2 h \rangle = h$ pentru orice săgeată $h : C \longrightarrow A \wedge B$.

Un termen $\varphi(x, y)$ de tip $C$ din limbajul intern, cu $x$ de tip $A$ și $y$ de tip $B$ poate fi gîndit ca o demonstrație în deducție naturală a lui $C$ din presupunerea $x$ că $A$ și $y$ că $B$. O proprietate interesantă (rezultată din proprietatea de universalitate a produsului din categorie) este că limbajul intern are *completitudine funcțională*, adică orice demonstrație $\varphi(x, y)$ are forma $f(x, y)$ pentru o unică deducție $f : A \wedge B \longrightarrow C$.

Putem folosi obiectul 1 al categoriei pentru a nota cu o săgeată nedeterminată $x : 1 \longrightarrow A$ în *categoria polinomială*[1] a categoriei date, $\mathcal{C}[x]$ și atunci putem formula completitudinea funcțională astfel.

Fie $p(x) : B \longrightarrow C$ un polinom în nedeterminata $x : 1 \longrightarrow A$. Există o unică săgeată $f : A \times B \longrightarrow C$ care nu depinde de $x$ astfel încît $p(x) = f\chi(x)$, cu $\chi(x) = \langle x0_B, 1_B \rangle$, conform diagramei comutative:

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "f"] & C \\
B \arrow[u, "\chi(x)"] \arrow[ur, "p(x)"'] &
\end{tikzcd}$$

**Observaţie 4.1:** La prima vedere, am putea gîndi $A \times B$ și ca fiind coprodusul a $A$ copii ale lui $B$ și să scriem:

$$A \times B = \coprod_{x \in A} B$$

Dar, de fapt, nu este neapărat necesar ca $A$ să fie mulțime, deci structura nu este neapărat produsul cartezian din teoria mulțimilor. Sub interpretarea logică, putem scrie:

$$A \wedge B = \exists_{x \in A} B,$$

un caz particular al cuantificatorului existențial, cînd $B$ este o formulă care nu depinde de presupunerea $x$.

Ne putem pune problema existenței coproduselor $\coprod_{x \in A} B(x)$, unde $B(x)$ să depindă de $x$. În categorii carteziene, însă, acest lucru este imposibil, deoarece categoria polinomială $\mathcal{C}[x]$ are aceleași obiecte cu $\mathcal{C}$.

**Observaţie 4.2:** În locul categoriei polinomiale, se poate face trecerea la *categoria slice*, conform Boileau and Joyal (1981) și Mac Lane (1971), §II.6 (unde sînt numite „categorii-virgulă“, eng. *comma categories*). Astfel, în loc de elementul distins $x \in A$, cu care trecem la categoria polinomială, putem considera obiectul distins $A$ și trecem la categoria slice (sau categoria deasupra lui $A$), notată $\mathcal{C}/A$. Obiectele categoriei sînt săgeți $* \longrightarrow A$, iar săgețile categoriei sînt triunghiuri comutative de forma:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr] \arrow[dr] & & C \arrow[dl] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Acestea au meritul de a evidenția mai clar decît categoriile polinomiale existența sau lipsa structurilor suplimentare (e.g. egalizator sau exponențială).

Vom înzestra ulterior o categorie carteziană cu o exponențială, conducînd astfel la categorii cartezian închise, ce vor fi legate strîns de $\lambda$-calculul cu tipuri simple, dar deocamdată mai detaliem o construcție elementară.

Fie $\mathcal{C}$ o categorie carteziană. Introducem *egalizatorul* a două săgeți paralele, $f, g : A \longrightarrow B$, conform Mac Lane (1971), §III.4. Intuitiv, el este o generalizare a nucleului unui morfism de structuri. Fie obiectul egalizator $E(f, g)$,

[1] Categoria polinomială este o construcție naturală care indexează obiectele unei categorii după un anumit obiect (sau, mai precis, după o anumită săgeată $1 \longrightarrow A$ într-un obiect). Din acest punct de vedere, anticipînd un subiect pe care nu îl detaliem aici, se poate face o legătură cu *tipuri dependente*, gîndite categorial ca niște *fibrări* (eng. *bundles*)

care vine cu un monomorfism canonic în $A$, ce poate fi privit ca o incluziune. Putem scrie în limbajul intern (adică folosind variabile):

$$E(f, g) = \{x \in A \mid fx = gx\},$$

iar dacă $A = 1$, atunci săgeata $x : 1 \longrightarrow A$ coincide cu $1_A$, deci egalizatorul devine $E(f, g) = \{x \in 1 \mid f = g\}$. Aici $x$ nu mai joacă niciun rol, deci $E(f, g)$ este „propoziția“ care afirmă că $f = g$.

