Corespondența între propoziții, tipuri și categorii

Adrian Manea

supervizor: Conf. Dr. Denisa Diaconescu

SLA, anul 1, grupa 410

Subiectele de interes

Informatică teoretică: programare funcțională, programe scrise ca teorii și demonstrații, teoria de omotopie a tipurilor;

Subiectele de interes

Informatică teoretică: programare funcțională, programe scrise ca teorii și demonstrații, teoria de omotopie a tipurilor;

Logică: logica intuiționistă, interpretarea BHK, teoria intuiționistă a tipurilor (Per Martin-Löf);

Subiectele de interes

Informatică teoretică: programare funcțională, programe scrise ca teorii și demonstrații, teoria de omotopie a tipurilor;

Logică: logica intuiționistă, interpretarea BHK, teoria intuiționistă a tipurilor (Per Martin-Löf);

Categorii: CCC, ∞-grupoizi, algebre Heyting, fascicule, toposuri;

Subiectele de interes

Informatică teoretică: programare funcțională, programe scrise ca teorii și demonstrații, teoria de omotopie a tipurilor;

Logică: logica intuiționistă, interpretarea BHK, teoria intuiționistă a tipurilor (Per Martin-Löf);

Categorii: CCC, ∞-grupoizi, algebre Heyting, fascicule, toposuri;

Filosofie: structuralism (axioma univalenței, Voevodsky-Awodey), „spații sintetice“ (Shulman), ierarhii (tipuri: trepte [Frege], funcții [Wittgenstein], limbaj [Carnap]);

Reguli de deducție în perechi (introducere–eliminare):

Reguli de deducție în perechi (introducere–eliminare):

$$\frac{A \quad B}{A \& B}\ \&\mathrm{I} \qquad \frac{A \& B}{A}\ \&\mathrm{E1} \qquad \frac{A \& B}{B}\ \&\mathrm{E2};$$

Reguli de deducție în perechi (introducere–eliminare):

$$\frac{A \quad B}{A \& B}\ \&I \qquad \frac{A \& B}{A}\ \&E1 \qquad \frac{A \& B}{B}\ \&E2;$$

$$\frac{\begin{matrix}[A]^x \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \supset B} \supset I^x \qquad \frac{A \supset B \quad A}{B} \supset E.$$

Reguli de rescriere (simplificare):

Reguli de rescriere (simplificare):

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots\\ A & B\end{matrix}}{A\&B}\ \&\,\mathrm{I}}{A}\ \&\mathrm{E1} \Longrightarrow \begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A]^x\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A\supset B}\ \supset I^x \qquad \begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix}}{B}\ \supset E \qquad \Longrightarrow \begin{matrix}\vdots\\ A\\ \vdots\\ B\end{matrix}$$

Reguli de tipizare:

λ-calculul cu tipuri simple

Reguli de tipizare:

- introducere = tipizare/abstracție;

Reguli de tipizare:

- introducere = tipizare/abstracție;
- eliminare = aplicare/proiecție.

Reguli de tipizare:

- introducere = tipizare/abstracție;
- eliminare = aplicare/proiecție.

$$\dfrac{M : A \quad N : B}{\langle M, N \rangle : A \times B} \times I \qquad \dfrac{\begin{matrix} [x : A]^x \\ \vdots \\ N : B \end{matrix}}{\lambda x.N : A \to B} \to I^x$$

Reguli de tipizare:

- introducere = tipizare/abstracție;
- eliminare = aplicare/proiecție.

$$\frac{M : A \quad N : B}{\langle M, N \rangle : A \times B} \times I \qquad \frac{\begin{array}{c}[x : A]^x \\ \vdots \\ N : B\end{array}}{\lambda x.N : A \to B} \to I^x$$

$$\pi_1(L : A \times B) : A, \qquad \pi_2(L : A \times B) : B$$

Reguli de tipizare:

- introducere = tipizare/abstracție;
- eliminare = aplicare/proiecție.

