



Лев В. Тарасов, Альдина Н. Тарасова
Вопросы и задачи по физике
„Высшая школа”, Москва 1990
© Издательство „Высшая школа”

Okładkę i kartę tytułową projektowała: *Lidia Michalak*
Redaktor inicjujący: *Halina Ułatowska*
Redaktor merytoryczny: *Jadwiga Skłodowska*
Redaktor techniczny: *Bożenna Stępień*

W książce w formie dialogu między autorem i czytelnikiem przeanalizowano typowe błędy popełniane w rozwiązywaniu zadań z fizyki

ISBN 83-02-05570-0

© Copyright for the Polish edition by Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne
Warszawa 1995

**Zabrania się publikowania rozwiązań zadań
bez zgody Wydawnictw Szkolnych i Pedagogicznych**

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne
Warszawa 1995
Wydanie pierwsze
Arkuszy drukarskich 25
Papier offset, kl. III, 70 g, 61 * 86 cm
Łódzka Drukarnia Dziełowa
Łódź, ul. Rewolucji 1905 r. nr 45
Zam. 417 94

Spis treści

Przedmowa	5
1. Czy dobrze się orientujesz w podstawowych pojęciach kinematyki?	7
2. Czy umiesz przeprowadzić analizę graficzną ruchu prostoliniowego?	23
3. Czy potrafisz wskazać, jakie siły są przyłożone do ciała?	30
4. Czy umiesz znajdować siłę tarcia?	38
5. Czy dobrze znasz zasady dynamiki Newtona?	44
6. Jak rozwiązujeś zadania z kinematyki?	55
7. Jak rozwiązujeś zadania dotyczące zasad dynamiki Newtona?	68
8. W jakim stopniu komplikuje się rozwiązywanie zadań po uwzględnieniu siły tarcia?	76
9. Czy istnieje siła odśrodkowa?	84
10. Jak objaśnisz nieważkość ciała?	99
11. Co wiesz o pracy?	104
12. Czym różni się moc chwilowa od mocy średniej?	113
13. Czy umiesz stosować zasady zachowania energii i pędu?	117
14. Czy wiesz, jakie drgania nazywamy drganiami harmonicznymi?	138
15. Co się stanie z wahadłem w stanie nieważkości?	147
16. Co wiesz o falach?	155
17. Czy umiesz rozkładać wektory sił?	164
18. Co wiesz o równowadze ciał?	170
19. W jaki sposób znajdujesz położenie środka ciężkości?	178
20. Czy znasz prawo Pascala?	186
21. Dlaczego trzeba znać prawo Archimedesa?	193
22. Czy prawo Archimedesa obowiązuje w statku kosmicznym?	202
23. Co wiesz o kinetyczno-cząsteczkowej teorii materii?	205
24. Jak wyjaśnia się wyjątkową rozszerzalność termiczną wody?	216
25. Czy wiesz, co to jest gaz doskonaly?	216
26. Jakie znasz prawa gazowe?	222
27. Jak rozwiązujeś zadania dotyczące praw gazowych?	232
28. Kiedy pojawia się rosa?	245
29. Co to jest termodynamika?	248
30. Co to jest cykl Carnota?	255
31. Ile pojemności cieplnych ma gaz?	258
32. Porozmawiajmy o polu	260

33. Jak się opisuje pole elektrostatyczne?	264
34. Jak uktadają się linie pola przy powierzchni przewodnika?	276
35. Jak opisujesz ruch w jednorodnym polu elektrostatycznym?	281
36. Czy umiesz stosować prawo Coulomba?	291
37. Czy znasz prawo Ohma?	299
38. Czy można włączyć kondensator w obwód prądu stałego?	308
39. Czy umiesz obliczać opór rozgałęzionej części obwodu?	315
40. Dlaczego przepaliła się żarówka?	322
41. Jak się opisuje pole magnetyczne prądu?	329
42. Jak wzajemnie oddziałują prądy elektryczne?	335
43. Czy dobrze znasz prawo Faradaya i regułę Lenza?	342
44. Czy znasz pojęcia samoindukcji i indukcyjności?	347
45. Czy wiesz, jak odbijają się i załamują promienie świetlne?	350
46. Czy umiesz konstruować graficznie obrazy wytwarzane za pomocą zwierciadeł i soczewek?	358
47. Czy dobrze rozwiążesz zadania dotyczące zwierciadeł i soczewek?	370
48. Konieczna jest rozwaga	377
Odpowiedzi	384

Przedmowa

Z zadowoleniem polecam czytelnikom tę książkę. Była ona wydana po raz pierwszy w roku 1968. Wydanie obecne (w języku rosyjskim) jest czwartym z kolej. W czasie dwudziestu lat, które upłyнуły od pierwszego wydania, książkę przełożono na wiele języków: hiszpański, angielski, niemiecki, węgierski, czeski, japoński i tamilski.

W pierwszym zamysle książka miała być poradnikiem dla kandydatów na wyższe uczelnie. Chcąc pomóc abiturientom w lepszym przygotowaniu się do egzaminów wstępnych z fizyki, autorzy przeanalizowali charakterystyczne błędy, popełniane przez egzaminowanych. Dla przejrzystości analizy wybrali formę dialogu między autorem i czytelnikiem. Jak wiadomo, analiza błędów jest zawsze pouczająca, ponieważ zwraca uwagę na różne aspekty rozpatrywanego zagadnienia, ujawnia „subtelności”, pogłębia zrozumienie. Jak zaznaczyli autorzy w swojej przedmowie do pierwszego wydania, „...nie można przewidzieć wszystkich możliwych niepoprawnych odpowiedzi na dane pytanie... Tym niemniej można wskazać pewne błędne odpowiedzi na określone pytania, z którymi stale się spotykamy. Można wymienić wiele konkretnych pytań, na które z reguły udzielane są błędne odpowiedzi. Taki właśnie materiał stanowi treść tej książki”.

Trzeba przyznać, że autorzy wspaniale wywiązały się z postawionego sobie zadania. Analizę błędów przeprowadzili dokładnie i z pełną znajomością rzeczy. Dlatego książka będzie cenną pomocą nie tylko dla abiturientów przygotowujących się do egzaminów, lecz także dla nauczycieli w ich pracy szkolnej. Nauczyciele otrzymali dobrze przemyślany zestaw pytań i zadań, który pozwoli efektywnie diagnostować wiedzę fizyczną uczniów, sprawdzać, czy rozumieją oni zasadnicze zagadnienia szkolnego kursu fizyki, w tym zagadnienia

dosyć subtelne i trudne. Jest oczywiste, że z książką powinni się zapoznać abiturienti szkoły średniej — aby nie powtarzać cudzych błędów. Ale jeszcze większa korzyść będzie wtedy, gdy książkę przeczytają nauczyciele. To z pewnością pomoże właściwie rozłożyć akcenty w nauczaniu, aby uczniowie zdobywający potrzebną im wiedzę, mogli wystarczająco dobrze opanować nie tylko łatwe, ale i trudne zagadnienia fizyczne.

Akademia Nauk Pedagogicznych

W. Rozumowski

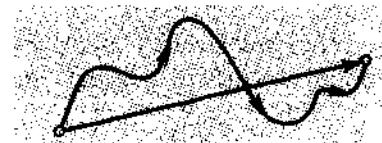
1. Czy dobrze się orientujesz w podstawowych pojęciach kinematyki?

Nie lekceważ kinematyki! Pytanie o to, jak przemieszcza się ciało w przestrzeni w miarę upływu czasu, jest bardzo interesujące, zarówno z punktu widzenia fizyki, jak i działalności praktycznej.

Autor: Na początku nauki mechaniki poznajesz podstawowe pojęcia kinematyki, takie jak przemieszczenie, droga, prędkość, przyspieszenie. Omówmy te pojęcia.

Czytelnik: Przemieszczenie — to odcinek skierowany, łączący początkowe i końcowe położenia ciała. Inaczej mówiąc, jest to wektor, poprowadzony z początkowego położenia ciała do końcowego. Przebyta droga to długość tego wektora.

Autor: Właściwie rozumiesz sens pojęcia „przemieszczenie”, jednak przebytą drogę określiłeś niepoprawnie. Przebyta droga jest długością toru, który zakreśliło ciało, przemieszczając się z położenia początkowego do końcowego. Długość toru może być większa niż odległość mierzona wzdłuż prostej między położeniami początkowym i końcowym (rys. 1.1).



Rys. 1.1

Czytelnik: Zrozumiałem. Przebyta droga jest równa wartości przemieszczenia tylko w ruchu prostoliniowym.

Autor: I odbywającym się w jedną stronę. Przykładem ilustrującym różnicę między przemieszczeniem i przebyta droga, może być wędrownika po ścieżce łączącej schroniska w górach.

Czytelnik: Rzeczywiście, dwa takie schroniska mogą być położone w bardzo małej odległości mierzonej wzdłuż prostej, ale aby dostać

się z jednego do drugiego, trzeba pokonać liczne zakręty wijące się górskiej ścieżki. W tym wypadku idący człowiek przebywa długą drogę, podczas gdy przemieszczenie jest względnie małe.

Autor: A czy może być tak, że przemieszczenie jest równe zeru, a długość przebytej przy tym drogi nie jest równa zeru?

Czytelnik: Teraz już zrozumiałem. Tak bywa za każdym razem, kiedy wracamy do punktu wyjścia, to jest gdy koncowe położenie ciała jest takie samo jak położenie początkowe.

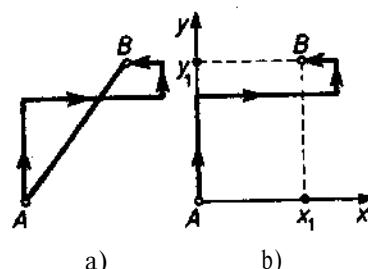
Autor:

Załóżmy, że człowiek kolejno przeszedł: na północ 3 km, na wschód 4 km, na północ 1 km / na zachód 1 km. **Przebyta droga jest równa 9 km. Jak znaleźć wartość wektora przemieszczenia?**

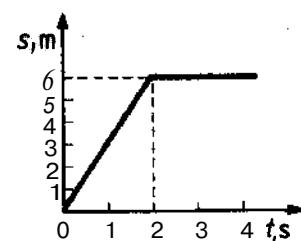
Czytelnik: Narysuję trajektorię, czyli tor ruchu człowieka (rys. 1.2a). Tutaj A oznacza położenie początkowe, B — koncowe. Połączmy punkty A i B odcinkiem prostej. Trzeba znaleźć długość tego odcinka. Na rysunku są dwie figury: trójkąt prostokątny i trapez...
Autor (wchodząc w słowo): W tej sytuacji nie ma potrzeby rozpatrywania figur geometrycznych. Wprowadźmy układ współrzędnych tak, aby jego początek znajdował się w punkcie A, oś y była zwrócona na północ, a oś x na wschód (rys. 1.2b). Współrzędne punktu B oznaczmy x_1 i y_1 . Łatwo zauważyc, że $x_1 = 4 - 1 = 3$, $y_1 = 3 + 1 = 4$. Wobec tego $|AB| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ km.

Czytelnik: Zrozumiałem; zanim obliczy się wartość wektora przemieszczenia, trzeba znaleźć jego rzuty na osie współrzędnych.

Autor: Teraz możemy przejść do pojęcia prędkości średniej.



Rys. 1.2



Rys. 1.3

Rysunku 1.3 przedstawiono zależność przebytej drogi s od czasu t .
Jaka jest prędkość średnia w czasie pierwszych dwóch sekund i pierwszych trzech sekund?

Czytelnik: Czyż nie jest to ta sama wielkość?

Autor: Są to dwie różne prędkości średnie. Przypominam, że prędkość średnią określa się dla wybranego czasu.

Prędkość średnia* w przedziale czasu At wynosi

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (1.1)$$

gdzie Δs — droga przebyta w przedziale czasu At .

Czytelnik: W takim razie prędkość średnia w czasie pierwszych dwóch sekund jest równa $3 \frac{m}{s}$, a w czasie pierwszych trzech sekund $2 \frac{m}{s}$.

Autor: Obliczyłeś poprawnie. Musisz jednak stale pamiętać, że prędkość średnia nie ma sensu, jeżeli nie wskazano przedziału czasu uśredniania. Warto podkreślić, że słowo „średnia” oznacza tutaj uśrednianie po czasie.

Czytelnik: To zrozumiałe.

Autor: Więc nadeszła pora, abyś rozwiązał proste zadanie.

Pierwszą połowę drogi ciało przebyło ruchem jednostajnym z prędkością $v_1 = 10 \frac{m}{s}$, a drugą — z prędkością $v_2 = 30 \frac{m}{s}$. Jaką prędkością średnią miało to ciało w czasie całego ruchu?

Czytelnik: Przypuszczam, że $20 \frac{m}{s}$.

Autor: Nieprawda. Oznaczmy całą przebytą drogę przez s . Pierwszą połowę drogi ciało przebyło w czasie $\frac{s}{2v_1}$, a drugą w czasie $\frac{s}{2v_2}$; całkowity czas ruchu jest równy $\frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}$.

* Prędkość średnia oznacza się również symbolami v_{sr} lub \bar{v} (przykładem)

Dzieląc s przez ten przedział czasu, otrzymamy prędkość średnią:

$$v_{\text{sr}} = \frac{s}{\frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Czytelnik: Z jakiegoś powodu byłem przekonany, że powinno być $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Autor: Tak by było, gdyby ciało poruszało się z prędkością $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (i odpowiednio $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) nie przez połowę drogi, ale przez połowę czasu ruchu.

Czytelnik: Trzeba przyznać, że nawet tak proste pojęcie, jak średnia prędkość, nie jest pozbawione pewnych subtelności.

Autor:

Przejdzmy do pojęcia prędkości chwilowej.

Czytelnik: Prędkość chwilowa jest to prędkość ciała w danej chwili. Albo, inaczej mówiąc, jest to prędkość, którą ciało ma w danym punkcie toru.

Autor: A jak wyobrażasz sobie prędkość w danej chwili?

Czytelnik: Wyobrażam sobie tak... Jeżeli ciało przemieszcza się ruchem jednostajnym, to w różnych chwilach jego prędkość jest taka sama. Jeżeli zaś ciało przemieszcza się ruchem niejednostajnym, to w różnych chwilach ma różne prędkości.

Autor: Czyż nie odczuwasz, że wyrażenie „prędkość w danej chwili” to synonim słów „prędkość chwilowa” i nic ponadto? Jak powiadają „masło maślane” albo „nie kijem go, to pałką”. Aby zmierzyć prędkość, trzeba zmierzyć drogę i przedział czasu, w którym ta droga została przebyta. A o jakiej przebytej drodze i o jakim przedziale czasu można mówić, myśląc o danej chwili?

Czytelnik: Można wybrać jakiś mały przedział czasu Δt : od danej chwili t do chwili $t + \Delta t$. Niechaj w tym czasie ciało przebędzie drogę Δs . Jeżeli przedział Δt jest dostatecznie mały, to iloraz $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ będzie właśnie tym, co jest nazywane prędkością ciała w chwili t .

Autor: Ale cóż to takiego ten „dostatecznie mały” przedział czasu? Z czym właściwie należy go porównać? Z rokiem, godziną, sekundą?

Czytelnik: W takim razie mam kłopot z określeniem pojęcia prędkości chwilowej.

Autor: Trzeba utworzyć ciąg wartości prędkości średnich w przedziałach czasu od t do $t + \Delta t$, wybierając coraz to mniejsze i mniejsze wartości Δt . Granicą tego ciągu, przy Δt dążącym do zera, jest właśnie prędkość w chwili t . Jeżeli znana jest zależność drogi od czasu — zależność $s(t)$, to prędkość w chwili t jest określona wyrażeniem

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \quad (1.2)$$

Czytelnik: To jest pochodna drogi względem czasu: $v(t) = \frac{ds}{dt}$.

Autor: Słusznie. Założymy na przykład, że $s(t) = \frac{1}{2}at^2$.

Wykorzystując (1.2), znajdujemy

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{a(t + \Delta t)^2}{2} - \frac{at^2}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(at + \frac{a\Delta t}{2} \right) = at.$$

Czytelnik: A czy nie można podać określenia prędkości chwilowej, nie uciekając się do różniczkowania?

Autor: Ścisłe mówiąc, nie można:

Prędkość chwilowa jest granicą odpowiedniego ciągu wartości prędkości średnich. Innymi słowy, jest to pochodna drogi względem czasu.

I nie można tego wyrazić w żaden inny sposób.

Czytelnik: Jednakże, rozpoczęjąc zgłębianie mechaniki, obchodzimy się bez analizy matematycznej!

Autor: Posługiwałeś się pojęciem prędkości chwilowej, korzystając ze zdobytego doświadczenia i wyobrażeń intuicyjnych. Przy tym w myśl posługiwałeś się „bardzo maleńkimi” przedziałami czasu.

Czytelnik: Może jest to w pełni wystarczające?

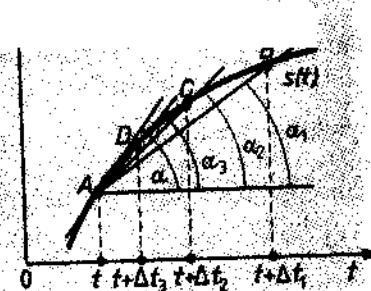
Autor: Nie, niewystarczające. Nie znając podstaw rachunku różniczkowego, faktycznie nie można zrozumieć samej istoty ruchu

ciągłego. Starożytni Grecy, rozpatrując paradoks lecącej strzały, rozumowali tak: W danej chwili lecąca strzała znajduje się w ścisłe określonym miejscu, względem tego miejsca jest w spoczynku. Jest to słuszne dla dowolnej chwili, tak więc strzała znajduje się w spoczynku w każdej chwili, tj. spoczywa w ogółie. Ten paradoks ujawnia nierożumienie przez starożytnych Greków pojęcia prędkości chwilowej.

Czytelnik: Przypominam sobie, że prędkość w danej chwili może być wyznaczona przez tangens kąta nachylenia stycznej do wykresu drogi jako funkcji czasu.

Autor: Rzeczywiście, prędkość chwilową można wyznaczyć geometrycznie, wykorzystując wykres zależności drogi od czasu. Jednak wtedy nie ominiemy przejścia do granicy ciągu prędkości średnich.

Weźmy pod uwagę wykres drogi $s(t)$ pokazany na rysunku 1.4. Chwili t odpowiada na wykresie punkt A . Wybierzmy chwilę $t + \Delta t_1$, odpowiadającą jej punkt B . Średnia prędkość w przedziale czasu od t do $t + \Delta t_1$ wynosi $\frac{s(t + \Delta t_1) - s(t)}{\Delta t_1}$; jest ona równa $\operatorname{tg} \alpha_1$, gdzie α_1 — kąt nachylenia cięciwy AB (zakładamy dla uproszczenia, że jednostce drogi na osi s i jednostce czasu na osi t odpowiadają odcinki o jednakowych długościach). Dalej wybierzmy chwilę $t + \Delta t_2$, przy czym $\Delta t_2 < \Delta t_1$: odpowiadają jej punkt C . Średnia prędkość w przedziale czasu od t do $t + \Delta t_2$ jest równa $\operatorname{tg} \alpha_2$, gdzie α_2 — kąt nachylenia cięciwy AC . Następnie wybierzmy chwilę $t + \Delta t_3$ ($\Delta t_3 < \Delta t_2$), której odpowiada punkt D . Odpowiednia prędkość średnia jest równa $\operatorname{tg} \alpha_3$, gdzie α_3 — kąt nachylenia cięciwy AD . Wybierając coraz wcześniejsze i wcześniejsze chwile czasu (przy $\Delta t \rightarrow 0$), otrzymujemy ciąg prędkości średnich, to jest ciąg $\operatorname{tg} \alpha_1, \operatorname{tg} \alpha_2, \operatorname{tg} \alpha_3, \dots$ Nietrudno zauważać, A przy $\Delta t \rightarrow 0$ ten ciąg ma granicę $\operatorname{tg} \alpha$, gdzie α — kąt nachylenia stycznej do wykresu drogi w punkcie A .



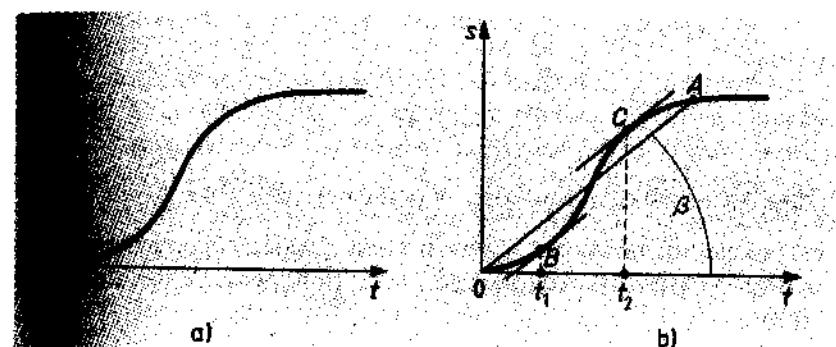
Rys. 1.4

Tak więc prędkość w chwili t może być liczbowo wyznaczona prędkością tangens kąta nachylenia stycznej do wykresu drogi w punkcie odpowiadającym chwili t .

Czytelnik: Takie określenie prędkości chwilowej jest wielce pogłównowe. Im większa prędkość, tym bardziej stromo przebiega wykres drogi.

Autor:

Przyglądając się wykresem drogi z rysunku 1.5a, wyznacz te chwile, dla których prędkość chwilowa jest równa prędkości średniej dla całego czasu ruchu.



Rys. 1.5

Czytelnik: Ruch kończy się w chwili, której na wykresie odpowiada punkt A . Średnia prędkość dla całego czasu ruchu jest równa $\operatorname{tg} \alpha$, gdzie α — kąt nachylenia prostej OA do osi czasu (rys. 1.5b). Taki sam kąt nachylenia mają styczne w punktach B i C , którym odpowiadają chwile t_1 i t_2 . Właśnie w tych momentach prędkości chwilowe są równe prędkości średniej dla całego czasu ruchu.

Autor: Ślusznie.

Wiedząc, że w chwili t_1 prędkość chwilowa jest równa prędkości średniej, oznacza to, że w chwili t_1 prędkość chwilowa przekracza prędkość średnią?

Czytelnik: Mogą, jeżeli ruch jest jednostajny. Wykresem drogi jest wtedy linia prosta.

Autor: Zgadza się.

A teraz przejdźmy do pojęcia przyspieszenia.

Czytelnik: Przyspieszenie jest szybkością zmiany prędkości ciała. Występuje ono tylko wtedy, gdy ruch ciała jest niejednostajny. Jeżeli przyspieszenie jest stałe, to mówi się o ruchu jednostajnie zmiennym.

Autor: Wszystko to prawda. Jednak pojęcie przyspieszenia należy określić bardziej precyzyjnie. Przede wszystkim rozróżnia się przyspieszenie średnie i chwilowe.

Średnie przyspieszenie w przedziale czasu Δt (przedział uśredniania) wynosi

$$a_{sr} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (1.3)$$

gdzie Δv — zmiana prędkości w przedziale czasu Δt .

Przyspieszenie chwilowe w chwili t jest granicą ciągu przyspieszeń średnich w przedziałach od t do $t + \Delta t$, obliczoną dla Δt , dążącym do zera:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}. \quad (1.4)$$

Czytelnik: Porównując (1.4) i (1.2), można zauważyć, że przyspieszenie ciała wyraża się przez przyrost jego prędkości dokładnie tak samo, jak prędkość wyraża się przez przyrost drogi.

Autor: Trafne spostrzeżenie. Prędkość to pochodna drogi względem czasu, a przyspieszenie — pochodna prędkości względem czasu.

Jak myślisz, czy prędkość ciała w pewnej chwili może być równa zera, a przyspieszenie w tej samej chwili różne od zera?

Czytelnik: Wydaje się to niemożliwe.

Autor: Odpowiedziałeś bez zastanowienia. Prędkość pionowo rzucnego kamienia jest równa zera w najwyższym punkcie toru

a przyspieszenie nie równa się zeru (jest równe przyspieszeniu spadania swobodnego).

Czytelnik: Wygląda na to, że w tej chwili wartość prędkości jest równa zera, a zmiana prędkości różni się od zera.

Autor: Właśnie tak. Teraz założymy, że wektor przyspieszenia windy ma zwrot ku górze. Jak porusza się winda — do góry, czy w dół?

Czytelnik: Z pewnością do góry...

Autor: Może poruszać się zarówno w górę, jak i w dół. W pierwszym przypadku wartość prędkości windy rośnie, a w drugim maleje.

Czytelnik: Czy to znaczy, że zwroty wektorów prędkości i przyspieszenia mogą się różnić?

Autor: Tak. W ruchu prostoliniowym zwroty mogą być różne, jak widać to na przykładzie windy. Zaś w ruchu krzywoliniowym kierunki wektorów prędkości i przyspieszenia praktycznie zawsze się różnią. Należy zauważyć, że równania (1.3) i (1.4) odnoszą się do szczególnego rodzaju ruchu prostoliniowego. Natomiast ogólnie trzeba mieć na uwadze, że zarówno prędkość, jak i przyspieszenie — są wielkościami wektorowymi. Niech, na przykład, w chwili t_1 ciało ma prędkość v_1 , a w chwili t_2 — prędkość v_2 (wektory v_1 i v_2 mogą różnić się od siebie zarówno co do wartości, jak i kierunku).

Średnie przyspieszenie a_{sr} w przedziale czasu $\Delta t = t_2 - t_1$, wynosi

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.5)$$

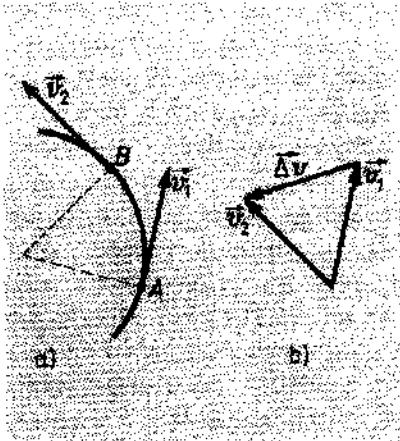
Czytelnik: Wyrażenie (1.5) jest bardzo podobne do (1.3).

Autor: Nietrudno jednak przekonać się, że wyrażenie (1.5) jest różne jakościowo od (1.3). Jeżeli, na przykład, w przedziale czasu A? prędkość nie zmieni się co do wartości, to zgodnie z (1.3) średnie przyspieszenie będzie równe się zera, a zgodnie z (1.5) może różnić się od zera. Inaczej mówiąc, dla ruchu krzywoliniowego może występować przyspieszenie przy stałej, co do wartości, prędkości.

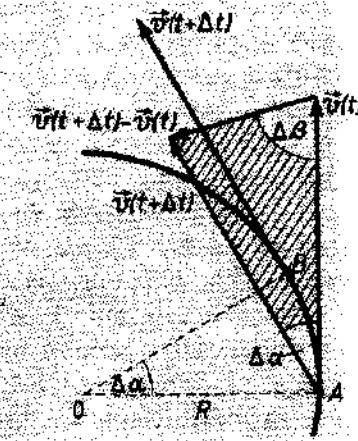
Czytelnik: Dziwne jest, że mówi się o przyspieszeniu, gdy ciało przemieszcza się ruchem jednostajnym.

Autor: Zastanówmy się nad ruchem jednostajnym ciała po okręgu. Na rysunku 1.6a przedstawiono dwa położenia ciała na okręgu: A (w chwili t_1) i B (w chwili t_2) oraz odpowiednie wektory ich prędkości (v_1 i v_2): sa one jednakowe co do wartości, ale różnią się co do

kierunku. Na rysunku 1.6b przedstawiono wektor $\vec{\Delta v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Biorąc stosunek tego wektora do przedziału czasu $\Delta t = t_2 - t_1$, otrzymamy, zgodnie z (1.5), wektor przyspieszenia średniego w przedziale czasu Δt .



Rys. 1.6



Rys. 1.7

Czytelnik: Wydaje się, że dla ruchu jednostajnego po okręgu także przyspieszenie chwilowe jest różne od zera.

Autor: Oczywiście. Uwzględniając wektorową naturę prędkości i przyspieszenia, przekształcimy (1.4) w następujące wyrażenie:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}. \quad (1.6)$$

Stosując to wyrażenie, znajdziemy przyspieszenie chwilowe $\vec{a}(t)$ ciała poruszającego się ruchem jednostajnym po okręgu. Niech w chwili t ciało znajduje się w punkcie A okręgu, a w chwili $t + \Delta t$ — w punkcie B (rys. 1.7). Długość łuku AB jest równa $\Delta s = R\Delta\alpha$, gdzie R — promień okręgu, $\Delta\alpha$ — przemieszczenia katowe w przedziale czasu Δt . Oznaczając wartość prędkości ciała przez v , otrzymamy $\Delta s = v\Delta t$. Tak więc $R\Delta\alpha = v\Delta t$, skąd

$$\Delta t = \frac{R\Delta\alpha}{v}.$$

Przeniesmy wektor $\vec{v}(t + \Delta t)$ z punktu B do punktu A i rozpatrzmy uzyskany trójkąt (na rys. 1.7 zakreskowany); jest on równoramienny. Kąt wierzchołkowy trójkąta jest równy $\Delta\alpha$ (ponieważ ramiona tego kąta są prostopadłe do ramion kąta AOB). Wartość podstawy* trójkąta jest równa

$$\|\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)\| = 2v \sin \frac{\Delta\alpha}{2}. \quad (1.8)$$

Wykorzystując (1.7) i (1.8), znajdujemy wyrażenie na wartość wektora poszukiwanego przyspieszenia:

$$\begin{aligned} |\vec{a}(t)| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\|\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)\|}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2v \sin \frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{R\Delta\alpha}{v}} = \frac{v^2}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ponieważ

$$\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}} = 1,$$

to

$$|\vec{a}(t)| = \frac{v^2}{R}. \quad (1.10)$$

Czytelnik: Otrzymaliśmy dobrze znany wzór na wartość przyspieszenia dośrodkowego!

Autor: Zupełnie słusznie. Teraz ustalimy kierunek wektora $a(t)$. Jak widać z rysunku 1.7, wektor $[\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)]$ jest skierowany pod kątem $\Delta\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\alpha}{2}$ do wektora $\vec{v}(t)$. Przy $\Delta t \rightarrow 0$ (a więc przy $\Delta\alpha \rightarrow 0$) kąt $\Delta\beta$ dąży do kąta prostego.

* Na rysunku widzimy ją jako długość podstawy. Symbol wartości bezwzględnej (modułu) we wzorze (1.8) oznacza, że interesuje nas wartość wektora powstałego w wyniku odjęcia od wektora $\vec{v}(t + \Delta t)$ wektora $\vec{v}(t)$ (przyp. tłum.).

2 — Jak rozwiązywać zadania z fizyk.

Innymi słowy, wektor przyspieszenia dośrodkowego jest skierowany wzdłuż promienia i zwrocony ku środkowi okręgu. W czasie przemieszczania się ciała po okręgu kierunek wektora przyspieszenia zmienia się, lecz jego wartość pozostaje stała (jest równa $\frac{v^2}{R}$).

Czytelnik: Czyżby dla ruchu jednostajnego po okręgu ani prędkość, ani przyspieszenie ciała nie były wielkościami stałymi?

Autor: Tak. Kierunki obydwoj wektorów zmieniają się; wektor $v(t)$ w każdym punkcie toru jest skierowany wzdłuż sty道 do okręgu, zaś wektor $a(t)$ jest stale prostopadły do wektora $v(t)$, stale skierowany wzdłuż promienia i ma zwrot ku środkowi okręgu.

Co się tyczy wartości wymienionych wektorów, to są one wielkościami stałymi.

Czytelnik: Ciekawe, na ile skomplikuje się rozpatrywanie ruchu niejednostajnego po okręgu?

Autor: W takim ruchu zmienia się nie tylko kierunek prędkości, ale także jej wartość; to samo można powiedzieć o przyspieszeniu. Wektor przyspieszenia $a(t)$ wygodnie jest przedstawić w takiej sytuacji w postaci sumy dwóch wzajemnie prostopadłych wektorów:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_r(t) + \vec{a}_s(t), \quad (1.1)$$

gdzie $\vec{a}_r(t)$ — przyspieszenie dośrodkowe, spowodowane zmianą kierunku wektora prędkości ciała, $\vec{a}_s(t)$ — przyspieszenie styczne, związane ze zmianą wartości prędkości ciała. Przyspieszenie $\vec{a}_r(t)$ jest skierowane wzdłuż promienia ku środkowi okręgu, natomiast przyspieszenie $\vec{a}_s(t)$ ma kierunek stycznej do okręgu w danym punkcie.

Czytelnik: Czy to znaczy, że wektor przyspieszenia stycznego ma taki sam kierunek i zwrot, jak wektor prędkości ciała?

Autor: Jeżeli wartość prędkości w miarę upływu czasu wzrasta, to zwroty obu wektorów są takie same, ale jeśli wartość prędkości zmniejsza się, to zwrot wektora tego przyspieszenia jest przeciwny do zwrotu wektora prędkości.

Czytelnik: Domyślam się, że wartość przyspieszenia dośrodkowego można opisać, jak poprzednio, za pomocą wyrażenia (1.10).

Autor: Z jednym uściśleniem: teraz v^2 nie jest wielkością stałą, lecz zależy od czasu. Odpowiednio zmienia się w miarę upływu czasu wartość przyspieszenia dośrodkowego. Wartość przyspieszenia stycznego

$$|\vec{a}_s(t)| = -S \frac{|\vec{v}(t + \Delta t)| - |\vec{v}(t)|}{\Delta t}. \quad (1.12)$$

Kiedy już zostały określone wartości przyspieszenia dośrodkowego i stycznego, całkowite przyspieszenie ciała w rozpatrywanej chwili można otrzymać (zarówno pod względem kierunku, jak i wartości) na podstawie związku (1.11) z uwzględnieniem tego, że wektory $\vec{a}_r(t)$ i $\vec{a}_s(t)$ są wzajemnie prostopadłe.

Czytelnik: Na pewno przydałoby się rozwiązać jakieś zadania dotyczące ruchów jednostajnego i niejednostajnego po okręgu.

Autor: Rozpatrzmy zadanie następujące.

Wyznacz, jak zmienia się ruchem niejednostajnym po okręgu o promieniu R . Prędkość liniowa zmienia się w czasie zgodnie z wzorem $v = v_0 e^{at}$. Znaleź przyspieszenie ciała w chwili $t = t_0$. Wyznacz czas τ , w którym ciało, początkowo znajdujące się w spoczynku, pokonać będzie kwartę długości okręgu.

Czytelnik: Przyspieszenie dośrodkowe wyznaczam ze wzoru (1.10):

$$a_r = \frac{(a_0 t_0)^2}{R},$$

Przyspieszenie styczne można znaleźć, stosując związek (1.12):

$$a_s(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a_0(t + \Delta t) - a_0 t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a_0 \Delta t}{\Delta t} = a_0,$$

Autor: Zgadza się. Jeżeli znasz reguły obliczania pochodnych, to masz prawo nie rozpatrywać granicy; po prostu powinieneś znaleźć pochodną funkcji prędkości względem czasu. Tym samym obliczysz Przyspieszenie styczne. A teraz wyznacz przyspieszenie całkowite.

Czytelnik: Chyba będę miał z tym kłopot, nie wiem, jak...

Autor: Wykorzystaj związek (1.11) i fakt, że wartość sumy dwóch wzajemnie prostopadłych wektorów jest wartością przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego.

Czytelnik: Zrozumiałem.

Wartość przyspieszenia całkowitego można wyznaczyć / twierdzeniem Pitagorasa dla trójkąta, którego przyprostokątne wyznaczone są przez wektory \vec{a}_0 i \vec{a}_1 :

$$l^2 = \sqrt{a_0^2 + a_1^2} = a_0 \sqrt{1 + \frac{a_1^2}{a_0^2}}.$$

Aby znaleźć czas przebycia ćwiartki okręgu, trzeba, jak myślę, wprowadzić pojęcie przyspieszenia kątowego.

Autor: To nie jest konieczne. Zauważmy, że droga o długości ćwiartki okręgu jest równa $As = \frac{\pi R}{2}$. Następnie wykorzystajmy wzór (1.1), do którego podstawimy prędkość średnią na tym odcinku drogi, obliczoną dla ruchu jednostajnie zmiennego następująco:

$$v_{\text{sr}} = \frac{v_0 + v}{2}, \quad (1.13)$$

albo

$$v_{\text{sr}} = \frac{a_0 t}{2}.$$

Wtedy

$$s = v_{\text{sr}} t = \frac{a_0 t^2}{2}. \quad (1.14)$$

W naszym zadaniu $s = As$, $t = T$, zatem:

$$\frac{\pi R}{2} = \frac{a_0 T^2}{2},$$

skąd otrzymujemy

$$T = \sqrt{\frac{\pi R}{a_0}}.$$

Czytelnik: Związek (1.14) jest wzorem na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej.

Autor: Masz rację. Zauważ, że ten wzór otrzymaliśmy, posługując się pojęciem prędkości średniej.

Zadania

1. Turysti wyszli z punktu A i przeszli droga dwa kilometry idąc dokładnie na północ, skręcili na wschód i przeszli jeden kilometr.

Następnie droga zmieniła kierunek na południowo-wschodni. Idąc nią turyści doszli po pewnym czasie do wsi B , położonej w odległości $l = 2,5$ km od punktu A , dokładnie na wschód. Jaką drogę przebyli turyści?

2. Samochód jechał z miasta A na wschód w czasie $t_1 = 2$ h ze stałą prędkością $v_1 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Następnie skrącił na południe i po

$t = 3$ h od rozpoczęcia ruchu przybył do miasta B . Z jaką prędkością jechał samochód na południe, jeśli wiadomo, że najkrótsza droga (odległość) między miastami A i B jest równa $s = 150$ km?

3. Samochód przez pierwsze dwie godziny poruszał się z prędkością $v_1 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz, z jaką prędkością poruszał się w czasie następnych dwóch godzin, jeżeli średnia prędkość dla całego czasu ruchu jest równa $v_{\text{sr}} = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jaką drogę s przebył samochód?

4. Autobus przejechał jedną trzecią części drogi z prędkością $v_1 = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, połowę pozostałej części drogi z prędkością $v_2 = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a resztę drogi — z prędkością $v_3 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz średnią prędkość v_{sr} na całej drodze.

5. Rowerzysta przejechał jedną trzecią części drogi ze stałą prędkością $v_1 = 12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, pierwszą połowę pozostałej części drogi przejechał ze stałą prędkością $v_2 = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a następnie zaczął hamować.

i Po czasie $t_3 = 20$ min zatrzymał się. Ile czasu t zajęła rowerzyste cała podróż? Jaką drogę przebył? Oblicz średnią prędkość v_{sr} na całej drodze.

- ~~16.~~ Ciało przebyło jedną czwartą drogi ze stałą prędkością $v_1 = 2 \frac{m}{s}$, następnie trzecią część pozostałej drogi — ze stałą prędkością $v_2 = 1 \frac{m}{s}$, a końcowy odcinek drogi ze stałym przyspieszeniem a i uzyskało prędkość końcową $v_3 = 7 \frac{m}{s}$. Oblicz średnią prędkość v_{sr} dla całego czasu ruchu. Oblicz także przebytą przez ciało drogę s , jeżeli wiadomo, że na ostatnim odcinku przyspieszenie było równe $a = 1 \frac{m}{s^2}$.

- ~~17.~~ W czasie $t_1 = 2$ s ciało przemieszczało się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $a_1 = 2 \frac{m}{s^2}$, następnie — jednostajnie opóźnionym z przyspieszeniem $|a_2| = 0,5 \frac{m}{s^2}$. Znайдź całkowity czas ruchu t_c , jaki upłynął do chwili zatrzymania się ciała, przebytą przez nie w tym czasie drogę s i średnią prędkość v_{sr} dla czasu t_c . Znайдź średnie przyspieszenie a_{sr} w przedziale czasu od $t_0 = 0$ do $t = \frac{t_c}{2}$.

- ~~18.~~ Ciało porusza się ze stałym przyspieszeniem. Jego prędkość w chwili $t_1 = 5$ s jest równa $v_1 = 3 \frac{m}{s}$, a w chwili $t_2 = 6$ s jest równa zeru. Oblicz prędkość v_0 ciała w chwili $t = 0$ i drogę s przebytą przez ciało w czasie od $t = 0$ do $t = t_2$.

19. Ciało porusza się jednostajnie po okręgu o promieniu R z prędkością v . Znайдź wartość zmiany prędkości $|\Delta\vec{v}|$ ciała podczas jego przemieszczenia się po okręgu o kąt: a) 45° , b) 90° , c) 180° . Znайдź wartość zmiany przyspieszenia $|\Delta\vec{a}|$ dla tych przemieszczeń.

- 1.10. Ciało porusza się niejednostajnie po okręgu o promieniu $R = 1$ m. Liniowa prędkość ciała zmienia się według wzoru $v(t) = v_0 + at$, w którym $v_0 = 1 \frac{m}{s}$, $a = 3 \frac{m}{s^2}$. Znайдź przyspieszenie ciała w chwili $t_1 = 1$ s.

- 1.11. Ciało porusza się po okręgu ze stałym przyspieszeniem stycznym $a_s = 2 \frac{m}{s^2}$. Oblicz przyspieszenie dośrodkowe a_r i całkowite a dla chwili, w której wektor całkowitego przyspieszenia tworzy kat $\alpha = 45^\circ$ z wektorem prędkości liniowej.

2 Czy umiesz przeprowadzić analizę graficzną ruchu prostoliniowego?

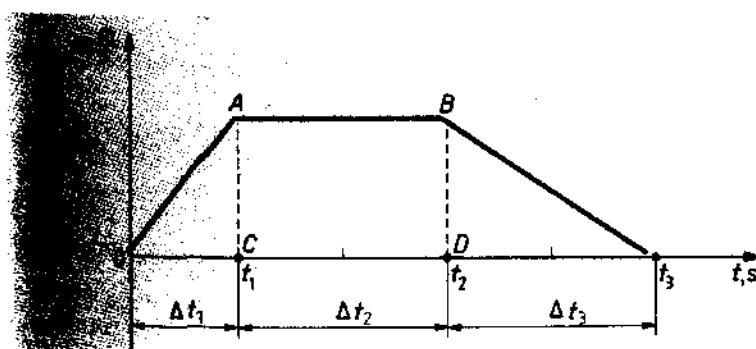
Autor:

Widoczna na rysunku 2.1 kreska prędkości ma postać przedstawioną na rysunku 2.1. Wykorzystując dane tego wykresu narysuj zależność drogi od czasu.

Czytelnik: Nigdy nie rysowałem takich wykresów.

Autor: Ale przecież nie jest to trudne. Spróbujmy pomyśleć wspólnie. Podzielmy cały rozpatrywany czas na trzy przedziały: Δt_1 , Δt_2 i Δt_3 . Jak porusza się ciało w przedziale czasu Δt_1 ? Jaki jest wzór na drogę dla tego przedziału?

Czytelnik: W przedziale czasu Δt_1 ruch ciała jest jednostajnie przyspieszony bez prędkości początkowej.



Rys. 2.1

i)ia tego przedziału wzór na drogę ma postać

$$s(t) = \frac{at^2}{2}. \quad (2.1)$$

gdzie a — przyspieszenie ciała.

Autor: Czy mógłbyś, wykorzystując wykres prędkości, znaleźć przyspieszenie?

Czytelnik: Tak. Zgodnie z (1.3) przyspieszenie jest równe stosunkowi przyrostu prędkości do przedziału czasu, w którym ten przyrost nastąpił. Jest ono równe stosunkowi długości odcinków $\frac{|AC|}{|OC|}$.

Autor: Należy pamiętać, że stosunek $\frac{|MC|}{|OC|}$ wyraża się w odpowiednich jednostkach. Trzeba o tym pamiętać przy rozpatrywaniu następujących wykresów. A teraz przeanalizuj przedziały czasu Δt_2 i Δt_3 .

Czytelnik:

W przedziale czasu Δt_2 ciało porusza się jednostajnie z prędkością v , uzyskaną na koncu przedziału Δt_1 . Wzór na drogę ma postać

$$s = vt.$$

Autor: Twoja odpowiedź nie jest ścisła. Nie uwzględnialiś, że ruch jednostajny rozpoczął się nie w początkowej chwili $t = 0$, lecz w chwili t_1 . Do tej chwili ciało już przebyło drogę $\frac{at_1^2}{2}$. Zależność drogi od czasu ma w odniesieniu do przedziału Δt_2 następującą postać:

$$s(t) = \frac{at^2}{2} + v(t - t_1). \quad (2.2)$$

Uwzględniając powyższą uwagę, napisz wzór na drogę dla przedziału czasu Δt_3 .

Czytelnik: W przedziale czasu Δt_3 ruch jest jednostajnie opóźniony. Jeżeli dobrze zrozumiałem, wzór na drogę dla tego przedziału można zapisać tak:

$$s(t) = \left[\frac{at_1^2}{2} + v(t_2 - t_1) \right] + \left[v(t - t_2) - \frac{a_1(t - t_2)^2}{2} \right],$$

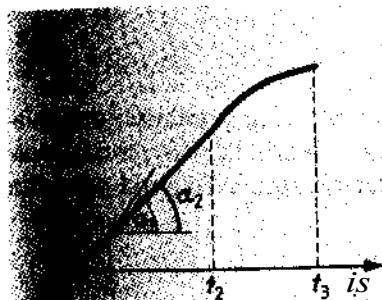
gdzie a — przyspieszenie w przedziale Δt_3 . Jest ono dwa razy mniejsze od przyspieszenia a w przedziale czasu Δt_1 , ponieważ przedział czasu Δt_3 jest dwa razy większy niż Δt_1 .

Autor: Twój wzór można trochę uprościć:

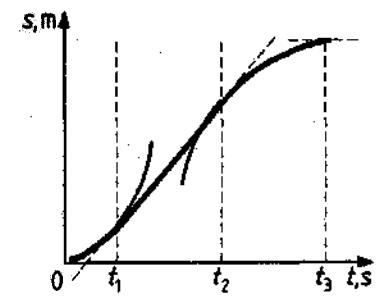
$$s(t) = \frac{at^2}{2} + v(t - t_1) - \frac{a_1(t - t_2)^2}{2}. \quad (2.3)$$

Teraz aby sporządzić wykres, powinieneś tylko podsumować wyniki (2.1) — (2.3).

Czytelnik: Rozumiem. W przedziale czasu Δt_1 wykres drogi ma kształt paraboli, w przedziale Δt_2 — linii prostej, a w przedziale Δt_3 — także paraboli, ale odwróconej (wypukłością do góry). Oto mój rysunek (rys. 2.2).



Rys. 2.2



Rys. 2.3

Autor: Twój rysunek nie jest całkiem poprawny: linia wykresu drogi nie powinna mieć załamów, powinna być gładka, tj. parabole powinny gładko przechodzić w linię prostą. Ponadto wierzchołek odwróconej paraboli powinien odpowiadać chwili t_3 . Poprawny jest rysunek 2.3.

Czytelnik: Proszę objaśnić.

Autor: W paragrafie 1. mówiliśmy, że tangens kąta nachylenia stycznej do wykresu $s(t)$ do osi czasu określa wartość prędkości w chwili t (rys. 1.4). Tak więc, biorąc pod uwagę rysunek, można znaleźć, że

Wróćmy do twojego rysunku (rys. 2.2). Wynika z niego, że w chwili t_1 (oraz t_2) prędkość ciała przyjmuje dwie różne wartości: jeśli zbliżam się do t_1 z lewej strony, to prędkość liczbowo równa się $\operatorname{tg}\alpha_1$, a jeśli zbliżam się do t_1 z prawej — to $\operatorname{tg}\alpha_2$. Zgodnie z twoim wykresem drogi wykres prędkości ciała w chwili t_1 (a także w chwili t_2) powinien mieć nieciągłość, czego jednak w rzeczywistości nie obserwuje się (wykres prędkości na rys. 2.1 jest ciągły, tzn. linia wykresu nie ma przerw).

Czytelnik: Zrozumiałem.

(nieciągłość wykresu prędkości prowadzi do gładkości wykresu dr. ...)

Autor: Przy okazji powiem, że wierzchołki parabol powinny odpowiadać chwilom 0 i t_3 , gdyż w tych momentach prędkość ciała jest równa零 i styczne do linii wykresu drogi powinny być dla tych punktów prostymi poziomymi.

A teraz z wykresu prędkości na rysunku 2.1 znajdź drogę, przebytą przez ciało, np. do chwili t_2 .

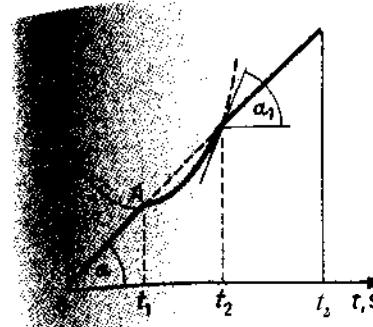
Czytelnik: Trzeba określić na podstawie wykresu prędkości przypisanie a w przedziale Δt_1 i prędkość v w przedziale Δt_2 , a następnie skorzystać z wzoru (2.2). Droga, przebyta przez ciało od początku ruchu do chwili t_2 , jest równa

$$s(t_2) = \frac{at_1^2}{2} + v(t_2 - t_1).$$

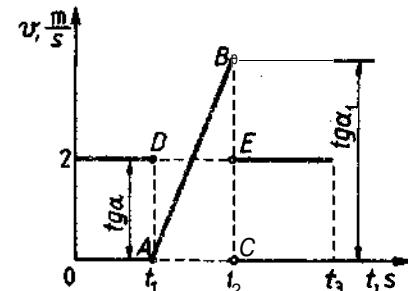
Autor: Zrobiłeś to poprawnie. Ale można prościej. Droga, przebyta przez ciało w czasie od 0 do t_2 , jest równa liczbowo polu figury $OABD$ utworzonej przez wykres prędkości w przedziale czasu od chwili 0 do t_2 . Dla utrwalenia tych wszystkich wiadomości zrobimy jeszcze jedno zadanie.

Załóżmy, że wykres drogi ma załamania. Ten wykres przedstawiono na rysunku 2.4, na którym krzywą jest parabola o wierzchołku w punkcie A. Narysuj wykres prędkości.

Czytelnik: Ponieważ wykres drogi ma załamania, to wykres prędkości powinien mieć nieciągłości w odpowiednich chwilach (t_1 i t_2). Oto mój rysunek (rys. 2.5).



Rys. 2.4



Rys. 2.5

Autor: Dobrze. A jaką długość ma odcinek $|BC|$?

Czytelnik: Jest on równy $\operatorname{tg}\alpha_1$ (rys. 2.4). Ale przecież nie znamy kąta α_1 .

Autor: Tym niemniej długość odcinka $|BC|$ można znaleźć całkiem łatwo. Zwróć uwagę, że droga przebyta przez ciało w czasie od 0 do t_3 jest dokładnie taka, jaką byłaby, gdyby ciało przez cały czas przemieszczało się ruchem jednostajnym (prosta w przedziale od t_2 do t_3 na rys. 2.4 jest przedłużeniem prostej z przedziału od 0 do t_1). Ponieważ

przebyta droga jest określona przez pole figury pod wykresem prędkości,

to pole prostokąta $ADEC$ na rysunku 2.5 jest równe polu trójkąta ABC . $|BC| = 2|EC|$, tj. prędkość w chwili t_2 , jeśli przybliżać się do niej z lewej strony, jest równa podwojonej prędkości ruchu jednostajnego w przedziałach od 0 do t_1 i od t_2 do t_3 .

Czytelnik:

Narysować wykres drogi i przemieszczenia, jeżeli wartość prędkości po pewnej chwili staje się ujemna? Rozpatrzmy, nadal, wykres prędkości przedstawiony na rysunku 2.6.

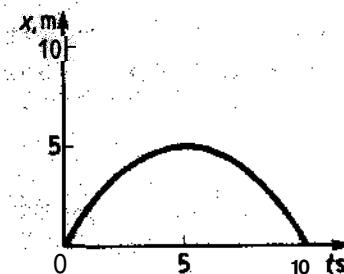
Autor: Przede wszystkim zauważmy, że na rysunku 2.6 dana jest zależność od czasu nie prędkości, lecz współrzędnej x wektora prędkości oznaczanej zazwyczaj v_x (ciało przemieszcza się wzdłuż osi x). Ujemna wartość współrzędnej oznacza, że w chwili t_1 — s

zwrócił się zwrot prędkości ciała i od tej chwili porusza się ono w przeciwną stronę.

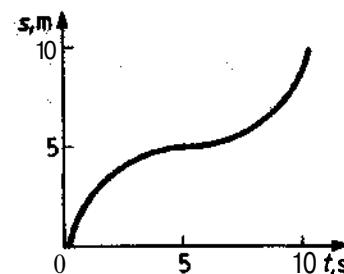
Czytelnik: Okazało się, że przemieszczenie od początku ruchu do chwili $t=10$ s jest równe zeru, gdyż jednakowe są pola trójkątów zawartych między wykresem prędkości i osią t , dla ruchu ciała w kierunku dodatnim i ujemnym osi x ;

współrzędna położenia ciała także jest równa zeru, jeśli tylko się przyjmie, że ciało rozpoczęło ruch w punkcie początkowym układu współrzędnych. Droga przebyta w czasie $t=10$ s jest równa $s=10$ m. Aby sporządzić wykresy zależności drogi i współrzędnej położenia ciała od czasu (w tym wypadku współrzędna wyraża przemieszczenie), zapiszmy równanie ruchu, początkowo dla ruchu jednostajnie opóźnionego — od $t_0=0$ do $t_1=5$ s, a następnie dla jednostajnie przyspieszonego od $t_1=5$ s do $t=10$ s.

Autor: Nie trzeba rozbijać ruchu na dwa etapy.. Przyspieszenie przez cały czas jest stałe i jego współrzędna a_x jest ujemna, a więc równanie ruchu ma postać $x = v_0 t - \frac{a_x t^2}{2}$, albo, po uwzględnieniu danych z wykresu na rysunku 2.6, $x = 2t - 0,2t^2$. Jest ono słuszne *

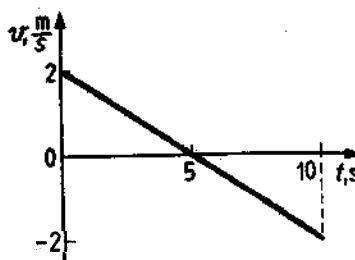


Rys. 2.7



Rys. 2.8

* W równaniu $x = 2t - 0,2t^2$ współczynniki 2 i 0.2 dla uproszczenia podane bez jednostek. Poprawny zapis to $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i $0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (przyp. tłum.)

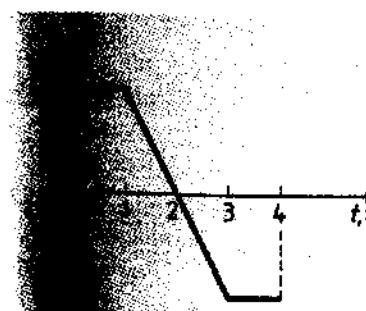


Rys. 2.6

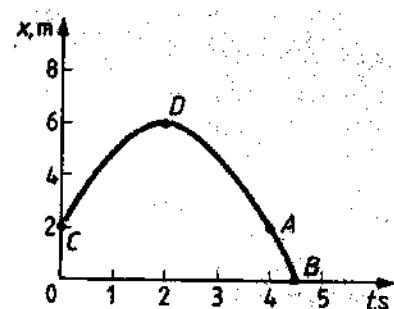
dla chwili początkowej (gdyż $x_0 = 0$ dla $t_0 = 0$) i tak samo obowiązuje dla dowolnej chwili z przedziału czasu (0,10 s). Wykres tej zależności przedstawiono na rysunku 2.7, a wykres drogi — na rysunku 2.8.

Zadania

- 2.1. Wykres prędkości ma postać przedstawioną na rysunku 2.5 ($t_1 = 2$ s, $t_2 = 4$ s, $t_3 = 6$ s). Narysuj zależności przyspieszenia od czasu. Znajdź średnią prędkość v_{sr} : 1) dla pierwszych czterech sekund, 2) dla całego czasu ruchu (sześć sekund). W jakich chwilach prędkość chwilowa jest równa prędkości średniej, obliczonej dla całego czasu ruchu?
- 2.2. Ciało rzucono pionowo do góry z prędkością początkową $v_0 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Narysuj wykresy zależności prędkości i współrzędnej położenia ciała od czasu.
- 2.3. Wykres zależności prędkości od czasu przedstawiono na rysunku 2.9. Narysuj wykresy zależności przyspieszenia i współrzędnej położenia ciała od czasu.



Rys. 2.9



Rys. 2.10

- 2.4. Wykres zależności współrzędnej położenia ciała od czasu przedstawiono na rysunku 2.10. Narysuj wykresy zależności prędkości i przyspieszenia od czasu. Odcinek CDA — parabola AB — Prosta.

3. Czy potrafisz wskazać, jakie są przyłożone do ciała?

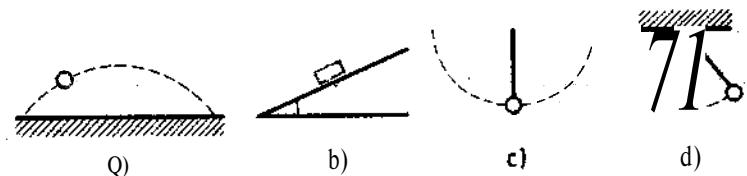
Für welche Art von Wahlen ist ein solcher Prozess sinnvoll? Gibt es
bestimmte Wahlen, bei denen ein solches Verfahren optimal ist? Gibt es
eine optimale Wahlperiode?

Czytelnik: Wydaje mi się, że zadania z mechaniki są najtrudniejsze.

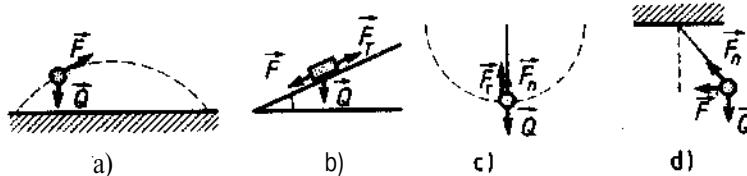
Od czego należy zaczynać ich rozwiązywanie?

Autor: Od rozpatrzenia sił przyłożonych do ciała.

Weźmy pod uwagę następujące przykłady (rys. 3.1): a) ciało rzucone pod pewnym kątem do poziomu; b) ciało ześlizguje się z równi pochyłej; c) ciało obraca się na nici w płaszczyźnie pionowej; d) ciało wahę się w płaszczyźnie pionowej. Postaraj się narysować i opisać siły przyłożone do ciała w każdym z tych przykładów.



Rys. 3.1



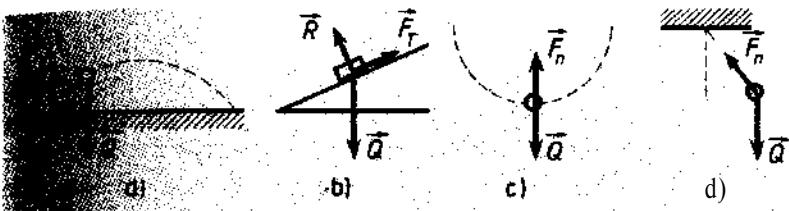
Rys.3.2

Czytelnik: Oto mój rysunek (rys. 3.2). W pierwszym przykładzie
 Q — siła ciężkości. F — siła rzutu; // drugim: Q — siła ciężkości

F — siła zsuwająca, F_T — siła tarcia; w trzecim: Q — siła ciężkości, p — siła dośrodkowa, F_n — siła naprężenia nici; w czwartym: Q — siła ciężkości, F — siła zwrotna, F_n — siła naprężenia nici.

Autor: Na wszystkich czterech rysunkach popełniłeś błędy, Zobacz, jak wygląda poprawny rysunek (rys. 3.3). Trzeba dobrze zapamiętać, że

siła pojawia się w wyniku wzajemnego oddziaływanego ciał. Dlatego, aby wskazać siły przyłożone do ciała, trzeba wcześniej odpowiedzieć na pytanie, jakie ciała oddziałują z danym ciałem.



Rys. 3.3

Tak więc, w pierwszym przykładzie ciało oddziałuje tylko z Ziemią, ona je przyciąga (rys. 3.3a). Dlatego do ciała jest przyłożona tylko **jedna** siła — siła ciężkości Q . Gdyby brać pod uwagę opór powietrza, albo, na przykład, działanie wiatru, to wtedy należałoby **wprowadzić** dodatkowe siły. „Siła rzutu” pokazana na twoim **rysunku** w przyrodzie nie występuje, jako że nie ma oddziaływania, które mogłoby spowodować pojawienie się takiej siły.

Czytelnik: Ale przecież aby rzucić ciało, trzeba na nie podziałać jakąś siły.

Autor: Tak, to prawda. Gdy rzucasz ciało, działasz na nie pewną siłą. **Jednak** tutaj rozpatrujemy ruch ciała już po tym, jak je rzucono, tj. **po** tym, jak działanie twojej siły ustąpiło. Tej siły już nie ma, pozostała tylko jej skutek — predkość początkowa ciała.

Zapamiętaj: Silę nie można „magazynować” — jest to skutek oddziaływania cieplnego.

Czytelnik: Ale jeżeli na ciało działa tylko jedna siła, to dlaczego nie spada ono pionowo w dół, a porusza się po pewnym torze?

Autor: Dziwi się to, że kierunek ruchu ciała nie zgadza się z kierunkiem spadania grawitacji.

kiem działającej na nie siły. A tymczasem jest to w pełni zgodne z drugą zasadą dynamiki Newtona. Twoje pytanie zdradza, że niezbyt głęboko przemyślałeś zasady dynamiki Newtona. Proponuję zająć się tym później (par. 3), a teraz wróćmy do naszych przykładów. W drugim przykładzie (rys. 3.3b) ciało ześlizguje się z równi pochyłej. Jakie ciała z nim oddziałują?

Czytelnik: Przypuszczalnie dwa ciała: Ziemia i równia pochyła.

Autor: Dobrze. Ustalmy siły przyłożone do ciała. Ziemia warunkuje pojawienie się siły ciężkości \vec{Q} , a równia pochyła — siły tarcia poślizgowego \vec{F}_T i siły \vec{R} , nazywanej siłą reakcji podłożą*. Zwracam uwagę, że na twoim rysunku siły \vec{R} w ogóle nie było.

Czytelnik: Proszę się nie śpieszyć! Czyżby równia pochyła działała na ciało nie jedną, a dwiema siłami?

Autor: Siła jest, oczywiście, jedna. Ale wygodnie jest rozpatrywać ją w postaci dwóch składowych, z których jedna jest skierowana wzdłuż płaszczyzny równi (siła tarcia poślizgowego \vec{F}_T), a druga — prostopadłe do niej (siła reakcji podłożą \vec{R}). Ten fakt, że wymienione siły mają wspólne pochodzenie, tj. są składowymi jednej siły, znajduje odzwierciedlenie w istnieniu uniwersalnego związku między F_T i R (lub F_N):

$$F_T = \mu F_N, \quad (3.1)$$

w którym μ — współczynnik tarcia poślizgowego. Później zajmiemy się tym związkiem bardziej szczegółowo (par. 4).

Czytelnik: Na moim rysunku zaznaczyłem siłę zsuwającą \vec{F} . Sądząc z tego, co było powiedziane, takiej siły nie ma. Jednak, o ile mi wiadomo, termin „siła zsuwająca” jest stosowany. Jak z tego wybrać?

Autor: Tak, taki termin rzeczywiście istnieje. Ale trzeba mieć na uwadze, że siła zsuwająca jest po prostu jedną ze składowych siły ciężkości, otrzymywaną po jej rozłożeniu na dwie składowe: 1) o kierunku równoległym do równi pochyłej i 2) o kierunku prostopadłym do niej. Jeżeli, wyliczając siły przyłożone do ciała, wska-

* Zazwyczaj, kiedy jest mowa o tarciu hier/c się pod uwagę siły nacisku F_N cierającego ciało na podłożo. Siły R i F_N sa przeciwnie zwrocone i równe co do wartości. $F_N = R$ (przyp. tłum.).

załeś siłę ciężkości, to następnie nie należy już dodawać siły zsuwającej. W trzecim przykładzie (rys. 3.3c) ciało obraca się w płaszczyźnie pionowej. Jakie ciała na nie działają?

Czytelnik: Dwa ciała: Ziemia i nić.

Autor: Doskonale. Dlatego do ciała są przyłożone dwie siły: siła ciężkości i siła reakcji nici. Nawiąsem powiedziawszy, o ostatniej z tych dwóch sił mówiłeś jako o sile „naprężenia nici”, zapominając, że siła naprężenia nici — to siła przyłożona do nici ze strony ciała, podczas gdy siła przyłożona do ciała ze strony nici jest siłą reakcji nici.

Czytelnik: A co z siłą dośrodkową?

Autor: Cierpliwości! W zadaniach, w których rozpatruje się ruch ciała po okręgu, popełnia się tyle błędów, że proponuję, abyśmy zajęli się tą sprawą dokładniej (par. 9). W tym miejscu tylko zwróci uwagę, że siła dośrodkowa nie jest jakąś siłą dodatkowo przyłożoną do ciała. Jest to po prostu wypadkowa siła przyłożonych do ciała. W tym przykładzie (gdy ciało znajduje się w najniższym punkcie toru) siła dośrodkowa jest różnicą dwóch sił: reakcji nici i siły ciężkości.

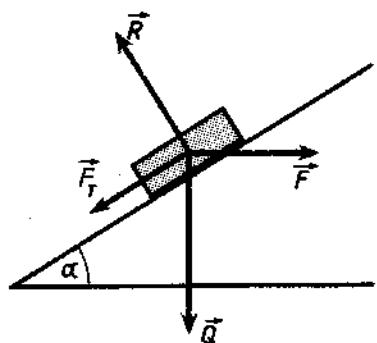
Czytelnik: Jeżeli dobrze zrozumiałem, to w czwartym przykładzie (rys. 3.3d) siła zwrotna chyba także jest wypadkowa siły ciężkości i siły reakcji nici?

Autor: Całkiem słusznie. I w tym i w trzecim przykładzie z ciałem oddziałują nić i Ziemia; dlatego do ciała przyłożone są dwie siły: siła reakcji nici i siła ciężkości. I jeszcze raz chcę podkreślić, że siła pojawia się jedynie w wyniku wzajemnego oddziaływania ciał, nie może pojawić się w wyniku dowolnych przypuszczeń. Gdzie stwierdzisz, jakie ciała działają na dany obiekt, bedziesz w stanie ustalić, jakie siły sa przyłożone do tego obiektu.

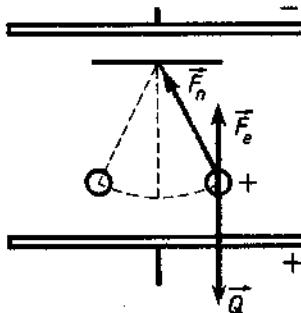
Czytelnik: Przypuszczam, że mogą istnieć sytuacje bardziej skomplikowane niż przedstawione na rysunku 3.1.

Autor: Przykładów bardziej skomplikowanych oddziaływań ciał jest wiele. Przypuśćmy, że na ciało ktoś naciska pewną stałą siłą F skierowaną poziomo, w wyniku czego podnosi się ono do góry po równi pochyłej. Siły przyłożone do ciała, przedstawiono na rysunku 3.4.

Inny przykład: drgania wahadła naładowanego elektrycznie, umieszczonego we wnętrzu płaskiego kondensatora. Tu pojawia się



Rys. 3.4



Rys. 3.5

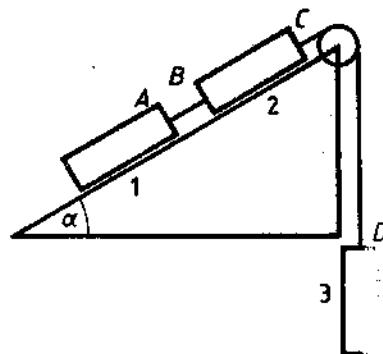
dodatkowa siła \vec{F}_e — siła, którą pole istniejące wewnątrz kondensatora działa na ładunek wahadła (rys. 3.5). Ma się rozumieć, że wyliczenie wszystkich sytuacji, z którymi można się spotkać podczas rozwiązywania zadań, jest praktycznie niemożliwe.

Czytelnik: Co robić, jeśli w zadaniu występuje nie jedno, lecz kilka ciał?

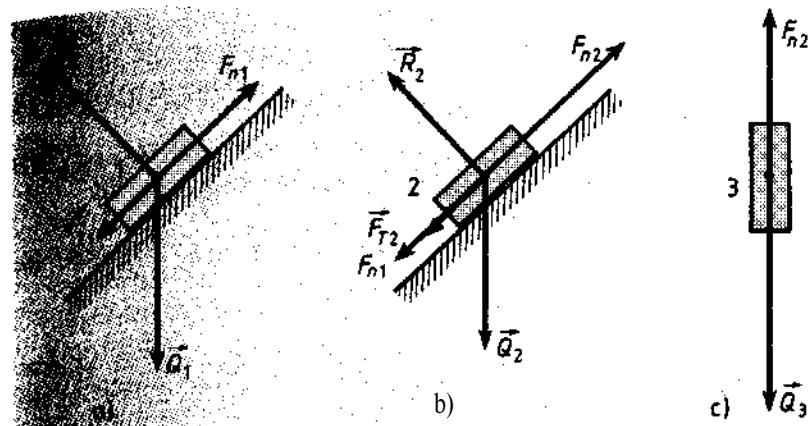
Autor: Należy za każdym razem jasno sobie uświadomić, ruch którego konkretnego ciała (albo jakiego układu ciał) zamierza się badać. Spójrzmy, na przykład, na rysunek 3.6. Zdecydujmy, że będziemy rozpatrywać ruch ciała 1. Z ciałem tym oddziałują Ziemia, równia pochyła i **nić AB**.

Czytelnik: Czyżby ciało 2 nie oddziaływało z ciałem 1?

Autor: Oczywiście, ciała 1 i 2 oddziałują zgodnie z prawem powszechnego ciążenia. Jednak ta siła jest bardzo mała, można ją pominać; pozostają następujące siły przyłożone do ciała 1: siła ciężkości \vec{Q} , siła tarcia poślizgowego \vec{F}_t , siła reakcji podłoża \vec{R} i siła reakcji \vec{F}_n nici AB (rys. 3.7a).



Rys. 3.6



Rys. 3.7

Czytelnik: Dlaczego siła tarcia jest zwrócona na rysunku w lewo? Wydaje mi się, że równie dobrze można ją zwrócić w stronę przeciwną.

Autor: Aby ustalić zwrot siły tarcia, należy wiedzieć, jak porusza się ciało. Jeśli zwrot nie był omówiony w tekście zadania, to można **założyć**, że jest on taki lub przeciwny. Tutaj założyłem, że ciało 1 porusza się (razem z całym układem ciał) w prawo — blok obraca się zgodnie z wskazówką zegara. Oczywiście, z góry tego nie wiem: zwrot staje się określony dopiero po podstawieniu wartości liczbowych. Jeżeli się pomyliłem, to w wyniku obliczenia uzyskam liczbę ujemną. Wtedy należy przyjąć, że ciało porusza się nie w prawo, lecz w lewo (blok obraca się przeciwnie, niż wskazówka zegara), skierować we właściwy sposób siłę tarcia poślizgowego, uzyskać nowy wzór na przyspieszenie i znowu sprawdzić jego znak **przez podstawienie wartości liczbowych**.

Czytelnik: W jakim celu drugi raz powinno się sprawdzać znak przyspieszenia? Jeżeli przy założeniu ruchu w prawo wyszło ono ujemne, to teraz na pewno przyspieszenie powinno być dodatnie.

Autor: Nie. Może się okazać, że również drugie rozwiązanie daje wartość ujemną.

Czytelnik: Nie rozumiem. Czyż nie jest oczywiste, że jeśli ciało nie porusza się w prawo, to porusza się w lewo?

Autor: Zapominasz, że ciało może ponadto znajdować się w stanie

spoczynku. Wróćmy jeszcze do tej sprawy i **wtedy szczegółowo przeanalizujemy** komplikacje związane z uwzględnieniem siły tarcia (par. 8). A teraz założmy, że **blok obraca się zgodnie z wskazówką zegara, i rozpatrzmy ruch ciała 2** (rys. 3.6).

Czytelnik: Z ciałem 2 oddziałuje Ziemia, równia pochyła, nici AB i CD. Siły przyłożone do ciała 2 pokazano na rysunku 3.7b.

Autor: Wspaniale. Teraz zwróć uwagę na ciało 3.

Czytelnik: Ciało 3 oddziałuje tylko z Ziemią i nicią CD. Siły do niego przyłożone widzimy na rysunku 3.7c.

Autor:

Po znalezieniu sił przyłożonych do każdego / ciała mo/na zapisz równania ruchu dla każdego / nich i następnie rozwiązać układ tych równań

Czytelnik: Wspomniał Pan, że można rozpatrywać nie tylko oddzielne ciała, ale także układy ciał.

Autor: Tak, można rozpatrywać ciała 1, 2, 3 nie oddziennie, jak to przed chwilą zrobiliśmy, ale jako jedną całość.

Nie trzeba wówczas brać pod uwagę sił naprężenia nici, ponieważ tera/ sa one siłami wewnętrznymi — siłami oddziaływania pomiędzy oddzielnymi częściami rozpatrywanego obiektu.

Układ trzech ciał jako całość oddziałuje tylko z Ziemią i równią pochyłą.

Czytelnik: Chciałbym coś uściślić. Kiedy rysowałem siły na rysunku 3.7b, c, zakładając, że siła naciągu nici CD jest taka sama po obu stronach bloku. Czy to jest poprawne?

Autor: Ścisłe mówiąc, nie jest to słuszne. Jeżeli blok obraca się zgodnie z wskazówką zegara, to naprężenie odcinka nici CD, sąsiadującego z ciałem 3, powinno być większe od naprężenia odcinka nici CD, sąsiadującego z ciałem 2. Ta różnica sił naciągu wywołuje przyspieszenie w ruchu obrotowym bloku. Jednak tutaj zakładają się, że masę bloku można pominąć, tj. że blok nie ma masy, którą trzeba by było rozpędzać — blok rozpatruje się po prostu jako urządzenie powodujące zmianę kierunku nici, łączącej ciała 2 i 3. Dlatego można przyjąć, że siła naprężenia nici CD po obu stronach bloku jest taka sama. Zwykle w szkolnym kursie fizyki masę bloku się pomija. Czy masz jeszcze jakieś wątpliwości i pytania?

Czytelnik: Tak, mam pytanie związane z punktem przyłożenia sił

Na wszystkich rysunkach przykładał Pan wszystkie siły w jednym punkcie ciała. Czy jest to poprawne? Na przykład czy można siłę tarcia przykładać do środka ciężkości?

Autor:

Trzeba mieć na uwadze i pamiętać, że uczymy się kinematyki i dynamiki nie ciał rozciągłych, lecz punktów materialnych, tj. wyobrażamy sobie ciało jako muse punktowa. Przy tym na rysunku przedstawiamy ciało, a nie punkt materialny, wylac/me w celach poglądowości. Dlatego wszystkie siły przyłożone do ciała można przykładać w jednym punkcie.

Nawiąsem mówiąc, należałooby uściślić warunki i ustalić kiedy można stosować model punktu materialnego.

Czytelnik: Uczono nas, że

model punktu materialnego mo/na stosować wtedy, gdy rozmiary ciała są mało znaczące w porównaniu z innymi charakterystycznymi rozmiarami w danym zadaniu.

Mogą na przykład pomińć rozmiary satelity w porównaniu z odlegością satelity od Ziemi: dlatego można go rozpatrywać jako punkt materialny.

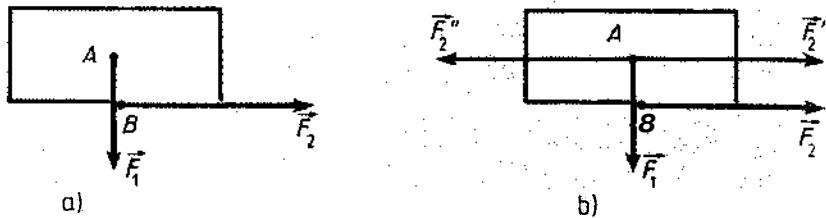
Autor: Nie mam zastrzeżeń. Jednak weźmy inną sytuację: sanki zasilgują się z niewysokiej góry. Czy można pominąć rozmiary sanki w porównaniu z wysokością góry? Albo, na przykład, te same sanki człowiek ciągnie za sznurek. Z czym powinno się tu porównywać rozmiary sanki? Jednak chcę powiedzieć, że w tych przykładach ruch sanki można rozpatrywać jako ruch punktu materialnego.

Czytelnik: Nie zastanawiałem się nad tym.

Autor: Rzecz w tym, że

model punktu materialnego należy uważać ponadto z charakterem ruchu ciała. Ten model ma zastosowanie wtedy, gdy ciało porusza się ruchem postępowym, me obraca się, me koło kółkuje

Gdyby sanki koło kółkowały z górką, to model punktu materialnego nie miałby zastosowania, niezależnie od rozmiarów górk. Podkreślam: stosując model punktu materialnego, nie bierzemy pod uwagę momentów sił, które w rzeczywistych warunkach mogą prowadzić do obrotu ciała. do jego przewrócenia. Punkt materialny może



Rys. 3.8

przemieszczać się tylko ruchem postępowym. Rozpatrzmy przykład. Niech do ciała będą przyłożone w różnych jego punktach dwie siły: F_1 w punkcie A i \vec{F}_2 w punkcie B (rys. 3.8a). Przyłożymy w punkcie A siłę \vec{F}'_2 , równą sile \vec{F}_2 i równoległą do niej, a także siłę \vec{F}''_2 równą co do wartości sile \vec{F}_2 , ale zwróconą w przeciwną stronę (rys. 3.8b). Ponieważ siły \vec{F}'_2 i \vec{F}''_2 wzajemnie się równoważą, to ich dołączenie fizycznie niczego nie zmienia.

Jednak rysunek 3.8b można traktować następująco: w punkcie A przyłożone są siły \vec{F}_1 i \vec{F}'_2 , powodujące ruch postępowy ciała; do ciała przyłożona jest także para sił (\vec{F}_2 i \vec{F}''_2), powodująca obrót ciała. Innymi słowy, siłę \vec{F}_2 można przenieść do punktu A ciała, jeżeli przy tym przyłoży się jednocześnie odpowiedni moment sił. Przy rozpatrywaniu ciała jako punktu materialnego ten moment sił oczywiście nie występuje.

4, (czy umiesz znajdować siłę tarcia?

Autor: Chcę się zatrzymać na nieco bardziej szczegółowych obliczeniach siły tarcia w różnych zadaniach. Sprawa dotyczy suchego tarcia poślizgowego (suchym nazywa się tarcie między powierzchniami dwóch ciał, jeżeli nie ma między nimi jakiejś warstwy pośredniej, na przykład smaru).

Czytelnik: Ale w tej sytuacji, jak myślę, wszystko jest jasne.

Autor: Tym niemniej wiele błędów popełnianych na egzaminach jest związanych z nieumiejętnością obliczania siły tarcia.

Rozpatrzmy przykład:

Książka ciągnie sanki o masie m działając siłą \vec{F} , przyłożoną do sznurka, który tworzy z poziomem kąt α ; współczynnik tarcia poślizgowego jest równy μ (rys. 4.1). Trzeba znaleźć siłę tarcia poślizgowego.

Jak będziesz to robił?

Czytelnik: A co w tym trudnego?

Siła tarcia jest równa μmg .

Autor: Źle.

Siła tarcia poślizgowego jest równa nie μmg , lecz μF_N , gdzie siła nacisku F_N jest równa sile reakcji podłoża.

Przypomnij sobie wyrażenie (3.1) z paragrafu 3.

Czytelnik: Czy to nie to samo?

Autor: Tylko czasem siła ciężko-

ści i siła reakcji podłoża mogą być sobie równe co do wartości bezwzględnej. Na ogół są to jednak całkiem różne siły. Rozpatrzmy podany przeze mnie przykład. Siły przyłożone do ciała: siła ciężkości \vec{Q} , siła reakcji podłoża \vec{R} , siła tarcia poślizgowego \vec{F}_T siła \vec{F} działająca na ciało (rys. 4.1) za pośrednictwem sznurka. Rozłóżmy siłę \vec{F} na składowe: pionową ($F \sin \alpha$) i poziomą ($F \cos \alpha$). Wszystkie siły działające w kierunku pionowym wzajemnie się równoważą. Stąd znajdujemy siłę reakcji podłoża:

$$R = F_N = Q - F \sin \alpha. \quad (4.1)$$

Widzisz, że siła nacisku nie jest równa sile ciężkości, jest mniejsza od niej o $F \sin \alpha$. Z fizycznego punktu widzenia jest to całkiem naturalne, gdyż ciągnięty ku górze sznurek jak gdyby „unosi” sanki, w wyniku czego siła, którą sanki naciskają na powierzchnię, a więc również siła reakcji podłoża, zmniejsza się. Wobec tego wtedy

$$F_T = \mu(Q - F \sin \alpha). \quad (4.2)$$

Gdyby sznurek był ciągnięty poziomo ($a = 0$), to zamiast (4.1) będziemy mieć $R = F_N = Q$, skąd wynika, że

$$F_T = \mu Q - \mu mg.$$

Czytelnik: Rozumiem. Po prostu nigdy się nad tym nie zastanawiałem.

Autor: Jest to bardzo częsty błąd popełniany przez osoby przystępujące do egzaminu, które próbują traktować siłę tarcia poślizgowego jako iloczyn współczynnika tarcia i siły ciężkości, a nie siły reakcji podłoża. Staraj się nie robić takiego błędu.

Czytelnik: Będę stosował regułę:

aby znaleźć siłę tarcia poślizgowego, trzeba najpierw określić siłę reakcji podłoża/a.

Autor: Dotychczas rozmawialiśmy o sile tarcia poślizgowego. Teraz zajmiemy się siłą tarcia spoczynkowego. Występuje tu pewna cecha szczególna, na którą uczniowie nie zawsze zwracają uwagę.

Załóżmy, że ciało spoczywa na równej poziomej, przy czym działa na nie skierowana poziomo sila \vec{F} , dążąca do przesunięcia ciała. Jak myślisz, jaką wartość ma wtedy sila tarcia?

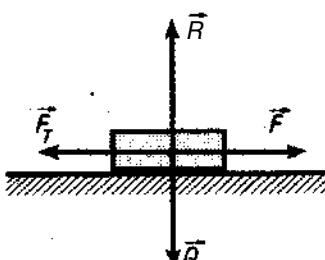
Czytelnik: Jeżeli ciało znajduje się na równej poziomej i sila \vec{F} działa poziomo, to $R = Q$. Czy dobrze?

Autor: Dobrze. I co dalej?

Czytelnik: Stąd wynika, że sila tarcia jest równa μQ .

Autor: Zrobiłeś typowy błąd: pomyliłeś siłę tarcia spoczynkowego z siłą tarcia poślizgowego. Gdyby ciało się przesuwało, to Twoja odpowiedź byłaby poprawna.

Jednak w danej sytuacji ciało znajduje się w spoczynku. Muszą się więc równoważyć wszystkie przyłożone do niego siły. Na ciało działają cztery siły: siła ciężkości \vec{Q} , siła reakcji podłoża \vec{R} , siła \vec{F} i siła tarcia spoczynkowego \vec{F}_T (rys. 4.2). Siły o kierunku pionowym (5) i \vec{R} wzajemnie się równoważą. Rys. 4.2



Powinny być wzajemnie zrównoważone również siły o kierunku poziomym \vec{F} i \vec{F}_T . Więc

$$F_T = F. \quad (4.3)$$

Czytelnik: Doszliśmy do wniosku, że siła tarcia spoczynkowego zależy od zewnętrznej siły dążącej do przesunięcia ciała.

Autor: Tak, właśnie tak. W miarę zwiększania siły F siła tarcia spoczynkowego także wzrasta. Jednak proces wzrastania siły tarcia spoczynkowego nie jest nieskończony. Istnieje maksymalna wartość siły tarcia spoczynkowego:

$$F_{\max} = \mu_0 F_N. \quad (4.4)$$

Współczynnik μ_0 ma nieznacznie większą wartość niż współczynnik μ , charakteryzujący zgodnie z (3.1) siłę tarcia poślizgowego. Gdy tylko zewnętrzna siła F , zwiększając się, osiągnie wartość $\mu_0 F_N$, ciało ruszy z miejsca. W tym momencie Współczynnik μ_0 przechodzi we Współczynnik μ , bowiem siła tarcia nieznacznie maleje. Przy dalszym wzroście siły F siła tarcia (teraz — siła tarcia poślizgowego) nie zmienia się (nawet przy bardzo dużych prędkościach), a ciało porusza się ze stale rosnącym przyspieszeniem.

Nieumiejętność określania siły tarcia często się ujawnia przy odpowiedziach na następujące bardzo proste pytanie:

Na jaką wartość ma sila tarcia, gdy ciało spoczywa na równej pochyłej płaszczyźnie pod kątem α ?

Mogą usłyszeć różne niepoprawne odpowiedzi. Jedni mówią, że siła tarcia jest równa μmg , inni, że jest równa

$$\mu F_N = \mu mg \cos \alpha.$$

Czytelnik: Ja wiem, jak to zrobić. Ponieważ ciało spoczywa, mamy do czynienia z siłą tarcia spoczynkowego. Należy ją wyznaczyć z warunku równowagi sił, działających wzdłuż równej pochyłej. W danym przykładzie są dwie takie siły: siła tarcia F_T i siła zsuwająca $mg \sin \alpha$. Dlatego poprawna odpowiedź ma postać

$$F_T = mg \sin \alpha.$$

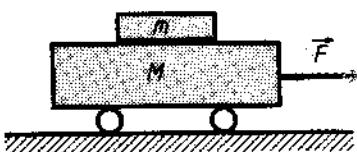
Autor: Całkiem słusznie. Na zakończenie rozwiążmy następujące zadanie.

Ciało o masie m leży na wózku o masie M ; maksymalna wartość siły tarcia spoczynkowego między wózkiem i ciałem charakteryzuje się współczynnikiem μ_0 ; między wózkiem i powierzchnią Ziemi nie ma tarcia. Należy znaleźć minimalną siłę F (rys. 4.3), pod działaniem której (na ciało M) ciało o masie m przemieszcza się względem wózka.

Czytelnik: Początkowo będę zakładał, że siła F jest wystarczająco mała: ciało o masie m nie przesuwa się względem wózka o masie M . W tej sytuacji obydwa ciała mają przyspieszenie:

$$a = \frac{F}{M+m}.$$

Rys. 4.3



Autor: Dobrze. Jaka siła nadaje to przyspieszenie ciału o masie m ?
Czytelnik: Siła tarcia spoczynkowego

$$F_T = ma, \quad \text{czyli} \quad F_T = m \frac{F}{M+m}.$$

Z powyższego wynika, że wraz ze wzrostem siły F siła tarcia spoczynkowego F_T także powinna wzrastać. Jednak nie może wzrastać nieskończennie. Jej maksymalna wartość

$$F_{T\max} = \mu_0 F_N = \mu_0 mg.$$

To znaczy, maksymalna wartość siły F , przy której obydwa ciała mogą jeszcze poruszać się razem jako jedna całość, wyznacza się z warunku

$$\mu_0 mg = \frac{Fm}{M+m}.$$

Stąd znajdujemy

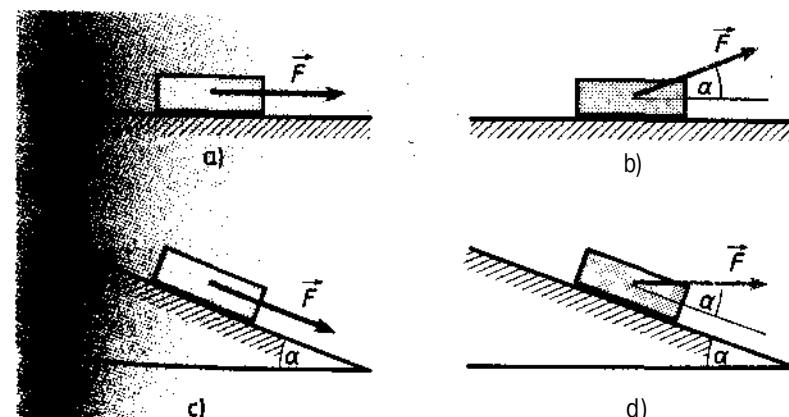
$$F = (M+m) \mu_0 g.$$

I to jest właśnie minimalna siła, powodująca przesunięcie ciała o masie m względem wózka o masie M .

