# Introducere în semantică denotațională

Adrian Manea

SLA, 410

# Context

Tema: Corespondența Curry-Howard-Lambek.

Acum: Aplicații în semantică ale $\lambda$-calculului + CCC.

Resurse principale: [Schmidt, 2009] și [Abramsky and Jung, 1994].

Problema: Specificațiile recursive

$$\lambda x.xx$$

$$X = \ldots X \ldots$$

Avem nevoie de o *metodă canonică* de a rezolva ecuațiile pentru orice $x, X$

$\Rightarrow$ ecuația domeniilor (Scott) $D \simeq [D \to D]$, cu $D$ = *domeniu semantic*

În categorii, $F : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C} \Rightarrow D \simeq F(D, D)$.

# Exemplu: Semantica factorialului

$$\texttt{fac n} = \lambda\texttt{n.n equals zero} \to \texttt{one}$$
$$\square\ \texttt{n times (fac n minus one)}$$

După explicitare pe cazuri particulare $\Rightarrow \Gamma\texttt{fac} = \bigcup_{n\geq 0} \texttt{fac}_i$

Mai general, obținem funcționala:

$$\texttt{F} : (\texttt{Nat} \to \texttt{Nat}_\perp) \to (\texttt{Nat} \to \texttt{Nat}_\perp)$$
$$\texttt{F} = \lambda\texttt{f}\lambda\texttt{n.n = 0} \to \texttt{1} \ \square\ \texttt{n} \cdot \texttt{f(n-1)},$$

cu $\texttt{fac}_{i+1} = \texttt{F fac}_i$.

Rezultă $\Gamma\texttt{fac} = \bigcup_{i\geq 0} \Gamma F^i \emptyset$ și $\Gamma\texttt{F fac} = \Gamma\texttt{fac}$.

Folosind *definiții extensionale*, `F fac = fac`, deci `fac` este *punct fix* pentru `F`.

# Domenii parțial ordonate

### *Definiții*

*$(D, \sqsubseteq)$ = **CPO** dacă orice submulțime total ordonată (**lanț**) are* $\sup$ *în D.*
*D = **punctat/strict** dacă este complet și are cel mai mic element.*
*$f : A \to B$ monotonă între CPO = **continuă** dacă pentru orice lanț $X \subseteq A, f(\sup(X)) = \sup_{x \in X}(f(x))$.*

### *Teoremă*

*D = PCPO, $F : D \to D$ continuă.*
*F are un cel mai mic punct fix:* `fix F` $= \sup_{i \geq 0}(F^i \bot)$.

### *Definiție*

*Semantica specificației recursive $f = Ff$ este* `fix F`.

# Categorii cartezian închise

*Definiție*

*Categoria* $\mathscr{C}$ *se numește* ***cartezian închisă (CCC)*** *dacă:*

- *are un obiect terminal,* $1$*;*
- *orice pereche de obiecte are un produs direct și proiecții canonice;*
- $\forall A, B \in \mathscr{C}, \exists [A \to B] \in \mathscr{C}$ *și săgeata*

$$\mathtt{eval} : [A \to B] \times A \to B,$$

*a.î.* $\forall f : C \times A \to B, \exists! \lambda f : C \to [A \to B]$,

$$f = C \times A \xrightarrow{\lambda f \times A} [A \to B] \times A \xrightarrow{\mathtt{eval}} B.$$

# Exemple de CCC

$\mathtt{Set}$ este CCC, $[A \to B] = \mathrm{Func}(A, B)$ și

$$\mathtt{eval} : [A \to B] \times A \to B, \quad \mathtt{eval\ f\ a\ =\ f\ a}.$$

Orice algebră Boole este poset, deci categorie. Def. $[a \to b] = \neg a \vee b$.
$\mathtt{eval}$ asigură $[a \to b] \wedge a \leq b$.
$\lambda f : c \to [a \to b]$ asociată $f : c \wedge a \to b$ înseamnă:

$$c \wedge a \leq b \Rightarrow c \leq [a \to b].$$

Categoria $\mathtt{CPO}$ cu funcții continue este CCC, dar subcategoria strictă, nu. [Reynolds, 2000].

# Exemple de CCC (informale)

Un limbaj simplu de programare funcțională = categorie (tipuri și funcții).

Existența $[A \to B]$ cere „funcții clasa I“.

Proprietatea de universalitate ridică probleme de implementare, mai ales pentru produse *n*-are. ([Barr and Wells, 1990])

# Exemple de CCC (informale)

[Lambek, 1989]: Categorie = sistem deductiv (formule și demonstrații).

CCC: $[A \to B]$ = implicație. `eval` $: [A \to B] \times A \to B$ este *modus ponens*.

Proprietatea de universalitate asociază $f : C \times A \to B$ o „deducție“ $\lambda f : C \to [A \to B]$, care este *regula detașării*.

Abramsky, S. and Jung, A. (1994).
Domain theory.
In Gabbay, D., editor, *Handbook of Logic in Computer Science*, volume 3, chapter 1, pages 2–169. Clarendon Press.

Barr, M. and Wells, C. (1990).
*Category Theory for Computing Science.*
Prentice Hall.

Lambek, J. (1989).
On some connections between logic and category theory.
*Studia Logica*, 48(3):269–278.

Reynolds, J. (2000).
Categories and cpos.
disponibil online.
notițe de curs.

Schmidt, D. A. (2009).
*Denotational Semantics.*
Brown & Co.
disponibilă online.