$$\frac{M : A \quad N : B}{\langle M, N \rangle : A \times B} \times I \qquad \frac{\begin{array}{c}[x : A]^x \\ \vdots \\ N : B\end{array}}{\lambda x.N : A \to B} \to I^x$$

$$\pi_1(L : A \times B) : A, \qquad \pi_2(L : A \times B) : B$$

$$\frac{L : A \to B \quad M : A}{LM : B} \to E.$$

Reguli de simplificare (evaluare):

Reguli de simplificare (evaluare):

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ M : A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ N : B\end{matrix}}{\langle M, N\rangle : A \times B}\times I}{\pi_1\langle M, N\rangle : A}\times E1 \implies \begin{matrix}\vdots \\ M : A\end{matrix}$$

Reguli de simplificare (evaluare):

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ M : A\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ N : B\end{array}}{\langle M, N\rangle : A \times B}\times I}{\pi_1\langle M, N\rangle : A}\times E1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c}\vdots\\ M : A\end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[x : A]^x\\ \vdots\\ N : B\end{array}}{\lambda x.N : A \to B}\to I^x \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ M : A\end{array}}{(\lambda x.N)M : B}\to E \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c}\vdots\\ M : A\\ \vdots\\ N[M/x] : B\end{array}$$

O categorie $\mathcal{C}$ se numește *cartezian închisă* dacă are:

Categorii cartezian închise

O categorie $\mathcal{C}$ se numește *cartezian închisă* dacă are:

- Un obiect distins $1 \in \mathcal{C}$ și o săgeată $!_C : C \to 1$ unică;

O categorie $\mathcal{C}$ se numește *cartezian închisă* dacă are:

- Un obiect distins $1 \in \mathcal{C}$ și o săgeată $!_C : C \to 1$ unică;
- Pentru orice A, B, un obiect $A \times B$ și săgeți $p_1 : A \times B \to A$ și $p_2 : A \times B \to B$ cu *proprietate de universalitate*;

Categorii cartezian închise

O categorie $\mathcal{C}$ se numește *cartezian închisă* dacă are:

- Un obiect distins $1 \in \mathcal{C}$ și o săgeată $!_C : C \to 1$ unică;
- Pentru orice A, B, un obiect $A \times B$ și săgeți $p_1 : A \times B \to A$ și $p_2 : A \times B \to B$ cu *proprietate de universalitate*;
- Pentru orice $A \times B$, un obiect B^A (exponențială, $\lambda(-)$) și $\varepsilon : B^A \times A \to B$ (`eval(-)`);

Categorii cartezian închise

O categorie $\mathcal{C}$ se numește *cartezian închisă* dacă are:

- Un obiect distins $1 \in \mathcal{C}$ și o săgeată $!_C : C \to 1$ unică;
- Pentru orice A, B, un obiect $A \times B$ și săgeți $p_1 : A \times B \to A$ și $p_2 : A \times B \to B$ cu *proprietate de universalitate*;
- Pentru orice $A \times B$, un obiect B^A (exponențială, $\lambda(-)$) și $\varepsilon : B^A \times A \to B$ (`eval(-)`);
- $+$ diagrame comutative (compatibilitate și universalitate).

λ-calculul cu tipuri simple — Prezentare ecuațională

Tipuri de bază: $A, B, \ldots, A \times B, A \to B$ etc.;

λ-calculul cu tipuri simple — Prezentare ecuațională

Tipuri de bază: $A, B, \ldots, A \times B, A \to B$ etc.;

Termeni:

λ-calculul cu tipuri simple — Prezentare ecuațională

Tipuri de bază: $A, B, \ldots, A \times B, A \to B$ etc.;

Termeni:

- Variabile de tip A;

Tipuri de bază: $A, B, \ldots, A \times B, A \to B$ etc.;

Termeni:

- Variabile de tip A;
- Constante;

Tipuri de bază: $A, B, \ldots, A \times B, A \to B$ etc.;

Termeni:

- Variabile de tip A;
- Constante;
- Perechi $\langle a, b \rangle : A \times B \quad (a : A, b : B)$;

λ-calculul cu tipuri simple — Prezentare ecuațională

Tipuri de bază: $A, B, \ldots, A \times B, A \to B$ etc.;

Termeni:

- Variabile de tip A;
- Constante;
- Perechi $\langle a, b \rangle : A \times B \quad (a : A, b : B)$;
- Proiecții $\mathrm{fst}(c) : A, \mathrm{snd}(c) : B \quad (c : A \times B)$;

Tipuri de bază: $A, B, \ldots, A \times B, A \to B$ etc.;

Termeni:

- Variabile de tip A;
- Constante;
- Perechi $\langle a, b \rangle : A \times B \quad (a : A, b : B)$;
- Proiecții $\mathrm{fst}(c) : A, \mathrm{snd}(c) : B \quad (c : A \times B)$;
- Evaluări $ca : B \quad (c : A \times B, a : A)$;

λ-calculul cu tipuri simple — Prezentare ecuațională

Tipuri de bază: $A, B, \ldots, A \times B, A \to B$ etc.;

Termeni:

- Variabile de tip A;
- Constante;
- Perechi $\langle a, b \rangle : A \times B \quad (a : A, b : B)$;
- Proiecții $\mathrm{fst}(c) : A, \mathrm{snd}(c) : B \quad (c : A \times B)$;
- Evaluări $ca : B \quad (c : A \times B, a : A)$;
- Abstracții $\lambda x.b : A \times B \quad (x : A, b : B)$;

λ-calculul cu tipuri simple — Prezentare ecuațională

Ecuații:

λ-calculul cu tipuri simple — Prezentare ecuațională

Ecuații:

- $\mathrm{fst}(\langle a, b\rangle) = a, \quad \mathrm{snd}(\langle a, b\rangle) = b;$

Ecuații:

- $\mathrm{fst}(\langle a, b\rangle) = a, \quad \mathrm{snd}(\langle a, b\rangle) = b$;
- $\langle \mathrm{fst}(c), \mathrm{snd}(c)\rangle = c \quad (c : A \times B)$;

Ecuații:

- $\mathrm{fst}(\langle a, b\rangle) = a, \quad \mathrm{snd}(\langle a, b\rangle) = b$;
- $\langle \mathrm{fst}(c), \mathrm{snd}(c)\rangle = c \quad (c : A \times B)$;
- $(\lambda x.b)a = b[a/x]$;

Ecuații:

- $\mathrm{fst}(\langle a, b\rangle) = a, \quad \mathrm{snd}(\langle a, b\rangle) = b$;
- $\langle \mathrm{fst}(c), \mathrm{snd}(c)\rangle = c \quad (c : A \times B)$;
- $(\lambda x.b)a = b[a/x]$;
- $\lambda x.cx = c$, cu x liberă în c.

Ecuații:

- $\mathrm{fst}(\langle a, b\rangle) = a, \quad \mathrm{snd}(\langle a, b\rangle) = b$;
- $\langle \mathrm{fst}(c), \mathrm{snd}(c)\rangle = c \quad (c : A \times B)$;
- $(\lambda x.b)a = b[a/x]$;
- $\lambda x.cx = c$, cu x liberă în c.

$\rightsquigarrow$ *categoria tipurilor λ-calculului*:

Ecuații:

- $\mathrm{fst}(\langle a, b\rangle) = a, \quad \mathrm{snd}(\langle a, b\rangle) = b$;
- $\langle \mathrm{fst}(c), \mathrm{snd}(c)\rangle = c \quad (c : A \times B)$;
- $(\lambda x.b)a = b[a/x]$;
- $\lambda x.cx = c$, cu x liberă în c.

$\rightsquigarrow$ *categoria tipurilor λ-calculului*:

- Obiecte: tipurile simple (dintre tipurile de bază, $A, B, C, \ldots$);

Ecuații:

- $\mathrm{fst}(\langle a, b\rangle) = a, \quad \mathrm{snd}(\langle a, b\rangle) = b$;
- $\langle \mathrm{fst}(c), \mathrm{snd}(c)\rangle = c \quad (c : A \times B)$;
- $(\lambda x.b)a = b[a/x]$;
- $\lambda x.cx = c$, cu x liberă în c.