Autor: Twoje rozwiązanie jest bezbłędne.

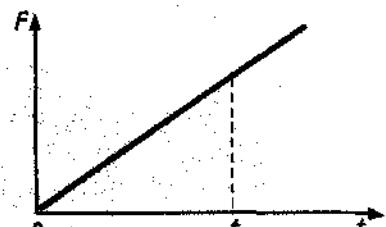
Zadania

- 4.1. Wzdłuż równi pochyłej pchnięto w góre krążek. Po pewnym czasie krążek zatrzymał się i zaczął ześlizgiwać się w dół. Wyznacz współczynnik tarcia μ krążka o równie, jeżeli czas ześlizgiwania jest n razy większy od czasu wznoszenia.
- 4.2. Klocek o masie m znajduje się na równi pochyłej, której kąt nachylenia do poziomu można zmienić od 0° do 90° . Sporządź wykres zależności siły tarcia klocka o równie od kąta a . Współczynnik tarcia poślizgowego klocka o równie jest równy μ .
- 4.3. Na rysunku 4.4 pokazano cztery różne przykłady (a — d) ślizgania się ciała (siłę \vec{F} można uważać za siłę reakcji nici, za pomocą której ciało jest ciągnięte). Wyznacz siłę tarcia w każdym przykładzie przyjmując, że dane są: masa ciała m , siła F , współczynnik tarcia poślizgowego μ i kąt a .



Rys. 4.4

- 4.4. Na ciało spoczywające na równi poziomej w chwili $t = 0$ zaczyna działać siła \vec{F} o kierunku poziomym, która rośnie liniowo z czasem (rys. 4.5). W pewnej chwili $t - t_1$ ciało zaczyna się przesuwać. Sporządź wykres zależności siły tarcia od czasu.



Rys. 4.5

5. Czy dobrze znasz zasady dynamiki Newtona?

Autor:

Proszę sformułować pierwszą zasadę dynamiki Newtona.

Czytelnik: Ciało znajduje się w stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego prostoliniowego do chwili, gdy oddziaływanie ze strony innych ciał nie wymusi na nim zmiany tego stanu.

Autor: Czy we wszystkich układach odniesienia jest spełniona ta zasada?

Czytelnik: Nie rozumiem pytania.

Autor: Jeżeli mówisz, że ciało znajduje się w stanie spoczynku, to myślisz, że jest ono unieruchomione względem jakiegoś innego ciała, które pełni funkcję układu odniesienia.

Dopóki me wskaże się takiego układu odniesienia, mówią o spoczynku lub jakimkolwiek określonym ruchu ciała nie sensu.

Charakter ruchu ciała zależy od wyboru układu odniesienia. Na przykład ciało leżące na podłodze poruszającego się wagonu spoczywa względem układu odniesienia związanego z wagonem, ale porusza się względem układu odniesienia związanego z torowiskiem. Po tych wyjaśnieniach powróćmy do postawionego pytania: Czy we wszystkich układach odniesienia spełniona jest pierwsza zasada dynamiki Newtona?

Czytelnik: Chyba..., na pewno, we wszystkich...

Autor: Widzę, że to pytanie cię zaskoczyło. Doświadczenie pokazuje, że pierwsza zasada dynamiki Newtona jest spełniona nie we wszystkich układach odniesienia. Powróćmy do przykładu z ciałem leżącym na podłodze poruszającego się wagonu, przy czym pominiemy tarcie między ciałem i podłogą. Zwróćmy uwagę na położenie ciała względem układu odniesienia związanego z hamującym wagonem. W tych warunkach można zaobserwować następującą sytuację: ciało spoczywa na podłodze, ale następnie, mimo braku jakichkolwiek oddziaływań, naraz zaczyna się po niej ślizgać. Naruszenie pierwszej zasady dynamiki Newtona jest oczywiste. Objaśnią się to w ten sposób, że wagon, poruszający się poprzednio prostoliniowo i jednostajnie, zaczął hamować, a ciało, z braku tarcia, zachowało stan ruchu jednostajnego i prostoliniowego względem torowiska. Stąd można wyciągnąć wniosek, że w układzie odniesienia związanym z torowiskiem pierwsza zasada dynamiki Newtona jest spełniona, a w układzie związanym z hamującym wagonem – nie. Układ odniesienia, w których pierwsza zasada dynamiki Newtona jest spełniona, nazywają się inercjalnymi, a te, w których zasada ta nie jest spełniona – nieinercjalnymi. Dla większości rozpatrywanych przez nas zjawisk za układ inercjalny można uważać każdy układ odniesienia związanego z powierzchnią Ziemi lub jakimiś ciałami, które względem powierzchni Ziemi spoczywają lub poruszają się prostoliniowo i jednostajnie. Do nieinercjalnych układów odniesienia zalicza się układy poruszające się z przyspieszeniem, na przykład układy obracające się, zwalniające i przyspieszające windy itd. Zwracam uwagę, że w nieinercjalnych układach odniesienia nie jest spełniona nie tylko pierwsza, ale i druga zasada dynamiki Newtona.

Czytelnik: Lecz jeżeli zasad dynamiki Newtona nie wolno stosować w układach odniesienia poruszających się z przyspieszeniem, to jakże w takim razie można zajmować się mechaniką w takich układach?

Autor: Do tej pory mieliśmy do czynienia z siłami wywołanymi oddziaływaniem ciał. Jednak w mechanice spotykamy siły jeszcze jednego rodzaju: nie są one spowodowane wzajemnym oddziaływaniem ciał, nie stosuje się do nich trzecia zasada dynamiki Newtona. Są to siły bezwładności. Jeśli obok rzeczywistych sił (spowodowa-

nych oddziaływaniem ciał) włączy się do rozważań siły bezwładności, to wtedy można posługiwać się zasadami dynamiki Newtona również w układach poruszających się z przyspieszeniem. Siła bezwładności \vec{F}_b jest zwrócona przeciwnie do wektora będącego iloczynem masy m i przyspieszenia układu \vec{a} : $\vec{F}_b = -m\vec{a}$. Niechaj nieinercjalnym układem będzie winda, mająca przyspieszenie a , o kierunku pionowym i zwrocie do góry; na podłodze windy znajduje się ciało o masie m . W układzie odniesienia związanym z windą trzeba przyjąć, że do ciała przyłożone są dwie siły rzeczywiste: siła reakcji podłogi \vec{R} i siła ciężkości \vec{Q} , a oprócz tego siła bezwładności $\vec{F}_b = m\vec{a}$, o zwrocie w dół. W danym układzie odniesienia ciało spoczywa, a więc

$$\vec{R} - \vec{Q} - \vec{F}_b = 0.$$

Czytelnik: Czy to znaczy, że w układach odniesienia poruszających się z przyspieszeniem można stosować pierwszą i drugą zasadę dynamiki Newtona?

Autor: Można, jeżeli dodatkowo przyłoży się do ciała siłę bezwładności. Nie można, gdy ograniczymy się do sił rzeczywistych, tj. spowodowanych oddziaływaniem ciał.

Chciałbym doradzić, abyś przy rozwiązywaniu zadani posługiwał się raczej tylko inercjalnymi układami odniesienia. Wtedy wszystkie siły, z którymi będziesz miał do czynienia, będą siłami rzeczywistymi, tj. będą wynikiem wzajemnych oddziaływań ciał występujących w zadaniu.

Czytelnik: Ale jeśli ograniczę się tylko do inercjalnych układów odniesienia, to wtedy nie będę mógł rozwiązywać zadani dotyczących ciała znajdującego się w przyspieszającej windzie albo na obracającej się tarczy!

Autor: Dlaczego nie będziesz mógł? Przecież wybór układu odniesienia zależy od ciebie. Jeżeli zechcesz posłużyć się w zadaniu układem związanym z windą lub tarczą (układ nieinercjalny), to powinieneś przyjąć, że ciało np. spoczywa. Jeżeli zaś posłużysz się układem odniesienia związanym z Ziemią (układ inercjalny), w rozważaniach będziesz musiał uwzględnić, że ciało porusza się albo prostoliniowo ze stałym przyspieszeniem, albo po okręgu. Radzę jak najczęściej wybierać właściwie inercjalny układ odniesienia. A teraz przejdźmy do drugiej zasady dynamiki Newtona. Proszę ją sformułować.

Czytelnik: To prawo zapisuje się tak: $F = ma$, gdzie F — siła działająca na ciało, m — jego masa, a — przyspieszenie.

Autor: Twoja lakoniczna odpowiedź jest bardzo charakterystyczna. Do twojego sformułowania należy zrobić trzy uwagi krytyczne — dwie niezbyt istotne i jedną istotną. Po pierwsze, nie siła jest wynikiem przyspieszenia, ale odwrotnie, przyspieszenie jest wynikiem działania siły. Dlatego bardziej logiczny zapis równania wyrażającego drugą zasadę dynamiki wygląda następująco:

$$\vec{a} = B \frac{\vec{F}}{m}, \quad (5.1)$$

gdzie B — współczynnik proporcjonalności, zależny od wyboru jednostek wielkości wchodzących do wzoru (5.1). Zauważ, że w twoim sformułowaniu nie było wzmianki o współczynniku proporcjonalności B . Po drugie, przyspieszenie nadają ciału wszystkie siły przyłożone do niego (choć nie jest wykluczone, że niektóre z nich mogą być wzajemnie zrównoważone). Dlatego w sformułowaniu zasady należałyby posługiwać się nie terminem „siła”, ale bardziej dokładnym terminem „wypadkowa wszystkich sił”.

Trzecia uwaga jest najważniejsza. Druga zasada dynamiki Newtona dotyczy związku między siłą i przyspieszeniem. Lecz siła i przyspieszenie są to wielkości wektorowe; charakteryzują się nie tylko wartością i jednostką, ale także kierunkiem. Nie powiedziałeś niczego o kierunku. Odnosi się wrażenie, że druga zasada dynamiki Newtona została nie do końca sformułowana. Poprawne sformułowanie drugiej zasady dynamiki Newtona brzmi następująco: Przyspieszenie ciała jest proporcjonalne do wypadkowej wszystkich sił przyłożonych do ciała i skierowane zgodnie z wypadkową tych sił. Analitycznie powyższe zdanie można wyrazić równaniem:

$$\vec{a} = B \frac{\vec{F}}{m}, \quad (5.2)$$

w którym m oznacza masę ciała.

Czytelnik: Widać stąd, że pod działaniem jednej i tej samej siły ciała o różnych masach uzyskują różne przyspieszenia.

Autor: Całkiem słusznie. Cięższe ciało w porównaniu z ciałem lekkim uzyskuje mniejsze przyspieszenie (wolniej zmienia się jego

prędkość). Siła \vec{F} jest to działanie (przyczyna), natomiast przyśpieszenie \vec{a} jest to „odzew” (skutek) na wymienione działanie.

Czytelnik: Zastanawiając się w paragrafie 3 nad siłami przyłożonymi do ciała rzuconego pod kątem do poziomu, obiecał Pan udowodnić, że kierunek ruchu ciała nie musi koniecznie zgadzać się z kierunkiem siły przyłożonej do ciała. Wtedy powoływał się Pan na drugą zasadę dynamiki Newtona.

Autor: Tak, teraz nadeszła stosowna pora, aby zająć się tą sprawą. Przypomnij sobie, że ogólnie biorąc wektory przyspieszenia i prędkości też są zorientowane różnie.

Czytelnik: Tak rozumiem. Na przykład przy jednostajnym ruchu ciała po okręgu wektor prędkości ciała ma kierunek stycznej do okręgu, a wektor przyspieszenia — kierunek promienia i zwrot ku środkowi okręgu.

Autor: Twój przykład jest właściwy. Teraz należy się odwołać do związku (5.2) i zdecydowanie podkreślić, że zgodny z kierunkiem wektora siły jest kierunek wektora przyspieszenia, a nie wektora prędkości, oraz że z wartością siły związana jest wartość przyspieszenia, a nie prędkości. Z drugiej strony, charakter ruchu ciała w danej chwili jest określony przez kierunek i wartość wektora prędkości w tej chwili (wektor prędkości jest zawsze skierowany wzdłuż stycznej do toru ciała). Ponieważ przyspieszenie i prędkość są różnymi wektorami, kierunki wektorów siły i prędkości mogą się nie zgadzać; a wówczas również charakter ruchu ciała w danej chwili nie jest określony jednoznacznie przez siły działające na rozpatrywane ciało w tej chwili.

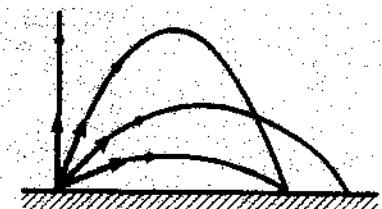
Czytelnik: Tak jest na ogół. Ale, jak myślę, chyba możliwa jest również zgodność kierunków wektorów siły i prędkości?

Autor: Oczywiście, możliwa. Podnieś ciało i spokojnie upuść je, nie nadając mu prędkości początkowej. Kierunek wektora prędkości będzie wówczas zgodny z kierunkiem siły ciężkości. Jeżeli jednak nadasz ciału na przykład poziomo skierowaną prędkość początkową, wtedy kierunki wektora prędkości ciała i wektora siły ciężkości nie będą zgodne. Ciało poleci po paraboli. W obu wypadkach ciało porusza się pod wpływem tej samej siły — siły ciężkości. ale charakter ruchu za każdym razem jest inny. Fizyk powiedziałby, że jest to spowodowane niejednakowymi warunkami początkowymi

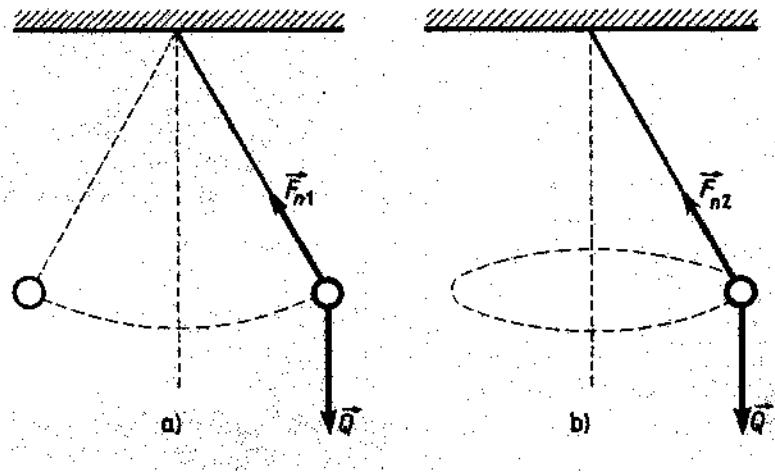
w chwili rozpoczęcia ruchu. **w pierwszym** wypadku ciało **nie** miało prędkości, a w **drugim** — miało określona prędkość o kierunku poziomym. Na **rysunku 5.1** pokazane są **tory ciał rzuconych** z jednakowymi prędkościami początkowymi, lecz pod różnymi kątami do poziomu; w tych wszystkich przykładach na ciało działa ta sama siła — siła ciężkości.

Czytelnik: Czy to znaczy, że charakter ruchu ciała w danej chwili jest określony nie tylko przez siły działające na ciało w tej chwili, ale również przez warunki początkowe?

Autor: Tak. Trzeba zaznaczyć, że warunki początkowe odzwierciedlają prehistorię ruchu ciała. Są one wynikiem działania sił, które występowały w przeszłości. Tych sił już nie ma, ale wynik ich działania uwidacznia się teraz. Z filozoficznego punktu widzenia w tym przejawia się związek przeszłości z teraźniejszością, tj. zasada przyczynowości. Zwróćmy uwagę, że gdyby do równania wyrażającego drugą zasadę dynamiki Newtona w miejscu przyspieszenia wchodziła prędkość, to wskazany związek przeszłości z teraźniejszością nie występowałby. Wówczas prędkość ciała w danej chwili (tj. charakter jego ruchu w danej chwili) w pełni byłaby określona siłami, działającymi na ciało w tejże chwili — przeszłość w najmniejszym stopniu nie miałaby wpływu na teraźniejszość. Przytoczę jeszcze jeden przykład ilustrujący powyższą wypowiedź (rys. 5.2). Kulka jest zawieszona na nici; działają na nią dwie siły: siła ciężkości \vec{Q} i siła reakcji \vec{F}_n nici. Jeżeli wychylisz kulkę z położenia równowagi i następnie puścisz, to będzie ona wykonywać drgania. Jeżeli natomiast wychylonej kulce nada się określona prędkość, kierunku prostopadłym do płaszczyzny, w której zaszło wykrycie, to kulka będzie się poruszała jednostajnie po okręgu. Jak widać, kulka zależnie od warunków początkowych albo wykonuje drgania (rys. 5.2a), albo porusza się ruchem jednostajnym po okręgu (rys. 5.2b), przy czym w obu wypadkach działają na nią tylko dwie siły: siła ciężkości i siła reakcji nici.



Rys. 5.1



Rys. 5.2

Czytelnik: Nigdy w ten sposób nie myślałem o zasadach dynamiki Newtona.

Autor: Dlatego nie trzeba się dziwić, że rozpatrywanie sił przyłożonych do ciała niejednokrotnie zaczyna się nie od ustalenia, które ciała oddziałują z danym ciałem, ale od tego, jaki jest charakter ruchu ciała. Przypomnij sobie, ty też tak zrobiłeś. Właśnie dlatego, kiedy rysowałeś siły na rysunku 3.2c, d, miałeś wrażenie, że zespoły sił przyłożonych do ciał powinny być różne. A tymczasem w obu wypadkach do ciała przyłożone są dwie siły: siła ciężkości i siła reakcji nici.

Czytelnik: Zrozumiałem, że siły przyłożone do ciała mogą być jednakowe, a charakter ruchu ciała inny, i dlatego dane o charakterze ruchu ciała nie powinny stanowić punktu wyjścia do ustalenia, jakie siły są przyłożone do ciała.

Autor: Wyraziłeś się bardzo precyźnie. Jednak wiedząc o tym nie należy popadać w skrajność. Chociaż różne rodzaje ruchu mogą realizować się przy takich samych zespołach sił (jak na rys. 5.2), to stosunki wartości działających sił są przy tym różne. Oznacza to, że dla różnych rodzajów ruchu będą inne wypadkowe przyłożone siły. Tak na przykład dla jednostajnego ruchu ciała po okręgu wypadkowa siła jest skierowana do środka i powoduje przyspieszenie

nie dośrodkowe, podczas gdy dla drgań siła wypadkowa jest prostopadła do nici i jest siłą zwrotną. Wynika stąd, że chociaż dane o charakterze ruchu ciała nie powinny być punktem wyjścia do ujawnienia i określenia sił, bynajmniej nie są one niepotrzebne. W związku z tym wróćmy do przykładu przedstawionego na rysunku 5.2.

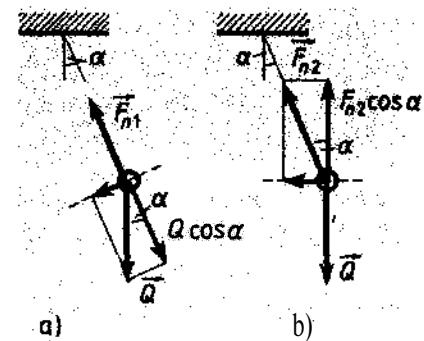
Znamy, że znany jest kąt α między pionem i kierunkiem nici oraz m. ciało; trzeba znaleźć siłę naprężenia F_n nici w dwóch wariantach: 1) ciało wykonując drgania, dochodzi do położenia równowagi, 2) ciało porusza się ruchem jednostajnym po okręgu położonym na tertię poziomej.

W pierwszym wariantie wypadkowa siła ciężkości i siły reakcji nici jest siłą zwrotną, jest ona prostopadła do nici. Dlatego powinno się rozłożyć wektor siły ciężkości Q na składową o kierunku tej wypadkowej i składową prostopadłą do niej (czyli mającą kierunek nici), i przyrównać siły prostopadłe do wypadkowej, tj. działające w kierunku wyznaczonym przez nić (rys. 5.3a). Biorąc pod uwagę związek

$$Q = mg,$$

otrzymujemy

$$F_{n1} = mg \cos \alpha.$$



Rys. 5.3

W drugim wariantie wypadkowa siła jest siłą dośrodkową, o kierunku poziomym i zwrocie do środka okręgu. Dlatego wektor siły reakcji F_n2 nici trzeba rozłożyć na dwie składowe, z których jedna ma kierunek pionowy, a druga poziomy, i przyrównać obie siły prostopadłe do wypadkowej, tj. działające w kierunku pionowym (rys. 5.3b). Stąd

$$F_{n2} \cos \alpha = mg.$$

albo

$$F_{n2} = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

Otrzymaliśmy siłę reakcji nici; poszukiwana siła naprzędająca nie jest równa co do wartości sile reakcji i zwrócona w stronę przeciwną. Jak widzisz, znajomość charakteru ruchu przydała się do znalezienia siły naprężenia nici.

Czytelnik: Jeżeli dobrze zrozumiałem, znając wzajemne oddziaływanie ciało, można znaleźć siły przyłożone do ciała: znając te siły i warunki początkowe, można przewidzieć charakter ruchu ciała (wartość i kierunek prędkości ciała) w dowolnej chwili. Z drugiej strony, znając charakter ruchu ciała, można ustalić związki między siłami przyłożonymi do ciała. Czy rozumuję poprawnie?

Autor: Tak, rozumujesz właściwie. Chcę zaproponować jeszcze jedno proste zadanie dotyczące drugiej zasady dynamiki Newtona.

Dwa ciała o masach M i m ($M > m$), podniesione na jednakową wysokość, zostały jednocześnie puszczone na podłogę. Czy jednocześnie upadną? Jeżeli siła oporu powietrza dla obu ciał jest taka sama? Dla uproszczenia przyjmiemy, że jest ona stała podczas ruchu.

Czytelnik: Ponieważ siła oporu powietrza dla obu ciał jest taka sama, można jej nie brać pod uwagę. Dlatego obydwa ciała upadną na podłogę jednocześnie.

Autor: Mylisz się. Nie masz prawa nie brać pod uwagę siły oporu powietrza. Weźmy na przykład ciało o masie M . Działają na nie dwie siły: siła ciężkości Q i siła oporu F . Wypadkowa tych sił jest równa ($Q - F$). Stąd, uwzględniając, iż $Q = Mg$, znajdujemy przyspieszenie

$$a = \frac{Mg - F}{M} \quad \text{albo} \quad a = g - \frac{F}{M}$$

A więc ciało o większej masie ma większe przyspieszenie i wobec tego szybciej osiągnie podłogę.

Chcę jeszcze raz podkreślić, że

siły oporu powietrza dla ciał o różnych masach nie są proporcjonalne do ich mas.

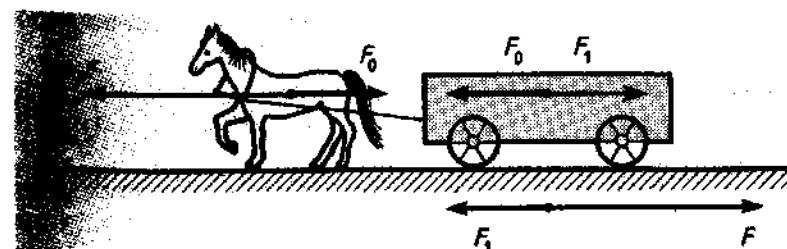
tj. koniecznie musimy wyznaczyć siłę wypadkową. W związku z tym trzeba wyraźnie potępić stosowanie terminu „siła napędowa”. Jest on nietrafny. Termin ten zastosowany do jakiejś siły (lub kilku sił), jak gdyby wyróżnia rolę tej siły (tych sił) w nadaniu ciała przyspieszenia. Można pomyśleć, że inne siły są mniej istotne. Jest to całkowite nieporozumienie. Ruch ciała jest wynikiem działania wszystkich bez wyjątku sił przyłożonych do ciała (oraz oczywiście, warunków początkowych).

Rozpatrzmy przykład dotyczący trzeciej zasady dynamiki Newtona.

Kon ciągnie wóz. Skutek jest taki, że kon i wóz poruszają się z jednym przyspieszeniem. Z trzeciej zasady dynamiki Newtona wynika, że jeśli kon działa na wóz pewną siłą, to dokładnie taką samą siłą, ale w przeciwną stronę, wóz działa na konia. Dlaczego, wówczas, razie kon i wóz poruszają się z przyspieszeniem?

Czytelnik: Nigdy nie zastanawiałem się nad tym, jednak nie widzę tu żadnych sprzeczności. Istnienie przyspieszenia byłoby trudno objąć, gdyby siła, którą kon działa na wóz, była równoważona przez siłę, którą wóz działa na konia. Jednak te siły nie mogą się wzajemnie równoważyć, ponieważ są przyłożone do różnych ciał: jedna do konia, druga do wozu.

Autor: Twoje objaśnienie byłoby poprawne, gdyby wóz nie był przywiązany do konia. Można by sobie wyobrazić, że kon odpycha się od wozu, w wyniku czego wóz porusza się w jedną stronę, a kon w przeciwną. Ja dałem ci pod uwagę inną sytuację: kon i wóz są ciałami związanymi wzajemnie, poruszającymi się razem



Rys. 5.4

jako jeden układ (rys. 5.4). Siły wzajemnego oddziaływania wozu i konia są przyłożone do różnych części tego układu jako całości i przy rozpatrywaniu jego ruchu mogą być traktowane jako siły wzajemnie się równoważące.

Czytelnik: W takim razie nie rozumie, w czym rzecz. Możliwe, że w tym wypadku działanie nie jest w pełni zrównoważone przeciw-działaniem? Mimo wszystko koh — to żywy organizm...

Autor: Nie fantazuj. Wystarczyło, że natknąłeś się na trudność, a już jesteś gotów wyrzec się jednego z podstawowych praw mechaniki. Aby odpowiedzieć na moje pytanie, nie trzeba „korygować” trzeciej zasady dynamiki Newtona. Przeciwnie, uczyńmy tę zasadę podstawą rozwiazań. Zgodnie z nią oddziaływanie wzajemne konia i wozu nie może doprowadzić do ruchu tego układu jako całości (dokładniej: nie może nadać przyspieszenia układowi jako całości). W takim razie konieczne jest istnienie dodatkowego oddziaływania. Innymi słowy, oprócz konia i wozu w zadaniu powinno się uwzględnić, co najmniej jeszcze jedno ciało. Jest nim Ziemia. W wyniku tego występuje już nie jedno oddziaływanie, ale trzy: 1) konia i wozu (siła F_0); 2) konia i Ziemi (siła F) — koń odpycha się od powierzchni Ziemi; 3) wozu i Ziemi (siła F_1) — tarcie wozu o powierzchnię Ziemi. Na rysunku 5.4 przedstawiono trzy ciała: konia, wóz, Ziemię. Do każdego z nich są przyłożone po dwie siły — wynik oddziaływania danego ciała z dwoma pozostałymi. (Dla uproszczenia na rys. 5.4 nie narysowano wektora siły ciężkości i siły reakcji podłoża, gdyż siły te wzajemnie się równoważą i nie mają wpływu na rozpatrywany ruch). Przyspieszenie układu koń—wóz jest spowodowane wypadkową wszystkich sił przyłożonych do tego układu. Tych sił jest cztery, ich wypadkowa ma wartość ($F - F_1$). Ona właśnie powoduje przyspieszenie rozpatrywanego układu. Jak widzisz, to przyspieszenie nie jest związane z oddziaływaniem wozu i konia.

Czytelnik: Wynika stąd, że powierzchnia Ziemi jest nie tylko miejscowością, gdzie zachodzą takie lub inne zdarzenia, ale aktywnym „uczestnikiem” tych zdarzeń.

Autor: Twoje obrazowe spostrzeżenie jest słuszne. Wyobraź sobie, że kori z wozem stoi na idealnym lodzie. Nie występuje wówczas poziomo skierowane oddziaływanie tego układu z Ziemią i kori z wozem nie ruszy z miejsca.

Trzeba szczególnie podkreślić: żadne wewnętrzne oddziaływanie nie mogą nadać przyspieszenia układowi jako całości, do tego potr. ebne są oddziaływanie zewnętrzne (nie można siebie samego podnieść za włosy).

Jest to ważny praktyczny wniosek z trzeciej zasady dynamiki Newtona.

6. Jak rozwiążujesz zadania z kinematyki?

Jeżeli dobrze znasz mechanikę, be: trudu rozwiążujesz zadania. Nieniżej oczywiste jest twierdzenie odwrotne: jeśli łatwo rozwiążujesz zadania, to znaczy, że dobrze znasz mechanikę. Dlatego rozwiąż jak najwięcej zadań.

Autor:

• W pionowej wysokości spadają dwa ciała — jedno bez prędkości początkowej, drugie z pewną początkową prędkością, skierowaną pionowo w dół. Porównaj czasy spadania wymienionych ciał. Oporu powietrza nie bierz pod uwagę. a w tym zadaniu i w dalszych będziemy uwzględniać.

Czytelnik: Ruch ciała rzuconego poziomo można rozpatrywać jako połączenie dwóch ruchów: w kierunku poziomym i pionowym. Czas lotu jest związany z pionową składową prędkości. Ponieważ pionowe przemieszczenie ciała w obu wypadkach jest określone tymi samymi danymi (ta sama wysokość, brak pionowej składowej wektora prędkości początkowej), więc czasy spadania obu ciał są jednakowe i równe $\sqrt{\frac{2H}{g}}$, gdzie H — wysokość położenia początkowego.

Autor: Całkiem słusznie. A teraz weźmy pod uwagę przykład bardziej złożony.

• Rozważmy, że dwa ciała spadają z wysokości H bez prędkości początkowej, ale jedno z nich natrafia na swojego drodze na umocowaną platformę, nachyloną pod kątem 45° do poziomu. W wyniku

odbicia od platformy kierunek wektora prędkości ciała staje się poziomy (rys. 6.1), *Miejsce uderzenia w platformę znajduje się na wysokości h . Porównaj czasy spadania wymienionych rial.*

Czytelnik: Do poziomu platformy ciała spadają w tym samym czasie. W wyniku uderzenia w platformę jedno z ciał uzyskuje składową poziomą wektora prędkości. Jednak pozioma składowa prędkości nie może wpływać na ruch pionowy ciała. Stąd wynika, że czasy spadania obydwu ciał również w tym wypadku są **jednakowe**.

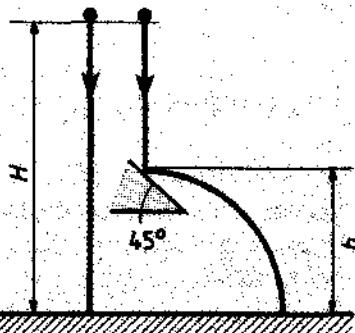
Autor: Ta odpowiedź jest błędna.

Masz rację, że pozioma składowa prędkości nie ma wpływu na pionowe przemieszczenie ciała, a w konsekwencji — na czas jego spadania. Jednak zderzenie z platformą prowadzi nie tylko do pojawienia się poziomej składowej prędkości ciała, ale i do zniknięcia pionowej składowej prędkości. To, oczywiście, nie może nie wpływać na czas spadania ciała.

Czytelnik: Dlaczego w wyniku uderzenia w platformę znika pionowa składowa prędkości?

Autor: Przy sprzątym zderzeniu z umocowaną platformą prędkość ciała po uderzeniu jest równa co do wartości prędkości ciała przed uderzeniem. Natomiast kierunek prędkości po uderzeniu jest określony regułą „kąt odbicia równa się kątowi padania”. Ale wróćmy do analizy zadania. Podczas uderzenia w platformę pionowa składowa wektora prędkości maleje do zera i z wysokości h rozpoczyna się nowy rzut poziomy. Inaczej mówiąc platforma zatrzymuje pionowe przemieszczanie ciała i w wyniku tego wzrasta czas spadania ciała, które nie zderzyło się z platformą.

Przed uderzeniem, jest równy $\sqrt{\frac{2h}{g}}$; czas spadania ciała, które doznało zderzenia z platformą, wynosi



Rys. 6.1

$$\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} + \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

W związku z tym chcę zadać następujące pytanie:

W jakiego stosunku wysokości $\frac{h}{H}$ czas spadania ciała przyjmuje wartość maksymalną? Inaczej, na jakiej wysokości trzeba umieścić platformę, aby najbardziej efektywnie spowolniła spadanie?

Czytelnik: Nie wiem, jaka jest dokładna odpowiedź. Wydaje mi się, że wartość ilorazu $\frac{h}{H}$ nie powinna być ani bliska 1, ani 0, gdyż osiągnięcie jednej z tych wartości jest po prostu równoważne brakowi platformy. Platformę należy umieścić gdzieś pośrodku między powierzchnią ziemi i wyjściowym górnym punktem.

Autor: Twoje jakościowe uwagi są **słuszne**. Nietrudno też uzyskać ścisłą odpowiedź. Zapiszmy czas spadania ciała:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} (\sqrt{1-x} + \sqrt{x}), \quad \text{gdzie } x = \frac{h}{H}.$$

Należy znaleźć, dla jakiej wartości zmiennej x funkcja $t(x)$ przyjmuje wartość maksymalną.

Czytelnik: Przypominam sobie z lekcji algebry, że w celu znalezienia maksymalnej wartości funkcji oblicza się pochodną i przyrównuje ją do zera; ale ja miałbym kłopot z obliczeniem pochodnej tak skomplikowanej funkcji.

Autor: W naszym zadaniu można ominąć tę trudność i nie obliczać pochodnej. Podnieśmy czas spadania do kwadratu:

$$t^2 = \frac{2H}{g} [1 + 2\sqrt{(1-x)x}].$$

Jeżeli czas jest maksymalny, to maksymalny jest również kwadrat czasu. Tak więc, zadanie sprowadza się do zbadania dwumianu kwadratowego $(-x^2 + x)$:

$$y = -x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

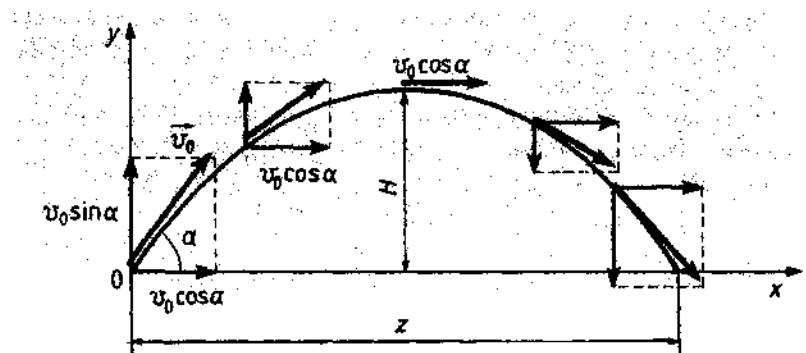
Widać, że ten dwumian ma wartość maksymalną dla $x = \frac{1}{2}$. Zatem, wysokość h powinna być dwa razy mniejsza od wysokości H . Dalsze charakterystyczne metody rozwiązywania zadań z kinematyki poznamy na przykładzie ciała rzuconego pod kątem do poziomu.

Czytelnik: Nie czuję się zbyt mocny w rozwiązywaniu takich zadań.
Autor: Zaczniemy od prostego zadania:

Ciało rzucone pod kątem «do poziomu z prędkością początkową v_0 . Trzeba określić czas T lotu, maksymalną wysokość H wznieśnia się ciała i zasięg rzutu z .

Jak zwykle, rozwiązywanie zadania zaczyna się od znalezienia i rozpatrzenia sił działających na ciało. Na ciało działa tylko siła ciężkości, dlatego w kierunku poziomym przemieszcza się ono jednostajnie, a w kierunku pionowym — ruchem jednostajnie zmiennym z przyspieszeniem g . Każdy z tych ruchów rozpatrzmy oddzielnie. W tym celu rozłożymy wektor prędkości początkowej na składowe pionową ($v_0 \sin \alpha$) i poziomą ($v_0 \cos \alpha$). Składowa pozioma wektora prędkości ciała jest w czasie lotu stała, podczas gdy pionowa składowa prędkości zmienia się, co pokazano na rysunku 6.2.

Zajmiemy się najpierw ruchem w kierunku pionowym. Czas lota



Rys. 6.2

$T = T_1 + T_2$, gdzie T_1 — czas wznoszenia, T_2 — czas spadania. Pionowa składowa wektora prędkości ciała w najwyższym punkcie toru (w chwili $t = T_1$) jest oczywiście równa zero. Z drugiej strony, prędkość tę można wyrazić za pomocą wzoru przedstawiającego zależność prędkości ruchu jednostajnie zmiennego od czasu:

$$0 = v_0 \sin \alpha - g T_1.$$

Znak minus jest uzasadniony tym, że przyspieszenie ma zwrot przeciwny do zwrota osi y . Stąd

$$T_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (6.1)$$

Znając T_1 , znajdujemy

$$H = (v_0 \sin \alpha) T_1 - \frac{g T_1^2}{2}$$

albo

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Czas T_2 spadania można obliczyć, wziewszy pod uwagę pionowe spadanie ciała ze znanej wysokości H bez prędkości początkowej:

$$T_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Porównując ten wynik z (6.1), stwierdzamy, że czas spadania jest równy czasowi wznoszenia się. Całkowity czas lotu

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (6.3)$$

W celu znalezienia zasięgu z rzutu musimy zająć się składową poziomą wektora prędkości ciała. Jak już zaznaczyłem, w kierunku Poziomym ciało przemieszcza się jednostajnie. Stąd znajdujemy

$$z = (v_0 \cos \alpha) T = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (6.4)$$

Z (6.4) widać, że jeżeli kąty dwóch rzutów ciała dają w sumie 90° ,

to przy równych wartościach prędkości początkowych ciało upadnie w tym samym punkcie (rys. 5.1)*.

Czytelnik: Chciałbym uściślić pytanie o tor ruchu ciała w rozpatrywanym zadaniu. Mówiono nam, że ten tor — to parabola. Czy można to wykazać?

Autor: Tak, oczywiście. Weźmy pod uwagę ruch w układzie współrzędnych, przedstawionych na rysunku 6.2. Charakter ruchu ciała w kierunkach pionowym i poziomym już wyjaśniliem. Dlatego można zapisać następujące równania określające zależność współrzędnych x i y ciała od czasu (równania ruchu):

$$\begin{aligned}x(t) &= (v_0 \cos \alpha)t, \\y(t) &= (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2}.\end{aligned}\quad (6.5)$$

Eliminując czas z tych równan, znajdujemy

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha) x.$$

To jest właśnie równanie paraboli.

Czytelnik: Drugie z równan (6.5) ma postać charakterystyczną dla ruchu jednostajnie opóźnionego. Jednak w czasie spadania ciało przemieszcza się w kierunku pionowym ruchem jednostajnie przyspieszonym. Czy w tej sytuacji można posługiwać się tym równaniem?

Autor: Można. Oznaczmy: y_0 — współrzędna ciała w najwyższym punkcie toru, T — czas, mierzony od chwili przejścia ciała przez ten punkt. Łatwo spostrzec, że w czasie spadania ciała

$$y_0 - y = \frac{gT^2}{2}.$$

Ponieważ

$$t = T - T_1 = T - \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

* Jeżeli dla pewnego kąta α i zasięgu rzutu z jest taki, jaki wynika z wzoru (6.4), to dla innego kąta β uzyskamy taki sam zasięg pod warunkiem, że $2\alpha = 180^\circ - 2\beta$, a stąd $\alpha + \beta = 90^\circ$ (przyp. tłum.).

i

$$y_0 = H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$

więc

$$\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} - y = \frac{g}{2} \left(t - \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2,$$

albo ostatecznie

$$y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2}.$$

Czy wszystko w zadaniu było zrozumiałe?

Czytelnik: Tak. Wszystko jasne.

Autor: W takim razie skomplikujemy zadanie.

Czytelnik: Na rzucione ciało o masie M działa stała siła grawitacji. Ciało ma ruch poziomy wiatr. Należy, jak w poprzednim zadaniu, znaleźć czas T lotu, wysokość H i zasięg z .

Czytelnik: W odróżnieniu od poprzedniego zadania ciało przemieszcza się w kierunku poziomym ruchem niejednostajnym: ciało porusza się w tym kierunku z przyspieszeniem $a = \frac{F}{M}$.

Autor: Czy zmienił się ruch ciała w kierunku pionowym?

Czytelnik: Ponieważ siła wiatru działa poziomo, więc nie może ona wpływać na pionowe przemieszczanie ciała.

Autor: Dobrze. A teraz zastanów się, które z poszukiwanych wielkości powinny mieć takie same wartości jak w poprzednim zadaniu.

Czytelnik: Oczywiście czas lotu T i wysokość H . Przecież te wielkości wyznacza się na podstawie rozpatrywania pionowego przemieszczania ciała. Dlatego będą takie same, jak w poprzednim zadaniu.

Autor: Wspaniale. Pozostało ci tylko znaleźć zasięg rzutu.

Czytelnik: Znając przyspieszenie w kierunku poziomym i czas lotu, **zauważajmy** zasięg rzutu.

$$z = (v_0 \cos \alpha)T + \frac{aT^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} + \frac{2Fv_0^2 \sin^2 \alpha}{Mg^2}.$$

Autor: Zgadza się. Ale odpowiedź lepiej będzie zapisać w innej postaci:

$$z = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \left(1 + \frac{F}{Mg} \operatorname{tg} \alpha \right). \quad (6.6)$$

Teraz rozwiążemy zadanie:

Ciało o masie M rzucono pod kątem α do równi pochyłej, która tworzy z poziomem kąt β (rys. 6.3). Początkowa prędkość ciała jest równa v_0 . Znaleźć zasięg rzutu z ciała.

Czytelnik: Już próbowałem kiedyś rozwiązać podobne zadanie. Bez rezultatu.

Autor: Czyż nie zauważasz pewnego podobieństwa między tym zadaniem i zadaniem poprzednim, w którym był warunek, że na ciało działa wiatr?

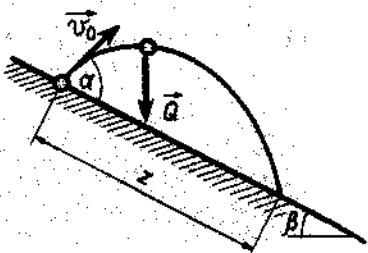
Czytelnik: Nie, nie zauważam.

Autor: Wybierzmy takie ustawienie osi Ox , że będzie ona równoległa do równi pochyłej, a os Oy ustawmy prostopadle do niej (rys. 6.4a). Rozłożymy wektory prędkości początkowej v_0 i siły ciężkości Q na składowe mające kierunki tych osi:

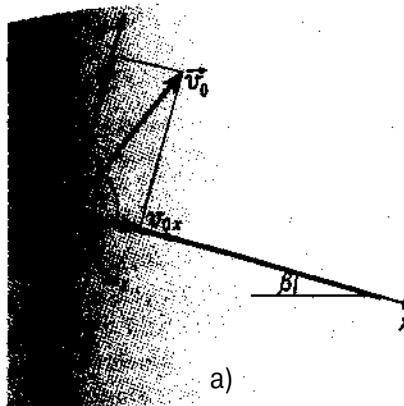
$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos \alpha, & v_{0y} &= v_0 \sin \alpha, \\ Q_x &= Q \sin \beta, & Q_y &= Q \cos \beta. \end{aligned}$$

Łatwo zauważycy, że otrzymaliśmy w ten sposób poprzednie zadanie. Lecz w odróżnieniu od tamtego, tutaj przyspieszenie w kierunku osi Ox spowodowane jest nie siłą wiatru, a składową siły ciężkości $Q \sin \alpha$, zaś przyspieszenie wzdłuż osi Oy — siłą $Q \cos \alpha$. Dlatego do określenia zasięgu z można posłużyć się wyrażeniem (6.6) pod warunkiem, że zostaną w nim dokonane podstawienia $F \rightarrow M g \sin \beta$, $g \rightarrow g \cos \beta$. W ten sposób uzyskujemy

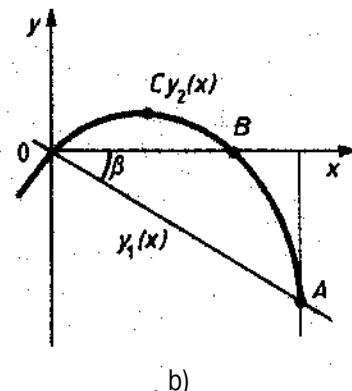
$$z = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g \cos \beta} (1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha). \quad (6.7)$$



Rys. 6.3



a)



b)

Rys. 6.4

Ella $\beta = 0$ powyższy wynik przechodzi w wyrażenie (6.4). Interesujące będzie pokazanie jeszcze jednego sposobu rozwiązywania przedstawionego zadania. Wprowadźmy układ współrzędnych p ośach Ox i Oy i początek w punkcie wyrzucenia ciała (rys. 6.4b). Przekrój boczny równi pochyłej opisuje w tym układzie współrzędnych funkcja liniowa $y_1 = -xtg\beta$, a tor ruchu ciała parabola $y_2 = ax^2 + bx$, gdzie a i b — pewne współczynniki wyrażające się przez v_0 , a i β . Znajdziemy współrzędną x_A punktu przecięcia wykresów funkcji y_1 i y_2 , przyrównując do siebie odpowiednie wyrażenia:

$$-xtg\beta = ax^2 + bx.$$

Stąd otrzymujemy

$$x_A = \frac{\operatorname{tg} \beta + b}{-a}.$$

Znając x_A , znajdujemy poszukiwaną odległość $|OA| = z$:

$$z = \frac{x_A}{\cos \beta} = \frac{\operatorname{tg} \beta + b}{-a \cos \beta}.$$

Pozostaje wyrazić współczynniki a i b przez v_0 , a i β . W tym celu należy wziąć pod uwagę dwa punkty paraboli — punkt $B(x_B, y_B)$ i (x_C, y_C) (rys. 6.4b). Zapiszemy dla każdego z tych punktów równanie paraboli:

$$\begin{cases} y_{2C} = ax_C^2 + bx_C, \\ y_{2B} = ax_B^2 + bx_B. \end{cases} \quad (6.8)$$

Ten układ równan pozwala wyznaczyć współczynniki a i b . Radzi ci, żebyś w wolnej chwili doprowadził to rozwiązanie do korica i sprowadził je do postaci (6.7).

Czytelnik: Mnie bardziej podoba się pierwszy sposób rozwiązywania.

Autor: To sprawa gustu. Przedstawione dwa sposoby rozwiązywania istotnie różnią się charakterem. Pierwszy sposób można nazwać „fizycznym”. Wykorzystuje on charakterystyczne dla fizycznego podejścia modelowanie (nieznacznie zmieniliśmy punkt widzenia i sprowadziliśmy nasze zadanie do rozwiązanego wcześniej zadania, w którym występowała siła wiatru). Drugi sposób można nazwać matematycznym. Tutaj wykorzystano dwie funkcje i znaleziono współrzędne punktu przecięcia wykresów tych funkcji. Moim zdaniem pierwszy sposób jest bardziej elegancki niż drugi. Ale, niestety, jest mniej ogólny. Obszar zastosowań drugiego sposobu jest znacznie szerszy. Tak więc, może być on wykorzystany wtedy, gdy profil góry, z której rzucone jest ciało, nie daje się przedstawić linią prostą. Wtedy zamiast liniowej funkcji y_1 będziemy mieli jakąś inną funkcję, opisującą dany przekrój góry. Pierwszy sposób w podobnych wypadkach nie może być zastosowany. W związku z tym nadmienię, że szerszy obszar stosowności metod matematycznych jest związany z tym, że są one bardziej abstrakcyjne.

Czytelnik: A czy nie moglibyśmy rozwiązać zadania, w którym występują dwa ciała zderzające się w locie?

Autor: Oczywiście, że możemy. Rozwiąż następujące zadanie:

Ciało A rzucono pionowo do góry z prędkością $v_{0A} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Na jakiej wysokości H wyrzucono ciało B, w kierunku poziomym z prędkością $v_{0B} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ jednocześnie z ciałem A, jeżeli ciała zderzyły się w locie? Odległość mierzona wzduż prostej poziomej między początkowymi położeniami ciał jest równa $l = 4 \text{ m}$. Znaleźć także czas T ruchu ciał do chwili zderzenia i prędkość v każdego ciała w chwili zderzenia.

Czytelnik: Z pewnością trzeba najpierw wypisać równania ruchu. Prawdę mówiąc, zupełnie nie wiem, jak ustawić osie współrzędnych; przecież ciała rozpoczęły ruch z różnych punktów.

Autor: Na ciała działa tylko siła ciężkości, dlatego najprościej będzie wybrać układ współrzędnych pokazany na rysunku 6.5, przyjmując, że początek układu znajduje się na powierzchni Ziemi. Napisz teraz równania ruchu dla każdego z ciał.

Czytelnik: Ciało A z punktu o współrzędnych $x_{0A} = /, y_{0A} = 0$ przemieszcza się w kierunku wyznaczonym przez osią Oy ruchem jednostajnie zmiennym z początkową prędkością v_{0A} , jego współrzędna na osi Ox nie zmienia się; zapiszę to następująco:

$$x_A = t,$$

$$y_A = v_{0A}t - \frac{gt^2}{2}.$$

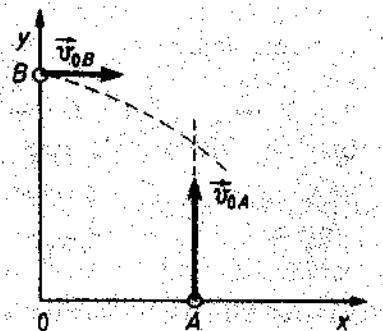
Autor: Napisał poprawnie.

Czytelnik: Ciało B z punktu o współrzędnych $x_{0B} = 0$ i $y_{0B} = H$ porusza się w kierunku wyznaczonym przez osią Ox ruchem jednostajnym, a w kierunku Oy ze stałym przyspieszeniem, dlatego

$$\begin{cases} x_B = v_{0B}t_2, \\ y_B = \frac{gt_2^2}{2}. \end{cases}$$

Autor: W ostatnim równaniu zrobiłeś dwa błędy. Po pierwsze, nie uwzględniałeś, że ciało B w chwili początkowej znajdowało się na wysokości H . Po drugie, że wektor przyspieszenia g ma zwrot przeciwny do zwrota osi Oy; jego rzut na osią Oy ma wartość ujemną. Poprawne zapisane równanie wygląda tak:

$$y_B = H - \frac{gt_2^2}{2}.$$



Rys. 6.5

Czytelnik: Co mam robić dalej? W naszych równaniach jest bardzo dużo niewiadomych.

Autor: Ciała rozpoczęły ruch jednocześnie, dlatego $t_1 = t_2 = t$. Wiadomo także, iż ciała zderzyły się w locie; zatem w chwili zderzenia przy $t = T$ ich współrzędne x i y są równe. Tak więc

$$\begin{cases} l = v_{0B}T, \\ v_{0A}T - \frac{gT^2}{2} = H - \frac{gT^2}{2}. \end{cases}$$

Czytelnik: Powstał układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi. Jako wynik jego rozwiązania, otrzymujemy

$$T = \frac{l}{v_{0B}} = 1 \text{ s}; \quad H = v_{0A}T = v_{0A} \frac{l}{v_{0B}} = 20 \text{ m}.$$

Autor: Nie mam zastrzeżeń. Znajdź teraz prędkości ciał w chwili zderzenia.

Czytelnik: Prędkość ciała, które rozpoczęło ruch z punktu A , określa równanie

$$v = v_0 - gt.$$

W naszym zadaniu:

$$v_A = v_{0A} - \frac{gt}{v_{0B}} \approx 10,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nie wiem jednak jak obliczyć prędkość ciała B .

Autor: Prędkość tego ciała ma dwie składowe:

$$v_{Bx} = v_{0B}, \quad v_{By} = -gt.$$

Wartość prędkości wypadkowej oblicza się z twierdzenia Pitagorasa, gdyż obie składowe są wzajemnie prostopadłe:

$$v = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = \sqrt{v_{0B}^2 + (gT)^2} \approx 10,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zadania

- 6.1. Z punktów A i B , znajdujących się na wysokościach odpowiednio $\frac{1}{2} \text{ m}$ i 6 m , jednocześnie rzucono naprzeciwko siebie dwa ciała: jedno poziomo z prędkością $8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, drugie ku dołowi pod kątem $H = 45^\circ$ do poziomu z taką prędkością początkową, aby obydwa ciała zderzyły się w locie. Odległość między punktami A i B miejrzona wzdłuż prostej poziomej jest równa $l = 8 \text{ m}$. Oblicz początkową prędkość ciała rzuconego pod kątem $a = 45^\circ$ do poziomu, współrzędne x i y punktu zderzenia, czas T ruchu ciał do zderzenia i prędkości v_A i v_B obu ciał w chwili zderzenia. Tory ciał leżą w jednej płaszczyźnie.
- 6.2. Z jednego punktu rzucono pod kątami α_1 i α_2 do poziomu dwa ciała z początkowymi prędkościami odpowiednio v_1 i v_2 . W jakiej wzajemnej odległości l będą się znajdować te ciała po czasie t ? Rozpatrz dwie sytuacje: 1) tory ciał leżą w jednej płaszczyźnie, przy czym ciała rzucono w różne strony; 2) tory ciał leżą w płaszczyznach wzajemnie prostopadłych.
- 6.3. Ciało spada z wysokości H bez prędkości początkowej. Na wysokości h uderza sprężyście w umocowaną platformę, ustawnioną pod kątem $a = 30^\circ$ do poziomu. Znajdź czas T spadania i zasięg z lotu.
- 6.4. Pod jakim kątem a do poziomu trzeba rzucić ciało o masie m , aby maksymalna wysokość jego wzniesienia była równa zasięgiowi rzutu? Na ciało działa stałą siłę F skierowaną poziomo, sprzyjający ruchowi wiatr.
- 6.5. Z równi pochyłej nachylonej pod kątem β do poziomu rzucono kamien z prędkością początkową v_0 prostopadle do równi. W jakiej odległości od punktu wyrzucenia upadnie ten kamień na równię?
- 6.6. Chłopiec o wzroście $h = 1,5 \text{ m}$, stojąc w odległości $l = 15 \text{ m}$ od płotu o wysokości $H = 5 \text{ m}$, rzucił kamien pod kątem $a = 45^\circ$ do Poziomu. Z jaką minimalną prędkością v_0 powinien rzucić kamień, aby przeleciał on przez płot?
- 6.7. Z wieży o wysokości $H = 3,48 \text{ m}$ pod kątem $\alpha_1 = 30^\circ$ do poziomu rzucono ku dołowi kamien z prędkością v_1 . Jednocześnie z powierzchni Ziemi pod kątem $\alpha_2 = 30^\circ$ do poziomu

- rzucono w stronę pierwszego drugi kamień z prędkością v_2 . W jakiej odległości L od podstawy wieży znajduje się miejsce wyrzucenia drugiego kamienia, jeżeli obydwa kamienie zderzyły się w powietrzu?
- 6.8. Kulę rzucono pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu z prędkością początkową $v_0 = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. W odległości $l = 11\text{m}$ od punktu wyrzucenia kulka sprężyście uderzyła w pionową ścianę. W jakiej odległości d od ściany kulka upadnie na ziemię?
- 6.9. Ciało rzucono z wysokości $H = 19,6\text{ m}$ poziomo z prędkością $v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ciało sprężyście uderzyło w ziemię, a następnie w pionową ścianę, znajdująca się w odległości $l = 40\text{ m}$ od miejsca wyrzucenia, mierzonej w kierunku poziomym. Oblicz maksymalną wysokość h , na którą wznieś sie ciało po uderzeniu w ścianę. W jakiej odległości d od ściany ciało upadnie na ziemię?
- 6.10. W górę po stoku o kącie nachylenia do poziomu $\beta = 30^\circ$ jadą z taką samą prędkością $v = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ samochód ciężarowy i za nim samochód osobowy. Oblicz, w jakiej minimalnej odległości d od ciężarówki powinien jechać samochód osobowy, aby kamień, który utknął chwilowo między tylnymi podwójnymi kołami ciężarówki, po oderwaniu się od kół, nie uderzył w nadjeżdżający samochód.

7. Jak rozwiążujesz zadania dotyczące zasad dynamiki Newtona?

Autor: Do rozwiązywania zadań tak zwanych „dynamicznych” szczególnie ważna jest umiejętność poprawnego określania sił, przyłożonych do ciała (par. 3).

Czytelnik: W związku z tym chcę zadać jedno pytanie. Założmy, że poprawnie określiłem wszystkie siły przyłożone do ciała. Co powiniem zrobić dalej?

Autor: Jeżeli wektory sił nie są skierowane wzdłuż jednej prostej

należy je rozłożyć na dwie wzajemnie prostopadłe składowe i wziąć pod uwagę składowe sił oddzielnie dla każdego z tych kierunków, które będziemy nazywać „kierunkami rozkładania”. Przy tym od razu pragnę dać kilka praktycznych rad. Po pierwsze, aby się nie domylić przy rozkładaniu sił, należy przedstawić je na rysunku w dużej skali, aby były dobrze czytelne. Zwykle uczniowie starają się przedstawić siły za pomocą bardzo mikroskopijnych strzałek. Porównaj w związku z tym twój rysunek (rys. 3.2) z moim rysunkiem (rys. 3.3). Po drugie, nie spiesz się i nie rozkładaj wektorów przedwcześnie. Najpiękniej należałoby określić wszystkie siły przyłożone do ciała i przedstawić je na rysunku. Dopiero potem można przystępować do ich rozkładania. Po trzecie, pamiętaj, że po rozłożeniu siły musisz dokładnie „zapomnieć” o jej istnieniu i od tej pory zamiast niej posługiwać się wyłącznie jej składowymi. Albo sama siła, albo jej składowe.

Czytelnik: A na jakiej zasadzie wybiera się kierunki rozkładania?

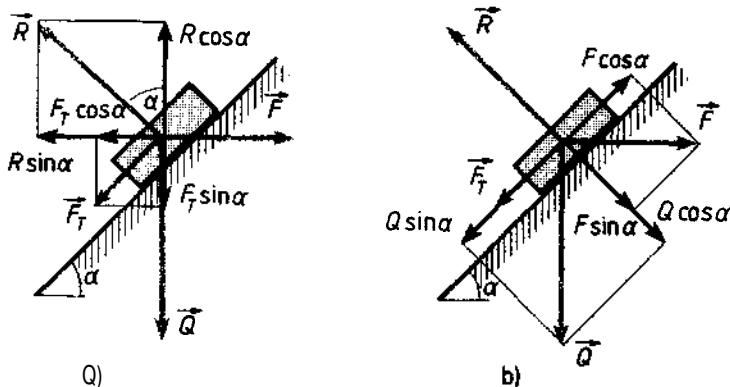
Autor:

Wybierając kierunki rozkładania sił, trzeba zwrócić uwagę na charakter ruchu ciała.

Możliwe są dwa warianty: 1) ciało spoczywa albo porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym; 2) ciało porusza się z przyspieszeniem, przy czym kierunek przyspieszenia jest znany (przynajmniej z dokładnością do znaku). W pierwszym wypadku można wybrać kierunki rozkładania dowolnie, kierując się (albo nie kierując się) względami praktycznej wygody. Weźmy pod uwagę następujące zadanie.

Zadanie 7.1. Ciało, pod której działaniem ciało, znajdujące się na równi jednostajnie przemieszczać się do góry (rys. 3.4). Wykres zakresu tarcia poślizgowego μ i kąta α są znane.

Rozwiązuje to zadanie, z jednakowym powodzeniem można wybrać kierunki rozkładania pionowy i poziomy (rys. 7.1a), jak również kierunki rozkładania wzdłuż równi i prostopadły do niej (rys. 7.1b). Po rozłożeniu sił trzeba przyrównać do zera algebraiczne sumy sił składowych dla każdego z kierunków rozkładania. Otrzymujemy układy równań odpowiednio dla przykładów przedstawionych na rysunku 7.1a, b:



Rys. 7.1

$$\begin{cases} R\cos\alpha - F_T\sin\alpha - Q = 0, \\ F - F_T\cos\alpha - R\sin\alpha = 0; \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\begin{cases} R - Q\cos\alpha - F\sin\alpha = 0, \\ F_T + Q\sin\alpha - F\cos\alpha = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Czytelnik: Te układy równań różnią się od siebie.

Autor: Ale doprowadzają do jednakowych wyników. Biorąc pod uwagę, że $F_T = \mu F_N = \mu R$ [p. (3.1)], znajdujemy

$$\begin{cases} R(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - Q = 0, \\ F - R(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) = 0. \end{cases}$$

Z pierwszego równania tego układu znajdujemy

$$R = \frac{Q}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}.$$

Podstawiając ten wynik do drugiego równania, otrzymujemy odpowiedź:

$$F = \frac{Q(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}.$$

Dokładnie taką samą odpowiedź uzyskuje się z równań (7.2), o czym nietrudno przekonać się samodzielnie.

Czytelnik: A co robić, gdy ciało porusza się z przyspieszeniem?

Autor: W tym wypadku wybór kierunków rozkładania sił zależy od kierunku przyspieszenia ciała (kierunku wypadkowej wszystkich sił).

Należy rozkładać siły na kierunki zgodne z kierunkiem wektora przyspieszenia i prostopadłe do niego. Wtedy suma składowych sił skądownych, tzn. kierunku przyspieszenia, równa się zeru. Mówiąc inaczej, jedynie wektor przyspieszenia kierunku wektora przyspieszenia zgodnie z drugim zasadą dynamiki Newtona, jest równa ilorazem masy i przyspieszenia.

Wróćmy do zadania z ciałem na równi pochyłej i założymy, że ciało porusza się po równi z pewnym przyspieszeniem do góry. Zgodnie z poczynionymi uwagami, należy rozłożyć siły tak, jak w sytuacji przedstawionej na rysunku 7.1b. Przy tym w miejsce układu równań (7.2) będziemy mieć następujący układ równan ($Q = mg$):

$$\begin{cases} (R - mg\cos\alpha - F\sin\alpha) = 0, \\ [F\cos\alpha - F_T - mg\sin\alpha] = ma. \end{cases} \quad (7.3)$$

Wykorzystując dodatkowo wzór (3.1), wyznaczamy przyspieszenie ciała:

$$a = \frac{1}{m} [F\cos\alpha - (mg\cos\alpha + F\sin\alpha)\mu - mg\sin\alpha]. \quad (7.3a)$$

Czytelnik: Czy można, gdy występuje przyspieszenie, rozłożyć siły na kierunki inne niż kierunek wektora przyspieszenia i prostopadły do niego? O ile zrozumiałem z dokonanych przez Pana rozkładów, tego nie można robić?

Autor: W związku z twoim pytaniem powiniensem uściślić moje wyjaśnienia. Oczywiście, nawet wtedy, gdy występuje przyspieszenie, masz prawo rozkładać siły na dowolne dwa wzajemnie prostopadłe kierunki. Ale wówczas będziesz zmuszony rozłożyć nie tylko siły, lecz również wektor przyspieszenia. Przy takim sposobie rozkładania natrafisz na dodatkowe trudności. Aby ich uniknąć, rób tak, jak ci radziłem. Zawsze w zadaniu wiadomy jest kierunek przyspieszenia ciała (choćby tylko z dokładnością do znaku), a więc zaczynaj od tego kierunku. Osoby przystępujące do egzaminu wykazują brak umiejętności racjonalnego wyboru kierunku roz-

kładania sił, jest to jedną z przyczyn ich bezradności przy rozwiązywaniu bardziej czy mniej skomplikowanych zadań z dynamiki.

Czytelnik: Mówimy stale o rozkładaniu na dwa kierunki. Lecz, jak myślę, ogólnie biorąc trzeba chyba mówić o rozkładaniu na trzy wzajemnie prostopadłe kierunki? Przecież przestrzeń jest trójwymiarowa.

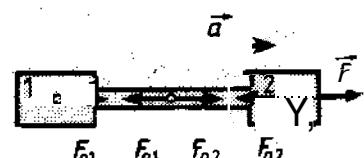
Autor: Masz absolutną rację. Dwa kierunki w naszych rozważaniach są uzasadnione tym, że rozpatrywaliśmy ruchy na płaszczyźnie. Na ogół należy rozkładać wektory na trzy kierunki. Przy tym wszystkie uwagi, zrobione powyżej, pozostają w mocy. Co prawda powinieneś wspomnieć, że zwykle na egzaminach spotyka się zadania dotyczące ruchów na płaszczyźnie. Chociaż, oczywiście, mogą wystąpić nieskomplikowane zadania dotyczące ruchów w przestrzeni (trójwymiarowej).

Czytelnik: Często spotyka się zadania, w których rozpatrywany jest ruch nie jednego, lecz kilku ciał, związkanych nieważką i nierozciągliwą nicią. W takich zadaniach wymagane jest znajdowanie przyspieszenia układu ciał, a także siły naprężenia tej nici (albo kilku, jeśli jest ich kilka). Jeśli dobrze zrozumiałem, na początku trzeba znaleźć wszystkie siły, które są przyłożone do każdego ciała z osobna.

Autor: Tak właśnie należy postąpić. Przy tym, naturalnie, do określonych ciał będzie przyłożona dodatkowa siła ze strony nici, zwana często siłą naprężenia nici, choć dokładniejsze byłoby nazwanie jej siłą reakcji nici. Jest to bowiem siła, która nić działa na ciało, a nie odwrotnie. Gdy mówi się o nici nieważkiej, to rozumie się przez to fakt, że masę nici można pominać i dlatego można uważać, że nić działa na obydwa ciała, które łączy, jednakowymi co do wartości siłami.

Czytelnik: Ja uważałem, że nić zawsze działa jednakową siłą na te ciała; do czego tu jest potrzebna masa nici?

Autor: Dla objaśnienia przeanalizujmy rysunek 7.2. Ciała 1 i 2 połączone są nicią o masie m . Dzięki występowaniu siły \vec{F} układ trzech ciał (obydwa ciała plus nić) porusza



Rys. 7.2

z pewnym przyspieszeniem zwróconym w prawo. Przyjmiemy, że nie ma tarcia i wszystkie siły, oprócz tych, które pokazano na rysunku, są zrównoważone. Ten rysunek przytaczam tylko po to, aby objąść pewną myśl. Widzimy, że nić działa na ciało 1 pewną siłą F i taką (co do wartości) siłą działa to ciało na nić. Na ciało 2 nić działa siłą F_{n2} ; taką samą (co do wartości) siłą ciało 2 działa na nić. Można napisać, że

$$ma = F_{n2} - F_{n1}.$$

Jeżeli pominie się masę nici ($m = 0$), to z przytoczonego powyżej równania wynika, że $F_{n1} = F_{n2}$.

Czytelnik: Teraz zrozumiałem Pana myśl.

Autor: Wobec tego wróćmy do zagadnienia, jak rozwiązywać zadania. Tak więc, określiłeś wszystkie siły przyłożone do każdego ciała z osobna. Co trzeba robić dalej?

Czytelnik: Z pewnością należy, wykorzystując drugą zasadę dynamiki Newtona, ułożyć równania ruchu dla wszystkich ciał.

Autor: I, oprócz tego, trzeba uwzględnić kierunek przyspieszenia każdego ciała i fakt, że wartość przyspieszenia dla każdego ciała w układzie jest taka sama.

Zapisz równania ruchu dla ciał przedstawionych na rysunku 3.6, dla ciała 3 spada.

Czytelnik: Skorzystam z rysunku 3.7, na którym już wskazaliśmy wszystkie siły przyłożone do ciał, przy czym kierunek siły tarcia akurat odpowiada ruchowi ciała 1 i 2 do góry wzdłuż równi pochyłej: dla ciała 1 ($Q_1 = m_1g$) mamy

$$\begin{cases} F_{n1} - m_1 g \sin \alpha - F_{t1} = m_1 a, \\ R_1 - m_1 g \cos \alpha = 0; \end{cases} \quad (7.4)$$

dla ciała 2 ($Q_2 = m_2g$)

$$\begin{cases} F_{n2} - F_{n1} - F_{t2} - m_2 g \sin \alpha = m_2 a, \\ R_2 - m_2 g \cos \alpha = 0; \end{cases} \quad (7.5)$$

dla ciała 3 ($Q_3 = m_3 g$)

$$m_3 g - F_{n2} = m_3 a. \quad (7.6)$$

Autor: Następnie uwzględniamy, że $F_{T1} = \mu R_1$, $F_{T2} = \mu R_2$ [p. (3.1)].

Wykorzystując te związki i układy (7.4) — (7.6), dochodzimy do układu równań:

$$\begin{cases} F_{n1} - m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha = m_1 a, \\ F_{n2} - F_{n1} - m_2 g \sin\alpha - \mu m_2 g \cos\alpha = m_2 a, \\ m_3 g - F_{n2} = m_3 a. \end{cases} \quad (7.7)$$

Dodając stronami równania układu (7.7), otrzymujemy przyspieszenie

$$a = g \frac{m_3 - (m_1 + m_2)(\sin\alpha + \mu \cos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (7.8)$$

Teraz znajdziemy siły naprężenia nici przez podstawienie (7.8) do (7.7):

$$F_{n2} = \frac{m_3(m_2 + m_1)(1 + \sin\alpha + \mu \cos\alpha)g}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$F_{n1} = \frac{m_1 m_3 (1 + \sin\alpha + \mu \cos\alpha)g}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Zadania

7.1. Po równi poziomej porusza się ciało o masie $m = 5$ kg pod działaniem siły $F = 30$ N, przyłożonej do ciała pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu.

Współczynnik tarcia poślizgowego $\mu = 0,2$. Oblicz prędkość v ciała po czasie $t = 10$ s od początku działania siły, a także pracę W , jaką wykonano działając przeciw sile tarcia w tym czasie.

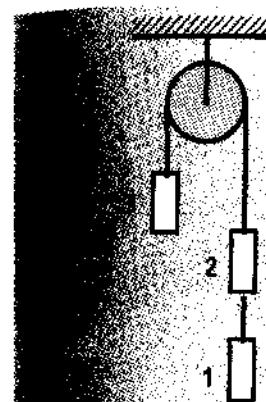
7.2. Człowiek ciągnie za pomocą sznurka, parę związkanych ze sobą sanek, przykładając do niego siłę $F = 120$ N pod kątem $\alpha = 45^\circ$ do poziomu (rys. 7.3). Masy sanek są jednakowe i równe $m = 15$ kg. Współ-



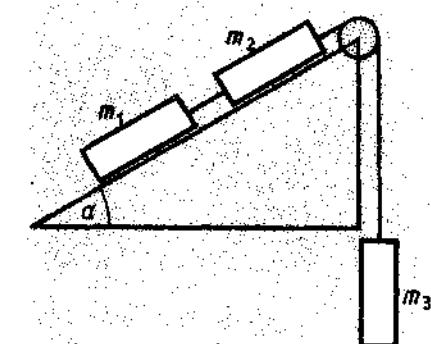
Rys. 7.3

czynnik tarcia płóz po śniegu $\mu = 0,02$. Oblicz przyspieszenie sanek i siłę naprężenia F_n sznurka łączącego sanki, a także siłę F_1 , którą człowiek powinien działać ciągnąc sznurek, aby sanki poruszały się jednostajnie.

7.3. Przez nieruchomy blok jest przerzucona nić, na której zawieszone są trzy obciążniki o masie $m = 2$ kg każdy (rys. 7.4). Oblicz przyspieszenie a układu i siłę naprężenia F_n nici, łączącej obciążniki 1 i 2.



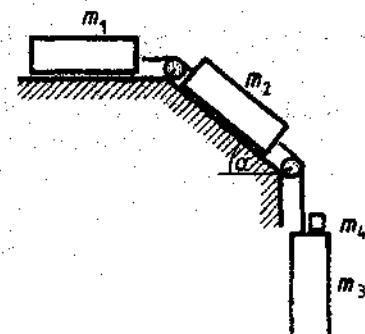
Rys. 7.4



Rys. 7.5

7.4. Oblicz przyspieszenie a obciążników i siły naprężenia nici w sytuacji przedstawionej na rysunku 7.5. Dane są: $m_1 = 4$ kg, $m_2 = 2$ kg, $m_3 = 8$ kg, a = 30° . Tarcie o równie pochyłą pominać.

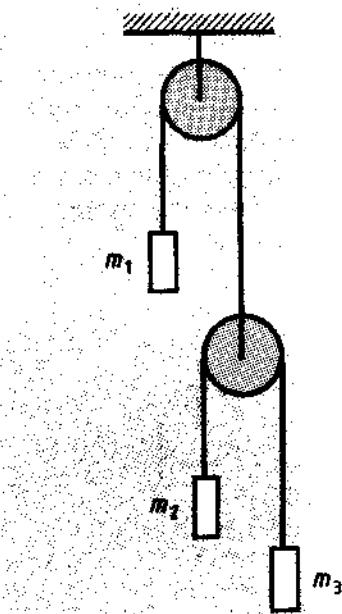
7.5. Dany jest układ obciążników przedstawiony na rysunku 7.6. Wiemy, że $m_1 = 1$ kg, $m_3 = 2$ kg, $m_2 = 5$ kg, $m_4 = 0,5$ kg. a = -30° . Współczynnik tarcia



Rys. 7.6

- obciążników o powierzchnię $\mu = 0,2$. Oblicz przyspieszenie a układu obciążników, siły naprężenia F_n nici i siłę F , którą obciążnik m_4 naciska na obciążnik m_3 .
- 7.6. Dany jest układ obciążników przedstawiony na rysunku 7.7. Wiadomo, że $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$, $m_3 = m$. Oblicz przyspieszenia a obciążników i siły naprężenia F_n nici.

Rys. 7.7



8. W jakim stopniu komplikuje się rozwiązywanie zadań po uwzględnieniu siły tarcia?

Autor: Uwzględnienie siły tarcia może bardzo mocno skomplikować rozwiązywanie zadań.

Czytelnik: Lecz przecież my już rozważaliśmy zagadnienie siły tarcia (par. 4). Jeżeli ciało się porusza, to siła tarcia jest określona przez siłę reakcji podłożu ($F_T = \mu R$); jeśli natomiast ciało spoczywa, to siła tarcia jest równa co do wartości tej sile, która dąży do wyprowadzenia ciała ze stanu spoczynku. Wszystko to nietrudno zrozumieć i zapamiętać.

Autor: Tak, to prawda. Nie wziąłeś jednak pod uwagę jednej bardzo ważnej okoliczności. Zakładasz, że z góry znane są odpowiedzi na pytania: 1) czy ciało się porusza, czy spoczywa; 2) w która stronę

ciało się przemieszcza. Jeżeli jest to z góry wiadome, to wtedy rzeczywiście wszystko jest względnie proste. Jeżeli jednak jest to niewiadome, wtedy od razu zadanie staje się skomplikowane i wymaga specjalnych dociekań.

Czytelnik: Tak, przypominam sobie. Mówiliśmy o tym w paragrafie 3 w związku z rozważaniem wyboru zwrotu siły tarcia.

Autor: Teraz chcę się zatrzymać na tym zagadnieniu i przeanalizować je bardziej szczegółowo. Uważam, że zarówno uczący się, jak i niektórzy autorzy zadari nie zdają sobie sprawy, jakie komplikacje w zadaniach z dynamiki może powodować. Uwzględnienie siły tarcia.

Rozpatrzmy przykład:

„Ciało porusza się po równi pochyłej (rys. 3.4). Dane są: kąt α między równą, siły \vec{Q} i f , współczynnik tarcia poślizgowego μ . W rozważeniu będziemy zakładać, że $\mu_0 = \mu$ (tutaj μ_0 – współczynnik określający maksymalną możliwą siłę tarcia spoczynkowego). Należy wyjaśnić charakter ruchu ciała i znaleźć przy-

Załóżmy, że ciało porusza się po równi pochyłej ku górze. Rozłożymy wszystkie siły na kierunki równoległy do równi oraz prostopadły do niej (rys. 7.1b) i wykorzystajmy otrzymany w paragrafie 7 wynik (7.3a) na przyspieszenie:

$$a = \frac{F \cos \alpha - Q \sin \alpha - (Q \cos \alpha + F \sin \alpha) \mu}{\mu} \quad (8.1)$$

Z (8.1) wynika, że aby ciało mogło poruszać się po równi pochyłej do góry, musi być spełniony warunek:

$$F \cos \alpha - Q \sin \alpha - (Q \cos \alpha + F \sin \alpha) \mu \geq 0.$$

Zapiszmy ten warunek w innej postaci

$$F \geq Q \frac{\mu \cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

albo

$$F \geq Q \frac{\mu + \tan \alpha}{1 - \mu \tan \alpha} \quad (8.2)$$

Ponadto założymy, że kąt nachylenia równy nie jest zbyt wielki, lecz taki, by zachodził warunek $(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) > 0$ albo

$$\operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{\mu}. \quad (8.3)$$

Następnie przyjmujemy, że ciało porusza się po równi pochyłej ku dołowi. Teraz rozłożymy wszystkie siły zgodnie ze schematem na rysunku 7.1b, ale siłę tarcia zwrócimy w przeciwną stronę. W rezultacie otrzymujemy następujący wzór na przyspieszenie:

$$a = [Q \sin \alpha - F \cos \alpha - (Q \cos \alpha + F \sin \alpha) \mu]. \quad (8.4)$$

Z (8.4) wynika, że aby ciało mogło się poruszać po równi pochyłej do dołu, musi być spełniony warunek:

$$Q \sin \alpha - F \cos \alpha - (Q \cos \alpha + F \sin \alpha) \mu \geq 0.$$

Zapiszemy ten warunek w innej postaci:

$$F \leq Q \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

albo

$$F \leq Q \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}. \quad (8.5)$$

Przy tym założymy, że kąt nachylenia równy nie jest zbyt mały, lecz taki, by zachodził warunek $(\operatorname{tg} \alpha - \mu) > 0$ albo

$$\operatorname{tg} \alpha > \mu. \quad (8.6)$$

Biorąc pod uwagę wszystkie warunki wyrażone nierównościami (8.2), (8.3), (8.5), (8.6), można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Gdy dla danego zadania będzie spełniony warunek

$$\mu < \operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{\mu},$$

wtedy

a) jeśli $F > Q \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}$, to ciało porusza się do góry z przyspieszeniem (8.1);

b) jeśli $F = Q \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}$, to ciało porusza się do góry ruchem jednostajnym albo spoczywa;

c) jeśli $F < Q \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}$, to ciało porusza się do dołu z przyspieszeniem (8.4);

d) jeśli $F = Q \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}$, to ciało porusza się do dołu ruchem jednostajnym albo spoczywa;

e) jeśli $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} < F < Q \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}$, to ciało spoczywa.

Zwracam uwagę, że ze wzrostem siły F od $Q \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}$ do $Q \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}$ siła tarcia spoczynkowego stopniowo maleje od $\mu(Q \cos \alpha + F \sin \alpha)$ do zera i następnie, zmieniwszy zwrot na przeciwny, wzrasta od zera do $\mu(Q \cos \alpha + F \sin \alpha)$. Przez cały czas, dopóki odbywa się ten proces, ciało znajduje się w spoczynku.

2. Gdy dla danego zadania będzie spełniony warunek

$$0 < \operatorname{tg} \alpha < \mu,$$

wtedy:

a) jeśli $F > Q \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}$, to ciało porusza się do góry z przyspieszeniem określonym równaniem (8.1);

b) jeśli $F = Q \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}$, to ciało porusza się do góry ruchem jednostajnym albo spoczywa;

c) jeśli $F < Q \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}$, to ciało spoczywa; ruch ciała po równi pochyłej do dołu jest w ogóle niemożliwy (nawet gdy siła F przyjmuje wartość zerową).

3. Gdy dla danego zadania jest spełniony warunek

$$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1}{\mu}.$$

wtedy

- a) jeśli $F < Q \frac{g\alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg}\alpha}$, to ciało porusza się w dół z przyspieszeniem określonym wzorem (8.4);
- b) jeśli $F = Q \frac{\operatorname{tg}\alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg}\alpha}$, to ciało porusza się w dół ruchem jednostajnym albo spoczywa;
- c) jeśli $F > Q \frac{g\alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg}\alpha}$, to ciało spoczywa; ruch ciała po równi pochyłej w góre jest w ogóle niemożliwy. W pierwszej chwili wydaje się to niezrozumiałe: przecież możemy zwiększać siłę F bez ograniczenia! Jednak w rozpatrywanej sytuacji nachylenie równi jest duże i, poczynając od pewnej wartości rosnącej siły F, klocek zostanie przyciśnięty do równi tak mocno, że się praktycznie do niej „przyklei”.

Czytelnik: Nigdy przedtem nie spotkałem się z podobnym wywodem.

Autor: Właśnie dlatego chciałem zwrócić na to zagadnienie twoją uwagę. Oczywiście na egzaminie raczej zetkniesz się z przykładami prostszymi: tarcia w ogóle nie ma albo tarcie występuje, ale z góry jest znany charakter ruchu ciała (na przykład wiadomo, że ciało spoczywa, czy też się porusza). Jednak, nawet nie pływając nad głębina, dobrze jest wiedzieć, gdzie ona jest.

Czytelnik: A co będzie, jeśli w dociekaniach przyjmie się $\mu = 0$?

Autor: Przy braku tarcia wszystko od razu się uprości. W tym wypadku dla dowolnego kąta nachylenia równi będziemy mieć wyniki:
a) przy $F > Q \operatorname{tg}\alpha$ ciało porusza się w górę z przyspieszeniem

$$a = \frac{g}{Q} (F \cos\alpha - Q \sin\alpha);$$

- b) przy $F = Q \operatorname{tg}\alpha$ ciało porusza się ruchem jednostajnym (w górę albo w dół) lub spoczywa;
- c) przy $F < Q \operatorname{tg}\alpha$ ciało porusza się w dół z przyspieszeniem

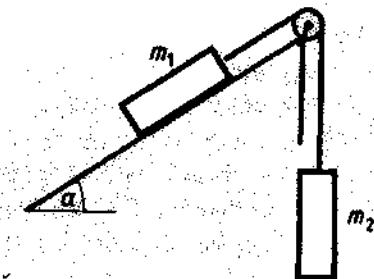
$$a = \frac{g}{Q} (Q \sin\alpha - F \cos\alpha). \quad (8.8)$$

Zwróci uwagę, że wyrażenia (8.7) i (8.8) są takie same z dokładnością do znaku. Dlatego rozwiązując zadanie, można spokojnie z góry założyć dowolny kierunek ruchu ciała, obliczyć przy-

spieszenie a i przyjrzeć się znakowi przyspieszenia. Jeżeli $a > 0$, to ruch zachodzi w wybranym kierunku, jeśli zaś $a < 0$, to ruch zachodzi w kierunku przeciwnym (i wtedy przyspieszenie jest równe $|a|$). Rozwiążemy jeszcze jedno zadanie.

Ustalmy, że dwa ciała o masach m_1 i m_2 połączone nicią przerzuconą przez blok. Ciało o masie m_1 znajduje się na równi pochylej o kącie nachylenia α , współczynnik tarcia o równię pochyłą jest równy μ : (rys. 8.1). Znaleźć przyspieszenie układu.

Załóżmy, że układ porusza się w prawo. Rozpatrując ruch układu jako całości, znajdujemy następujące wyrażenie na jego przyspieszenie:



Rys. 8.1

$$a = g \frac{m_2 - m_1 \sin\alpha - \mu m_1 \cos\alpha}{m_1 + m_2}. \quad (8.9)$$

Przy założeniu, że układ porusza się w lewo, znajdziemy

$$a = g \frac{m_1 \sin\alpha - m_2 - \mu m_1 \cos\alpha}{m_1 + m_2}. \quad (8.10)$$

Przeprowadzimy analizę powyższych równań dla zadanych a i μ . W tym celu wprowadzimy nową zmienną p równą stosunkowi mas: $P = \frac{m_2}{m_1}$. Ze wzoru (8.9) wynika, że aby ruch odbywał się w prawo, konieczne jest spełnienie warunku:

$$p \geq \sin\alpha + \mu \cos\alpha.$$

Z wzoru (8.10) wynika, że dla ruchu układu w lewo konieczne jest spełnienie warunku:

$$p \leq \sin\alpha - \mu \cos\alpha.$$

Ponadto konieczne musi być spełniony dodatkowy warunek na kąt nachylenia równy, który nie może być zbyt mały: $\tan\alpha > \mu$.

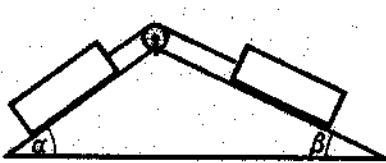
Jeśli zaś $\tan\alpha \leq \mu$, to niezależnie od wartości zmiennej p , układ nie będzie poruszał się w lewo.

Jeżeli $\tan\alpha > \mu$, to ciała spoczywają przy spełnieniu nierówności $\sin\alpha - \mu \cos\alpha < p < \sin\alpha + \mu \cos\alpha$.

Jeśli natomiast $\tan\alpha \leq \mu$, to ciała spoczywają dla $p < \sin\alpha + \mu \cos\alpha$.

Zadania

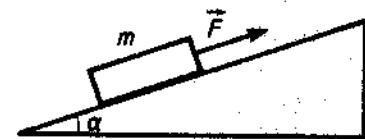
- 8.1. Dwa obciążniki o jednakowych masach są połączone nicią, przerzuconą przez nieważki blok. Płaszczyzny dwóch równi, na których znajdują się obciążniki, tworzą z poziomem kąty α i β (rys. 8.2). Znajdź przyspieszenie a obciążników i siłę naprężenia F_n nici. Współczynnik tarcia poślizgowego obciążników o obie równe jest jednakowy i równy μ . Dla jakiej wartości współczynnika tarcia μ_1 obciążniki będą znajdować się w spoczynku?



Rys. 8.2

- 8.2. Hamulec samochodu zatrzymuje go na zboczu góry o maksymalnym współczynniku nachylenia $k = 0,3$ (stosunek wysokości do podstawy zbocza wynosi 0,3). Oblicz drogę hamowania samochodu na poziomej drodze, jeśli przed rozpoczęciem hamowania poruszał się on z prędkością $v = 72 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Współczynnik tarcia poślizgowego na poziomej drodze jest mniejszy niż na zboczu góry i równy $n = 0,8$ tamtej wartości.
- 8.3. Na równej pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ znajduje się klocek o masie $m = 3 \text{ kg}$. Przyłożona jest do niego siła $F = 9,8 \text{ N}$, której kierunek pokazano na rysunku 8.3. Oblicz przyspieszenie a ruchu

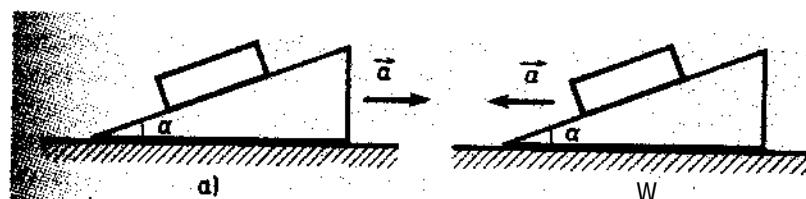
klocka i siłę tarcia F_T , jeśli Współczynnik tarcia poślizgowego klocka o równe ma wartość $\mu = 0,3$.



Rys. 8.3

- 8.4. Sanki można utrzymać na oblodzonej górze o współczynniku nachylenia 0,3 siłą nie mniejszą niż $F = 60 \text{ N}$, a zostawione same sobie ześlizgują się z przyspieszeniem $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Jaką siłę F_1 należy przyłożyć do sanek, aby poruszały się w góre ruchem jednostajnym? Zakłada się, że siły F i F_1 są skierowane równolegle do równej pochyłej.

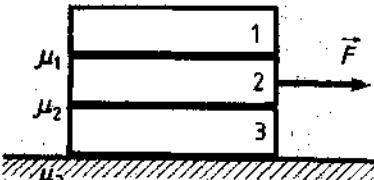
- 8.5. Niewielki klocek znajduje się na równej pochyłej o kącie nachylenia α . Współczynnik tarcia poślizgowego między klockiem i równią jest równy μ . Równia pochyła porusza się z przyspieszeniem a w kierunku pokazanym na rysunku 8.4 a,b. Przeanalizuj, przy jakim minimalnym przyspieszeniu klocekacznie się przesuwać po równi.