# 5 Categorii cartezian închise

Putem înzestra o categorie carteziană cu o structură suplimentară, numită *exponențială*, care va facilita legătura cu $\lambda$-calcul și cu programarea funcțională. Prezentarea curentă urmează Awodey (2006) și Mac Lane and Moerdijk (1992).

Începem cu o motivație și prezentare intuitivă, care va face legătura și cu programarea funcțională.

O funcție de două variabile $f : A \times B \longrightarrow C, f = f(x, y)$ poate fi privită ca o funcție de o singură variabilă, fixînd pe $x$, anume $f = f(y) \in C^B$. Acum, dacă variem pe $x$, obținem o familie indexată, care ne dă o asociere:

$$x \longmapsto f_x(y) = f(x, y) : A \longrightarrow C^B.$$

Orice asemenea funcție poate fi definită astfel și este complet determinată de această prezentare. Deci, intuitiv, avem un izomorfism:

$$\mathrm{Hom}(A, C^B) \simeq \mathrm{Hom}(A \times B, C), \quad f_x(y) = f(x, y).$$

Putem defini o funcție de tip evaluare, pentru a abstractiza:

$$\mathrm{eval} : C^B \times B \longrightarrow C, \quad \mathrm{eval}(g, b) = g(b), \forall g \in C^B, b \in B.$$

Această funcție are următoarea proprietate de universalitate: dată mulțimea $A$ și funcția $f : A \times B \longrightarrow C$, există o unică funcție $\tilde{f} : A \longrightarrow C^B$ astfel încît:

$$\mathrm{eval}(\tilde{f} \times 1_B) = f \iff \mathrm{eval}(\tilde{f}(a), b) = f(a, b),$$

adică avem diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
C^B \times B \arrow[r, "\mathrm{eval}"] & C \\
A \times B \arrow[u, dotted, "\exists! \tilde{f} \times 1_B"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Proprietatea poate fi folosită în orice categorie cu produse binare.

**Definiţie 5.1:** Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu produse binare. O *exponențială* a obiectelor $B$ și $C$ din $\mathcal{C}$ este un obiect $C^B$ și o săgeată $\varepsilon : C^B \times B \longrightarrow C$ cu proprietatea de universalitate de mai sus: pentru orice $Z \in \mathcal{C}$ și $f : Z \times B \longrightarrow C$, există o unică săgeată $\tilde{f} : Z \longrightarrow C^B$ care să facă diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
C^B \\
Z \arrow[u, "\tilde{f}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C^B \arrow[r, "\varepsilon"] & C \\
Z \times B \arrow[u, dotted, "\tilde{f} \times 1_B"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

adică $\varepsilon \circ (\tilde{f} \times 1_B) = f$.

În acest context, $\varepsilon$ se numește *evaluare*, iar $\tilde{f}$ se numește *transpusa* lui $f$.

Dată transpusa, putem recupera funcția. Presupunem că pornim cu $g : Z \longrightarrow C^B$ și definim:

$$\overline{g} = \varepsilon(g \times 1_B) : Z \times B \longrightarrow C.$$

Rezultă că avem izomorfismul:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(Z \times B, C) &\simeq \mathrm{Hom}(Z, C^B) \\ f &\mapsto \tilde{f} \\ \overline{g} &\leftarrow g \end{aligned}$$

**Observaţie 5.1:** În informatică, transpusa poate fi asociată cu $\lambda(-)$, adică $\tilde{f} = \lambda f$, iar în limbajele funcționale, săgeata eval se asociază, de obicei, cu `apply`, $\lambda g$ fiind `curry(g)`.

Putem da acum o definiție ecuațională a categoriilor cartezian închise, care să faciliteze legătura cu $\lambda$-calculul cu tipuri simple.