$\rightsquigarrow$ *categoria tipurilor λ-calculului*:

- Obiecte: tipurile simple (dintre tipurile de bază, $A, B, C, \dots$);
- Săgeți: tipuri de forma $A \times B$;

Ecuații:

- $\mathrm{fst}(\langle a, b\rangle) = a, \quad \mathrm{snd}(\langle a, b\rangle) = b$;
- $\langle \mathrm{fst}(c), \mathrm{snd}(c)\rangle = c \quad (c : A \times B)$;
- $(\lambda x.b)a = b[a/x]$;
- $\lambda x.cx = c$, cu x liberă în c.

$\rightsquigarrow$ *categoria tipurilor λ-calculului*:

- Obiecte: tipurile simple (dintre tipurile de bază, $A, B, C, \ldots$);
- Săgeți: tipuri de forma $A \times B$;
- Identități $1_A = \lambda x.x \quad (x : A)$;

Ecuații:

- $\mathrm{fst}(\langle a, b\rangle) = a, \quad \mathrm{snd}(\langle a, b\rangle) = b$;
- $\langle \mathrm{fst}(c), \mathrm{snd}(c)\rangle = c \quad (c : A \times B)$;
- $(\lambda x.b)a = b[a/x]$;
- $\lambda x.cx = c$, cu x liberă în c.

$\rightsquigarrow$ *categoria tipurilor λ-calculului*:

- Obiecte: tipurile simple (dintre tipurile de bază, $A, B, C, \dots$);
- Săgeți: tipuri de forma $A \times B$;
- Identități $1_A = \lambda x.x \quad (x : A)$;
- Compunerea: $c \circ b = \lambda x.c(bx)$

Plan

Tipuri (ierarhii): introducere logică și filosofică (Frege, Russell, Ramsey, Wittgenstein, Carnap);

Plan

Tipuri (ierarhii): introducere logică și filosofică (Frege, Russell, Ramsey, Wittgenstein, Carnap);

Logica intuiționistă (Brouwer, Heyting) și teoria intuiționistă a tipurilor (Martin-Löf);

Plan

Tipuri (ierarhii): introducere logică și filosofică (Frege, Russell, Ramsey, Wittgenstein, Carnap);

Logica intuiționistă (Brouwer, Heyting) și teoria intuiționistă a tipurilor (Martin-Löf);

Tipuri de egalitate (ML) $\rightsquigarrow$ **teorii de omotopie (HoTT)**;

Plan

Tipuri (ierarhii): introducere logică și filosofică (Frege, Russell, Ramsey, Wittgenstein, Carnap);

Logica intuiționistă (Brouwer, Heyting) și teoria intuiționistă a tipurilor (Martin-Löf);

Tipuri de egalitate (ML) $\rightsquigarrow$ **teorii de omotopie (HoTT)**;

Axioma de **univalență** (Voevodsky, HoTT): „echivalența este echivalentă cu egalitatea“

Plan

Tipuri (ierarhii): introducere logică și filosofică (Frege, Russell, Ramsey, Wittgenstein, Carnap);

Logica intuiționistă (Brouwer, Heyting) și teoria intuiționistă a tipurilor (Martin-Löf);

Tipuri de egalitate (ML) $\rightsquigarrow$ **teorii de omotopie (HoTT)**;

Axioma de **univalență** (Voevodsky, HoTT): „echivalența este echivalentă cu egalitatea“

Toposuri via fascicule (Mac Lane) sau teorii semantice (Lawvere), categorii ca sisteme deductive (Lambek).

Bibliografie orientativă

- Awodey, S. — *Structuralism, Invariance, and Univalence* (2014);
- Goldblatt, R. — *Topoi: The Categorial Analysis of Logic* (1984);
- Lambek, J., Scott, P. J. — *Introduction to Higher Order Categorical Logic* (1988);
- Lawvere, F. — *Functorial Semantics of Algebraic Theories* (1963);
- Martin-Löf, P. — *Intuitionistic Type Theory* (1980);
- Shulman, M. — *Homotopy Type Theory: The Logic of Space* (2017);
- Sørensen, M. Urzyczyn, P. — *Lectures on the Curry-Howard isomorphism* (2006);
- Wadler, P. — *Propositions as Types* (2015).