Rys. 8.4

- 8.6. Klocek o masie m_1 znajduje się na desce o masie m_2 , leżącej na równej poziomej. Współczynnik tarcia poślizgowego między klokiem i deską jest równy μ_1 , a między deską i równią μ_2 . Znajdź minimalną siłę F , działającą poziomo na deskę, pod wpływem której rozpoczyna się przemieszczanie klocka względem deski.
- 8.7. Trzy ciała, o jednakowych masach $m = 1 \text{ kg}$ znajdują się jedno na drugim (rys. 8.5). Współczynnik tarcia między ciałami 1 i 2 jest

równy $\mu_1 = 0,1$, a między ciałami 2 i 3 wynosi $\mu_2 = 0,2$. Współczynnik tarcia między podłogą i ciałem 3 jest równy $\mu_3 = 0,1$. Ciało 2 jest w kierunku pionowym ciągnięte pewną siłą F . Przy jakiej wartości siły możliwy jest taki ruch tych trzech ciał, w którym ciała 1 i 3 pozostają w spoczynku względem siebie? Oblicz przyspieszenia a_1 , a_2 i a_3 wszystkich trzech ciał w tym ruchu.



Rys. 8.5

9. Czy istnieje siła odśrodkowa?

Ruch po okręgu to najprostszy przykład ruchu krzywoliniowego, -an i ważne jest uświadomienie sobie istotnych cech tego ruchu. Wszak świat jest pełen ruchów krzywoliniowych!

Zajmiemy się jednak jednostajnym punktu materialnego po okręgu, jednak satelitów oraz przedyskutujemy przyczyny nieważkości ciał.

Autor: Doświadczenie uczy, że pytania i zadania, związane z ruchem ciała po okręgu, dla wielu osób przystępujących do egzaminu są zbyt trudne. W odpowiedziach pojawia się wiele charakterystycznych błędów. Aby to pokazać, poprosimy do udziału w naszej rozmowie jeszcze jednego czytelnika, który nie zna tego wszystkiego, o czym mówiliśmy do tej pory. Nazwiemy go umownie „Czytelnikiem B” (mojego poprzedniego rozmówcę będę nazywał teraz „Czytelnikiem A”).

Czytelnika B proszę, aby wskazał siły działające na sztucznego satelitę, poruszającego się wokół Ziemi. Umówimy się, że pominiemy opór atmosfery i przyciąganie Księżyca, Słońca i innych ciał niebieskich.

Czytelnik B: Na satelitę działają dwie siły: sila grawitacji ziemskiej (sila ciężkości) i sila odśrodkowa.

Autor: Przeciwko przyciąganiu Ziemi nie będę oponował. Ale poja-

wienie się siły odśrodkowej jest dla mnie niezrozumiałe. Proszę objaśnić.

Czytelnik B: Gdyby tej siły nie było, satelita nie mógłby utrzymać się na orbicie.

Autor: I coż by się z nim stało?

Czytelnik B: Upadłby na Ziemię.

Autor (zwracając się do Czytelnika A): Przypomnij sobie, co mówiłem wcześniej! Oto wspaniały przykład, gdy istnienie danej siły ktoś stara się wyprowadzić nie z oddziaływania ciał, lecz odwrotnie – z charakteru ruchu ciała. Według niego satelita ma się utrzymać na orbicie, a więc trzeba wprowadzić siłę „utrzymującą”. Przy okazji, gdyby ta siła odśrodkowa rzeczywiście istniała, to właśnie wtedy satelita nie mógłby się utrzymać na orbicie. Przecież wówczas siły działające na satelitę równoważyłyby się wzajemnie i satelita powinien poruszać się ruchem jednostajnym po linii prostej.

Czytelnik A: Siła odśrodkowa nigdy nie jest przyłożona do obracającego się ciała, tylko do więzów. A do obracającego się ciała jest przyłożona siła dośrodkowa.

Czytelnik B: Czy to znaczy, że do satelity jest przyłożony tylko ciężar?

Autor: Tak. Ale nie ciężar, a sila ciężkości.

Czytelnik B: I w tej sytuacji satelita nie spada na Ziemię?

Autor:

Ruch ciała pod działaniem siły ciężkości nazywa się spadaniem. A więc, satelita spada. Jednakże jego „spadanie” ma postać ruchu po okręgu wokół Ziemi i dlatego trwa nieograniczenie dugo. Omawialiśmy już ten fakt, że kierunki ruchu ciała i działającej na nie siły niekoniecznie muszą być takie same (par. 5).

Czytelnik B: Mówiąc o przyciąganiu Ziemi i sile odśrodkowej, wychodziłem ze wzoru

$$G \frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \quad (9.1)$$

w którym w lewej części równości występuje sila przyciągania (m – masa satelity, M – masa Ziemi, r – promień orbity mierzony od środka Ziemi, G – stała grawitacyjna), a w prawej części – sila odśrodkowa (v – prędkość satelity). Czyżby teraz się okazało, że ten wzór nie jest prawdziwy?

Autor: Nie, ten wzór jest słuszny. Niesłuszne jest twoje rozumienie wzoru. Ty rozpatrujesz związek (9.1) jako wyrażenie równowagi dwóch sił. Jednak w rzeczy samej jest to postać drugiej zasady dynamiki Newtona

$$F = ma,$$

gdzie $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$, natomiast $a = \frac{v^2}{r}$ jest przyspieszeniem dośrodkowym.

Czytelnik B: Zgadzam się, że powyższa interpretacja pozwala obejść się bez siły odśrodkowej. Ale jeśli już nie ma siły odśrodkowej, to powinna być przynajmniej siła dośrodkowa. Jednak o niej Pan nie wspomina.

Autor: W rozpatrywanej sytuacji siłą dośrodkową jest siła grawitacji wywierana na satelitę przez Ziemię. Podkreślam, że nie mówię tutaj o jakichś dwóch siłach. Nie. Jest to wyłącznie jedna siła.

Czytelnik B: W takim razie dlaczego w ogóle wprowadza się pojęcie siły dośrodkowej?

Autor: W tej właśnie sprawie zgadzam się z tobą. Myślę, że termin „siła dośrodkowa” nic nie daje, oprócz zbędnego zamętu w głowach.

To, co rozumie się przez siłę dośrodkową, w ogóle nie jest jakąkolwiek samodzielnią siłą przyłożoną do ciała obok innych sił. Jest to wypadkowa wszystkich sił przyłożonych do ciała, poruszającego się po okręgu ruchem jednostajnym.

Wielkość $\frac{mv^2}{r}$ nie jest siłą, lecz tylko iloczynem masy m ciała i przyspieszenia dośrodkowego $\frac{v^2}{r}$. To przyspieszenie jest skierowane ku środkowi okręgu, co oznacza, że również wypadkowa wszystkich sił przyłożonych do ciała poruszającego się po okręgu ruchem jednostajnym jest skierowana ku środkowi. Tak więc jeżeli występuje przyspieszenie dośrodkowe, to muszą istnieć siły, które nadają ciału to przyspieszenie.

Czytelnik B: Muszę się przyznać, że taki sposób rozpatrywania ruchu ciała po okręgu podoba mi się. Rzeczywiście siła działa wzdłuż promienia, występuje przyspieszenie dośrodkowe, ale ciało nie porusza się w kierunku środka okręgu. Jest to możliwe tylko

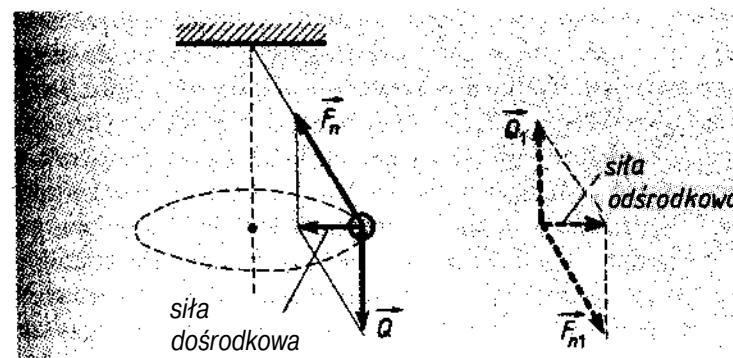
dla tego, że ciało ma prędkość skierowaną prostopadle do promienia.

Czytelnik A: Jeżeli zrezygnuje się z pojęcia siły dośrodkowej, to czy wtedy powinno się zrezygnować również z terminu „siła odśrodkowa” nawet w odniesieniu do więzów?

Autor: Wprowadzenie terminu „siła odśrodkowa” jest jeszcze mniej uzasadnione. Siła dośrodkowa mimo wszystko istnieje jako wypadkowa sił. Natomiast siła odśrodkowa nawet nie zawsze istnieje.

Czytelnik A: Ostatniej uwagi nie rozumiem. Siłę odśrodkową wprowadza się jako przeciwdziałanie w stosunku do siły dośrodkowej. Jeśli ona nie zawsze istnieje, to czym nie wynika stąd, że nie zawsze jest spełniona trzecia zasada dynamiki Newtona?

Autor: Trzecia zasada dynamiki Newtona jest spełniona tylko dla sił rzeczywistych, określanych przez oddziaływanie wzajemne ciał, lecz **wcale** nie dla wypadkowych tych sił. Wyjaśnię to stwierdzenie na przykładzie wahadła stożkowego (rys. 9.1). Na kulę działają



Rys. 9.1

dwie siły: siła ciężkości Q i siła reakcji F_n nici. Wektorowa suma tych sił decyduje o przyspieszeniu dośrodkowym kulki, i właśnie ona zwana jest siłą dośrodkową. Siła Q jest spowodowana wzajemnym oddziaływaniem kulki z Ziemią. Przeciwdziałaniem dla tej siły jest siła Q_1 , przyłożona do Ziemi. Siła F_n jest uwarunkowana wzajemnym oddziaływaniem kulki z nicią. Przeciwdziałaniem dla tej siły jest siła F_{n1} , przyłożona do nici. Jeżeli przeprowadzi się

formalne dodawanie sił \vec{Q}_1 i \vec{F}_{n1} , to uzyska się nową siłę, która przyjęło się nazywać siłą odśrodkową (linia przerywana na rys. 9.1). Ale do czego jest przyłożona ta siła? Czyż można mówić o niej jako o sile, jeżeli jedna z jej składowych jest przyłożona do Ziemi, a druga — do całkiem innego ciała, do nici? Jest zrozumiałe, że w danym wypadku pojęcie siły odśrodkowej nie ma fizycznego sensu.

Czytelnik A: A w jakich sytuacjach siła odśrodkowa istnieje?

Autor: Na przykład dla satelity, gdy oddziałują tylko dwa ciała: Ziemia i satelita. Siłą odśrodkową jest siła przyciągania satelity do Ziemi. Siłą odśrodkową jest siła przyciągania Ziemi przez satelitę.

Czytelnik B: Do tej pory mówiliśmy o jednostajnym ruchu po okręgu. A co będzie, gdy ciało porusza się po okręgu ruchem niejednostajnym? Na przykład, gdy ciało ześlizguje się ze szczytu pionowo postawionej obręczy. Dopóki ślizga się po obręczy, porusza się ono po okręgu. Jednak ruch ten jest wyraźnie niejednostajny, ponieważ prędkość ciała wzrasta. Jak z tym można sobie poradzić?

Autor: Stykaliśmy się z tym w paragrafie 1. Przypominam jeszcze raz podstawowe wnioski. Jeżeli ciało porusza się po okręgu ruchem jednostajnym, to wypadkowa wszystkich sił przyłożonych do niego jest skierowana ku środkowi okręgu — nadaje ona ciału przyspieszenie dośrodkowe.

Ogólnie biorąc, w ruchu niejednostajnym po okręgu wypadkowa siła nie jest już skierowana ku środkowi. Ma ona składowe, z których jedna jest skierowana wzdłuż promienia ku środkowi okręgu, a druga — wzdłuż stycznej do toru ciała (tj. do okręgu). Pierwsza składowa wyznacza przyspieszenie dośrodkowe ciała, związane z zmianą kierunku wektora prędkości; druga — określa przyspieszenie styczne (do okręgu), związane z zmianą wartości prędkości.

Trzeba podkreślić, że ponieważ w ruchu niejednostajnym po okręgu zmienia się wartość prędkości, to również powinna się zmieniać wartość przyspieszenia dośrodkowego $\frac{v^2}{r}$.

Czytelnik B: Czy to znaczy, że w każdej chwili przyspieszenie dośrodkowe jest określone wzorem

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r} \vec{R}$$

Autor: Całkiem słusznie. Jeżeli podczas jednostajnego ruchu po okręgu przyspieszenie dośrodkowe jest stałe co do wartości, to podczas niejednostajnego ruchu po okręgu zmienia się ono w czasie ruchu ciała.

Czytelnik A: Czym należy się kierować, chcąc się dowiedzieć, jak zmienia się prędkość w podczas niejednostajnego ruchu ciała po okręgu?

Autor: Zazwyczaj do tego celu stosuje się zasadę zachowania energii. Rozpatrzmy konkretny przykład.

Niech ciało o masie m ześlizguje się bez tarcia z wierzchołka pionowo ustawionej obręczy o promieniu r . Jaka siła będzie ono naciskać na obręcz, przechodząc przez punkt, którego wysokość jest mniejsza od wysokości wierzchołka obręczy o h ? Początkowa prędkość ciała na wierzchołku obręczy jest równa zero.

Przede wszystkim należy ustalić, jakie siły działają na ciało.

Czytelnik A: Na ciało działają dwie siły: siła ciężkości $\vec{Q} = mg$ i siła reakcji podłożu \vec{R} . Pokazano je na rysunku 9.2.

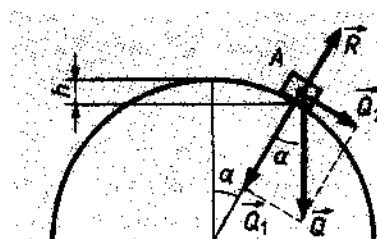
Autor: Słusznie. Co będziesz robił dalej?

Czytelnik A: Będę robił tak, jak Pan powiedział. Znajdę wypadkową tych sił i następnie rozłożę ją na składowe w kierunku wyznaczonym przez promień oraz styczną do okręgu.

Autor: Wszystko się zgadza. Jednak prościej byłoby nie szukać wypadkowej, a bezpośrednio rozłożyć przyłożone do ciała wektory sił na dwie składowe, tym bardziej że rozkładać trzeba będzie tylko jedna siłę — siłę ciężkości.

Czytelnik A: Wykonalem ten rozkład na rysunku 9.2.

Autor: Siła \vec{Q}_2 nadaje ciału przyspieszenie styczne, ona nas nie interesuje. Wypadkowa siła \vec{Q}_1 i \vec{R} nadaje ciału przyspieszenie dośrodkowe, tj.



Rys. 9.2

$$Q_1 - R = \frac{mv^2}{r}. \quad (9.2)$$

Prędkość ciała w interesującym nas punkcie (punkt A na rys. 9.2) znajdziemy z zasady zachowania energii:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}. \quad (9.3)$$

(Przyjęliśmy tutaj, że energia potencjalna w punkcie A jest równa零; par. 13).

Łącząc (9.2) i (9.3) i uwzględniając, że $Q_1 - mg \cos\alpha = mg \frac{r-h}{r}$, otrzymujemy

$$mg \frac{r-h}{r} - R = \frac{2mgh}{r}.$$

Poszukiwana siła nacisku ciała na obręcz jest równa sile reakcji podłoża, zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona:

$$R = mg \frac{r-3h}{r}. \quad (9.4)$$

Czytelnik B: W Pana rozważaniach zakłada się, że w punkcie A ciało wciąż jeszcze znajduje się na powierzchni obręczy. Ale przecież może się okazać, że oderwało się ono od obręczy, nie dochodząc do punktu A .

Autor: Można znaleźć punkt, w którym ciało powinno oderwać się od obręczy. Ten punkt odpowiada sytuacji granicznej, gdy siła nacisku $F_n = R$ ciała na obręcz zmalała do zera. Dlatego trzeba w równaniu (9.4) postawić $R = 0$ i następnie z uzyskanego w ten sposób równania znaleźć odległość, mierzoną wzdłuż linii pionowej, od najwyższego punktu obręczy do punktu oderwania się ciała:

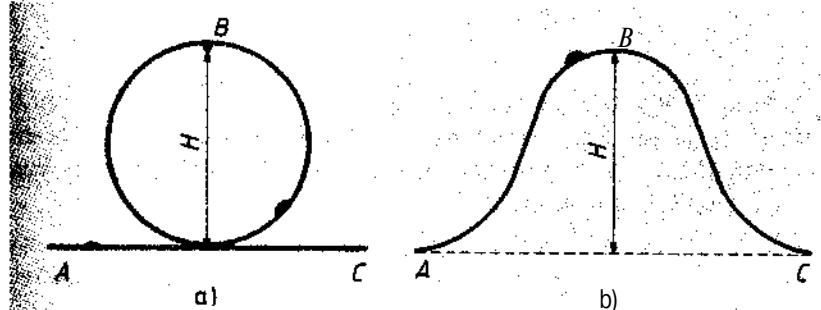
$$h_0 = \frac{r}{3}. \quad (9.5)$$

Jeżeli w tym zadaniu wartość h spełnia warunek $h < h_0$, to prawdziwy jest wynik (9.4); jeśli natomiast $h \geq h_0$, to $R = 0$.

Czytelnik A: Jeśli dobrze zrozumiałem, w zadaniu skorzystano z dwóch praw fizycznych (9.2) i (9.3).

Autor: Dobrze, że zwróciłeś na to uwagę. Rzeczywiście, w zadaniu wykorzystano dwa prawa: drugą zasadę dynamiki Newtona [p. (9.2)] i zasadę zachowania energii [p. (9.3)]. Niestety, osoby przystępujące do egzaminu nie zawsze dostatecznie jasno wypowiadają się, jakie prawa fizyczne mają zastosowanie przy rozwiązywaniu danego zadania. A jest to niezwykle ważne.
Przytoczę przykład.

Ciało nadaje się taką prędkością, aby mogło z punktu A dostać się do punktu B. Proponuje się dwa warianty drogi od A do B (rys. 9.3a, b). W obydwu sytuacjach ciało powinno pokonać taką samą wysokość H, ale za każdym razem inaczej. Znaleźć minimalną prędkość początkową v_0 dla obu wariantów. Tarcie można pominać.



Rys. 9.3

Czytelnik B: Myślę, że w obu wypadkach minimalna początkowa prędkość powinna być taka sama, przecież tarcia nie ma, a trzeba pokonać taką samą wysokość. Tę prędkość można obliczyć z zasady zachowania energii $mgH = \frac{mv_0^2}{2}$, skąd $v_0 = \sqrt{2gH}$.

Autor: Twoja wypowiedź jest zła. W pierwszym wypadku ciało w najwyższym punkcie będzie miało prędkość v_1 , odpowiadającą przyspieszeniu dośrodkowemu, które jest wywołane wypadkową siły ciężkości i siły reakcji podłoża. Ponieważ w zadaniu mamy do

czynienia z wyznaczeniem minimum, więc trzeba przyjąć, że w punkcie *B* nacisk na podłożu zanika, w takim razie również reakcja podłożu sprowadza się do zera. W tej sytuacji na ciało działa tylko siła ciężkości, która właśnie nadaje mu przyspieszenie dośrodkowe, tj.

$$mg = m \frac{v_1^2}{r}, \quad (9.6)$$

gdzie $r = \frac{H}{2}$.

Dołączając do równania dynamicznego (9.6) równanie energetyczne

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mgH, \quad (9.7)$$

otrzymujemy, że minimalna początkowa prędkość jest równa

$$v_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gH}.$$

W drugim wypadku ciało może przechodzić przez najwyższy punkt toru z prędkością **nieskończoność** bliską zeru, a więc można ograniczyć się do równania energetycznego. I wtedy przedstawiony przez ciebie wynik jest słuszny.

Czytelnik B: Zrozumiałem. Gdyby w pierwszym wypadku ciało nie miało prędkości w punkcie *B*, to po prostu spadłoby pionowo w dół.

Autor: Gdyby w pierwszym wypadku ciało miało początkową prędkość $v_0 = \sqrt{2gH}$, obliczoną przez ciebie, to nie doszłoby do punktu *B*, lecz oderwałoby się od podpory nieco wcześniej.

Proponuję znaleźć wysokość h punktu oderwania, pod warunkiem, że $v_0 = \sqrt{2gH}$.

Czytelnik A: Proszę pozwolić mi rozwiązać to zadanie.

Autor: Bardzo proszę.

Czytelnik A: W punkcie oderwania siła reakcji podłożu jest oczywiście równa zera. Dlatego w tym punkcie na ciało działa tylko siła

ciężkości $\vec{Q} = mg$. Rozłożymy ją na dwie składowe: skierowaną wzdłuż promienia ($mg \cos\alpha$) i prostopadłą do niego ($mg \sin\alpha$), jak pokazano na rysunku 9.4 (*A* — punkt oderwania). Składowa skierowana wzdłuż promienia nadaje ciału przyspieszenie dośrodkowe, dające się obliczyć z równania

Rys. 9.4

$$mg \cos\alpha = \frac{mv_2^2}{r}, \quad (9.8)$$

gdzie v_2 — prędkość ciała w punkcie *A*. Dla jej znalezienia wykorzystamy równanie energetyczne

$$\frac{mv_2^2}{2} + mv_2 H = \frac{mv_0^2}{2}. \quad (9.9)$$

Łącząc równania dynamiczne (9.8) i energetyczne (9.9) i uwzględniając, że $\cos\alpha = \frac{h-r}{r}$, otrzymujemy

$$mg(h-r) = mv_0^2 - 2mgh.$$

Stąd znajdujemy

$$h = \frac{2v_0^2 + gH}{6g}. \quad (9.10)$$

Podstawiając $v_0^2 = 2gH$ do (9.10), znajdziemy poszukiwany wynik:

$$h = \frac{5}{6}H.$$

Autor: Wszystko poprawnie. Zauważ tyleż, że korzystając z (9.10), można znaleźć taką początkową prędkość v_0 , która pozwoliłaby ciału opisać martwą pętlę. W tym celu trzeba w (9.10) przyjąć $h = H$, wtedy

$$H = \frac{7v_0^2 + 6H}{6g}.$$

stąd otrzymujemy znany nam już wynik:

$$v_0 = \sqrt{\frac{5}{2} g H}.$$

Czytelnik A: Warunek (9.10) otrzymano w sytuacji, gdy ciało odrywa się od podłoża. Jakie więc można stosować (9.10) do sytuacji, gdy ciało przebywa pętlę, nie odrywając się?

Autor: Oderwanie w najwyższym punkcie martwej pętli oznacza, że ciało faktycznie nie odrywa się i przebywszy ten punkt, kontynuuje ruch po okręgu.

Czytelnik B: Można powiedzieć, że ciało oderwało się jak gdyby na jedną chwilę.

Autor: Tak. Masz rację. Na zakończenie proponuję rozwiązać następujące zadanie.

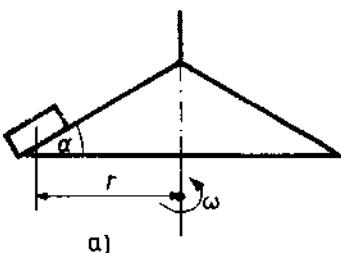
Na krawędzi równi pochyłej o kącie nachylenia α leży ciało. Równia obraca się jednostajnie wokół pionowej osi z prędkością kątową (ω). Odległość od ciała do osi obrotu równi jest równa r . Trzeba znaleźć najmniejszy współczynnik μ_0 (przypominam, że ten współczynnik charakteryzuje maksymalną z możliwych wartości siły tarcia spoczynkowego), przy którym ciało utrzymuje się na obracającej się równi pochyłej (rys. 9.5a).

Czytelnik A: Do ciała przyłożone są trzy siły: siła ciężkości \vec{Q} , siła reakcji podłoża \vec{R} i siła tarcia \vec{F}_T .

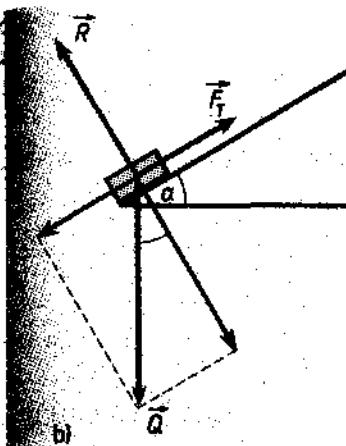
Autor: Poprawnie. Dobrze, że nie dodałeś do nich siły dośrodkowej. Co będziesz robił dalej?

Czytelnik A: Teraz rozłożę wektory sił na składowe o kierunkach równoległy do równi i prostopadły do niej (rys. 9.5b).

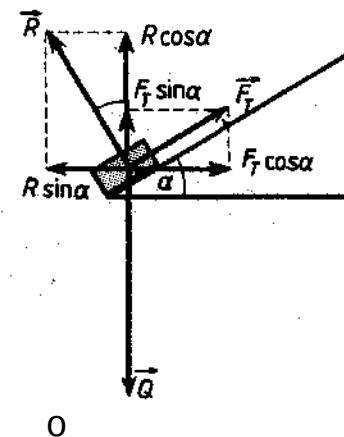
Autor: W tym miejscu cię powstrzymam. Nie podoba mi się twoje rozkładanie. Powiedz, jak jest skierowane przyspieszenie ciała?



Rys. 9.5 a



Rys. 9.5 b



O

Czytelnik A: Przyspieszenie jest skierowane poziomo, jest to przyspieszenie dośrodkowe.

Autor: Dobre. Dlatego należy rozkładać wektory sił na składowe o kierunku poziomym (tj. wzdłuż wektora przyspieszenia) i pionowym (tj. prostopadłym do wektora przyspieszenia). Przypomnij sobie, o czym rozmawialiśmy w paragrafie 7.

Czytelnik A: Zrozumiałem. Rozkładanie wektorów sił na składowe o kierunku poziomym i pionowym przedstawiono na rysunku 9.5c. Pionowe składowe sił równoważą się, a poziome składowe nadają ciału przyspieszenie dośrodkowe:

$$\begin{cases} R \cos \alpha + F_T \sin \alpha - 2 = 0, \\ F_T \cos \alpha - R \sin \alpha = \frac{mv^2}{r}. \end{cases}$$

Uwzględniając, że $F_T = \mu_0 R$, $\frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ i $Q = mg$, zapiszmy te związki w następującej postaci:

$$\begin{cases} (R \cos \alpha + \mu_0 \sin \alpha) = mg, \\ R(\mu_0 \cos \alpha - \sin \alpha) = m\omega^2 r. \end{cases}$$

Czytelnik B: Mamy tutaj tylko dwa równania, a trzy niewiadome: μ_0 , m , R .

Autor: Tym niemniej ten układ równani można rozwiązać. Przecież nie chcemy znaleźć wszystkich trzech niewiadomych, lecz tylko jedną — współczynnik μ_0 . Niewiadome m i R można łatwo wyeliminować, dzieląc stronami pierwsze równanie przez drugie.

Czytelnik A: Po wykonaniu dzielenia równani stronami otrzymujemy:

$$\frac{\cos\alpha + \mu_0 \sin\alpha}{\mu_0 \cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{g}{\omega^2 r}.$$

Stąd znajdujemy poszukiwany wynik:

$$\mu_0 = \frac{\omega^2 r \cos\alpha + g \sin\alpha}{g \cos\alpha - \omega^2 r \sin\alpha}. \quad (9.11)$$

Autor: Ze wzoru (9.11) widać, że powinien być spełniony warunek

$$(g \cos\alpha - \omega^2 r \sin\alpha) > 0,$$

który można zapisać w postaci

$$\operatorname{tg}\alpha < \frac{g}{\omega^2 r}. \quad (9.12)$$

Jeżeli warunek (9.12) nie jest spełniony, ciało na wirującej równi pochyłej nie może się utrzymać, niezależnie od wartości współczynnika tarcia.

Na zakończenie chcę zwrócić waszą uwagę na dwa szczególne przypadki wyniku (9.11). Pierwszy — gdy $\alpha = 0$: ciało znajduje się na poziomej wirującej tarczy. Wtedy z (9.11) otrzymujemy

$$\mu_0 = \frac{\omega^2 r}{g}.$$

Drugi przypadek szczególny, gdy $\omega = 0$: ciało znajduje się na nieruchomej równi pochyłej i lada moment zacznie zsuwać się w dół. Wtedy z (9.11) otrzymujemy

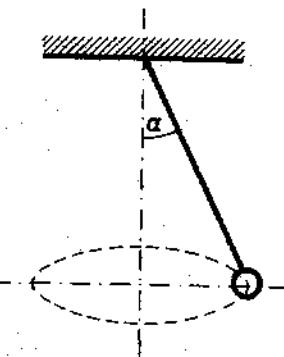
$$\mu_0 = \operatorname{tg}\alpha.$$

Czytelnik A: Ostatni wynik jest mi już znany. Jest to współczynnik tarcia poślizgowego ciała zsuwającego się z równi pochyłej ruchem jednostajnym*.

* Spostrzeжение czytelnika jest sformułowane mało precyzyjnie. Jeżeli współczynnik tarcia poślizgowego μ spełnia warunek $\mu = \operatorname{tg}\alpha$, to ciało może zsuwać się ruchem jednostajnym. Ale przecież współczynnik tarcia statycznego μ_0 , ma większą wartość niż współczynnik tarcia poślizgowego, tj. kinetycznego (przyp. tłum.).

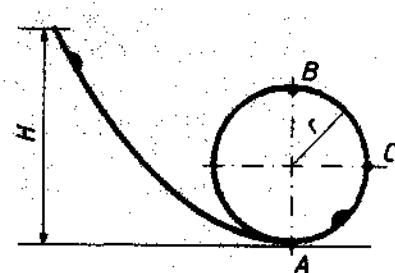
Zadania

- 9.1. Niewielkie ciało, zawieszone na nici, porusza się ruchem jednostajnym po okręgu w płaszczyźnie poziomej (rys. 9.6). Oblicz wartość ilorazu sił naprężenia nici oraz wartość ilorazu prędkości kątowych dla dwóch różnych wartości kąta: $\alpha_1 = 30^\circ$ i $\alpha_2 = 45^\circ$.



Rys. 9.6

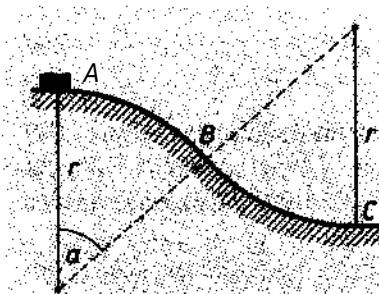
- 9.2. Ciało o masie m , zawieszone na nici o długości l , wychylono o 90° z położenia pionowego i puszczone. Znajdź zależność siły naprężenia nici i przyspieszenia ciała od kąta między kierunkiem nocy i pionem.
- 9.3. Oblicz stosunek sił, jakimi czołg naciska na środkowe części mostów wypukłego i wklęsłego. Promień krzywizny mostów w obu wypadkach jest równy $r = 40$ m, a prędkość czołgu $v = 45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
- 9.4. Ciało ześliszuje się bez tarcia z wysokości $H = 60$ cm i zakreśla pętlę o promieniu $r = 20$ cm (rys. 9.7). Znajdź stosunek sił, jakimi ciało naciska na podporę w punktach A , B , C .



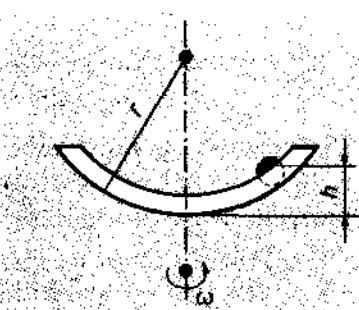
Rys. 9.7

- 9.5. Z jakiej minimalnej wysokości H (p. rys. 9.7) powinno ześliszać się ciało bez tarcia, aby obiegło martwą pętlę o promieniu $r = 30$ cm?

- 9.6. Ciało o masie m porusza się ze stałą prędkością v po drodze, której kształt w przekroju bocznym przedstawiono na rysunku 9.8 (promień krzywizny r). Znajdź siły nacisku ciała na podłożę w punktach A , B , C .
- 9.7. Ciało może poruszać się po okręgu w płaszczyźnie pionowej na nici o długości l . Jaka poziomo skierowaną prędkość v_0 trzeba nadać ciału w górnym położeniu, aby siła naprężenia nici w dolnym położeniu była $n = 10$ razy większa od siły ciężkości ciała?



Rys. 9.8

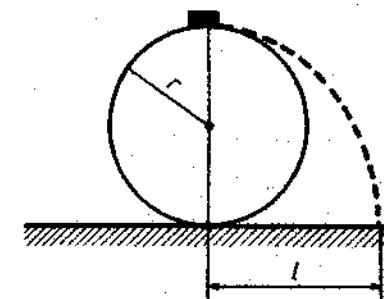


Rys. 9.9

- 9.8. Po rynience, wygiętej w postaci łuku okręgu o promieniu r , może bez tarcia ześlizgiwać się ciało o masie m . Na jakiej wysokości h będzie znajdować się to ciało, jeśli rynienka wiruje ruchem jednostajnym z prędkością kątową ω (rys. 9.9)? Jaka wartość ma siła nacisku F ciała na rynienkę?
- 9.9. Kulkę zawieszono na nici o długości l , zaczepionej na gwoździu wbitym w ścianę. Na linii pionowej przechodzącej przez punkt zaczepienia, w odległości $\frac{l}{2}$ od tego punktu, wbito w ścianę drugi gwoździek. Kulkę odchyłono tak, że nić przyjęła położenie poziome, i puszczeno. Określ wysokość h , na którą wzniśnie się kula.
- 9.10. Gumowy sznur, którego końce zostały połączone, swobodnie nałożono na krążek wirujący w płaszczyźnie pionowej wokół pionowej osi l częstotliwości $v = 20 \text{ Hz}$. Przyjmując, że sznu-

ułożył się w kształcie okręgu, oblicz siłę naprężenia F_n sznura. Masa sznura $m = 15 \text{ g}$, a jego długość $l = 60 \text{ cm}$.

- 9.11. Obręcz o promieniu r przymomocowano do podłogi w pozycji pionowej. Z wierzchołka obręczy ześlizguje się bez tarcia ciało (rys. 9.10). W jakiej odległości l od punktu umocowania obręczy upadnie to ciało?



Rys. 9.10

10. Jak objaśnisz nieważkość ciał?

Autor: Jak rozumiesz następujące wyrażenie: „Na równiku planety, na przykład Ziemi, ciało waży mniej niż na biegunie”?

Czytelnik B: Rozumiem to tak. Na równiku siła przyciągania przez Ziemię jest mniejsza niż na biegunie, co jest spowodowane dwiema przyczynami. Po pierwsze, Ziemia jest trochę spłaszczona przy biegunach i dlatego odległość od środka Ziemi do bieguna jest trochę mniejsza niż odległość od środka Ziemi do równika. Po drugie, Ziemia wiruje wokół osi, co powoduje, że siła przyciągania na równiku jest osłabiona z powodu efektu odśrodkowego.

Czytelnik A: Objaśnij, proszę, swoją ostatnią uwagę.

Czytelnik B: Od siły przyciągania należy odjąć siłę odśrodkową.

Czytelnik A: Nie zgadzam się z tobą. Po pierwsze, siła odśrodkowa nie jest przyłożona do ciała poruszającego się po okręgu, o czym już była mowa w paragrafie 9. Po wtóre, nawet gdyby ta siła istniała, nie przeszkodziłoby to sile przyciągania pozostać taką samą, jak przy braku wirowania Ziemi. Przecież siła przyciągania jest równa

$G \frac{Mm}{r^2}$ i jako taka nie zmienia się z tego powodu, że działają na ciało jakieś inne siły.

Autor: Jak widzicie, zagadnienie „ważkości ciał” nie jest takie proste.

Nie bez kozery należy do takich pytań, na które przystępujący do egzaminu dosyć często udzielają błędnych odpowiedzi. Rzeczywiście, jeśli umówimy się, że termin „ciężar ciała” będzie oznaczał siłę przyciągania ciała przez Ziemię, tj. siłę $G \frac{M m}{r^2}$, to „zmniejszenie ciężaru na równiku” należy wiązać tylko ze spłaszczeniem kuli ziemskiej przy biegunach.

Czytelnik B: Ale przecież nie wolno nie uwzględnić ruchu wirowego Ziemi.

Autor: Zgadzam się z tobą. Tylko na samym początku chcę podkreślić, że

zwykłe w praktyce przez pojęcie „ciężar ciała” rozumie się nie siłę przyciągania ciała przez Ziemię, ale byłoby zupełnie logiczne, lecz i siłę, która mierzy się za pomocą wagi sprężynowej, tj. siłę nacisku ciała na Ziemię. Mówiąc mniej, mierzy się siłą reakcji podłożu poziomego (siła nacisku ciała na podłoż i siła reakcji podłożu są równe, zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona).

Stąd wynika, że wyrażenie „ciąża na równiku waży mniej niż na biegunie” w istocie oznacza, że na równiku siła nacisku ciała na podłoż jest mniejsza niż na biegunie. Siłę grawitacji i siłę reakcji na biegunie oznaczmy odpowiednio Q_1 i R_1 , a na równiku — Q_2 i R_2 . Na biegunie ciało spoczywa, a na równiku porusza się po okręgu. Stąd otrzymujemy

$$Q_1 - R_1 = 0, \quad Q_2 - R_2 = ma_r,$$

gdzie a_r — przyspieszenie dośrodkowe. Zapiszmy te związki w innej postaci:

$$\begin{cases} R_1 = Q_1, \\ R_2 = Q_2 - ma_r. \end{cases} \quad (10.1)$$

Widać stąd wyraźnie, że siła R_2 jest mniejsza od siły R_1 , ponieważ po pierwsze, Q_2 ma mniejszą wartość niż Q_1 (efekt spłaszczenia Ziemi), i, po drugie, od Q_2 odejmuje się jeszcze ma_r (efekt wirowania Ziemi).

Czytelnik B: A więc, jak się wydaje, wyrażenie „ciąża straciło na ciężarze dwukrotnie” nie oznacza, że siła przyciągania tego ciała

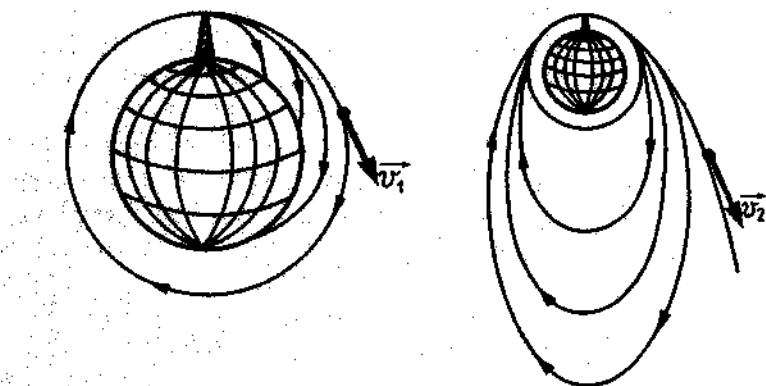
przez Ziemię (albo przez jakąkolwiek inną planetę) zmniejszyła się dwa razy?

Autor: Tak, nie oznacza. Siła przyciągania może w ogóle się nie zmieniać. To wyrażenie oznacza tylko, że dwukrotnie zmalała siła nacisku ciała na podłoż (a więc również siła reakcji podłożu).

Czytelnik B: W takim razie dochodzę do wniosku, że mogę dysponować „ciężkością” ciała całkiem dowolnie. Cóż mi przeszkaǳa wykopać pod ciałem głęboki dół? I niechaj ono razem z jego podporą tam wpada. W tej sytuacji nie będzie żadnego nacisku na podporę. Czy oznacza to, że ciało całkowicie „straciło ciężar”? Czy to znaczy, że znajduje się ono w stanie nieważkości?

Autor: Sam doszedłeś do słusznego wniosku. Rzeczywiście, stan nieważkości występuje w czasie swobodnego spadania ciał. W związku z tym mam kilka uwag. Miałem okazję zetknąć się z traktowaniem nieważkości jako stanu, w którym siła przyciągania przez Ziemię została zrównoważona jakąś inną siłą. Jako tę siłę równoważąca na przykład dla satelity uznawano siłę odśrodkową. Mówiono tak: siła przyciągania satelity przez Ziemię i siła odśrodkowa wzajemnie się równoważą; w wyniku tego wypadkowa sił przyłożonych do satelity jest równa zeru, co właśnie odpowiada nieważkości. Już rozumiecie oczywiście, że takie ujęcie jest niesłuszne, choćby z tego powodu, że na satelitę nie działa siła odśrodkowa. A tak przy okazji, jeśli rozumieć przez nieważkość stan, gdy siła przyciągania jest zrównoważona przez inną siłę, to wtedy jest bardziej logiczne nazwać nieważkim ciałem, które po prostu spoczywa na poziomej podstawie. Przecież wtedy siła ciężkości jest zrównoważona przez siłę reakcji podłożu! W rzeczy samej dla nieważkości nie jest wymagane żadne zrównoważenie siły przyciągania. Przeciwnie, aby ciało stało się nieważkie, trzeba stworzyć takie warunki, w których nie działałaby na nie żadna inna siła oprócz siły przyciągania. Innymi słowy, jest konieczne, aby reakcja podłożu była równa zeru. A właśnie ruch ciała pod działaniem siły przyciągania jest spadaniem ciała. Tak więc, nieważkość to na przykład spadanie windy w szybie albo jednostajny ruch satelity wokół Ziemi.

Czytelnik A: W paragrafie 9 już nadmieniono, że ruch satelity wokół Ziemi nie jest niczym innym, jak jego spadaniem na Ziemię, przeciagającym się nieograniczenie dugo.



Rys. 10.1

Autor: O tym, że ruch satelity wokół Ziemi jest spadaniem, można bardzo łatwo się przekonać w sposób następujący. Wyobraź sobie, że znajdujesz się na szczytce góry i rzucasz kamień w kierunku poziomym. Opór powietrza przy tym pominiemy. Im większa jest prędkość początkowa kamienia, tym dalej od podnóża góry upadnie. Na rysunku 10.1a pokazano, jak stopniowo zmienia się tor kamienia w miarę wzrostu prędkości początkowej. Przy pewnej prędkości v_1 tor spadającego kamienia przekształca się w okrąg i kamień staje się satelitą Ziemi.

Pięćdziesiąta prędkość v_1 jest zwana pierwszą prędkością kosmiczną. Jej wartość wyznacza się z zasady (9.1):

$$(10.2)$$

Jeżeli się przyjmie, że promień r orbity satelity jest w przybliżeniu równy promieniowi Ziemi, to wtedy $v_1 \approx 8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Czytelnik A: A co się stanie, jeśli w dalszym ciągu kamień będzie rzucany ze szczytu góry z coraz większą prędkością?

Autor: Wówczas kamień będzie poruszał się wokół Ziemi po coraz bardziej wydłużonej elipsie (rys. 10.1b). Przy pewnej prędkości r , tor kamienia przekształca się w parabolę i kamień przestaje być

satelitą Ziemi. Prędkość v_2 zwana jest drugą prędkością kosmiczną. Jak wykazują obliczenia, prędkość v_2 jest $\sqrt{2}$ razy większa od prędkości v_1 , a więc w przybliżeniu jest równa $11 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Czytelnik A: Określił Pan stan nieważkości jako stan spadania. Jednak gdy prędkość kamienia osiąga wartość równą drugiej prędkości kosmicznej, to kamień oddala się od Ziemi. Wówczas już nie można mówić, że spada on na Ziemię. Jak powinno się wtedy traktować nieważkość kamienia?

Autor: Bardzo prosto. Nieważkość w tym wypadku to spadanie kamienia na Słońce.

Czytelnik A: Czy to oznacza, że nieważkość statku kosmicznego, znajdującego się gdzieś w przestrzeni kosmicznej, należy traktować jako stan spadania tego statku w polu ciążenia ciał niebieskich?

Autor: Absolutna prawda.

Czytelnik B: Wciąż mi się jednak wydaje, że określenie nieważkości przez stan spadania wymaga jakiegoś uściślenia.

Autor: Masz rację. Nieważkość — to nie dowolne spadanie. Nieważkość — to spadanie swobodne, to ruch ciała pod działaniem tylko (!) siły grawitacji. Mówię już, że do tego, aby ciało stało się nieważkie, trzeba stworzyć warunki, w których na to ciało nie działałaby żadna inna siła oprócz siły grawitacji. Na przykład, w sytuacji spadania skoczka spadochronowego występuje dodatkowa siła — siła oporu powietrza.

Czytelnik A: Teraz jestem przekonany, że rozumiem, co to jest nieważkość.

Autor: Dla sprawdzenia zadam ci jedno pytanie. Pasażerowie pewnego statku kosmicznego proszą kapitana, aby stworzył stan nieważkości. Co powinien zrobić kapitan?

Czytelnik A: Myślę, że powinien wyłączyć silniki.

Autor: Zupełnie słusznie.

Czytelnik B: Lecz przepraszam. Niedawno czytałem powieść Juliusza Verne'a „Dookoła Księżyca”. Tam w ogóle nie było mowy o jakimkolwiek silniku. A mimo to podróżnicy przelecieli ponad połowę odległości od Ziemi do Księżyca, nie doznając nieważkości. Oni nawet zgadywali — lecimy czy nie lecimy?

Autor: Natknąłeś się na błąd pisarza. Swoją drogą, w tej powieści podobnych błędów jest sporo. Juliusz Verne nieprawdziwie wyo-

brażała sobie nieważkość. Na przykład błędnie sądził, że nieważkość jest stanem, w którym siła przyciągania ciała przez Ziemię jest zrównoważona siłą przyciągania tego ciała przez Księżyce. Dlatego przypuszczał, że podróżnicy powinni doświadczyć nieważkości tylko w pewnym punkcie między Ziemią i Księżycem. Nawiąsem mówiąc, samo wrażenie nieważkości opisał on dosyć poprawnie.

Czytelnik B: Podróżnicy Juliusza Verne'a powinni przez cały czas lotu znajdować się w stanie nieważkości.

Autor: Oczywiście.

Zadania

- 10.1. Oblicz gęstość p kulistej planety, jeżeli satelita porusza się wokół niej po orbicie kołowej w odległości od powierzchni planety równej połowie jej promienia. Okres obiegu satelity wynosi T .
- 10.2. Jak długo powinna trwać doba T na Ziemi, aby ciała na równiku nic nie ważyły? Promień Ziemi $r = 6400$ km.
- 10.3. Oblicz gęstość p kulistej planety, na której doba trwa $T = 10$ h, jeśli wiadomo, że ciała na równiku planety są nieważkie.
- 10.4. Dwa satelity poruszają się dookoła Ziemi po orbitach kołowych na wysokościach h_1 i h_2 od jej powierzchni. Oblicz stosunki prędkości ruchu $\frac{v_1}{v_2}$ i okresów obiegu $\frac{T_1}{T_2}$ satelitów. Promień Ziemi jest równy r .
- 10.5. Określ pierwszą prędkość kosmiczną dla planety, której masa i promień są trzykrotnie większe niż Ziemi.

11. Co wiesz o pracy?

Autor: Porozmawiamy o pracy jako o pewnym pojęciu fizycznym.

Czytelnik A: Mnie się wydaje, że nie ma tu o czym rozmawiać.

Przykro mi, ale nie rozumiem, co masz na myśli. Dla mnie praca to zmiana energii kinetycznej, kiedy coś porusza się po drodze.

i przemieszczenia są jednakowe. Jeżeli natomiast nie są jednakowe, trzeba skorzystać z ogólnego wzoru na pracę

$$W = (F \cos \alpha) s, \quad (11.1)$$

gdzie a — kąt między kierunkami wektorów siły i przemieszczenia, $F \cos \alpha$ — wartość rzutu siły F na prostą o kierunku zgodnym z przemieszczeniem ciała.

Autor: A jednak już w tym miejscu właśnie jest o czym porozmawiać. Zaczniemy od prostego przykładu.

Czytelnik A: W czasie t ciało przemieści się na odległość $s = \frac{at^2}{2}$, gdzie $a = \frac{s}{t^2}$. Stąd poszukiwana praca $W = Fs = \frac{Ft^2}{2m}$.

Autor (zwracając się do Czytelnika B): Czy masz jakieś uwagi dotyczące uzyskanego wyniku?

Czytelnik B: To wszystko wygląda poprawnie.

Autor: Wszystko wygląda poprawnie, jeśli przyjmiemy, że ciało było w spoczynku aż do chwili, gdy zaczęła działać na nie siła \vec{F} .

Czytelnik A: Ależ my jednak, że przed przyłożeniem siły ciało poruszało się z określonym jednostajnym prostoliniowym z pewną prędkością \vec{v}_0 . W takim kierunku wektora siły P będzie zgodny z kierunkiem wektora prędkości v_0 . Jaką pracę wykona sila \vec{F} w czasie t ?

Czytelnik A: Teraz $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ i, wobec tego,

$$W = F \left(v_0 t + \frac{at^2}{2} \right).$$

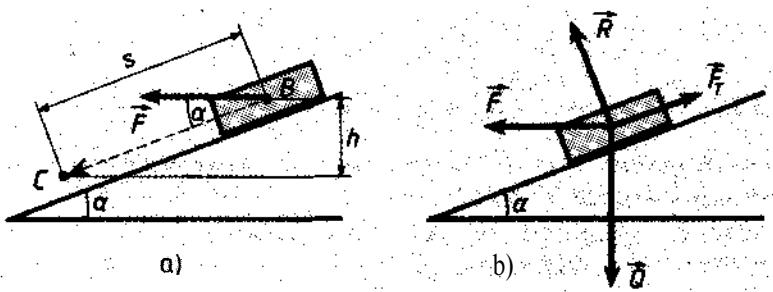
Czytelnik B: Doszliśmy do wniosku, że ta sama siła działająca na to samo ciało może wykonać w tym samym czasie różną pracę — w zależności od tego, jaka była początkowa prędkość ciała!

Autor: Tak właśnie wyszło.

Teraz odwołamy się do rysunku 11.1a.

Ciało o masie m ześlizguje się w dół po równi pochyłej o kącie nachylenia α . Współczynnik tarcia poślizgowego ciała o równię wynosi μ . Na ciało przez cały czas działa siła \vec{F} skierowana poziomo. Jaką pracę wykonała ta siła, jeśli ciało przemieszczyło się na odległość s (od punktu B do C) ?

Czytelnik A: Uwzględnimy wszystkie siły działające na ciało. Oprócz siły F działają na nie: siła ciężkości \vec{Q} , siła reakcji podłoża \vec{R} , siła tarcia \vec{F}_T (rys. 11.1b). Następnie znajdziemy wypadkową wszystkich sił...



Rys. 11.1

Autor (przerywając): Zatrzymaj się, proszę. Siły wskazałeś poprawnie, jednak po co nam to wszystko? Nas interesuje praca siły \vec{F} przy przemieszczeniu \vec{s} . Wystarczy posłużyć się wzorem (11.1), ponieważ znamy i siłę F , i wartość przemieszczenia s , i kąt między kierunkami siły i przemieszczenia.

Poszukiwana praca wynosi $W = F s \cos \alpha$. I to wszystko!

Czytelnik A (zakłopotany): Zmylił mnie zakorzeniony już nawyk wskazywania za każdym razem wszystkich sił przyłożonych do ciała. A ponadto podał Pan przecież i masę ciała. i współczynnik tarcia.

Autor: Nawyk, oczywiście, jest dobry. Jednak trzeba pamiętać, że każda siła ..pracuje na własny rachunek", niezależnie od innych sił

Skorzystamy z twojego rysunku (rys. 11.1b) i zbadamy pracę każdej z sił dla przemieszczenia s .

Czytelnik A: Już zrozumiałem.

Praca siły \vec{F} wynosi

$$W_1 = F \cos \alpha \cdot s.$$

Praca siły ciężkości \vec{Q} wynosi

$$W_2 = Q \cos (90^\circ - \alpha) \cdot s = mg \sin \alpha \cdot s.$$

Praca siły \vec{R} jest równa零, ponieważ jest ona prostopadła do wektora przemieszczenia ciała. Wreszcie praca siły tarcia \vec{F}_T wynosi

$$W_3 = F_T \cdot s - \mu R \cdot s = \mu mg \cos \alpha \cdot s.$$

Autor: Ale rzut siły tarcia na kierunek przemieszczenia ciała wynosi $-F_T$ (a nie $+F_T$), gdyż zwrot siły tarcia jest przeciwny do zwrotu przemieszczenia. Zatem,

$$W_3 = -\mu mg \cos \alpha \cdot s.$$

Pozostała część twojej odpowiedzi jest poprawna.

Czytelnik B: Jaki ma sens fakt, że praca siły działającej na ciało jest czasem ujemna?

Autor: To znaczy, że bezwzględna wartość pracy wykonanej przez daną siłę nie dodaje się do energii ciała, ale się od niej odejmuje. Inaczej mówiąc, okazuje się, że wynik działania takiej siły jest ujemny przy założeniu, że przyrost energii ciała jest wynikiem pracy sił przyłożonych do tego ciała. Właśnie teraz jest właściwa pora, abyśmy przećwiczyli stosowanie zasady zachowania energii, wykorzystując przykład pokazany na rysunku 11.1.

Czytelnik B: W naszym przykładzie siły wykonały całkowitą pracę, równą

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = F s \cos \alpha \cdot s + mg \sin \alpha \cdot s - \mu mg \cos \alpha \cdot s.$$

Oznaczmy przez E_B i E_C – energię ciała odpowiednio w punktach B i C. Wykorzystując zasadę zachowania energii, zapiszemy

$$E_B + W = E_C. \quad (11.2)$$

Autor: A co rozumiesz przez pojęcie energia E ciała znajdującego się w danym punkcie?

Czytelnik B: Sumę energii kinetycznej i potencjalnej. Energię ciała w punktach A i B mogę zapisać tak:

$$E_B = \frac{mv_B^2}{2} + E_{pB}; \quad E_C = \frac{mv_C^2}{2} + E_{pC},$$

gdzie v_B i v_C — predkości ciała odpowiednio w punktach B i C , natomiast $E_{pB} - E_{pC} = mgh$ — różnica energii potencjalnych ciała w punktach B i C . Tak więc wzór (11.2) mogę teraz zapisać w postaci

$$\frac{mv_B^2}{2} + E_{pB} + W = \frac{mv_C^2}{2} + E_{pC}. \quad (11.3)$$

Autor: Na pierwszy rzut oka wszystko jak gdyby wygląda dobrze. Jednak równanie (11.3), a więc również (11.2) jest fałszywe.

Czytelnik B: Dlaczego?

Autor: O tym łatwo się przekonać. Niech t oznacza czas ruchu ciała z punktu B do C . Wtedy $v_C = v_B + at$, $s = v_B t + \frac{at^2}{2}$. Eliminując z tych dwóch równan czas t , znajdujemy wynik znany z kinematyki ruchu jednostajnie przyspieszonego:

$$v_C^2 = v_B^2 + 2as. \quad (11.4)$$

Przyspieszenie a wyznaczmy, stosując drugą zasadę dynamiki Newtona:

$$F \cos \alpha + mgsina - \mu mg \cos \alpha = ma. \quad (11.5)$$

Podstawiając (11.5) do (11.4), znajdujemy

$$\frac{mv_C^2}{2} = \frac{mv_B^2}{2} + (F \cos \alpha + mgsina - \mu mg \cos \alpha) s. \quad (11.6)$$

Uwzględnawszy, że $(F \cos \alpha + mgsina - \mu mg \cos \alpha) s = W$, zapiszemy (11.6) w postaci

$$\frac{mv_B^2}{2} + W = \frac{mv_C^2}{2}. \quad (11.7)$$

Wynik (11.7) różni się od (11.3). Tym samym przekonaliśmy się, że wynik (11.3) jest błędny.

Czytelnik B: Jak to? A gdzież się podzieli energia potencjalna ciała
Autor: Ona nigdzie nie zniknęła. Rzeczn jest w tym, że zmiana energii

potencjalnej ciała w polu sił ciążenia jest związana z pracą siły ciężkości. Inaczej mówiąc, $W_2 = mg s \sin \alpha = mgh = E_{pB} - E_{pC}$. Uwzględniając to, zapiszemy (11.7) w postaci

$$\frac{mv_B^2}{2} + (E_{pB} - E_{pC}) + W_1 + W_3 = \frac{mv_C^2}{2}$$

albo jeszcze inaczej,

$$\frac{mv_B^2}{2} + E_{pB} + W_1 + W_3 = \frac{mv_C^2}{2} + E_{pC}. \quad (11.8)$$

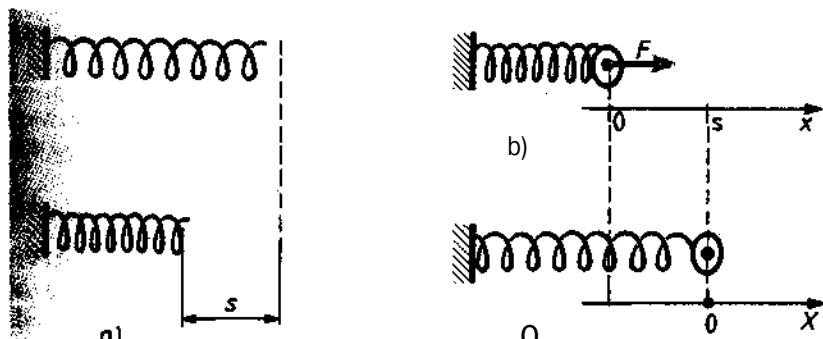
Czytelnik B: Już zrozumiałem swój błąd.

Autor: Zrobimy jeszcze jeden krok. Uwzględnimy fakt, że tarcie poślizgowe prowadzi do wydzielania ciepła. Bezwzględna wartość pracy siły tarcia jest równa ilości wydzielonego ciepła: $|W_3| = -W_3 = Q$. Tak więc zapiszemy w końcu:

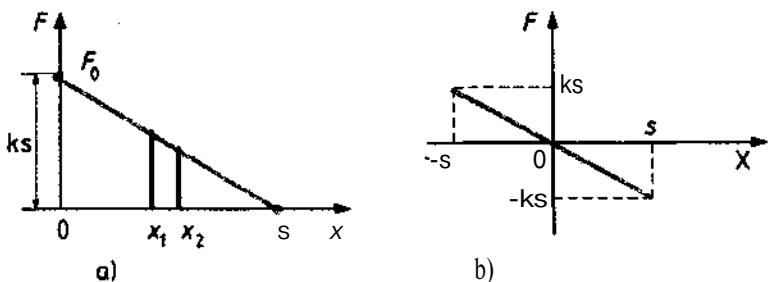
$$\frac{mv_B^2}{2} + E_{pB} + W_1 - Q = \frac{mv_C^2}{2} + E_{pC}. \quad (11.9)$$

Czytelnik B: Szczere powiedziawszy, rozmowa o pracy była bardzo pouczająca.

Autor: Na dodatek nie została jeszcze zakonczena. Dotychczas zakładaliśmy, że siła, której pracę rozpatrujemy, jest stała w czasie przemieszczania się ciała. Założymy teraz, że jest inaczej. Przypuszcmy, że elastyczna sprężyna została ściśnięta o odcinek s (rys. 11.2a).



Rys. 11.2



Rys. 11.3

Sprężyna będzie działać na pewne ciało siłą \vec{F} , zwaną siłą sprężystości. Pod wpływem tej siły ciało przemieszcza się, przy czym w miarę przemieszczania ciała siła sprężystości \vec{F} maleje i przyjmie wartość zerową, gdy ciało przemieści się na odległość s , a więc $x = s$. Wykres zmiany siły sprężystości w miarę rozprężania się ściśniętej sprężyny przedstawia rysunek 11.3a; F_0 to siła sprężystości sprężyny, odpowiadająca ściśnięciu jej o s . Przedstawiona na rysunku zależność $F(x)$ jest liniowa:

$$F = F_0 - \frac{F_0}{s}x$$

albo, w innej postaci,

$$F = F_0 - kx, \quad (11.10)$$

gdzie $k = \frac{F_0}{s}$ — współczynnik sprężystości, który charakteryzuje elastyczne właściwości sprężyny.

Czytelnik A: O ile dobrze sobie przypominam, zgodnie z prawem Hooke'a, siła sprężystości opisywana jest nieco innym wzorem

$$F = -kx. \quad (11.11)$$

Autor: Nie ma tu żadnego nieporozumienia. Wzór (11.11) otrzymuje się wtedy, gdy jako początek układu współrzędnych wybierze się położenie ciała nie takie, przy którym sprężyna jest ściśnięta, ale takie, przy którym jest ona zupełnie rozprężona (rys. 11.2c). Niech

$X = x - s$. Wykres zależności F od X pokazano na rysunku 11.3b. Przechodzimy od x do X ; w tym celu zapiszemy (11.10) w postaci

$$F = F_0 - k(X + s)$$

albo

$$F = ks - k(X + s)$$

albo w końcu

$$F = -kX.$$

Jak widzisz, doszliśmy do wyniku (11.11).

Czytelnik A: Rozumiem lewą część wykresu na rysunku 11.3b (dla $X \leq 0$); jest ona powtórzeniem rysunku 11.3a. A co oznacza prawa część ($X > 0$)?

Czytelnik B: Lewa część wykresu odpowiada ściśnięciu sprężyny, a prawa — rozciągnięciu. Jeżeli ciało znajduje się w punkcie $X = 0$, to w tym położeniu sprężyna nie jest ani ściśnięta, ani rozciągnięta.

Autor: Słusznie. A teraz wróćmy do rysunku 11.3a i zastanówmy się, jaką pracę wykoną siła F podczas przemieszczania ciała od $x = 0$ do $x = s$.

Czytelnik B: W każdym razie ta praca nie jest równa F_0s .

Autor: Istnieje ogólna zasada:

Załóżmy, że znamy zależność F od x . Praca siły F przy przemieszczaniu ciała z punktu $x = x_1$ do punktu $x = x_2$ jest równa polu (dokładniej: proporcjonalna do pola) pod wykresem $F(x)$ na odcinku (x_1, x_2) ; (zob. biały obszar na rysunku 11.3a).

Czytelnik B: Tak więc, praca siły F przy przemieszczaniu ciała od $x = 0$ do $x = s$ jest równa polu trójkąta prostokątnego pokazanego na rysunku 11.3a:

$$W = \frac{F_0s}{2} = \frac{ks^2}{2} \quad (11.12)$$

Autor: Jest to praca, którą wykonuje elastyczna sprężyna o współczynniku sprężystości k , ściśnięta początkowo o s . Teraz możemy sformułować końcowy wniosek: Skracając o X , poprzez ściskanie, elastyczną sprężynę mającą współczynnik sprężystości k , wykonujemy pracę równą $\frac{kX^2}{2}$; praca ta powoduje przyrost energii potencjalnej ściśniętej sprężyny.

Czytelnik A: We wszystkich tych rozważaniach nie braliśmy pod uwagę kąta między kierunkami wektorów siły i przemieszczenia.

Autor: W przykładzie ze sprężyną kąt ten jest równy zeru. Na ogół trzeba oczywiście brać pod uwagę rzut $F \cos \alpha$ siły F na kierunek przemieszczenia. Może na przykład się okazać, że w miarę przemieszczania ciała wartość siły pozostaje niezmienna, ale zmienia się jej kierunek, tj. zmienia się $\cos \alpha$. Zresztą takimi komplikacjami nie będziemy się zajmować.

Zadania

- 11.1. Oblicz pracę W , którą należy wykonać, aby postawić słup o masie $m = 50$ kg, podnosząc jeden z jego końców; położenie drugiego końca nie zmienia się. Wysokość słupa $h = 5$ m.
- 11.2. Oblicz, jaką pracę W trzeba wykonać, aby leżącą na podłodze linię o długości $l = 2$ m umieścić pionowo, podnosząc jeden z jej końców na wysokość równą długości liny. Masa liny $m = 2$ kg.
- 11.3. Sanki o masie $m = 20$ kg zjeżdżają z górką o wysokości $h = 2$ m i zatrzymują się na poziomej powierzchni. Oblicz pracę, którą należy wykonać, aby wciągnąć je z powrotem na górkę po tej samej drodze.
- 11.4. Jaką pracę W trzeba wykonać, aby ścisnąć sprężynę o $\Delta l = 2$ cm? Wiadomo, że siła $F_0 = 50$ N ściska tę sprężynę o $\Delta l_0 = 1$ cm.
- 11.5. Do zatrzymywania wagonów stosuje się zderzaki sprężynowe przymocowane do torowiska. Znajdź największe ściśnięcie s zderzaków i pracę W siły sprężystości, jeżeli wagon o masie $m = 2$ t, poruszający się z prędkością $v = \sqrt{\frac{m}{s}}$, uderza w dwa takie zderzaki. Wiadomo, że zderzak ulega ściśnięciu o $\Delta l = 4$ cm pod działaniem siły $F = 10^5$ N.
- 11.6. Chłopiec rzucił piłkę o masie $m = 0,3$ kg pionowo do góry. Oblicz pracę W , którą przy tym wykonał, jeżeli piłka była w powietrzu przez czas $t = 4$ s.
- 11.7. Znajdź pracę wszystkich sił działających na wahadło matematyczne w czasie równym jednemu okresowi drgań. Masy nici, rozciągliwości nici, a także oporu powietrza nie uwzględniaj.

12. Czym różni się moc chwilowa od mocy średniej?

Autor: Na to pytanie można odpowiedzieć bardzo krótko: Chwilowa moc różni się od średniej mocy tym samym, czym chwilowa prędkość różni się od prędkości średniej. Nie będziemy jednak się spieszyć i porozmawiamy o mocy bardziej szczegółowo. Tak więc, co to jest moc?

Czytelnik A: To praca, podzielona przez czas, w którym została wykonana.

Autor: Nie bardzo mi się podoba taka odpowiedź.

Czytelnik A: Pod jakim względem jest ona zła?

Autor: Czy tobie by się spodobało, gdybym na pytanie „Co to jest prędkość”, odpowiedział — to wielkość fizyczna, równa stosunkowi przemieszczenia do przedziału czasu, w którym ono nastąpiło?

Czytelnik A: Taka odpowiedź byłaby prawdziwa tylko dla ruchu ze stałą prędkością.

Autor: Twoja odpowiedź też jest prawdziwa tylko w takiej sytuacji, gdy podczas wykonywania pracy moc nie ulega zmianie. Aby lepiej to zrozumieć, rozpatrzmy pracę jako funkcję czasu. Oznaczmy: $W(t)$ — praca wykonana w czasie t ; $W(t + A?)$ — praca wykonana w czasie $t + \Delta t$; wtedy $\frac{W(t + \Delta t) - W(t)}{\Delta t}$ — średnia moc w przedziale czasu od t do $t + \Delta t$.

Granica ciągu wartości takich średnich moców dla $\Delta t \rightarrow 0$ jest mową chwilową, I¹ mocą w chwili t :

$$P_{\text{chwil}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W(t + \Delta t) - W(t)}{\Delta t} \quad (12.1)$$

Czytelnik A: Taki sam wzór stosowano do obliczenia chwilowej prędkości (1.2), tylko zamiast wykonanej pracy występowała tam przebyta droga.

Autor: Zauważłeś ważną analogię. Jest to analogia sposobu definiowania prędkości chwilowej do sposobu definiowania mocy chwilowej. Mówiłem o niej na początku paragrafu.

Czytelnik A: Teraz zrozumiałem, że wzór na moc

$$P = \frac{W}{t}, \quad (12.2)$$

gdzie W – praca wykonana w czasie t , powinien być pojmowany tak samo jak wzór $v = \frac{s}{t}$. Wzór (12.2) jest słuszny, gdy moc nie zmienia się w czasie.

Autor: Ten wzór można stosować również wtedy, gdy moc zmienia się w czasie. Ale wtedy wielkość $P = \frac{W}{t}$ powinna być traktowana jako średnia moc w przedziale czasu t .

A tak przy okazji, w jakich okolicznościach moc jest stała w czasie?

Czytelnik A: Kiedy bierze się pod uwagę pracę siły nie zmieniającej się w czasie.

Autor: Nie jest to cała prawda! Założmy, że siła jest stała w czasie i przy tym, dla uproszczenia, $\cos\alpha = 1$. Wykorzystując (11.1), zapiszemy (12.1) w postaci

$$P(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Fs(t + \Delta t) - Fs(t)}{\Delta t}. \quad (12.3)$$

Siła F nie zmienia się z upływem czasu i może być wyłączona poza symbol granicy, wtedy

$$P(t) = F \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = Fv.$$

Tak więc,

$$P(t) = Fv(t). \quad (12.4)$$

Stąd widać, że dla stałości mocy nie wystarcza stałość siły, trzeba aby nie zmieniała się również prędkość ciała.

Czytelnik A: Wzór (12.4) podoba mi się: wyraża on chwilową moc przez chwilową prędkość ciała. Czy można określić chwilową moc nie wzorem (12.1), a po prostu jako pochodną pracy względem czasu: $P(t) = \frac{dW}{dt}$.

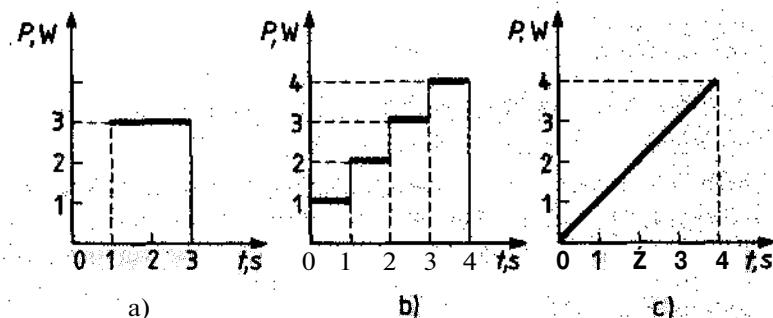
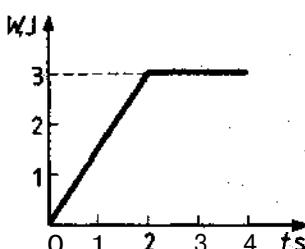
Autor: Oczywiście, można. W ten sposób uwzględnia się zależności o czasie wszystkich wielkości wchodzących do wzoru na pracę.

Zadania

- 12.1. Samochód osobowy porusza się po drodze poziomej z prędkością $v_1 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a pod góre po jej zboczu o współczynniku nachylenia 0,05 z prędkością $v_2 = 48 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz współczynnik tarcia μ , jeśli moc silnika jest stała.
- 12.2. Samochód o masie $m = 1000 \text{ kg}$ rusza z miejsca i jedzie pod góre po zboczu o współczynniku nachylenia 0,02. Samochód rozwinał prędkość $v = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ po przebyciu drogi $s = 20 \text{ m}$. Oblicz średnią moc samochodu, jeżeli współczynnik tarcia o drogę $\mu = 0,05$.
- 12.3. Winda o masie $m = 1 \text{ t}$ jest unoszona wzwyż ze stałym przyspieszeniem za pomocą wyciągu. Na pewnym odcinku drogi o długości $l = 1 \text{ m}$ winda poruszała się ze średnią prędkością $v_{\text{sr}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i wtedy jej prędkość wzrosła o $\Delta v = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz pracę W , którą wykonał wyciąg, i średnią moc P_{sr} na tym odcinku drogi, a także chwilową moc P na kohcu drogi.
- 12.4. Zjeżdżając z góry o współczynniku nachylenia 0,05 z wyłączonym silnikiem, samochód porusza się jednostajnie z prędkością $v = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz moc P silnika, przy której samochód mógłby jechać pod góre po zboczu o tym samym nachyleniu i z tą samą prędkością. Masa samochodu $m = 1,5 \text{ t}$.
- 12.5. Sanie motorowo-śmigłowe wznoszą się po zboczu góry o nachyleniu $a = 30^\circ$ ze stałą prędkością $v_1 = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Gdy zjeżdżają z góry, to przy tej samej mocy silnika ustala się prędkość $v_2 = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz prędkość v , z którą te sanie będą poruszały się po drodze poziomej, przy tej samej mocy silnika.
- 12.6. Na rysunku 12.1 przedstawiono zależność pracy W od czasu t , w którym ta praca została wykonana. Oblicz średnią moc P_{sr} :

- 1) w czasie pierwszych dwóch sekund; 2) w czasie pierwszych trzech sekund; 3) w czasie drugiej i trzeciej sekundy.

Rys. 12.1



Rys. 12.2

- 12.7. Na rysunku 12.2a—c dane są różne zależności mocy P od czasu t . Oblicz pracę wykonaną w każdym z trzech przykładów.

13. Czy umiesz stosować zasady zachowania energii i pędu?

Trudno przecenić znaczenie fizycznych zasad zachowania. Są to najbardziej ogólna prawa ustanowione przez człowieka na podstawie długotrwałych doświadczeń. Umiejętnie wykorzystanie zasad zachowania ułatwia rozwiązywanie wielu zadań. Tutaj pokażemy przykłady użycia zasad zachowania energii i pędu.

Autor: Teraz chcę ci zaproponować kilka dosyć skomplikowanych zadań.

Zadanie 1

Po dwóch równiach pochyłych o jednakowej wysokości h , ale o różnych kątach nachylenia α_1 i α_2 bez tarcia ześlizgują się ciała. Prędkość początkowe ciała są równe zero. Oblicz prędkości ciała na końcu drogi.

Zadanie 2

Wiadomo, że wzór, wyrażający koncową prędkość ciała za pomocą przyspieszenia i drogi: $v = \sqrt{2as}$, odnosi się do sytuacji, gdy nie ma prędkości początkowej. Jaka będzie postać podobnego wzoru, jeżeli ciało ma prędkość początkową v_0 ?

Zadanie 3

Z wysokości h wyrzucono ciało z poziomo skierowaną prędkością początkową v_0 . Wyznacz prędkość ciała w chwili lądowania.

Zadanie 4

Ciało wyrzucono pod kątem α do poziomu z prędkością początkową v_0 . Oblicz maksymalną wysokość wzniesienia się ciała.

Czytelnik A: Pierwsze zadanie będę rozwiązywał tak. Weźmy pod uwagę jedną równię pochyłą, na przykład o kącie nachylenia α_1 . Do ciała przyłożone są dwie siły: siła ciężkości \vec{Q} i siła reakcji podłoża R . Rozłożymy wektor siły \vec{Q} na składową równoległą do równi ($Q \sin \alpha_1$) i prostopadłą do niej ($Q \cos \alpha_1$). Ułożymy równania dla sił działających prostopadle do równi i dla sił działających równolegle do równi:

$$Q \cos \alpha_1 - R_1 = 0, \quad Q \sin \alpha_1 = \frac{Q a_1}{g},$$

gdzie a_1 – przyspieszenie ciała. Z drugiego równania znajdujemy $f_1 = g \sin \alpha_1$. Droga przebyta przez ciało jest równa $\frac{h}{\sin \alpha_1}$. Stosując wzór, o którym jest mowa w drugim zadaniu, otrzymujemy prędkość ciała na końcu drogi:

$$v_1 = \sqrt{2a_1 s_1} = \sqrt{2g \sin \alpha_1 \frac{h}{\sin \alpha_1}} = \sqrt{2gh}.$$

Ponieważ końcowy wynik nie zależy od kąta nachylenia, więc stosuje się on równie dobrze do ciała poruszającego się po drugiej równi o kącie nachylenia α_2 .

Z drugim zadaniem już się zetknęliśmy w paragrafie 11. W celu jego rozwiązania można skorzystać ze znanych kinematycznych związków:

$$v = v_0 + at, \quad s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Eliminując z nich czas, znajdujemy

$$v = \sqrt{2as + v_0^2}. \quad (13.1)$$

Aby rozwiązać tr/ecie zadanie, znajdę najpierw składowe wektora prędkości końcowej: poziomą v_1 i pionową v_2 . Ponieważ w kierunku poziomym ciało przemieszcza się jednostajnie, to $v_1 = v_0$. W kierunku pionowym ciało porusza się z przyspieszeniem g , przy tym bez prędkości początkowej. Dlatego można skorzystać z

znanego związku $v_2 = \sqrt{2gh}$. Stosując następnie twierdzenie Pitagorasa, uzyskujemy poszukiwany wynik:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{2gh + v_0^2}. \quad (13.2)$$

Czwarte zadanie już rozpatrywaliśmy w paragrafie 6. Należy rozłożyć wektor prędkości początkowej ciała na składowe: poziomą ($v_0 \cos \alpha$) i pionową ($v_0 \sin \alpha$). Potem trzeba zwrócić uwagę na pionowe przemieszczenie ciała i przede wszystkim wyznaczyć czas t_1 wznoszenia się ciała z wzoru określającego zależność prędkości od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym ($v = v_0 \sin \alpha - gt$); uwzględniając, że dla $v = t_1$ pionowa składowa prędkości przyjmuje wartość zerową. Tym sposobem uzyskujemy równanie

$$v_0 \sin \alpha - gt_1 = 0,$$

skąd

$$t_1 = \frac{v_0}{g} \sin \alpha.$$

Znając t_1 , znajdziemy poszukiwaną wysokość h z wzoru określającego zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym:

$$h = (v_0 \sin \alpha) \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Autor: We wszystkich czterech zadaniach uzyskałeś dobre odpowiedzi. Jednak nie bardzo podoba mi się metoda rozwiązywania tych zadań. Można je wszystkie rozwiązać prościej, jeżeli skorzysta się z zasady zachowania energii. Proponuję przekonać się o tym.

Zadanie 1. Zasada zachowania energii ma postać $mgh = \frac{mv^2}{2}$

(potencjalna energia ciała w najwyższym punkcie równi jest równa jego energii kinetycznej w punkcie najniższym). Stąd natychmiast znajdujemy prędkość ciała w najniższym punkcie równi:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Zadanie 2. Zasada zachowania energii ma postać

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = mas.$$

gdzie mas — praca siły nadającej ciału przyspieszenie a . Stąd otrzymujemy

$$v_0^2 + 2as = v^2,$$

lub w końcu

$$V = \sqrt{2as + v_0^2}.$$

Zadanie 3. Zasada zachowania energii

$$mgh + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

Stąd uzyskujemy poszukiwany wynik:

$$v = \sqrt{2gh + v_0^2}.$$

Zadanie 4. W punkcie wyrzucenia energia ciała jest równa

$$\frac{mv_0^2}{2}.$$

W najwyższym punkcie toru energia ciała wynosi

$$mgh + \frac{mv_1^2}{2}.$$

Ponieważ prędkość v_1 w najwyższym punkcie jest równa $v_0 \cos \alpha$, to stosując zasadę zachowania energii

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{2},$$

znajdujemy

$$h = \frac{v_0^2}{2g} (1 - \cos^2 \alpha),$$

skąd wynik końcowy

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Czytelnik A: Przekonałem się, że te zadania mogłem rozwiązać znacznie prościej. Wcześniej nie pomyślałem po prostu o zasadzie zachowania energii.

Autor: Niestety, egzaminowani dosyć często zapominają o tej zasadzie. W efekcie zaczynają rozwiązywać zadania bardziej uciążli

wymi sposobami, czego skutkiem jest zwiększenie prawdopodobieństwa błędu. Moja rada: Śmielej i szerzej wykorzystujcie zasadę zachowania energii. W związku z tym dobrze byłoby wyjaśnić, czy umiecie skutecznie posługiwać się tą zasadą.

Czytelnik A: Wydaje mi się, że żadna szczególna umiejętności nie jest tu potrzebna: zasada zachowania energii sama w sobie jest bardzo prosta.

Autor: Umiejętność posługiwania się zasadą nie jest określona jej prostotą albo złożonością. Rozważmy konkretny przykład.

Załóżmy, że ciało porusza się ruchem jednostajnym po okręgu w płaszczyźnie poziomej (na przykład rys. 5.2b). Nie występują jakiekolwiek siły tarcia. Wypadkowa siła ciężkości i reakcji nici jest skierowana ku środkowi okręgu. (Siła ta jest często zwana siłą dośrodkową). Jaka praca jest wykonywana podczas jednego obrotu?

Czytelnik A: Praca jest równa iloczynowi siły i drogi. To znaczy, w danej sytuacji, jest ona równa $\frac{mv^2}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi mv^2$, gdzie r — promień okręgu, m i v — odpowiednio masa i prędkość ciała.

Autor: Zgodnie z zasadą zachowania energii, praca nie może zniknąć bez śladu. Gdzież się podziała obliczona przez ciebie praca?

Czytelnik A: Ona zużywa się na obracanie ciała.

Autor: Nie rozumiem. Powiedz to dokładniej.

Czytelnik A: Na utrzymanie ciała na okręgu.

Autor: Twoje rozważania są błędne. Aby utrzymać ciało na okręgu nie trzeba wykonywać pracy.

Czytelnik A: W takim razie nie wiem, jak odpowiedzieć na to pytanie.

Autor:

Dostarczona ciału energia może rozdzielić się na następujące tak mówią fizycy „kanaly” 1) na zwiększenie energii kinetycznej ciała, 2) na zwiększenie energii potencjalnej ciała, 3) na pracę, której ciało wykonyuje nad innymi ciałami, 4) na ciepło, które wychodzi stąd w wyniku tarcia.

Nie wszyscy przystępujący do egzaminu uświadamiają to sobie dostatecznie wyraźnie. Teraz rozpatrzmy nasz konkretny przykład na pracę siły dośrodkowej. Ciało porusza się ze stałą co do wartości

prędkością, a więc jego energia kinetyczna nie zmienia się — pierwszy „kanał” zamknięty. Ciało porusza się w płaszczyźnie poziomej, a więc nie zmienia się jego energia potencjalna — drugi „kanał” zamknięty. Nad żadnymi ciałami dane ciało pracy nie wykonuje — trzeci „kanał” zamknięty. Ponadto, nie ma jakichkolwiek sił tarcia — czwarty „kanał” zamknięty.

Czytelnik A: Czyżby z tego wynikało, że praca siły dośrodkowej nie ma gdzie się podziać?

Autor: Tak, taki jest wniosek. Teraz pozostało ci tylko określić swoje stanowisko. Albo zgodzisz się, że zasada zachowania energii po prostu nie jest spełniona, i wtedy wszystkie zmartwienia stają się nieaktualne. Albo jesteś przekonany o słuszności zasad zachowania energii, i wtedy... Ale spróbuj samodzielnie wybrnąć z tej opresji.

Czytelnik A: Myślę, iż z tego przykładu można wyciągnąć tylko taki wniosek, że siła dośrodkowa nie wykonuje żadnej pracy.

Autor: Całkiem logiczny wniosek. Chcę szczególnie podkreślić, że wniosek ten wynika bezpośrednio / zasady zachowania energii.

Czytelnik A: A co w takim razie zrobić z wzorem na pracę?

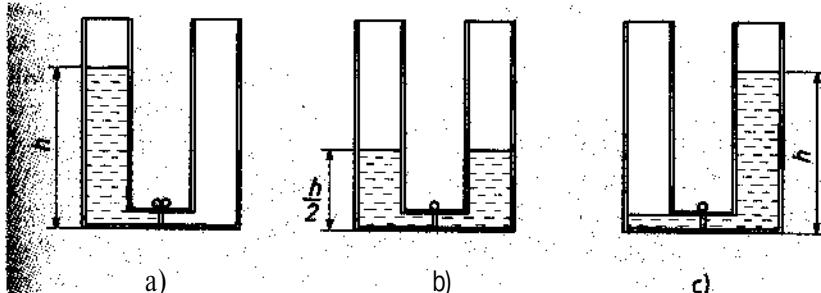
Autor: Do tego wzoru oprócz siły i drogi powinien wejść jeszcze cosinus kąta między kierunkami siły i prędkości [p. (11.1)]. W danym wypadku cosinus jest równy zeru.

Czytelnik A: Tak, tak. Całkiem zapomniałem o cosinusie.

Autor: Chcę zaproponować jeszcze jeden przykład.

Weźmy pod uwagę naczynia połączone, przy czym połączenie wykonane jest cienką rurką z kranem. Niech początkowo ciecz będzie w lewym naczyniu i jej poziom znajduje się na wysokości h (rys. 13.1a). Po otworzeniu kranu ciecz przepływa z lewego naczynia do prawego. Końcowy stan charakteryzuje się wyrównaniem poziomów w obu naczyniach na wysokość $\frac{h}{2}$ (rys. 13.1b). Obliczyć energię potencjalną cieczy w stanie początkowym i koncowym.

W tym celu pomnożymy siłę ciężkości cieczy w każdym naczyniu przez połowę wysokości słupa cieczy. Jeżeli w stanie początkowym



Rys. 13.1

energia potencjalna jest $\frac{Qh}{2}$, to w stanie koncowym jest ona równa

$\frac{Qh}{2} + \frac{Qh}{2} = \frac{Qh}{4}$. Wynika z tego, iż w stanie koncowym energia potencjalna cieczy jest dwa razy mniejsza niż w stanie początkowym. Dokąd, pytam, „wypłynęła” połowa energii?

Czytelnik A: Spróbuję rozumować tak, jak Pan zalecał. Energia potencjalna $\frac{Qh}{4}$ mogła przekształcić się w pracę cieczy nad innymi ciałami, w ciepło, wydzielające się podczas tarcia, i w energię kinetyczną samej cieczy. Czy rozumuję poprawnie?

Autor: Całkiem poprawnie. Proszę kontynuować.

Czytelnik A: W danym wypadku ciecz, przelewając się z jednego naczynia do drugiego, żadnej pracy nad ciałami zewnętrznymi nie wykonuje. Ciecz w stanie koncowym nie ma energii kinetycznej, ponieważ znajduje się w stanie spoczynku. Należy więc wnioskować, że połowa energii potencjalnej przekształciła się w ciepło, wydzielone w procesie tarcia. Prawdę mówiąc, niezbyt jasno wyobrażam sobie, co to za tarcie.

Autor: Rozumowałeś poprawnie i doszedłeś do prawdziwego wniosku. Teraz kilka słów o naturze tarcia. Można sobie wyobrazić, że ciecz jest podzielona na warstwy, z których każda charakteryzuje się określona prędkością przemieszczania się; im bliżej ścianek rurki znajduje się warstwa, tym mniejsza ma prędkość. Między warstwami zachodzi wymiana cząsteczek, w wyniku której cząsteczki o większej prędkości ruchu uporządkowanego trafiają do warstwy

o mniejszej prędkości uporządkowanego ruchu i odwrotnie. W efekcie „szybsza” warstwa wywiera działanie przyspieszające na „wolniejszą” warstwę, i odwrotnie, „wolniejsza” działa spowalniającą na „szybszą”. Przedstawiony obraz pozwala mówić o istnieniu w cieczy specyficznego wewnętrznego tarcia między warstwami. Przejawia się ono tym silniej, im większa jest różnica prędkości warstw w środkowej części rurki i w pobliżu jej ścianek. Zwracam uwagę, że na prędkość ruchu warstw w pobliżu ścianek rurki ma wpływ charakter wzajemnego oddziaływania cząsteczek cieczy i cząsteczek ścianek. Jeśli ciecz zwilża rurkę, wtedy warstwa bezpośrednio sąsiadująca ze ścianką praktycznie się nie porusza.

Czytelnik A: Czy to oznacza, że w końcowym stanie temperatura cieczy powinna być nieco wyższa niż w stanie początkowym?

Autor: Tak, właśnie tak. A teraz zmieńmy trochę treść zadania.

Załóżmy, że między cieczą i ściankami rurki nie ma żadnego oddziaływania, w wyniku czego wszystkie warstwy mają jednakową prędkość i tarcie wewnętrzne nie istnieje. Jak będzie wówczas przebiegał proces przepływu cieczy z jednego naczynia do drugiego?

Czytelnik A: W tym wypadku zmniejszenie energii potencjalnej należy tłumaczyć pojawiением się energii kinetycznej cieczy. Innymi słowy, w sytuacji przedstawionej na rysunku 13.1b ciecz nie znajduje się w stanie spoczynku, lecz w dalszym ciągu przepływa z lewego naczynia do prawego, dopóki nie powstanie sytuacja przedstawiona na rysunku 13.1c. W tym wypadku energia potencjalna cieczy jest taka sama jak w sytuacji wyjściowej (rys. 13.1a).