**Definiţie 5.2:** O categorie $\mathcal{C}$ este *cartezian închisă* dacă are următoarea structură:

(1) Un obiect distins 1 și pentru orice obiect $C \in \mathcal{C}$, o săgeată $!_C : C \longrightarrow 1$ astfel încît, pentru orice altă săgeată $f : C \longrightarrow 1$, să avem $f =!_C$;

(2) Pentru orice pereche de obiecte $A, B$ există un obiect $A \times B$ și săgețile $p_1 : A \times B \longrightarrow A, p_2 : A \times B \longrightarrow B$, iar pentru orice săgeți $f : Z \longrightarrow A$ și $g : Z \longrightarrow B$ există o săgeată:

$$\langle f, g \rangle : Z \longrightarrow A \times B$$

astfel încît:

$$\begin{aligned} p_1\langle f, g \rangle &= f \\ p_2\langle f, g \rangle &= g \\ \langle p_1 h, p_2 h \rangle &= h, \forall h : Z \longrightarrow A \times B; \end{aligned}$$

(3) Pentru orice pereche de obiecte $A \times B$, există un obiect $B^A$ și o săgeată $\varepsilon : B^A \times A \longrightarrow B$, iar pentru orice săgeată $f : Z \times A \longrightarrow B$ există o săgeată $\tilde{f} : Z \longrightarrow B^A$ astfel încît:

$$\varepsilon \circ (\tilde{f} \times 1_A) = f, \quad \varepsilon \circ (g \times 1_A) = \tilde{g},$$

pentru orice $g : Z \longrightarrow B^A$, unde:

$$g \times 1_A = \langle g p_1, p_2 \rangle : Z \times A \longrightarrow B^A \times A.$$

Legătura cu $\lambda$-calculul cu tipuri poate fi făcută evidentă prin prezentarea ecuațională a acesteia din urmă, în forma următoare. O teorie de $\lambda$-calcul cu tipuri se alcătuiește din:

- tipuri de bază: $A, B, \dots, A \times B, A \longrightarrow B$ etc.;
- termeni, care pot fi:
  - variabile de tip $A$;
  - constante;
  - perechi $\langle a, b \rangle : A \times B$, cu $a : A, b : B$;

  - proiecții prime: $\mathrm{fst}(c) : A$, cu $c : A \times B$;
  - proiecții secunde: $\mathrm{snd}(c) : B$, cu $c : A \times B$;
  - evaluări: $ca : B$, unde $c : A \times B, a : A$;
  - abstracții: $\lambda x.b : A \longrightarrow B$ ,cu $x : A, b \in B$

- ecuații:

$$\begin{aligned} \mathrm{fst}(\langle a, b \rangle) &= a \\ \mathrm{snd}(\langle a, b \rangle) &= b \\ \langle \mathrm{fst}(c), \mathrm{snd}(c) \rangle &= c \\ (\lambda x.b)a &= b[a/x] \\ \lambda x.cx &= c, \text{ cu x liberă în c} \end{aligned}$$

Astfel prezentată, teoriei de $\lambda$-calcul i se poate asocia o *categorie a tipurilor*, unde obiectele sînt tipurile simple (dintre tipurile de bază, $A, B, \dots$), săgețile sînt date de tipurile de forma $A \longrightarrow B$, identitățile $1_A = \lambda x.x$, pentru $x : A$, iar compunerea $c \circ b = \lambda x.c(bx)$.

Aceasta definește corect o categorie, care are produse binare și este chiar cartezian închisă. Date două obiecte $A$ și $B$ din categorie, definim $B^A = A \longrightarrow B$, iar evaluarea:

$$\varepsilon = \lambda z.\mathrm{fst}(z)\mathrm{snd}(z) : B^A \times A \longrightarrow B(z : Z).$$

Atunci, pentru orice săgeată $f : Z \times A \longrightarrow B$, putem defini transpusa prin:

$$\tilde{f} = \lambda z \lambda x.f\langle z, x \rangle : Z \longrightarrow B^A(z : Z, x : A).$$

# 6 Plan

În ce privește continuarea cercetării, fiecare dintre componentele corespondenței Curry–Howard–Lambek merită studiată individual, împreună cu toate variantele sale.

