### Introducere în semantică denotațională

Adrian Manea

SLA, 410

#### Context

Tema: Corespondența Curry-Howard-Lambek.

Acum: Aplicații în semantică ale  $\lambda$ -calculului + CCC.

Resurse principale: [Schmidt, 2009] și [Abramsky and Jung, 1994].

### Semantica punctelor fixe

Problema: Specificațiile recursive

$$\lambda x.xx$$

$$X = \dots X \dots$$

Avem nevoie de o metodă canonică de a rezolva ecuațiile pentru orice x, X

 $\Rightarrow$  ecuația domeniilor (Scott)  $D \simeq [D \to D]$ , cu D = domeniu semantic

În categorii,  $F: \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C} \Rightarrow D \simeq F(D, D)$ .

### Exemplu: Semantica factorialului

fac n = 
$$\lambda$$
n.n equals zero  $\rightarrow$  one   
  $\Box$  n times (fac n minus one)

După explicitare pe cazuri particulare 
$$\Rightarrow \Gamma fac = \bigcup_{n \geq 0} fac_i$$

Mai general, obținem funcționala:

F: 
$$(Nat \rightarrow Nat_{\perp}) \rightarrow (Nat \rightarrow Nat_{\perp})$$
  
F =  $\lambda f \lambda n. n = 0 \rightarrow 1 \square n \cdot f(n-1),$ 

$$\operatorname{cu}\operatorname{fac}_{i+1}=\operatorname{F}\operatorname{fac}_{i}.$$

Rezultă 
$$\Gamma fac = \bigcup_{i \geq 0} \Gamma F^i \emptyset$$
 și  $\Gamma F$  fac =  $\Gamma fac$ .

Folosind *definiții extensionale*, F fac = fac , deci fac este *punct fix* pentru F.

## Domenii parțial ordonate

### Definiții

 $(D, \sqsubseteq) = CPO$  dacă orice submulțime total ordonată (lanț) are sup în D.

D = punctat/strict dacă este complet și are cel mai mic element.

f:A o B monotonă între CPO =  $\operatorname{continureanumenta}$  dacă pentru orice lanț

 $X \subseteq A, f(\sup(X)) = \sup_{x \in X} (f(x)).$ 

#### **Teoremă**

 $D = PCPO, F : D \rightarrow D$  continuă.

F are un cel mai mic punct fix: fix  $F = \sup_{i>0} (F^i \perp)$ .

#### Definiție

Semantica specificației recursive f = Ff este fix F.

# Categorii cartezian închise

#### Definiție

Categoria & se numește cartezian închisă (CCC) dacă:

- are un obiect terminal, 1;
- orice pereche de obiecte are un produs direct și proiecții canonice;
- ullet  $\forall A,B\in\mathscr{C},\exists [A o B]\in\mathscr{C}$  și săgeata

$$eval: [A \rightarrow B] \times A \rightarrow B,$$

$$a.\hat{i}. \forall f : C \times A \rightarrow B, \exists ! \lambda f : C \rightarrow [A \rightarrow B],$$

$$f = C \times A \xrightarrow{\lambda f \times A} [A \to B] \times A \xrightarrow{\text{eval}} B.$$

## Exemple de CCC

Set este CCC,  $[A \rightarrow B] = \operatorname{Func}(A, B)$  și

eval: 
$$[A \rightarrow B] \times A \rightarrow B$$
, eval f a = f a.

Orice algebră Boole este poset, deci categorie. Def.  $[a \to b] = \neg a \lor b$ . eval asigură  $[a \to b] \land a \le b$ .

 $\lambda f: c \to [a \to b]$  asociată  $f: c \land a \to b$  înseamnă:

$$c \wedge a \leq b \Rightarrow c \leq [a \rightarrow b].$$

Categoria CPO cu funcții continue este CCC, dar subcategoria strictă, nu. [Reynolds, 2000].

## Exemple de CCC (informale)

Un limbaj simplu de programare funcțională = categorie (tipuri și funcții).

Existența  $[A \rightarrow B]$  cere "funcții clasa I".

Proprietatea de universalitate ridică probleme de implementare, mai ales pentru produse *n*-are. ([Barr and Wells, 1990])

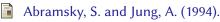
### Exemple de CCC (informale)

[Lambek, 1989]: Categorie = sistem deductiv (formule și demonstrații).

CCC:  $[A \rightarrow B]$  = implicație. eval :  $[A \rightarrow B] \times A \rightarrow B$  este modus ponens.

Proprietatea de universalitate asociază  $f: C \times A \rightarrow B$  o "deducție"  $\lambda f: C \rightarrow [A \rightarrow B]$ , care este *regula detașării*.

### Citări



Domain theory.

In Gabbay, D., editor, *Handbook of Logic in Computer Science*, volume 3, chapter 1, pages 2–169. Clarendon Press.

Barr, M. and Wells, C. (1990).

Category Theory for Computing Science.

Prentice Hall.

Lambek, J. (1989).

On some connections between logic and category theory. *Studia Logica*, 48(3):269–278.

Reynolds, J. (2000). Categories and cpos. disponibil online.

notite de curs.

Citări



Schmidt, D. A. (2009).

Denotational Semantics.

Brown & Co.

disponibilă online.