Autor: Co się będzie działo z cieczą później?

Czytelnik A: Ciecz zacznie przepływać w odwrotną stronę — z prawego naczynia do lewego. W wyniku tego wystąpią drgania cieczy w naczyniach połączonych.

Autor: Te drgania można obserwować, jeżeli na przykład wleje się do szklanych naczyń połączonych rtęć. Jak wiadomo, rtęć nie zwilża szkła. Jest zrozumiałe, że w miarę upływu czasu te drgania będą zanikać, ponieważ nie można całkowicie wyeliminować od działania cząsteczek cieczy z cząsteczkami ścianek rurki.

Czytelnik A: Widzę, że zasada zachowania energii ma szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu zadań.
Autor: Polecam jeszcze jedno zadanie.

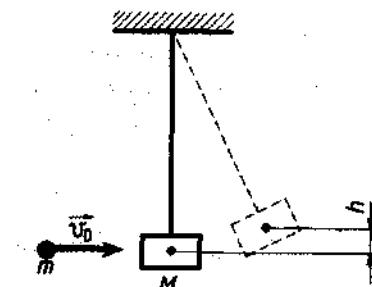
W skrzynkę o masie M , zawieszoną na ciemkijnici, trafią pociski o masie m , lecący poziomo z prędkością v_0 i zatrzymujesz w niej. Na jaką wysokość h od położenia równowagi wzniesie się skrzynka po trafieniu w nią pocisku (rys. 13.2)?

Czytelnik A: Oznaczmy przez v_1 prędkość skrzynki ze znajdującym się w niej pociskiem zaraz po trafieniu pocisku w skrzynkę. Aby znaleźć tę prędkość, posłużymy się zasadą zachowania energii

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{(m+M)v_1^2}{2} \quad (13.3)$$

skąd

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{m}{m+M}}. \quad (13.4)$$



Rys. 13.2

Znając tę prędkość, znajdziemy poszukiwaną wysokość h wzniesienia się skrzynki, znowu posługując się zasadą zachowania energii:

$$(m+M)gh = \frac{(m+M)v_1^2}{2}. \quad (13.5)$$

Można połączyć związki (13.3) i (13.5):

$$(m+M)gh = \frac{mv_0^2}{2},$$

skąd

$$h = \left(\frac{m}{M+m} \right) \frac{v_0^2}{2g}. \quad (13.6)$$

Autor (do Czytelnika B): A ty jak myślisz?

Czytelnik B: Nie zgadzam się z przedstawionym rozwiązaniem zadania. Słyszałem, że w podobnych sytuacjach należy posługiwać się zasadą zachowania pędu.

Dlatego zamiast wzoru (13.3) zastosuję inny związek:

$$mv_0 = (m + M)v_1 \quad (13.7)$$

(pęd pocisku przed zderzeniem jest równy pędowi skrzynki z pociskiem po zderzeniu).

Autor: Poprawnie napisałeś zasadę zachowania pędu w odniesieniu do tego zadania. Jednak trzeba pamiętać, że pęd to wektor, którego kierunek jest zgodny / kierunkiem wektora prędkości. Pamiętajcie, że zasada zachowania pędu ma charakter wektorowy.

W danym przykładzie pęd układu pocisk + skrzynka przed uderzeniem jest równy mv_0 , a zaraz po uderzeniu $(m + M)v_1$. Obydwa wektory zwrócone są w tę samą stronę. Dlatego równanie wektorowe

$$m\vec{v}_0 = (m + M)\vec{v}_1, \quad (13.8)$$

jest równoważne równaniu skalarnemu (13.7), które napisałeś.

Czytelnik B: Ja dokończę. Z (13.7) wynika, że

$$v_1 = \frac{v_0 m}{M + m}. \quad (13.9)$$

Jeżeli teraz posłużymy się zasadą zachowania energii w odniesieniu do ruchu skrzynki z pociskiem po zderzeniu i podstawimy do (13.5) wynik (13.9), to uzyskamy

$$h = \left(\frac{m}{M+m} \right)^2 \frac{v_0^2}{2g} \quad (13.10)$$

Autor: Istnieją dwa różne poglądy i dwa różne wyniki. Istota różnic zdah polega na tym, że rozwiązuając zadanie, w pierwszym przypadku do zderzenia pocisku ze skrzynką zastosowano zasadę zachowania energii kinetycznej, podczas gdy w drugim przypadku zastosowano zasadę zachowania pędu. Kto więc ma rację? (Dlaczego Czytelnika A): Co masz do powiedzenia na uzasadnienie swojego stanowiska?

Czytelnik A: Nie przyszło mi do głowy, żeby odwoływać się do zasady zachowania pędu.

Autor (do Czytelnika B): A ty co powiesz?

Czytelnik B: Nie wiem, jak uzasadnić moje stanowisko. Pamiętam, że przy rozpatrywaniu zderzeń zasada zachowania pędu jest spełniona zawsze, podczas gdy zasada zachowania energii — nie zawsze. Ponieważ w danym zadaniu te dwie zasady prowadzą do różnych wyników, więc, jak się wydaje, słuszny jest mój wynik.

Autor: Rzeczywiście, słuszny jest właśnie twój wynik. Jednak omówimy te zagadnienia dokładniej.

Zderzenie, po którym obydwa zderzające się ciała poruszają się złączone (zlepione albo jedno wewnątrz drugiego), nazywa się zderzeniem idealnie niesprężystym. Dla tego zderzenia charakterystyczna jest trwała deformacja zderzających się ciał, w wyniku czego wydziela się pewna ilość ciepła, i dlatego związek (13.3), zawierający tylko energię kinetyczną ciał, nie jest słuszny. W tej sytuacji, aby wyznaczyć prędkość skrzynki z pociskiem po zderzeniu, musimy posługiwać się wyłącznie prawem zachowania pędu (13.7).

Czytelnik A: Czy to znaczy, że podczas zderzenia idealnie niesprężystego nie jest spełniona zasada zachowania energii? Ale przecież to prawo jest uniwersalne!

Autor:

Zasada zachowania energii jest niewątpliwie słuszała także dla zderzenia idealnie niesprężystego. Podczas takiego zderzenia nie zachowuje się energia kinetyczna, energia całkowita zaś jest zachowana.

Jeśli oznaczy się przez Q wydzielone podczas zderzenia ciepło, to można zapisać następujący układ zasad zachowania, odnoszący się od zderzenia idealnie niesprężystego:

$$\begin{cases} mv_0 = (m + M)v_1, \\ \frac{mv_0^2}{2} = \frac{(m + M)v_1^2}{2} + Q. \end{cases} \quad (13.11)$$

Pierwsze równanie to zasada zachowania pędu, drugie — zasada zachowania energii (uwzględniająca nie tylko energię mechaniczną, ale również ciepło).

Układ (13.11) zawiera dwie niewiadome: v_1 i Q . Po wyznaczeniu v_1

z pierwszego równania można z drugiego znaleźć wydzielone ciepło Q :

$$Q = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{(m+M)m^2 v_0^2}{2(m+M)^2} = \frac{mv_0^2}{2} \left(1 - \frac{m}{m+M} \right), \quad (13.12)$$

Widać stąd, że im większa jest masa M , tym więcej energii przekształca się w ciepło. W granicy dla nieskończego dużej masy M otrzymujemy, że $Q = \frac{mv_0^2}{2}$, tj. cała energia kinetyczna pocisku przekształca się w ciepło. To jest całkiem naturalne: wyobraźcie sobie, że kula wbija się w ścianę.

Czytelnik A:

Czy możliwe są zderzenia bez wydzielenia ciepła?

Autor: Tak, takie zderzenia są możliwe.

Nazywają się idealnie sprężystymi. Na przykład, zderzenie dwóch stalowych kul można w przybliżeniu traktować jako zderzeniu idealnie sprężyste. Zachodzi przy tym sprężysta deformacja kul ciepło się nie wydziela.

Po zderzeniu kule przyjmują kształt pierwotny.

Czytelnik A: Czy to znaczy, że dla zderzenia idealnie sprężystego zasada zachowania energii jest zasada zachowania energii kinetycznej?

Autor: Tak, oczywiście.

Czytelnik A: W takim razie nie rozumiem, jak „pogodzić” ze sobą zasady zachowania pędu i energii. Przecież uzyskujemy dwa różne równania na prędkość po zderzeniu. Albo może jest tak, że dla zderzenia idealnie sprężystego nie jest spełniona zasada zachowania pędu?

Autor: Dla zderzenia idealnie sprężystego spełnione są obydwie zasady zachowania: zarówno pędu, jak i energii kinetycznej. Przy czym nie ma podstaw, aby niepokoić się o „pogodzenie” tych praw, gdyż w wyniku zderzenia sprężystego ciało poruszają się z różnymi prędkosciami. Jeżeli po idealnie niesprężystym zderzeniu ciała, które się zderzyły, poruszają się z jednakową prędkością (ponieważ złączyły się ze sobą), to po zderzeniu sprężystym każde ciało porusza się ze swoją określoną prędkością. A do wyznaczenia dwóch niewiadomych potrzebne są właśnie dwa równania. Przeanalizujmy przykład.

 Niech ciało o masie m uderza sprężyste przedkością v_0 wspierające ciało o masie M . Wyznaczyci prędkości ciał po zderzeniu idealnie sprężystym.

Założymy, że w wyniku zderzenia uderzające ciało odskakuje do tyłu. Oznaczmy prędkość ciała o masie m po zderzeniu przez v_1 , a ciała o masie M – przez v_2 . W tym wypadku zasady zachowania pędu i energii można zapisać odpowiednio w postaci:

$$\begin{cases} mv_0 = Mv_2 - mv_1, \\ \frac{mv_0^2}{2} = \frac{Mv_2^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2}. \end{cases} \quad (13.13)$$

Czytelnik A: Nie rozumiem, dlaczego w pierwszym równaniu pęd ciała o masie m po zderzeniu występuje ze znakiem minus.

Autor: Przypomnę, że zasada zachowania pędu ma charakter wektorowy:

$$m\vec{v}_0 = \vec{Mv}_2 + m\vec{v}_1. \quad (13.14)$$

Wektory \vec{v}_0 i \vec{v}_1 zwrócone są w jedną stronę, na przykład zgodnie ze zwrotem osi układu współrzędnych; ich rzuty na tę oś są dodatnie. Natomiast wektor \vec{v}_2 , jak założyliśmy, jest zwrócony w stronę przeciwną (ciało o masie M po zderzeniu odskakuje do tyłu); dlatego jego rzut na wybraną oś jest ujemny.

Czytelnik B: Ale przecież z góry nie zawsze można wiedzieć, w jakim kierunku ciało będzie poruszało się po zderzeniu. Czyż nie może się okazać, że po zderzeniu ciało o masie m będzie kontynuować ruch w pierwotnym kierunku, lecz z mniejszą prędkością?

Autor: To jest możliwe. W takim wypadku, rozwiązując układ równań (13.13), otrzymamy ujemną prędkość v_1 .

Czytelnik B: Myślę, że kierunek ruchu ciała m po zderzeniu jest określony stosunkiem mas m i M .

Autor: Całkiem słusznie. Jeżeli $m < M$, to ciało odskoczy do tyłu; dla $m = M$ po zderzeniu ciało m zatrzyma się; dla $m > M$ będzie kontynuować ruch w tę samą stronę, ale z mniejszą prędkością. Jednak czasem można nie wiedzieć, jaki będzie kierunek ruchu. Wtedy wystarczy z góry założyć jakiś kierunek i przystąpić do obliczeń. Znak uzyskanego wyniku wykaże, czy założenie było błędne czy poprawne.

Czytelnik B: Wiadomo, że po zderzeniu kule mogą rozbieć się pod pewnym kątem. Tutaj natomiast zakładano, że ruch zachodzi wzdłuż jednej prostej. Wydaje się, że rozpatrywaliśmy przykład szczególny?

Autor: Masz rację. Było to mianowicie zderzenie centralne: kule przed zderzeniem i po zderzeniu poruszają się wzdłuż jednej linii prostej przechodzącej przez ich środki. Typowy przykład zderzenia sprężystego zostanie przedstawiony poniżej. A na razie chciałbym wiedzieć, czy wszystko to, co objaśniłem, było zrozumiałe?

Czytelnik A: Dla mnie na przykład było zrozumiałe.

Dla dowolnego zderzenia (zarówno sprężystego, jak i niesprężystego) spełnione są dwie zasady zachowania – zarówno pędu jak i energii. Po prostu różny charakter zderzeń warunkuje, że różne postaci równań, którymi opisane są zasady zachowania. Rzepatrując zderzenia niesprężyste, należy obok energii mechanicznej uwzględnić ciepło, wydzielające się podczas zderzeń.

Autor: Twoja uwaga jest słuszna.

Czytelnik B: Jeśli dobrze zrozumiałem, zderzenia idealnie sprężyste i idealnie niesprężyste są przykładami granicznymi. Czy zawsze nadają się one do opisu zderzeń rzeczywistych?

Autor: Masz rację. Rozpatrzone przez nas przykłady zderzeń są przykładami granicznymi. W rzeczywistych zderzeniach zawsze wydziela się pewna ilość ciepła (idealnie sprężyste deformacje nie istnieją), przy czym ciała, które się zderzyły, mogą rozbiegać się z różnymi prędkościami. Jednakże w wielu wypadkach rzeczywiste zderzenia dają się nieźle opisać za pomocą uproszczonych modeli: zderzenia idealnie sprężystego i zderzenia idealnie niesprężystego. Rozpatrzmy przykład zderzenia sprężystego niecentralnego.

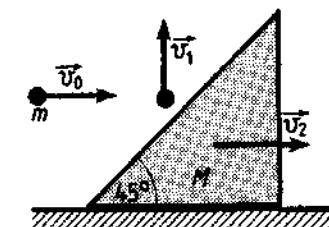
Na płaszczyźnie poziomej spoczywa ciało o masie M , mające kształt równi pochyłej o kącie nachylenia 45° . Z równią zderza się sprężystie kulka o masie m , lecząca poziomo z prędkością v_0 . W wyniku zderzenia z równią kulka odskakuje pionowo do góry, a równią zaczyna ślizgać się bez tarcia po płaszczyźnie poziomej. Wyznaczyć prędkość, z jaką kulka rozpoczyna swój ruch pionowy bezpośrednio po zderzeniu (rys. 13.3).

Kto chce wypróbować swoje siły, rozwiązuje to zadanie?

Czytelnik B: Może ja to zrobię.

Oznaczmy poszukiwaną prędkość kulki przez v_1 , a prędkość równi – przez v_2 . Ponieważ zderzenie jest sprężyste, więc mam prawo sądzić, że energia kinetyczna zachowuje się:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2}. \quad (13.15)$$



Rys. 13.3

Potrzebne mi jeszcze jedno równanie, do którego ułożenia trzeba, oczywiście, wykorzystać zasadę zachowania pędu. Skorzystam z wzoru (13.14):

$$m\vec{v}_0 = M\vec{v}_2 + m\vec{v}_1. \quad (13.16)$$

Co prawda, nie wiem, co robić dalej, przecież prędkości v_0 i v_1 są wzajemnie prostopadłe.

Autor:

Na ogół należy rozłożyć wszystkie wektory pędu na składowe wzajemnie prostopadłe i zastąpić równanie wektorowe (13.16) dwoma równaniami skalarnymi dla rzutów wektorów pędu na wybrane dwa wzajemnie prostopadłe kierunki.

W danym zadaniu wybierzemy kierunki poziomy i pionowy. Rzutując wektory pędu (13.16) na kierunek poziomy, otrzymujemy równanie

$$mv_0 = Mv_2. \quad (13.17)$$

Z równań (13.15) i (13.17) wyznaczymy poszukiwaną prędkość

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{M-m}{M}}.$$

Czytelnik B: A co będzie z kierunkiem pionowym?

Autor: Na pierwszy rzut oka wydaje się, że dla kierunku pionowego zasada zachowania pędu nie jest spełniona. Rzeczywiście: przed zderzeniem prędkości pionowych nie było, natomiast po zderzeniu istnieje zwrócony pionowo do góry pęd mr_1 . Nietrudno pojąć, że w danym zderzeniu bierze udział jeszcze jedno ciało – Ziemia.

Przecież gdyby nie było Ziemi (dokładniej — połączonej z nią płaszczyzny poziomej), wtedy ciało M nie poruszałoby się po zderzeniu poziomo! Oznaczmy: M_Z — masę Ziemi, v_z — prędkość, którą Ziemia uzyskuje w wyniku rozpatrywanego zderzenia. Brak tarcia pozwala sądzić, że oddziaływanie ciała M z powierzchnią Ziemi realizuje się tylko w kierunku pionowym. Mówiąc inaczej, prędkość v_z Ziemi jest zwrócona pionowo do dołu. Wobec tego udział Ziemi nie zmienia postaci równania (13.17), ale prowadzi do równania opisującego zasadę zachowania pędu dla kierunku pionowego:

$$mv_1 - M_Z v_z = 0. \quad (13.18)$$

Czytelnik B: Jeżeli w zadaniu bierze udział Ziemia, to, jak się wydaje, trzeba uściślić równanie energetyczne (13.15).

Autor: Co właściwie chcesz zrobić ze związkim (13.15)?

Czytelnik B: Chcę dodać wyraz związany z ruchem Ziemi po zderzeniu:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} + \frac{M_Z v_z^2}{2}. \quad (13.19)$$

Autor: Twój zamiar jest całkiem logiczny. Jednak nie należy poprawiać związku (13.15). Istotnie, z (13.18) wynika, że prędkość Ziemi jest równa

$$v_z = \frac{v_1 m}{M_Z}.$$

Ponieważ masa ziemi M_Z jest nieskończonie wielka w porównaniu z masą kulki-pocisku, więc stąd wynika, że prędkość v_z Ziemi można przyrównać do zera. Teraz zapiszemy wyraz $\frac{M_Z v_z^2}{2}$ z równania (13.19) w postaci $\frac{(M_Z v_z)^2}{2} \cdot$ Wielkość $M_Z v_z$ w tym iloczynie zgodnie z (13.18) ma wartość skończoną. Jeżeli tę wartość pomnoży się przez zero (w danym wypadku przez v_z), to w wyniku otrzyma się zero. A więc Ziemia uczestniczy w zjawisku w bardzo swoisty sposób: otrzymuje pewną ilość pędu, ale jednocześnie praktycznie nie zyskuje energii. Innymi słowy, rozpatrując zasadę zachowania pędu, należy Ziemię uwzględnić, zaś rozpatrując zasadę zachowania

energi — nie trzeba jej uwzględniać. Ta okoliczność szczególnie jasno uwydatnia fakt, że zasady zachowania energii i pędu są istotnie różnymi, wzajemnie niezależnymi prawami. A teraz proponuję następujące zadanie.

Na poziomej płaszczyźnie spoczywa kula. Zderza się z nią inną kula o takiej samej masie. Zderzenie jest idealnie sprężyste i niecentralne. Wykazać, że w wyniku zderzenia kule rozbiegają się w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach.

Czytelnik A: Wybiorę oś Ox zgodnie z kierunkiem ruchu uderzającej kuli przed zderzeniem. Oznaczę jej prędkość przez v_0 . Przypuśćmy, że w wyniku zderzenia kula ta odskoczyła pod kątem α do osi Ox z prędkością v_1 , a kula poprzednio spoczywająca — pod kątem β do osi Ox z prędkością v_2 . Powinniśmy wykazać, że $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Autor: Całkiem nieźle sformułowałeś na nowo warunek zadania.

Czytelnik A: Zapiszę zasady zachowania (po lewych stronach równari będę pisał wielkości odnoszące się do układu ciał przed zderzeniem, a po prawych — po zderzeniu):

a) zasada zachowania energii:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2};$$

b) zasada zachowania dla rzutu wektora pędu na oś Ox :

$$mv_0 = mv_1 \cos\alpha + mv_2 \cos\beta;$$

c) zasada zachowania dla rzutu wektora pędu na oś Oy :

$$0 = mv_1 \sin\alpha - mv_2 \sin\beta.$$

Dzieląc równania przez m , otrzymam układ równani:

$$\begin{cases} v_0^2 = v_1^2 + v_2^2, \\ v_0 = v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta, \\ 0 = v_1 \sin\alpha - v_2 \sin\beta. \end{cases}$$

Ale co robić dalej?

Czytelnik B: Mam wrażenie, że zrozumiałem. Trzeba podnieść do kwadratu równania drugie i trzecie, a potem dodać stronami.

Wtedy uzyskamy

$$\hat{v}_0 = \hat{v}_1 + 2v_1 v_2 (\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta) + \hat{v}_2.$$

Porównując ten wynik z pierwszym równaniem, znajduję $\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta = 0$, albo $\cos(\alpha + \beta) = 0$.

Stąd $\alpha + \beta = 90^\circ$, co właśnie należało dowieść.

Autor: Zupełnie nieźle. Ale można prościej. Spróbujmy nie rozkładać wektorów pędu na składowe o kierunkach osi Ox i Oy , lecz skorzystajmy bezpośrednio z równania wektorowego:

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2.$$

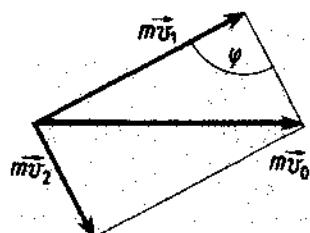
Równaniu temu odpowiada równoległobok, zbudowany na wektorach pędu (rys. 13.4). Dzieląc stronami równanie przez masę i stosując znane twierdzenie cosinusów (uogólnione twierdzenie Pitagorasa), zapiszemy

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\varphi.$$

Ale zgodnie z zasadą zachowania energii mamy $vl = v_1^2 + v_2^2$, więc otrzymujemy $\varphi = 90^\circ$.

Czytelnik B: Tak rzeczywiście jest prościej.

Autor: Zwrócić uwagę, że takie podejście dobrze odzwierciedla wektorowy charakter zasady zachowania pędu.



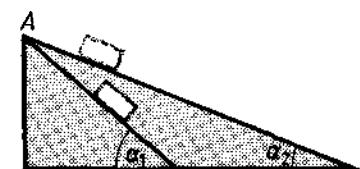
Rys. 13.4

Zadania

- 13.1. Ciało o masie $m = 3$ kg spada z pewnej wysokości z prędkością początkową $v_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, zwróconą pionowo w dół. Oblicz pracę W potrzebną na pokonanie sił oporu, w ciągu pierwszych 10 s. jeżeli wiadomo, że na końcu tego przedziału czasu ciało miało prędkość $v = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Przyjmij, że siła oporu jest stała.

- 13.2. Ciało początkowo ześlizguje się z równej pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$, a następnie ślizga się po powierzchni poziomej. Drodzi przebyte przez ciało po powierzchni poziomej i po równej pochyłej są jednakowe. Wyznacz współczynnik tarcia μ , przyjmując, że jest on taki sam na powierzchni poziomej i na równej.

- 13.3. Z punktu A po dwóch różnych równiach pochyłych (rys. 13.5) ześlizgują się bez prędkości początkowej dwa jednakowe ciała. Jaki jest stosunek prędkości $\frac{V_1}{V_2}$ ciał u podstawy równi pochyłych w dwóch sytuacjach: 1) bez uwzględnienia tarcia; 2) jeżeli tarcie występuje, przy czym współczynnik tarcia dla obu równi jest jednakowy i równy μ .



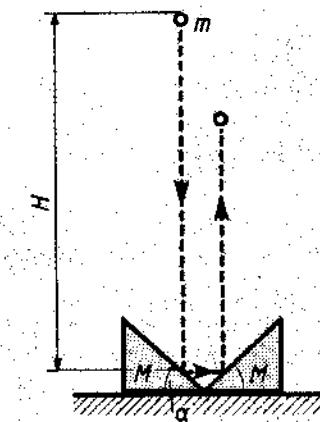
Rys. 13.5

- 13.4. Chłopiec, opierając się o barierę, wyrzucił kamień poziomo z prędkością $v_0 = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jaką prędkość v względem powierzchni Ziemi nadą temu kamieniowi, jeżeli stojąc na łyżwach na gładkim lodzie wyrzuci kamień, stosując taką samą siłę jak poprzednio? Wyznacz drogę, jaką przejedzie chłopiec od miejsca wyrzucenia do miejsca zatrzymania, jeżeli współczynnik tarcia łyżew o lód jest równy $\mu = 0.02$. Masa kamienia $m = 1$ kg, masa chłopca $M = 36$ kg.

- 13.5. Kulka o masie m i objętości V wpadając do wody z wysokości H zanurza się na głębokość h i następnie wyskakuje z wody (gęstość kulki jest mniejsza od gęstości wody). Znайдź siłę F oporu wody, przyjmując, że jest stała, a także wysokość h_1 , na którą wzniesie się kulka, wyskoczywszy z wody. Opór powietrza pomiń.

- 13.6. Wagon o masie $m_1 = 50$ t. poruszając się z prędkością $v_0 = 12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, zderza się ze stojącą na jego drodze platformą o masie $m_2 = 30$ t. Oblicz prędkość v wspólnego ruchu wagonu i platformy bezpo-

- średnio po tym, jak zadziałał spręz automatyczny. Oblicz drogę s , przebytą przez układ wagon—platforma, jeżeli siła oporu stanowi $n = 5\%$ ciężaru tego układu.
- 13.7. Z armaty o masie M , znajdującej się u podnóża góry, wylecial w kierunku poziomym pocisk o masie m z prędkością początkową v_0 . Na jaką wysokość wjedzie armata po zboczu góry w wyniku odrzutu, jeżeli nachylenie zbocza wynosi α , a współczynnik tarcia armaty o podłożę μ ?
- 13.8. Pal o masie $m_1 = 100 \text{ kg}$ jest wbijany w grunt babą kafara, która ma masę $m_2 = 300 \text{ kg}$. Baba kafara swobodnie spada z wysokości $H = 4 \text{ m}$, a w czasie każdego uderzenia pal obniża się o $h = 10 \text{ cm}$. Przyjmując, że siła oporu F gruntu jest stała, wyznacz jej wartość dla dwóch przypadków: 1) uderzenie w pal jest idealnie sprężyste, 2) uderzenie jest niesprężyste.
- 13.9. Po przecie poziomym bez tarcia ślizga się z prędkością v_0 kula o masie $m_1 = M$ i zderza się z inną kulą o masie m_2 , która wcześniej była w spoczynku. Zderzenie jest idealnie niesprężyste. Znajdź prędkość v kul po zderzeniu i ciepło Q wydzielone podczas zderzenia w następujących przypadkach: 1) $m_2 = \frac{M}{2}$; 2) $m_2 = M$; 3) $m_2 = 2M$.
- 13.10. Na płaszczyźnie poziomej spoczywa kula o masie M . Uderza w nią kula o masie m , mająca przed uderzeniem prędkość v_0 . Zderzenie jest idealnie sprężyste i niecentralne. W wyniku zderzenia kula o masie m uzyskuje prędkość skierowaną prostopadle do kierunku swego pierwotnego ruchu. Wyznacz prędkości v_1 i v_2 kul i kierunek ruchu kuli o masie M po zderzeniu, a także zmianę energii AE i pędu $\Delta(mv)$ kuli o masie m w wyniku zderzenia.
- 13.11. Na gładkiej poziomej powierzchni w odległości $l = 3 \text{ m}$ od pionowej ściany znajduje się kula o masie M . Inna kula o masie m ślizga się z pewną prędkością w kierunku od ściany do kuli o masie M . Po idealnie sprężystym zderzeniu kul, kula o masie m dociera do ściany i odbiwszy się od niej sprężystie dopędza kulę o masie M . Oblicz, w jakiej odległości s od ściany nastąpiło drugie zderzenie, jeżeli $\frac{M}{m} = n = 5$.
- 13.12. Dwie kule o masach M i $2M$ podwieszone są w jednym punkcie na niciach o jednakowej długości l . Kulę o masie M odchycono o kąt α i puszczone, nadając jej przy tym prędkość v_0 prostopadłą do nici, o zwrocie ku położeniu równowagi. Na jaką wysokość h wzniósą się kule po zderzeniu, jeśli jest ono: 1) idealnie sprężyste, 2) idealnie niesprężyste (kule w wyniku zderzenia zlepiają się).
- 13.13. Kula o masie M wisie na nici o długości l . W kulę trafia lecący poziomo pocisk o masie m i wbija się w nią. Z jaką minimalną prędkością powinien lecieć pocisk, aby w wyniku tego zderzenia kula wisząca na nici mogła wykonać pełny obrót w płaszczyźnie pionowej?
- 13.14. Na płaszczyźnie poziomej leżą dwa kliny mające kąty nachylenia po 45° , masa każdego z nich jest równa M (rys. 13.6). Z wysokości H swobodnie spada kulka o masie m ($m \ll M$), uderza początkowo w jeden klin, a następnie w drugi i podskakuje pionowo do góry. Wyznacz wysokość h , na którą podskoczy kulka. Przyjmij, że obydwa zderzenia są sprężyste, oraz że nie ma tarcia między klinami i płaszczyzną.
- 13.15. Na płaszczyźnie poziomej leży klin o masie M i kącie nachylenia do poziomu $\alpha = 30^\circ$. Z wysokości H swobodnie spada kulka o masie m , sprężystie uderza w klin i odbija się pod kątem 30° do poziomu. Na jaką wysokość h wzniósie się kulka? Tarcie klinu o płaszczyznę pominąć.



Rys. 13.6

14 Czy wiesz, jakie drgania nazywamy drganiami harmonicznymi?

Szczególnie interesująca jest wypętlony organami i faktami. Pomyślej o tym, zgłębiając działy fizyki poświęcone tym zjawiskom. Przykłady eksplorujemy organami harmonicznymi w szczególności rozwartym leczeniu wahadła matematycznego. Przeprowadzymy również analizę wpływu się wahadła w niemierzących układach odniesienia.

Autor: Często na egzaminach uczniowie niezbyt precyzyjnie określają drgania harmoniczne. Dlatego najpierw przedyskutujemy definicję drgari harmonicznych.

Czytelnik A:

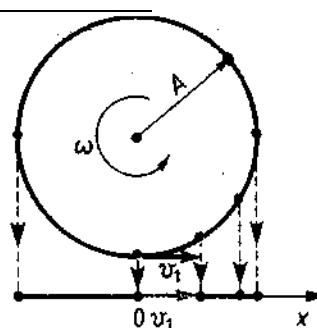
Organami harmonicznymi nazywane są takie drgania, dla których wartość wychylenia x ciała / położenia równowagi zmienia się z czasem zgodnie z funkcją sinus

$$x = A \sin(\omega t + \chi). \quad (14.1)$$

Tutaj A — amplituda drgari (maksymalna wartość wychylenia ciała z położenia równowagi), ω — częstotliwość kołowa ($\omega = \frac{\pi}{T}$, gdzie T — okres drgari), natomiast a — faza początkowa (charakteryzuje ona wychylenie ciała z położenia równowagi w chwili $t = 0$).

Drgania harmoniczne łatwiej zrozumieć, rozpatrując najpierw ruch jednostajny punktu po okręgu o promieniu A z prędkością kątową ω : rzut tego punktu na osią Ox (rys. 14.1) wykonuje drgania harmoniczne opisywane wyrażeniem (14.1).

Czytelnik B: Ja znam inną definicję drgari harmonicznych. Jak wiadomo, drgania zachodzą



Rvs. 14.1

dzą pod działaniem siły zwrotnej, tj. siły zwróconej do punktu położenia równowagi i zwiększającej się w miarę oddalania się ciała od położenia równowagi.

Drganiami harmonicznymi nazywaj \acute{e} si \acute{e} taki drganie, dla k \acute{e} ilia zwrotna jest wypust wpojedynczo, t. j. f(0) = 0 z położenia równowagi.

(14.2)

Taka siła nosi nazwę siły sprezystej.

Autor: Jestem całkowicie zadowolony z obu przedstawionych defini-
cji

W pierwszym wypadku drgania harmoniczne zostały określone na podstawie sposobu, w jaki się odbywają, natomiast w drugim na podstawie przyczyny, która są wywołane. Innymi słowy, jeśli pierwsi/a definicja wykorzystuje przestrzenno-czasową (fizyczna), to druga – przyczynową (dyynamczną).

Czytelnik B: Ale która z tych dwóch definicji jest lepsza? Albo może obydwie są równoważne?

Autor: Nie, te definicje nie są równoważne, dlatego należy preferować definicję pierwszą (kinematyczną), gdyż jest pełniejsza.

Czytelnik B: Ale przecież zależnie od tego, jaki jest charakter siły zwrotnej, taki, oczywiście, powinien być również charakter drgari. Nie rozumiem, dlaczego moja definicja jest mniej pełna.

Autor: Niezupełnie masz rację: charakter siły zwrotnej nie określa w pełni charakteru drgari.

Czytelnik A: Jak się wydaje, trzeba tutaj przypomnieć, że charakter ruchu ciała w danej chwili jest określony nie tylko siłami działającymi na ciało w danej chwili, ale również warunkami początkowymi, tj. położeniem i predkością ciała w chwili początkowej.

Autor: Zupełnie słusznie. W odniesieniu do rozpatrywanego zagadnienia stwierdzenie to oznacza, że charakter drogi jest określony nie tylko jej technologią, ale także warunkami, w jakich jest wykorzystywana.

Jest oczywiste, że drgania można wzbudzić różnymi sposobami. Na przykład można wychylić ciało z położenia równowagi na pewną odległość i następnie spokojnie je puścić, i wtedy ciało zacznie drgać. Jeżeli przyjmie się, że chwila rozpoczęcia drgania jest chwila

zerową, to wtedy z (14.1) otrzymamy $\alpha = \frac{\pi}{2}$, na podstawie słusznego założenia, że odległość, na jaką wychylono ciało, jest amplitudą drgań. Można wychylać ciało z położenia równowagi na różne odległości, powodując tym samym różne amplitudy drgań.

Inny sposób wzbudzania drgań polega na tym, że ciału znajdującemu się w położeniu równowagi nadajemy pewną prędkość początkową (popchamy je) i wtedy ciało zaczyna drgać. Traktując chwilę rozpoczęcia drgań jako zerową, otrzymamy w tym wypadku z (14.1), że $a = 0$. Przy tym, zależnie od nadanej ciału prędkości początkowej, otrzymamy różną amplitudę jego drgań.

Można oczywiście podać trzeci sposób wzbudzenia drgań, będący w stosunku do dwóch już wymienionych sposobem pośrednim: ciało zostaje wychylone z położenia równowagi i jednocześnie popchnięte. W każdym przypadku w chwili wzbudzenia zostają określone amplituda A i początkowa faza α drgań.

Czytelnik B: Czy to znaczy, że A i a nie zależą od charakteru siły zwrotnej?

Autor: Otóż właśnie. O wartościach tych wielkości decydujesz sam, wybierając różne sposoby wzbudzania drgań. Siła zwrotna określa tylko częstotliwość kołową ω albo, innymi słowy, okres drgań ciala.

Można powiedzieć, że okres drgań jest cechą charakterystyczną drgającego ciała (układu drgającego), podczas gdy amplituda A i początkowa faza α zależą od warunków zewnętrznych (oddziaływań), które wzbudziły dane drgania.

Wracając do definicji drgań harmonicznych, widzimy, że definicja dynamiczna nie zawiera żadnych informacji ani o amplitudzie, ani o początkowej fazie drgań, podczas gdy definicja kinematyczna zawiera te informacje.

Czytelnik B: Ale jeżeli możemy według własnego uznania decydować o amplitudzie, to może ta wielkość jako cecha charakterystyczna drgającego ciała nie jest tak bardzo ważna?

Autor: Mylisz się. Amplituda — to bardzo ważna wielkość charakteryzująca drgające ciało. Aby to wykazać, rozpatrzymy konkretny przykład.

Kulka o masie m jest przy mocowana do dwóch elastycznych sprężyn i wykonuje drgania harmoniczne o amplitudzie A w kierunku poziomym (rys. 14.2). Siła zwrotna jest określona współczynnikiem sprężystości k , charakteryzującym elastyczne właściwości sprężynek. Znaleźć energię drgającej kulki.

Czytelnik A: Aby wyznaczyć energię kulki, trzeba wziąć pod uwagę jej skrajne wychylenia ($|x| = A$), gdzie prędkość kulki jest równa zeru. W tej sytuacji całkowita energia kulki jest równa jej energii potencjalnej. Można ją wyznaczyć jako pracę przeciwko sile zwrotnej F , wykonaną podczas odciągania kulki na odległość A z położenia równowagi, tj.

$$E_p = W = FA. \quad (14.3)$$

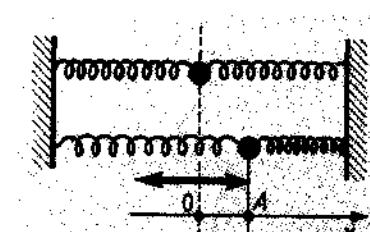
Stąd, uwzględniając, że zgodnie z (14.2) $F = kA$, otrzymujemy

$$E_p = kA^2.$$

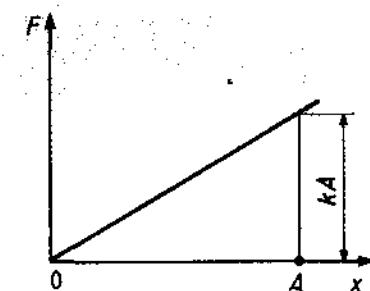
Autor: Myślałeś poprawnie, ale popełniłeś jeden błąd. Wzór (14.3) można stosować tylko pod warunkiem, że siła jest stała. Jednak w danej sytuacji siła F zmienia się wraz z odległością, co pokazano na rysunku 14.3. Praca tej siły na drodze $x = A$ jest równa polu powierzchni pod wykresem siły jako funkcji x . Jest to pole trójkąta, równe $\frac{kA^2}{2}$.

W ten sposób

$$\frac{1}{2}kA^2 \quad (14.4)$$



Rys. 14.2



Rys. 14.3

Zwracam uwagę, że całkowita energia drgającego ciała (układu drgającego) jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy drgań. Widać więc, że amplituda rzeczywiście jest ważną wielkością charakteryzującą drgające ciało.

Jeżeli $0 < x < A$, to całkowita energia E jest sumą energii potencjalnej i kinetycznej:

$$E = \frac{kA^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}. \quad (14.5)$$

Zależność (14.5) pozwala wyznaczyć prędkość v drgającej kulki dla dowolnego wychylenia x z położenia równowagi. A teraz zadam pytanie:

Jaki jest okres drgan kulki przedstawionej na rysunku 14.2?

Czytelnik B: Aby ustalić wzór na okres drgari, należy zastosować rachunek różniczkowy.

Autor: Ścisłe mówiąc, masz rację. Jeżeli jednak skorzysta się jednocześnie z obu definicji drgari harmonicznych — kinematycznej i dynamicznej, to można wtedy obejść się bez rachunku różniczkowego. Rzeczywiście, patrząc na rysunek 14.1 będący graficznym wyrazem definicji kinematycznej, można wywnioskować, że prędkość ciała w chwili przechodzenia przez położenie równowagi jest równa

$$v_1 = \omega A = \frac{2\pi A}{T}. \quad (14.6)$$

Wykorzystując wzór (14.4), uzyskany na podstawie definicji dynamicznej, można wywnioskować, że prędkość v_1 uda się wyznaczyć z zależności energetycznej

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \quad (14.7)$$

(w chwili przejścia przez położenie równowagi energia kulki jest wyłącznie energia kinetyczna). Z równań (14.6) i (14.7), otrzymujemy

$$\frac{4\pi^2 A^2 m}{T^2} = k A^2.$$

skąd

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (14.8)$$

Jak już zwracałem uwagę,

okres drgania jest w pełni określony właściwościami samego układu drgającego i nie zależy od sposobu wzbudzenia drgań.

Czytelnik A: Zwykle rozpatrujemy drgania nie kulki na sprężynie, lecz wahadła. Czy nie można by jakoś uogólnić uzyskanych wyników, aby posłużyły do analizy drgari wahadła?

Autor: Aby dokonać takiego

uogólnienia, trzeba wyjaśnić, co mianowicie w przypadku wahadła gra rolę współczynnika sprężystości k . Przecież w rzeczywistości wahadło drga nie pod wpływem siły sprężystości, lecz pod wpływem siły ciężkości. Weźmy pod uwagę kulkę zawieszoną na nici o długości l (rys. 14.4). Wychylmy wahadło z położenia równowagi o kąt α . Na kulkę działają dwie siły: siła ciężkości \vec{Q} i siła reakcji \vec{F}_n nici. Siła wypadkowa jest siłą

zwrotną. Z rysunku widać, że jest ona co do wartości równa $Q \sin \alpha = mg \sin \alpha$.

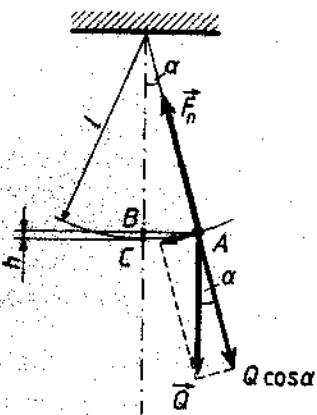
Czytelnik A: A co należy przyjąć za wychylenie z położenia równowagi w przypadku wahadła — odcinek AB czy odcinek AC ?

Autor: Chcemy zająć się drganiami harmonicznymi wahadła. Aby drgania były harmoniczne, jest konieczne, by kąt maksymalnego wychylenia nici z położenia równowagi był bardzo mały

$$\alpha \ll 1. \quad (14.9)$$

(Zwróć uwagę, że tutaj kąt α jest wyrażony w radianach; natomiast jeżeli posłużymy się stopniami, to kąt α nie powinien przekraczać 10°). Jeśli warunek (14.9) jest spełniony, można pominąć różnicę między długościami odcinków AB i AC i wtedy

$$|AB| = l \sin \alpha \approx |AC| = l \alpha.$$



Rys. 14.4

Dlatego twoje pytanie nie jest już ważne. Uściślając, wybierzymy: $Y = |AB| = l \sin \alpha$. Teraz zależność (14.2) przyjmuje dla wahadła postać następującą:

$$mg \sin \alpha = kl \sin \alpha. \quad (14.10)$$

Stąd znajdujemy

$$k = \frac{mg}{l}. \quad (14.11)$$

Podstawiając tę równość do (14.8), otrzymujemy wzór na okres drgari harmonicznych wahadła:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (14.12)$$

Zajmiemy się także zagadnieniem energii wahadła. Jego całkowita energia jest oczywiście równa mgh , gdzie h — wysokość wzniesienia wahadła w skrajnym położeniu (rys. 14.4). Tak więc

$$E_p = mgh = mgl(1 - \cos \alpha) = 2mgl \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (14.13)$$

Zależność (14.13) jest słuszna oczywiście dla dowolnych kątów α . Aby wynik ten przechodził w zależność (14.4), konieczne jest spełnienie warunku harmoniczności drgari wahadła, tj. nierówności (14.9). W tym wypadku $\sin \alpha$ można w przybliżeniu zastąpić kątem w radianach i wzór (14.13) przyjmuje postać

$$E_p \approx 2mgl \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = mgl \frac{\alpha^2}{2}.$$

Stąd, uwzględniając wyrażenie (14.11), otrzymujemy

$$E_p = k \left(\frac{l \alpha}{2}\right)^2 \approx k \frac{|AB|^2}{2}.$$

W ten sposób doszliśmy do wyniku (14.4).

Czytelnik B: O ile sobie przypominam, poprzednio rozpatrywaliśmy drgania wahadeł, nie stawiając warunku, aby kąt wychylenia był mały.

Autor: Ten warunek nie jest potrzebny, jeżeli zajmujemy się energią kulki albo siłą reakcji nici. Wtedy mówimy właściwie nie o wahadle

ale o ruchu kulki po okręgu w płaszczyźnie pionowej. Jednak jeśli w zadaniu obliczamy okres drgari wahadła (14.12), to jego drgania koniecznie muszą być drganiami harmonicznymi i, wobec tego, kąt odchylenia nici powinien być mały [(14.9.)]. Tak więc na przykład w zadaniu 14.2 warunek, aby kąt wychylenia wahadła był mały, jest nieistotny, podczas gdy w zadaniu 14.3 ten warunek jest bardzo ważny.

Czytelnik B: W pewnej książce, w rozdziale o drganiach, zetknąłem się z pojęciem „figur Lissajous”. Cóż to takiego?

Autor: Figurą (krzywą) Lissajous nazywa się tor ruchu ciała drgającego jednocześnie w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach. Założymy, że dodają się drgania wzdłuż osi Ox i wzdłuż osi Oy , przy czym dla uproszczenia przyjmiemy, że częstotliwości i amplitudy drgari są jednakowe. Niech w chwili $t = 0$ wychylenie z położenia równowagi wzdłuż osi Ox będzie równe amplitudzie drgari, a wychylenie wzdłuż osi Oy równe zeru. Wtedy

$$\begin{cases} x = A \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A \cos \omega t, \\ y = A \sin \omega t. \end{cases}$$

Podnosząc do kwadratu każde z równań i dodając stronami, otrzymamy

$$x^2 + y^2 = A^2.$$

Jest to równanie okręgu o promieniu A . W danym wypadku ciało opisuje w płaszczyźnie Oxy figurę Lissajous w postaci okręgu o promieniu A .

A teraz spróbujcie sami znaleźć figurę Lissajous w sytuacji, gdy w chwili $t = 0$ wychylenia wzdłuż obydwu osi są równe zero.

Czytelnik B: Zrozumiałem. Możemy napisać:

$$\begin{cases} x = A \sin \omega t, \\ y = A \sin \omega t. \end{cases}$$

Stąd widać, że $x = y$. Oznacza to, że figura Lissajous jest linią prostą.

Autor: Zgadza się. Jeżeli różnica początkowych faz drgari x i y ma wartości z przedziału między zerem i $\frac{\pi}{2}$, to otrzymamy figurę

Lissajous w postaci elipsy. Jeśli natomiast częstotliwości drgów x i y są różne, to figury Lissajous staną się jeszcze bardziej skomplikowane — będą się składać z wielu pętli.

Czytelnik B: Jeszcze jedno zagadnienie jest dla mnie niejasne. Mówił Pan, że częstotliwość drgów wahadła jest jego cechą charakterystyczną i nie możemy o niej decydować. Jednakże mogę chyba rozsuśtać huśtawkę z taką częstotliwością, na jaką mam ochotę?

Autor: Możesz. Rzecz w tym, że my do tej pory za każdym razem po uruchomieniu wahadła pozwalaliśmy, aby drgało samodzielnie i swobodnie. To były drgania własne. Częstotliwość kołowa ω_0 tych drgan rzeczywiście nie zależy od nas, jest określona długością wahadła. Jeżeli natomiast rozsuśtasz wahadło z częstotliwością kołową ω (tj. przez cały czas działaś na nie siłą okresową, charakteryzującą się częstotliwością kołową co), to w tej sytuacji trzeba mówić o drganiach wymuszonych o częstotliwości kołowej co. Tą częstotliwością rzeczywiście „sterujesz”.

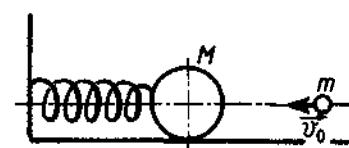
Godne uwagi jest to, że jeśli częstotliwość kołowa ω siły wymuszającej jest taka sama, jak częstotliwość kołowa drgów własnych ($\omega = \omega_0$), wtedy obserwuje się szczególnie dużą amplitudę drgów. Zjawisko to zwane jest rezonansem.

Zadania

- 14.1. Kulka wykonuje drgania harmoniczne (rys. 14.2). Wyznacz stosunek prędkości $\frac{v_1}{v_2}$ kulki w punktach oddalonych od położenia równowagi odpowiednio o połowę i o jedną trzecią amplitudy.
- 14.2. Kulkę zawieszoną na nici odchyłono od położenia równowagi o kąt 60° i następnie puszczeno. Określ stosunek sił naprężenia nici dla położen: równowagi i maksymalnego wychylenia kulki.
- 14.3. Wahadło w postaci kulki na cienkiej nici odchyliono o kat $y = 5^\circ$. Znajdź prędkość v kulki w chwili przejścia przez położenie równowagi, jeżeli częstotliwość kołowa drgów wahadła $\omega = 2 \text{ s}^{-1}$

- 14.4. Na gładkim poziomym stole leży kula o masie M , przyczepiona do sprężyny o współczynniku sprężystości k (rys. 14.5). W kulę trafia pocisk o masie m , mający w chwili uderzenia prędkość v_0 skierowaną wzdłuż osi sprężyny. Wyznacz amplitudę A i okres T drgów kuli. Przyjmij, że uderzenie było idealnie niesprężyste i nie uwzględnij masy sprężyny.

- 14.5. Na sprężynie zawieszono obciążnik, pod którego działaniem sprężyna rozciągnęła się o $\Delta l = 3 \text{ cm}$. Oblicz okres drgów swobodnych obciążnika.
- 14.6. Zegar wahadłowy na powierzchni Ziemi spieszyszy się o $\Delta t = 1,5 \text{ min}$ na dobę. Na jakiej wysokości nad powierzchnią Ziemi będzie on chodził dobrze? Promień Ziemi $R = 6400 \text{ km}$.



Rys. 14.5

15. Co się stanie z wahadłem w stanie nieważkości?

Autor:

W ścianę kabiny windy został wbity gwóźdż. Zawieszono na nim kulkę na nici o długości l i pobudzono ją do drgów harmonicznych. Niech winda porusza się do góry z przyspieszeniem a . Jaką wartość ma okres drgów wahadła?

Czytelnik A: Gdy jedziemy windą z przyspieszeniem zwróconym do góry, odczuwamy pewien wzrost ciężaru. Jak się wydaje, to samo powinno „oczuć” także wahadło. Myślę, że okres jego drgów będzie wyrażony w tym wypadku wzorem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+a}} \quad (15.1)$$

Jednak nie mogę dokładnie uzasadnić tego wzoru.

Autor: Twój wzór jest poprawny. Co prawda aby go uzasadnić, musimy przyjąć niezwykły dla nas punkt widzenia. Do tej pory rozpatrywaliśmy ruch ciał tylko w inercjałnych układach odniesienia; unikaliśmy układów nieinercjalnych. Co więcej, ostrzegłem nawet przed stosowaniem układów nieinercjalnych (par. 5). Jednak w tym paragrafie będzie wygodnie posługiwać się właśnie nieinercjalnym układem odniesienia, który w danym zadaniu jest związany z przypieszającą windą.

Przypomnę, że rozpatrując ruch ciała o masie m w nieinercjalnym układzie odniesienia mającym przyspieszenie \vec{a} , trzeba przyłożyć do ciała dodatkową siłę, tak zwana siłę bezwładności, która jest równa $-ma$. Zwrot tej siły jest przeciwny do wektora przyspieszenia wind. Gdy uwzględnimy przyłożoną do ciała siłę bezwładności, możemy zapomnieć, że układ porusza się z przyspieszeniem, i rozpatrywać ruch ciała tak samo, jak w układzie inercjalnym.

W danej sytuacji z windą trzeba przyłożyć do kuli dodatkową siłę $-ma$, która tak samo jak siła ciężkości $\vec{Q} = mg$ jest stała pod względem wartości i kierunku, przy czym zwroty tych sił są jednakowe. Stąd wynika, że w wyrażeniu (14.12) należy zastąpić przyspieszenie g sumą arytmetyczną przyspieszeń ($g + a$). W wyniku otrzymujemy wzór (15.1).

Czytelnik: Czy to oznacza, że jeśli kabina windy będzie poruszać się z przyspieszeniem \vec{a} , zwróconym do dołu, to okres drgań wahadła będzie określony przez różnicę przyspieszeń ($g - a$), bo przecież teraz siła bezwładności $-ma$ będzie zwrócona przeciwnie do siły ciężkości?

Autor: Oczywiście. Okres drgari wahadła jest równy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}. \quad (15.2)$$

Ten wzór ma sens pod warunkiem, że $a < g$.

Im bardziej przybliża się wartość przyspieszenia a do wartości g , tym większy jest okres drgań wahadła. Przy $a = g$ dochodzi do stanu nieważkości. Co się stanie z wahadłem w tej sytuacji?

Czytelnik A: Zgodnie z wzorem (15.2) okres drgari staje się wówczas nieskończonym wielki. Oznacza to, że wahadło jest unieruchomione.

Autor: Chcę uściślić twoją odpowiedź. Tak więc wahadło drga w kabiniie windy. Nagle kabina urwała się i zaczęła swobodnie spadać do dołu (opór powietrza pomijamy). Co się stanie z wahadłem?

Czytelnik A: Jak już powiedziałem, wahadło będzie unieruchomione.

Autor: Twoja odpowiedź jest nie całkiem poprawna. Wahadło rzeczywiście będzie nieruchome (względem kabiny), jeżeli w chwili urwania kabiny znajdowało się ono w położeniu skrajnym. Jeżeli natomiast w chwili urwania wahadło nie znajdowało się w położeniu skrajnym, to w stanie nieważkości kulka będzie jednostajnie obracać się na nici w płaszczyźnie pionowej z prędkością, która miała w chwili urwania się kabiny.

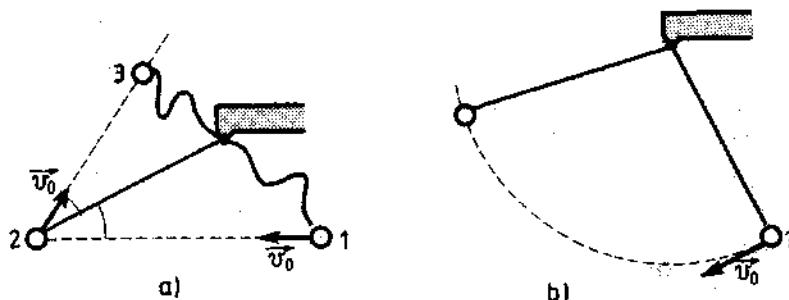
Czytelnik A: Zrozumiałem.

Autor: W takim razie opisz, jak zachowuje się wahadło (kulka na nici) wewnątrz statku kosmicznego znajdującego się w stanie nieważkości.

Czytelnik A: W statku kosmicznym kulka zawieszona na nici albo spoczywa, albo obraca się jednostajnie po okręgu, którego promień jest określony długością nici (jeśli, oczywiście, nie przeszkodzą ściany albo podłoga).

Autor: Twój obraz nie jest całkiem pełny. Przypuśćmy, że znajdujemy się wewnątrz statku kosmicznego będącego w stanie nieważkości. Weźmiemy kulkę z nicią i gdzieś zamocujemy wolny koniec nici tak, by ani ściany, ani podłoga nie przeszkadzały ruchowi wahadła, po czym ostrożnie wypuścimy kulkę z ręki. Kulka pozostanie nieruchoma. Następnie nadamy kulce pewną prędkość v_0 . Przy tym będziemy rozróżniać dwa warianty: 1) nici nie jest naprężona, 2) nici jest naprężona.

Rozpatrzmy pierwszy wariant (położenie 1, rys. 15.1a). W wyniku nadania prędkości v_0 kulka będzie poruszała się ruchem jednostajnym prostoliniowym do tego czasu, dopóki nic, do której jest ona przywiązana, nie naprężą się (położenie 2). W tym momencie na kulkę zadziała siła reakcji nici, która można rozpatrywać analogicznie do siły reakcji ściany działającej na piłeczkę uderzającą w ścianę. Pod wpływem tej siły kulka gwałtownie zmieni kierunek ruchu i znowu poleci ruchem jednostajnym prostoliniowym (położenie 3).



Rys. 15.1

Podczas tego swoistego „odbicia” powinno być spełnione prawo równości kątów padania i odbicia.

Teraz rozpatrzymy wariant drugi: początkowo naprężymy nić, a następnie ostrożnie wypuścimy kulkę z ręki. Tak jak w pierwszym wariantie kulka będzie nieruchomo „wisięć” w ustalonym położeniu (położenie 1, rys. 15.1b). Wreszcie nadamy kulce pewną prędkość v_0 , skierowaną prostopadle do nici. Wtedy wahadło zacznie obracać się jednostajnie. Płaszczyzna obrotu jest wyznaczona przez nić i wektor prędkości v_0 kulki.

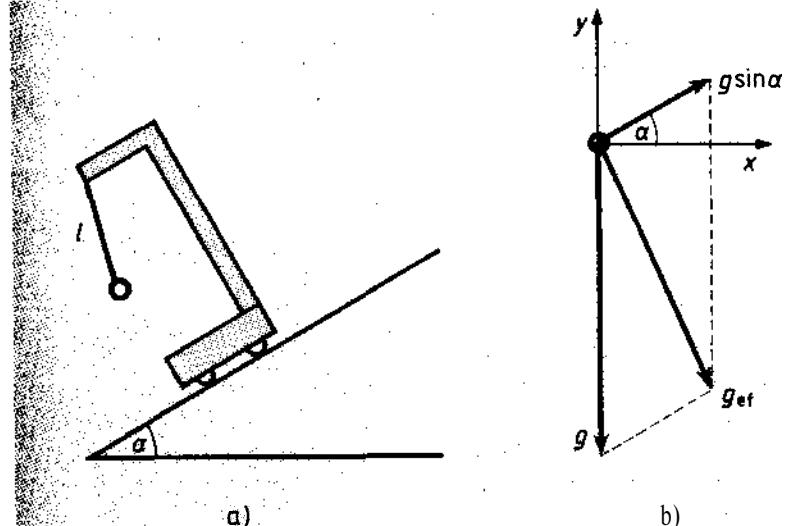
Rozwiążemy następujące zadanie.

Nić o długości l z kulka na końcu jest zamocowana do wózka, który bez tarda ześlizguje się z równi pochynej o kącie nachylenia α (rys. 15.2a). Wyznaczyć okres drgań wahadła znajdującego się w układzie odniesienia, który porusza się z pewnym przyspieszeniem.

W odróżnieniu od poprzednich zadań z windą przyspieszenie układu jest skierowane pod pewnym kątem do przyspieszenia ziemskiego. Dlatego tutaj pojawia się dodatkowe pytanie:

Jakie jest położenie równowagi wahadła?

Czytelnik A: Próbowałem rozwiązać takie zadanie, ale zapłatałem się i nic z tego nie wyszło.



Rys. 15.2

Autor: Okres drgań wahadła w tej sytuacji jest opisany wzorem (14.12), w którym w miejsce g należy, jak w zadaniu z windą, podstawić pewne efektywne przyspieszenie (oznaczmy je g_{eff}), równe sumie wektorowej przyspieszenia ziemskiego i przyspieszenia danego układu. Oprócz tego trzeba uwzględnić, że do wskazanej sumy wektor przyspieszenia wózka powinien wejść ze znakiem przeciwnym, ponieważ wektor siły bezwładności ma zwrot przeciwny do wektora przyspieszenia układu. Wektory przyspieszeń są pokazane na rysunku 15.2b, gdzie $g \sin \alpha$ — przyspieszenie wózka. Wyznaczmy g_{eff} :

$$g_{\text{eff}} = \sqrt{g_{\text{eff}x}^2 + g_{\text{eff}y}^2} = \sqrt{(g \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (g - g \sin^2 \alpha)^2} = g \cos \alpha. \quad (15.3)$$

Wobec tego okres drgań wynosi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}}. \quad (15.4)$$

Czytelnik A: A jak określić kierunek nici w położeniu równowagi?

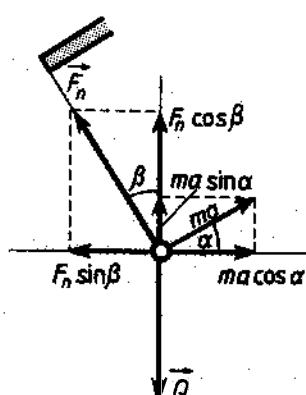
Autor: Ten kierunek jest kierunkiem przyspieszenia \vec{g}_{ef} . Na podstawie wzoru (15.3) nietrudno wywnioskować, że poszukiwany kierunek nici tworzy z pionem kąt α . Innymi słowy, w położeniu równowagi nić wahadła na wózku ześlizgującym się z równej pochyłej jest skierowana prostopadle do płaszczyzny równi.

Czytelnik B: A czy nie można by uzyskać ostatniego wyniku inaczej?

Autor: Można ten wynik uzyskać

bezpośrednio, rozpatrując równowagę kulki względem wózka. Do kulki są przyłożone: siła ciężkości $\vec{Q} = mg$, siła reakcji \vec{F}_n nici i siła bezwładności $\vec{F} = -ma$ (rys. 15.3). Oznaczmy kąt, utworzony między nicią i pionem, przez β . Rozłożymy wszystkie wymienione wektory sił na składowe o kierunkach pionowym i poziomym i zapiszemy warunki równowagi sił składowych dla każdego z tych kierunków:

$$\begin{cases} F_n \cos \beta + ma \sin \alpha = mg, \\ F_n \sin \beta = ma \cos \alpha. \end{cases} \quad (15.5)$$



Rys. 15.3

Uwzględniając, że $a = g \sin \alpha$, zapiszemy układ (15.5) w postaci

$$\begin{cases} F_n \cos \beta = mg(1 - \sin^2 \alpha), \\ F_n \sin \beta = mg \sin \alpha \cos \alpha. \end{cases}$$

Dzieląc stronami równanie pierwsze przez drugie, otrzymujemy

$$\operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha.$$

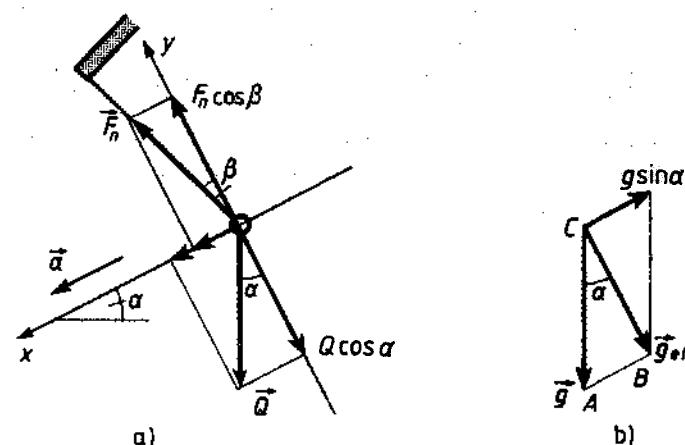
W ten sposób doszliśmy do wniosku, że kąty β i α są równe. W takim razie kierunek nici wahadła w stanie równowagi jest prostopadły do równej pochyłej.

Czytelnik B: Uważnie śledziłem Pana objaśnienia i dochodzę do wniosku, że nie popełniłem zbyt wielkiego błędu, kiedy odpowiadając na pytanie, jakie siły są przyłożone do satelity, wskazałem siłę

ciążkości i siłę odśrodkową (par. 9). Po prostu moja odpowiedź należy odnieść do układu odniesienia związanego z samym satelitą i siłę odśrodkową należy interpretować jako siłę bezwładności. Przecież w nieinercjalnym układzie odniesienia związanym z satelitą mamy do czynienia nie z dynamiczną, a statyczną równowagą sił, z których jedna jest odśrodkową siłą bezwładności.

Autor: Takie podejście do zadania o satelicie jest dopuszczalne. Jednak, mówiąc w paragrafie 9 o sile odśrodkowej, nie uważałeś jej za siłę bezwładności — po prostu się obawiałeś, że satelita bez tej siły może spaść na Ziemię. Ponadto we wspomnianym zadaniu nie trzeba było przechodzić do układu odniesienia zowanego z satelitą: z fizycznego punktu widzenia istota zadania była oddana bardziej poglądowo bez wprowadzenia odśrodkowej siły bezwładności. Moja poprzednia rada pozostaje w mocy: jeżeli nie ma szczególnej konieczności, to nie posługujcie się nieinercjalnym układem odniesienia.

Czytelnik A: Chcę rozwiązać nasze zadanie w inercjalnym układzie odniesienia, tj. zbadać ruch wahadła względem równi. Wiem, że wahadło razem z wózkiem porusza się z przyspieszeniem $a = g \sin \alpha$. Wektory sił działających na kulę rozłożę na składowe o kierunku równoległym do równi i prostopadłym do niej (rys. 15.4a).



Rys. 15.4

Wtedy równania ruchu przyjmą postać

$$\begin{cases} F_n \cos \beta - mg \cos \alpha = 0, \\ F_n \sin \alpha + mg \sin \alpha = ma. \end{cases}$$

Podstawiając w ostatnim równaniu $a = g \sin \alpha$, otrzymuję $\sin \beta = 0$, $ft = 0$. A więc nic jest prostopadła do równi.

Efektywne przyspieszenie teraz łatwo wyznaczyć, ponieważ kąt między kierunkami wektorów g i g_{ef} już znam (rys. 15.4b). Trójkąt ABC jest prostokątny, stąd wynika, że $g_{\text{ef}} = g \cos \alpha$, i w końcu uzyskuję wzór (15.4).

Autor: Wszystko zrobiłeś zupełnie poprawnie.

Zadania

- 15.1. Jak się zmieni okres drgan wahadła sekundowego, jeżeli zostanie ono przeniesione z Ziemi na Księżyca? Masa Księżyca jest 81 razy mniejsza od masy Ziemi, a promień Księżyca jest 3,7 razy mniejszy od promienia Ziemi.
- 15.2. Wahadło sekundowe w pionowo poruszającej się windzie wykonuje $n = 100$ drgan w czasie $t = 1$ min. Z jakim przyspieszeniem porusza się winda? Jak jest ono zwrócone?
- 15.3. Wahadło matematyczne o długości $l = 1$ m, zawieszone w kabinie samolotu, wykonuje drgania harmoniczne. Wyznacz okres T drgan wahadła podczas ruchu samolotu w kierunku poziomym ze stałym przyspieszeniem $a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Jaki jest przy tym kierunek nici wahadła w stanie równowagi?
- 15.4. Oblicz, o jaką część długości należy zmniejszyć długość wahadła matematycznego, aby okresy jego drgan w kabinie samolotu lecącego ruchem jednostajnym i jednostajnie przyspieszonym z poziomo skierowanym przyspieszeniem $a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ były jednakowe.

16. Co wiesz o falach?

Autor: Znamy różne rodzaje fal: fale na powierzchni wody, fale sprężyste (w szczególności fale dźwiękowe), fale elektromagnetyczne (w szczególności fale świetlne). Niestety, osoby przystępujące do egzaminu często na temat fal niewiele wiedzą. Pewne pojęcia związane z falami wyjaśnimy na przykładzie fal sprężystych. Jeżeli wewnątrz ośrodka (gazu, cieczy, ciała stałego) umieści się jakieś źródło fal, to w ośrodku powstaną, fale sprężyste, rozprzestrzeniające się od źródła w różne strony.

Fale mogą być poprzeczne lub podłużne.

Czym różni się fala poprzeczna od podłużnej?

Czytelnik A: To wiem.

W fali poprzecznej cząsteczki ośrodka wychylają się (przemieszczają) prostopadle do kierunku rozprzestrzeniania się fali: \\\ po podłużnej przemieszczenia cząsteczek zachodzą w kierunku rozprzestrzeniania się fali. Fale podłużne to proas rozprzestrzeniania się zagęszczen i rozrzedzeń ośrodka.

Autor: Jakie fale rozprzestrzeniają się w gazach?

Czytelnik: Podłużne.

Autor: Zagadza się. A w ciele stałym?

Czytelnik A: Poprzeczne.

Autor: I podłużne także. A w cieczy?

Czytelnik A: Tego nie jestem pewien. Może — jak w ciele stałym — podłużne i poprzeczne? Albo raczej tylko podłużne?

Czytelnik B: Fale poprzeczne w cieczy można łatwo zaobserwować: wystarczy rzucić kamień w wodę.

Autor: Postaram się to wyjaśnić. Przede wszystkim w gazach rozprzestrzeniają się tylko podłużne fale sprężyste, podczas gdy w ośrodkach skondensowanych (tj. wewnątrz ciał stałych i cieczy) rozprzestrzeniają się zarówno poprzeczne, jak i podłużne fale sprężyste. Następnie, nie wolno mylić fal wewnątrz wody z falami na powierzchni wody, wytworzonymi przez rzucony kamień. Natura fal powierzchniowych jest inna niż sprężystych. Jakie parametry charakteryzują fale?

Czytelnik A: Długość fali λ , okres drgań T , ich częstotliwość v .

prędkość rozprzestrzeniania się v . Między nimi występują następujące zależności:

$$\lambda = vT; \quad T = \frac{1}{v}. \quad (16.1)$$

Autor: Dobrze. Ale częściej stosowana jest częstość kołowa $\omega = 2\pi v$; wtedy $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Niech fala będzie wytworzana przez źródło drgające harmonicznie z okresem T i niech rozprzestrzenia się ona w kierunku osi Ox z prędkością v . Napiszcie równanie tej fali.

Czytelnik A: Nie wiem jak. Nigdy tego nie robilem.

Autor (do Czytelnika B): A co ty możesz powiedzieć o równaniu fali?

Czytelnik B: Wiem tylko tyle, że równanie fali to zależność wychylenia cząsteczek ośrodka współrzędnej położenia i czasu.

Zapisać tego równania nie potrafię.

Autor: Będziemy prowadzili rozważania razem. Umieścmy w punkcie $x = 0$ źródło drgań harmonicznych. Niech w chwili t_1 w punkcie $x = 0$ wychylenie będzie równe

$$y_1 = A \sin \omega t_1.$$

(Orgańa odbywają się w kierunku osi Oy , a fala rozprzestrzenia się w kierunku osi Ox). W jakiej chwili t w punkcie $x \neq 0$ można będzie zaobserwować wychylenie y_1 ?

Czytelnik B: Oczywiście w chwili $t_1 + \frac{x}{v}$, przecież na dojście do punktu x fala potrzebuje czasu $\frac{x}{v}$.

Autor: Zupełnie słusznie. A teraz oznaczmy wychylenie w punkcie x w chwili t przez $y(x, t)$ i spróbujmy sobie wyobrazić, w jakiej chwili takie samo wychylenie można było zaobserwować w punkcie $x = 0$

Czytelnik B: W chwili $t - \frac{x}{v}$.

Autor: Słusznie. A więc możemy napisać tak:

$$y(x, t) = y_1 \left(t - \frac{x}{v} \right),$$

gdzie przez y_1 oznaczyłem wychylenia w punkcie $x = 0$. Te wychylenia zachodzą zgodnie ze znanym nam prawem ruchu harmonicznego (14.1).

Czytelnik B: Zrozumiałem. Równanie fali będzie miało postać

$$y(x, t) = A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right]. \quad (16.2)$$

Autor: Masz rację. Posługując się zależnością (16.1), zapiszemy (16.2) w innej postaci:

$$y(x, t) = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right). \quad (16.3)$$

Zwracam uwagę, że $\frac{2\pi}{\lambda}$ zwykle oznacza się przez k i nazywa liczbą falową. Możemy więc zapisać wynik końcowy:

$$y(x, t) = A \sin (\omega t - kx); \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (16.4)$$

Teraz odpowiedz na pytanie:

Co trzeba zmienić w równaniu (16.4), jeśli fala rozprzestrzenia się niezgodnie z wrotem osi Ox , lecz przeciwnie?

Czytelnik: Trzeba zmienić znak przed prędkością. Zamiast (16.2) otrzymamy

$$y(x, t) = A \sin \left[\omega \left(t + \frac{x}{v} \right) \right] \quad (16.5)$$

i wreszcie

$$y(x, t) = A \sin (\omega t + kx). \quad (16.6)$$

Autor: Całkiem słusznie. Założymy następnie, że wzdłuż osi Ox rozprzestrzeniają się dwie jednakowe fale w przeciwnie strony. Co uzyskamy w wyniku dodania tych fal?

Czytelnik B: Wykonam dodawanie:

$$\begin{aligned} & A \sin(\omega t + \phi) + B \sin(\omega t + \phi + \pi/2) = \\ & = 2A \sin(\omega t) \cos(\pi/2). \end{aligned} \quad (16.7)$$

Autor:

Co możesz powiedzieć o właściwościach fali opisanej równaniem (16.7)?

Czytelnik A: Ma ona dwa razy większą amplitudę, pozostałe wielkości charakteryzujące falę nie zmieniły się.

Autor: To nie jest najważniejsze. Zwróćmy uwagę na punkty:

$$x = \frac{\pi}{2k}, \frac{3\pi}{2k}, \frac{5\pi}{2k}, \dots,$$

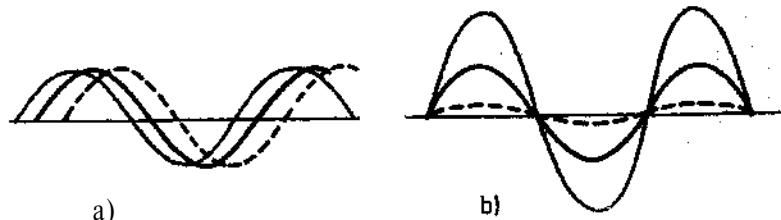
tj. $x = -A$, $x = \frac{\pi}{2}\lambda$, $x = \frac{5}{4}\lambda, \dots$. W tych punktach $\cos kx = 0$. Tak więc wychylenie w nich jest równe zeru w dowolnej chwili t .

Czytelnik B: Czy to oznacza, że w ośrodku, w którym rozchodzi się fala (16.7), są nieruchome punkty?

Autor: Dokładnie tak.

Dlatego ta falę opisaną równaniem (16.7) nazywa się falą stojącą a wskaźnikiem punkty wezłami fali stojącej.

Fale opisane równaniami (16.2) — (16.6) nazywa się falami bieżącymi. Na rysunku 16.1 zademonstrowano różnicę w zachowaniu się w czasie fali bieżącej oraz stojącej. A teraz porozmawiamy o falach dźwiękowych.



Rys. 16.1

Czym charakteryzuje się dźwięk?

Czytelnik A: Głośnością, wysokością i barwą.

Autor: Jak te wielkości są związane z wielkościami charakteryzującymi falę?

Czytelnik A: Wiem, że

głośność dźwięku jest proporcionalna do kwadratu amplitudy fali dźwiękowej, a wysokość jest związana / częstotliwością; im większa częstotliwość, tym dźwięk jest wyższy.

Autor: A co możesz powiedzieć o barwie?

Czytelnik A: Tego nie wiem.

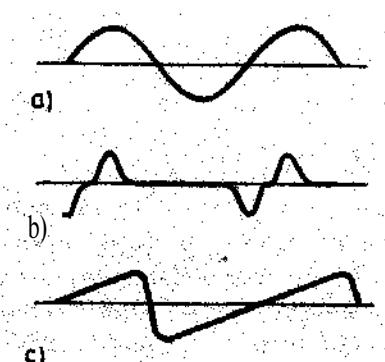
Autor: Barwa jest związana z „profilem” fali dźwiękowej.

Do tej pory mówiliśmy tylko o falach sinusoidalnych. Sinusoidalne fale dźwiękowe nazywa się prostymi (czystymi) tonami. Pod względem muzycznym są one mało wyraziste. Rysunek 16.2 wyjaśnia pojęcie „profilu” fal dźwiękowych, mających jednakową głośność i wysokość, ale różniących się barwą (ze względu na łatwość przedstawienia graficznego, pokazano fale poprzeczne): a — ton prosty (może go wytworzyć na przykład dzwon), b — barwa pianina, c — barwa skrzypiec.

Niepowtarzalność i wyrazistość różnych instrumentów muzycznych jest uwarunkowana swoistością barw wytwarzanych przez nie fal dźwiękowych.

Czytelnik B: Słyszałem, że w akustyce występuje zjawisko Dopplera. Co to jest?

Autor: Zjawisko Dopplera występuje nie tylko w akustyce, ale i w odniesieniu do fal o dowolnej naturze. Przypuśćmy, że oddalasz się od źródła dźwięku z prędkością v_0 . Wyobraźmy sobie, że w chwili t_1 doszło do ciebie maksymalne „wychylenie” fali dźwiękowej, a ty znajdowałeś się wtedy w punkcie x_1 . Następne maksymalne



Rys. 16.2

„wychylenie” dojdzie do ciebie w pewnej chwili $t_1 + T$, ale wtedy już będziesz w punkcie $x_1 + \tau v_0$. Łatwo zrozumieć, że czas T jest sumą okresu drgań T źródła i czasu, który był potrzebny, aby fala przebyła odległość τv_0 :

$$\tau = T + \tau \frac{v_0}{v}, \quad 06.8)$$

gdzie v — prędkość dźwięku; T — okres drgań dźwiękowych odbieranych przez ciebie jako obserwatora. Oznaczmy: $c_0 = \frac{2\pi}{T}$ — rzeczywista częstotliwość kołowa dźwięku, $\omega' = \frac{2\pi}{\tau}$ — częstotliwość kołowa dźwięku rejestrowana przez obserwatora. Wtedy z (16.8) otrzymujemy

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{c_0} + \frac{1}{\omega} \frac{v_0}{v}$$

albo

$$\omega' = \omega \left(1 + \frac{v_0}{v} \right). \quad (16.9)$$

A więc jeżeli oddalasz się od źródła dźwięku, wtedy słyszysz niższy dźwięk, o częstotliwości określonej wyrażeniem (16.9) i odwrotnie, jeżeli zblizasz się do źródła, wtedy słyszysz wyższy dźwięk o częstotliwości

$$\omega' \approx \omega \left(1 + \frac{v_0}{v} \right). \quad (16.10)$$

Na tym właśnie polega zjawisko Dopplera.

Zwracam uwagę, że do takich samych wniosków można dojść, przyjmując, że porusza się nie obserwator, lecz źródło dźwięku. Ważne jest, oczywiście, aby zachodził względny ruch źródła i obserwatora.

Czytelnik B: Czy w optyce obserwuje się zjawisko Dopplera?

Autor: Tak. Już mówiłem, że to zjawisko dotyczy fal o dowolnej naturze.

Czytelnik B: W takim razie jeżeli źródło światła oddala się od nas, to częstotliwość fali świetlnej chyba maleje? Ale wtedy na przykład kolor żółty powinien wyglądać jak czerwony.

Autor: W zasadzie masz słuszność. Jednak trzeba wziąć pod uwagę, że fale świetlne rozprzestrzeniają się z bardzo dużą prędkością, równą $3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Dlatego przy zazwyczaj występujących prędkościach źródeł światła (albo obserwatorów) praktycznie nie można uchwycić zmiany częstotliwości w światle. Astronomowie wykrywają zmianę częstotliwości światła, badając promieniowanie gwiazd. Więc na przykład z przesunięcia widma promieniowania gwiazdy w kierunku podczerwieni wnioskuja, że dana gwiazda oddala się od nas. A teraz porozmawiamy o zjawiskach naddźwiękowych. Jak to jest, według ciebie,

czy można na podstawie dźwięku odróżnić samolot naddźwiękowy od zwykłego?

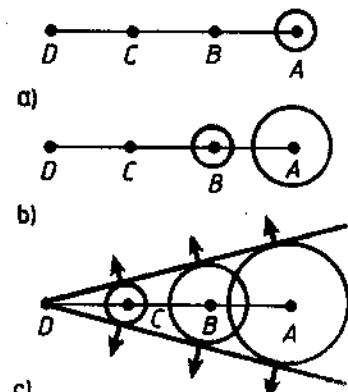
Czytelnik A: Jeżeli leci zwykły samolot, wtedy najpierw usłyszysz jego dźwięk, a dopiero potem przeleci on nad nami. Dla samolotu naddźwiękowego wszystko powinno odbywać się odwrotnie.

Czytelnik B: Słyszałem, że podczas lotu samolotu naddźwiękowego tworzy się dźwiękowa fala uderzeniowa. Słyszy się huk przypominający wybuch. Mogą nawet wylecieć szyby w domach.

Autor: Masz rację, tworzy się uderzeniowa fala dźwiękowa. Prześledzimy, jak ona powstaje. Przypuśćmy, że samolot naddźwiękowy leci z prędkością trzy razy większą od prędkości dźwięku.

Weźmy pod uwagę kilka kolejnych jego położień (rys. 16.3): w chwili t_1 samolot jest w punkcie A ; w chwili t_2 — w punkcie B . Czoło fali dźwiękowej rozchodzącej się z punktu A ma kształt sfery, pokazanej na rysunku a). W chwili t_3 samolot znajduje się w punkcie C ; czoła fal dźwiękowych rozchodzących się z punktów A i B pokazano na rysunku b).

W chwili t_4 samolot jest



Rys. 16.3

w punkcie D ; czoła fal dźwiękowych rozchodzących się z punktów A , B i C pokazano na rysunku c). Jeżeli dodamy wszystkie fale dźwiękowe na przykład w chwili t_4 , to uzyskamy czoło fali dźwiękowej w postaci stożka. Podczas ruchu samolotu czoło to rozprzestrzenia się z prędkością dźwięku w kierunkach zaznaczonych na rysunku strzałkami. To właśnie jest uderzeniowa fala dźwiękowa. Gdy tylko dojdzie do obserwatora, słyszy on gwałtowny wybuch. Im większa prędkość samolotu, tym węższy będzie stożek dźwiękowy.

Czytelnik B: Rozumiem teraz, dlaczego samoloty naddźwiękowe nie latają nad miastami.

Autor: Po tych moich objaśnieniach będziesz mógł bez szczególnych trudności rozwiązać zadanie:

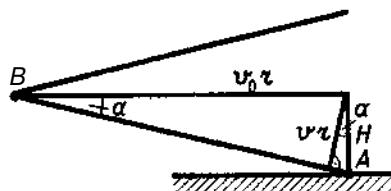
Samolot led poziomo z prędkością naddźwiękową v_0 . Obserwator usłyszał dźwięk samolotu po czasie τ od chwili, gdy zobaczył samolot nad swoją głową. Na jakiej wysokości leciał ten samolot?

Czytelnik B: Niech w punkcie A na rysunku 16.4 znajduje się obserwator. Usłyszy on dźwięk, gdy samolot znajdzie się w punkcie B . Z rysunku widać, że:

$$H \frac{v\tau}{\cos\alpha} \frac{v}{v_0} = \sin\alpha.$$

A więc

$$H = \frac{v\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2}}.$$



Rys. 16.4

Autor: Bardzo dobrze poradziłeś sobie z zadaniem.

Czytelnik B: Założyłem, że światło od samolotu doszło do obserwatora natychmiast. Ale w rzeczywistości światło rozprzestrzenia się ze skończoną prędkością.

Autor: Masz rację. Mówię już, że prędkość światła jest równa

$$3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}. O co chcesz zapytać?$$

Czytelnik B: A czy w optyce nie obserwuje się zjawisk nadświetlnych

Czytelnik A: To właśnie jest niemożliwe: w przyrodzie nie występują prędkości większe od prędkości światła.

Autor: Zadałeś interesujące pytanie. Rzec w tym, że prędkość rozprzestrzeniania się fal świetlnych w ośrodku zawsze jest trochę mniejsza od prędkości światła w próżni. Dlatego może zdarzyć się sytuacja, gdy cząstka (na przykład elektron) porusza się wewnątrz ośrodka z prędkością przewyższającą prędkość światła w tym ośrodku. Wtedy mamy do czynienia z typowym zjawiskiem nadświetlnym: leczący elektron wytwarza stożek świetlny — świetlną falę „uderzeniową”. Zjawisko to znane jest w fizyce jako efekt Wawiłowa-Czerenkowa.

Zadania

- 16.1. Sygnał ultradźwiękowy wysłany ze statku pionowo do dołu, powraca po upływie $t = 8$ s. Oblicz głębokość morza h . Prędkość dźwięku w wodzie $v = 1450 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- 16.2. Prędkość dźwięku w wodzie $v = 1450 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Częstotliwość drgań $v = 725 \text{ Hz}$. Oblicz, w jakiej odległości Δx znajdują się sąsiadujące ze sobą punkty, które wykonują drgania: 1) w fazach przeciwnych; 2) w fazach jednakowych; 3) z różnicą faz $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$.
- 16.3. Na sznurze o długości $/ = 2 \text{ m}$, którego jeden koniec przywiązano do ściany, a drugi drga z częstotliwością $v = 5 \text{ Hz}$, wzbudzane są fale stojące. Między ścianą i drgającym końcem sznura tworzą się trzy węzły. Znajdź prędkość v rozprzestrzeniania się fal wzdłuż sznura.

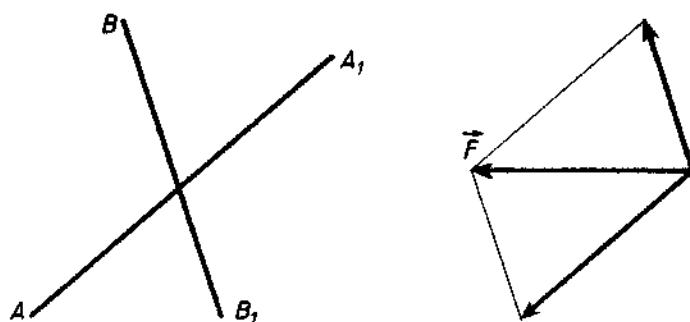
17. Czy umiesz rozkładać wektory sił?

Prawa statyki – to prawa równowagi. Uważajmy je przestudując, gdyż mają one duże znaczenie praktyczne. W szczególności podstawowe prawa statyki muszą być znane inżynierom konstruktorom. Poniżej rozpatrzmy przykłady ilustrujące reguły rozkładania wektorów. Przedyskutujemy warunki równowagi cięg i zastosujemy je do wyznaczania położenia środka ciężkości cięg.

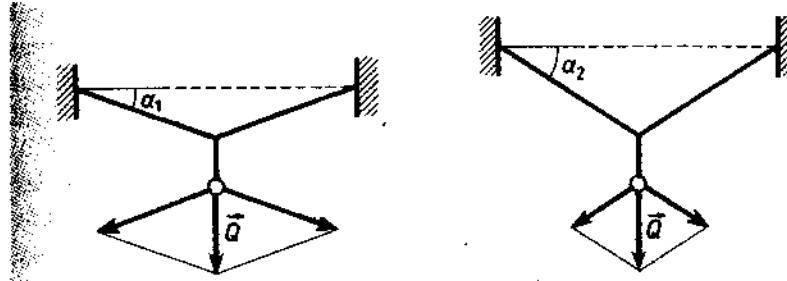
Autor: Podczas rozwiązywania zadań z mechaniki często trzeba prowadzić rozkładanie sił. Dlatego nie będzie przesadą, jeżeli zajmiemy się tym bardziej szczegółowo. Przede wszystkim przypominam podstawową regułę:

Aby rozłożyć wektor siły na jakieś dwie składowe o określonych kierunkach, należy przeprowadzić przez początek i koniec wektora siły po dwie proste, które są parami równoległe do odpowiedniego kierunku rozkładania. W wyniku otrzymuje się równoległobok, którego boki wyznaczają poszukiwane składowe wektora danej siły. Tę regułę wyjaśniono na rysunku 17.1, który przedstawia rozłożenie siły \vec{F} na dwa kierunki: AA_1 i BB_1 . Rozpatrzmy kilka przykładów.

Pierwszy przykład (rys. 17.2).



Rys. 17.1



Rys. 17.2

Czytelnik A: Do środków dwóch nici podwieszone są obciążniki, przy czym sily ciężkości działające na obydwa obciążniki są jednakowe (oznaczono je przez Q). Nici zwieszą się pod kątemem α_1 i α_2 . Która z nici jest silniej naprężona?

Czytelnik A: Na tym samym rysunku rozłożę wektor siły ciężkości przyłożonej do każdego obciążnika na kierunki wyznaczone przez nici. Z rozłożenia wynika, że siła naprężenia jest równa $F_n = \frac{Q}{2 \sin \alpha}$.

A więc silniej naprężona jest ta nić, która zwiesza się pod mniejszym kątem.

Autor: Całkiem poprawnie. A czy można naprężyć nić tak mocno, aby wcale się nie zwieszała pod ciężarem obciążnika?

Czytelnik A: Dlaczego by nie?

Autor: Nie spiesz się z odpowiedzią. Wykorzystaj wynik, który przed chwilą otrzymałeś.

Czytelnik A: Tak, już rozumiem. Naprężenie takie nie jest możliwe. Przecież ze zmniejszaniem kąta wzrasta siła naprężenia nici. Niezależnie od tego, jak wielka byłaby wytrzymałość nici, przy dostatecznie małym kącie a siła naprężenia spowoduje rozerwanie nici.