Totodată, dezvoltarea istorică și filosofică a subiectului o considerăm a fi de o importanță deosebită. Așa cum se arată în Collins (2005), încercările de eliminare a paradoxurilor de tip Russell, prin ramificări, ierarhizări și tipizări ale teoriilor s-au întins în multe domenii și au primit, la rîndul lor, tratamente diferite. Astfel, în afară de Russell, Ramsey, Hilbert, Turing, Church, actori principali ai acestei dezvoltări au fost și Wittgenstein, care a formulat o tipizare bazată pe teoria funcțiilor, Frege, cu a sa „teorie a treptelor“ și Carnap, care a considerat că locul cel mai potrivit al tipizării este la nivel de limbaj (formal).

Precum menționează Shulman în Shulman (2017), o altă componentă filosofică importantă a teoriilor care alcătuiesc corespondența Curry–Howard–Lambek este aceea că „spațiile“ (i.e. tipurile) utilizate au o natură sintetică. Aceastea sînt construite în acord cu intuiția: pentru a le înțelege, trebuie să știm cum arată obiectele lor și cum ne dăm seama dacă avem de-a face cu obiecte diferite sau cu același obiect. Această abordare urmează varianta lui Martin-Löf pentru regulile de introducere și eliminare ale lui Gentzen.

În partea logică a subiectului, logica intuiționistă și teoria tipurilor aferentă prezintă un interes deosebit. Ne referim în special la teoria lui Martin-Löf (cf. Martin-Löf (1980)), care introduce tipul egalitate, nevid atunci cînd se poate demonstra că două tipuri sînt „egale“. Exact echivocul lăsat de această noțiune de egalitate a permis dezvoltarea *teoriei de omotopie a tipurilor*, în care relația de egalitate este relaxată și se preia relația de echivalență omotopică din topologie algebrică (mai general, algebră omologică). Această noțiune de „egalitate“ a deschis calea către o descriere axiomatică, i.e. *axioma de univalență* a lui Voevodsky și interpretarea ei structuralistă din partea lui Awodey (cf., de exemplu, Awodey (2014)).

În ce privește aspectele categoriale, sîntem interesați de trecerea către toposuri, structurile „naturale“ pentru a studia fundamente matematice, în care se poate formula semantica mai multori logici (e.g. intuiționistă și clasică, în special). În aceste structuri, algebrele Heyting joacă un rol fundamental, deoarece ele ajută la trecerea dinspre logica booleană către logica intuiționistă. Detalii sînt conținute în Goldblatt (1984). Totodată, muncă de pionierat în traducerea logicilor în teoria categoriilor a fost realizată de Lawvere, începînd cu Lawvere (1963) și continuînd cu Seely în Seely (1984).

Pe lîngă aceste fațete specializate, monografia Sørensen and Urzyczyn (2006) reprezintă o lectură obligatorie pentru aprofundarea legăturilor între conceptele de bază ale acestei corespondențe de interes.

## Bibliografie


Awodey, S. (2006). *Category Theory*. Clarendon Press.

Awodey, S. (2014). Structuralism, invariance and univalence. *Philosophia Mathematica*, 22:1–11.

Boileau, A. and Joyal, A. (1981). *Journal of Symbolic Logic*, 46:6–16.

Collins, J. (2005). A history of the theory of types.

Goldblatt, R. (1984). *Topoi: The Categorial Analysis of Logic*. North Holland.

Lambek, J. (1989). On some connections between logic and category theory. *Studia Logica*, 48(3):269–278.

Lawvere, F. (1963). *Functorial Semantics of Algebraic Theories*. PhD thesis, Columbia University.

Mac Lane, S. (1971). *Categories for the Working Mathematician*. Springer.

Mac Lane, S. and Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer.

Martin-Löf, P. (1980). Intuitionistic type theory. Notes by G. Sambin. Lectures at the University of Padua.

Martin-Löf, P. (1983). On the meaning of the logical constants and the justification of the logical laws. Lectures at University of Siena.

Seely, R. A. G. (1984). Hyperdoctrines, natural deduction and the beck condition. *Zeitschrift für Math. Logik und Grundlagen der Math.*

Shulman, M. (2017). Homotopy type theory: The logic of space. *arXiv:1703.03007*.

Sørensen, M. H. and Urzyczyn, P. (2006). *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism*. Elsevier.

Wadler, P. (2015). Propositions as types. *Communications of the ACM*, 58(12):75–84.