Autor: Należy zaznaczyć, że zwieszanie się nici pod działaniem podwieszonego do niej obciążnika zachodzi dzięki właściwościom sprężystym nici. umożliwiającym jej rozciąganie się. Gdyby nić nie

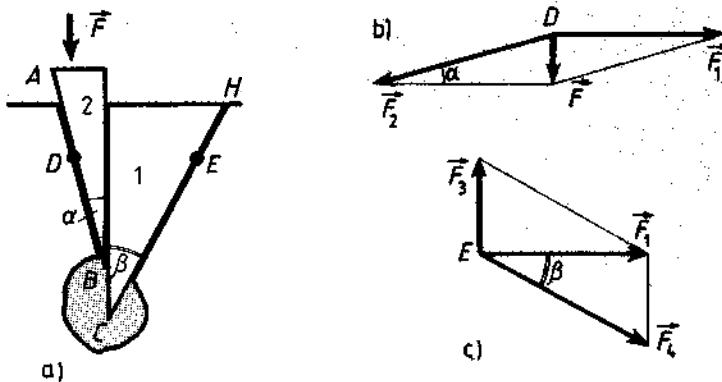
mogła się odkształcać (rozciągać), wtedy nie można byłoby na niej zawieszać obciążnika. Widać stąd, że w technice budowlanej spełnienie wymagań wytrzymałościowych różnych konstrukcji jest ściśle związane ze zdolnością tych konstrukcji do odkształcania sprężystych (jak powiadają, konstrukcja „powinna oddychać”). Przesadnie sztywne konstrukcje nie nadają się do użytku, ponieważ powstające w nich naprężenia mimo małych odkształceń mogą być zbyt wielkie. Takie konstrukcje mogą ulec zniszczeniu już pod działaniem własnego ciężaru. Jeżeli pominie się masę nici w rozpatrywanym powyżej przykładzie, nietrudno będzie znaleźć zależność między kątem a zwieszenia nici i wektorem sił ciężkości Q . W tym celu trzeba skorzystać z prawa Hooke'a opisującego sprężyste rozciąganie nici (zob. zadanie 17.4).

Drugi przykład. Jak wiadomo, „wybija się klin klinem”. Przekonamy się o tym, wykorzystując rozkładanie sił.

Na rysunku 17.3a przedstawiona jest próba wybicia klinu ze szczeliny przez wbijanie w nią klinu 1 siłą \vec{F} . Dane są kąty α i β . Znaleźć wartość siły \vec{F} .

Czytelnik A: Nie potrafię rozwiązać tego zadania.

Autor: Przenieśmy wektor siły \vec{F} wzdłuż prostej jej działania do punktu D i rozłożymy go na składową o kierunku poziomym



Rys. 17.3

i składową prostopadłą do boku AB klinu 2. Otrzymane w ten sposób składowe oznaczmy odpowiednio \vec{F}_1 i \vec{F}_2 (rys. 17.3b). Składowa \vec{F}_2 jest zrównoważona przez siłę reakcję lewej ścianki szczeliny; składowa \vec{F}_1 , równa co do wartości $\frac{|\vec{F}|}{\operatorname{tg} \alpha}$, działa na klin 1.

Rozłożymy tę siłę w punkcie E na składową o kierunku pionowym i składową prostopadłą do boku CH klinu 1; otrzymamy odpowiednio składowe \vec{F}_3 i \vec{F}_4 (rys. 17.3c). Składowa \vec{F}_4 jest zrównoważona przez siłę reakcję prawej ścianki szczeliny, natomiast składowa \vec{F}_3 przyczynia się do „wysadzenia” klinu 1 ze szczeliny. To jest właśnie ta poszukiwana siła. Nietrudno zauważyć, że jest ona równa

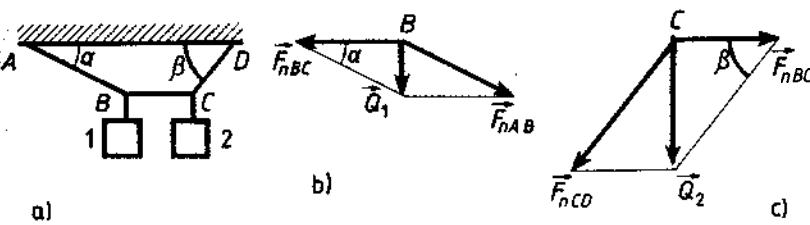
$$F_3 = F_1 \operatorname{tg} \beta = F \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Trzeci przykład (rys. 17.4a).

Na nici, której środkowa część jest pozioma, zawieszone są dwa obciążniki, na które działają odpowiednio siły ciężkości Q_1 i Q_2 . Wyznaczyć kąt β , jeżeli kąt α jest znany, oraz siły naprężenia każdej części nici (F_{nAB} , F_{nBC} , F_{nCD}).

Czytelnik A: Rozłożę wektor siły ciężkości Q_1 na kierunki AB i BC (rys. 17.4b). Z odpowiednich trójkątów otrzymujemy:

$$F_{nAB} = \frac{Q_1}{\sin \alpha} \quad \text{i} \quad F_{nBC} = \frac{Q_1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$



Rys. 17.4

Tak więc dwie siły naprężenia już znalazłem. Następnie rozłożę wektor siły ciężkości \vec{Q}_2 na kierunki BC i CD (rys. 17.4c) i analogicznie otrzymuję:

$$F_{nBC} = \frac{Q_2}{\tan \beta} \quad \text{i} \quad F_{nCD} = \frac{Q_2}{\sin \beta}.$$

Przyrównując siły naprężenia odcinka BC nici, znajduję

$$\frac{Q_1}{\tan \alpha} = \frac{Q_2}{\tan \beta},$$

skąd

$$\beta = \arctg \frac{Q_2 \tan \alpha}{Q_1}.$$

Podstawiając następnie ten wynik do wzoru na F_{nCD} , znajdujemy siłę naprężenia F_{nCD} .

Autor: Czyżby było trudno doprowadzić zadanie do końca — otrzymać wzór na siłę F_{nCD} ?

Czytelnik A: Do tego wzoru wejdzie sinus od arctg, tj.

$$F_{nCD} = \frac{Q_2}{\sin \arctg \frac{Q_2 \tan \alpha}{Q_1}}.$$

Autor: Twój wynik jest dobry, ale może być zapisany w prostszej postaci, jeżeli wyrazi się $\sin \beta$ przez $\tan \beta$:

$$\sin \beta = \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}}.$$

Ponieważ $\tan \beta = \frac{Q_2}{Q_1} \tan \alpha$, otrzymujemy

$$F_{nCD} = \frac{Q_1}{\tan \alpha} \sqrt{1 + \left(\frac{Q_2}{Q_1} \right)^2 \tan^2 \alpha}.$$

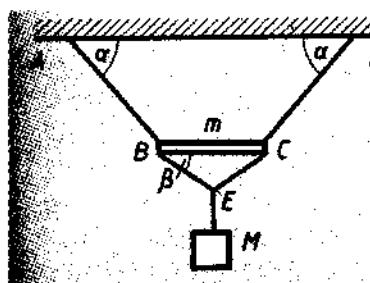
Czytelnik B: Widzę, że zanim przystąpi się do egzaminu z fizyki, trzeba dosyć gruntownie powtórzyć matematykę.

Autor: Twoja uwaga jest bardzo słuszna.

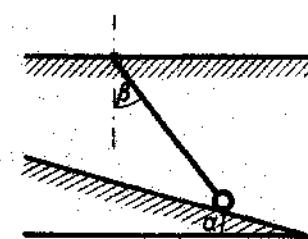
Zadania

17.1. W szczele wbito dwa kliny (rys. 17.3). Podczas działania na klin 2 pewnej siły klin 1 zaczyna poruszać się do góry. Dlajakiej wartości współczynnika tarcia μ między klinami i powierzchnią szczeliny jest to możliwe? Pomiń masę klinów i tarcie między nimi.

17.2. Jednorodny pręt o masie $m = 6 \text{ kg}$ zawieszono na niciach (rys. 17.5). Masa obciążnika $M = 10 \text{ kg}$. Oblicz siły: naprężenia nici oraz skierowaną wzdłuż pręta siłę F reakcji pręta, jeżeli $a = 2\beta = 60^\circ$.



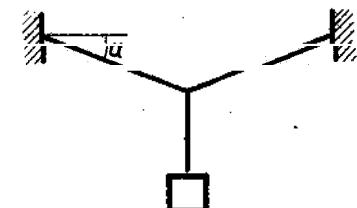
Rys. 17.5



Rys. 17.6

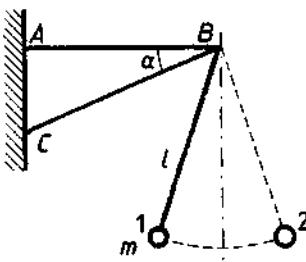
17.3. Wyznacz siłę F_n naprężenia nici i siłę F_N nacisku kulki o masie m na równię pochyłą (rys. 17.6). Kąt nachylenia równi wynosi α , kąt między nicią i pionem jest równy β . Pomiń tarcie między kulką i równią.

17.4. Sprężysta nić, umocowana w kabинie windy, zwiesza się pod działaniem obciążnika zawieszonego w jej środku (rys. 17.7). Kąt zwieszenia wynosi $\alpha_1 = 30^\circ$ dla windy spoczywającej i $\alpha_2 = 45^\circ$ dla windy poruszającej się z przyspieszeniem. Wyznacz wartość i kierunek przyspieszenia a windy. Pomiń masę nici.



Rys. 17.7

- 17.5. Kulkę o masie $m = 100$ g zawieszono na nici o długości $l = 1$ m na wsporniku (rys. 17.8; $\alpha = 30^\circ$). Kulce w położeniu równowagi nadano poziomo skierowaną prędkość $v = 2 \frac{m}{s}$, po czym zaczęła ona wykonywać drgania. Oblicz siły F działające w prętach AB i BC , gdy kulka znajduje się w punktach maksymalnego odchylenia od położenia równowagi.



Rys. 17.8

18. Co wiesz o równowadze ciał?

Autor:

Na rysunku 18.1 pokazano dwa położenia równowagi cegły. Obydwa są położeniami równowagi trwalej, jednak różnią się stopniem trwałości. Które z tych położień jest bardziej trwałej?

Czytelnik A: Oczywiście, bardziej trwałe jest położenie cegły przedstawione na rysunku 18.1a.

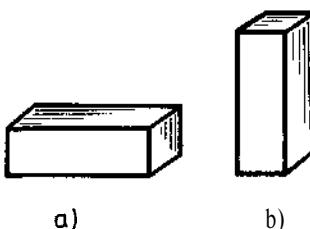
Autor: Dlaczego?

Czytelnik A: Dlatego, że środek ciężkości cegły znajduje się bliżej powierzchni Ziemi.

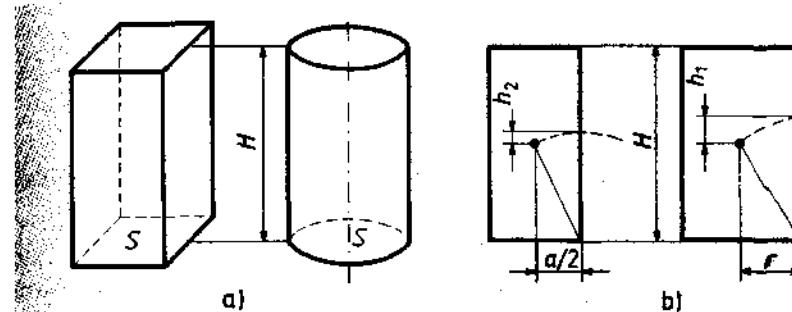
Autor: Nie tylko o to chodzi.

Czytelnik B: Ponadto pole podstawy jest większe niż w położeniu przedstawionym na rysunku 18.1b.

Autor: I znowu nie tylko o to chodzi. Aby zorientować się w istocie zagadnienia, weźmiemy pod uwagę położenia równowagi dwóch ciał: prostopadłościanu o podstawie kwadratowej i cylindra.



Rys. 18.1



Rys. 18.2

(rys. 18.2a). Niech prostopadłościan i cylinder mają jednakowe wysokości H i jednakowe pola powierzchni podstaw S .

Środki ciężkości ciał znajdują się na tej samej wysokości i pola podstaw tych ciał są jednakowe, ale, jak się okazuje, stopień trwałości równowagi ciał jest inny.

Miara trwałości konkretnego stanu równowagi jest energią, którą należy dostarczyć, aby definitywnie wyprowadzić ciało z tego stanu.

Czytelnik B: Co oznacza słowo „definitywnie”?

Autor: To znaczy, że ciało wyprowadzone z położenia równowagi i pozostawione samo sobie nie będzie mogło wrócić do położenia wyjściowego. Wymieniona energia jest równa iloczynowi siły ciężkości i wysokości, na którą należy unieść środek ciężkości ciała, aby nie mogło ono powrócić do stanu wyjściowego. W podanym przykładzie z cylinderem i prostopadłościanem promień cylindra

$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$, bok podstawy prostopadłościanu $a = \sqrt{S}$. Aby wyprowadzić cylinder z położenia równowagi (rys. 18.2b), należy unieść jego środek ciężkości na wysokość

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2} - \frac{H}{2};$$

aby wyprowadzić prostopadłościan z położenia równowagi. Trzeba unieść jego środek ciężkości na wysokość

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{H}{2}$$

Ponieważ $\frac{a}{r} = \frac{\sqrt{s}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} < 1$, to $h_2 < h_1$. Tak więc z dwóch

wziętych pod uwagę ciał cylinder jest bardziej stabilny. Po tych uwagach proponuję wrócić do przykładu z dwoma położeniami cegiel.

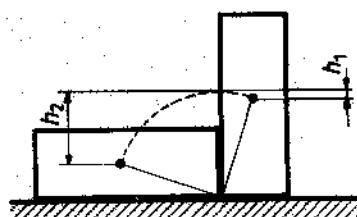
Czytelnik A: Jeżeli będziemy przewracać cegłę, to będzie ona przechodziła z jednego położenia równowagi do innego. Na rysunku 18.3 linią przerywaną zaznaczono tor, który przy tym zakreśla środek ciężkości cegły. Aby wyprowadzić cegłę z położenia pionowego, trzeba unieść jej środek ciężkości na wysokość h_1 , tj. dostarczyć energię mgh_1 , ale żeby wyprowadzić cegłę z położenia poziomego, należy podnieść jej środek ciężkości na większą wysokość h_2 , tj. dostarczyć większą energię mgh_2 . Można więc powiedzieć, że stopień stabilności cegły leżącej jest większy, ponieważ

$$mgh_2 > mgh_1. \quad (18.1)$$

Autor: Dopiero teraz twoje uzasadnienie większego stopnia stabilności ciała w położeniu leżącym stało się całkiem poprawne.

Czytelnik B: Ale na to, jakie będą wysokości h_1 i h_2 , mają przecież wpływ wysokość środka ciężkości nad podłogą i pole podstawy. Czyż to nie oznacza, że chcąc przedyskutować stopień stabilności ciał, postępujemy słusznie, porównując wysokości środków ciężkości i pola powierzchni podstaw?

Autor: Tak, to jest słuszne, ale tylko w takim stopniu, w jakim te wielkości wpływają na różnicę między wysokościami uniesienia h_1 i h_2 . Przekonaliśmy się o tym w przykładzie z cylinderem i prostą padłościanem, gdzie porównanie samych wysokości środków cie-



Rys. 18.3

kości i samych pól podstawy ciał nie pozwoliło na udzielenie odpowiedzi na pytanie, które z tych dwóch ciał znajduje się w położeniu bardziej stabilnym. Ponadto chcę zwrócić waszą uwagę na jeszcze jedną okoliczność. Dotychczas milcząco zakładaliśmy, że porównywane ciała wykonane są z tego samego materiału. Aby zachodziła nierówność (18.1), wystarczyło spełnienie geometrycznego warunku $h_1 < h_2$. Jednak porównywane ciała mogą być wykonane z różnych materiałów. Wtedy nierówność (18.1) może być spełniona nawet w takiej sytuacji, gdy $h_1 > h_2$, w wyniku odpowiedniej różnicy gęstości ciał. Więc na przykład cegła styropianowa w położeniu leżącym jest mniej stabilna niż zupełnie podobna cegła z ołowiu, znajdująca się w pozycji stojącej.

Przedyskutujemy teraz warunki równowagi ciała.

Jakie warunki równowagi są wam znane?

Czytelnik A: Suma wszystkich sił przyłożonych do ciała powinna być równa zeru. Ponadto wektor siły ciężkości powinien przechodzić przez powierzchnię podstawy ciała.

Autor: Prawie dobrze. Jednak lepiej formułować warunki równowagi w innej postaci, bardziej ogólnej i wygodnej w zastosowaniach praktycznych.

Należy rozróżnić dwa warunki równowagi.

Pierwszy:

Rzuty wszystkich wektorów sił przyłożonych do ciała na dowolną prostą powinny wzajemnie się kompensować. Innymi słowy, algebraiczna suma rzutów wszystkich wektorów sił na dowolną prostą powinna być równa零.

Ten warunek pozwala ułożyć tyle równań, ile w zadaniu występuje niezależnych kierunków: dla ruchu prostoliniowego — jedno równanie, dla ruchu na płaszczyźnie — dwa, w przestrzeni — trzy. (Mówiąc o kierunkach niezależnych, myślimy o kierunkach wzajemnie prostopadłych).

Drugi (warunek momentów sił):

Algebraiczna suma momentów sił względem dowolnego punktu powinna być równa zero.

Przy tym wszystkie momenty sił, dążących do obrócenia ciała wokół

wybranego punktu w jedną stronę (na przykład zgodnie z ruchem wskazówek zegara) bierze się ze znakiem plus, a wszystkie momenty sił, dążących do obrócenia ciała w stronę przeciwną, bierze się ze znakiem minus.

Aby zapisać warunek momentów sił, należy:

- znaleźć wszystkie siły przyłożone do ciała;
- wybrać punkt, względem którego chcemy ustalić momenty sił;
- znaleźć momenty wszystkich sił względem wybranego punktu;
- znaleźć sumę algebraiczną momentów sił i przyrównać ją do zera.

Stosując warunek momentów sił, trzeba koniecznie uwzględnić, że:

— przytoczone powyżej sformułowanie odnosi się do sytuacji gdy wszystkie siły i odległości leżą w jednej płaszczyźnie (ruch nie jest trójwymiarowy),

— algebraiczna suma sił powinna być równa zeru dla momentów ustalonych względem dowolnego punktu, wybranego zarówno wewnętrz, jak i na zewnątrz ciała. Trzeba podkreślić, że od wyboru punktu (względem którego ustalone są momenty sił) zależą wartości poszczególnych momentów sił, jednak suma algebraiczna momentów zawsze pozostaje równa zera.

Aby lepiej zrozumieć warunki równowagi, rozwiążemy konkretne zadanie.

Belka jest luźno umocowana w punktach B i C (rys. 18.4a). **W punkcie D na belce zawieszony jest obciążnik.** Dane są odległości: $|AB| = a$, $|BC| = 2a$, $|CD| = a$. Znaleźć siły reakcji podpór R_B i R_C . Przyjąć, że siły reakcji podpór działają w kierunku pionowym.

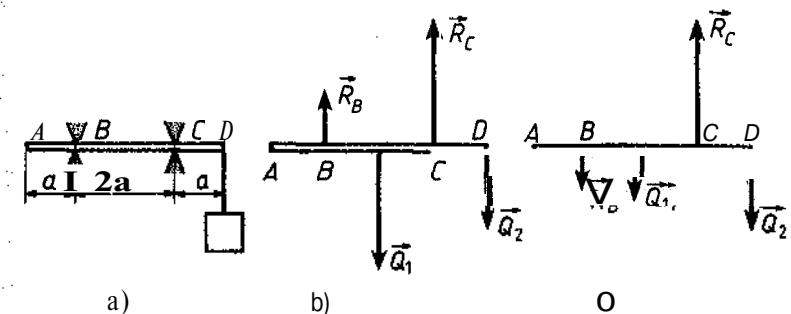
Jak zwykle, na początku wskażcie siły przyłożone do ciała.

Czytelnik A: Ciałem w danym zadaniu jest belka. Przyłożone są do niej cztery siły: siła ciężkości belki Q_1 , siła ciężkości obciążnika Q_2 oraz siły reakcji R_B i R_C .

Autor: Przedstaw te siły na rysunku.

Czytelnik A: Ale nie wiem, jak są zwrócone siły reakcji — w góra czy w dół.

Autor: Załóż, że wektory obu sił reakcji mają zwrot do góry.



Rys. 18.4

Czytelnik A: W takim razie mój rysunek wygląda tak (rys. 18.4b). Zapiszę pierwszy warunek równowagi w postaci równania

$$R_B + R_C = Q_1 + Q_2. \quad (18.2)$$

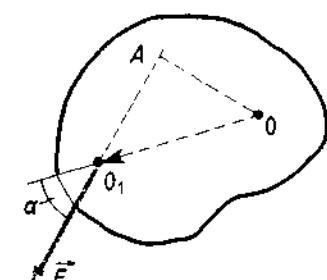
Autor: Nie mam zastrzeżeń do tego równania. Jednak w danym zadaniu prościej będzie posłużyć się drugim warunkiem równowagi (warunkiem momentów sił), stosując go za pierwszym razem do momentów względem punktu B, a za drugim razem — względem punktu C.

Czytelnik A: Dobrze, tak właśnie zrobię. Moment siły R_C względem punktu B jest równy iloczynowi tej siły i odległości od punktu B do punktu C przyłożenia siły...

Autor: W danym wypadku twoje wyznaczenie momentu siły jest poprawne, ale w ogólności trzeba pamiętać, że

moment siły jest równy iloczynowi wartości siły i najkrótszej odległości od punktu, względem którego oblicza się moment, do przeniesienia której jest wektor siły. Zauważ, że dla tego samego wektora siły moment może być różny, jeśli punkt obliczania zmieni się.

Czytelnik A: Aby więc wyznać moment siły F względem



Rys. 18.5

punktu O (rys. 18.5), trzeba z punktu O wystawić prostą prostopadłą do kierunku siły \vec{F} , a wtedy moment siły będzie równy

$$F \cdot |OA| = F \cdot |OO_1| \sin\alpha.$$

Autor: Zupełnie słusznie. Ale wróćmy do naszego zadania.

Czytelnik A: Ułoży dwa równania momentów sił. W wyniku otrzymuję następujący układ równań:

$$\begin{cases} Q_1 a - R_C 2a + Q_2 3a = 0 & (\text{względem punktu } B), \\ R_B 2a - Q_1 a + Q_2 a = 0 & (\text{względem punktu } C). \end{cases} \quad (18.3)$$

Autor: W każdym twoim równaniu występuje tylko jedna niewiadoma. Można ją obliczyć bezpośrednio.

Czytelnik A: Z równań (18.3) znajdujemy:

$$R_B = \frac{Q_1 - Q_2}{2}, \quad (18.4)$$

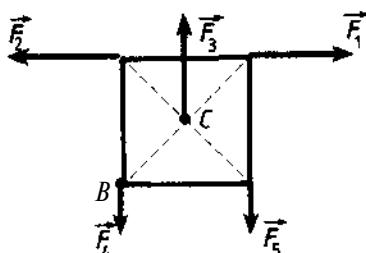
$$R_C = \frac{Q_1 + 3Q_2}{2}. \quad (18.5)$$

Autor: Wyrażenie (18.5) ma zawsze wartość dodatnią. Oznacza to, że wektor siły reakcji R_C ma zwrot zawsze do góry (tak jak założyliśmy). Wyrażenie (18.4) jest dodatnie, jeżeli $Q_1 > Q_2$, ujemne, jeżeli $Q_1 < Q_2$ i staje się równe zero, jeżeli $Q_1 = Q_2$. Oznacza to, że dla $Q_1 > Q_2$ wektor siły R_B ma zwrot taki jak założyliśmy, tj. do góry (rys. 18.4b); dla $Q_1 < Q_2$ wektor siły R_B ma zwrot do dołu (rys. 18.4c), dla $Q_1 = Q_2$ siła reakcji R_B nie występuje. Równanie (18.2) można wykorzystać do sprawdzenia poprawności rozwiązania układu (18.3).

Zadania

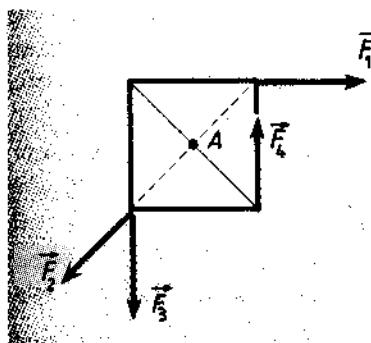
- 18.1. Do płaskiego ciała mającego kształt kwadratu, przyłożono pięć sił: $F_1 = 2 \text{ N}$, $F_2 = 2 \text{ N}$, $F_3 = 2 \text{ N}$, $F_4 = 1 \text{ N}$, $F_5 = 1 \text{ N}$ (rys. 18.6)

Rys. 18.6

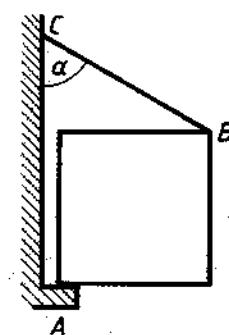


(rys. 18.6). (rys. 18.6). Bok kwadratu $a = 2 \text{ m}$. Oblicz momenty wymienionych sił względem punktów B i C . Jak porusza się to ciało?

- 18.2. Do płaskiego ciała mającego kształt kwadratu o boku $a = 2 \text{ m}$, przyłożono cztery siły o wartości 2 N każda (rys. 18.7). Oblicz wypadkową F_w wszystkich sił i moment M_A tych sił względem punktu A .



Rys. 18.7



Rys. 18.8

- 18.3. Jednorodny kwadrat w punkcie A opiera się o występ w ścianie, a w punkcie B jest zawieszony na lince (rys. 18.8). Wyznacz siłę F_n naprężenia linki BC , wartość siły reakcji R w punkcie A i kierunek tej siły. Masa kwadratu jest równa m , a kąt między linką i pionem wynosi α .
- 18.4. Na poziomej powierzchni stołu leży łańcuch o długości l . Jaka może być maksymalna długość l_1 zwisającej ze stołu części łańcucha, jeżeli współczynnik tarcia między łańcuchem i stołem jest równy μ ?
- 18.5. Jaką pracę W należy wykonać, aby przewrócić ciężki sześcian o masie m na inną ścianę, obracając go wokół krawędzi? Gęstość materiału sześcianu jest równa p .
- 18.6. Pod jakim najmniejszym kątem α do podłogi można postawić na poziomej szorstkiej podłodze drabinę o masie m , wspartą o ścianę, aby człowiek o masie M mógł wejść po niej do końca? Współczynnik tarcia poślizgowego drabiny o podłodze jest równy μ .

19. W jaki sposób znajdujesz położenie środka ciężkości?

Autor: Osoby przystępujące do egzaminu niekiedy mają trudności ze znalezieniem środka ciężkości ciała albo układu ciał. Czy nasuwają się wam jakieś wątpliwości, dotyczące tych zadań?

Czytelnik B: Wydaje mi się, że w tym zakresie wszystko jest proste. Dla ciał symetrycznych środek ciężkości określa się na podstawie położen osi symetrii; dla ciał niesymetrycznych położenie środka ciężkości określa się z warunku: Suma momentów sił ciężkości względem środka ciężkości jest równa零.

Autor: Spróbujmy na wstępie sprecyzować, co to jest środek ciężkości.

Dowolne ciało można uważać za zespół punktów materialnych przy czym na każdy z nich działa siła ciężkości. Wypadkowa tyci elementarnych sił ciężkości jest właśnie siła ciężkości ciała, a punkt przyłożenia tej wypadkowej nazywany jest środkiem ciężkości cia>

Czytelnik B: Ja znam inną definicję środka ciężkości: środek ciężkości ciała to punkt przecięcia takich prostych, że jeżeli wzdu>

Autor: Mówiąc ściśle, Twoja definicja odnosi się do środka masy, ale ponieważ pod działaniem samej siły ciężkości ciało uzyskuje właśnie ruch postępowy, to często środek masy nazywany jest środkiem ciężkości.

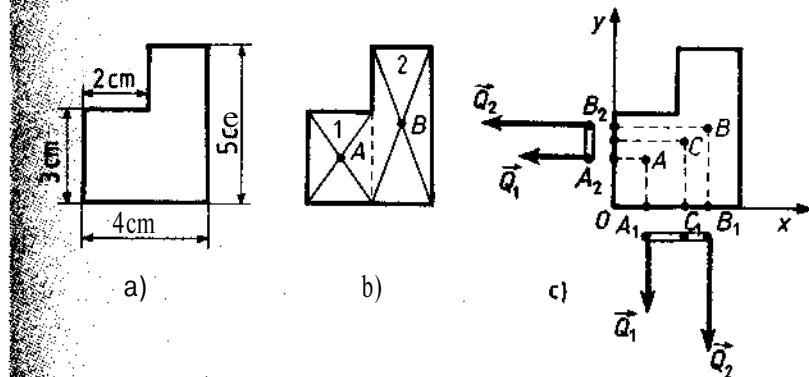
Środek ciężkości ciała ma następującą właściwość: jeżeli w punkcie ciało zostanie podparte, to będąc ono znajdowało w stanie równowagi.

Zazwyczaj do wyznaczenia środka ciężkości wykorzystuje się powyższą właściwość. W tym celu układa się równania momentów elementarnych sił ciężkości względem osi przechodzącej przez środek ciężkości ciała. Rozpatrzmy konkretne przykłady.

Pierwszy przykład.

Wyznacz położenie środka ciężkości jednorodnej płytki, przedstawionej na rysunku 19.1a.

Czytelnik B: Na początku podzieli płytke na dwa prostokąty (rys. 19.1b linia kreskowa). Środki ciężkości prostokątów 1 i 2 znau



Rys. 19.1

dują się w punktach A i B. Środki ciężkości tych prostokątów są identyczne z ich środkami symetrii. Siły ciężkości prostokątów są proporcjonalne do ich pól, siła ciężkości Q_1 prostokąta 1 jest liczbowo równa 6 jednostkom (1 jednostka odpowiada polu 1 cm^2); siła ciężkości Q_2 prostokąta 2 liczbowo jest równa 10 jednostkom. Co robić dalej — nie wiem.

Autor: Przeprowadzimy rzutowanie punktów A i B na osie układu współrzędnych Ox i Oy ; rzuty oznaczmy symbolami A_1, B_1 na osi Ox i A_2, B_2 na osi Oy . Następnie weźmiemy pod uwagę „pręty” A_1B_1 i A_2B_2 i założymy, że masa jest skupiona w końcach „prętów”, przy czym masa końca jest równa masie odpowiedniego prostokąta (rys. 19.1c). W wyniku tego wyznaczenie środka ciężkości naszej płytki sprowadza się do znalezienia środków ciężkości „prętów” A_1B_1 i A_2B_2 . Położenia tych środków ciężkości będą właśnie współrzędnymi poszukiwanego środka ciężkości płytka. Wyznaczmy najpierw położenie środka ciężkości „pręta” A_1B_1 (punktu C_1). Ułożymy równanie momentów sił względem punktu C_1 (rys. 19.1c):

$$(x_c - x_A)6 - (x_B - x_c)10 = 0,$$

gdzie $x_A = 1 \text{ cm}$, $x_B = 3 \text{ cm}$, x_c — współrzędna środka ciężkości płytka. Znajdujemy $x_c = \frac{6}{2} \text{ cm}$.

Analogicznie wyznaczamy położenie środka ciężkości „pręta” A_2B_2 :

$$(y_C - y_A)6 - (y_B - y_C)10 = 0,$$

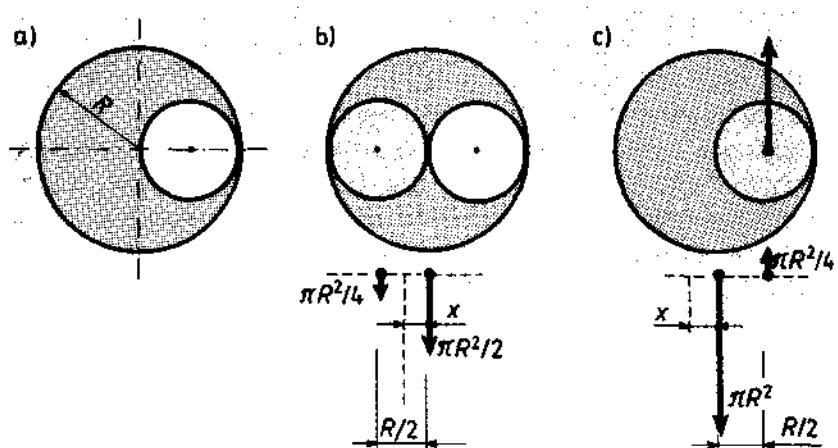
gdzie $y_A = 1,5 \text{ cm}$, $y_B = 2,5 \text{ cm}$. Druga współrzędna poszukiwanego środka ciężkości jest równa $y_C = \frac{17}{8} \text{ cm}$.

Czytelnik B: Zrozumiałem. Współrzędna x_C środka ciężkości wyznaczyłbym dokładnie tak samo. Ale miałem wątpliwości, czy tym sposobem można wyznaczyć współrzędną y_C .

Autor: Drugi przykład.

Wyznaczyć położenie środka ciężkości cienkiego jednorodnego dysku o promieniu R , z którego wycięto krążek o promieniu $r = \frac{R}{2}$ (rys. 19.2a).

Zamiast danego koła z otworem będziemy rozpatrywać układ dwóch ciał: koło z dwoma symetrycznie położonymi otworami oraz kółko, które jest wstawione do jednego z otworów (rys. 19.2b). Środki ciężkości tych ciał znajdują się w punktach będących



Rys. 19.2

środkami symetrii ciał. Biorąc pod uwagę, że siła ciężkości Q koła z dwoma otworami jest proporcjonalna do jego pola $\pi R^2 - \frac{2\pi R^2}{4} = \frac{\pi R^2}{2}$, a siła ciężkości Q_1 małego kółka jest również proporcjonalna do jego pola $\frac{\pi R^2}{4}$, znajdujemy punkt przyłożenia wypadkowej dwóch sił przedstawionych w dolnej części rysunku 19.2b. Oznaczmy przez x odległość od poszukiwanego środka ciężkości do geometrycznego środka dużego koła. Wtedy zgodnie z rysunkiem możemy zapisać:

$$\frac{\pi R^2}{4} \left(\frac{R}{2} - x \right) = \frac{\pi R^2}{2} x, \quad \text{skąd} \quad x = \frac{R}{6}.$$

Możliwe jest także inne podejście do postawionego zadania. Zastąpimy dane koło z otworem pełnym kołem (bez jakichkolwiek otworów) i kółkiem znajdującym się w tym miejscu, gdzie był otwór (rys. 19.2c). Do tego kółka przyłożona jest ujemna siła ciężkości (tzn. zwrócona do góry). Siła ta będzie równoważyć dodatnią siłę ciężkości odpowiedniej części pełnego koła, co w sumie odpowiada kołu z otworem. Zadanie sprowadza się wówczas do znalezienia punktu przyłożenia wypadkowej siły przedstawionych w dolnej części rysunku 19.2c. Zgodnie z tym rysunkiem zapiszemy:

$$\pi R^2 x = \frac{\pi R^2}{4} \left(\frac{R}{2} + x \right),$$

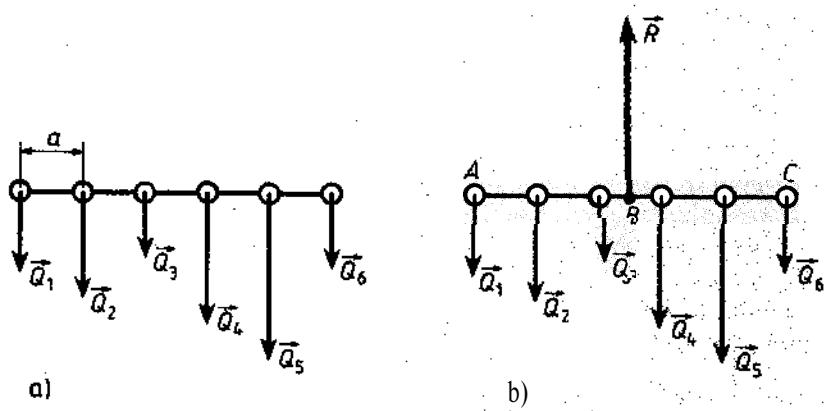
skąd, tak samo jak poprzednio $x = \frac{R}{6}$.

Czytelnik A: Mnie się bardziej podoba podejście pierwsze: nie ma w nim potrzeby wprowadzania ujemnej siły ciężkości.

Autor: Chciałbym jeszcze dać zadanie dotyczące znajdowania środka ciężkości układu obciążników przedstawionego na rysunku 19.3a.

Danych jest sześć różnych obciążników, na które działają siły ciężkości Q_1, Q_2, \dots, Q_6 . Obciążniki rozmieszczone są wzdłuż pręta w jednakowych wzajemnych odległościach. Siłę ciężkości samego pręta pomijamy.

Jak rozpoczębyś rozwiązywanie tego zadania?



Rys. 19.3

Czytelnik A: Na początku wziąłbym pod uwagę dwie siły ciężkości, na przykład \vec{Q}_1 i \vec{Q}_2 , znalazłbym punkt przyłożenia ich wypadkowej, wykreśliłbym na rysunku tę wypadkową (jest ona równa sumie $\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2$) i wyeliminowałbym z dalszego postępowania uwzględnione już siły \vec{Q}_1 i \vec{Q}_2 . W ten sposób z sześciu sił pozostało tylko pięć. Następnie znalazłbym punkt przyłożenia wypadkowej następnych dwóch sił itd. A więc drogą kolejnych operacji w końcu wyznaczylbym poszukiwaną wypadkową, której punkt przyłożenia jest środkiem ciężkości danego układu.

Autor: Taka metoda rozwiązywania jest poprawna. Jednak jest ona zbyt uciążliwa. Istnieje jednak bardziej elegancka. Aby ją zastosować, w myśl podeprzemy pręt w jego środku ciężkości (w punkcie B na rys. 19.3b).

Czytelnik B (przerywając): Ale przecież Pan jeszcze nie zna położenia środka ciężkości. Skąd Pan wie, że znajduje się on akurat między punktami przyłożenia sił \vec{Q}_3 i \vec{Q}_4 ?

Autor: Jest mi wszystko jedno, gdzie konkretnie znajduje się środek ciężkości. Nie będę wcale wykorzystywał faktu, że środek ciężkości znalazł się właśnie między punktami przyłożenia sił \vec{Q}_3 i \vec{Q}_4 . Tak więc w myśl podeprzemy pręt w jego środku ciężkości. W wyniku tego pręt będzie się znajdował w stanie równowagi. Wtedy oprócz sześciu sił ciężkości na pręt będzie działać jeszcze jedna siła – siła reakcji podpory R . Ponieważ pręt znajduje się w stanie równowagi

można więc skorzystać z warunków równowagi (par. 18). Zastosujemy najpierw pierwszy warunek równowagi w odniesieniu do rzutów sił na prostą pionową:

$$R = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6, \quad (19.1)$$

następnie drugi warunek równowagi (warunek momentów sił), biorąc pod uwagę momenty sił względem punktu A na rysunku 19.3b (tj. względem lewego korica pręta). W tym wypadku wszystkie siły ciężkości starają się obrócić pręt zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a siła reakcji podpory stara się obrócić pręt przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Zapiszemy

$$R|AB| = Q_2 a + Q_3 2a + Q_4 3a + Q_5 4a + Q_6 5a. \quad (19.2)$$

Z układu obydwu warunków równowagi (19.1) i (19.2) znajdujemy długość odcinka $|AB|$, tj. poszukiwane położenie środka ciężkości, odmierzane od lewego korica pręta:

$$|AB| = \frac{Q_2 a + Q_3 2a + Q_4 3a + Q_5 4a + Q_6 5a}{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6}. \quad (19.3)$$

Czytelnik A: Tak. Ta metoda jest znacznie prostsza.

Autor: Zwróć uwagę, że na twój sposób rozwiązywania zadania znacząco wpływa liczba obciążników na pręcie (dodanie każdego nowego komplikuje rozwiązywanie). Natomiast rozwiązywanie według mojego sposobu wcale się nie komplikuje z powodu zwiększania liczby obciążników. Po dołączeniu nowego obciążnika do licznika i mianownika wyrażenia (19.3) dodaje się po jednym składniku, i to wszystko.

Czytelnik B: Czy można wyznaczyć położenie środka ciężkości pręta, stosując tylko warunek momentów sił?

Autor: Tak, można. W tym celu trzeba dwukrotnie zapisać warunek równowagi momentów sił dla momentów wyznaczonych względem dwóch różnych punktów. Tak właśnie zrobimy. Będziemy rozpatrywać warunek momentów sił względem punktów A i C (rys. 19.3b). Dla momentów sił względem punktu A warunek równowagi wyraża się równaniem (19.2), natomiast dla momentów sił względem punktu C równanie ma postać:

$$R(5a - |AB|) = Q_1 a + Q_2 2a + Q_3 3a + Q_4 4a + Q_5 5a. \quad (19.4)$$

Dzieląc stronami (19.2) przez (19.4), otrzymujemy

$$\frac{|AB|}{5a - |AB|} = \frac{Q_2a + Q_32a + Q_43a + Q_54a + Q_65a}{Q_5a + Q_42a + Q_33a + Q_24a + Q_15a}$$

skąd znajdujemy

$$|AB|(Q_5a + Q_42a + Q_33a + Q_24a + Q_15a + Q_2a + Q_32a + Q_43a + Q_54a + Q_65a) = 5a(Q_2a + Q_32a + Q_43a + Q_54a + Q_65a)$$

albo

$$|AB|5a(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6) = (Q_2a + Q_32a + Q_43a + Q_54a + Q_65a)5a.$$

Tak więc znowu uzyskujemy równanie (19.3).

Wynik (19.3) można zapisać w bardziej ogólnej postaci. Jeżeli w punkcie A znajduje się początek współrzędnych osi Ox , to, jak nietrudno zauważyć, odległości $a, 2a, 3a$ itd. są równe współrzędnym środków ciężkości obciążników oraz

$|AB| = \cdot x_0$ jest współrzędną środka ciężkości układu obciążników w wybranym układzie współrzędnych.

Ponadto, jeśli uwzględnimy się, że $Q = mg$, wtedy (19.3) można napisać:

$$x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (19.5)$$

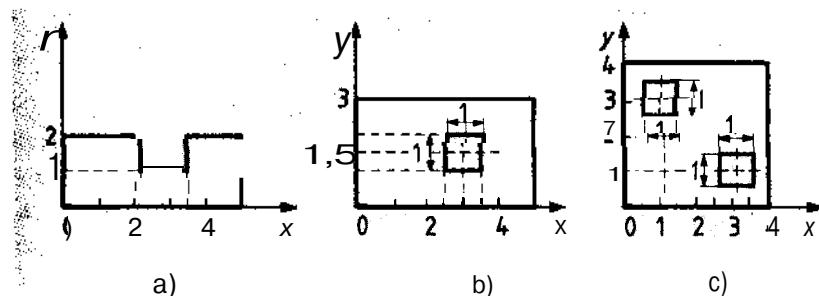
Dla ciała o dowolnym kształcie współrzędną x_0 środka ciężkości można obliczyć podobnie:

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (19.6)$$

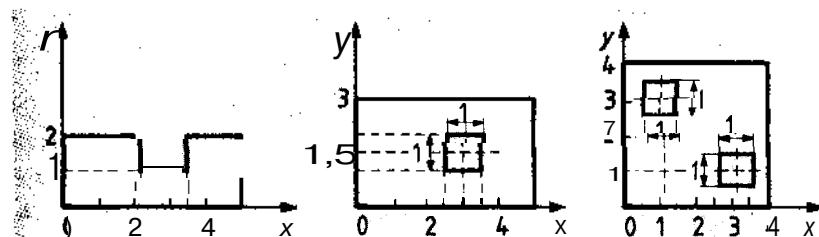
We wzorach (19.5) i (19.6) symbol $\sum_{i=1}^n$ oznacza sumowanie rozciągające na wszystkie masy elementarne, x_i i v_i – współrzędne punktu przyłożenia odpowiedniej elementarnej siły ciężkości.

Zadania

- 19.1. Wyznacz położenie środka ciężkości tarczy o promieniu R , w której zrobiono dwa kołowe otwory (rys. 19.4). Promienie wyciętych otworów są równe odpowiednio połowie i ćwiartce promienia R tarczy.
- 19.2. Wyznacz środek ciężkości figury, która ma postać trójkąta równobocznego, przy czym jego boki o długości a wykonane są z jednorodnego pręta, a w wierzchołkach umieszczono obciążniki o masach $m, 2m, m$. Uwzględnij dwa warianty: 1) masa boków trójkąta jest tak mała, że można ją pominąć; 2) masa wszystkich boków jest $M = 4m$.
- 19.3. W ołówkowej kuli o promieniu R podczas jej odlewania wytworzła się kulista wnęka, której powierzchnia styka się z powierzchnią kuli i przechodzi przez jej środek. Znajdź położenie środka ciężkości opisanego ciała, jeżeli promień wnęki $r = \frac{R}{2}$.
- 19.4. Znajdź położenia środków ciężkości płaskich jednorodnych figur przedstawionych na rysunku 19.5a, b, c (wymiary na rysunku podano w centymetrach).



Rys. 19.4



Rys. 19.5

20. Czy znasz prawo Pascala?

Autor: Zastanówmy się nad następującym doświadczeniem.

Weźmy szklany klosz z otworem w dnie. Odwróćmy klosz otworem do góry i postawmy na płycie szklanej (krawędź klosza powinna dokładnie przylegać do powierzchni płyty). Przez otwór w dnie napełnijmy klosz wodą do pełna i dokładnie zamknijmy otwór korkiem (rys. 20.1). Jeżeli mamy klosz, to razem z nim podniesie się także szklana płyta (jak przyklejona) i woda spod klosza się nie wyleje. Jeżeli jednak wyjmujemy korek, zamkujący otwór w dnie, wtedy przy próbie podniesienia klosza płyta szklana pozostanie na miejscu, a woda natychmiast wyleje się spod klosza. Jak to objaśnicie?

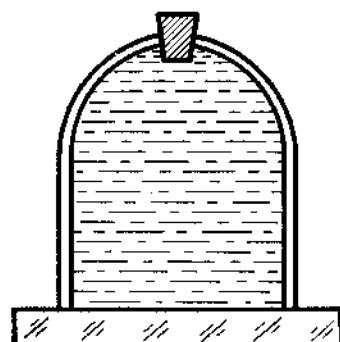
Czytelnik A: Przypuszczam, że trzeba posłużyć się prawem Pascala. Ale nie bardzo wiem na czym ono polega.

Czytelnik B:

Prawo Pascala brzmi: Ciśnienie wywierane na ciecz w dowolnym jej punkcie jest przekazywane przez tę ciecz jednakowo we wszystkich kierunkach.

Autor: Jeżeli otwór w dnie klosza jest zamknięty korkiem, wtedy na płytę szklaną jest wywierane z góry ciśnienie spowodowane ciężarem wody pod kloszem, a od dołu wywierane jest ciśnienie atmosferyczne. To drugie jest znacznie większe od pierwszego, dlatego płyta szklana „przykleja” się do klosza. Gdy korek jest wyjęty, to ciśnienie atmosferyczne wywierane na powierzchnię wody w otworze zgodnie z prawem Pascala jest przekazywane przez wodę na górną powierzchnię szklanej płyty...

Czytelnik A: Rozumiem. Teraz na płytę szklaną jest wywierane z gó

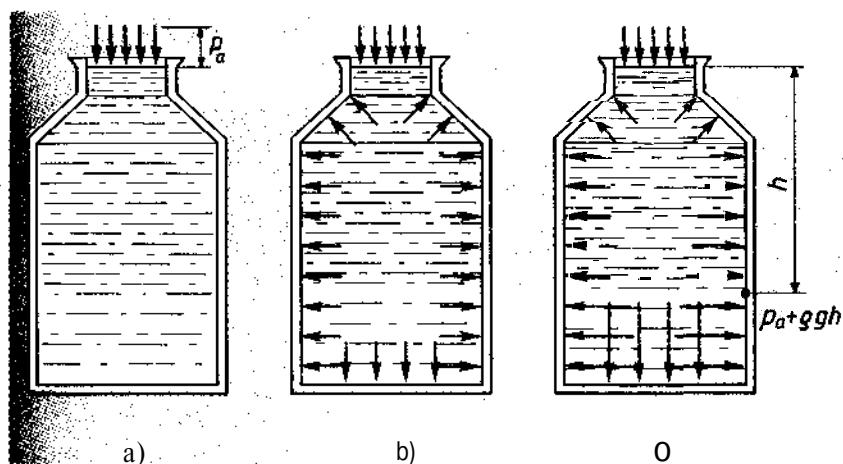


Rys. 20.1

ciśnienie spowodowane ciężarem wody oraz ciśnienie atmosferyczne, a z dołu — tylko ciśnienie atmosferyczne. Ciśnienie z góry jest zatem większe, niż z dołu.

Czytelnik B: Szczerze mówiąc, wszystko to jest zadziwiające. Otwór w dnie klosza jest mały, powierzchnia płyty nakryta kloszem, ogromna. Tym niemniej ciśnienie, wywierane przez atmosferę na mały — ze względu na pole — powierzchnię wody w otworze, przenosi się na całą dużą powierzchnię płyty.

Autor: I nie tylko na powierzchnię szklanej płyty, ale również na całą powierzchnię ścianek klosza. Weźmy pod uwagę zwykłą dużą bańkę napełnioną całkowicie wodą (rys. 20.2a). Na powierzchnię wody w szyjce banki jest wywierane ciśnienie atmosferyczne p_a . Zaznacz strzałkami ciśnienie na ścianki i dno banki.



Rys. 20.2

Czytelnik B: Zgodnie z prawem Pascala ciśnienie p_a jest przekazywane do wszystkich punktów ścianek i dna (rys. 20.2b).

Czytelnik A: Rysunek 20.2b, według mnie, jest niepoprawny. Wiadomo, że ciśnienie na ścianki wzrasta wraz z głębokością.

Czytelnik B: Zapomniałem uwzględnić ciśnienie spowodowane ciężarem wody.

Na głębokości h to dodatkowe ciśnienie zwane ciśnieniem hydrostatycznym jest równe ρgh , gdzie ρ – gęstość wody, g – przyspieszenie ziemskie.

Poprawny jest rysunek 20.2c.

Autor: Teraz jest dobrze. Co prawda, gdyby zmierzyć długości strzałek na waszym rysunku, to można by wywnioskować, że ciśnienie w pobliżu dna naczynia (i na samo dno) jest mniej więcej dwa razy większe od atmosferycznego. Jaką wysokość powinna mieć baiika, aby tak było w rzeczywistości?

Czytelnik B: Rozumiem Pana uwagę. Taka baiika powinna mieć wysokość około 10 m. Przecież ciśnienie atmosferyczne jest równe ciśnieniu, jakie wywierałyby na dno słup wody o wysokości około 10 m.

Autor: Ale wróćmy do prawa Pascala. Istotę tego prawa wyraźnie dostrzegamy, gdy analizujemy działanie prasy hydraulicznej. Rozwiążemy na początek bardzo proste zadanie.

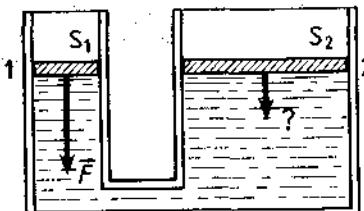
Niech tło k 1 ma pole powierzchni przekroju poprzecznego S_1 , a tło k 2 pole powierzchni przekroju poprzecznego S_2 . Na tło k 1 działa siła F . Jaka siła równoważąca powinno się przyłożyć do tło k 2?

Zadanie objaśniono na rysunku 20.3.

Czytelnik A: Na tło k 1 wywierane jest ciśnienie $p_1 = \frac{F}{S_1}$.

Zgodnie z prawem Pascala to ciśnienie jest przekazywane na tło k 2; wywierane jest ono od dołu. Dlatego dla zrównoważenia należy postawić na tło k 2 ciało o masie M , którą można wyznaczyć z równania

$$\frac{F}{S_1} = \frac{Mg}{S_2} \quad (20)$$

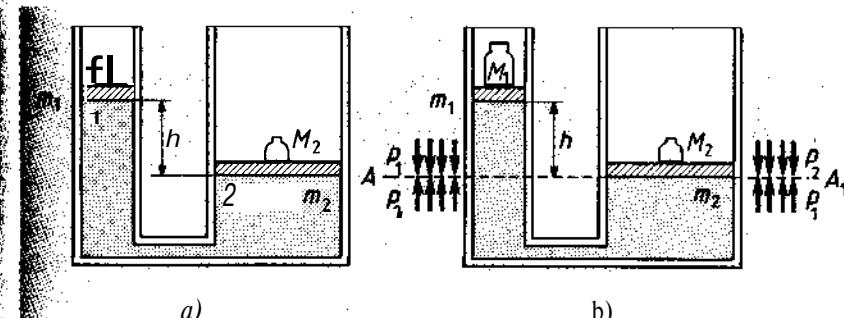


Rys. 20.3

Autor: Dobrze. Tak więc, w danym wypadku ciśnienie spowodowane działaniem tło k 1 wywierane na ciecz z góry jest równe ciśnieniu wywieranemu na tło k 2 od dołu. Dlatego siła równoważąca przyłożona do tło k 2 będzie tyle razy większa od siły F , ile razy pole powierzchni tło k 2 jest większe od pola powierzchni tło k 1. A teraz zajmiemy się bardziej skomplikowanym zadaniem dotyczącym prasy hydraulicznej. Po pierwsze uwzględnimy masę tło k ów i po drugie założymy, że tło k 1 jest wyżej niż tło k 2.

Tło k 1 ma pole powierzchni S_1 i masę m_1 ; natomiast postawiono obciążnik o masie M_1 . Tło k 1 ma pole powierzchni S_2 i masę m_2 . Jaka jest masa M_2 obciążnika równoważącego, który należy postawić na tło k 2, jeżeli wiadomo, że tło k 1 znajduje się na wysokości h w stosunku do tło k 2, a gęstość cieczy jestrówna ρ ?

Zadanie zilustrowano na rysunku 20.4a.



Rys. 20.4

Czytelnik B: Tło k 1 razem ze stojącym na nim obciążnikiem wywiera na ciecz ciśnienie $\frac{(m_1 + m_1)g}{S_1}$ oraz dodatkowe ciśnienie ρgh , spowodowane ciężarem cieczy. Zgodnie z prawem Pascala całe to ciśnienie jest przekazywane na dolną powierzchnię tło k 2. Powinno być ono zrównoważone ciśnieniem $\frac{(M_2 + m_2)g}{S_2}$, gdzie M_2 – poszukiwana masa obciążnika, który należy postawić na tło k 1.

Wobec tego

$$\frac{(M_1 + m_1)g}{S_1} + \rho gh = \frac{(M_2 + m_2)g}{S_2}, \quad (20.2)$$

skąd

$$M_2 = \frac{(M_1 + m_1)S_2}{S_1} + \rho h S_2 - m_2.$$

Autor: Równanie (20.2) i wynik końcowy są poprawne. Jednak w dwóch rozważaniach nie ma należytej precyzji. Wprowadźmy pewną pomyślaną płaszczyznę poziomą; na rysunku 20.4b przekrój takiej płaszczyzny zaznaczono prostą AA_1 . Zwróćmy uwagę na ciśnienie wywierane na płaszczyznę odpowiednio w lewym i prawym cylindrze prasy hydraulicznej. Ciśnienie p_1 w lewym cylindrze jest sumą ciśnień $\frac{(M_1 + m_1)g}{S_1}$, ciśnienia atmosferycznego p_a i ciśnienia hydrostatycznego ρgh . Ciśnienie p_2 w prawym cylindrze jest sumą ciśnienia $\frac{(M_2 + m_2)g}{S_2}$ oraz ciśnienia atmosferycznego p_a . Zgodnie z prawem Pascala ciśnienie p_1 jest przekazywane z lewego cylindra prasy do prawego (tak samo, jak ciśnienie p_2 jest przekazywane z prawego cylindra do lewego). Te ciśnienia są równe:

$$p_1 = p_2. \quad (20.3)$$

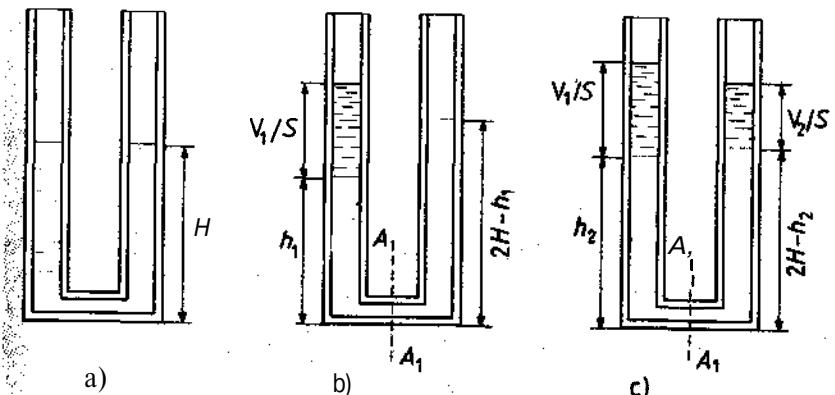
Ciśnienie atmosferyczne występuje jako składnik sumy po obu stronach równania (20.3), a więc się redukuje. W wyniku tego otrzymujemy równanie (20.2).

Czytelnik A: Jak się wydaje, prawo Pascala należy stosować także przy rozwiązywaniu zadań dotyczących naczyn polaczonych.

Autor: Oczywiście. Rozwiążmy zadanie.

Dwa naczynia o polu przekroju poprzecznego S połączone są u dołu krótką i cienką rurką. Do naczyn włano ciecz o gęstości ρ_0 . Poziom cieczy znajduje się na wysokości H (rys. 20.5a). Wyznaczyć, na jakich wysokościach znajdują się poziomy cieczy w każdym z naczyn, jeżeli:
a) do lewego naczynia doleje się porcję cieczy o objętości V_1 i gęstości ρ ($\rho_1 < \rho_0$);

b) następnie do prawego naczynia doleje się ciecz o gęstości P ($\rho_2 < \rho_0$), zajmującą objętość V_2 . Zakładamy, że cieczy nie mieszają się ze sobą.



Rys. 20.5

Czytelnik B: Przypuszczam, że to zadanie nie jest skomplikowane. Wystarczy popatrzeć na rysunek 20.5b. Ciśnienie wywierane na pomyślaną płaszczyznę AA_1 z lewej strony jest równe

$$\frac{\rho_1 g V_1}{S} + \rho_0 g h_1,$$

a z prawej

$$\rho_0 g (2H - h_1).$$

Ciśnienia atmosferyczne nie bierzemy pod uwagę, ponieważ jest ono wywierane jednakowo na ciecz w lewym i w prawym naczyniu. Wobec tego

$$h_1 = H - \frac{V_1 \rho_1}{2S\rho_0},$$

skąd łatwo już znaleźć poszukiwanie wysokości.

Autor: Wszystko to zrobiłeś zupełnie poprawnie. Ale rozpatrzyłeś dopiero pierwszy problem postawiony w zadaniu. Teraz powinieneś zająć się zagadnieniem drugim.

Czytelnik B: Drugi problem jest zilustrowany na rysunku 20.5c. Ciśnienie wywierane na płaszczyźnie AA_1 z lewej strony jest równe

$$\frac{\rho_1 g V_1}{S} + \rho_0 g h_2,$$

a z prawej

$$\frac{\rho_2 g V_2}{S} + \rho_0 g (2H - h_2).$$

Zatem

$$h_2 = H - \frac{V_1 \rho_1}{2 S \rho_0} + \frac{V_2 \rho_2}{2 S \rho_0}.$$

Autor: Po dokładnym zapoznaniu się z prawem Pascala zajmiemy się prawem Archimedesa. Te dwa prawa fizyczne stanowią podstawę hydrostatyki.

Zadania

- 20.1. Jaką pracę wykonano, przenosząc ciało o masie $m = 1,5$ t za pomocą prasy hydraulicznej (podnośnika hydraulicznego), jeżeli mały tłok przemieścił się przy tym na wysokość $h_1 = 40$ cm? Oblicz także siłę F przyłożoną do małego tłoka. Pole powierzchni małego tłoka jest $n = 20$ razy mniejsze od pola powierzchni dużego tłoka.
- 20.2. Do dwóch naczyń połączonych wlano rtęć. Pole przekroju po przecznego jednego z naczyń jest $n = 2$ razy większe niż pole przekroju drugiego. Do wąskiego naczynia dolano wody do pełna. O ile podniósł się przy tym poziom rtęci w szerokim naczyniu? Początkowo poziom rtęci znajdował się w odległości $/ = 20$ cm od górnych krawędzi naczyń. Gęstość rtęci $\rho_r = 13,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, gęstość wody $\rho_w = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.
- 20.3. Do dwóch naczyń połączonych wlano jednakowe objętości V rtęci i wody. Pole powierzchni przekroju jednego naczynia jest S , a drugiego nS . Określ położenia poziomów wody i rtęci w naczyniach po ustaleniu się równowagi. Rozpatrz dwie sytuacje dla $n = 2$ — wodę wlano: 1) do szerokiego naczynia, 2) do wąskiego naczynia.

21. Dlaczego trzeba znać prawo Archimedesa?

Zwykle nie zwraca się należytej uwagi na prawo Archimedesa. Całkiem niesłusznie. Na podstawie tego prawa można wyjaśnić bardzo wiele ciekawych zagadnień. I tutaj przedyskutujemy zagadnienie stosowności tego prawa w stanie nieważkości ciąż.

Autor: Czy znacie prawo Archimedesa?

Czytelnik B: Oczywiście.

Na ciało zanurzone w cieczy działa siła wyporu, równa ciężarowi cieczy wypartej przez to ciało.

Jest to całkiem proste.

Autor: Nie spiesz się z wnioskami dotyczącymi prostoty.

Czytelnik A: Przypuszczam, że formułując prawo Archimedesa należy mówić nie „ciężarowi cieczy”, ale „sile ciężkości cieczy”.

Autor: Dlaczego tak myślisz?

Czytelnik A: Przez analogię z mechaniką. Przecież tam we wszystkich miejscach zastąpiliśmy stosowany wcześniej termin „ciężar” terminem „siła ciężkości”. Natomiast terminem „ciężar” umówiliśmy się określić siłę nacisku normalnego (prostopadłego), który działa na poziome podłożu.

Autor: W odniesieniu do prawa Archimedesa nie masz racji. W tym wypadku należy stosować termin „ciężar”. O tym można się przekonać, czytając następny paragraf. Uprzedzając, zwrócić uwagę, że w windzie, poruszającej się z przyspieszeniem, siła wyporu zależy od przyspieszenia. A przecież siła ciężkości nie może zależeć od przyspieszenia windy. Wróćmy więc do prawa Archimedesa.

Czytelnik B:

Jak się wydaje, należałoby dodać, że na ciało „zanurzone” u góry także działa siła wyporu.

Autor: Racja. A teraz czy nie moglibyście udowodnić słuszności prawa Archimedesa?

Czytelnik A: Udowodnić słuszność prawa Archimedesa?

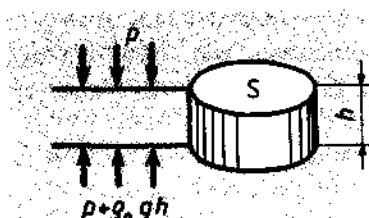
Autor: Tak.

Czytelnik A: Ale przecież prawo Archimedesa uzyskano bezpośrednio z doświadczenia.

Autor: To prawda. Jednak można je wyprowadzić na podstawie prostych rozważań energetycznych. Będziemy w myśl podnosić pewne ciało o objętości V i gęstości ρ na wysokość h , robiąc to za pierwszym razem w próżni, a za drugim razem w cieczy o gęstości ρ_0 . W pierwszym wypadku takie podnoszenie wymaga energii $\rho g V h$ (gdzie $\rho V = m$). W drugim wypadku wymagana energia jest mniejsza, ponieważ podniesienie ciała o objętości V na wysokość h w cieczy wiąże się z jednoczesnym obniżeniem o taką samą wysokość cieczy o objętości V . Dlatego teraz w celu podniesienia ciała należy dysponować energią $(\rho g V h - \rho_0 g V h)$. Traktując odjemnik $\rho_0 g V h$ jako pracę pewnej siły, można wywnioskować, że w porównaniu z próżnią na ciało w cieczy działa dodatkowa siła $F = \rho_0 g V$, która ułatwia podnoszenie ciała. Siła ta jest zwana siłą wyporu albo siłą Archimedesa. Łatwo zauważyc, że jest ona równa ciężarowi cieczy mieszczącej się w objętości V ciała zanurzonego w tej cieczy. (Zwracam uwagę, że w przytoczonych rozważaniach nie uwzględniono strat energetycznych związanych z tarciem podczas rzeczywistych przemieszczeń ciała w cieczy).

Do prawa Archimedesa można dojść także trochę innym sposobem. Założmy, że ciało zanurzone w cieczy ma kształt cylindra o wysokości h i polu podstawy S (rys. 21.1). Przyjmijmy, że ciśnienie cieczy wywierane na górną podstawę cylindra jest równe p . Wtedy ciśnienie na dolną podstawę jest równe $p + \rho_0 g h$. Tak więc występuje różnica ciśnień na podstawy dolnej i górnej cylindra. Jeśli tę różnicę pomnożymy przez pole podstawy S , to otrzymamy siłę $F = \rho_0 g h S$, która stara się wypchnąć cylinder do góry. Ponieważ $hS = V$ jest objętością cylindra, więc łatwo już zauważyc, że jest to właśnie siła wyporu, która występuje w prawie Archimedesa.

Czytelnik A: Tak. widzę, że prawo Archimedesa można odkryć na drodze czysto rozumowej.



Rys. 21.1

Autor:

Zanim zaczniemy rozwiązywać zadania, przypomnijmy sobie warunek pływania ciał.

Czytelnik A: Pamiętam ten warunek.

Siła ciężkości powinna być zrównoważona przez siłę wyporu działającą na ciało zgodnie z prawem Archimedesa.

Autor: Nie mam zastrzeżeń. Teraz zajmiemy się przykładem.

W naczyniu z wodą pływają kawałki lodu. Jaki będzie nowy poziom wody w naczyniu po stopnieniu lodu?

Czytelnik A: Położenie poziomu nie zmieni się, gdyż siła ciężkości działająca na lód jest zrównoważona przez siłę wyporu i wobec tego jest równa ciężarowi cieczy (w danym przypadku wody), wypartej przez lód. Gdy lód ulegnie stopnieniu, zamieni się w wodę o objętości dokładnie równej objętości tej wody, która lód wypierała na początku.

Autor: Doskonale.

A teraz założmy, że wewnątrz kawałka lodu znajduje się, na przykład kawałek ołowiu. Jaki będzie nowe położenie poziomu wody po stopnieniu lodu?

Czytelnik A: Jeżeli się nie mylę, to poziom wody w naczyniu powinien się trochę obniżyć. Jednak miałbym kłopot z udowodnieniem tego stwierdzenia.

Autor: Oznaczmy: V — objętość kawałka lodu z zawartym w nim ołówkiem; v — objętość kawałka ołowiu; V_1 — objętość wody wypartej przez podwodną część kawałka lodu; ρ_0 — gęstość wody; ρ_1 — gęstość lodu; ρ_2 — gęstość ołowiu. Siła ciężkości działająca na kawałek lodu z ołówkiem jest równa

$$\rho_1 g (V - v) + \rho_2 g v.$$

Ta siła ciężkości jest zrównoważona przez siłę wyporu $\rho_0 g V_1$. Wobec tego

$$\rho_1 g (V - v) + \rho_2 g v = \rho_0 g V_1. \quad (21.1)$$

Po zakończeniu topnienia z lodu uzyskamy wodę, której objętość V_2 można wyznaczyć z równania

$$\rho_1 g (V - v) = \rho_0 g V_2.$$

Podstawiając prawą stronę tego równania do (21.1), znajdujemy

$$\rho_0 g V_2 + \rho_2 g v = \rho_0 g V_1.$$

Stąd wynika, że objętość wody powstała w wyniku stopnienia lodu jest równa

$$V_2 = V_1 - \frac{\rho_2}{\rho_0} v. \quad (21.2)$$

Tak więc przed topnieniem lodu była wyparta woda o objętości V_1 . Następnie ołów i woda ze stopionego lodu łącznie wypełniły objętość $(V_2 + v)$. Aby odpowiedzieć na pytanie o położenie poziomu wody w naczyniu, trzeba porównać te objętości. Z wzoru (21.2) otrzymujemy

$$V_2 + v = V_1 - \frac{v(\rho_2 - \rho_0)}{\rho_0}. \quad (21.3)$$

Ponieważ $\rho_2 > \rho_0$ (gęstość ołowiu jest większa od gęstości wody), więc z (21.3) widać, że $(V_2 + v) < V_1$. Zatem w wyniku topnienia lodu poziom wody w naczyniu obniża się. Dzieląc różnicę objętości $V_1 - (V_2 + v)$ przez pole S poprzecznego przekroju naczynia (dla uproszczenia zakładamy, że naczynie ma kształt cylindryczny), znajdujemy wysokość h , o którą obniży się poziom wody po stopnieniu lodu

$$h = \frac{v}{S} \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} - 1 \right). \quad (21.4)$$

Czy zrozumieliście rozwiązanie zadania?

Czytelnik A: Tak, ja zrozumiałem.

Autor:

A teraz zamiast kawałka ołowiu wewnętrz lodu umieścimy kawałek lekkiego korka o objętości v i gęstości ρ_3 . Co się stanie z poziomem wody po stopnieniu lodu?

Czytelnik A: Myślę, że poziom wody w naczyniu nieznacznie się podniesie.

Autor: Dlaczego?

Czytelnik A: W zadaniu z ołowiem poziom wody się obniża. Ołów ma gęstość większą niż woda, a korek mniejszą niż woda. Dlatego w zadaniu z korkiem należy oczekiwać przeciwnego efektu: poziom wody powinien się podnieść.

Autor: Jesteś w błędzie. Twoja odpowiedź byłaby trafna, gdyby korek po stopnieniu lodu pozostawał pod wodą. A to, oczywiście, jest niemożliwe. Korek z całą pewnością wypłynie, ponieważ jest lżejszy od wody mającej taką samą objętość jak korek. Dlatego przykład z korkiem (jak i z dowolnym innym ciałem, które jest lżejsze od wody mającej taką samą objętość) wymaga specjalnego przeanalizowania. Wykorzystując wynik (21.2), znajdujemy różnicę objętości wody wypartej przez kawałek lodu z korkiem i wody powstałą w wyniku stopnienia lodu:

$$V_1 - V_2 = v \frac{\rho_2}{\rho_0}. \quad (21.5)$$

Następnie skorzystamy z warunku pływania dla korka:

$$\rho_3 v = \rho_0 v_1, \quad (21.6)$$

gdzie v_1 — objętość części korka zanurzonej w wodzie. Podstawiając prawą stronę tego równania do (21.5), znajdujemy

$$V_1 = V_2 + v_1.$$

A więc okazało się, że objętość wody wypartej przez kawałek lodu z korkiem wewnętrz jest dokładnie równa sumie objętości wody powstała w czasie topnienia lodu i wody wypartej przez zanurzoną część korka. Stąd wynika, że poziom wody w naczyniu pozostanie niezmieniony.

Czytelnik A: A gdyby zamiast korka w kawałku lodu była po prostu bańka powietrza?

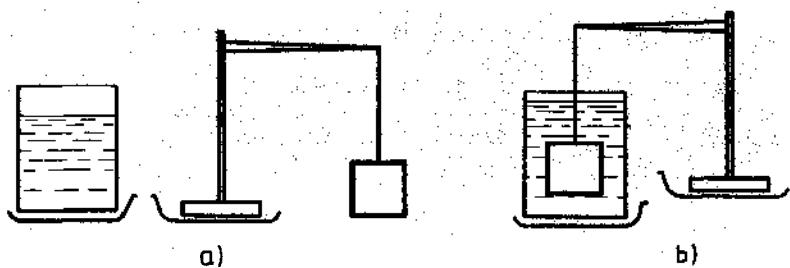
Autor: Po stopnieniu lodu ta bańka wyjdzie na zewnątrz. Nietrudno się przekonać, że wtedy poziom wody w naczyniu będzie dokładnie taki jak przed topnieniem lodu. Jednym słowem, przykład z bańką powietrza w lodzie jest analogiczny do przykładu z kawałkiem korka w lodzie.

Czytelnik A: Widzę, że na podstawie prawa Archimedesa można obmyślać bardzo ciekawe problemy i zadania.

Autor: Niestety, niektórzy przystępujący do egzaminu odnoszą się do tego prawa lekceważąco i nie zadają sobie trudu, aby zastanowić się nad nim podczas przygotowania się do egzaminu.

Rozpatrzymy następujący przykład.

Na jednej szalce wagi stoi naczynie z wodą, a na drugiej statyw, na którym zawieszono obciążnik. Szalki wagi są w równowadze (rys. 21.2a). Statyw odwrócono, tak aby zawieszony na nim obciążnik zanurzył się całkowicie w wodzie. Jest zrozumiałe, że równowaga szalek zostanie naruszona, ponieważ szalka ze statywem stanie się lżejsza (rys. 21.2b). Określić, jaki powinien być ciężar obciążnika, który trzeba by dodatkowo postawić na szalce ze statywem, aby waga powróciła do pierwotnego stanu równowagi.



Rys.21.2

Czytelnik A: Na obciążnik działa siła wyporu, równa ciężarowi Q wody wypartej przez obciążnik. Dlatego dla przywrócenia równowagi trzeba postawić na szalkę ze statywem obciążnik o ciężarze Q .

Autor: Mylisz się. W tym miejscu nie zaszkodzi przypomnieć sobie trzecią zasadę dynamiki Newtona. Zgodnie z nią siła działania wody na obciążnik jest dokładnie równa co do wartości siłce działania obciążnika na wodę, ale ma zwrot przeciwny. A więc jednocześnie ze zmniejszeniem ciężaru szalki ze statywem zwiększa-

się ciężar szalki z naczyniem. Dlatego dla przywrócenia równowagi potrzebny jest obciążnik o ciężarze $2Q$.

Czytelnik A: Niezupełnie dokładnie rozumiem Pana rozważania. Przecież oddziaływanie obciążnika i wody w naczyniu nie jest podobne do oddziaływanego dwóch ciał w mechanice.

Autor:

Zakres stosowności trzeciej zasady dynamiki Newtona nie ogranicza się do mechaniki. Wyrażenie „działanie równe się przeciw- działaniu” odnosi się do różnych oddziaływań.

Jednak w tym wypadku dobrze będzie przytoczyć inne rozważanie, do którego z całą pewnością nie będziesz miał zastrzeżeń. W tym rozważaniu potraktujemy statyw z obciążnikiem i naczynie z wodą jako jeden układ; jego ciężar składa się, oczywiście, z ciężaru tego, co stoi na prawej szalce, i tego, co stoi na lewej szalce. Całkowity ciężar układu nie może się zmienić z tego powodu, że jego części oddziałują ze sobą. W związku z tym, gdy w wyniku oddziaływania ciężar prawej szalki zmniejszył się o Q , wtedy to samo oddziaływanie powinno doprowadzić do zwiększenia ciężaru lewej szalki o tę samą wartość ciężaru Q . Dlatego po zanurzeniu obciążnika w wodzie znajdującej się w naczyniu różnica ciężarów lewej i prawej szalki powinna wynosić $2Q$.

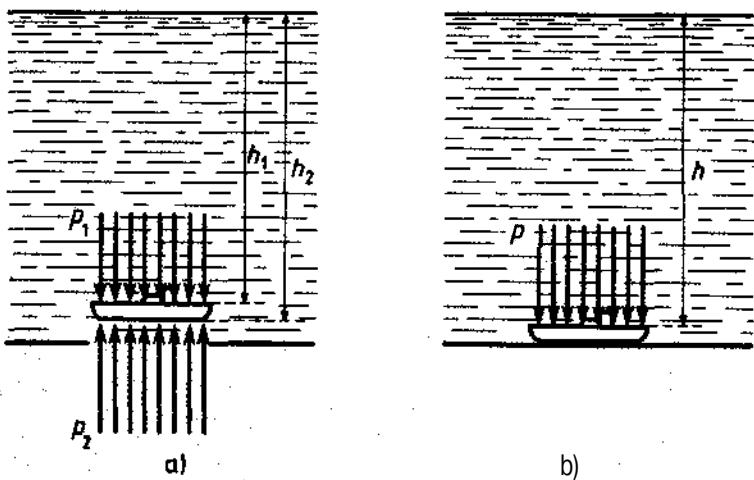
Czytelnik B: Już dawno chciałem zrozumieć, o co chodzi w pewnym praktycznym zadaniu. Wiadomo, że łodziom podwodnym nie zaleca się osiadania na gliniaste równe dno — może się zdarzyć, że potem taka łódź nie będzie mogła wypłynąć. O ile dobrze zrozumiałem, w tym zadaniu należy skorzystać z prawa Archimedesa.

Autor: Łącznie z prawem Pascala.

Przede wszystkim, jak objaśniś, dlaczego dla łodzi podwodnej niebezpieczne jest osiąść na gliniastym dnie?

Czytelnik B: Kiedy łódź podwodna osiądzie na takim dnie, może się zdarzyć, że między jej dnem i morskim dnem w ogóle nie ma wody. W tym wypadku siła wyporu, decydująca o wypłynięciu łodzi, zanika.

Autor: Masz rację: siła wyporu w danym wypadku rzeczywiście zanika. Jednak rzecz nie tylko w tym. Na rysunku 21.3a przed-



Rys. 21.3

stawiono łódź podwodna, która znajduje się prawie na samym dnie, ale nie leży na nim. Z góry na łódź jest wywierane ciśnienie p_1 , a z dołu ciśnienie p_2 . Łatwo można zrozumieć, że

$$p_1 = \rho g h_1 + p_a,$$

gdzie p_a — ciśnienie atmosferyczne (jest ono przekazywane do zanurzonego obiektu zgodnie z prawem Pascala);

$$p_2 = \rho g h_2 + p_a.$$

Tak więc występuje różnica ciśnień:

$$p_i - p_i = \rho g (h_2 - h_1),$$

która jest przyczyną istnienia siły wyporu.

Czytelnik B: Moglibyśmy w tym wypadku w ogóle nie brać pod uwagę ciśnienia atmosferycznego: składniki p_a redukują się, kiedy obliczamy różnicę $p_2 - p_1$.

Autor: Słusznie. Jednak gdy łódź podwodna przylgnie do gliniastego dna, nie możnauż nie uwzględnić ciśnienia atmosferycznego. Jeżeli łódź ściśle przylega do gliniastego dna (rys. 21.3b), wywierane jest na nią tylko ciśnienie z góry, równe

$$p = \rho g h + p_a.$$

Widzicie więc, jak radykalnie zmieniła się sytuacja. W poprzednim wypadku na łódź wywierane było wypadkowe ciśnienie z dołu, równe $\rho g (h_2 - h_1)$. A teraz tego ciśnienia z dołu nie ma (nie ma siły wyporu). Ale rzecz polega nie tylko na tym! Teraz na łódź wywierane jest tylko duże ciśnienie z góry, składające się z ciśnienia hydrostatycznego $\rho g h$ i ciśnienia atmosferycznego p_a . Właśnie to, a nie brak siły wyporu, stanowi główne zagrożenie dla łodzi podwodnej.

Zadania

- 21.1. Ciężar ciała zanurzonego w cieczy o gęstości ρ_1 jest równy Q_1 , natomiast po jego zanurzeniu w cieczy o gęstości ρ_2 staje się równy Q_2 . Wyznacz gęstość ρ ciała.
- 21.2. Jakieś ciało, ważące w powietrzu Q , gdy jest zanurzone w cieczy o gęstości ρ_1 , waży Q_1 , natomiast w cieczy o nieznanej gęstości — Q_2 . Wyznacz gęstość ρ_2 drugiej cieczy.
- 21.3. Do naczynia mającego kształt cylindryczny o polu przekroju poprzecznego S wlano wodę, w której pływa kawałek lodu z kulką ołowianą w środku. Objętość kawałka lodu zawierającego kulkę jest równa V ; nad wodę wystaje $\frac{1}{20}$ części tej objętości. O jaką wysokość h obniży się poziom wody w naczyniu po stopnieniu lodu? Gęstość wody $\rho_w = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, lodu $\rho_l = 0,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, ołowiu $\rho_o = 11,3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.
- 21.4. Areometr o masie ra , składający się z kulki wypełnionej śrutem i cylindrycznej rurki o polu przekroju poprzecznego S , pływa w cieczy o gęstości ρ . Areometr wciśnięto jeszcze trochę w głąb cieczy i uwolniono, po czym zaczął on wykonywać drgania swobodne wokół położenia równowagi. Wyznacz okres T tych drgań.

22. Czy prawo Archimedesa obowiązuje w statku kosmicznym?

Autor:

Czy prawo Archimedesa obowiązuje w statku kosmicznym, gdy znajdzie się on w stanie nieważkości?

Czytelnik A: Według mnie, nie obowiązuje. Przecież istota prawa Archimedesa polega na tym, że z powodu różnicy gęstości pewnego ciała i cieczy (mających, ma się rozumieć, jednakowe objętości), podniesienie każdego z tych obiektów na tę samą wysokość wymaga wykonania innej pracy. W stanie nieważkości, oczywiście, różnica wartości tych prac nie istnieje, gdyż zarówno podniesienie ciała, jak i cieczy o takiej samej objętości wymaga pracy zerowej. Do takiego samego wniosku dochodzimy, gdy weźmiemy pod uwagę siły parcia cieczy na ciało w niej zanurzone, ponieważ siła wyporu jest spowodowana różnicą sił parcia na podstawie górną i dolną. W stanie nieważkości ta różnica zanika, zanika więc siła wyporu. Warto zwrócić uwagę, że w stanie nieważkości nie ma różnicy między „góram” i „dołem”, dlatego nie można nawet wskazać, która podstawa jest górną, a która dolna. Wobec tego w stanie nieważkości na ciało zanurzone w cieczy nie działa siła wyporu, a więc prawo Archimedesa nie jest spełnione.

Czytelnik B: Nie zgadzam się z końcowym wnioskiem Czytelnika A. Uważam, że prawo Archimedesa obowiązuje także w stanie nieważkości. Spróbujmy prowadzić rozważania ostrożniej. Nie przechodźmy od razu do nieważkości, lecz rozpatrzmy na początku ruch windy z pewnym przyspieszeniem \vec{a} , zwróconym tak samo jak przyspieszenie swobodnego spadania g . Niech przy tym $a < g$. Nietrudno sobie wyobrazić, że w danym wypadku na ciało zanurzone w cieczy będzie działać siła wyporu

$$F = \rho_o(g - a)V. \quad (22.1)$$

Cięzar porcji cieczy mającej objętość ciała jest także równy $\rho_o(g - a)V$. Tak więc siła wyporu, jak poprzednio, jest równa ciężarowi cieczy wypartej przez ciało, zatem prawo Archimedesa

jest spełnione. Następnie będziemy stopniowo zwiększać przyspieszenie a do wartości g . Zgodnie z (22.1) siła wyporu będzie przy tym stopniowo maleć, lecz jednocześnie, i dokładnie w ten sam sposób, będzie maleć ciężar cieczy o objętości równej objętości ciała. Innymi słowy, przy zbliżaniu przyspieszenia a do wartości g prawo Archimedesa będzie niezmiennie pozostawało w mocy. W granicy $a = g$ nastąpi stan nieważkości. Wtedy siła wyporu stanie się równa zeru, ale również równy zeru stanie się ciężar cieczy wypartej przez ciało. Dlatego nic nie stoi na przeszkodzie, aby twierdzić, że prawo Archimedesa obowiązuje także w stanie nieważkości.

Chcę zilustrować moje rozważania następującym przykładem. Założymy, że w naczyniu z wodą pływa lekki korek. Zgodnie z (21.6) stosunek objętości tej części korka, która jest zanurzona w wodzie, do całej objętości korka jest równy stosunkowi gęstości korka do gęstości wody:

$$\frac{v_1}{v} = \frac{\rho_3}{\rho_1} \quad (22.2)$$

Założymy, że naczynie znajduje się w kabинie windy, która zaczyna spadać z pewnym przyspieszeniem a . Ponieważ z tego powodu gęstości korka i wody nie zmieniają się, to związek (22.2) pozostaje w mocy. Inaczej powiedziawszy, podczas ruchu windy z przyspieszeniem położenie korka względem powierzchni wody w naczyniu pozostaje dokładnie takie samo jak wtedy, gdy nie było przyspieszenia. Oczywiście, ta sytuacja nie zmieni się, gdy $a = g$, co odpowiada stanowi nieważkości. Tak więc wyznaczone przez prawo Archimedesa położenie korka względem powierzchni wody, jak się okazuje, jest niezależne od przyspieszenia windy, i żadnej różnicy między zachowaniem w stanie nieważkości i „ważkości” nie zauważamy.

Autor: Obydwa rozważania były w pełni uargumentowane. Jednak powiniensem zgodzić się z czytelnikiem A: w stanie nieważkości prawo Archimedesa nie obowiązuje.

Czytelnik B: W takim razie proszę obalić moje dowody.

Autor: Zaraz postaram się to zrobić. Twoje rozważania oparte są na dwóch podstawowych skojarzeniach: 1) jeżeli ruch odbywa się z przyspieszeniem $a < g$, ciało jest wypychane z cieczy zgodnie

z prawem Archimedesa; 2) to stwierdzenie powinno pozostawać w mocy, gdy $a = g$, tj. gdy pojawia się nieważkość. Do pierwszej myśl nie mam zastrzeżeń, jednak z drugą się nie zgadzam.

Czytelnik B: Ale przecież korek w naczyniu pozostanie w tym samym położeniu również w stanie nieważkości! Jego położenie uwarunkowane jest prawem Archimedesa.

Autor: Tak, korek pozostaje w tym samym położeniu również w stanie nieważkości. Jednak w tym stanie jego położenie względem powierzchni cieczy nie jest już uzależnione od prawa Archimedesa. Spróbuj zanurzyć w tej sytuacji korek w głęb wody, a będzie on nieruchomo wisiał na tej głębokości, na której go zostawiłeś. podczas gdy pojawienie się nawet najmniejszej różnicy ($g - a$) spowoduje, że korek nieodwołalnie będzie wypływał i zajmował położenie wynikające z prawa Archimedesa. Wobec tego między nieważkością i występowaniem choćby najmniejszej „ważykości” istnieje zasadnicza różnica. Innymi słowy podczas przechodzenia do stanu nieważkości „w najostatniejszej chwili” zachodzi skok, jakościowo zmieniający całą sytuację.

Czytelnik B: Ale z czym może być związany taki skok? Skąd się on bierze? Przecież zblizaliśmy płynnie wartość przyspieszenia a do g .

Autor: Ten skok związany jest z tym, że gdy $a = g$, pojawia się symetria; znika różnica między „górami” i „dołem”, na co, nawiąsem mówiąc, bardzo słusznie zwracał uwagę czytelnik A.

Jeżeli różnica ($g - a$) jest dowolnie mała, ale wciąż jeszcze różna od zera, to mamy fizycznie wyraźniony zwrot „z dołu do góry”. Właśnie tak zwrocona jest siła wyporu. Jednak gdy $\angle < \pi$ rozróżnienie zanika i wszystkie kierunki stają się fizycznie równie ważne.

To jest właśnie ten skok. Zniknięcie lub pojawienie się symetrii zawsze zachodzi skokowo.

23. Co wiesz o kinetyczno-cząsteczkowej teorii materii?

Fizyka cząsteczkowa to podstawa fizyki współczesnej. Dlatego szczególnie ważne jest zapoznanie się z podstawami kinetyczno-cząsteczkowej teorii materii, choćby na prostym przykładzie gazu doskonałego. Omówimy także zagadnienie anomaliowej rozszerzalności cieplnej wody. Szczegółowo przeanalizujemy prawa gazowe oraz ich zastosowania w rozwiązywaniu konkretnych problemów technicznych.

Autor: Jeden z tematów egzaminacyjnych brzmi następująco:

Podstawowe założenia kinetyczno-cząsteczkowej teorii materii.

Jak zacząłbyś odpowiadać na to pytanie?

Czytelnik A: Wymieniłbym dwa podstawowe założenia: 1) wszystkie ciała składają się z cząsteczek; 2) cząsteczki znajdują się w stanie chaotycznego ruchu cieplnego.

Autor: Twoja odpowiedź jest bardzo charakterystyczna: lakoniczna i niepełna. Zauważylem, że uczniowie przywykli odnosić się do tego pytania formalnie. Z reguły nie znają w pełni podstawowych założení teorii kinetyczno-cząsteczkowej. W związku z tym uważam za konieczne porozmawiać o kinetyczno-cząsteczkowej teorii materii. Najpierw przypomnę te założenia teorii, które można uważać za podstawowe.

1. Materia ma strukturę „ziarnistą”; składa się ona z cząsteczek zwanych również molekułami. W jednym molu materii (substancji) znajduje się $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ cząsteczek niezależnie od stanu skupienia substancji (liczba N_A nosi nazwę liczby Avogadra).
2. Cząsteczki w substancji znajdują się w nieustannym ruchu cieplnym.
3. Charakter ruchu cieplnego cząsteczek zależy od charakteru wzajemnego oddziaływanego cząsteczek i zmienia się podczas przejścia substancji z jednego stanu skupienia w inny.
4. Energia kinetyczna cząsteczek zależy od temperatury i jest ograniczona przez granicę maksymalną (granicę topnienia).

pojedynczej cząsteczki jest proporcjonalna do temperatury T na przykład dla cząsteczek jednoatomowych

$$E_{\text{kt}} = \frac{3}{2} k T, \quad (23.1)$$

gdzie $A = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ – stała fizyczna, zwana stałą Boltzmanna.

5. Z punktu widzenia teorii kinetyczno-cząsteczkowej całkowita energia E ciała jest sumą następujących składników:

$$E = E_k + E_p + U, \quad (23.2)$$

gdzie E_k – energia kinetyczna ciała jako całości, E_p – energia potencjalna ciała jako całości w pewnym polu zewnętrzny, U – energia związana z ruchem cieplnym cząsteczek ciała.

Energia U nosi nazwę energii wewnętrznej ciała.

Uwzględnienie energii wewnętrznej ciała przy układaniu rozmaitych bilansów energetycznych jest charakterystyczną cechą teorii kinetyczno-cząsteczkowej.

Czytelnik B: Przywykliśmy do tego, że pytanie o mol i stałą Avogadra należy do chemii.

Autor: Wydaje się, że dlatego właśnie uczniowie na egzaminie z fizyki bardzo często nie wiedzą, co to jest mol, i prawie zawsze są przekonani, że stała Avogadra odnosi się tylko do gazów. Zapamiętajcie: mol to ilość substancji zawierająca tyle samo cząsteczek, ile atomów znajduje się w 0,012 kg węgla (a nie jest to masa cząsteczki wyrażona w gramach, jak często można usłyszeć). Masa molowa $M = m_0 N_A$, gdzie m_0 – masa jednej cząsteczki.

$N_A = 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$ – stała Avogadra (liczba cząsteczek albo atomów w jednym molu dowolnej substancji niezależnie od stanu skupienia). Chciałbym zaznaczyć, że

stała Avogadra pełni funkcję swoistego „pomostu” między mikroskopowym i makroskopowym opisem substancji. Na przykład posługując się stałą Avogadra, można wyrazić prędkość i masę molową substancji taka wielkość mikroskopową, jak średnia odległość między cząsteczkami (atomami) substancji. W

my na przykład żelazo w stanie stałym. Jego gęstość $\rho = 7,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, masa molowa $M = 56 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$. Wyznaczmy średnią odległość między atomami w żelazie. Będziemy rozumować następująco: w 56 g żelaza jest $6 \cdot 10^{23}$ atomów, to znaczy, że w 1 g żelaza jest $6 \cdot 10^{23} \frac{1}{56}$ atomów, a więc w 7,8 g żelaza jest $7,8 \cdot 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{56}$ atomów (wypełniają objętość 1 cm³). W takim razie na jeden atom żelaza przypada objętość 1 cm³: $1 \frac{1}{7,8 \cdot 6 \cdot 10^{23} / 56} \text{ cm}^3$. Obliczając pierwiastek sześcienny z tej objętości, uzyskujemy przybliżoną wartość poszukiwanej odległości średniej:

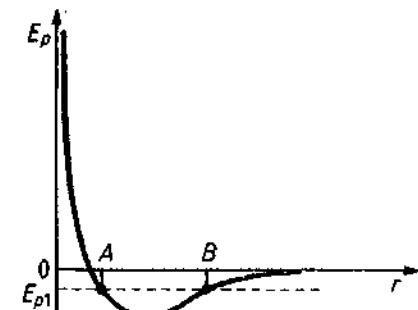
$$x \approx \sqrt[3]{1 \text{ cm}^3 \frac{56}{7,8 \cdot 6 \cdot 10^{23}}} = \sqrt[3]{\frac{56}{7,8 \cdot 0,6} 10^{-24} \cdot 1 \text{ cm}^3} = 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Patrząc na pierwsze wyrażenie podpierwiastkowe, można zauważyć, że

$$x \approx \sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}}.$$

Czytelnik B: Wcześniej podkreślał Pan, że charakter ruchu cieplnego cząsteczek zależy od międzycząsteczkowego oddziaływanie i zmienia się podczas przejścia z jednego stanu skupienia w inny. Proszę opowiedzieć o tym dokładniej.

Autor: Oddziaływanie dwóch cząsteczek można jakościowo opisać za pomocą krzywej, pokazanej na rysunku 23.1. Ta krzywa przedstawia zależność energii potencjalnej E_p oddziaływanie cząsteczek od odległości r między ich środkami. Dla dostatecznie dużych



Rys. 23.1

odległości między cząsteczkami krzywa $E_p(r)$ asymptotycznie zbliża się do zera, tj. cząsteczki praktycznie przestają ze sobą oddziaływać. W miarę zbliżania cząsteczek pojawia się ich wzajemne przyciąganie, krzywa $E_p(r)$ obniża się. Następnie, przy dośćcznie silnym zbliżeniu, pojawia się wzajemne odpychanie cząsteczek, krzywa $E_p(r)$ zaczyna się wznosić, (to odpychanie oznacza, że cząsteczki nie mogą swobodnie przenikać jedna do wnętrza drugiej). Łatwo zauważać, że krzywa $E_p(r)$ ma charakterystyczne minimum.

Czytelnik B: Co oznacza ujemność energii?

Autor: Jak wiadomo, energię można mierzyć względem dowolnej wartości. Na przykład energię potencjalną kamienia można mierzyć względem poziomu najbliższej okolicy, ale także względem poziomu morza — jest to obojętne. W danym wypadku za zero przyjmuje się energię oddziaływania cząsteczek znajdujących się w nieskończoności dużej odległości wzajemnej.

Dlatego ujemność energii potencjalnej cząsteczki oznacza, że ona w stanie związanym (/ inna cząsteczką). Aby „uwolnić” cząsteczkę, trzeba jej dostarczyć taka energię, by energia cząsteczki zwiększyła się do poziomu zerowego.

Załóżmy, że cząsteczka ma ujemną energię E_{p1} (rys. 23.1). Z rysunku widać, że w tym wypadku cząsteczka nie może oddalić się od swojej sąsiadki dalej niż do punktu *B* i nie może znaleźć się bliżej niż w punkcie *A*. Oznacza to, że będzie ona wykonywać drgania między punktami *A* i *B* w polu sąsiedniej cząsteczki (mówiąc dokładniej, powstają względne drgania dwóch cząsteczek, tworzących układ związanego). W gazie cząsteczki przebywają średnio w tak dużych odległościach wzajemnych, iż można przyjąć, że praktycznie nie oddziałują ze sobą. Każda cząsteczka porusza się niezależnie od innych, zderzając się z nimi względnie rzadko. Przy tym każda cząsteczka bierze udział w trzech rodzajach ruchu: stopowym, obrotowym (cząsteczka wiruje wokół własnej osi) i drgającym (atomy tworzące cząsteczkę drgają względem swoich sąsiadów). Jeżeli cząsteczka jest jednoatomowa, to zachodzi: ruch stopowy. W kryształku cząsteczki występują razem tworząc wspólny układ związanego. Kiedy cząsteczka wniknie do pola sąsiedniej cząsteczki, to jej ruchy zostaną zakłócone.

Dla kryształu charakterystyczne jest występowanie przestrzennej struktury uporządkowanej — sieci krystalicznej. Węzłami tej sieci są położenia równowagi poszczególnych cząsteczek. Wokół tych właśnie położień cząsteczki wykonują swoje złożone ruchy drgające.

Czytelnik B: Czy dobrze zrozumiałem, że istnieją drgania cząsteczek w polu kryształu i drgania atomów wewnętrz każdej cząsteczki?

Autor: Tak jest pod warunkiem, że energia wiązania atomów wewnętrz cząsteczek jest znacznie większa od energii wiązania samych cząsteczek w sieci krystalicznej. W tej sytuacji cząsteczki połączone w kryształ jak gdyby zachowują swoją indywidualność. Jednak często przy tworzeniu kryształu cząsteczki nie zachowują swojej indywidualności i kryształ składa się faktycznie nie tyle z cząsteczek, co z oddzielnych atomów. Wtedy wewnętrzcząsteczkowe drgania nie występują: zachodzą tylko drgania atomów w polu kryształu.

Czytelnik B: Niczego nie powiedział Pan o charakterze ruchu cieplnego cząsteczek w cieczy.

Autor: Charakter ruchu cieplnego w cieczy jest najbardziej złożony. W cieczy, będącej czymś pośrednim między gazem i kryształem, mimo silnego oddziaływania międzycząsteczkowego występuje znaczny stopniu struktura nieuporządkowana. Trudności badania kryształów, spowodowane silnym oddziaływaniami międzycząsteczkowymi, w znacznej mierze są kompensowane, czy też łagodzone istnieniem uporządkowanej struktury — sieci krystalicznej.

Trudności badania gazów, spowodowane nieuporządkowaniem położenia poszczególnych cząsteczek, kompensowane są praktycznie całkowitym brakiem oddziaływania międzycząsteczkowego. Natomiast w cieczy występują obie wymienione trudności, przy jednoczesnym braku odpowiednich czynników kompensujących. Można powiedzieć, że w cieczy cząsteczki z reguły w pełni zachowują swoją indywidualność. Dla cieczy charakterystyczne jest istnienie najróżniejszych rodzajów ruchów: przemieszczenia cząsteczek, obroty cząsteczek, drgania atomów wewnętrz pojedynczych cząsteczek, drgania cząsteczek w polu sąsiednich cząsteczek. Największa trudność polega na tym, że tych wszystkich rodzajów ruchu nie można skończenie biorąc, rozpatrywać oddzielnie. „w czystej postaci”: istnieje silny wzajemny wpływ ruchów.

Czytelnik B: Nie rozumiem, jak można łączyć postępowe przemieszczanie i drgania w polu sąsiednich cząsteczek.

Autor: Istnieją liczne modele, w których czynione są próby łącznego traktowania wymienionych ruchów. Na przykład w jednym z modeli założono, że cząsteczka zachowuje się tak: przez pewien czas drga w polu sąsiednich, potem robi skok, przechodzi w nowe otoczenie, drga w tym nowym otoczeniu, następnie znowu robi skok itd. Taki model nazywa się „modelem dyfuzji skokowej”.

Czytelnik B: Wydaje mi się, że właśnie w ten sposób powinna zachodzić dyfuzja atomów w kryształach.

Autor: Masz rację. Tylko weź pod uwagę, że w kryształach proces ten jest spowolniony: skoki w nowe otoczenie zachodzą znacznie rzadziej. Istnieje także inny model, zgodnie z którym cząsteczka w cieczy zachowuje się następująco: wykonuje drgania w otoczeniu swoich sąsiadek, a samo to otoczenie płynnie przemieszcza się w przestrzeni („pływnie”) i jednocześnie stopniowo się odkształca. Ten model nazywa się „modelem dyfuzji ciągłej”.

Czytelnik B: Mówił Pan, że ciecz jest „czymś” pośrednim między kryształem i gazem. A do czego ma „blizej”?

Autor: A ty jak myślisz?

Czytelnik B: Mnie się wydaje, że ciecz jest jednak zbliżona bardziej do gazu.

Autor: Jednak w rzeczywistości ciecz jest bardziej zbliżona do kryształu; wskazują na to zbliżone wartości gęstości, właściwych pojemności cieplnych oraz współczynników rozszerzalności objętościowej cieczy i kryształów. Wiadomo także, że ciepło topnienia jest znacznie mniejsze od ciepła parowania. Wszystkie te fakty świadczą o wyraźnym podobieństwie sił wiązania międzycząsteczkowego w kryształach i cieczach. Wynikiem wymienionego podobieństwa jest także ustalona w doświadczeniach nad rozpraszaniem promieni rentgenowskich obecność elementów uporządkowania w rozmieszczeniu atomów cieczy, znana pod nazwą „bliskiego uporządkowania”.

Czytelnik B: Co to takiego?

Autor: Bliskie uporządkowanie w cieczy oznacza uporządkowane rozmieszczenie wokół dowolnie wybranego atomu (cząsteczki) pewnej listy/jego najbliższych sąsiadów. W przeciwieństwie do

kryształu to uporządkowane rozmieszczenie względem wybranego atomu nie zachowuje się w miarę oddalania się od niego i nie doprowadza do utworzenia sieci krystalicznej. Jednak w małych odległościach jest ono zupełnie podobne do rozmieszczenia atomów danej substancji w fazie stałej.

Na rysunku 23.2a przedstawiono dalekie uporządkowanie dla szeregu atomów, które porównano z uporządkowaniem bliskiego zasięgu, przedstawionym na rysunku 23.2b.

Występowanie podobieństwa między cieczami i kryształami doprowadziło do powstania terminu „kwazikrystaliczność” cieczy.

Czytelnik B: Czy, w takim razie, można ciecz uważać, na zasadzie analogii, za coś podobnego do kryształów?

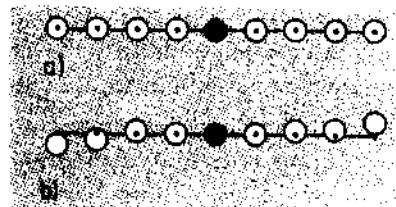
Autor: Wypada przestrzec przed nadużywaniem pojęcia kwazikrystaliczności cieczy i przypisywaniem mu przesadnie dużego znaczenia. Po pierwsze, trzeba mieć na uwadze, że stan ciekły występuje w dużym zakresie temperatur. Nie można oczekiwać, by strukturalno-dynamiczne właściwości cieczy były jednakowe (albo choćby w przybliżeniu jednakowe) w całym tym obszarze.

W pobliżu stanu krytycznego ciecz powinna, oczywiście, utracić jakiekolwiek podobieństwo do ciała stałego i przechodzić w sposób ciągły w fazę gazową.

Tak więc, jeżeli pojęcie kwazikrystaliczności cieczy jest nawet uzasadnione, to w każdym razie niezbyt daleko od punktu topnienia. Po drugie, charakter międzycząsteczkowego oddziaływania w różnych cieczach jest różny, w związku z czym pojęcie kwazikrystaliczności można stosować do różnych cieczy w niejednakowym stopniu. Na przykład woda okazała się cieczą bardziej kwazikrystaliczną aniżeli roztopione metale, i to jest przyczyną wielu jej wyjątkowych właściwości (par. 24).

Czytelnik B: Jak widzę, prosty obraz ruchów cieplnych cząsteczek w cieczy nie istnieje.

Autor: Słusznie. Względnie proste są tylko skrajne sytuacje. Sytuacje pośrednie są zawsze skomplikowane.



Rys. 23.2

Czytelnik A: Na egzaminie między innymi może wystąpić temat: Doświadczalne podstawy kinetyczno-cząsteczkowej teorii materii. Prawdopodobnie trzeba tu powiedzieć o ruchach Browna?

Autor: Tak, ruchy Browna są przekonującym eksperymentalnym uzasadnieniem podstawowych założeń teorii kinetyczno-cząsteczkowej.

Ale czy wiecie, co to są ruchy Browna?

Czytelnik A: Jest to ruch cieplny cząsteczek.

Autor: Mylisz się: przecież ruchy Browna obserwuje się za pomocą zwykłych mikroskopów!

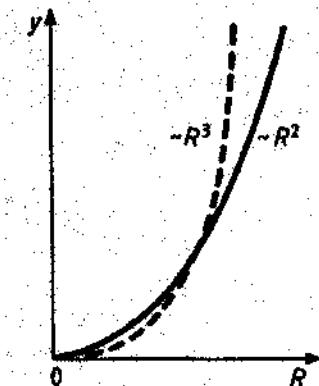
Ruchy Browna są ruchami pojedynczych cząstek zawiesiny w pewnym ośrodku (ciekłym lub gazowym), zachodzącymi pod wpływem uderzeń cząsteczek ośrodka, wykonyujących ruchy cieplne. Same te cząstki, z punktu widzenia teorii cząsteczkowej, są makrociąłami. Jednak z punktu widzenia rozmiarów, do jakich jesteśmy przyzwyczajeni, są one bardzo małe. W wyniku chwilowego nieskompensovania przypadkowych uderzeń cząsteczek ośrodka w cząstki brownowskie te ostatnie pobudzane są do chaotycznych wychyleń, np. z chwilowych położen równowagi. W rezultacie wykonują niezwykle charakterystyczny ruch względem ośrodka, którym może być dowolna ciecz (lub gaz).

Czytelnik B: A dlaczego cząstki brownowskie powinny być jednak dosyć małe? Dlaczego nie obserwuje się ruchów Browna bezpośrednio dostrzegalnych okruchów materii, na przykład fusów kawy w szklance?

Autor: Jest to spowodowane dwiema przyczynami. Po pierwsze, liczba uderzeń cząsteczek w powierzchnię cząstki jest proporcjonalna do pola tej powierzchni; natomiast masa cząstki jest proporcjonalna do jej objętości. Wobec tego ze wzrostem rozmiaru R (promienia) cząstki liczba uderzeń cząsteczek w jej powierzchnię wzrasta proporcjonalnie do R^2 , podczas gdy masa cząstki, która pod wpływem uderzenia powinna ruszyć z miejsca, wzrasta proporcjonalnie do R^3 . Dlatego cząsteczkom jest coraz trudniej побudzić do ruchu coraz większą cząstkę brownowską. Najlepiej pokazują to wykresy $y = R^2$ i $y = R^3$ na rysunku 23.3. Łatwo zauważyc, że zależność kwadratowa przeważa dla małych

a sześcienna — dla dużych R . Zatem dla małych R powinny przeważać efekty powierzchniowe, podczas gdy dla dużych R powinny przeważać efekty objętościowe. Po drugie cząstka brownowska powinna być mała także dlatego, aby mogły wystąpić nieskompensovane uderzenia cząsteczek, tj. aby w ciągu jednostki czasu liczba uderzeń w cząstce z lewej strony była istotnie różna od liczby uderzeń z prawej strony.

Stosunek wymienionej różnicy liczby uderzeń do liczby wszystkich uderzeń jest większy dla cząstek o mniejszej powierzchni.



Rys. 23.3

Czteraz na podstawie teorii kinetyczno-cząsteczkowej rozpatrzmy zjawisko parowania i wrzenia cieczy.

Jak objaśnić zjawisko parowania?

Czytelnik A: Zjawisko parowania polega na tym, że najszybsze cząsteczki „przewybijają” przyciąganie ze strony innych cząsteczek i wylatują z cieczy.

Autor: Co przyczynia się do przyspieszenia parowania?

Czytelnik A: Po pierwsze — zwiększenie powierzchni cieczy, po drugie — ogrzewanie cieczy.

Autor: Trzeba pamiętać o tym, że proces parowania nie jest zjawiskiem jednokierunkowym, lecz dwukierunkowym: jednocześnie / ucieczka części cząsteczek / ciecz zachodzi także częściowy powrót c/ąstec/ek do cieczy.

Im bardziej proces ucieczki cząsteczek z cieczy dominuje nad procesem odwrotnym, tym bardziej efektywnie będzie zachodziło parowanie. W celu przyspieszenia parowania można także podjąć działania spowolniające powrót cząsteczek do cieczy. Na przykład wiatr usuwa sponad cieczy cząsteczki, które z niej wyleciały, i w ten sposób maleje prawdopodobieństwo ich powrotu do ciec/y. Właśnie dlatego na wietr/e mokre ubrania wysychają szybciej.

Gdy dochodzi do wzajemnego skompensowania procesów ucieczki cząsteczek z cieczy i ich powrotu do cieczy, następuje stan równowagi dynamicznej i para nad powierzchnią cieczy staje się nasycona.

Niekiedy pożądane jest spowolnienie procesu parowania. Na przykład nie jest dobrze, gdy chleb szybko wysycha. Aby temu zapobiec, chleb umieszcza się w zamkniętym naczyniu (skrzynka, chlebak, torba foliowa). W ten sposób zapobiega się ucieczce „wyparowanych” cząsteczek i nad powierzchnią chleba powstaje warstwa pary nasyconej, która nie pozwala na dalsze parowanie wody z chleba. A teraz proszę objaśnić proces wrzenia.

Czytelnik A: Proces wrzenia to ten sam proces parowania, tylko przebiegający bardziej intensywnie.

Autor: Twoja definicja procesu wrzenia zupełnie mi się nie podoba. Chcę zwrócić uwagę, że wielu egzaminowanych nie rozumie istoty tego procesu. Podczas ogrzewania cieczy zmniejsza się rozpuszczalność zawartych w niej gazów, w wyniku czego wewnętrz cieczy (na dnie i ścianach naczynia) pojawiają się banieczki gazu. Banieczki te napełniają się parą nasyconą, której ciśnienie zwiększa się wraz ze wzrostem temperatury. W pewnej temperaturze ciśnienie pary nasyconej wewnętrz banieczki staje się równe ciśnieniu wywieranemu na banieczki z zewnątrz. (Ciśnienie to jest równe sumie ciśnienia atmosferycznego i ciśnienia wytworzonego przez warstwę cieczy). Pocznając od tej chwili banieczki wypływają do góry i ciecz zaczyna wrzeć. Jak widzicie, wrzenie cieczy zasadniczo różni się od parowania.

Zauważmy, że parowanie zachodzi w dowolnej temperaturze, natomiast wrzenie – w określonej temperaturze, zwanej temperaturą (lub punktem) wrzenia.

Przypominam, że jeśli proces wrzenia już się zaczął, temperatura cieczy, mimo dalszego dopływu ciepła, nie wzrasta. Jest równa temperaturze wrzenia aż do chwili, gdy cała ciecz wyparuje. Z przytoczonych rozważań wynika, że w miarę zmniejszania ciśnienia zewnętrznego powinna się obniżać temperatura wrzenia cieczy. W związku z tym proponuję przeanalizować następujące pytanie.

W kolbie znajduje się niewielka ilość wody o temperaturze pokojowej. Zaczynamy za pomocą pomp usuwać powietrze, znajdujące się w kolbie nad wodą. Co się stanie z wodą?

Czytelnik A: W miarę wypompowywania powietrza obniża się ciśnienie nad wodą. Wraz z obniżaniem ciśnienia obniża się temperatura wrzenia wody. Gdy osiągnie temperaturę pokojową, woda w kolbie zacznie wrzeć.

Autor: Czy wrzenie wody może się nie rozpocząć, lecz przeciwnie, woda zacznie zamarzać?

Czytelnik A: Nie wiem. Myślę, że nie może.

Autor: To zależy od tego, jak przebiega proces wypompowywania powietrza z kolby. Jeżeli przebiega on dostatecznie powoli, to wcześniej czy później woda powinna zacząć wrzeć. Jeśli natomiast proces wypompowywania przebiega bardzo szybko, to woda zamarza. W wyniku wypompowywania powietrza, a wraz z nim pary wodnej, nasila się proces parowania. Ponieważ parowanie wody polega na ubywaniu z niej cząsteczek o największych energiach, powoduje ono chłodzenie wody.

Przy powolnym wypompowywaniu ochładzanie wody jest kompensowane przez dopływ ciepła z zewnątrz, co powoduje, że temperatura wody nie zmienia się. Natomiast przy bardzo szybkim wypompowywaniu dopływ ciepła z zewnątrz nie zdąży skompensować ochładzania się wody, w wyniku czego jej temperatura zaczyna się obniżać. Wtedy możliwość rozpoczęcia wrzenia także maleje. Kontynuowanie szybkiego wypompowywania powietrza z kolby doprowadzi w końcu do obniżenia temperatury wody do temperatury krzepnięcia i w następstwie do przejścia nieodparowanej wody w lód.

24. Jak objaśnia się wyjątkową rozszerzalność termiczną wody?

Autor:

Na czym polega wyjątkowość rozszerzalności termicznej wody?

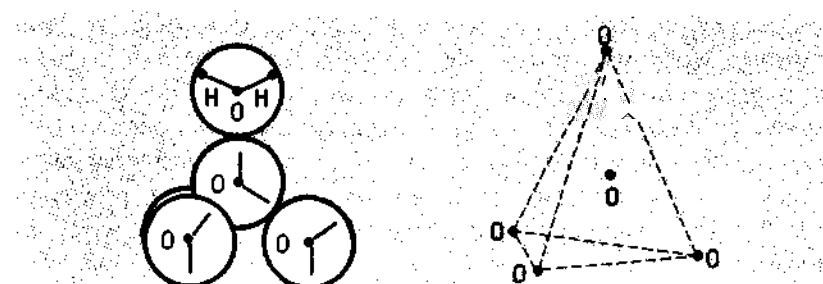
Czytelnik A: Podczas ogrzewania od 0 do 4°C woda „gęstnieje”. Dopiero przy dalszym wzroście temperatury (od 4°C) woda zaczyna się „roszzerzać”.

Autor: Jak można objaśnić taką osobliwość?

Czytelnik A: Nie wiem.

Autor: Aby objaśnić wspomnianą właściwość wody, trzeba się zastanowić nad jej strukturą atomową.

Cząsteczki wody oddziałują ze sobą w sposób ukierunkowany – każda cząsteczka wody może przyłączyć do siebie tylko cztery sąsiednie cząsteczki, których środki w wyniku tego przyłączenia tworzą czworościan (rys. 24.1).



Rys. 24.1

W konsekwencji powstaje dosyć krucha, ażurowa struktura, świadcząca o kwazikrystaliczności wody. Zrozumiałe, że mówienie o strukturze wody, a także każdej innej cieczy, jest możliwe tylko w sensie bliskiego uporządkowania (par. 23). Wraz ze wzrostem odległości od wybranej cząsteczki wystąpi stopniowo zakłócenie uporządkowania, powodowane wychyleniami i przerwami w wiąza-

niach międzyatomowych. W miarę zwiększania temperatury wiązania między cząsteczkami są niszczone częściej, wzrasta liczba cząsteczek z wolnymi wiązaniem, które wypełniają luki struktury tetraedrycznej; stopień kwazikrystaliczności wody maleje. Opisana ażurowa struktura wody jako substancji kwazikrystalicznej dobrze tłumaczy anomalie fizyczne właściwości wody i, w szczególności, odbiegający od normy przebieg rozszerzalności termicznej wody. Z jednej strony podwyższenie temperatury doprowadza do wzrostu średnich odległości między atomami wewnętrz cząsteczkami, wywołanego wzrostem intensywności drgań wewnętrzczasteczkowych (cząsteczki jak gdyby z lekka „puchną”). Z drugiej strony wraz ze wzrostem temperatury zachodzi łamanie ażurowej struktury wody, co w naturalny sposób prowadzi do gęstsze „upakowania” samych cząsteczek. Pierwszy efekt (efekt drgari) powinien przyczyniać się do zmniejszenia gęstości wody. Drugi efekt (efekt łamania struktury) powinien, przeciwnie, prowadzić do wzrostu gęstości wody w miarę ogrzewania. Przy ogrzewaniu od 0 do 4°C przeważa efekt łamania struktury i dlatego gęstość wody rośnie. Przy dalszym ogrzewaniu zaczyna przeważać efekt drgań, dlatego gęstość wody maleje.

25. Czy wiesz, co to jest gaz doskonały?

Autor:

Czy wiecie, co to jest gaz doskonały?

Czytelnik A: To jest gaz, dla którego spełnione są wszystkie znane nam prawa gazowe: prawo Boyle'a-Mariotte'a, prawo Gay-Lussaca, prawo Charlesa, ogólne prawo gazowe.

Czytelnik B: To taki gaz, którego cząsteczki nie oddziałują ze sobą. Gaz doskonały to uproszczony model gazu rzeczywistego.

Autor: Słuszne jest to, że wszystkie znane prawa gazowe mają zastosowanie właśnie do gazu doskonałego. Słuszne jest i to, że gaz doskonały to uproszczony model gazu rzeczywistego. Jednak nie

całkiem słusna jest uwaga o braku oddziaływania w gazie doskonałym.

W przypadku gazu doskonałego pomija się nie samo oddziaływanie cząsteczek, lecz energie ich oddziaływania. W wyniku czego wewnętrzna energia gazu przedstawia się jako sume kinetycznych energii cząsteczek.

Niech na przykład będzie N cząsteczek, z których każda charakteryzuje się średnią energią kinetyczną $E_{\text{kśr}}$. Energia wewnętrzna gazu na ogół bywa zapisywana w postaci

$$U = NE_{\text{kśr}} + U', \quad (25.1)$$

gdzie U' — potencjalna energia oddziaływania cząsteczek. Dla gazu doskonałego zamiast (25.1) mamy

$$U = NE_{\text{kśr}} \quad (25.2)$$

i po uwzględnieniu (25.1) dla gazu jednoatomowego mamy

$$U = \frac{3}{2} N k T. \quad (25.3)$$

Czytelnik B: Czy zawsze można nie brać pod uwagę energii wzajemnego oddziaływania cząsteczek U' ?

Autor: Zrozumiałe, że nie zawsze. Aby został spełniony warunek

$$NE_{\text{kśr}} \gg U', \quad (25.4)$$

trzeba doprowadzić do zwiększenia energii $NE_{\text{kśr}}$ i zmniejszenia energii U' . Pierwsze osiąga się w wysokich temperaturach, drugie — przez dostatecznie silne rozrzedzenie gazu. Innymi słowy, gaz można uważać za doskonały, jeżeli jest on dostatecznie ogrzany i rozrzedzony.

Podczas ochładzania i sprężania gazu wcześniej czy później dochodzimy do sytuacji, gdy już koniecznie trzeba uwzględnić energię oddziaływania cząsteczek. Takie gazy, jak azot albo tlen, w zwykłych warunkach można uważać za gazy doskonałe.

Czytelnik A: Co Pan rozumie przez „zwykłe warunki”?

Autor: Warunki zbliżone do normalnych. Przypomnę wam, że temperatura normalna to 237 K (0°C), ciśnienie normalne to 760 mm Hg

albo $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ [$1 \text{ Pa} (\text{paskal}) = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$].

A teraz wyobraźmy sobie, że mamy pewną ilość gazu doskonałego. Jakie parametry określają stan gazu?

Czytelnik A: Ciśnienie p , objętość V , temperatura t .

Czytelnik B: Z pewnością wygodniej jest posługiwać się temperaturą wyrażoną w skali bezwzględnej (T). Oprócz tego jest jeszcze jeden parametr — masa m gazu.

Autor: Masz rację. Dodam tylko, że zamiast masą m gazu można posługiwać się liczbą N cząsteczek gazu.

Zastanówcie się teraz nad pytaniem:

Czy można zmienić którykolwiek z wymienionych czterech parametrów (p, V, T, N), nie zmieniając przy tym innych parametrów?

Czytelnik A: Według mnie nie można.

Czytelnik B: Można zmieniać dwa parametry, nie zmieniając pozostałych parametrów.

Autor: Tak, zgadza się. Można także zmieniać trzy parametry, pozostawiając niezmiennym czwarty. Można zmieniać wszystkie cztery parametry. Nie można jednak zmieniać jednego parametru, nie zmieniając przy tym innych parametrów. Oznacza to, że między czterema parametrami p, V, T, N istnieje określony związek. Wyrażenie opisujące ten związek, nazywa się równaniem stanu gazodoskonałego.

Biorąc pod uwagę duże znaczenie tego równania, przytoczymy jego uproszczone wyprowadzenie. Dla ułatwienia będziemy zakładać, że wszystkie cząsteczki gazu mają jednakową prędkość v i poruszają się w jednym z trzech kierunków, przy czym zwrot ich prędkości może być zgodny lub przeciwny do zwrotu osi x, y, z .

Ciśnienie p jest równe stosunkowi składowej siły F prostopadłej do powierzchni, na którą ta siła działa, do pola tej powierzchni. Natomiast siła, zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona, jest równa zmianie pędu przypadającej na jednostkę czasu. Oznacza to, że ciśnienie wywierane na ściankę przez uderzające w nią cząsteczki jest równe sumarycznej zmianie pędu cząsteczek, które uderzyły w jednostce czasu w jednostkową powierzchnię ścianki. Założymy, że prostopadle do ścianki leci cząsteczka o masie m z prędkością v . W wyniku sprząstego zderzenia ze ścianką zmieni się zwrot prędkości cząsteczki na przeciwny i odleci ona od ścianki z taka

samą wartością prędkości. Zmiana pędu cząsteczki jest równa $2mv$. Założymy, że w ściankę o polu powierzchni S w czasie t uderza jednostajnie n cząsteczek, przy czym wszystkie poruszają się prostopadłe do ścianki i mają prędkość v . Wtedy

$$P = \frac{F}{S} = \frac{2mvn}{tS}. \quad (25.5)$$

Weźmy pod uwagę prostokątny obszar o polu S , prostopadły do osi Ox (rys. 25.1) i będący podstawą prostopadłościanu o długości $d = vt$. Zgodnie z upraszczającymi założeniami przyjmujemy, że $\frac{1}{6}$ wszystkich N cząsteczek równomiernie wypełniających wnętrze prostopadłościanu, ma prędkość zwróconą zgodnie z osią Ox i zbliża się do obszaru S . W czasie t wymienione cząsteczki uderzą w obszar S . Ich liczba wynosi

$$n = \frac{1}{6} N v = \frac{1}{6} N \frac{Sd}{V} = \frac{1}{6} \frac{N}{V} S v t.$$

Wobec tego

$$p = \frac{2mvn}{tS} = \frac{1}{3} \frac{N}{V} k T.$$

Ponieważ

$$\frac{mv^2}{2} = E_{\text{kin}} = \frac{3}{2} k T,$$

to

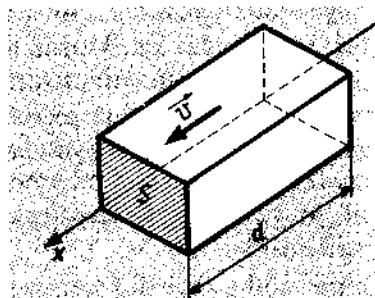
$$pV = NkT. \quad (25.6)$$

To jest właśnie poszukiwane równanie stanu gazu doskonałego. Trzeba koniecznie podkreślić, że chociaż równanie (25.6) uzyskano przy założeniach upraszczających, jednak wynik końcowy, jak się okazuje, jest wynikiem ścisłym (taki sam wynik moglibyśmy uzyskać bez uciekania się do wymienionych wcześniej uproszczeń).

Czytelnik A: Nigdy nie zetknąłem się z takim równaniem.

Autor: A powinno ono być warn dobrze znane. Weźmy pod uwagę gaz o masie m . Liczba cząsteczek tego gazu wynosi

$$N = N_A \frac{m}{M}. \quad (25.7)$$



Rys. 25.1

gdzie N_A — stała Avogadra, m — masa gazu, M — jego masa molowa, $\frac{m}{M}$ — ilość substancji (wyrażona w molach). Podstawiając (25.7) do (25.6), uzyskujemy

$$pV = N_A \frac{m}{M} k T.$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$N_A k = R, \quad (25.8)$$

gdzie R nosi nazwę — uniwersalna stała gazowa (molowa), znajdujemy

$$pV = \frac{m}{M} RT. \quad (25.9)$$

Czytelnik B: To równanie już znamy. Jest to równanie Clapeyrone-Mendelejewa.

Autor: Masz rację. Jest to jedna z postaci równania stanu gazu doskonałego.

Czytelnik A: Przedstawia ono ogólne prawo gazowe.

Autor: W tym miejscu muszę zrobić bardzo istotną uwagę. Ogólne prawo gazowe to jest coś zupełnie innego. Rzec w tym, że wszystkie prawa gazowe opisują jakieś zmiany stanu gazu i ustalają związek między parametrami stanu początkowego i parametrami stanu końcowego. Natomiast wyrażenia (25.6) i (25.9) opisują związek między parametrami tylko jednego stanu.

Czytelnik A: Jaka więc jest postać równania, które wyraża ogólne prawo gazowe?

Autor: Do praw gazowych przejdziemy wkrótce. A na razie chciałbym uczynić jeszcze jedną uwagę o stanie gazu. Założymy, że gaz ma określoną masę. Wtedy w celu określenia stanu gazu należy ustalić tylko dwa parametry. Mogą to być: p , V ; albo V , T ; albo p , T . Tak oto, danemu stanowi odpowiada konkretny punkt w układzie osi współrzędnych p i V , albo V i T , albo p i T .

26. Jaki /nasz prawo gazowe?

Autor: Podkreśle jeszcze raz:

dowolne prawo gazowe opisuje jakąś zmianę stanu gazu. Innymi słowy, prawo gazowe zawsze wiąże ze sobą parametry początkowego i koncowego stanu gazu.

Skorzystamy z równania stanu gazu doskonałego (25.9) i wyrowadzimy wyrażenie na ogólne prawo gazowe. Weźmy pod uwagę dwa różne stany gazu: początkowy o parametrach p_1 , V_1 , T_1 , m_1 i końcowy o parametrach p_2 , V_2 , T_2 , m_2 . Wtedy dla stanu początkowego równanie ma postać

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{M} R T_1, \quad \text{albo} \quad \frac{p_1 V_1}{m_1 T_1} = \frac{R}{M}. \quad (26.1a)$$

Dla stanu końcowego

$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{M} R T_2, \quad \text{albo} \quad \frac{p_2 V_2}{m_2 T_2} = \frac{R}{M}. \quad (26.1b)$$

Ponieważ prawe strony wyrażeń (26.1a) i (26.1b) są równe, to powinny być równe również lewe strony:

$$\frac{p_1 V_1}{m_1 T_1} = \frac{p_2 V_2}{m_2 T_2}. \quad (26.2)$$

W ten sposób uzyskano w najbardziej ogólnej postaci związek między parametrami stanu początkowego i koncowego. Właśnie ten związek jest poszukiwanym wyrażeniem na ogólne prawo gazowe.

Można je, oczywiście, zapisać w postaci:

$$\frac{pV}{mT} = \text{const.} \quad (26.2a)$$

Czytelnik B: Nas uczyono prostszego wyrażenia na ogólne prawo gazowe:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}, \quad \text{albo} \quad \frac{pV}{T} = \text{const.} \quad (26.2b)$$

Autor: Wyrażenie (26.3) uzyskuje się z (26.2), jeśli się przyjmie, że podczas przechodzenia od stanu początkowego do koncowego masa gazu nie ulegała zmianie ($m_1 = m_2$). Poniżej założymy, że ten warunek jest spełniony i będziemy posługiwać się właściwie wyrażeniem (26.3). Wychodząc z tego wyrażenia, można dojść do jego szczególnych przypadków — do tak zwanych przemian gazowych:

a) nie zmienia się temperatura — przemiana izolermiczna (prawo Boyle'a-Mariotte'a):

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \quad \text{albo} \quad pV = \text{const}; \quad (26.4)$$

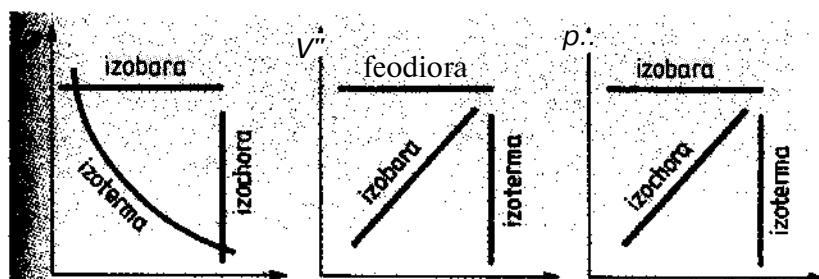
b) nie zmienia się ciśnienie — przemiana izobaryczna (prawo Gay-Lussaca):

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \quad \text{albo} \quad \frac{V}{T} = \text{const}; \quad (26.5)$$

c) nie zmienia się objętość — przemiana izochoryczna (prawo Charlesa):

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \quad \text{albo} \quad \frac{p}{T} = \text{const.} \quad (26.6)$$

Wszystkie te przemiany, zwane również izoprzemianami, można przedstawić w postaci określonych wykresów na płaszczyźnie (na przykład w układzie osi p , V). Na rysunku 26.1 różne przemiany przedstawiono w różnych układach osi współrzędnych: p , V ; V , T oraz p , T . Zwracam uwagę, że przystępujący do egzaminu zwykle umieją przedstawiać przemiany w układzie osi p , V , ale mają



Rys. 26.1

kłopoty z przedstawieniem tych samych przemian w innych układach współrzędnych.

Czytelnik A: Teraz też jestem w kłopotliwej sytuacji. Niezupełnie rozumiem, dlaczego na przykład izobara w układzie V, T ma postać prostej, wychodzącej z początku układu współrzędnych.

Autor: Zwróć uwagę na wyrażenie (26.5) opisujące przemianę izobaryczną. Można je zapisać w takiej postaci: $V = \text{const} \cdot T$. Istnieje więc wprost proporcjonalna zależność objętości V od temperatury T .

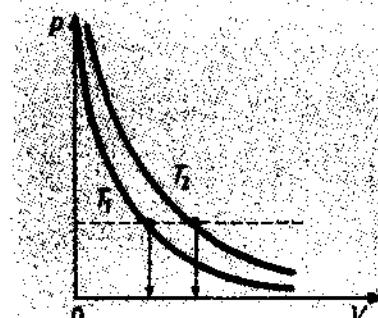
Czytelnik A: Teraz już rozumiem.

Autor:

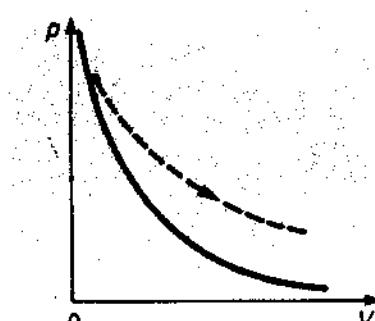
Na rysunku 26.2 pokazane są dwie izotermy dla tej samej masy gazu, ale dla różnych temperatur (T_1 i T_2). Która z tych izotermy odnosi się do wyższej temperatury?

Czytelnik B: Myślę, że będę mógł odpowiedzieć na to pytanie. Trzeba poprowadzić na rysunku jakąkolwiek izobarę (linia kreskowa na rys. 26.2). Przy stałym ciśnieniu objętość gazu będzie tym większa, im wyższa jest jego temperatura. Oznacza to, że zewnętrzna izoterma (T_2) odpowiada wyższej temperaturze.

Autor: Zgadza się. Zapamiętajcie: Im bliżej początku układu współrzędnych p , V przebiega izoterma, tym niższej temperaturze ona odpowiada. W tym sensie zbliżenie do początku układu współrzęd-



Rys. 26.2



Rys. 26.3

nych jest nieuchronnie związane z obniżeniem temperatury gazu, a oddalenie od początku układu współrzędnych — ze wzrostem temperatury gazu.

Przejźmy do rysunku 26.3. Linia ciągła jest pewną izoterma. Czy temperatura gazu wzrasta czy maleje podczas jego rozprężania, przedstawionego na rysunku 26.3 linią kreskową?

Czytelnik A: Poruszając się po linii kreskowej, oddalamy się od początku układu współrzędnych. Oznacza to, że temperatura wzrasta.

Autor: Słusznie.

A teraz wybierzmy w układzie współrzędnych p, V zupełnie dowolne dwa punkty: punkt 1 (o parametrach p_1, V_1, T_1) i punkt 2 (o parametrach p_2, V_2, T_2). Będziemy przechodzić z punktu 1 do punktu 2; przy tym za każdym razem będziemy się posługiwać jakimiś dwiema izoprzemianami. Proszę odpowiedzieć na pytanie, ile takich różnych przejść z punktu 1 do 2 można zrobić.

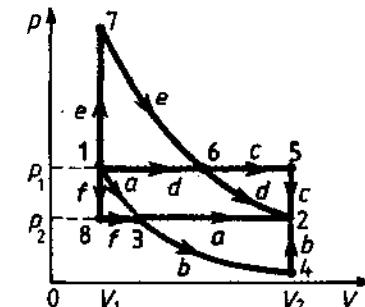
Czytelnik A: Na pewno trzy. Po pierwsze, izoterma-izobara; po drugie, izoterma-izochora; po trzecie, izobara-izochora.

Autor: A czy może być, na przykład, izobara-izoterma?

Czytelnik A: A czyż to nie to samo, co izoterma-izobara? Zresztą nigdy się nad tym nie zastanawiałem...

Autor: To są różne przejścia. Wszystkich możliwych przejść jest sześć; zostały one pokazane na rysunku 26.4: a) izoterma-izobara; b) izoterma-izochora; c) izobara-izochora; d) izobara-izoterma; e) izochora-izoterma; f) izochora-izobara. Łatwo zauważyc, że są to całkiem odmienne przejścia; odpowiadają im inne stany pośrednie. W związku z rysunkiem 26.4 należy zwrócić uwagę na dwie okoliczności:

po pierwsze, ga/ można przeprowadzić z dowolnego stanu początkowego zawsze dwa różne przejścia do innego stanu koncowego, po drugie, dla niektórych przejść istnieją dodatkowe możliwości.



Rys. 26.4

wolne punkty płaszczyzny odpowiedniego wykresu zawsze można połączyć, wykorzystując na przykład izotermę i izobarę); po drugie, ponieważ bierzymy pod uwagę trzy izoprzemiany, więc możliwych jest sześć różnych przejść między dwoma dowolnymi stanami.

A teraz wróćmy znowu do ogólnego prawa gazowego (26.3). Przypomnijcie sobie, jak uczonej was wyprowadzać to prawo.

Czytelnik A: Wychodząc z praw Boyle'a-Mariotte'a i Gay-Lussaca. Ale ja zawsze gubię się, chcąc wyprowadzić to równanie. Ponadto pokazał nam Pan całkiem inne wyprowadzenie ogólnego prawa gazowego — z równania stanu gazu.

Autor: Dlatego chcę, aby stało się to całkiem jasne. Zapamiętajcie: podstawą jest równanie stanu gazu (25.9); uzyskuje się je, jak wiemy, rozpatrując ruch cząsteczek w gazie. Następnie na podstawie równania stanu (25.9) otrzymuje się równanie (26.2), wyrażające prawo gazowe w jego najbardziej ogólnej postaci (gdy zmieniają się wszystkie cztery parametry: p , V , T , m). W końcu na podstawie (26.2) dochodzi się do wyrażenia (26.3) i wreszcie do wyrażeń (26.4) — (26.6) opisujących poszczególne izoprzemiany. Mamy tutaj do czynienia z przechodzeniem od wyrażeń ogólnych do szczegółowych. Jest to metoda dedukcyjna. Możliwa jest jednakże droga odwrotna — od wyrażeń szczególnych do ogólnych (metoda indukcyjna). W tym wypadku zakłada się, że wyrażenia szczególne są z góry znane, na przykład uzyskano je bezpośrednio z doświadczenia; wychodząc od nich podejmuje się próbę przejścia drogą uogólnień do wyrażeń ogólnych. Metoda dedukcyjna jest bardziej konsekwentna i logiczna; metoda indukcyjna może okazać się niekiedy prostsza. Stosując metodę indukcyjną, będziemy wychodzić z praw Boyle'a-Mariotte'a i Gay-Lussaca. U podstaw wyprowadzenia ogólnego prawa gazowego leży znane nam już stwierdzenie: z dowolnego początkowego stanu (p_1, V_1, T_1) w dowolny końcowy (p_2, V_2, T_2) można przejść po izotermie i izobarze. Przedstawimy to przejście w układzie współrzędnych p , V (rys. 26.5). Parametry stanu pośredniego są następujące: p_2, V_3, T_1 . Stosując prawo Boyle'a-Mariotte'a, powiązemy parametry stanów początkowego i pośredniego:

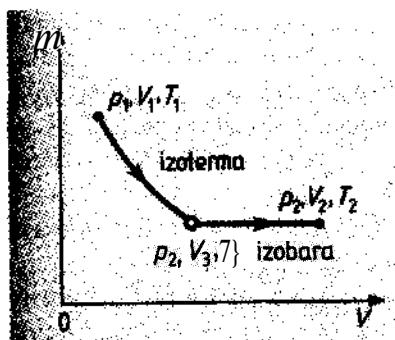
$$p_1 V_1 = p_2 V_3 \quad (26)$$

Wykorzystując prawo Gay-Lussaca, powiązemy parametry stanów pośredniego i końcowego:

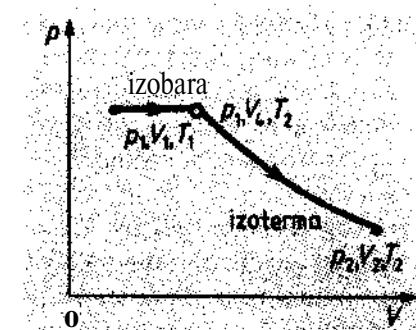
$$\frac{V_3}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad (26.8)$$

Proszę zwrócić uwagę: w wyrażeniach (26.7) i (26.8) występuje jeden parametr wspólny — jest nim pośrednia objętość V_3 . Eliminując ją z tych dwóch wyrażeń, dochodzimy do poszukiwanego wyniku:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$



Rys. 26.5



Rys. 26.6

Czytelnik B: A gdyby skorzystać najpierw z przemiany izobarycznej, a dopiero następnie z izotermicznej?

Autor: Wtedy mamy sytuację przedstawioną na rysunku 26.6: stan początkowy — p_1, V_1, T_1 ; końcowy — p_2, V_2, T_2 ; pośredni (tutaj zawsze trzeba pisać uważnie) — p_1, V_4, T_2 .

Czytelnik A: Mamy tutaj inny, niż poprzednio, stan pośredni.

Autor: Tak, stany początkowy i pośredni związane są teraz prawem Gay-Lussaca: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_4}{T_2}$. Stany pośredni i końcowy związane są prawem Boyle'a-Mariotte'a: $p_1 V_4 = p_2 V_2$. Eliminując wspólny parametr (objętość V_4), dochodzimy, jak łatwo się przekonać, do poszukiwanego wyniku — wyrażenia (26.3).

Czytelnik B: Można by chyba dokonać przemiany izotermicznej i izochorycznej albo nawet izobarycznej i izochorycznej?

Autor: Ma się rozumieć. Za każdym razem będzie inny przebieg krzywych w układzie współrzędnych p , V oraz inny stan pośredni. Ale końcowy wynik będzie zawsze taki sam.

Czytelnik B: To znaczy, że gdybyśmy korzystali ze wszystkich trzech przemian gazu, wtedy moglibyśmy podać sześć wyprowadzeń ogólnego prawa gazowego?

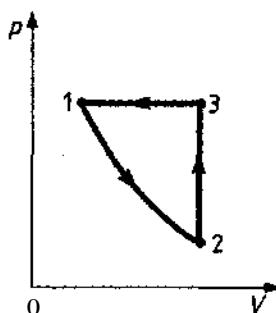
Autor: Zupełnie słusznie. Ten wniosek jest całkowicie zgodny z rysunkiem 26.4.

Czytelnik A: Dopiero teraz, na podstawie wykresów przemian w układzie współrzędnych p , V zrozumiałem, jak się wyprowadza ogólne prawo gazowe.

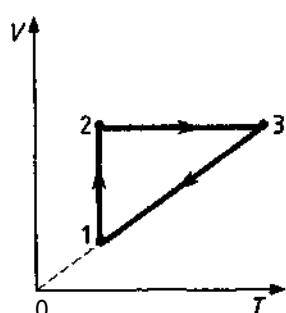
Autor: Rozpatrzymy teraz pewien proces cykliczny (tj. zamknięty albo kołowy) złożony z trzech różnych przemian. Niech w układzie współrzędnych p , V proces ten przebiega zgodnie z rysunkiem 26.7. Przejście ze stanu 1 do 2 to rozprężanie izotermiczne, $2 \rightarrow 3$ - ogrzewanie izochoryczne, $3 \rightarrow 1$ - izobaryczne zmniejszanie objętości.

Czytelnik B (przerywając): Z pewnością przemianę $3 \rightarrow 1$ można także nazwać „izobarycznym ochładzaniem”?

Autor: Masz rację. Przecież przejściu ze stanu 3 do stanu 1 odpowiada obniżenie temperatury gazu. Wobec tego, jak będzie przebiegała opisana cykliczna przemiana stanu gazu w układzie współrzędnych v , r ?



Rys. 26.7



Rys. 26.8

Czytelnik B: Będzie wyglądała tak, jak pokazano na rysunku 26.8.

Autor: Wszystko zrobiłeś poprawnie. Rzeczywiście nieźle opanowałeś graficzne przedstawianie przemian gazowych.

Rozpatrzymy teraz pewien proces, w którym zmieniają się już nie dwa parametry (jak to miało miejsce w izoprzemianach), lecz trzy.

Niech gaz rozpręża się w taki sposób, ze jego ciśnienie i objętość spełniają warunek $pV^2 = \text{const}$. Wiadomo, że objętość gazu wzrosła dwa razy. Jak zmieniła się temperatura gazu?

Od czego zwykle zaczynamy, rozpatrując jakąkolwiek przemianę stanu gazu?

Czytelnik B: Trzeba, jak myślę, oznaczyć parametry stanu początkowego i końcowego gazu. Niech to będą odpowiednio: p_1, V_1, T_1 i p_2, V_2, T_2 .

Autor: Jaki istnieje związek między tymi parametrami?

Czytelnik B: Ten związek jest mi doskonale znany:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Autor: Gdybyśmy mieli do czynienia z przemiana izotermiczną, to jaki mielibyśmy dodatkowy warunek?

Czytelnik B: Warunek $T_1 = T_2$.

Autor: Zatem mielibyśmy układ równan:

$$\begin{cases} \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}, \\ T_1 = T_2. \end{cases}$$

Stąd bezpośrednio uzyskalibyśmy znane wyrażenie na prawo Boyle'a-Mariotte'a: $p_1 V_1 = p_2 V_2$.

Jednak w naszym zadaniu przemiana nie jest izotermiczna: dodatkowy warunek mamy inny. Jaki on jest?

Czytelnik B: Warunek ten jest dany w treści zadania: $p_1 V_1^2 = p_2 V_2^2$.

Teraz mamy więc układ równan:

$$\begin{cases} \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}, \\ p_1 V_1^2 = p_2 V_2^2. \end{cases}$$

Dzieląc stronami drugie równanie przez pierwsze, znajdujemy

$$V_1 T_1 = V_2 T_2.$$

W takim razie temperatura gazu powinna zmniejszyć się tyle razy, ile razy zwiększyła się jego objętość.

Autor: Na zakończenie zastanówmy się, jak obliczyć uniwersalną stałą gazową R , która pojawiła się w wyrażeniu (25.8).

Czytelnik A: Trzeba skorzystać z wyrażenia (25.8). Stała Avogadra

$$N_A = 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}, \text{ stała Boltzmanna } k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}. \text{ Zatem}$$

$$R = N_A k = 8,3 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}.$$

Czytelnik B: W celu obliczenia R można także skorzystać z równania stanu gazu doskonałego (25.9), zapisanego dla określonej masy m gazu:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} \frac{M}{m} = R, \quad (26.9)$$

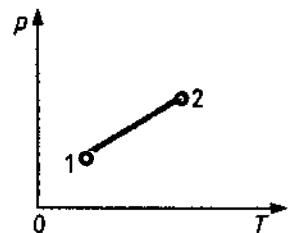
gdzie parametry p_0 , V_0 , T_0 , m odnoszą się do jednego mola gazu, znajdującego się w warunkach normalnych: $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. $T_0 = 273 \text{ K}$, $V_0 = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ (wiadomo, że jeden mol dowolnego gazu w warunkach normalnych zajmuje objętość $V_0 = 22,4 \text{ l}$);

$\frac{M}{m} = \frac{1}{\text{mol}}$, gdyż M jest masą molową wyrażoną w $\frac{\text{kg}}{\text{mol}}$, natomiast m – masą (w tym wypadku jednego mola) wyrażoną w kg. Obliczając wartość lewej strony równania (26.9) znajdujemy $R = 8,3 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$.

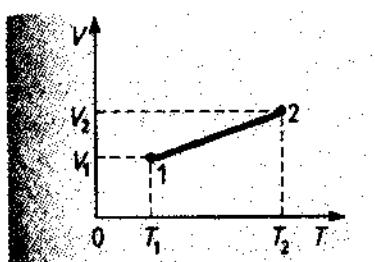
Zadania

- 26.1. Przy ogrzewaniu gazu uzykano zależność jego ciśnienia od temperatury przedstawioną na rysunku 26.9. Określ, czy podczas ogrzewania gaz ulegał sprężaniu czy rozprężaniu.

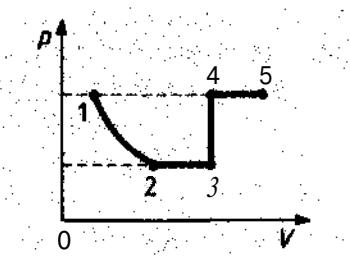
Rys. 26.9



- 26.2. Podczas ogrzewania gazu pod stałym ciśnieniem w wyniku nieszczelności pojemnika uzyskano wykres zależności objętości od temperatury w postaci przedstawionej na rysunku 26.10. Określ, jak zmieniała się masa gazu, jeżeli $V_2 = 1,5 V_1$, $T_2 = 3 T_1$.



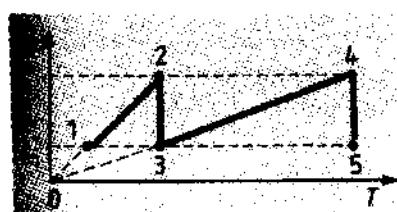
Rys. 26.10



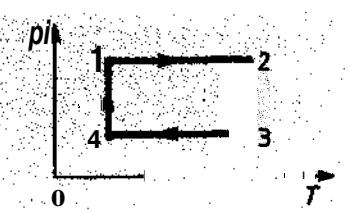
Rys. 26.11

- 26.3. Na rysunku 26.11 dany jest wykres opisujący przemiany stanu gazu doskonałego we współrzędnych p , V . Przedstaw ten proces graficznie we współrzędnych p , T i V , T .

- 26.4. Na rysunku 26.12 dany jest wykres opisujący przemiany stanu gazu doskonałego we współrzędnych V , T . Przedstaw ten proces graficznie we współrzędnych V , p i p , T .



Rys. 26.12



Rys. 26.13

- 26.5. Na rysunku 26.13 dany jest wykres opisujący przemiany stanu gazu doskonałego we współrzędnych p , T . Przedstaw ten proces graficznie we współrzędnych V , T i p , V .

27. Jak rozwiążujesz zadania dotyczące praw gazowych?

Czytelnik A: Chciałbym się zająć zastosowaniem praw gazowych do rozwiązywania różnorodnych zadań.

Autor: Prawie wszystkie zadania egzaminacyjne dotyczące praw gazowych są moim zdaniem dosyć proste. Większość z nich można zaliczyć do jednej z następujących dwóch grup.

Pierwsza grupa:

Zadania dotyczące zmiany stanu pewnej masy gazu, przy czym wartość tej masy nie jest w zadaniu wykorzystywana. W wyniku rozprężania, ogrzewania i innych procesów gaz przechodzi / pewnego stanu p_1, V_1, T_1 w stan p_2, V_2, T_2 . Parametry stanów po całkowitego i końcowego są określone za pomocą równania ogólnego prawa gazowego (26.3):

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

W zadaniu należy wyznaczyć jeden z tych sześciu parametrów.

Druga grupa:

Zadania, w których stan gazu nie zmienia się, ale za to istotna jest masa gazu. Wymaga się, aby wyznaczyć tę masę, znając parametry stanu gazu, albo wyznaczyć jeden / parametrów stanu na podstawie znajomości tej masy i pozostałych parametrów. W takich zadaniach powinna być znana masa molowa rozpatrywanego ga/u.

Czytelnik B: W celu rozwiązywania zadań grupy drugiej najwygodniej jest skorzystać z równania (25.9).

Autor: Słusznie. Proszę rozwiązać następujące zadanie:

Znaleźć objętość $m = 58$ g powietrza pod ciśnieniem $p = 8$ at w temperaturze 91°C .

Czytelnik B: Z równania (25.9) uzyskujemy

$$V = \frac{mRT}{M_p}$$

Wszystkie dane zadania trzeba wyrazić w jednostkach układu SI: $m = 5,8 \cdot 10^{-2}$ kg; $p = 8 \cdot 10^5$ Pa; $T = (91 + 273)$ K = 364 K, masa molowa powietrza $M = 0,029 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$, $R = 8,3 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$. Wtedy otrzymamy $V = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 7,5 \text{ l}$.

Czytelnik A: Przeliczając ciśnienie, przyjęłeś, że 1 at = 10^5 Pa, ale 10^5 Pa to jest 1 bar. Atmosfera techniczna 1 at = $9,8 \cdot 10^4$ Pa.

Czytelnik B: Masz rację. Między barem i atmosferą techniczną istnieje niewielka różnica i dlatego jej tutaj nie uwzględniałem.

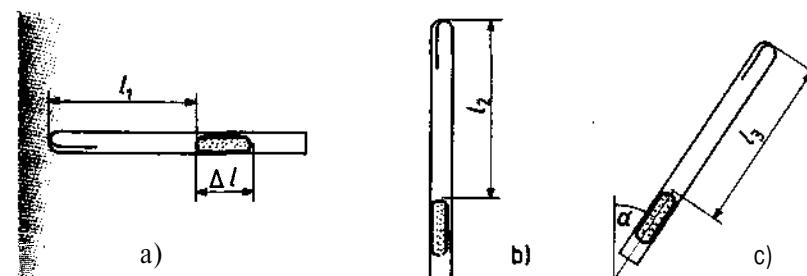
Czytelnik A: Czy mógłby Pan wymienić charakterystyczne trudności, z którymi można się spotkać przy rozwiązywaniu zadań grupy pierwszej lub drugiej?

Autor: Już mówiłem, że zadania te są dosyć proste.

Czytelnik A: Ale jakie błędy popełniają egzaminowani?

Autor: Jeśli nie uwzględniają zwykłego roztargnienia, to podstawową przyczyną błędów jest nieumiejętność obliczania ciśnienia gazu w danym stanie. Rozpatrzmy przykład:

W rurce zatopionej z jednego końca znajduje się słupek rtęci, oddzielający od otaczającego ośrodka pewną objętość powietrza (rurka Meldego). Rurkę można obracać w płaszczyźnie pionowej. W pierwszym położeniu (rys. 27.1a) słupek powietrza we wnętrzu rurki ma długość l_1 , a w drugim położeniu (rys. 27.1b) — długość l_2 . Znaleźć długość l_3 słupka powietrza w położeniu, gdy rurka jest nachylona pod kątem α do pionu (rys. 27.1c).



Rys. 27.1

Oznaczmy: p_a — ciśnienie atmosferyczne w jednostkach długości słupka rtęci, Δl — długość słupka rtęci w rurce. W pierwszym położeniu ciśnienie powietrza w rurce jest równe ciśnieniu atmosferycznemu p_a . W drugim położeniu ciśnienie powietrza w rurce jest równe różnicy ($p_a - \Delta l$), gdyż ciśnienie atmosferyczne jest wtedy równoważone przez sumaryczne ciśnienie słupka rtęci i powietrza wewnątrz rurki. Stosując prawo Boyle'a-Mariotte'a, zapiszemy

$$l_1 p_a = l_2 (p_a - \Delta l).$$

Stąd znajdujemy, że ciśnienie atmosferyczne jest równe

$$p_a = \frac{\Delta l l_2}{l_2 - l_1}. \quad (27.1)$$

W trzecim położeniu część ciężaru słupka rtęci jest zrównoważona przez siłę reakcji ścianek rurki. W wyniku tego ciśnienie powietrza wewnątrz rurki jest równe ($p_a - \Delta l \cos\alpha$). Stosując prawo Boyle'a-Mariotte'a do pierwszego i trzeciego stanu gazu, zapiszemy

$$l_1 p_a = l_3 (p_a - \Delta l \cos\alpha).$$

Stąd znajdujemy, że ciśnienie atmosferyczne jest równe

$$p_a = \frac{l_3 \Delta l \cos\alpha}{l_3 - l_1}. \quad (27.2)$$

Przyrównując prawe strony wyrażeń (27.1) i (27.2), otrzymujemy

$$\frac{l_2}{l_2 - l_1} = \frac{l_3 \cos\alpha}{l_3 - l_1}.$$

Stąd znajdujemy poszukiwaną długość:

$$l_3 = \frac{l_1 l_2}{l_2 - (l_2 - l_1) \cos\alpha}.$$

Łatwo zauważyc, że jeśli $\cos\alpha = 1$ (drugie położenie rurki), to $l_3 = l_2$; jeśli zaś $\cos\alpha = 0$ (pierwsze położenie rurki), to $l_3 = l_1$.

Czytelnik A: W rozwiązywaniu tego zadania wszystko jest jasne oprócz jednej sprawy: dlaczego, wyznaczając ciśnienie wywierane przez sam słupek rtęci, nie skorzystał Pan z wzoru stosowanego w paragrafie 20. $p = \rho g \Delta l$, lecz zapisał Pan $p = \Delta l$?

Autor: Oczywiście, bardziej poprawnie byłoby skorzystać ze wzoru $p = \rho g \Delta l$, ale wtedy trzeba by było przeliczyć ciśnienie atmosferyczne wyrażone w jednostkach słupka rtęci na paskale, a ja zaznaczyłem, że p_a to ciśnienie atmosferyczne w jednostkach słupka rtęci, zaś Δl — to też długość słupka rtęci.

Czytelnik A: Zadania należące do wymienionych przez Pana grup są dla mnie zrozumiałe. Ale na egzaminie pojawiają się z pewnością zadania, które są kombinacją zadań pierwszej i drugiej grupy.

Autor: Niewykluczone. Rozwiążmy następujące zadanie:

Pytanie: *Tlen o masie $m = 16 \text{ g}$ pod ciśnieniem $p_1 = 2 \text{ at}$ zajmuje objętość $V_1 = 5 \text{ litrów}$. Jak zmieniła się temperatura gazu, jeżeli przyzrózcie ciśnienia do $p_2 = 5 \text{ at}$ jego objętość zmalała o $A V = \text{ } \backslash \text{ litr}$?*

Czytelnik A: Znając masę tlenu, jego ciśnienie i objętość, od razu wyznaczę jego temperaturę. 16 g tlenu to $0,5 \text{ mola}$, zajmuje więc objętość $11,2 \text{ litra}$ w warunkach normalnych. Stąd

$$T_1 = T_0 \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0} = 273 \text{ K} \cdot \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 11,2} = 244 \text{ K}. \quad (27.3)$$

Autor: Dobrze. Do tej pory zadanie było rozwiązywane jak typowe zadanie drugiej grupy.

Czytelnik A: Znając temperaturę T_1 gazu w stanie początkowym, otrzymuję jego temperaturę T_2 w stanie końcowym:

$$T_2 = T_1 \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = 244 \text{ K} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 5} = 488 \text{ K}.$$

Porównując ten wynik z (27.3), znajduję, że temperatura gazu wzrosła o 244 K .

Autor: Wszystko zrobiłeś zupełnie poprawnie. Widzicie, że w drugim etapie zadanie było rozwiązywane jak typowe zadanie pierwszej grupy.

Czytelnik B: Ja rozwiązałbym to zadanie od razu jako zadanie pierwszej grupy. Z (26.3) otrzymam

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_1}{p_1 V_2} = \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{1}{2}.$$

Temperatura zwiększyła się dwukrotnie. Gdyby w zadaniu było pytanie nie o to, jak się zmieniła temperatura, lecz o ile, to rozwiązałbym je jak zadanie drugiej grupy. Zapiszę równanie Clapeyrona-Mendelejewa (25.9) dla stanów początkowego i końcowego:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1, \quad p_2 V_2 = \frac{m}{M} R T_2$$

i uzyskam różnicę temperatur:

$$T_2 - T_1 = \frac{M}{mR} (p_1 V_1 - p_2 V_2) = 244 \text{ K.}$$

Autor: Rozwiązanie jest poprawne. Słusznie zauważałeś pewną niejasność w sformułowaniu pytania.

Czytelnik B: A czy istnieją zadania istotnie różniące się od zadani grup pierwnej i drugiej?

Autor: Tak, istnieją. Do tej pory zakładaliśmy, że masa pozostaje niezmienna.

Jednak sa zadania, w których masa gazu zmienia się (gaz !• wypompowywany albo, przeciwnie, wtlaczany).

Umownie będziemy zaliczać takie zadania do trzeciej grupy. Nie istnieją dla nich gotowe recepty rozwiązywania, toteż zadania te wymagają indywidualnego podejścia. Jednak każde zadanie trzeciej grupy można sprowadzić do zadań grupy pierwszej. Cała trudność polega na tym, jak to zrobić. W związku z tym proponuję rozwiązać dwa zadania.

Zadanie 1

Gaz w naczyniu znajduje się pod ciśnieniem $p_1 = 20 \text{ at}$ w temperaturze $t_1 = 27^\circ\text{C}$. Znaleźć ciśnienie gazu w naczyniu po wypuszczeniu połowy gazu i podwyższeniu temperatury o $\Delta t = 50 \text{ K}$.

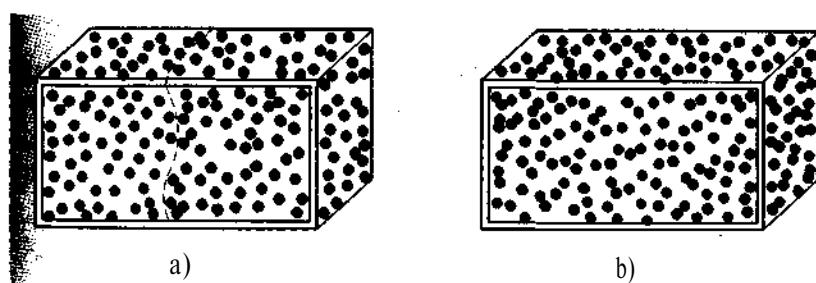
To zadanie jest podobne do zadani pierwnej grupy, ponieważ zachodzi w nim zmiana stanu gazu. Jednak wraz ze zmianą stanu zmienia się tu również masa gazu. Aby skorzystać z ogólnego prawa gazowego, należy przeledzić zmianę stale tej samej porcji gazu. Wybierzemy więc tę porcję gazu, która ostatecznie pozostaje w naczyniu. Oznaczmy parametry jej stanu końcowego p_2 , V_2 , T_2 .

$T_2 = (273 + 27 + 50) \text{ K} = 350 \text{ K}$; $V_2 = F$, gdzie V — objętość naczynia; p_2 — wielkość poszukiwana. Jak ustalić parametry stanu początkowego wybranej porcji gazu?

Czytelnik A: Porcja ta będzie charakteryzować się taką samą temperaturą, jak cały gaz: $T_1 = (273 + 27) \text{ K} = 300 \text{ K}$; jej objętość V_1 jest równa połowie objętości naczynia $\frac{V}{2}$; jej ciśnienie jest takie samo, jak ciśnienie całego gazu: $p_1 = 20 \text{ at}$.

Czytelnik B: Ja przyjąłbym nieco inne parametry początkowe wskazanej porcji gazu: $T_1 = 300 \text{ K}$; objętość taka sama, jak całego gazu ($V_1 = F$), natomiast ciśnienie równe połowie ciśnienia całego gazu: $p_1 = 10 \text{ at}$.

Autor: Ponieważ ciśnienie i objętość wchodzą do równania w postaci iloczynu, wasze propozycje, chociaż różne, prowadzą do tego samego wyniku. Dlatego można byłoby nie zwracać uwagi na zaistniałe różnice, gdyby nie to, że ich omówienie jest interesujące z pewnego fizycznego punktu widzenia. Będziemy nazywać umownie cząsteczki tej części gazu, która ostatecznie pozostanie w naczyniu, „niebieskimi” cząsteczkami, zaś cząsteczki tej części gazu, która zostanie wypuszczona z naczynia, „czarnymi” cząsteczkami. Tak więc niebieskie cząsteczki pozostaną w naczyniu, a czarne opuszczą je. Stan początkowy gazu można traktować dwojako: 1) niebieskie i czarne cząsteczki rozmieszczone są tak, że można w naczyniu wydzielić makroskopowe objętości, zajęte tylko przez niebieskie albo tylko przez czarne cząsteczki (rys. 27.2a); 2) niebieskie i czarne cząsteczki są wzajemnie przemieszane, tak że w dowolnej makroskopowej objętości we wnętrzu naczynia występują praktycznie jednakowe liczby



Rys. 27.2

cząsteczek pierwszego i drugiego rodzaju (rys. 27.2b). W pierwszym wariantie każdy rodzaj cząsteczek tworzy własne „ciało” gazowe o objętości $\frac{V}{2}$, które naciska na ścianki naczynia i na pomyślaną granicę z drugim „ciążem”, wywierając ciśnienie 20 at.

W drugim wariantie cząsteczki każdego rodzaju są rozłożone w całej objętości naczynia, przy tym cząsteczki każdego rodzaju wnoszą połówkowy wkład do ciśnienia na ścianki (w dowolnym miejscu ścianki połowa uderzeni przypada na cząsteczki niebieskie, zaś druga połowa — na czarne). W tej sytuacji $V_1 = V$, $p_1 = 10$ at. W związku z ostatnią uwagą przypominam prawo ciśnień parcjonalnych (prawo Daltona): Ciśnienie mieszaniny gazów jest równe sumie ciśnień oddzielnych składników mieszanki.

Zwracam uwagę, że mowa jest tutaj właśnie o mieszaninie gazów: cząsteczki wszystkich rodzajów są przemieszane ze sobą.

Czytelnik B: Drugie podejście jest bardziej poprawne, przecież obydwa rodzaje cząsteczek rzeczywiście są przemieszane.

Autor: W naszym zadaniu obydwa podejścia są równoprawne. Proszę nie zapominać, że aprioryczny podział cząsteczek na dwa rodzaje jest tylko umowny.

Wracając do rozwiązywania zadania, zapiszemy równanie ogólnego prawa gazowego dla tej porcji gazu, która pozostaje w naczyniu:

$$\frac{10V}{300} = \frac{p_2 V}{350}.$$

Stąd znajdujemy, że $p_2 = 11,7$ at $\approx 11,5 \cdot 10^5$ Pa.

Czytelnik B: Mnie jednak bardziej podoba się rozwiązywanie tego typu zadań z wykorzystaniem równania Clapeyrona-Mendelejewa (25.9). Zapiszmy równanie dla stanów początkowego i końcowego gazu, oznaczając masę w stanie początkowym przez m , a w końcowym $\frac{m}{2}$:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1, \quad p_2 V_1 = \frac{m}{2M} R T_2.$$

Dzieląc stronami pierwsze równanie przez drugie, otrzymujemy

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2T_1}{T_2}, \quad \text{albo} \quad p_2 = \frac{p_1 T_2}{2T_1} = \frac{20 \cdot 350}{2 \cdot 300} \text{ at} = 11,7 \text{ at}.$$

Autor: Twój sposób rozwiązywania tego zadania jest całkiem poprawny.

Zadanie 2

Gaz znajdujący się w zbiorniku o objętości V pod ciśnieniem p_0 jest wypompowywany ze zbiornika za pomocą pompy tłokowej, mającej komorę roboczą o objętości v (rys. 27.3). Znaleźć liczbę n suwów tłoka, które należy wykonać, aby ciśnienie gazu w zbiorniku obniżyło się do wartości p_n .*

Czytelnik A: Według mnie to zadanie jest bardzo proste: n suwów tłoka prowadzi do n -krotnego zwiększenia objętości gazu, czyli o nv . Dlatego zapiszę równanie Boyle'a-Mariotte'a w postaci

$$p_0 V = p_n (V + nv).$$

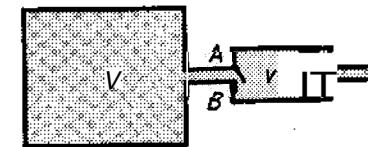
Stąd znajdziemy liczbę n suwów tłoka.

Autor: Do jakiej masy gazu odnosi się napisane przez ciebie równanie?

Czytelnik A: Do masy, która była w zbiorniku.

Autor: Ale przecież już po pierwszym suwie część tej masy opuszcza układ: gdy tłok rozpoczyna ruch w lewo, zamyka się zawór A i otwiera zawór B , przez który gaz właśnie opuszcza układ (rys. 27.3). Inaczej mówiąc, wymienione przez ciebie zwiększenie objętości gazu o nv nie odnosi się do stale tej samej masy gazu. Dlatego związek, który napisałeś, nie jest poprawny. Będziemy rozpatrywać każdy z suwów tłoka oddzielnie. Zaczniemy od pierwszego suwu. Dla masy gazu znajdującej się początkowo w zbiorniku można zapisać

$$p_0 V = p_1 (V + v),$$



Rys. 27.3

gdzie p_1 – ciśnienie gazu w chwili, gdy tłok, kończąc suw roboczy, przyjął skrajne prawe położenie. Następnie tłok wraca w lewe położenie wyjściowe. Przy tym, jak już powiedziano, zawór A zamkniemy się i w zbiorniku pozostaje masa gazu mniejsza od masy początkowej; ciśnienie gazu w zbiorniku wynosi p_1 . Dla tej mniejszej masy gazu można napisać równanie

$$p_1 V = p_2 (V + v),$$

gdzie p_2 – ciśnienie gazu po zakończeniu drugiego suwu roboczego tłoka. Rozpatrując kolejno trzeci, czwarty i następne suwy tłoka, otrzymujemy układ n równań wyrażających prawo Boyle'a-Mariotte'a:

$$\begin{cases} p_0 V = p_1 (V + v), \\ p_1 V = p_2 (V + v), \\ p_2 V = p_3 (V + v), \\ \dots \\ p_{n-1} V = p_n (V + v). \end{cases} \quad (27.4)$$

Każde z tych równań odnosi się do określonej masy gazu. Rozwiązujeć układ (27.4), otrzymujemy

$$p_n = P_0 \left(\frac{V}{V+v} \right)^n.$$

Logarytmując ten wynik, znajdujemy

$$n = \frac{\log \frac{p_n}{p_0}}{\log \frac{V}{V+v}}.$$

Na zakończenie rozwiążemy jeszcze jedno zadanie:

Trzy jednakowe szklane kule A, B, C (rys. 27.4) połączone są rurkami o jednakowej długości i jednakowym polu przekroju poprzecznego S. Wewnątrz rurek umieszczono krople rtęci, które w położeniu początkowym (w temperaturze T_1) znajdują się pośrodku rurek. Objętość powietrza w każdym z obszarów ograniczonych kroplami rtęci jest równa V_1 . Jak przemieszcza się krople, jeżeli kulę B ogrzeje się o ΔT , a kulę C o $2\Delta T$?



Rys. 27.4

Uwaga: Należy przyjąć, że $A T \ll T_1$; ze względu na małe zmiany temperatury i objętości gazu składniki typu $A T \cdot A V$, pojawiające się podczas rozwiązywania zadania, należy odrzucić jako wielkości małe, drugorzędne.

Czytelnik A: Nie umiałbym rozwiązać tego zadania. Wydaje mi się bardzo skomplikowane.

Autor: Tutaj masa gazu nie zmienia się, ale w tym zadaniu występuje jednocześnie kilka mas, i koniecznie trzeba uważnie śledzić, do której masy odnosi się dane równanie. Ponadto trzeba precyzyjnie zapamiętać początkowe i końcowe stany każdej z trzech porcji (mas) gazu (oznaczymy je m_A , m_B i m_C). Zakładamy, że objętość porcji o masie m_A w wyniku ogrzewania kul C i B maleje o pewną wartość $A V_1$, natomiast objętość porcji o masie m_C w wyniku ogrzewania kuli C zwiększa się o ΔV_2 ; w tej sytuacji objętość porcji masie m_B wzrasta o $A V_1 - A V_2$. Biorąc pod uwagę warunki zadania i poczynione uwagi, wyciągamy wnioski:

- 1) dla gazu o masie m_A (p_1 , V_1 , T_1 – parametry początkowe oraz p_2 , $V_1 - A V_1$, T_1 – parametry koncowe)

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 (V_1 - \Delta V_1)}{T_1}, \quad (27.5)$$

- 2) dla gazu o masie m_B (p_1 , V_1 , T_1 – parametry początkowe oraz p_2 , $V_1 + A V_1 - A V_2$, $T_1 + A T$ – parametry koncowe)

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 (V_1 + \Delta V_1 - \Delta V_2)}{T_1 + \Delta T}; \quad (27.6)$$

- 3) dla gazu o masie m_C (p_1 , V_1 , T_1 – parametry początkowe oraz p_2 , $V_1 + A V_2$, $T_1 + 2A T$ – parametry koncowe)

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 (V_1 + \Delta V_2)}{T_1 + 2\Delta T}; \quad (27.7)$$

Korzystając ze związków (27.5) i (27.6), zapisujemy

$$(V_1 - \Delta V_1)(T_1 + \Delta T) = (V_1 + \Delta V_1 - \Delta V_2) T_1.$$

Korzystając ze związków (27.6) i (27.7), zapisujemy

$$(V_1 + \Delta V_1 - \Delta V_2)(T_1 + 2\Delta T) = (V_1 + \Delta V_2)(T_1 + \Delta T).$$

Mnożąc wyrażenia ujęte w nawiasy i odrzucając składniki typu $A V A T$, znajdujemy:

$$\begin{cases} 2T_1\Delta V_1 = V_1\Delta T + T_1\Delta V_2, \\ 2T_1\Delta V_2 = V_1\Delta T + T_1\Delta V_1. \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy

$$\Delta V_1 = A V_2 = \frac{V_1\Delta T}{T_1}; \quad \Delta l = \frac{V_1\Delta T}{ST_1}.$$

Zatem każda kropla rtęci przesunie się w lewo o taką samą odległość Δl , obliczoną powyżej. Objętość gazu w kuli B nie zmieni się.

Czytelnik A: Rzeczywiście, w tym zadaniu wszystko wykonano precyjnie.

Autor: Zapamiętajcie: dla określonej masy gazu trzeba brać pod uwagę właśnie jego parametry początkowe i końcowe. Poza tym wszystko jest bardzo proste.

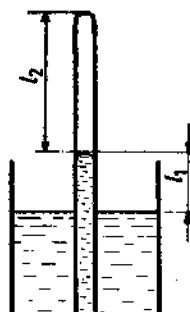
Zadania

- 27.1. Rurkę, której górnym koniec jest zatopiony, zanurzono całkowicie w rtęci (rys. 27.5) wypełniającej głębokie naczynie. Po zanurzeniu słupek powietrza wewnętrz rurki ma długość $h = 10$ cm. O jaką wysokość h_1 nad poziomem rtęci w naczyniu należy unieść górnego koniec rurki, aby poziom rtęci wewnątrz niej zrównał się z poziomem rtęci w naczyniu? Ciśnienie atmosferyczne $p_0 = 76$ cmHg. Oblicz masę m powietrza wewnątrz rurki, jeżeli pole jej przekroju poprzecznego $S = 1 \text{ cm}^2$, a temperatura $t = 27^\circ\text{C}$. Masa molowa powietrza $M = 0,029 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$.



Rys. 27.5

- 27.2. Rurkę, której jeden koniec jest zatopiony, zanurzono otwartym kohcem w rtęci (rys. 27.6) wypełniającej głębokie naczynie. Jak zmieni się poziom rtęci w rurce, jeśli temperatura wzrośnie od $t_1 = 20^\circ\text{C}$ do $t_2 = 77^\circ\text{C}$? Dane: $l_1 = 10 \text{ cm}$, $l_2 = 30 \text{ cm}$; ciśnienie atmosferyczne — normalne. Rozszeralności cieplnej rurki nie uwzględniaj. Oblicz masę m powietrza wewnętrz rurki, jeżeli pole jej przekroju poprzecznego $S = 0,5 \text{ cm}^2$.
- 27.3. Powietrze w naczyniu o objętości $V = 51 \text{ ml}$ ma temperaturę $t = 27^\circ\text{C}$ i znajduje się pod ciśnieniem $p_1 = 20 \text{ at}$. Jaką masę $A m$ powietrza trzeba wypuścić z naczynia, aby ciśnienie w nim spadło do $p_2 = 10 \text{ at}$? ($1 \text{ at} = 9,8 \cdot 10^4 \text{ Pa}$.)
- 27.4. W rurce o polu przekroju poprzecznego $S = 0,5 \text{ cm}^2$ ustawionej pionowo zatopionym końcem do góry, znajduje się słupek powietrza o długości $l_1 = 40 \text{ cm}$, zamknięty od dołu słupkiem rtęci o długości $h = 8 \text{ cm}$; temperatura $t_1 = 27^\circ\text{C}$. O ile się zmieni długość Δl słupka powietrza, jeżeli rurkę odchyli się od pionu o kąt $a = 60^\circ$ i jednocześnie podwyższy temperaturę o $\Delta T = 30 \text{ K}$? Ciśnienie atmosferyczne — normalne. Znajdź masę m powietrza, zamkniętego we wnętrzu rurki.
- 27.5. Dwie jednakowe kule A i B (rys. 27.7) połączono cienką rurką. W temperaturze T_1 kropla rtęci znajduje się w środku długości rurki. Objętość powietrza w każdej kuli i w części rurki do kropli rtęci jest równa V_1 . O jaką długość Δl przemieści się kropla, jeśli kulę A ogrzeje się o ΔT_1 , a kulę B oziębi o ΔT_2 ($\Delta T_1 \ll T_1$, $\Delta T_2 \ll T_1$)? Pole przekroju poprzecznego rurki wynosi S . Rozpatrz sytuacje: 1) $\Delta T_1 > \Delta T_2$; 2) $\Delta T_1 < \Delta T_2$; 3) $\Delta T_1 = \Delta T_2$.

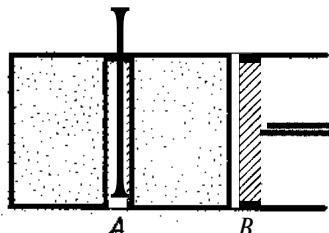


Rys. 27.6



Rys. 27.7

- 27.6. Warunki zadania są takie same, jak zadania o trzech kulach w tekście (rys. 27.4). O jakie długości Δl przesuną się krople rtęci, jeżeli kule B ogrzeje się o ΔT , a kule A i C oziębi o ΔT ?
- 27.7. Warunki zadania są takie same, jak zadania o trzech kulach w tekście (rys. 27.4). O jakie długości Δl przemieszczą się krople rtęci, jeżeli kulę A ogrzeje się o ΔT , a kulę C oziębi o ΔT ?
- 27.8. W dwóch częściach cylindra, rozdzielonych ruchomym tłem A , znajduje się powietrze o różnych masach m_1 i m_2 (rys. 27.8), ale o jednakowej temperaturze. Cylinder jest zamknięty ruchomym tłem B . O ile przemieści się tło A , jeżeli tło B przesunie się w prawo o odległość $/ = 4 \text{ cm}$? W warunkach równowagi w cylindrze ustala się temperatura pierwotna. Stosunek



Rys. 27.8

mas powietrza $\frac{m_1}{m_2} = 3$.

- 27.9. Balon-sonda ma hermetyczną powłokę o stałej objętości $V = 50 \text{ m}^3$. Masa balonu $m = 5 \text{ kg}$. Oblicz, na jaką maksymalną wysokość H będzie mógł wznieść się ten balon-sonda, jeżeli wiadomo, że ciśnienie atmosferyczne maleje dwukrotnie dla każdych $h = 5 \text{ km}$ wysokości. Temperatura w stratosferze $t = -60^\circ\text{C}$. Ciśnienie przy powierzchni Ziemi $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$.
- 27.10. Z butli o objętości $V = 10 \text{ l}$ wypełnionej wodorem z powodu nieszczelności zaworu ulatnia się gaz. W temperaturze $t_1 = 6^\circ\text{C}$ manometr wskazywał ciśnienie $p_1 = 56 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, a po pewnym czasie w temperaturze $t_2 = 27^\circ\text{C}$ ciśnienie $p_2 = 30 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. O ile zmniejszyła się masa wodoru w butli? (Masa molowa wodoru $M = 0,002 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$)

28. Kiedy pojawia się rosa?

Czytelnik A: Chciałbym porozmawiać o zadaniach dotyczących wilgotności. Są jakieś niezrozumiałe.

Autor: W rzeczywistości nie są one trudne. Dla przykładu rozpatrymy następujące zadanie.

Powietrze znajduje się w zamkniętej objętości $V = 3 \text{ m}^3$ i ma temperaturę $t_1 = 20^\circ\text{C}$. Względna wilgotność $w_{wzg1} = 60\%$. Ile wody należy dodatkowo odparować do tej objętości, aby względna wilgotność osiągnęła wartość $w_{wzg2} = 80\%$? Czy osiągnie rosa, jeśli powietrze w rozpatrywanej objętości zostanie oziębione do $t_2 = 10^\circ\text{C}$?

Czytelnik B: O ile pamiętam,

względna wilgotność określa się jako stosunek ciśnienia p_0 par wodnej znajdującej się w powietrzu w danej temperaturze, do ciśnienia p_n nasycionej pary wodnej w tej samej temperaturze:

$$w_{wzg} = \frac{p}{p_n} \cdot 100\%. \quad (28.1)$$

Czytelnik A: Ale jak powiązać ciśnienie z masą pary wodnej?

Autor: Przyjmując, że para podlega równaniu stanu gazu doskonałego, możemy uważać, że ciśnienie pary jest proporcjonalne do masy pary w danej objętości. Z (25.9) wynika:

$$\rho = \frac{mM}{VRT} p. \quad (28.2)$$

Na tej podstawie w (28.1) zastępujemy stosunek ciśnień $\frac{p_0}{p_n}$ stosunkiem gęstości pary $\frac{\rho_0}{\rho_n}$:

$$w_{wzg} = \frac{\rho_0}{\rho_n} \cdot 100\%. \quad (28.3)$$

Tak więc wilgotność względna można określić jako stosunek gęstości pary znajdującej się w powietrzu o danej temperaturze (t) do gęstości nasycionej pary w wodzie w tej samej temperaturze (t).

Czytelnik B: W takim razie spróbuję rozwiązać sformułowane powyżej zadanie. Oznaczam ρ_1 — gęstość pary w temperaturze t_1 ; po odparowaniu m (g) wody gęstość pary będzie wynosiła $\rho_1 + \frac{m}{V}$. Korzystając z (28.3), otrzymujemy

$$w_{wzg\ 1} = \frac{\rho_1}{\rho_n}; \quad w_{wzg\ 2} = \frac{\rho_1 + \frac{m}{V}}{\rho_n}.$$

Dzieląc stronami drugie równanie przez pierwsze, znajdujemy

$$\frac{w_{wzg\ 2}}{w_{wzg\ 1}} = \frac{\rho_1 + \frac{m}{V}}{\rho_1},$$

skąd

$$m = \frac{\rho_1 (w_{wzg\ 2} - w_{wzg\ 1})}{w_{wzg\ 1}} = \rho_n (w_{wzg\ 2} - w_{wzg\ 1}) \quad (28\ 4)$$

Czytelnik A: Z prawej strony tej zależności występuje dodatkowa nieznana wielkość ρ_n .

Czytelnik B: Jakoś o tym nie pomyślałem.

Autor: Wartość gęstości pary nasyconej ρ_n odnajduje się zazwyczaj w tablicach; jeśli masz tablice ciśnienia (prężności) pary wodnej nasyconej, to korzystając z wyrażenia (28.2), sam możesz wyznaczyć gęstość. Gęstość pary nasyconej w temperaturze $t_1 = 20^\circ\text{C}$ jest równa $\rho_n = 17,3 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$. Podstawiając tę wartość do (28.4) i wykorzystując dane z treści zadania, otrzymujemy $m = 10,38 \text{ g}$.

Czytelnik B: Aby odpowiedzieć na pytanie, czy pojawi się rosa, należy, jak myślę, znać gęstość pary nasyconej w temperaturze $t_2 = 10^\circ\text{C}$.

Autor: Słusznie. Gęstość ta jest równa $9,4 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$.

Czytelnik B: W naszej objętości gęstość pary $p = \rho_n w_{wzg\ 2} = 13,84 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$.

Ta gęstość jest większa niż gęstość pary nasyconej w temperaturze 10°C , zatem rosa powinna się pojawić.

Czytelnik A: A jak można określić, w jakiej temperaturze zacznie osadzać się rosa?

Czytelnik B: Wydaje mi się, że trzeba skorzystać z tablic i znaleźć, w jakiej temperaturze gęstość pary nasyconej jest dokładnie równa gęstości pary obliczonej w naszym zadaniu. Ta właśnie temperatura jest punktem rosy.

Czytelnik A: Już zrozumiałem.

Punkt rosy to temperatura, w której gęstość pary nasyconej jest równa aktualnie istniejącej wilgotności bezwzględnej.

Po osiągnięciu przez powietrze tej właśnie temperatury zaczyna się kondensacja zawartej w powietrzu pary wodnej i w konsekwencji zaczyna pojawiać się rosa.

Autor: W ten oto sposób zdobyliśmy pełną orientację we wszystkich „strasznych” zagadnieniach związanych z wilgotnością powietrza.

Zadania

28.1. Jaka jest masa m pary wodnej w pokoju o objętości $V = 105 \text{ m}^3$, jeżeli w temperaturze $t_1 = 15^\circ\text{C}$ względna wilgotność jest równa $w_{wzg} = 55\%$? Czy pojawi się rosa, jeśli temperatura obniży się do $t_2 = 10^\circ\text{C}$? Jaką częścią k całkowitej masy powietrza w pokoju jest masa zawartej w nim pary wodnej, jeżeli ciśnienie powietrza $p = 9,9 \cdot 10^4 \text{ Pa}$? Gęstość pary nasyconej w temperaturze 15°C wynosi $\rho_{n1} = 12,8 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$, gęstość pary nasyconej w temperaturze 10°C jest równa $\rho_{n2} = 9,4 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$.

28.2. Powietrze suche i powietrze wilgotne w jednakowej temperaturze $t = 27^\circ\text{C}$ pod takim samym ciśnieniem zajmuje jednakową objętość $V = 1 \text{ m}^3$. Oblicz, o ile różni się masa suchego powietrza od masy powietrza wilgotnego, o wilgotności względnej $w_{wzg} = 60\%$. Ciśnienie pary nasyconej w temperaturze 27°C jest równe $p_n = 3565 \text{ Pa}$.

28.3. Przy jakiej maksymalnej wilgotności względnej powietrza w kuchni butelka mleka wyjąta z lodówki nie będzie jeszcze „potniała”? Temperatura w lodówce $t_1 = 5^\circ\text{C}$, a w kuchni $t_2 = 25^\circ\text{C}$. Ciśnienie pary nasyconej w temperaturze 5°C wynosi $p_{n1} = 886 \text{ Pa}$, a w temperaturze 25°C jest równe $p_{n2} = 3192 \text{ Pa}$.

29. Co to jest termodynamika?

W przyrodzie nieustannie zachodzi wymiana energii między ciałami i układami ciał. Dział fizyki zajmujący się zagadnieniami związanymi z tą wymianą nazywa się termodynamiką.

Czytelnik B: Co oznacza termin „termodynamika”?

Autor:

Termodynamika to dział fizyki zajmujący się w sposób ogólny (będąc odwoływanie się do pojęć cząsteczkowych) procesami wymiany energii między badanym ciałem i otaczającym je środowiskiem.

Czytelnik A:

Do jakiego stopnia należy opanować termodynamikę, aby głębiej poznac prawo gazowe?

Autor: To stanie się jasne w toku naszej dalszej rozmowy. W najbardziej ogólnych zarysach poznamy elementy termodynamiki gazu doskonałego. Od razu chcę zwrócić uwagę, że chcąc zrozumieć prawa gazowe, należy odwołać się do termodynamiki. Na przykład termodynamika wyjaśnia, czym różnią się od siebie z energetycznego punktu widzenia rozprężanie izotermiczne i izobaryczne.

Na początek przypomnijmy znany już fakt:

energia wewnętrzna jednoatomowego gazu doskonalego w temperaturze T jest proporcjonalna do jego masy m :

$$U = \frac{3}{2} R T m. \quad (29.1)$$

Wynik ten uzyskuje się z (25.3) i (25.7) oraz (25.8).

Jeżeli natomiast masa gazu nie zmienia się, to energia wewnętrzna może ulegać zmianie w wyniku dwóch procesów (jak czasem się mówi, istnieją dwa „kanały” wymiany energii): a) w wyniku wykonania pracy W ; w tym wypadku objętość gazu powinna się zmieniać (rozprężający się gaz wykonuje pracę nad otaczającymi ciałami; gdy zaś jest sprężany — otaczające ciała wykonują pracę nad tym gazem); b) w wyniku przekazania ciepła Q (od gazu do otaczających ciał albo odwrotnie, od otaczających ciał do gazu).

Wobec tego przyrost energii wewnętrznej ΔU gazu można przedstawić w postaci

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \pm W \pm Q. \quad (29.2)$$

Tutaj znak „+” odpowiada sytuacjom, gdy gaz za pośrednictwem odpowiedniego „kanału” uzyskuje energię od ciał otaczających; znak „−” odnosi się do sytuacji, gdy energia przechodzi od gazu do ciał otaczających.

Czytelnik B: Czy przypadkiem równanie (29.2) nie wyraża tak zwanej pierwszej zasady termodynamiki?

Autor: Tak.

Jest to pierwsza zasada termodynamiki.

Zwracam uwagę, że

w istocie nie jest ona niczym innym, jak zasada zachowania energii: zmiana energii wewnętrznej gazu jest spowodowana pracą i przepływem ciepła.

Czytelnik B: Czyżby wtedy, gdy gaz się nie rozpręża i nie jest sprężany (tj. zachodzi przemiana izochoryczna), wymiana energii była możliwa tylko drogą przepływu ciepła?

Autor: Myślisz poprawnie.

Czytelnik A: Czy można, znając stany początkowy i końcowy gazu, obliczyć pracę i ustalić, jaki był przepływ ciepła?

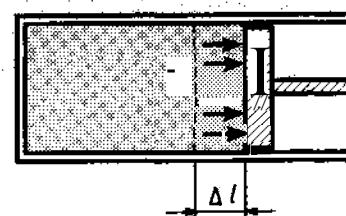
Autor: Można.

Rozpatrzmy na początek rozprężanie izobaryczne.

W tym wypadku pracę wykonaną przez gaz nad otaczającymi ciałami oblicza się względnie łatwo. Przypuśćmy, że gaz znajdujący się w naczyniu z ruchomym tłokiem rozpręża się pod ciśnieniem $p = \text{const}$ od objętości V_1 do objętości V_2 . Przy tym przesuwa on tłok o polu przekroju S na odległość Δl (rys. 29.1).

Praca wykonana przez gaz podczas przesuwania tłoka jest równa

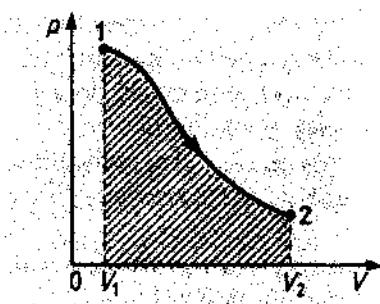
$$W = F \Delta l = p S \Delta l = p \Delta V + p(V_2 - V_1). \quad (29.3)$$



Rys. 29.1

Dla procesów rozprężania nieizobarycznego pracę gazu oblicza się w sposób bardziej skomplikowany, ponieważ ciśnienie wtedy nie pozostaje stałe; a więc siła działająca na przesuwany tłok zmienia się w czasie. Istnieje następująca

reguła obliczania pracy wykonanej w dowolnym procesie rozprężania: należy przedstawić graficznie rozpatrywany proces w układzie współrzędnych p, V ; poszukiwana praca jest równa liczbowo polu pod wykresem w przedziale objętości od V_1 do V_2 (rys. 29.2).



Rys. 29.2

Czytelnik B: Jeśli chodzi o obliczenie pracy, to wszystko zrozumiałem. A jak można znaleźć ilość przekazanego ciepła?

Autor: Posługując się wyrażeniem (29.1), można znaleźć zmianę energii wewnętrznej gazu w rozpatrywanym procesie. Następnie należy obliczyć pracę i na koniec trzeba skorzystać z wyrażenia (29.2).

Czytelnik A: W przemianie izochorycznej nie występuje przekazywanie energii za pośrednictwem pracy. Prawdopodobnie możliwe są także sytuacje, gdy nie występuje przekazywanie energii za pośrednictwem ciepła.

Autor: Oczywiście. O tych sytuacjach mówi się, że gaz jest izolowany termicznie. Ale jak myślisz, czy gaz izolowany termicznie może podlegać rozprężaniu izotermicznemu?

Czytelnik A: A dlaczego by nie?

Autor: Nie spiesz się z odpowiedzią. Pamiętaj: w omawianym procesie nie ma przepływu ciepła. Gaz zwiększa swoją objętość (zatem wykonuje pracę), temperatura gazu nie ulega zmianie.

Czytelnik B: Taki proces jest niemożliwy. Jeżeli temperatura jest stała, to stała jest również energia wewnętrzna gazu. Oznacza to, że gaz, aby mógł wykonać pracę, powinien koniecznie uzyskać ciepło z otaczającego ośrodka.

Autor: Racja. Tak więc stwierdzamy dwa fakty:

po pierwsze, izotermiczne rozprężanie izolowanego termicznie gazu jest niemożliwe; po drugie, pr/v rozprężaniu izotermicznym ilość przekazyванego zewnątrz ciepła jest równa pracy wykonanej przez gaz.

Czytelnik B: Bez wątpienia w izolowanym termicznie gazie nie mogą wystąpić przemiany nie tylko izotermiczne, lecz również izobaryczne i izochoryczne?

Autor: Twój domysł jest słuszny. Przemiana zachodząca w termicznie izolowanym gazie jest specyficzna. Ma ona specjalną nazwę — przemiana adiabatyczna.

Przy rozprężaniu adiabatycznym praca jest wykonywana kosztem energii wewnętrznej gazu. W wyniku tego temperatura gazu obniża się. Przy adiabatycznym sprężaniu kosztem pracy sił zewnętrznych wzrasta energia wewnętrzna gazu, a więc temperatura gazu ulega podwyższeniu.

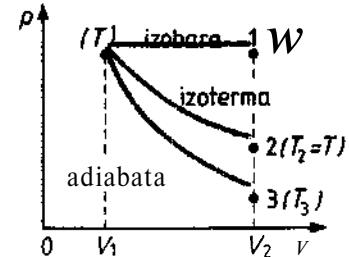
Jeżeli sprężanie gazu przeprowadzi się dostatecznie szybko, to wtedy ciepło nie zdąży przepłynąć; w tym wypadku nawet bez podejmowania starań zmierzających do izolowania termicznego gazu zachodzi sprężanie adiabatyczne. Przy dostatecznie powolnym sprężaniu gazu, umożliwiającym wymianę ciepła z otoczeniem, zachodzi sprężanie izotermiczne (w temperaturze ośrodka).

Proszę, abyś narysował w układzie współrzędnych p, V izobarę, izotermę i adiabatę dla rozprężającego się gazu; stan początkowy i objętość końcowa są jednakowe dla wszystkich trzech przemian. Rozpatrzmy wymianę energii między gazem i otoczeniem dla tych trzech przemian. W której z nich gaz wykonuje maksymalną pracę? W którym wypadku przepływ ciepła jest największy?

Czytelnik A: Ale nie pokazał nam Pan, jak wygląda adiabata...

Autor: Wiecie o tym, że w procesie rozprężania adiabatycznego temperatura gazu maleje.

Czytelnik B: Zrozumiałem. Oto rysunek 29.3: wykres 1 — izoba, 2 — izoterna, 3 — adiabata.



Rys. 29.3

Autor: Rysunek jest dobry. Co powiesz o różnicach w wymianie energii między gazem i otoczeniem w tych przemianach?

Czytelnik B: Punktowi 1 na rysunku odpowiada $T_1 > T$. Zatem A $U > 0$ — przy rozprężaniu izobarycznym energia wewnętrzna gazu wzrasta. Punktowi 2 odpowiada $T_2 = T$. Więc A $U = 0$. W punkcie 3 temperatura $T_3 < T$. Tak więc $\Delta U < 0$.

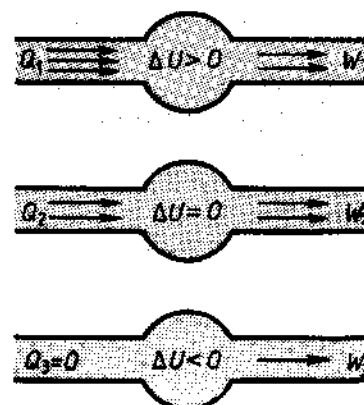
Autor: Proszę nieco dokładniej.

Czytelnik B: Nie wiem, jak. Nigdy nie przeprowadzałem takich rozważań.

Autor: Przypuśćmy, że W_1 , W_2 , W_3 to prace wykonane przez gaz odpowiednio przy rozprężaniu izobarycznym, izotermicznym i adiabatycznym. Z porównania pól pod wykresami wynika: $W_1 > W_2 > W_3$. Teraz zastanowimy się nad wymianą energii w każdej z rozpatrywanych przemian.

Przy rozprężaniu izobarycznym $\Delta U = Q_1 - W_1$; do gazu przepływa z zewnątrz ciepło Q_1 , część uzyskanej energii odnajdujemy w pracy W_1 wykonanej przez gaz, pozostała część — w przyroście energii wewnętrznej gazu. Przy rozprężaniu izotermicznym A $U = 0$, $Q_2 = W_2$: do gazu dopływa z zewnątrz ciepło Q_2 , taką samą ilość energii za pośrednictwem pracy W_2 oddaje on z powrotem do otoczenia; energia wewnętrzna gazu nie zmienia się. Przy rozprężaniu adiabatycznym A $U = -W_3$, $Q_3 = 0$; do gazu nie dopływa ciepło: praca W_3 jest wykonywana kosztem energii wewnętrznej gazu. Na rysunku 29.4 schematycznie pokazano charakter wymiany energii w każdej z rozpatrywanych przemian (lewy „kanał” do gazu dopływa ciepło, natomiast prawym „kanałem” z gazu wypływa energia za pośrednictwem wykonanej pracy; liczba strzałek obrazuje intensywność wymiany energii).

= — W_3 , $Q_3 = 0$; do gazu nie dopływa ciepło: praca W_3 jest wykonywana kosztem energii wewnętrznej gazu. Na rysunku 29.4 schematycznie pokazano charakter wymiany energii w każdej z rozpatrywanych przemian (lewy „kanał” do gazu dopływa ciepło, natomiast prawym „kanałem” z gazu wypływa energia za pośrednictwem wykonanej pracy; liczba strzałek obrazuje intensywność wymiany energii).



Rys. 29.4

Chciałbym podkreślić, że zapasu energii wewnętrznej nie nio/na nawet w myśl rozdzielić na „...apas ciepła” i „zapas pracy”. Przepływ ciepła i wykonanie pracy to po prostu dwa różne „kanały”, którymi może dopływać (albo odpływać) energia (podobnie jak woda, która może dopływać do basenu dwiema różnymi rurami).

A teraz wróćmy do rysunku 26.7 i rozpatrzmy wymianę energii między gazem i otoczeniem w procesie cyklicznym przedstawionym na rysunku.

Czytelnik B: Teraz już będę mógł to zrobić. Przy zmianie stanu, której odpowiada przemiana 1→2 (izoterma), do gazu dopływa z zewnątrz pewna ilość ciepła, którą w całości odnajdujemy w wykonanej pracy. W procesie 2→3 (izochora) praca nie jest wykonywana, energia wewnętrzna gazu zwiększa się w wyniku dopływu ciepła z zewnątrz. W procesie 3→1 (izobara) nad gazem jest wykonywana praca, a mimo to jego temperatura maleje. Oznacza to, że ciepło przepływa z gazu do otoczenia bardzo intensywnie (ilosc przekazanego ciepła jest równa sumie pracy i ubytku energii wewnętrznej).

Autor: Masz rację. Na zakończenie ostatnie pytanie:

Na rysunku 26.4 przedstawiono sześć różnych procesów przejścia jednego stanu w inny. Czym różnią się te procesy z punktu widzenia termodynamiki?

Czytelnik A: Różnią się one charakterem wymiany energii między gazem i otoczeniem.

Autor: Dobrze.

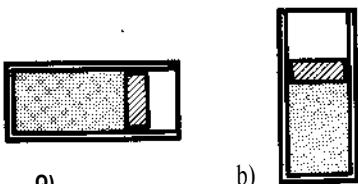
Na zakoniczenie zwracam uwagę na jedno z ogólnych praw nauki o ciepłe, które nosi nazwę zasadę le Chateliera. Zasada ta głosi, że działanie zewnętrzne wyprovadzające układ ze stanu równowagi, wywołuje w tym układzie procesy dążące do osłabienia wyniku tego działania. Tak więc ogrzewanie gazu stymuluje procesy charakteryzujące się pochłanianiem ciepła; odwrotnie, oziębianie sprzyja procesom, w których ciepło się wydziela. Zasada le Chateliera pozwala przewidzieć, w jakim kierunku przesunie się stan równowagi, jeżeli

zmianie ulegną jakieś parametry zewnętrzne, określające stan układu (na przykład ciśnienie).

Ta zasada jest termodynamicznym odpowiednikiem reguły dotyczącej zjawiska indukcji elektromagnetycznej (patr. §3)

Zadania

- 29.1. Rozpatrujemy procesy przedstawione na rysunku 26.4. Dane są parametry p_1, V_1, T_1, p_2, V_2 . Znajdź stosunki ilości ciepła przekazywanego w przemianach $1 \rightarrow 7, 1 \rightarrow 8, 5 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 2$.
- 29.2. Warunki są takie same jak w zadaniu 29.1. Znajdź stosunki ilości ciepła przekazanego w przemianach $1 \rightarrow 6, 3 \rightarrow 2$ i $1 \rightarrow 5, 8 \rightarrow 2$.
- 29.3. Oblicz pracę W , którą wykonuje gaz przy ogrzewaniu izobarycznym od $t_1 = 20^\circ\text{C}$ do $t_2 = 100^\circ\text{C}$, jeżeli znajduje się on w naczyniu zamkniętym ruchomym tłokiem o polu przekroju po-przecznego $S = 20 \text{ cm}^2$ i masie $m = 5 \text{ kg}$. Rozpatrz dwa warianty ustawienia naczynia: 1) poziomo (rys. 29.5a); 2) pionowo (rys. 29.5b). Początkowa objętość gazu jest równa $V = 5 \text{ l}$; ciśnienie atmosferyczne — normalne.



Rys. 29.5

- 29.4. Trzy mole gazu doskonałego, mającego temperaturę $t_0 = 27^\circ\text{C}$. oziębiono izochorycznie tak, że ciśnienie zmalało $n = 3$ razy. Następnie gaz rozszerzał się pod stałym ciśnieniem. W stanie końcowym jego temperatura była równa początkowej. Oblicz, jaką pracę W wykonał ten gaz.
- 29.5. Jak duża jest zmiana energii wewnętrznej powietrza w pokoju, jeżeli ogrzano je izobarycznie od temperatury t_1 do t_2 ?

30. Co to jest cykl Carnota?

Autor: Porozmawiamy o współczynniku sprawności (inaczej — o wydajności) silnika cieplnego. Czy znacie jakiś wzór na współczynnik sprawności?

Czytelnik A: Tak, znam:

$$\gamma = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (30.1)$$

Autor: A co to takiego T_1 i T_2 ?

Czytelnik A: Pamiętam, że T_2 to temperatura chłodnicy, a T_1 — temperatura grzejnicy. Tylko niezbyt dokładnie wiem, co nazywa się chłodnicą, a co grzejnicą.

Autor: W jakiej sytuacji jest słuszny wzór (30.1)?

Czytelnik B: Gdzieś czytałem, że ten wzór wyprowadza się dla cyklu Carnota. Ale nic o nim nie wiem.

Autor: Dlatego pozwólcie, że zacznę od początku. Wyobraźmy sobie jakiś silnik cieplny, którego działanie jest oparte na zmianie stanu pewnej masy gazu (tak zwanego ciała roboczego). Jest oczywiste, że zmiany te powinny tworzyć proces kołowy (cykliczny) — na końcu cyklu gaz za każdym razem powinien wracać do stanu początkowego. W różnych silnikach wymieniony proces cykliczny będzie przebiegał różnie. A więc różny będzie także charakter wymiany energii między ciałem roboczym (gazem) i otoczeniem.

Największy współczynnik sprawności osiąga wyidealizowany silnik cieplny, w którym stan gazu zmienia się według cyklu Carnota. Właśnie dla takiego silnika współczynnik sprawności wyraża się wzorem (30.1).

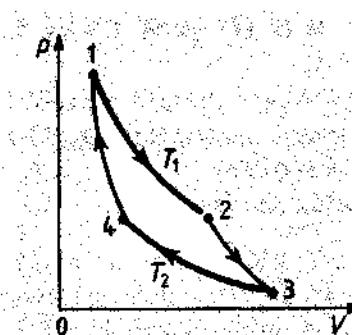
Załóżmy, że istnieją dwa duże ciała — jedno o temperaturze T_2 , drugie o temperaturze T_1 . Ciała powinny być duże w tym celu, aby wymiana energii między nimi i ciałem roboczym nie prowadziła do zmiany temperatur T_2 i T_1 . Jeżeli $T_2 < T_1$, to pierwsze z dużych ciał nazywa się chłodnicą (odbiornikiem ciepła), a drugie — grzejnicą (źródłem ciepła). Ciało robocze (gaz) na przemian wchodzi w kontakt cieplny z grzejnicą i chłodnicą i wymienia z nimi energię w procesie przepływu ciepła. Cykl Carnota składa się z dwóch izoterm i dwóch adiabat (rys. 30.1). W procesie termodynamicz-

nym, któremu odpowiada przejście $1 \rightarrow 2$ (izoterna w T_1), do gazu przepływa z grzejnicy ciepło Q_1 i rozprężający się gaz wydatkuje uzyskaną energię, wykonując pracę W_1 . W procesie $2 \rightarrow 3$ (adiabata) gaz wykonuje pracę W_3 ; przy tym jego temperatura obniża się do T_2 . W procesie $3 \rightarrow 4$ (izoterna w T_2) z gazu do chłodnicy przepływa ciepło Q_2 , równe pracy W_2 wykonanej przy sprężaniu gazu. W procesie $4 \rightarrow 1$ (adiabata) w wyniku pracy W_4 wykonanej podczas sprężania gazu wzrasta jego energia wewnętrzna, co powoduje wzrost temperatury gazu do T_1 . W rezultacie wracamy do stanu początkowego 1 (a więc również do początkowej energii wewnętrznej ciała roboczego).

Załóżmy, że pewien silnik cieplny pracuje według cyklu Carnota. Do gazu dopływa z grzejnicy ciepło Q_1 , a następnie z gazu do chłodnicy przepływa ciepło Q_2 . Ponieważ $Q_1 = W_1$ i $Q_2 = W_2$, to łatwo można się przekonać, że $Q_2 < Q_1$. Oznacza to, że gaz oddał mniej ciepła, niż otrzymał. Jednocześnie energia wewnętrzna gazu po zakończeniu cyklu jest taka sama jak na początku. W takim razie różnica $Q_1 - Q_2$, oddana przez gaz do otoczenia, jest właśnie pracą użyteczną silnika cieplnego. Wynika stąd, że wyrażenie na współczynnik sprawności silnika cieplnego może być zapisane w postaci

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad (30.2)$$

W termodynamice dowodzi się (czego my robić nie będziemy), że wyrażenie (30.2) sprowadza się do prostszej postaci (30.1). Z (30.1) i (30.2) widać, że współczynnik sprawności nie zależy od właściwości ciała roboczego. Ponadto widać, że nawet dla idealnego silnika cieplnego współczynnik sprawności jest mniejszy od jedności; część energii równa $\frac{T_2}{T_1}$, oddawanej przez grzejnicę, bezużytecznie przechodzi za pośrednictwem ciepła do chłodnicy.



Rys. 30.1

Współczynnik sprawności rzeczywistego silnika cieplnego zawsze jest mniejszy od współczynnika danego wzorem (30.1) / powodu zachodzących w silniku procesów nieodwracalnych.

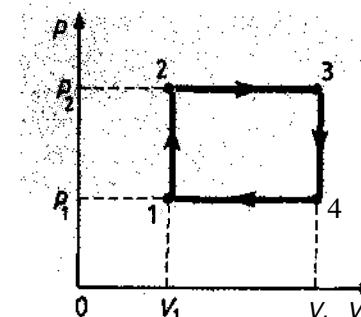
Czytelnik A: Czy istnieją silniki rzeczywiste pracujące według cyklu Carnota?

Autor: Tak, za taki silnik można uznać silnik spalania wewnętrzne.

Zadania

- 30.1. Silnik pracujący według cyklu Carnota w jednym cyklu otrzymuje od grzejnicy $Q_1 = 700$ cal ciepła. Temperatura grzejnicy $T_1 = 600$ K, temperatura chłodnicy $T_2 = 300$ K. Znajdź pracę W , wykonaną w ciągu jednego cyklu, oraz ilość ciepła Q_2 , które przepłynęło przy tym do chłodnicy (1 cal = 4,19 J).
- 30.2. Silnik cieplny o działaniu okresowym ma współczynnik sprawności $\eta_1 = 40\%$. W wyniku jego udoskonalenia ilość ciepła, które przepłynęło w jednym cyklu od grzejnicy, zwiększyła się o $b = 20\%$, a ilość ciepła, które przepłynęło do chłodnicy, zmniejszyła się o $a = 20\%$. Jaką wartość osiągnął współczynnik sprawności η_2 tego silnika cieplnego?
- 30.3. Oblicz współczynnik sprawności η silnika cieplnego pracującego według cyklu przedstawionego na rysunku 30.2. Substancją roboczą jest jeden mol azotu. Masa molowa azotu $M = 28 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$.

Wiadomo, że $p_2 = 2p_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; $V_2 = 2V_1 = 20 \text{ l}$. Właściwa pojemność cieplna * azotu



Rys. 30.2

* Zazwyczaj właściwa pojemność cieplna nazywa się ciepłem właściwym (przyp. tłum.).

- $c_V = 748 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, $c_p = 1045 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$. Oblicz także pracę W wykonaną przez gaz w jednym cyklu.
- 30.4. Idealny silnik cieplny ma moc użyteczną $P_u = 5 \text{ kW}$. Przy tym temperatura grzejnicy $T_1 = 373 \text{ K}$, a temperatura chłodnicy wynosi $T_2 = 273 \text{ K}$. Oblicz moc cieplną P_1 , otrzymywana przez silnik od grzejnicy i ciepło Q_2 , oddawane do chłodnicy w czasie $t = 1 \text{ h}$ pracy.

31. He pojemności cieplnych ma gaz?

Autor: Co to jest pojemność cieplna?

Czytelnik A: To ilość ciepła, którą trzeba przekazać, aby podwyższyć temperaturę ciała o 1 K.

Autor: Słusznie.

A He pojemności cieplnych ma gaz?

Czytelnik A: Nie rozumiem pytania.

Autor: W takim razie zadam to samo pytanie w bardziej przystępnej formie.

Załóżmy, że gaz ogrzano i podwyższono jego temperaturę o ΔT . Zrobiono to dwukrotnie: jeden raz przy stałej objętości gazu (ogrzewanie izochoryczne), drugi raz — przy stałym ciśnieniu (ogrzewanie izobaryczne). Czy w obydwu wymienionych przemianach w celu ogrzania gazu należy przekazać jednakową ilość ciepła?

Czytelnik A: Moim zdaniem jednakową.

Czytelnik B: A ja myślę, że niejednakową.

Przy stałej objętości praca nie jest wykonywana i całe ciepło jest wykorzystane do podwyższenia temperatury gazu. Oznacza to, że przy stałej objętości ogrzewanie gazu prze-

wana praca $W = p\Delta V$. Dostarczone w tym wypadku ciepło Q_1 powoduje częściowo przyrost energii wewnętrznej gazu, a częściowo wykonanie przez ga/ pracy. Zatem $Q_1 > Q_2$.

Autor: Słusznie. Teraz jeszcze raz przypomnijmy sobie, co to jest pojemność cieplna.

Czytelnik A: Zdaje się, że zrozumiałem.

Gaz ma dwie pojemności cieplne — jedną w stałej objętości (C_V), i drugą — pod stałym ciśnieniem (C_p).

Możemy zapisać $C_V = \frac{Q_1}{\Delta T}$ i $C_p = \frac{Q_2}{\Delta T}$. Przy tym $C_p > C_V$.

Autor: Masz rację. A czy nie mógłbyś wyrazić C_p przez C_V ?

Czytelnik B: Może ja to zrobię. Przyrost energii wewnętrznej gazu jest spowodowany przepływem ciepła $Q_V = C_V \Delta T$. To znaczy,

$$Q_V = C_V \Delta T + p\Delta V,$$

stąd

$$C_p = \frac{Q_2}{\Delta T} = C_V + p \frac{\Delta V}{\Delta T} \quad (31.1)$$

Autor: Następnie należy skorzystać z równania stanu gazu

$$p\Delta V = \frac{m}{M} R \Delta T.$$

Ostatecznie znajdujemy

$$C_p = C_V + \frac{m}{M} R. \quad (31.2)$$

Z wyrażenia (31.2) widać, że uniwersalna stała gazowa R jest równa liczbowo różnicy $C_p - C_V$ dla jednego mola dowolnego gazu doskonałego.

Zadania

- 31.1. Oblicz ilość ciepła Q , która powinna przepływać do trzech moli gazu jednoatomowego, aby ogrzać go pod stałym ciśnieniem od temperatury $T_1 = 300 \text{ K}$ do temperatury $T_2 = 1 T_1$.
- 31.2. Tlen o masie $m = 1 \text{ g}$ znajduje się w cylindrycznym naczyniu pod ciężkim tłokiem. Oblicz, ile ciepła Q powinno przepływać do

tlenu, aby ogrzał się on o $AT = 16$ K. Molowa pojemność cieplna * tlenu w stałej objętości jest równa $C_V = 20,9 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$.

- 31.3. W cylindrze pod ciężkim tłokiem znajduje się $m = 40\text{ g}$ gazu dwutlenku węgla. Gaz ten ogrzano od $t_1 = 20^\circ\text{C}$ do $t_2 = 100^\circ\text{C}$. Oblicz, jaką pracę W wykonał dwutlenek węgla oraz ile ciepła Q do niego przepłynęło. Właściwa pojemność cieplna dwutlenku węgla w stałej objętości $c_V = 0,655 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

32. Porozmawiajmy o polu

Co to jest pole? Jak się je opisuje? Jak odbywa się ruch w polu? Fundamentalne zagadnienia fizyki będącymi rozpatrywane na przykładzie pola elektrostatycznego. Przedyskutujemy ruch w polu elektrostatycznym ciała naładowanego elektrycznie. Rozwiążemy wiele zadań ilustrujących prawo Coulomba.

Autor: Porozmawiamy o polu — jednym z podstawowych pojęć fizycznych. Omówimy je na przykładzie pola elektrostatycznego.

Jak wyobrażacie sobie pole? Co to takiego?

Czytelnik A: Muszę się przyznać, że jest mi bardzo trudno wyobrazić sobie pole. Pole to coś nieuchwytnego, niewidocznego. Jednocześnie, jak się twierdzi, występuje ono wszędzie. Nie mam zastrzeżeń, jeśli ktoś mówi, że pole jest materialne. Ale dla mnie pozostaje to pustym dźwiękiem. Gdy jest mowa o substancji, wtedy rozumiem, o czym się mówi, ale kiedy mówi się o polu, to już niestety nie rozumiem.

Czytelnik B: A ja potrafię wyobrazić sobie pole. W substancji materia znajduje się jakby w skondensowanej postaci. W polu odwrotnie.

* Molowa pojemność cieplna nazywana jest niekiedy molowym ciepłem właściwym. Na s. 259 C_V oznacza pojemność cieplna w stałej objętości dla dowolnej masy g. (przyp. tłum.).

materia jest jak gdyby „rozmyta” w przestrzeni. Fakt, że nie widzimy pola, niczego nie dowodzi: pole można wspaniale „widzieć” za pomocą dość prostych przyrządów.

Pole pełni funkcję przekaźnika wzajemnego oddziaływanego między ciałami.

Na przykład pole elektrostatyczne jest przekaźnikiem oddziaływania między nieruchomymi ładunkami elektrycznymi. Można przyjąć, że każdy ładunek „wytwarza” wokół siebie pole. Pole wytworzone przez jeden ładunek wpływa na drugi i, na odwrót, pole wytworzone przez drugi ładunek wpływa na pierwszy. Tak się realizuje kulombowskie oddziaływanie ładunków.

Czytelnik A: Czy nie można się obejść bez „pośredników”? Co nam przeszkadza założyć, że jeden ładunek działa na drugi bezpośrednio?

Czytelnik B: Przeciwko temu można wysunąć poważny kontrargument. Wyobraźmy sobie, że jeden z ładunków w pewnej chwili przesunął się, „drgnął”. Jeżeli wyjdziemy z założenia o „oddziaływaniu bezpośrednim”, to trzeba koniecznie wyciągnąć wniosek, że drugi ładunek powinien w tej samej chwili także „drgnąć”. To oznaczałoby, że sygnał od pierwszego ładunku doszedł do drugiego ładunku natychmiast, co, jak dobrze wiadomo, przeczy podstawowym założeniom teorii względności. Jeżeli natomiast jest przekaźnik oddziaływania, czyli pole, to sygnał rozprzestrzenia się od jednego ładunku do drugiego za pośrednictwem pola. Prędkość rozprzestrzeniania się sygnału może być bardzo duża, jednak istnieje granica, której prędkość ta nie może przekroczyć. Dlatego istnieje pewien przedział czasu dzielący dwa zdarzenia: „drgnienie” ładunku pierwszego i drugiego. W tym przedziale czasu tylko pole utrzymuje sygnał o „drgnięciu”.

Czytelnik A: Mimo wszystko chciałbym usłyszeć precyzyjną definicję pola.

Autor: Z zainteresowaniem wysłuchałem waszego dialogu. Czuje, że Czytelnik B żywo interesował się problemami fizyki współczesnej i nieobce mu są różne popularne książki z fizyki. Zauważylem u niego to, co można by nazwać myśleniem inicjatywnym, twórczym. Jego uwagi o polu jako o przekaźniku oddziaływań są w pełni poprawne. Czytelnik A, jak myślę, ograniczył się do formalnego przeczytania podręcznika. W jego myśleniu można

zauważyc pewną nieporadność. Mówię to, oczywiście, nie w celu sprawienia przykrości, lecz po to, aby na jego przykładzie podkreślić, że wielu zdających egzaminy nie radzi sobie podobnie jak on i też nie czyta literatury popularnonaukowej. Jednak wróćmy do sedna rozpatrywanego zagadnienia. (Do Czytelnika A.) Życzylesz sobie, aby podać ci precyzyjną definicję pola, gdyż bez niej nie możesz go sobie wyobrazić. Jednak to właśnie ty mówisz, że umiesz sobie wyobrazić, co to jest substancja. A czy znasz precyzyjną definicję pojęcia substancji?

Czytelnik A: Pojęcie substancji nie wymaga takiej definicji. Substancja to coś, czego można „dotknąć” ręką.

Autor: W takim razie pojęcie pola nie wymaga definiowania: przecież pole także można „dotknąć” chociaż już nie ręką. Jednak aby podać precyzyjną definicję, bez zarzutu z logicznego punktu widzenia, trzeba wyrazić rozpatrywane pojęcie przez jakieś bardziej „pierwotne” pojęcia. Ale co zrobić, jeżeli dane pojęcie samo należy do pojęć „pierwotnych”? Spróbuj w geometrii podać definicję linii prostej. Podobnie jest z pojęciami „substancja” i „pole”. Są to natyle pierwotne i fundamentalne pojęcia, iż nie można oczekiwac, że ktoś poda ich precyzyjną definicję, która wyczerpywałaby całą ich istotę.

Czytelnik A: Jednak przypuszczam, że można spróbować podać jakś nawet niezupełnie precyzyjną definicję?

Autor: Tak, oczywiście. Tylko wtedy trzeba pamiętać, że każda taka definicja nigdy całkowicie nie wyczerpuje istoty zagadnienia. Materia może istnieć pod różnymi postaciami. Może być skupiona w ograniczonym obszarze przestrzeni („zlokalizowana”), albo, odwrotnie, może być „zdelokalizowana”. Pierwszy stan materii można określić pojęciem „substancja”, drugi — pojęciem „pole”. Te stany, tak jeden, jak i drugi, obok wielkości charakterystycznych mają również wspólne cechy fizyczne. Na przykład występuje energia jednostki objętości substancji, a także energia jednostki objętości pola. Można mówić o pędzie jednostki objętości substancji, ale również o pędzie jednostki objętości pola. Każde pole pełni funkcję przenośnika określonego typu oddziaływania: właśnie na podstawie tego oddziaływania ustala się wielkości charakteryzujące pole w danym jego punkcie. Na przykład ciało naładowane elektrycznie wytwarza w otaczającej je przestrzeni pole elektre

statyczne. Aby wykryć i zmierzyć to pole w danym punkcie przestrzeni, należy umieścić w tym punkcie inne ciało naładowane i zmierzyć działającą na nie siłę. Przy tym zakłada się, że ciało to jest dostatecznie małe, i można pominać wnoszone przez nie zniekształcenie mierzonego pola.

Właściwości materii są niewyczerpane, a proces poznania nieskończony. To, co nazwaliśmy polem, jest „studnią bez dna”. Wiele wiemy o tej otchłani, jednak bynajmniej nie wszystko. Próba nadania temu „czemuś” precyzyjnej definicji jest tym samym, co próba zmierzenia głębokości bezdennej przepaści.

Czytelnik B: Myślę, że pojęcie pola, jak zresztą również każde inne pojęcie pojawiające się w procesie badania świata materialnego, jest niewyczerpalne. Właśnie dlatego nie można podać wyczerpującej, precyzyjnej definicji pola.

Autor: Całkowicie się z tobą zgadzam.

Czytelnik A: Byłem w pełni usatysfakcjonowany uwagami Pana o substancji i polu jako o dwóch stanach materii — zlokalizowanym i zdelokalizowanym. W jakim celu zaczął Pan mówić o niewyczerpialności pojęć fizycznych, o nieskończoności procesu poznania?

Autor: Poszukujesz nie absolutnie ścisłej, ale uspokajającej definicji pola. Jesteś gotów sumiennie nauczyć się tej definicji i wygłaszać ją na każde żądanie. Nie chcesz przyznać, że sytuacja wcale nie jest statyczna, lecz dynamiczna. Każda precyzyjna definicja z natury rzeczy jest zamknięta, zakończona. Jednak pojęcia fizyczne należą przyswajać sobie właśnie w ich rozwoju. To, co rozumieliśmy przez pojęcie pola wczoraj, wyraźnie różni się od tego, co rozumiemy przez to pojęcie dzisiaj. Tak więc na przykład

współczesna fizyka w odróżnieniu od klasycznej nie stawia ostrej granicy między polem i substancją. We współczesnej fizyce pole i substancja przekształcają się wzajemnie: substancja zmienia się w polu, a pole w substancję.

Jednak mówienie o tym teraz bardziej szczegółowo oznaczałoby, że wybiegamy zbyt daleko naprzód.

Czytelnik B: Nasza rozmowa o fizyce nabrąła charakteru rozmowy najwyraźniej filozoficznej.

Autor: Jest to całkiem naturalne, ponieważ aby można było dyskutować o pojęciach fizycznych, należy uczyć konieczne założenie, iż rozmówcy mają wystarczająco rozwinięte myślenie o charakterze filozoficznym.

Dlatego właśnie z całym naciskiem radzę warn częściej korzystać z różnych książek. Tym samym bedziecie kształcić swoje myślenie, czynić je bardziej giętkim, bardziej dynamicznym.

Na zakończenie chciałbym powiedzieć, że Czytelnika A wyraźnie przeraża „mglistość” definicji i domaga się on precyzji. Wyobraża sobie, że im więcej precyzji, tym lepiej. Jednak wszystko należy robić z umiarem. Spróbuj wyobrazić sobie maksymalnie precyzyjny świat, o którym masz wyczerpującą wiedzę. Pomyśl, czy nie przeraziłby cię ten świat swoją statycznością, swoim brakiem możliwości rozwoju? Pomyśl nad tym wszystkim i nie spiesz się z wyciąganiem wniosków. A na razie spróbujmy podejść do zagadnienia z drugiej strony. Postawię pytanie: jak opisuje się pole? Zdaję sobie sprawę, że wielu ludzi, otrzymawszy odpowiedź na to pytanie, powie: „Teraz wiem, co to jest pole”.

33. Jak się opisuje pole elektrostatyczne?

Autor: Będziemy kontynuować rozmowę rozpoczętą w poprzednim paragrafie.

Jak się opisuje pole elektrostatyczne?

Czytelnik B:

W celu opisania pola elektrostatycznego posługujemy się wielkością wektorową zwana natężeniem pola elektrostatycznego \vec{E} .

W każdym punkcie pola natężenie ma określony kierunek, zwrot oraz wartość. Jeżeli przemieszczamy się z jednego punktu pola do innego tak, aby kierunki i zwroty wektorów natężenia były przez cały czas zgodne z kierunkiem i zwrotem przemieszczenia, to uzyskane w wyniku takiego przemieszczania tory nazywa się liniami si

pola (krócej: liniami pola). Graficzne przedstawienie pola za pomocą linii jest sposobem bardzo wygodnym.

Autor: Dobrze. Teraz spróbujmy myśleć bardziej konkretnie. Kolumnowską siłę oddziaływania dwóch ładunków q_1 i q_2 , które znajdują się w odległości wzajemnej r , zapiszemy w postaci

$$\vec{F}_e = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}, \quad (33.1)$$

Ten wzór można zapisać również tak:

$$F_e = E(r) \cdot q_2, \quad (33.2)$$

gdzie

$$E(r) = k \frac{q_1}{r^2}. \quad (33.3)$$

Wzór (33.3) informuje o tym, że ładunek q_1 wytwarza wokół siebie pole, którego natężenie w odległości r od ładunku ma wartość $k \frac{q_1}{r^2}$.

Wzoru (33.2) wynika, że pole to działa na ładunek q_2 , umieszczony w punkcie, znajdującym się w odległości r od ładunku q_1 , siłą $F_e = E(r) \cdot q_2$. Nowego zapisu wzoru (33.1) dokonano po wprowadzeniu „pośrednika” — wielkości E , charakteryzującej pole. Spróbujcie przeanalizować zakres stosowności związków (33.1) — (33.3).

Czytelnik B: Wzór (33.1) ma zastosowanie do dwóch ładunków punktowych. Oznacza to, że zakres stosowności wzorów (33.2) i (33.3) powinien być taki sam. Przecież uzyskano je z (33.1).

Autor: Niezupełnie masz rację. Wzór (33.2) ma znacznie szerszy zakres stosowności niż (33.1) i (33.3). Niezależnie od tego, przez co pole E zostało wytworzone (ładunek punktowy, zespół ładunków punktowych, naładowane ciało o dowolnym kształcie), siła, którą pole działa na ładunek q_0 , jest równa iloczynowi tego ładunku i natężenia pola w punkcie, gdzie znajduje się ładunek q_0 . Ogólny zapis wzoru (33.2) ma następującą postać wektorową:

$$\vec{F}_e = \vec{E}(\vec{r}) \cdot q_0 \quad (33.4)$$

Z (33.4) widać, że kierunek i zwrot wektora siły działającej na ładunek q_0 w danym punkcie pola jest zgodny z kierunkiem i zwrotem natężenia pola w tym punkcie. jeżeli ładunek q_0 jest

dodatni. Jeśli natomiast ładunek q_0 jest ujemny, to zwrot wektora siły jest przeciwny do zwrota wektora natężenia. W tym miejscu można zauważać, że pole istnieje jako coś samodzielnego. Różne naładowane ciała wytwarzają wokół siebie różne pola elektryczne, jednakże każde z tych pól działa na umieszczonego w nim ładunek zawsze zgodnie z tym samym prawem (33.4). Aby znaleźć siłę działającą na ładunek, trzeba obliczyć natężenie pola w punkcie, w którym znajduje się ładunek. Dlatego duże znaczenie ma umiejętność wyznaczania natężenia pola układu ładunków.

Załóżmy, że mamy dwa ładunki q_1 i q_2 . Natężenie pola pochodzącego od każdego z tych ładunków łatwo można wyznaczyć (zauważ ją jego wartość, jak i kierunek) dla dowolnego punktu przestrzeni. Przypuśćmy, że w pewnym punkcie P , określonym przez wektor \vec{r} , interesujące nas natężenia opisane są wektorami $\vec{E}_1(\vec{r})$ i $\vec{E}_2(\vec{r})$.

Aby znaleźć wypadkowe natężenie w danym punkcie P , należy dodać wektory natężenia pól pochodzących od poszczególnych ładunków:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}). \quad (33.5)$$

Podkreślam, że natężenia trzeba dodawać właśnie wektorowo. (Do Czytelnika A.) Czy zrozumiałeś?

Czytelnik A: Tak. Wiem, że natężenia dodaje się wektorowo.

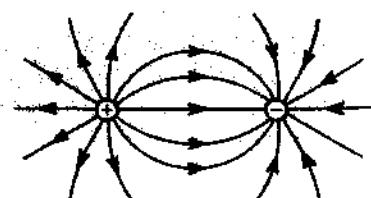
Autor: Dobrze. W takim razie sprawdźmy, czy potrafisz wykorzystać to w praktyce. Narysuj linie pola dwóch ładunków o różnych znakach ($+q_1$ i $-q_2$), przyjmując, że jeden z ładunków (na przykład $+q_1$) ma wartość kilka razy większą od drugiego.

Czytelnik A: Nie umiem tego zrobić. Przedtem z takimi polami nie mieliśmy do czynienia.

Autor: A jakie pola rozpatrywałeś?

Czytelnik A: Wiem, jak będzie wyglądał układ linii pola dwóch jednakowych co do wartości ładunków punktowych. Przedstawiłem ten układ na rysunku 33.1.

Autor: Twój rysunek jest trochę niedokładny, chociaż popraw-

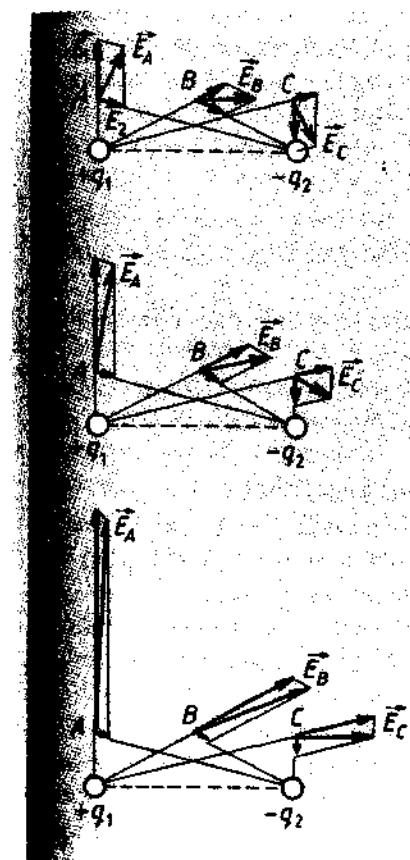


Rys. 33.1

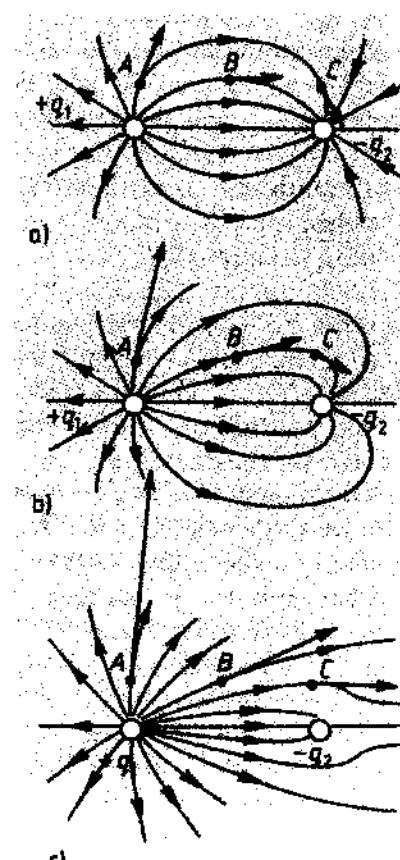
nie przedstawia obrazu linii pola ładunków, jednakowych co do wartości i różnych co do znaku. Czyżbyś nie umiał sobie wyobrazić, jak będzie się zmieniał obraz, gdy wartość jednego z ładunków zacznie wzrastać?

Czytelnik A: Nigdy tego nie robiliśmy.

Autor: W tym zadaniu spróbujemy skorzystać z reguły wektorowego dodawania natężeń. Zaczniemy od sytuacji, gdy ładunki są jednakowe (rys. 33.2a). Wybierzemy trzy punkty A , B , C i wykreślimy dla każdego z nich parę wektorów natężenia: \vec{E}_1 i \vec{E}_2 (\vec{E}_1 — pole ładunku $+q_1$, \vec{E}_2 — pole ładunku $-q_2$). Następnie dla każdego



Rys. 33.2



Rys. 33.3

z wymienionych trzech punktów wykonamy dodawanie wektorów \vec{E}_1 i \vec{E}_2 ; otrzymamy wektory wypadkowe \vec{E}_A , \vec{E}_B i \vec{E}_C , które, jak wiadomo, powinny być styczne do linii pola w odpowiednich punktach. Te trzy wektory sugerują więc, jak powinny przebiegać linie przedstawione na rysunku 33.3a. Porównaj ten rysunek z wykonanym przez ciebie rysunkiem 33.1. Zwróć uwagę, jakie popełniłeś nieścisłości, rysując linie pola na lewo od ładunku $-q$ i na prawo od ładunku $+q$. Założymy, że ładunek $+q_1$ zwiększył się dwa razy, a ładunek $-q_2$ zmniejszył się dwa razy (rys. 33.2b). Wybierzemy te same jak w poprzednim wypadku punkty A, B, C. Wykreślmy dla tych punktów wektory natężeń pochodzących od każdego z ładunków, a następnie ich sumy: \vec{E}_A , \vec{E}_B , \vec{E}_C . Odpowiadający tym wektorom obraz linii pola pokazano na rysunku 33.3b. W końcu założymy, że ładunek q_1 powiększył się jeszcze dwukrotnie, a q_2 jeszcze dwukrotnie zmalał (rys. 33.2c). Wykreślmy dla punktów A, B, C wektory E_A , E_B , E_C . Odpowiedni układ linii pola przedstawiono na rysunku 33.3c.

Widzisz, że ze wzrostem wartości ładunku $+q_1$ jego wpływ staje się coraz silniejszy: pole ładunku $+q_1$ zaczyna najwyraźniej dominować nad polem ładunku $-q_2$.

Czytelnik A: Teraz rozumiem, jak można konstruować linie pola dla układu złożonego z kilku ładunków.

Autor: Będziemy kontynuować omawianie pola elektrostatycznego. Pole to ma jedną ważną właściwość, upodabniającą je do pola ciążenia, a mianowicie:

praca sił pola na dowolnej drodze zamkniętej jest równa zeru.

Innymi słowy, jeżeli ładunek, przemieszczając się w polu wraca do punktu wyjściowego, to praca sił pola odpowiadająca temu przemieszczeniu jest równa zeru. Na jednych odcinkach drogi praca ta jest dodatnia, na innych – ujemna, jednak w sumie jest równa zeru. Z tej właściwości pola elektrostatycznego wynikają interesujące skutki. Czy mógłbyś je wymienić?

Czytelnik B: Nie, nie umiem sobie tego wyobrazić.

Autor: Pomożę ci. Zwróciłeś z pewnością uwagę na to, że nie zdarzy się, aby linie pola elektrostatycznego były zamknięte. Zawsze zaczynają się i kończą na ładunkach (zaczynają się na ładunkach dodatnich, a kończą na ładunkach ujemnych) albo też uciekają do nieskończoności (przychodzą z nieskończoności). Czy nie mógłby

powiązać tej okoliczności z wymienioną powyżej właściwością pola elektrostatycznego?

Czytelnik B: Zdaje się, że zrozumiałem. Gdyby linia pola elektrostatycznego zamknęła się sama w sobie, wtedy, przemieszczając się wzdłuż niej, moglibyśmy wrócić do punktu wyjścia. Praca pola podczas przemieszczania ładunku w jedną stronę wzdłuż linii pola oczywiście nie zmienia znaku i wobec tego nie może być równa zeru. To znaczy, że

linie pola elektrostatycznego nie mogą zamkać się same w sobie.

Autor: Słusznie. Z wymienionej powyżej właściwości pola elektrostatycznego wynika jeszcze jeden wniosek:

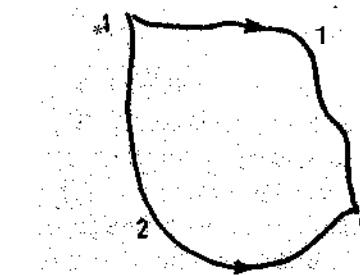
praca wykonana podczas przemieszczania ładunku z jednego punktu pola do drugiego nie zależy od drogi (toru), po której zachodzi przemieszczenie.

Wyobraźmy sobie, że będziemy przemieszczać ładunek z punktu A do punktu B po dwóch różnych drogach 1 i 2 (rys. 33.4). Oznaczmy pracę sił pola związaną z przemieszczeniem ładunku po drodze 1 przez W_1 , a po drodze 2 – przez W_2 . Wykonajmy kołowy obieg: z punktu A Rys. 33.4

przejźmy do punktu B po

drodze 1, a z punktu B do punktu A – po drodze 2. Podczas odwrotnego przebywania drogi 2 zostanie wykonana praca $(-W_2)$. Całkowita praca pola w czasie obiegu kołowego jest równa $W_1 + (-W_2) = W_1 - W_2$. Ponieważ praca na dowolnej drodze zamkniętej powinna być równa zeru, to otrzymujemy $W_1 = W_2$.

- Ten fakt, że praca przy przemieszczeniu ładunku nie zależy od tego, jaką wybraliśmy drogę, ale jest całkowicie określona położeniami początkowego i końcowego punktu drogi, pozwala ją wykorzystać jako wielkość charakteryzującą pole (przecież zależy ona tylko od wyboru punktów pola!). W ten sposób pojawia się jeszcze jedna wielkość charakteryzująca pole elektrostatyczne – potencjał. W odróżnieniu od natężenia jest ona wielkością skalarną, ponieważ wyraża się przez pracę.



Czytelnik B: Słyszałem, że pojęcie potencjału pola nie ma fizycznego sensu. Sens fizyczny ma tylko różnica potencjałów dwóch jakichkolwiek punktów pola.

Autor: Masz rację. Ściśle mówiąc, poprzednie rozważania pozwalają wprowadzić właśnie różnicę potencjałów.

Różnica potencjałów pola w dwóch punktach A i B (oznaczamy przez $V_A - V_B$) jest określona jako stosunek pracy sił pola, wykonanej przy przemieszczeniu ładunku q_0 z punktu A do punktu B , na wartości tego ładunku q_0 .

$$V_A - V_B = \frac{W_{A \rightarrow B}}{q_0}. \quad (33.6)$$

Jednak jeżeli się założy, że w nieskończoności pole nie istnieje ($V_\infty = 0$), to wyrażenie (33.6) przyjmuje postać

$$V_A = \frac{W_{A \rightarrow \infty}}{q_0}. \quad (33.7)$$

Tak więc potencjał pola w danym punkcie można określić pracą, którą wykonują siły pola przy przemieszczeniu dodatniego jednostkowego ładunku z danego punktu do nieskończoności.

Jeżeli weźmie się pod uwagę pracę wykonaną nie przez pole, lecz przeciw siłom pola, to potencjał pola w danym punkcie jest pracą, którą należy wykonać, aby przemieścić dodatni jednostkowy ładunek z nieskończoności do danego punktu. Jasne jest, że takie zdefiniowanie potencjału nie pozwala na wykonanie eksperymentalnego pomiaru potencjału w danym punkcie pola, ponieważ w rzeczywistości nie możemy się oddalić do nieskończoności. Dlatego właśnie się mówi, że sens fizyczny ma różnica potencjałów w dwóch punktach pola, zaś sam potencjał w danym punkcie

Można powiedzieć, że potencjał w danym punkcie jest określony z dokładnością do dowolnej stałej. Jako tę stałą przyjmuje się wartość potencjału w nieskończoności i właśnie od tej wartości odmierza się potencjał. Dla wygody zakłada się, że wartość potencjału w nieskończoności jest równa零. Zgodnie z wymienionymi założeniami potencjał pola ładunku punktowego q_1 w punkcie znajdującym się w odległości r od ładunku jest równy

$$V(r) = k \frac{q_1}{r}. \quad (33.8)$$

Nietrudno wyobrazić sobie, jaką wartość ma potencjał pola pochodzącego od kilku ładunków punktowych w danym punkcie $P(\vec{r})$.

Czytelnik B: Oznaczmy wartości potencjału w punkcie P od każdego z ładunków osobno przez $V_1(r), V_2(r)$. Całkowity potencjał $V(\vec{r})$ jest równy algebraicznej sumie potencjałów pochodzących od poszczególnych ładunków:

$$V(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) + V_2(\vec{r}) + \dots . \quad (33.9)$$

Potencjał pola wytworzonego przez ładunek dodatni piszemy ze znakiem plus, a przez ujemny — ze znakiem minus.

Autor: Dobrze. Rozpatrzmy teraz pojęcie powierzchni ekwipotencjalnych.

Miejsce geometryczne punktów pola mających ten sam potencjał nazywa się powierzchnią ekwipotencjalną (albo powierzchnią jednokowego potencjału). Przez każdy punkt pola przechodzi jedna linia pola i jedna powierzchnia ekwipotencjalna.

Jak są one względem siebie zorientowane?

Czytelnik B: Wiem, że

w każdym punkcie linia pola i odpowiednia powierzchnia ekwipotencjalna są wzajemnie prostopadłe.

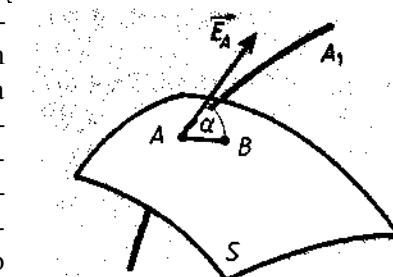
Autor: Czy mógłbyś to udowodnić?

Czytelnik B: Niestety nie potrafię.

Autor: Dowód nie jest skomplikowany. Niech przez pewien punkt A przechodzi linia pola AA_1 i powierzchnia ekwipotencjalna S (rys. 33.5). Natężenie pola w punkcie A jest opisane wektorem \vec{E}_A . Przemieszczymy ładunek q_0 z punktu A do pewnego punktu B , który leży na powierzchni ekwipotencjalnej S w odległości Δl od punktu A . Praca na odcinku Δl wyraża się wzorem

$$W = F_e \Delta l \cos \alpha = E_A q_0 \Delta l \cos \alpha, \quad (33.10)$$

gdzie α — kąt między wektorem E_A i wektorem przemieszczenia. Te



Rys. 33.5

samą pracę można wyrazić przez różnicę potencjałów pola w punktach A i B . Tak więc można zapisać jeszcze jeden związek:

$$W = q_0(V_A - V_B). \quad (33.11)$$

Ponieważ punkty A i B leżą na tej samej powierzchni ekwipotencjalnej, to $V_A = V_B$. Oznacza to, że zgodnie z (33.11) praca W jest równa零. Podstawiając ten wynik do wyrażenia (33.10), otrzymujemy

$$F_A q_0 \Delta l \cos\alpha = 0.$$

Z wszystkich czynników po lewej stronie tego równania zero może być równy tylko $\cos\alpha$. Dochodzimy więc do wniosku, że $\alpha = 90^\circ$. Jasne, że ten sam wynik uzyskuje się dla dowolnego kierunku przemieszczenia \vec{AB} , byle tylko wszystkie przemieszczenia znajdowały się na powierzchni ekwipotencjalnej 5. Fakt, że powierzchnia S ma krzywiznę nie zakłoca rozważań, jako że przemieszczenia Δl są bardzo małe. W celu graficznego zobrazowania pola elektrostatycznego wraz z liniami pola rysowane są powierzchnie ekwipotencjalne. Wykorzystując wzajemną prostopadłość linii i powierzchni, można na podstawie znajomości linii pola narysować przekroje powierzchni ekwipotencjalnych — i odwrotnie. (Do Czytelnika A.) Spróbuj narysować przekroje powierzchni ekwipotencjalnych w sytuacji przedstawionej na rysunku 33.3a. Aby nie pomieszać przekrojów z liniami pola, przekroje powierzchni rysuj liniami kreskowymi.

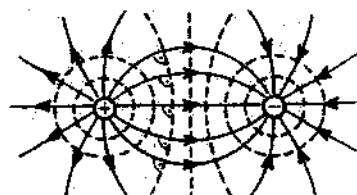
Czytelnik A: Będę prowadził linie kreskowe tak, aby stale przecinały linie pola pod kątem prostym.

Oto mój rysunek (rys. 33.6).

Autor: Twój rysunek jest po prawny.

Czytelnik A: Jakie rodzaje pól elektrostatycznych spotyka się w zadaniach egzaminacyjnych? Chciałbym mieć w jednym miejscu wszystkie podstawowe wzory.

Autor: Nietrudno to zrobić. Spotyka się trzy rodzaje pól:



Rys. 33.6

a) pole jednorodne (natężenie pola jest jednakowe we wszystkich punktach):

$$\vec{E}(r) = \text{const} \quad \text{oraz} \quad V_A - V_B = Er_{AB}, \quad (33.12)$$

gdzie r_{AB} — długość rzutu odcinka AB na kierunek natężenia pola;

b) pole punktowego ładunku q :

$$E(r) = k \frac{q}{r^2} \cdot \vec{n} \quad \text{i} \quad V(\vec{r}) = k \frac{q}{r}, \quad (33.13)$$

gdzie \vec{r} — wektor wodzący poprowadzony od ładunku do punktu obserwacji, \vec{n} — wektor jednostkowy: $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$;

c) pole układu złożonego z kilku ładunków punktowych.

W ostatnim wypadku, jak już wiemy,

natężenie pola jest sumą wektorową natężeń pól pochodzących od pojedynczych ładunków, a potencjał — algebraiczną sumą potencjałów pól pochodzących od pojedynczych ładunków.

Chcę teraz powiedzieć o polu jednorodnym. Jak myślisz, czy wystarczy zdefiniować pole jednorodne jako pole, w którego każdym punkcie natężenie jest jednakowe ze względu na kierunek i zwrot?

Czytelnik B: Czy nie robi się przy tym żadnych założeń o wartości natężenia?

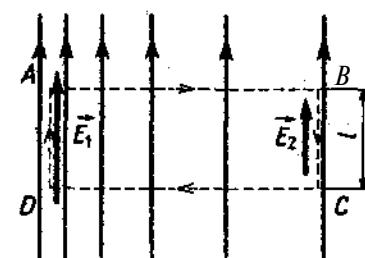
Autor: Nie.

Czytelnik B: Myślę, że nie wystarczy. Pole jednorodne to pole, w którego każdym punkcie natężenie jest jednakowe zarówno co do kierunku i zwrotu, jak i co do wartości.

Autor: Właśnie tak. Ale, być może, że zgodności kierunków i zwrotów natężenia wynika równość wartości natężenia?

Czytelnik B: Dlaczego, na jakiej podstawie? Nie rozumiem.

Autor: W takim razie weźmy pod uwagę pole, którego linie pokazano na rysunku 33.7. 7a-



Rys. 33.7

znaczam, że im gęściej rozmieszczone są linie pola, tym większa jest wartość natężenia. Sądząc z rysunku, $E_1 > E_2$. Należy obliczyć pracę wykonaną przez pole przy przemieszczeniu pewnego dodatniego ładunku q wzdłuż zamkniętego konturu $ABCD$.

Czytelnik A: A po co to robić? Z góry jest jasne, że praca powinna być równa zeru.

Autor: Mimo to oblicz pracę na poszczególnych odcinkach konturu.

Czytelnik B: Praca na odcinkach AB i CD jest równa zeru, ponieważ linie pola są tu prostopadłe do kierunku przemieszczenia. Praca na odcinku BC jest równa $(-qE_2 l)$, a na odcinku DA równa $qE_1 l$.

Autor: Jaki jest wynik końcowy?

Czytelnik A: Zdziwiające! Otrzymaliśmy $q(E_1 - E_2)l$, co nie jest równe零. Jakiż to absurd!

Autor: Jakie są twoje wnioski?

Czytelnik B: Mój wniosek może być tylko jeden: pole przedstawione na rysunku 33.7 nie może istnieć.

Autor: Całkiem słusznie. Oznacza to, że jeżeli linie pola są równoległe, ich gęstość powinna być jednakowa, czyli jeśli natężenie pola jest jednakowe we wszystkich punktach co do kierunku, to powinno ono być także jednakowe co do wartości.

Czytelnik B: Dosyć interesujący wynik. Mam jeszcze jedno pytanie. W podanych przez Pana związkach (33.13), opisujących natężenie i potencjał ładunku punktowego, występuje współczynnik k , związany, o ile pamiętam, z ϵ_0 .

Autor: Wartość współczynnika k zależy od wyboru układu jednostek. W układzie jednostek SI

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \text{gdzie} \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2},$$

stąd

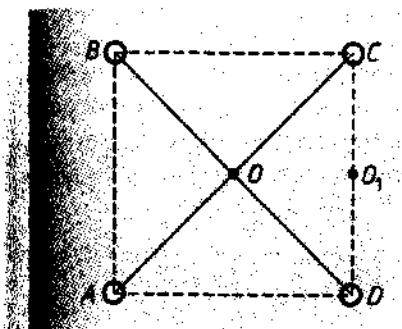
$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{N}}{\text{C}^2}.$$

Zaznaczę też, że jeśli rozpatruje się pole w dielektryku, wtedy dodatkowo należy uwzględnić fakt, że natężenie i potencjał maleją w porównaniu z próżnią ϵ_0 , razy (ϵ_r — względna przenikalność elektryczna materiału):

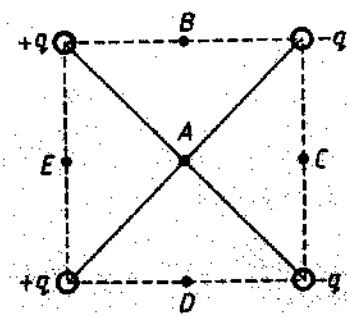
$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{q_s}{\epsilon_r r} \hat{n} \quad \text{oraz} \quad V(\vec{r}) = k \frac{q_s}{r \epsilon_r} \quad (33.14)$$

Zadania

- 33.1. Na rysunku 33.8 przedstawiono cztery jednakowe co do wartości bezwzględnej ładunki punktowe, $|q| = 2 \text{ C}$ każdy. Bok kwadratu jest równy $a = 2 \text{ m}$. Wyznacz wartości oraz kierunki wektora natężenia pola układu ładunków w punktach O i O_1 w czterech następujących wariantach: 1) wszystkie ładunki są dodatnie; 2) ładunki A i B — dodatnie, C i D — ujemne; 3) ładunki B i C — dodatnie, A i D — ujemne; 4) ładunki B i D — dodatnie, A i C — ujemne.



Rys. 33.8



Rys. 33.9

- 33.2. Cztery jednakowe ładunki, $q = 2 \text{ C}$ każdy, rozmieszczone w wierzchołkach kwadratu o boku $a = 2 \text{ m}$ (rys. 33.9). Oblicz potencjał pola układu tych ładunków w punktach A , B , C , D , E .
- 33.3. W wierzchołkach ostrych kątów trójkąta prostokątnego umieszczone różnoimienne ładunki o wartości $|q| = 2 \text{ C}$ każdy. Wyznacz natężenie \vec{E} i potencjał V w wierzchołku kąta prostego. Przyprostokątne są równe $a = 3 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$.
- 33.4. Przekątne rombu mają długości $d_1 = 2 \text{ cm}$, $d_2 = 3 \text{ cm}$. Na końcach krótszej przekątnej znajdują się ładunki $q_1 = 2 \mu\text{C}$, $q_2 = 6 \mu\text{C}$, a na końcach dłuższej — ładunki $q_3 = 3 \mu\text{C}$ i $q_4 = 12 \mu\text{C}$. Określ wartość i kierunek wektora natężenia pola elektrycznego \vec{E} w środku rombu.
- 33.5. W wierzchołkach równobocznego trójkąta o boku $a = 5 \text{ m}$ znajdują się trzy jednakowe ładunki o wartości $q = 3 \mu\text{C}$ każdy.

Wyznacz wartość i kierunek wektora natężenia \vec{E} pola elektrycznego w środku trójkąta i w wierzchołku czworościanu prawidłowego zbudowanego na tym trójkącie.

- 33.6. Dwa ładunki punktowe $q_1 = 9 \text{ nC}$ i $q_2 = 25 \text{ nC}$ znajdują się w odległości wzajemnej $r = 20 \text{ cm}$. Oblicz, w jakim punkcie prostej przechodzącej przez ładunki natężenie pola jest równe zeru.

34. Jak układają się linie pola przy powierzchni przewodnika?

Autor: Wprowadźmy w pole elektryczne jakiekolwiek ciało będące przewodnikiem. Dobrze wiecie, że przewodnik umieszczony w polu charakteryzuje się pewną wielkością fizyczną, zwaną pojemnością elektryczną (albo po prostu pojemnością). Czy nie zastanawialiście się kiedyś nad pytaniem:

Dlaczego mówimy o pojemności właśnie przewodnika, a nie mówimy o pojemności dielektryka?

Czytelnik A: Nigdy o tym nie myślałem.

Autor: A jak byś zdefiniował pojemność odosobnionego przewodnika?

Czytelnik A: Jako ilość elektryczności, którą należy dostarczyć temu przewodnikowi, aby zwiększyć jego potencjał o jednostkę.

Autor: Zwróc uwagę, że mówisz tutaj o potencjale jako wielkości charakteryzującej ciało. Jednak do tej pory potencjał traktowaliśmy jako wielkość charakteryzującą pole i zmieniającą się od punktu do punktu. Potencjał jest funkcją współrzędnych punktu pola. Czy można mówić o nim jako o wielkości charakteryzującej ciało? A jeśli można, to dlaczego?

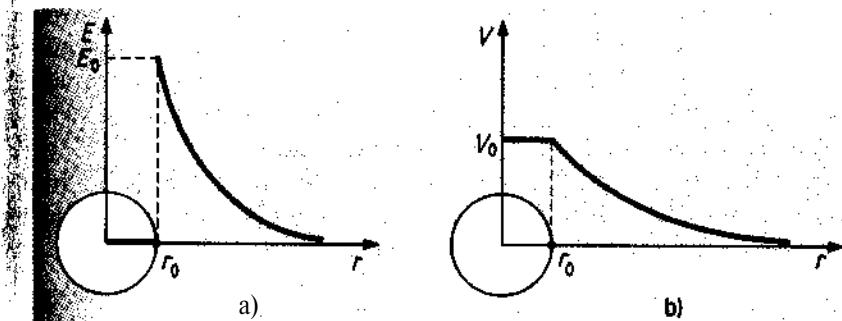
Czytelnik B: Jest to możliwe, gdy ciało jest przewodnikiem. Rzec w tym, że

W przekroju przez przewodnik rozłożonego w środku ciało, natężenie pola jest równe zero. Na powierzchni przewodnika natężenie pola jest równe zero.

Autor: Czym możesz uzasadnić swoje twierdzenie?

Czytelnik B: W przewodniku są ładunki swobodne. Dlatego gdyby między jakimiś dwoma punktami przewodnika istniała różnica potencjałów, to między tymi punktami powinien się pojawić prąd elektryczny. A to jest, oczywiście, niemożliwe.

Autor: Masz rację. Można powiedzieć, że znajdujące się w przewodniku ładunki swobodne rozmieszczały się w taki sposób, że natężenie pola elektrostatycznego wewnątrz przewodnika staje się równe zeru. A to właśnie oznacza, że wszystkie punkty przewodnika (zarówno w jego wnętrzu, jak i na jego powierzchni) mają ten sam potencjał. Stałość potencjału elektrostatycznego we wszystkich punktach przewodnika pozwala mówić o potencjale przewodnika jako o potencjale ciała.



Rys. 34.1

Na rysunku 34.1a pokazano, jak zmienia się natężenie pola elektrostatycznego wytworzanego przez naładowaną metalową kulę w zależności od odległości od środka tej kuli. Wewnątrz natężenie jest równe zeru. Na zewnątrz zmienia się ono według wzoru $\frac{kq}{r^2}$ — jak gdyby cały ładunek kuli był skupiony w jej środku. Na powierzchni kuli (dla $r = r_0$) mamy $E_0 = \frac{kq}{r_0^2}$. Na rysunku 34.1b widać wykres zależności potencjału V pola od odległości r do środka kuli. Na zewnątrz kuli potencjał zmienia się zgodnie

z wzorem $\frac{k\alpha}{r}$; ale we wszystkich punktach wewnątrz kuli i na jej powierzchni potencjał jest stały i równy $V_0 = \frac{k\alpha}{r_0}$.

Pragnę zauważyć, że w dielektryku nie ma ładunków swobodnych i dlatego opisane powyżej przegrupowanie ładunków nie zachodzi. Przy okazji zapytam:

Jak właściwie rozmieszczają się ładunki swobodne w przewodniku?

Czytelnik B: Gromadzą się one na jego powierzchni. Przy czym im większa jest krzywizna powierzchni, tym ich gęstość jest większa. Największa gęstość ładunków wystąpi na końcu ostrza.

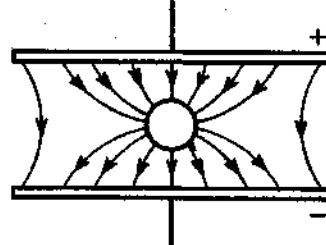
Autor: Zupełnie słusznie. Właśnie dlatego w pobliżu ostrza albo cienkiego drutu może pojawić się wyładowanie elektryczne. Takie wyładowanie, spowodowane przez silnie niejednorodne pole elektryczne w gazie pod ciśnieniem rzędu 10^5 Pa, nosi nazwę koronowego. Wyładowanie takie słyszmy jako charakterystyczny szmer, gdy przechodzimy pod linią wysokiego napięcia. W dawnych czasach wyładowanie koronowe przerżało marynarzy obserwujących święcenie na masztach statku (ognie świętego Elma).

Ale wróćmy do przewodnika w polu elektrostatycznym. Już wyjaśniliśmy, że powierzchnia przewodnika jest powierzchnią ekwi-potencjalną. W związku z tym odpowiedz na pytanie:

Jak przebiegają linie pola elektrostatycznego w pobliżu powierzchni przewodnika?

Czytelnik B: Ponieważ linie pola są zawsze prostopadłe do powierzchni ekwi-potencjalnych, powinny tworzyć z powierzchnią przewodnika kąty proste.

Autor: Niestety, osoby przystępujące do egzaminu dosyć często nie wiedzą o tym. Narysuj układ linii pola kondensatora płaskiego, wewnątrz którego znajduje się metalowa kula.



Rys. 34.2

Czytelnik B: Linie pola powinny tworzyć z płytami kondensatora i stycznymi do powierzchni kulką kąty proste. Dlatego układ linii pola powinien mieć postać przedstawioną na rysunku 34.2.

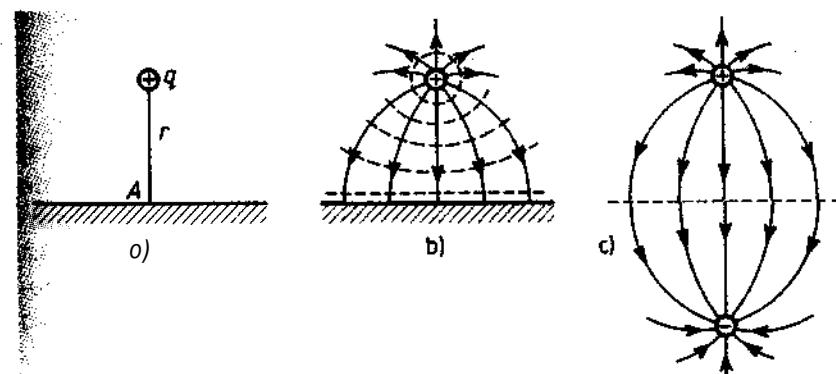
Autor: Wszystko w porządku. Nie rozumiem tylko, dlaczego niektórzy uczniowie uważają, że linie pola powinny omijać kulę. A teraz spróbujemy rozwiązać następujące zadanie.

W odległości r od powierzchni Ziemi znajduje się punktowy ładunek $+q$. Na zasadzie zjawiska indukcji będzie on ściągał ładunek przeciwnego znaku znajdujące się w Ziemi. W wyniku tego pojawi się siła elektrostatycznego przyciągania ładunku do Ziemi. Należy wyznaczyć tę siłę.

Proponuję, abyście obaj się zastanowili nad tym zadaniem.

Czytelnik A: Ładunek, który pojawił się w Ziemi w wyniku indukcji, powinien być równy co do wartości ładunkowi $+q$. Stąd wynika, że poszukiwana siła jest równa $k \frac{q^2}{r^2}$.

Czytelnik B: Nie zgadzam się z takim wnioskiem. Czytelnik A założył, że indukowany w Ziemi ładunek jest skupiony w jednym punkcie (punkt A na rys. 34.3a). Jednak w rzeczywistości indukowany ładunek nie jest skupiony w jednym punkcie, ale jest rozłożony na powierzchni Ziemi. Dlatego z góry wiadomo, że poszukiwana siła jest mniejsza niż $k \frac{q^2}{r^2}$.



Rys. 34.3

Autor: Całkowicie się z tobą zgadzam. Jednakże zastanówmy się, jak w tej sytuacji wyznaczyć siłę przyciągania ładunku do Ziemi?

Czytelnik B: Mnie się wydaje, że trzeba rozpatrzyć pole między ładunkiem i powierzchnią Ziemi. Powierzchnia Ziemi jest oczywiście powierzchnią ekwipotencjalną. Zatem w pobliżu powierzchni Ziemi powierzchnie ekwipotencjalne pola powinny być prawie płaszczyznami. Jednocześnie w pobliżu ładunku punktowego powierzchnie ekwipotencjalne powinny mieć kształt sferyczny. Pozwala to narysować przybliżony jakościowy obraz powierzchni ekwipotencjalnych (dokładniej — przekrojów powierzchni). Mając ten obraz, mogę według znanej reguły poprowadzić linie pola (rys. 34.3b); linie pola — linie ciągłe, a przekroje powierzchni — linie kreskowe.

Autor: Nie przerywajcie swoich rozważań. Czy obraz linii pola na rysunku 34.3b nie przypomina was czegoś znanego?

Czytelnik A: Ach tak, słusznie. Ten obraz jest podobny do obrazu linii pola dwóch jednakowych co do wartości i różniących się znakiem ładunków punktowych. Narysuję ten obraz obok (rys. 34.3c). Teraz wszystko jest zrozumiałe. W obydwu wypadkach (rys. 34.3b, c) wygląd pola w pobliżu ładunku $+q$ jest taki sam. Zgodnie z wzorem (33.4) oznacza to, że w obydwu wypadkach na ładunek $+q$ powinna działać taka sama siła. Tak więc poszukiwana siła jest równa $k \frac{z^2}{4r^2}$.

Autor: Teraz twoje rozważania są poprawne. Na przykładzie tego zadania widzimy, jak ważną rzeczą jest dokładne zrozumienie pojęcia pola elektrostatycznego.

Zadania

- 34.1. Kula metalowa o promieniu $R = 4\text{ cm}$ jest naładowana do potencjału $V_0 = 1\text{ V}$. Oblicz natężenie i potencjał pola elektrostatycznego w odległościach $l_1 = 2\text{ cm}$ i $l_2 = 6\text{ cm}$ od środka kuli. Rozpatrz następujące warianty: 1) kula znajduje się w powietrzu, 2) kula jest umieszczona w dielektryku o względnej przenikalności elektrycznej $\epsilon_r = 2$.
- 34.2. Metalowa kula o promieniu $R_1 = 2\text{ cm}$ jest naładowana ładunkiem $q_1 = 2\text{ }\mu\text{C}$. Kulę otacza wspólna środkowa metalowa osłona

o promieniu $R_2 = 6\text{ cm}$, której ładunek $q_2 = -6\text{ }\mu\text{C}$. Oblicz natężenie i potencjał pola w następujących odległościach od środka kuli: $l_1 = 1\text{ cm}$, $l_2 = 4\text{ cm}$, $l_3 = 8\text{ cm}$.

- 34.3. Metalowa kulę o promieniu $R_1 = 2\text{ cm}$, naładowaną do potencjału $V_0 = 2\text{ V}$, otoczono sferyczną wspólną środkową osłoną o promieniu $R_2 = 4\text{ cm}$. Jaka wartość przyjmie potencjał kuli, jeżeli osłona zewnętrzna zostanie uziemiona?
- 34.4. Dwie kule metalowe o promieniach $R_1 = 2\text{ cm}$ i $R_2 = 4\text{ cm}$ naładowane są jednakowymi co do wartości i znaku ładunkami $|q_1| = |q_2| = 2\text{ }\mu\text{C}$. Kule połączono długim przewodem. Wyznacz ładunek ΔQ , który przepłynie przez ten przewód.

35. Jak opisujesz ruch w jednorodnym polu elektrostatycznym?

Autor: Założymy, że ciało jest naładowane i porusza się w jednorodnym polu elektrostatycznym, tj. w takim polu, w którego każdym punkcie natężenie \vec{E} jest jednakowe zarówno co do wartości, jak i kierunku oraz zwrotu. Przykładem niech będzie pole wewnętrz kondensatora płaskiego. Czy nie dostrzegacie ogólnego podobieństwa tego zadania, dotyczącego ruchu ciała w jednorodnym polu elektrostatycznym, do pewnych zadań rozpatrywanych wcześniej?

Czytelnik B: Wydaje mi się, że istnieje bardzo duże podobieństwo do zadani dotyczcych ruchu ciała w polu grawitacyjnym. Przecież na względnie niewielkich odległościach pole grawitacyjne Ziemi można uznać za pole jednorodne!

Autor: Zupełnie słusznie. A na czym polega różnica między ruchami w polu elektrostatycznym i w polu grawitacyjnym?

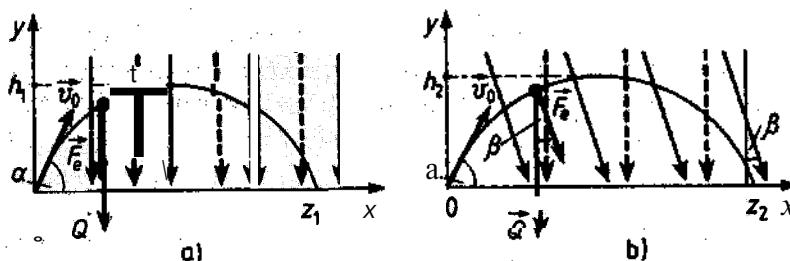
Czytelnik B: Niejednakowe są siły działające na ciało. W polu elektrostatycznym na ciało działa siła $\vec{F}_e = \vec{E}q$ (ona nadaje ciału przyspieszenie $a_e = \frac{\vec{E}q}{m}$), a w polu grawitacyjnym siła $\vec{Q} = mg$ (ona nadaje ciału przyspieszenie \vec{g}).

Autor: Byłyby przyjemnie, gdyby wszyscy, którzy przystępują do egzaminu, przyswoili sobie prostą prawdę:

Ruchy ciała w dowolnym polu jednorodnym pod względem matematycznym są jednakowe, i różnice związane są tylko z wartością siły działającej na ciało. W danym polu, ruch ciała nieleko wianego w jednorodnym polu elektrostatycznym ma taki charakter jak ruch zwanego kamieniem w POM! grawitacyjny Ziemi.

Będziemy rozwiązywać zadania, w których ruch ciała odbywa się w dwóch jednocześnie występujących polach: grawitacyjnym i elektrostatycznym.

Ciało o masie m i ładunku $+q$ wyrzucono pod kątem α do poziomu z prędkością początkową v_0 . Ruch ciała zachodzi w dwóch jednocześnie występujących polach: grawitacyjnym i jednorodnym elektrostatycznym o natężeniu \vec{E} . Linie obrywu pół mają kierunek pionowy i zwrot do dołu (rys. 35.1a). Znaleźć czas t_1 lotu, zasięg rzutu z_1 i maksymalną wysokość wznesienia się ciała h_1 .



Rys. 35.1

Czytelnik B: Na ciało działają dwie siły: siła grawitacyjna (ciążkości) $\vec{Q} = mg$ i siła elektrostatyczna $\vec{F}_e = \vec{E} q$. W danym zadaniu wektory obu sił są wzajemnie równoległe. Jak w paragrafie 6 rozłożę wektor prędkości początkowej \vec{v}_0 na dwie składowe...

Autor (przerywając): Zdaje się, że chcesz powtórzyć przebieg rozwiązania zademonstrowanego w analogicznym zadaniu w paragrafie 6?

Czytelnik B: Tak, chociażby tylko pokróćce.

Autor: Nie ma takiej potrzeby. Możesz od razu skorzystać z wyników (6.2) — (6.4). Wyobraź sobie, że teraz ciało porusza się w pewny

„dociążonym” polu sił ciążkości, charakteryzującym się przyspieszeniem $g + \frac{Ee}{m}$. Dokonaj w związkach (6.2) — (6.4) podstawienia

$$g \rightarrow \left(g + \frac{Ee}{m} \right)$$

i natychmiast dojdiesz do poszukiwanych wyników:

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g + \frac{Ee}{m}}, \quad z_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g + \frac{Ee}{m}}, \quad h_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2\left(g + \frac{Ee}{m}\right)}.$$

Czytelnik A: Nie rozumiem jednej sprawy. W porównaniu z odpowiednim zadaniem z paragrafu 6 w tym zadaniu na ciało działa dodatkowa siła \vec{F}_e . Jest ona skierowana pionowo, dlatego nie powinna wpływać na poziome przemieszczenie ciała. Dlaczego zatem wpłynęła na zasięg z_1 rzutu ciała?

Autor: Zasięg rzutu zależy od czasu lotu, który określa się na podstawie analizy pionowego przemieszczenia ciała. A teraz nieznacznie zmodyfikujemy zadanie:

Niech linie pola elektrostatycznego będą skierowane pod kątem β do pionu (rys. 35.1b). Tak samo jak poprzednio, należy znaleźć czas t_2 i zasięg z_2 rzutu, a także maksymalną wysokość h_2 wznesienia się ciała.

Czytelnik A: Na początku rozłożę siłę \vec{F}_e na dwie składowe: pionową ($F_e \cos \beta$) poziomą ($F_e \sin \beta$). Zadanie to przypomina mi zadanie ze sprzyjającym wiatrem z paragrafu 6: jako „siła wiatru” tutaj występuje składowa $F_e \sin \beta$.

Autor: Słusznie. Powinieneś tylko wziąć pod uwagę, że w odróżnieniu od wspomnianego zadania ze sprzyjającym wiatrem tutaj występuje inna siła pionowa, a mianowicie:

$$mg + F_e \cos \beta.$$

Czytelnik A: Skorzystam ze związków (6.2), (6.3) i (6.6), w których dokonam następujących podstawień:

$$g \rightarrow \left(g + \frac{Ee \cos \beta}{m} \right), \quad \frac{F}{Mg} \rightarrow \frac{Ee \sin \beta}{mg + Ee \cos \beta}.$$

Natychmiast otrzymuję poszukiwane wyniki:

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g + \frac{Eq \cos \beta}{m}},$$

$$z_2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g + \frac{Eq \cos \beta}{m}} \left[1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha (Eq \sin \beta)}{mg + Eq \cos \beta} \right],$$

$$h_2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2 \left(g + \frac{Eq \cos \beta}{m} \right)}.$$

Autor: Wszystko zrobiłeś całkowicie poprawnie. Niestety, osoby egzaminowane często nie umieją przeprowadzić analogii między ruchem w polu grawitacyjnym i ruchem w jednorodnym polu elektrostatycznym. Dlatego takie zadania są dla nich bardzo trudne.

Czytelnik A: Ja wcześniej takich zadań też nie rozwiązywałem. Zadania na ten temat trafiały mi się tylko w postaci problemów związanych z ruchem elektronu między płytami kondensatora płaskiego, przy czym zaniedbywaliśmy wpływ siły grawitacji na jego ruch. Pamiętam, że zadania te wydawały mi się bardzo trudne.

Autor: Wszystkie takie zadania są wariantami zadania przedstawionego na rysunku 35.1a, przy czym dla ruchu elektronu wewnątrz kondensatora można nie uwzględniać pola grawitacyjnego. Rozwiążmy jedno z takich zadań:

Elektron wlatuje do kondensatora płaskiego pod kątem α_1 do jego płyt z prędkością początkową v_1 i wylatuje z kondensatora pod kątem α_2 (rys. 35.2). Długość płyt kondensatora jest równa l . Znaleźć natężenie E pola elektrostatycznego wewnątrz kondensatora i energię kinetyczną elektronu w chwili, gdy wylatuje on z kondensatora. Masę m i ładunek q elektronu trzeba traktować jako znane.

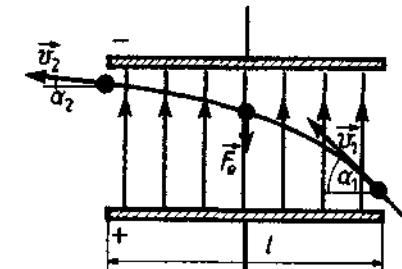
Przystępując do rozwiązywania tego zadania, oznaczę prędkość elektronu wylatującego z kondensatora przez v_2 . Ruch elektronu w kierunku równoległym do płyt jest jednostajny. Stąd znajduję czas jego lotu wewnątrz kondensatora:

$$t = \frac{l}{v_1 \cos \alpha_1}.$$

Składowe wektora prędkości początkowej i końcowej elektronu, prostopadłe do płyt, związane są znanym wzorem kinetycznym na prędkość w ruchu jednostajnie opóźnionym:

$$v_2 \sin \alpha_2 = v_1 \sin \alpha_1 - \frac{F_z}{m} t =$$

$$= v_1 \sin \alpha_1 - \frac{Eq l}{mv_1 \cos \alpha_1}.$$



Rys. 35.2

Stąd uwzględniając, że składowa wektora prędkości równoległa do płyt nie zmienia się ($v_1 \cos \alpha_1 = v_2 \cos \alpha_2$), otrzymujemy

$$v_1 \cos \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = v_1 \sin \alpha_1 - \frac{Eq l}{mv_1 \cos \alpha_1}.$$

Z tego równania znajdujemy natężenie pola wewnątrz kondensatora:

$$E = \frac{1}{ql} (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2) m v_1^2 \cos^2 \alpha_1. \quad (35.1)$$

Energia kinetyczna elektronu, gdy opuszcza on kondensator, jest równa

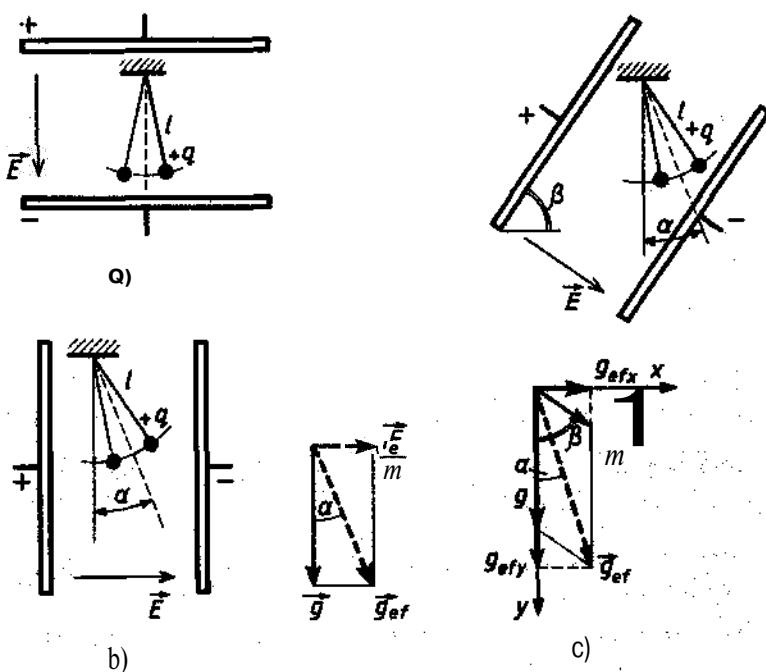
$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} \frac{\cos^2 \alpha_1}{\cos^2 \alpha_2}. \quad (35.2)$$

Czy w tym zadaniu wszystko jest zrozumiałe?

Czytelnik A: Tak, teraz już włem, jak rozwiązuje się takie zadania.

Autor: Ciekawe są zadania dotyczące drgań naładowanego wahadła, umieszczonego wewnątrz kondensatora płaskiego. Oto jedno z nich.

Kulka o masie m i ładunku q jest zawieszona na cienkiej nici o długości l wewnątrz kondensatora płaskiego o płytach ustawionych poziomo. Natężenie pola wewnątrz kondensatora jest równe E , linie pola mają zwrot do dołu (rys. 35.3a). Należy znaleźć okres drgań wahadła.



Rys. 35.3

Czytelnik B: Ponieważ w danym wypadku linie pola elektrostatycznego i pola grawitacyjnego mają te same kierunki i zwroty, to mogę skorzystać z wyniku (14.2) na okres drgari zwykłego wahadła, zamieniwszy w nim przyspieszenie g na arytmetyczną sumę przyspieszeń ($g + \frac{Eq}{m}$). Tak więc poszukiwany okres drgari wynosi:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{Eq}{m}}}. \quad (35.3)$$

Autor: Całkiem słusznie. Jak widzicie, zadanie to jest bardzo proste. pod warunkiem, że umiemy się posłużyć analogią między ruchem w jednorodnym polu elektrostatycznym a ruchem w jednorodnym polu grawitacyjnym.

Czytelnik A: Wzór (35.3) pod względem swojej struktury jest podobny do wzoru (15.1).

Autor: Tak. Tylko że we wzorze (15.1) do g dodano składnik związany z przyspieszeniem układu (odniesienia), w którym znajdowało się proste wahadło grawitacyjne, a teraz ten dodatkowy składnik we wzorze (35.3) jest związany z występowaniem dodatkowego oddziaływania. Jak się zmieni wzór (15.3), jeśli ulegnie zmianie znak ładunku na płytach kondensatora?

Czytelnik A: W tym wypadku okres drgari będzie równy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - \frac{Eq}{m}}}. \quad (35.4)$$

(Autor: Dobrze. A co się będzie działo z okresem drgari wahadła, jeżeli będziemy zwiększać stopniowo natężenie pola elektrycznego wewnątrz kondensatora?

Czytelnik A: Okres drgari wahadła będzie wzrastał, dając do nieskończoności przy zbliżaniu się wartości E do $E = \frac{mg}{q}$. Jeżeli w dalszym ciągu będziemy zwiększać natężenie pola E , to wtedy należałoby umocować nić nie przy górnej, ale przy dolnej płycie kondensatora.

Autor: Jaką postać będzie miał wzór na okres drgari wahadła w tym wypadku?

Czytelnik A: Ten wzór będzie miał postać

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\frac{Eq}{m} - g}}. \quad (35.5)$$

Autor: Dobrze. A teraz skomplikujmy nasze zadanie:

Rozpatrzmy drgania wahadła z naładowaną kulką, umieszczonego wewnątrz kondensatora, który ma płyty ustawione nie pionowo, lecz pionowo (rys. 35.3b). W tej sytuacji przyspieszenia \vec{g} i $\frac{\vec{F}_e}{m}$ skierowane są względem siebie pod kątem prostym.

Tak jak poprzednio należy znaleźć okres T drgań wahadła, a także kąt a , który tworzy z pionem kierunek nici wahadła znajdującego się w położeniu równowagi.

Czytelnik B: Rozwiązuje to zadanie, uwzględniając rozważania przytoczone w tym paragrafie i w paragrafie 15. Wynikają z nich

następujące wnioski: 1) okres drgari zależy od przyspieszenia efektywnego \bar{g}_{ef} , będącego sumą wektorów przyspieszeń spowodowanych działaniem pola grawitacyjnego i pola elektrostatycznego; 2) kierunek nici wahadła w położeniu równowagi jest taki sam jak kierunek wektora przyspieszenia efektywnego (kierunek ten zaznaczono na rys. 35.3 linią kreskową). Tak więc

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g^2 + \left(\frac{Eq}{m}\right)^2}}, \quad (35.6)$$

$$\operatorname{tga} = \frac{Eq}{mg}. \quad (35.7)$$

Autor: Zupełnie słusznie. Myślę, że teraz już nie sprawi warn kłopotu rozpatrzenie uogólnionego zadania, gdy płyty kondensatora tworzą z poziomem kąt β (rys. 35.3c). Polecenie jest takie samo:

Znaleźć okres drgań i kąt α między pionem i kierunkiem nici wahadła w położeniu równowagi.

Czytelnik B: Tak jak poprzednio, efektywne przyspieszenie jest sumą wektorową przyspieszenia spadania swobodnego i tego, które jest spowodowane działaniem pola elektrycznego, kierunek zaś położenia równowagi nici wahadła jest taki sam jak kierunek przyspieszenia efektywnego. Wartość \bar{g}_{ef} można wyznaczyć, stosując znane z trygonometrii twierdzenie kosinusów (par. 13):

$$g_{\text{ef}}^2 = g^2 + \left(\frac{Eq}{m}\right)^2 + 2g \frac{Eq}{m} \cos\beta.$$

Wobec tego,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g^2 + \left(\frac{Eq}{m}\right)^2 + 2g \frac{Eq}{m} \cos\beta}}. \quad (35.8)$$

Wartość tga można wyznaczyć następująco:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{g_{\text{ef}}}{g_{\text{sw}}} = \frac{\frac{Eq}{m} \sin\beta}{g + \frac{Eq}{m} \cos\beta}. \quad (35.9)$$

Autor: Uzyskałeś poprawną odpowiedź. Oczywiście dla $\beta = 0^\circ$ powinna ona prowadzić do wyników uzyskanych dla płyt ustawionych poziomo, a dla $\beta = 90^\circ$ — ustawionych pionowo. Przekonaj się o tym.

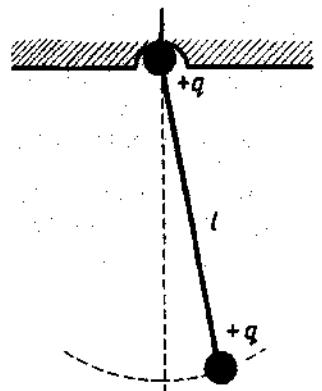
Czytelnik B: Jeżeli $ft = 0$, to $\cos\beta = 1$, a $\sin\beta = 0$, Wtedy wzór (35.8) przechodzi w (35.3), a $\operatorname{tga} = 0$ (w położeniu równowagi nie przyjmuje położenie pionowe). Jeśli zaś $\beta = 90^\circ$, to $\cos\beta = 0$, a $\sin\beta = 1$. Wówczas wyrażenie (35.8) przechodzi w (35.6), a wzór (35.9) w (35.7).

Autor: W ten sposób zadanie dotyczące drgania naładowanego wahadła wewnątrz kondensatora płaskiego zostało rozwiązane. Na zakończenie chcę zaproponować następujący problem:

Obliczyć okres drgań wahadła, którego kulka ma ładunek $+q$, a w punkcie umocowania nici znajduje się jeszcze jeden dokładnie taki sam ładunek (rys. 35.4) (nie ma żadnych kondensatorów).

Czytelnik A: Zgodnie z prawem Coulomba, kulka jest odpychana od punktu zawieszenia siłą $k \frac{q^2}{l^2}$. Siła ta nadaje kulce przyspieszenie $k \frac{q^2}{l^2 m}$. We wzorze na okres drgari wahadła trzeba to przyspieszenie uwzględnić. W wyniku otrzymuję następujące wyrażenie:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + k \frac{q^2}{l^2 m}}}. \quad (35.10) \quad \text{Rys. 35.4}$$



Autor (do Czytelnika B): Czy zgadzasz się z takim wynikiem?

Czytelnik B: Nie, nie zgadzam się. Aby wzór (35.10) był słuszny, przyspieszenie $k \frac{q^2}{l^2 m}$ powinno być przez cały czas zwrócone pionowo w dół. W rzeczywistości jest ono tak zwrócone tylko w chwili

przechodzenia wahadła przez położenie równowagi. Dlatego wzór (35.10) w żadnym wypadku nie może być słuszny. Jednak nie wiem, jaki jest poprawny wynik.

Autor: Dobre jest już samo zrozumienie, że wzór (35.10) jest błędny.

W danym wypadku siła elektryczna przez cały czas jest skierowana wzdłuż nici i dlatego jest stale równoważona przez siłę reakcji nici.

Wynika stąd, że siła elektryczna nie prowadzi do pojawięcia się (dodatkowej) siły zwrotnej i w takim razie nie może mieć wpływu na okres drgań wahadła.

Czytelnik B: Czy to znaczy, że w danym zadaniu okres drgań jest opisany wzorem (14.12), słusznym dla wahadła nie naładowanego?

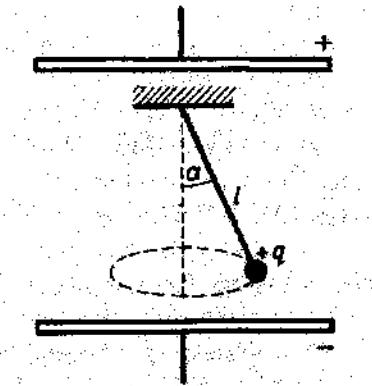
Autor: Dokładnie tak. Pole elektrostatyczne nie jest tu jednorodne i nie można dopatrywać się jakichkolwiek analogii do jednorodnego pola grawitacyjnego.

Zadania

- 35.1. Elektron wlatuje do kondensatora płaskiego równolegle do jego płyt w odległości $d = 4$ cm od płyty naładowanej dodatnio; długość płyty $/ = 15$ cm. Po jakim czasie t elektron uderzy w tę płytę, jeżeli natężenie pola w kondensatorze $E = 500 \frac{V}{mm}$? Z jaką minimalną prędkością v_0 powinien wlatywać elektron, aby nie uderzył w płytę? Masa elektronu $m = 9 \cdot 10^{-28}$ g, ładunek $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.
- 35.2. Elektron wlatuje do kondensatora płaskiego równolegle do jego płyt z prędkością $v_0 = 3 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$. Oblicz natężenie E pola w kondensatorze, jeżeli elektron wylatuje pod kątem $a = 30^\circ$ do płyt. Długość płyty $/ = 20$ cm. Znane są: masa m i ładunek e elektronu (zadanie 35.1).
- 35.3. Dwie kulki o masach m_1 i m_2 oraz ładunkach $+q_1$ i $+q_2$ związane są nicią przerzuconą przez nieruchomy blok. Oblicz przyspieszenie a kulek i siłę naprężenia F_n nici, jeżeli cały układ znajduje się w jednorodnym polu elektrostatycznym o natężeniu E , którego linie pola są zwrócone pionowo w dół. Pomyśl o oddziaływanie między kulkami.

- 35.4. W kondensatorze płaskim wytworzone zostało pole o natężeniu E . W polu tym obraca się jednostajnie kula zawieszona na nici o długości $/$ (rys. 35.5). Kąt odchylenia nici od pionu jest równy a . Znajdź siłę naprężenia F_n nici i energię kinetyczną E_k kulki.

Rys. 35.5



- 35.5. W jednorodnym polu elektrostatycznym o natężeniu E , którego linie mają kierunek i zwrot pionowy do góry, może obracać się kula o masie m i ładunku $+q$ w płaszczyźnie pionowej na nici o długości $/$. Jaką poziomo skierowaną prędkość należy nadać kulce w górnym położeniu, aby siła naprężenia nici w dolnym położeniu była $n = 10$ razy większa niż siła ciężkości kulki?

36. Czy umiesz stosować prawo Coulomba?

Autor: Zajmiemy się trochę dokładniej prawem Coulomba i zadaniami związanymi z jego zastosowaniem. Przede wszystkim proszę o sformułowanie tego prawa.

Czytelnik B: Siła oddziaływanego dwóch ładunków jest proporcjonalna do iloczynu wartości tych ładunków i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi.

Autor: Twoje sformułowanie jest niewystarczające, niepełne.

Czytelnik B: Z pewnością trzeba dodać, że siła oddziaływanego jest odwrotnie proporcjonalna do przenikalności elektrycznej i ośrodka.

Autor: To uzupełnienie oczywiście jest potrzebne. Jednak istota rzeczy polega na czym innym. Znowu zapominasz, że siła jest wielkością wektorową. Mówiąc o wartości siły, pamiętaj, że należy

jednocześnie określić, jaki jest jej kierunek (w związku z tym przypomnij sobie omówienie drugiej zasady dynamiki Newtona w par. 5).

Czytelnik A: Zrozumiałem. To znaczy trzeba chyba dodać, że siła wzajemnego oddziaływania ładunków jest skierowana wzdłuż prostej łączącej te ładunki?

Autor: To mało. Wektor siły może mieć dwa różne zwroty.

Czytelnik A: Należy powiedzieć, że ładunki odpychają się, jeżeli są tego samego znaku, i przyciągają, jeżeli mają znaki przeciwe.

Autor: Zgadza się. A teraz jeżeli zbierzecie te uzupełnienia, otrzymacie pełne sformułowanie prawa Coulomba.

Należy jeszcze podkreślić, że odnosi się ono do oddziaływań; ładunków punktowych.

Czytelnik A: Czy można zapisać wzór wyrażający prawo Coulomba tak, aby była w nim zawarta pełna informacja o prawie? Przecież w zwykłym zapisie

$$F = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon_r r^2} \quad (36.1)$$

nie ma informacji o kierunku siły.

Autor: Taki zapis prawa Coulomba jest możliwy. W tym celu trzeba na początku uściślić, o jaką właściwie siłę chodzi. Założmy, że interesuje nas siła, którą ładunek q_1 działa na ładunek q_2 (a nie odwrotnie). Wprowadźmy układ współrzędnych, w którego początku znajduje się ładunek q_1 . Poprowadźmy z początku tego układu wektor \vec{r} do punktu, w którym znajduje się ładunek q_2 . Wektor ten nazywa się wektorem wodzącym (albo promieniem wodzącym) ładunku q_2 . W tym wypadku pełny zapis prawa Coulomba ma następującą postać:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2 \vec{r}}{\epsilon_r r^3}, \quad (36.2)$$

gdzie współczynnik k zależy od wyboru układu jednostek.

Czytelnik A: Ależ w tym wzorze siła jest odwrotnie proporcjonalna nie do kwadratu, lecz do sześcianu odległości między ładunkami!

Autor: Nic podobnego. Przecież wektor \vec{r} co do wartości jest równy jednostce (bezwymiarowej jednostce!). Nazywa się wektorem jednostkowym i służy tylko do wskazania kierunku.

Czytelnik A: Czy to znaczy, że mogę po prostu napisać wzór (36.2), jeżeli ktoś mnie zapyta o prawo Coulomba? I niczego więcej nie trzeba dodawać?

Autor: Trzeba tylko objaśnić sens oznaczeń występujących we wzorze.

Czytelnik A: Co będzie, jeżeli napiszę nie wzór (36.2), ale wzór (36.1)?

Autor: Wtedy powinieneś dodatkowo wskazać kierunek siły kulombowskiej.

Czytelnik A: W jaki sposób we wzorze (36.2) został uwzględniony fakt, że ładunki przyciągają się albo odpychają?

Autor: Jeżeli ładunki są tego samego znaku, to iloczyn $q_1 q_2$ jest dodatni. Wtedy wektor siły \vec{F} ma kierunek i zwrot jak wektor \vec{r} i przyłożony jest do ładunku q_2 . Wynika stąd, że ładunek q_2 jest odpychany przez ładunek q_1 . Jeśli natomiast ładunki mają różne znaki, to iloczyn $q_1 q_2$ jest ujemny i wtedy wektor \vec{F} jest zwrócony przeciwnie do wektora \vec{r} , tj. ładunek q_2 jest przyciągany przez ładunek q_1 .

Rozwiążmy kilka zadań dotyczących prawa Coulomba.

Zadanie 1

Cztery jednakowe ładunki q umieszczone są w wierzchołkach kwadratu. Jaki ładunek Q o znaku przeciwnym należy umieścić w środku kwadratu, aby, cały układ ładunków znajdował się w równowadze?

Czytelnik A: W układzie jest pięć ładunków — cztery znane i jeden poszukiwany. Ponieważ układ znajduje się w równowadze, to suma sił przyłożonych do każdego z pięciu ładunków jest równa zeru. Innymi słowy, trzeba rozpatrzyć warunki równowagi dla każdego z pięciu ładunków.

Autor: To zbędna praca. Nietrudno sobie wyobrazić, że ładunek Q będzie znajdował się w równowadze, niezależnie od jego wartości, ze względu na samą geometrię położenia. Dlatego warunek równowagi dla tego ładunku niczego do zadania nie wnosi. Pozostałe cztery ładunki q z powodu symetrii kwadratu znajdują się w położeniach całkowicie równoważnych. Wystarczy zatem rozpatrzyć warunek równowagi tylko dla jednego / tych ładunków. nieważne

którego. Wybierzmy na przykład ładunek w punkcie A (rys. 36.1). Jakie siły działają na ten ładunek?

Czytelnik A: Siła \vec{F}_1 pochodząca od ładunku znajdującego się w punkcie B , siła \vec{F}_2 od ładunku w punkcie D i w końcu siła ze strony poszukiwanego ładunku, znajdującego się w środku kwadratu.

Autor: A dlaczego nie uwzględniłeś siły pochodzącej od ładunku w punkcie C ?

Czytelnik A: Przecież jest on „odgrodzony” przez ładunek w środku kwadratu.

Autor: Twój błąd jest dosyć naiwny. Zapamiętaj: w układzie ładunków na każdy z nich działają siły ze strony wszystkich ładunków wchodzących do układu. Należy więc dodać jeszcze siłę \vec{F}_3 pochodzącą od ładunku umieszczonego w punkcie C . Końcowy obraz sił pokazano na rysunku 36.1.

Czytelnik A: Dalej wszystko jest proste. Wybiorę kierunek AC i przeprowadzę rzutowanie na ten kierunek wszystkich sił przyłożonych do ładunku w punkcie A . Algebraiczna suma rzutów sił jest równa zeru, tj.

$$F_4 = 2F_1 \cos 45^\circ + F_3.$$

Po oznaczeniu boku kwadratu przez a powyższe równanie możemy zapisać w postaci

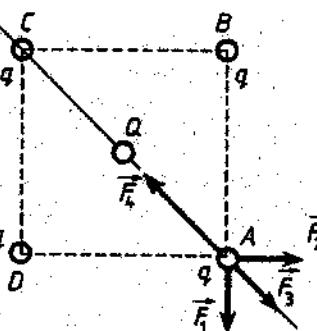
$$\frac{Qq}{a^2} = \sqrt{2} \frac{q^2}{a^2} + \frac{q^2}{2a^2}.$$

Stąd znajdujemy

$$Q = \frac{q}{4}(2\sqrt{2} + 1).$$

Autor: Zgadza się. A jak myślisz:

Czy równowaga układu ładunków będzie równowagą trwałą?



Rys. 36.1

Czytelnik B: Nie, nie będzie. Jest to równowaga nietrwała. Wystarczy lekkie przesunięcie jednego z ładunków, a wszystkie ładunki zaczną się poruszać i układ ulegnie zburzeniu.

Autor: Masz rację. Okazuje się, że w ogóle nie można utworzyć takiego układu nieruchomych ładunków, który istniałby w stanie równowagi trwałej.

Zadanie 2

dwie kulki o jednakowych masach i promieniach naładowano jednakowymi ładunkami i zawieszono w jednym punkcie na niciach o jednakowej gęstości substancji kulki p , aby kat rozchylenia nici w powietrzu

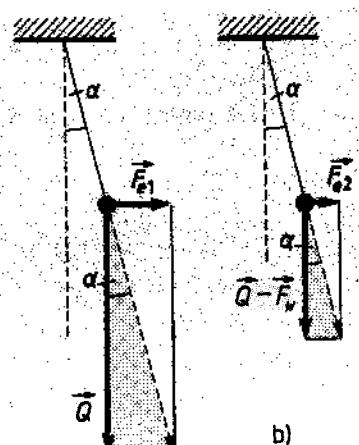
Czytelnik B: Rozchylenie nici jest spowodowane kulombowskim odpychaniem się kulek. Niech F_{e1} będzie kulombowską siłą odpychania w powietrzu, \vec{F}_{e2} — w ciekłym dielektryku.

Autor: Jaka jest różnica między tymi siłami?

Czytelnik B: Ponieważ zgodnie z warunkiem zadania kat rozchylenia nici w obydwu wypadkach jest taki sam, więc jednakowa jest również odległość między kulkami. Wobec tego siła \vec{F}_{e1} różni się od siły \vec{F}_{e2} tylko występowaniem względnej przewinialności elektrycznej ϵ_r :

$$F_{e1} = \epsilon_r F_{e2}. \quad (36.3)$$

Rozpatrzmy sytuację, gdy kulki znajdują się w powietrzu. Wiedząc, iż kulki są w równowadze, wnioskujemy, że suma siły \vec{F}_{e1} i siły ciężkości \vec{Q} (suma wektorowa!) powinna być skierowana wzduż nici, gdyż w innej sytuacji nie mo-



Rys. 36.2

gławby być zrównoważona przez siłę reakcji nici (rys. 36.2a). Stąd wynika, że

$$\frac{F_e}{Q} = \operatorname{tg} \alpha,$$

gdzie α — kąt między nicią i pionem. Gdy kulki są zanurzone w dielektryku, siłę F_{e1} należy zastąpić siłą F_{e2} , a Q trzeba zastąpić siłą $(Q - F_w)$, gdzie F_w — siła wyporu. Jednak stosunek nowych sił powinien być, jak poprzednio, równy tga (rys. 36.2b):

$$\frac{F_{e2}}{Q - F_w} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Z ostatnich dwóch równań otrzymujemy:

$$\frac{F_{e1}}{Q} = \frac{F_{e2}}{Q - F_w}.$$

Podstawiając tutaj (36.3) i uwzględniając, że $Q = Vgp$ oraz

$$F_w = Vg\rho_0,$$

znajdujemy

$$\frac{\rho_r}{\rho} = \frac{1}{\rho - \rho_0},$$

skąd poszukiwana gęstość

$$\rho = \rho_0 \frac{\rho_r}{\rho_r - 1}.$$

Autor: Twoja odpowiedź jest bezbłedna.

Zadanie 3

Dwie jednakowo naładowane kulki o masach m zawieszone w jednym punkcie na niciach o jednakowej długości l . W punkcie zawieszenia znajduje się trzecia kulka naładowana tak samo jak dwie pierwsze (rys. 36.3). Obliczyć ładunek q kulek, jeżeli kąt między nimi w położeniu równowagi jest równy α .

Czytelnik B: Weźmy pod uwagę kulkę A . Do kulki przyłożone są cztery siły (rys. 36.3). Ponieważ kulka znajduje się w równowadze więc rozłożę te siły na dwa kierunki...

Autor (przerywając): W tej sytuacji można postąpić prościej. Siła ze strony ładunku znajdującej się w punkcie zawieszenia nie wywiera żadnego wpływu na położenie nici w stanie równowagi: siła \vec{F}_{e2} działa wzdłuż nici i w dowolnym jej położeniu jest równoważona przez siłę reakcji nici. Dlatego zadanie to można rozwiązywać tak, jak gdyby ładunku q w punkcie zawieszenia w ogóle nie było. Z reguły osoby przystępujące do egzaminu nie rozumują w ten sposób.

Czytelnik B: W takim razie nie będziemy brać pod uwagę siły \vec{F}_{e2} . Ponieważ wektorowa suma sił \vec{F}_{e1} i Q powinna być skierowana wzdłuż nici, to

$$\frac{F_{e1}}{Q} \approx \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (36.4)$$

Autor: Zwróć uwagę, że wynik (36.4) nie zależy od obecności ładunku w punkcie zawieszenia.

Czytelnik B: Ponieważ

$$F_{e1} = \frac{kq^2}{4l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}},$$

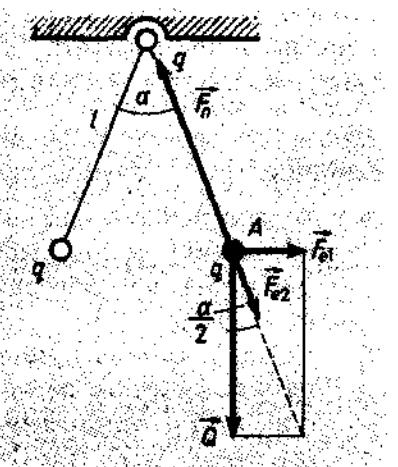
to na podstawie (36.4) otrzymujemy

$$\frac{kq^2}{4l^2 mg \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Stąd dochodzimy do poszukiwanego wyniku:

$$q = 2 / \sin * \sqrt{\frac{mg}{k} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Autor: Wynik ten jest poprawny.



Rys. 36.3

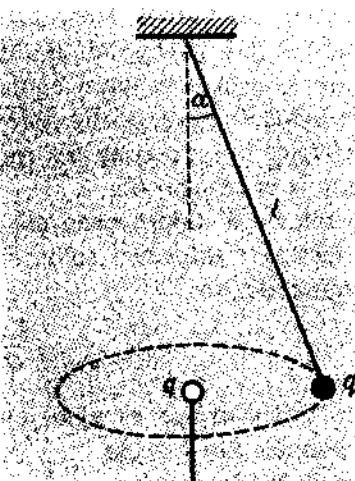
Czytelnik A: W jakiej sytuacji obecność ładunku w punkcie zawieszenia ma istotne znaczenie?

Autor: Na przykład wtedy, kiedy należy znaleźć siłę naprężenia nici.

Zadania

36.1. W wierzchołkach sześciokąta foremnego umieszczono jednakowe ładunki q . Jaki ładunek Q należy umieścić w środku sześciokąta, aby cały układ ładunków znajdował się w stanie równowagi?

36.2. Kulka o masie m i ładunku q zawieszona na nici o długości l obraca się wokół nieruchomego ładunku, takiego samego jak ładunek kulki (rys. 36.4). Kąt między nicią i pionem jest równy α . Znajdź prędkość kątową ω jednostajnego ruchu obrotowego kulki i siłę naprężenia F_n nici.



Rys. 36.4

36.3. Kulka o masie m i ładunku q może obracać się w płaszczyźnie pionowej na nici o długości l . W środku obrotu znajduje się druga kulka o ładunku równym co do wartości i znaku ładunkowi obracającej się kulki. Jaką minimalną prędkość v skierowaną poziomo trzeba nadać kulce w dolnym położeniu, aby mogła wykonać pełny obrót?

37. Czy znasz prawo Ohma?

Prąd elektryczny jest tak wszechobecny w naszym życiu, że nie ma żadnej potrzeby wykazywać, jak ważne znaczenie mają prawa Ohma i Joule'a-Lenza. Jednak czy dobrze znasz te prawa?

Autor: Czy znasz prawo Ohma?

Czytelnik A: Tak, oczywiście. Myślę, że prawo Ohma znają wszyscy. Sądzę, że to najprostsze pytanie w całym kursie fizyki.

Autor: Sprawdźmy to.

Na rysunku 37.1 jest przedstawiony odcinek obwodu elektrycznego. \mathcal{E} oznacza siłę elektromotoryczną; jest ona skierowana w prawą stronę; R_1 i R_2 — opory elektryczne; r — opór wewnętrznego źródła siły elektromotorycznej; V_A i V_B — potencjały na końcach odcinka obwodu. Prąd przepływa przez ten odcinek w prawą stronę. Należy znaleźć natężenie I tego prądu.

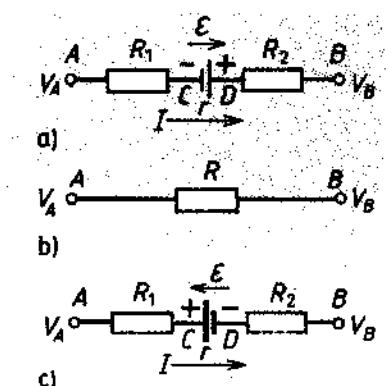
Czytelnik A: Przecież ma Pan otwarty obwód!

Autor: Dałem ci pod uwagę odcinek jakiegoś dużego obwodu. Całego obwodu nie znasz, ale nie musisz go znać, jeśli dane są potencjały na końcach tego odcinka.

Czytelnik A: Poprzednio rozpatrywaliśmy tylko obwód elektryczny zamknięty. Dla niego prawo Ohma ma postać

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad (37.1)$$

Autor: Mylisz się. Miałeś także okazję rozpatrywać właśnie odcinek obwodu. Zgodnie z prawem Ohma dla odcinka obwodu natężenie prądu jest równe stosunkowi napięcia między końcami tego odcinka do jego oporu.



Rys. 37.1

Czytelnik A: Ale czy to jest odcinek obwodu?

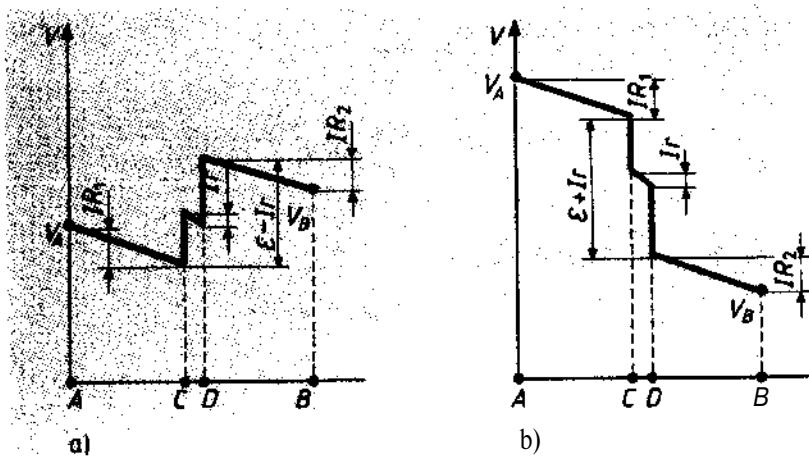
Autor: Oczywiście. Ten odcinek obwodu przedstawiono na rysunku 37.1b. Prawo Ohma dla niego możesz zapisać w postaci

$$I = \frac{V_A - V_B}{R}, \quad (37.2)$$

przy tym w miejscu różnic potencjałów ($V_A - V_B$) na końcach odcinka poprzednio stosowałeś prostszy termin „napięcie” i oznaczałeś je symbolem U .

Czytelnik A: Jednak odcinka obwodu w takiej postaci jak na rysunku 37.1a nie rozpatrywaliśmy.

Autor: Tak więc, zaczynę od stwierdzenia, że znasz prawo Ohma dla obwodu zamkniętego i dla najprostszego odcinka, nie zawierającego siły elektromotorycznej. Jednak ogólnego prawa Ohma nie znasz. Zaczniemy zastanawiać się wspólnie. Na rysunku 37.2a przedstawiono zmianę potencjału wzdłuż danego odcinka obwodu. Prąd płynie w prawą stronę, dlatego od punktu A do B potencjał maleje. Spadek potencjału na oporze R_1 jest równy IR_1 . Następnie założymy, że w punktach C i D znajdują się elektrody ogniw galwanicznego. W tych warunkach zachodzi skok potencjału do góry; mianowicie suma skoków jest równa \mathcal{E} , czyli wartości siły elektromotorycznej. Ponadto między punktami C i D potencjal



Rys. 37.2

spada na oporze wewnętrznym ogniw; spadek potencjału jest równy Ir . W końcu od punktu D do B potencjał spada na oporze R_2 i spadek ten wynosi IR_2 .

Suma spadków potencjału na wszystkich oporach odcinka minus skok potencjału do góry równy \mathcal{E} to jest właśnie różnica potencjałów na końcach rozpatrywanego odcinka obwodu:

$$I(R_1 + R_2 + r) - \mathcal{E} = V_A - V_B,$$

skąd otrzymujemy wyrażenie na natężenie prądu, tj. prawo Ohma dla danego odcinka obwodu

$$I = \frac{\mathcal{E} + (V_A - V_B)}{R_1 + R_2 + r}. \quad (37.3)$$

Zwróć uwagę na to, że z powyższego wzoru bezpośrednio się otrzymuje znane ci przypadki szczególnego. Dla najprostszego odcinka bez siły elektromotorycznej należy w (37.3) podstać $\mathcal{E} = 0$ i $r = 0$. Wtedy otrzymujemy

$$I = \frac{V_A - V_B}{R_1 + R_2},$$

co odpowiada wzorowi (37.2). Dla obwodu zamkniętego końce A i B naszego odcinka należy połączyć. Oznacza to, że $V_A = V_B$. Stąd otrzymujemy

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + r},$$

co odpowiada wzorowi (37.1).

Czytelnik: Faktycznie, nie znałem prawa Ohma.

Autor: Ścisłej mówiąc, znałeś je w przypadkach szczególnych.

Przypuśćmy, że do zacisków ogniw, które jest elementem odcinka obwodu przedstawionego na rysunku 37.1a, został przyłączony voltmierz. Założymy, że voltmierz ma dostatecznie duży opór zewnętrzny, aby można było pominąć zaktóreń związane z jego połączeniem. Co pokażę voltmierz?

Czytelnik: Wiem, że voltmierz przyłączony do zacisków ognia powinien pokazywać spadek potencjałów w obwodzie zewnętrznym. Jednak my nie znamy obwodu zewnętrznego.

Autor: Okazuje się, że można z powodzeniem obejść się bez znajomości obwodu zewnętrznego. Jeżeli woltomierz jest przyłączony do obwodu w punktach C i D , będzie pokazywał różnicę potencjałów w tych punktach. Myślę, że jest to dla ciebie zrozumiałe?

Czytelnik A: Tak, oczywiście.

Autor: Teraz popatrz na rysunek 37.2a. Widać z niego, że różnica potencjałów w punktach C i D jest równa ($\mathcal{E} - Ir$). Jeśli wskazanie woltomierza oznaczymy przez U , otrzymamy wzór

$$U = \mathcal{E} - Ir. \quad (37.4)$$

Radzę posługiwać się właśnie tym wzorem, gdyż tutaj nie trzeba znać żadnych oporów zewnętrznych. Jest to szczególnie cenne dla obwodów bardziej skomplikowanych. Zauważmy, że z (37.4) wynika, iż jeżeli obwód jest otwarty i w konsekwencji prąd nie płynie ($I = 0$), to $U = \mathcal{E}$. Wtedy wskazanie woltomierza zgadza się z wartością \mathcal{E} . Czy wszystko jest zrozumiałe?

Czytelnik A: Tak, teraz już to rozumiem.

Autor: Jako sprawdzian zadam ci pytanie, na które egzaminowani dość często nie potrafią odpowiedzieć.

Obwód zamknięty składa się z n połączonych szeregowo jednokowych ogniw o sile elektromotorycznej równej \mathcal{E} i o oporze wewnętrznym r . Zakłada się, że opór przewodów połączeniowych jest równy zeru. Co wskaże woltomierz przyłączony do zacisków jednego z ogniw? Jak zwykle należy przyjąć, że przez woltomierz prąd nie przepływa.

Czytelnik A: Będę rozumował analogicznie jak w poprzednim objaśnieniu. Woltomierz wskaże $U = \mathcal{E} - Ir$. Z prawa Ohma dla danego obwodu zamkniętego znajdujemy natężenie prądu: $I = \frac{\mathcal{E}}{nr} = \frac{\mathcal{E}}{r}$.

Korzystając z tego wyniku, otrzymujemy $U = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{r}r = 0$. Tak więc woltomierz niczego nie wskaże.

Autor: Masz zupełną rację. Tylko pamiętaj, że sytuacja ta była wyidealizowana: z jednej strony pominęliśmy opór przewodów połączeniowych, / drugiej strony przyjęliśmy, że opór woltomierza

jest nieskończonie wielki, a więc lepiej nie próbuj sprawdzać tego wyniku doświadczalnie.

Rozpatrzmy sytuację, gdy prąd płynący przez odcinek obwodu i siła elektromotoryczna zwrócone są przeciwnie (rys. 37.1c). Narysuj zmianę potencjału wzdłuż takiego odcinka.

Czytelnik A: Czyżby prąd mógł płynąć przeciwnie do siły elektromotorycznej?

Autor: Zapominasz, że masz przed sobą tylko odcinek obwodu.

W tym obwodzie mogą być inne źródła siły elektromotorycznej, nie należące do rozpatrywanego odcinka, pod wpływem których prąd w danym odcinku może płynąć przeciwnie do zwrotu siły elektromotorycznej źródła należącego do tego odcinka.

Czytelnik A: Rozumiem. Jeżeli prąd płynie w prawo, to od punktu A do C zachodzi spadek potencjału o IR_1 . Ponieważ \mathcal{E} jest teraz zwrócona przeciwnie, to skoki potencjału w punktach C i D powinny nie podwyższać, ale przeciwnie, obniżać potencjał. Od punktu C do punktu D potencjał spada o Ir ; od punktu D do B — o IR_2 . W wyniku dochodzimy do wykresu przedstawionego na rysunku 37.2b.

Autor: Jak zapiszesz teraz prawo Ohma?

Czytelnik A: Będzie ono miało postać

$$U = \frac{(V_A - V_B) - \mathcal{E}}{R_1 + R_2 + r} \quad (37.5)$$

Autor: Zgadza się. A jakie będzie wskazanie woltomierza?

Czytelnik A: Z rysunku 37.2b widać, że wynosi ono

$$U = \mathcal{E} + Ir. \quad (37.6)$$

Autor: Zupełnie słusznie. Rozwiążemy następujące zadanie.

Schemat obwodu elektrycznego przedstawiono na rysunku 37.3. Dane: $r = 1\Omega$, $R = 10\Omega$, opór woltomierza $R_V = 200\Omega$. Obliczyć względny błąd wskazania tego woltomierza, w porównaniu ze wskazaniem woltomierza (idealnego), którego doliczenie nie zakłóciłoby stanu mierzzonego obwodu.

Oznaczmy wskazanie realnego woltomierza przez U , a woltomierza idealnego o nieskończonym wielkim oporze — przez U_∞ . Poszukiwany względny błąd

$$f = \frac{U_\infty - U}{U_\infty} = 1 - \frac{U}{U_\infty}. \quad (37.7)$$

Następnie weźmiemy pod uwagę, że

$$\mathcal{E} = R + r; \quad (37.8)$$

$$U = \frac{\frac{r}{R+r} \mathcal{E}}{R+r} = \frac{R R_V}{R+r+R_V}. \quad (37.9)$$

Podstawiając prawe strony równań (37.8) i (37.9) do (37.7). otrzymujemy

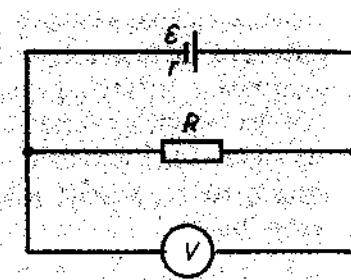
$$f = \frac{R_V(R+r)}{(R+R_V)r+RR_V} - \frac{R_V(R+r)}{(r+R)R_V+rR} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{rR}{(r+R)R_V}}.$$

Ponieważ $R_V \gg R$ i $(R+r) > r$, ułamek w mianowniku po prawej stronie ostatniej równości jest znacznie mniejszy od jedności. Dlatego można posłużyć się wzorem przybliżonym, który powinniście zapamiętać:

$$(1+\lambda)^\alpha \approx 1 + \alpha\lambda, \quad (37.10)$$

słuszny dla $\lambda \ll 1$ i dla dowolnego α (całkowitego i ułamkowego, dodatniego i ujemnego). Skorzystamy z wzoru (37.10), podstawiając w nim $\alpha = -1$, $\lambda = \frac{rR}{(r+R)R_V}$. W wyniku prostych obliczeń otrzymujemy

$$f = \frac{rR}{(r+R)R_V}. \quad (37.11)$$



Rys. 37.3

Podstawiając do (37.11) wartości podane w zadaniu, otrzymujemy, że poszukiwany błąd $f \approx \frac{1}{220} = 0,0045$.

Czytelnik A: Czy to oznacza, że im większy jest opór woltomierza w porównaniu z oporem zewnętrznym, tym mniejszy jest wymieniony błąd? Czy to znaczy, że z tym większym uzasadnieniem można pomijać zakłócenia w obwodzie w wyniku przyłączenia woltomierza?

Autor: Tak, właśnie tak. Tylko trzeba uwzględnić, że nierówność $R \ll R_V$ jest warunkiem dostatecznym, ale nie koniecznym w uzyskaniu małego błędu f . Z (37.11) widać, że błąd f jest mały także wtedy, gdy spełniony jest warunek $r \ll R_V$, tj. opór woltomierza jest dużo większy od oporu wewnętrznego źródła prądu. Przy tym opór zewnętrzny może być dowolnie wielki.

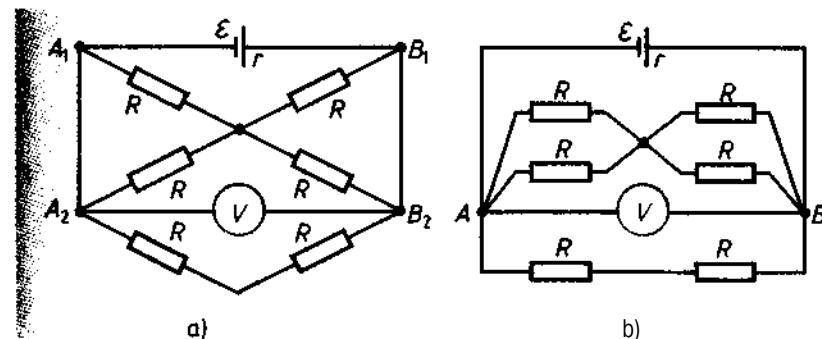
Obwód elektryczny jest przedstawiony na rysunku 37.4a. Dane:

$E = 6V$, $r = \frac{2}{3}\Omega$, $R = 2\Omega$. Obliczyć wskazanie woltomierza.

Czytelnik A: Czy można przyjąć, że opór woltomierza jest nieskończonym wielki?

Autor: Tak, tym bardziej, że nie podano go w zadaniu. Oprócz tego należy pominąć opór przewodów połączeniowych.

Czytelnik A: Ale wtedy prąd, jak myślę, nie popłynie przez oporniki znajdujące się w środkowej części obwodu, a popłynie bezpośrednio przez odcinki A_1A_2 i B_1B_2 ?



Rys. 37.4

Autor: Nie masz racji. Zanim zajmiemy się prądami, radziłbym nieco uprościć schemat. Ponieważ odcinki A_1A_2 i B_1B_2 nie mają oporu, stąd wynika, że $V_{A_1} = V_{A_2}$ i $V_{B_1} = V_{B_2}$. Następnie można będzie skorzystać z reguły:

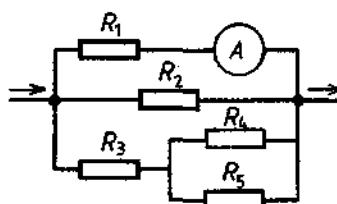
Jeżeli w obwodzie jakieś dwa punkty mają jednakowe potencjały, można te punkty sprowadzić do jednego punktu, przy czym prądy płynące przez opory pozostaną takie, jakie były poprzednio.

Zastosujemy tę regułę do naszego zadania: sprowadzimy punkt A_1 do punktu A_2 i punkt B_1 do punktu B_2 . W wyniku otrzymamy obwód przedstawiony schematycznie na rysunku 37.4b. Mając ten schemat, zadanie można rozwiązać już bez kłopotu. Dlatego od razu podam wynik końcowy: woltomierz wskaże 4 V. Obliczeń nie podaję, abyś mógł je wykonać samodzielnie.

Zadania

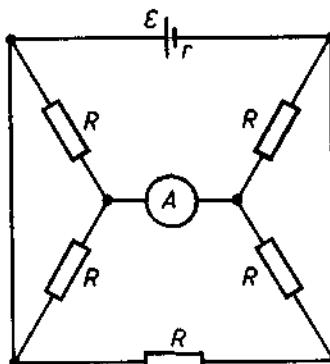
37.1. Amperomierz włączony w odcinek obwodu (rys.

37.5) wskazuje $I_1 = 0,5$ A. Oblicz natężenie I_4 prądu płynącego przez opór R_4 , jeżeli $R_1 = R_4 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = R_5 = 10\Omega$.



Rys. 37.5

37.2. Obwód elektryczny jest przedstawiony na rysunku 37.6. Dane są: $\mathcal{E} = 4V$, $r = 1\Omega$, $R = 2\Omega$. Oblicz wskazanie amperomierza.



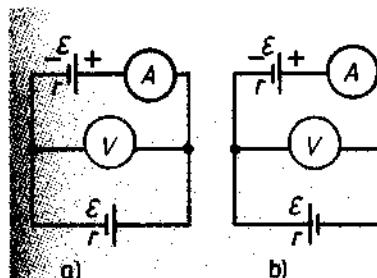
Rys. 37.6

37.3. Opór galwanometru jest równy $R_g = 0,2\Omega$. Równolegle do niego dołączono boczniak o oporze $R_b = 0,005\Omega$. Jaki dodatkowy opór R_x należy dołączyć do tego układu, aby opór całkowity był równy R_e ?

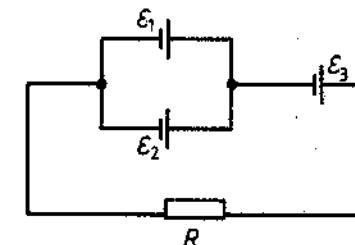
37.4. Do zacisków ogniw o $\mathcal{E} = 10V$ i $r = 1\Omega$ przy-

łączono woltomierz o oporze $R_t = 100\Omega$. Oblicz wskazanie woltomierza oraz względny błąd / jego wskazania w porównaniu ze wskazaniem woltomierza, którego opór jest nieskończonym wielki.

37.5. Co wskażą woltomierz i amperomierz w sytuacjach przedstawionych na rysunku 37.7a,b? Znane są \mathcal{E} i r . Pomiń opór przewodów połączeniowych. Sporządź wykresy zmiany potencjału wzduż tych obwodów.



Rys. 37.7



Rys. 37.8

37.6. W obwód złożony z opornika o oporze $R = 49\Omega$ i źródła prądu o $\mathcal{E} = 10V$ i $r = 1\Omega$ włączono amperomierz o oporze $R_1 = 1\Omega$. Oblicz wskazanie amperomierza oraz względny błąd / jego wskazania w porównaniu z sytuacją, gdy pomiaru dokonujemy amperomierzem (idealnym) o oporze zerowym.

37.7. Trzy źródła prądu są połączone zgodnie z rysunkiem 37.8. Oblicz natężenia prądów płynących przez opór R i przez źródła, jeżeli wiadomo, że $\mathcal{E}_1 = 1,3V$, $\mathcal{E}_2 = 1,5V$, $\mathcal{E}_3 = 2V$, $r_1 = r_2 = r_3 = 0,2\Omega$, $R = 0,55\Omega$.

37.8. Dwa ogniw o $\mathcal{E}_1 = 2V$ i $\mathcal{E}_2 = 3V$ połączono jednakowymi biegunami. Tak uzyskaną baterię ogniw zamknięto zewnętrznym opornikiem o oporze $R = 2\Omega$. Oblicz natężenia prądów przepływających przez opornik i przez ognia. Rozpatrz trzy warianty: 1) opory wewnętrzne ogniw są równe $r_1 = r_2 = 1\Omega$; 2) opory wewnętrzne ogniw są niejednakowe i równe $r_1 = 0,5\Omega$, $r_2 = 1\Omega$; 3) opory wewnętrzne ogniw można pominąć.

38. Czy można włączyć kondensator w obwód prądu stałego?

Autor: Rozwiążemy następujące zadanie.

Dany jest obwód przedstawiony na rysunku 38.1, gdzie C — pojemność kondensatora. Znaleźć ładunek na okładkach kondensatora, jeżeli sila elektromotoryczna źródła prądu jest równa \mathcal{E} , a jego opór wewnętrzny r .

Czytelnik A: Ale czy można w obwód prądu stałego włączyć kondensator? Przecież prąd przez niego nie popłynie.

Autor: Tak, ale za to popłynie w gałęzi równoległej.

Czytelnik A: Zdaje się, że zrozumiałem. Jeśli w obwodzie przedstawionym na rysunku 38.1 prąd nie płynie przez kondensator, to w takim razie nie płynie również przez opór R_1 . W obwodzie zewnętrznym prąd płynie tylko przez opór R_2 . Natężenie prądu znajdujemy ze związków (37.1)

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r},$$

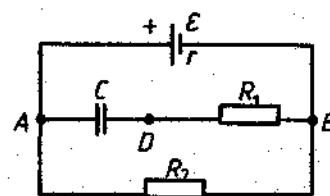
wówczas różnica potencjałów w punktach A i B jest równa napięciu na oporze R_2 , tj.

$$V_A - V_B = IR_2 = \mathcal{E} \frac{R_2}{R_2 + r}. \quad (38.1)$$

Ladunek na okładkach kondensatora wyraża się wzorem

$$(38.2)$$

gdzie U — napięcie między okładkami kondensatora. C — jej pojemność elektryczna. A więc aby znaleźć ładunek, powinieneś



Rys. 38.1

wiedzieć, jaka jest różnica potencjałów w punktach A i D , ale jej nie znam.

Autor: Masz rację, że przez opornik R_1 prąd nie płynie. Ale w takim razie wszystkie punkty tego opornika powinny mieć taki sam potencjał (przypomnij sobie rozważania przeprowadzone w par. 34). To znaczy $V_D = V_B$. Stąd, korzystając z (38.1) i (38.2), otrzymujemy poszukiwany wynik:

$$Q = C \mathcal{E} \frac{R_2}{R_2 + r}.$$

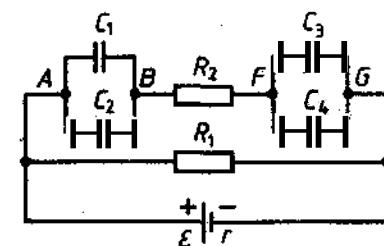
Rozwiążemy następujące zadanie.

Obwód jest przedstawiony na rysunku 38.2, Dane są: $\mathcal{E} = 4 \text{ V}$, $r = 1 \Omega$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $C_1 = 2 \mu\text{F}$, $C_2 = 8 \mu\text{F}$, $C_3 = 4 \mu\text{F}$, $C_4 = 6 \mu\text{F}$. Znaleźć ładunek na okładkach każdego z kondensatorów.

W związku z tym należy przypomnieć sobie reguły dodawania pojemności przy połączeniu równoległym i szeregowym kondensatorów.

Czytelnik B:

Przy równoległym połączeniu kondensatorów ich pojemności się dodaje:



Rys. 38.2

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad (38.3)$$

natomiast przy połączeniu szeregowym dodaje się wielkości, które są odwrotnościami pojemności:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad (38.4)$$

Czytelnik A: Czy nie można by objaśnić, jak otrzymuje się te relacje?

Czytelnik B: Napięcie elektryczne między okładkami kondensatorów połączonych równolegle jest jednakowe; całkowity ładunek równa się sumie ładunków zgromadzonych w poszczególnych konden-

satorach, przy czym zgodnie z (38.2) ładunek każdego kondensatora jest proporcjonalny do jego pojemności. Stąd wynika, że

$$UC = UC_1 + UC_2 + UC_3 + \dots .$$

Tak dochodzimy do wzoru (38.3).

Czytelnik A: Nie rozumiem, jak można dodawać ładunki kondensatorów. Przecież jedna z okładek jest naładowana dodatnio, a druga ujemnie, tak że całkowity ładunek jest równy零.

Czytelnik B: Myślę, że należy dodawać tylko ładunki dodatnie.

Autor: Kondensator — to układ złożony z dwóch przewodników naładowanych ładunkami różnoimiennymi i jednakowymi co do wartości bezwzględnej. Do wzoru (38.2) wchodzi wartość bezwzględna ładunku jednej okładki. Przy równoległym połączeniu kondensatorów połączone są ich okładki naładowane jednoimiennie, zatem ładunek pojedynczego kondensatora zastępczego, o równoważnej pojemności C , jest równy sumie ładunków (na okładce naładowanej dodatnio — suma ładunków dodatnich, na okładce naładowanej ujemnie — suma ładunków ujemnych).

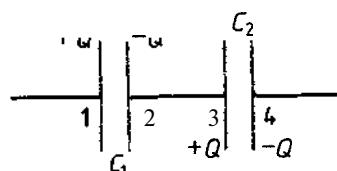
Czytelnik A: Co robić przy szeregowym połączeniu kondensatorów?

Autor: Przy połączeniu szeregowym na wszystkich okładkach kondensatorów ustala się ładunek jednakowy co do wartości bezwzględnej, ponieważ suma ładunków dwóch połączonych ze sobą okładek jest równa zero; potencjał tych okładek jest taki sam. Na przykład okładki 2 i 3 na rysunku 38.3 mają jednakowe co do wartości bezwzględnej, ale różnoimienne ładunki, przy tym $V_2 = V_3$. Aby zastąpić układ wielu kondensatorów połączonych szeregowo jednym kondensatorem o pojemności równoważnej C , należy dodać napięcia, które, jak wiadomo, są odwrotnie proporcjonalne do pojemności:

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots .$$

Stąd otrzymuje się wyrażenie (38.4).

Czytelnik B: Teraz spróbuje rozwiązać sformułowane powyżej



Rys. 38.3

zadanie. Stosując regułę (38.3), znajduję równoważną pojemność między punktami A i B i między punktami F i G :

$$C_{AB} = 2 \mu\text{F} + 8 \mu\text{F} = 10 \mu\text{F}, \\ C_{FG} = 4 \mu\text{F} + 6 \mu\text{F} = 10 \mu\text{F}.$$

Różnicę potencjałów w punktach A i G znajduję jako napięcie na oporze R_1 :

$$V_A - V_G = IR_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r} R_1 = 3 \text{ V}.$$

Oczywiście opór R_2 nie odgrywa tutaj żadnej roli; można go w ogóle nie brać pod uwagę.

Ponieważ $C_{AB} = C_{FG}$, a także ładunki na kondensatorach zastępczych są jednakowe (gdyż jest to połączenie szeregowe), to jednakowe są również napięcia na tych kondensatorach:

$$V_A - V_B = V_F - V_G = 1,5 \text{ V}.$$

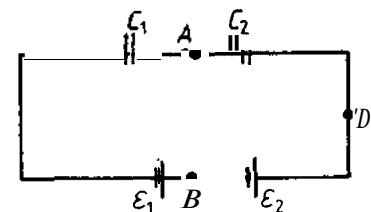
Następnie znajduję poszukiwane ładunki:

$$Q_1 = C_1(V_A - V_B) = 3 \mu\text{C}, \quad Q_2 = C_2(V_A - V_B) = 12 \mu\text{C}; \\ Q_3 = C_3(V_F - V_G) = 6 \mu\text{C}, \quad Q_4 = C_4(V_F - V_G) = 9 \mu\text{C}.$$

Autor: Zrobiłeś to poprawnie.

Rozwiążemy następne zadanie.

Dwa kondensatory o pojemnościach C_1 i C_2 połączono z dwoma źródłami prądu o silach elektromotorycznych \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 (rys. 38.4). Określić napięcie na każdym kondensatorze i różnicę potencjałów w punktach A i B .



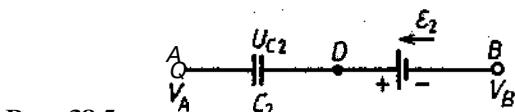
Rys. 38.4

Czytelnik B: Kondensatory są połączone szeregowo, ich pojemność zastępcza jest równa $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$. Ładunki zgromadzone w każdym z kondensatorów są jednakowe i równe ładunkowi na kondensatorze zastępczym: $Q = C(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)$. Napięcie na każdym z kondensatorów można określić, stosując równanie (38.2):

$$U_1 = \frac{C_2(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)}{C_1 + C_2}; \quad (38.5)$$

$$U_2 = \frac{C_1(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)}{C_1 + C_2}; \quad (38.6)$$

Różnica potencjałów w punktach A i B jest równa $V_A - V_B = U_2 + \mathcal{E}_2$.



Rys. 38.5

Autor: Twój ostatni wniosek jest niesłuszny. Zastąpmy obwód z rysunku 38.4 (bardziej poprawnie jego odcinek ADB) układem jemu równoważnym, przedstawionym schematycznie na rysunku 38.5. Zgodnie z uwagami poczynionymi w poprzednim paragrafie można zapisać:

$$V_A - V_B = \mathcal{E}_2 - U_2 \quad (38.7)$$

(tutaj napięcie na oporze zastąpiono napięciem na kondensatorze).

Czytelnik B: Zrozumiałem swój błąd: nie wziąłem pod uwagę kierunku siły elektromotorycznej \mathcal{E} . Wydaje mi się, że to zadanie można rozwiązać, nie wprowadzając schematów równoważnych. Oznaczę napięcie na kondensatorze $U_{C2} = U_2 = V_D - V_A$. Z drugiej strony różnica potencjałów w punktach D i B jest równa $V_D - V_B = \mathcal{E}_2$; z tych dwóch związków otrzymuję $V_A - V_B = (V_A - V_D) + (V_D - V_B) = -U_2 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_2 - U_2$.

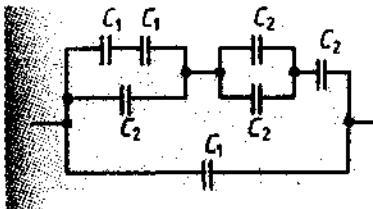
Autor: Teraz rozwiązałeś poprawnie. Oto jeszcze jeden sposób: w myśl przyjętych w punktach A i B woltomierz. Już wiemy, że wskazanie L woltomierza jest równe sile elektromotorycznej \mathcal{E} .

mniejszonej o spadek potencjałów na danym odcinku obwodu. Tutaj prąd nie płynie, więc nie ma spadku Ir , ale za to występuje napięcie U_2 na kondensatorze C_2 . Zgodnie z wzorem (37.4) woltomierz powinien wskazywać napięcie $U = \mathcal{E}_2 - U_2$. W ten sposób doszliśmy do uzyskanego wcześniej wzoru (38.7). Korzystając z (38.6), znajdujemy ostateczną postać wzoru (38.7) na poszukiwaną różnicę potencjałów:

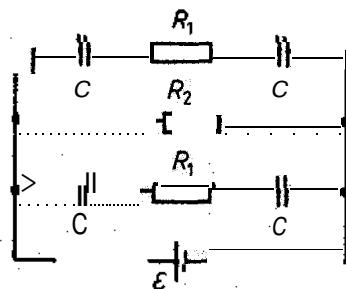
$$V_A - V_B = \frac{C_2 \mathcal{E}_2 - C_1 \mathcal{E}_1}{C_1 + C_2}.$$

Zadania

- 38.1. Oblicz całkowitą pojemność C układu kondensatorów przedstawionego na rysunku 38.6. Przyjmij: $C_1 = 2 \mu\text{F}$, $C_2 = 4 \mu\text{F}$.



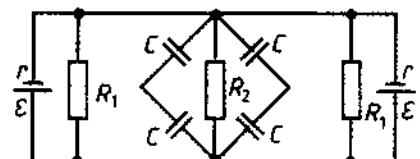
Rys. 38.6



Rys. 38.7

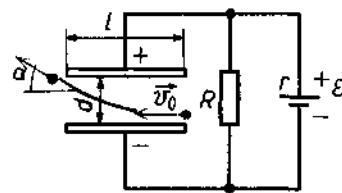
- 38.2. Obwód elektryczny przedstawiono na rysunku 38.7. Dane: $\mathcal{E} = 5 \text{ V}$, $r = 1 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_1 = 3 \Omega$, $C = 3 \mu\text{F}$. Oblicz ładunek Q na okładkach każdego z kondensatorów.

- 38.3. Dany jest obwód elektryczny przedstawiony na rysunku 38.8. Przyjmując, że znane są wszystkie wielkości oznaczone na rysunku, znajdź ładunek Q na okładkach każdego z kondensatorów.



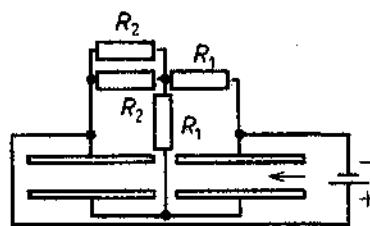
Rys. 38.8

- 38.4. Kondensator płaski, którego płyty mają długość l i są oddalone o d , jest włączony w obwód, jak pokazano na rysunku 38.9. Dane są: siła elektromotoryczna \mathcal{E} źródła prądu, jego opór wewnętrzny r . Do wnętrza kondensatora, równolegle do płyt, wlatuje elektron z prędkością v_0 . Jaki opór powinien mieć opornik przyłączony równolegle do płyt kondensatora, aby elektron wyleciał z niego pod kątem α do płyt? Przyjmij, że znane są masa m i ładunek e elektronu.

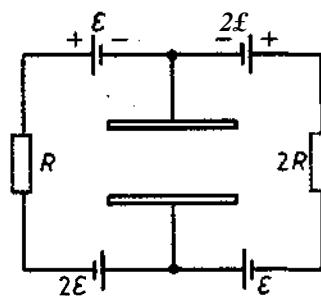


Rys. 38.9

- 38.5. Dwa jednakowe kondensatory płaskie włączono w obwód jak pokazano na rysunku 38.10; $R_1 = 4\Omega$. Do wnętrza jednego z kondensatorów wlatuje elektron (strzałka na rysunku). Jaka powinna być wartość oporu R_2 , aby elektron wyleciał z drugiego kondensatora równolegle do jego płyt?



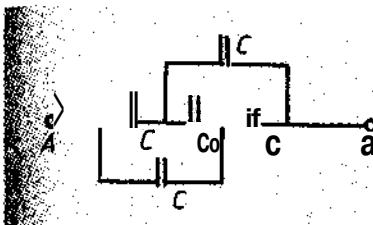
Rys. 38.10



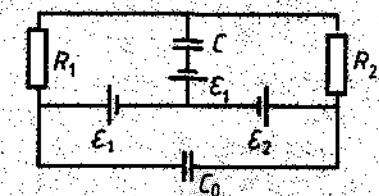
Rys. 38.11

- 38.6. Kondensator płaski mający płyty o długości l umieszczone w odległości d włączono w obwód zgodnie z rysunkiem 38.11 (znane są \mathcal{E} oraz opory R i r). W pole elektryczne kondensatora wlatuje elektron równolegle do płyt z prędkością v_0 . Pod jakim kątem θ do płyt wyleci ten elektron z kondensatora? Przyjmij, że znana jest masa m elektronu i jego ładunek e .

- 38.7. Oblicz ładunek układu kondensatorów przedstawionego na rysunku 38.12, jeżeli do zacisków A i B jest przyłożone napięcie $U = 100$ V, a kondensatory mają pojemność $C = 2 \mu\text{F}$, $C_0 = 1 \mu\text{F}$.



Rys. 38.12



Rys. 38.13

- 38.8. Oblicz ładunek kondensatorów o pojemności $C = 4 \mu\text{F}$ i $C_0 = 2 \mu\text{F}$ (rys. 38.13). Wiadomo, że: $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 300\Omega$, $\mathcal{E}_1 = 15$ V, $\mathcal{E}_2 = 5$ V. Opór wewnętrzny źródła prądu pomiń.

39. Czy umiesz obliczać opór rozgałęzionej części obwodu?

Autor:

Obliczyć opór odcinka obwodu przedstawionego na rysunku 39.1a.
Opór przewodów można pominać.

Czytelnik A: Jeżeli się pominie opór przewodów, to można zupełnie nie brać ich pod uwagę. Wtedy poszukiwany opór odcinka jest równy $3R$.

Autor: Odpowiedziałeś bez zastanowienia. Pomijać opór przewodów i pomijać przewody — to zupełnie różne rzeczy (chociaż niektóre osoby egzaminowane sadzą, że to jedno i to samo).
Usunąć z obwodu jakiś przewód — to zdecyduje zupełnie inny opór odcinka, niż jeśli przewód pozostanie.

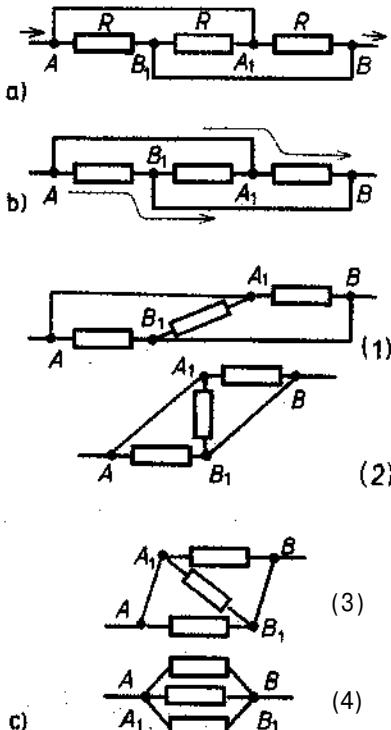
Tutaj zaś, zupełnie odwrotnie, opór przewodów jest równy zeru.

Czytelnik A: Tak, słusznie, ja po prostu nie pomyślałem. Będę rozumował następująco. W punkcie A prąd rozdziela się na dwa prądy, których kierunki zaznaczyłem strzałkami (rys. 39.1b). W tej sytuacji środkowego opornika można w ogóle nie uwzględniać, a więc całkowity opór odcinka jest równy $\frac{D}{2}$.

Autor: Również ta odpowiedź jest błędna. Radzę korzystać z następującej zasady:

Trzeba odszukać w obwodzie punkty o jednakowym potencjale i doprowadzić do złączenia się tych punktów. Przy tym prądy w poszczególnych gałęziach obwodu pozostaną nie zmienione, natomiast sam schemat obwodu może się uproszczyć w sposób zasadniczy.

O tym już was informowałem w paragrafie 37. Ponieważ w tym zadaniu opory przewodów są równe zeru, to punkty A i A_1 mają ten sam potencjał. Tak samo jednakowy potencjał mają punkty B i B_1 . Uwzględniając to, będziemy przekształcać obwód tak, aby punkty o jednakowym potencjale znalazły się w jednym miejscu. W tym celu będziemy stopniowo redukować długość przewodów połączonych. Kolejne etapy tej operacji są pokazane na rysunku 39.1c: (1) → (2) → (3) → (4). Stwierdzamy, że pierwotne połączenie odpowiada równoległemu połączeniu trzech oporów, a więc całkowity opór odcinka jest równy $\frac{D}{3}$.



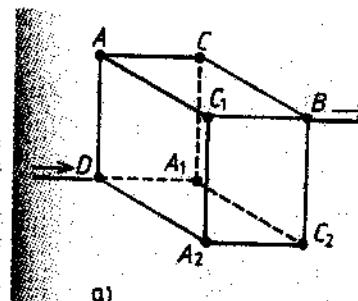
Rys. 39.1

Czytelnik A: Tak, oczywiście. Z rysunku 39.1c doskonale widać, że jest to połączenie równoległe.

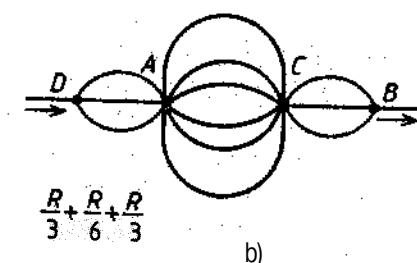
Autor: Przejedziemy do następnego przykładu.

Sześciian wykonany z drutów, z których każdy ma opór R , włączono do obwodu, jak na rysunku 39.2a. Obliczyć opór całkowity sześciianu.

Zastosujmy przytoczoną powyżej zasadę. Odszukaj punkty mające jednakowy potencjał.



Rys. 39.2



Czytelnik A: Myślę, że jednakowy potencjał mają punkty A , A_1 , A_2 (rys. 39.2a), ponieważ wszystkie trzy krawędzie sześciianu (DA , DA_1 , DA_2) są dokładnie równoważne.

Autor: Masz rację. Dokładnie tak samo są równoważne krawędzie BC , BC_1 , BC_2 . Dlatego punkty C , C_1 , C_2 także mają jednakowe potencjały. Następnie przerwijmy nasz drutiany sześciian we wszystkich wymienionych punktach, zagnijmy druty-krawędzie i połączmy je tak, aby punkty o jednakowym potencjale znalazły się w jednym miejscu. Jak wtedy będzie wyglądał obwód?

Czytelnik A: Otrzymamy obwód przedstawiony schematycznie na rysunku 39.2b.

Autor: Słusznie. Obwód pokazany na rysunku 39.2b jest równoważny obwodowi wyjściowemu (sześciianowi), ale jest znacznie od niego prostszy. Teraz już łatwo obliczyć opór całkowity.

Czytelnik A: Jest on równy $\frac{R}{6} + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = \frac{5}{6} R$.

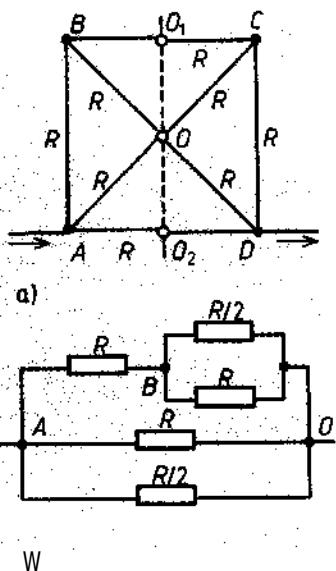
Czytelnik B:

Jak znaleźć opór całkowity drutianej figury w postaci kwadratu z przekątnymi włączonej do obwodu zgodnie z rysunkiem 39.3a?

Autor: Trzeba odszukać punkty o jednakowym potencjale. Łatwo zauważyc, że obwód ma osią symetrii. Zaznaczę ją na rysunku 39.3a linią kreskową. Jasne, że wszystkie punkty leżące na osi symetrii powinny mieć taki sam potencjał, równy połowie sumy potencjałów w punktach A i D. Tak więc potencjały w punktach O, O₁ i O₂ są równe. Zgodnie ze znaną już zasadą można sprowadzić te trzy punkty do jednego, w wyniku czego rozpatrywany układ oporników rozbię się na dwa jednakowe, połączone szeregowo obwody, z których jeden przedstawiono na rysunku 39.3b. Opór takiego obwodu daje się łatwo obliczyć. Jeżeli każdy z drutów w kwadracie będzie miał taki sam opór R, to dojdziemy do wniosku, że wymieniony obwód powinien mieć opór $\frac{4}{15} R$. Wobec tego poszukiwany opór kwadratu jest równy $\frac{8}{15} R$.

Czytelnik A: Czy to znaczy, że podstawowa zasada polega na znalezieniu w obwodzie punktów o jednakowym potencjale i sprowadzeniu ich do jednego punktu wspólnego?

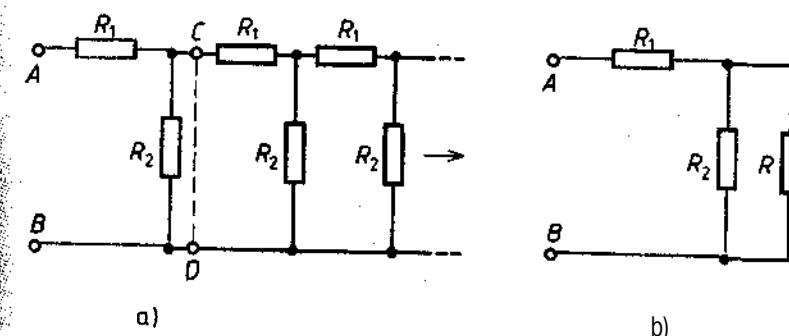
Autor: Właśnie tak. Teraz chcę zaproponować zadanie dotyczące odcinka obwodu złożonego / nieskończonej liczby elementów



Rys. 39.3

Dany jest obwód złożony z nieskończonej liczby powtarzających się segmentów, zawierający opory R₁ i R₂ (rys. 39.4a). Znaleźć opór całkowity między punktami A i B.

Czytelnik A: Może powinno się tutaj skorzystać z metody indukcji matematycznej. Weźmy pod uwagę na początek jeden segment, następnie dwa, trzy itd. A potem spróbujmy uogólnić wynik uzyskany dla n segmentów przy $n \rightarrow \infty$.



Rys. 39.4

Autor: Nie, tutaj nie jest potrzebna metoda indukcji matematycznej. Skorzystamy z faktu, że jeśli od nieskończoności odejmie się jeden element, to nieskończoność z tego powodu się nie zmieni. Odtnijmy od rozpatrywanego układu pierwszy segment (cięcie zrobimy po linii kreskowej CD na rysunku 39.4a). Oczywiście, jak poprzednio, pozostałe nieskończona liczba segmentów, więc opór między punktami C i D będzie równy poszukiwanemu oporowi R pomiędzy punktami A i B. Wobec tego wyjściowy obwód ma postać pokazaną na rysunku 39.4b. Jego opór wynosi $R_1 + \frac{R_2}{R+R_2}$ i jest równy wyjściowemu oporowi R. Tak więc

$$R = R_1 + \frac{R_2}{R+R_2},$$

stąd uzyskujemy równanie kwadratowe ze względu na R:

$$R^2 - RR_1 - R_1R_2 = 0.$$

Rozwiążając to równanie, znajdujemy

$$R = \frac{R_1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + 4 \frac{R_2}{R_1}} \right].$$

Czytelnik A: Taka metoda rozwiązywania jest rzeczywiście bardzo interesująca.

Autor: Na zakończenie rozwiążemy jeszcze jedno zadanie:

Miedzypunktami A i B jest włączony opornik o oporze R; oprócz tego istnieje jeszcze (N - 2) punktów, przy czym między każdą parą punktów, wliczając w to punkty A i B, także włączony jest opornik o oporze R. Znaleźć wypadkowy opór między punktami A i B.

Czytelnik B: Czy mogę rozmieścić te N - 2 punkty na linii prostej, względem której punkty A i B są położone symetrycznie?

Autor: Oczywiście. Ważne jest tylko to, aby zachować zrobione wcześniej połączenia.

Czytelnik B: Wtedy układy oporników po lewej i po prawej stronie linii prostej będą jednakowe. A to oznacza, że wszystkie N - 2 punkty mają jednakowe potencjały i dlatego mogą być sprowadzone do jednego punktu. A więc poszukiwany opór jest równy

$$R_1 = \frac{2R}{N-2}.$$

Autor: Dobrze, tylko zapomniałeś o oporniku o oporze R między punktami A i B. Jest on dołączony równolegle do znalezionej przez ciebie oporu R_1 . Dlatego poszukiwany opór jest równy

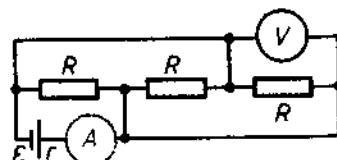
$$\frac{R_1 R}{R_1 + R} = \frac{2R}{N}.$$

Zadania

39.1. Obwód elektryczny jest przedstawiony na rysunku

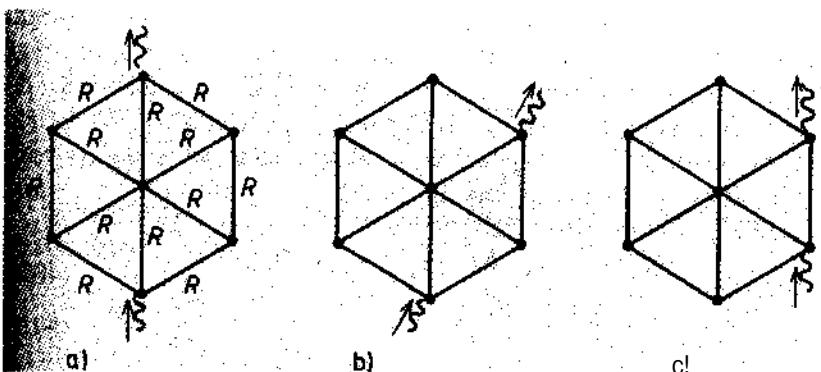
39.5. Dane są wartości: $\epsilon = 4\text{ V}$, $r = 1\Omega$, $R = 45\Omega$.

Określ wskazania woltomierza i amperomierza.



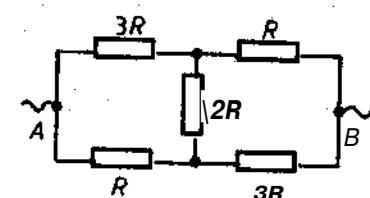
Rys. 39.5

- 39.2. Oblicz opór drucianego kwadratu przedstawionego na rysunku 39.3a, jeżeli jest on włączony do obwodu w punktach A i C.
- 39.3. Z drutów wykonano sześciokąt foremny z przekątnymi. Opór każdego drutu jest równy R. Sześciokąt jest włączony w obwód, jak pokazano na rysunku 39.6a. Oblicz jego opór całkowity.
- 39.4. Oblicz opór całkowity sześciokąta opisanego w zadaniu 39.3, jeśli jest on włączony w obwód, jak pokazano na rysunku 39.6b.



Rys. 39.6

- 39.5. Oblicz opór całkowity sześciokąta opisanego w zadaniu 39.3, jeżeli jest on włączony do obwodu, jak pokazano na rysunku 39.6c.
- 39.6. Oblicz opór całkowity obwodu przedstawionego na rysunku 39.7, jeżeli napięcie jest przyłożone do punktów A i B.



Rys. 39.7

40. Dlaczego przepaliła się żarówka?

Czytelnik A: Co powoduje przepalanie się żarówek — duże napięcie czy duże natężenie prądu?

Autor: A jak myślisz?

Czytelnik A: Mnie się wydaje, że duży prąd.

Autor: Twoja odpowiedź jest niedobra. Przede wszystkim żarówka przepala się w wyniku wydzielania nadmiernie dużej ilości ciepła w jednostce czasu, mówiąc inaczej, w wyniku drastycznego zwiększenia mocy prądu. Natomiast wzrost mocy prądu może być skutkiem zmiany różnych czynników: napięcia przyłożonego do żarówki, prądu płynącego przez żarówkę, oporu żarówki. W związku z tym spróbujcie przypomnieć sobie wszystkie znane wasz wzory na moc wydzielaną w jakimś oporze R .

Czytelnik B: Znam następujące wzory:

$$P = (V_1 - V_2) I, \quad (40.1)$$

$$P = I^2 R, \quad (40.2)$$

$$P = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R}, \quad (40.3)$$

gdzie P — moc wydzielana w oporze R ; $(V_1 - V_2)$ — różnica potencjałów na jego końcach; I — natężenie prądu płynącego przez ten opór.

Czytelnik A: Zwykle posługiwaliśmy się tylko wzorem (40.2), wyrażającym moc przez kwadrat natężenia prądu i opór.

Autor: Łatwo zauważyc, że wszystkie trzy wzory są równoważne, gdyż każdy z nich przechodzi w inny, jeżeli się tylko uwzględni prawo Ohma. Równoważność tych wzorów wskazuje właśnie na to, że rozwiązyując problem przepalania się żarówki, nie należy brać pod uwagę z osobna prądu albo napięcia, tylko trzeba rozpatrywać łącznie wszystkie trzy wielkości: i natężenie prądu, i napięcie i opór. (Do Czytelnika A). Nawiasem mówiąc, dlaczego preferujesz właśnie wzór (40.2)?

Czytelnik A: Przecież zwykle tak jest, że napięcie doprowadzane do żarówki jest stałe. Dlatego zależność mocy od napięcia nie ma większego znaczenia. Wzór (40.2) jest wzorem najbardziej „roboczym”.

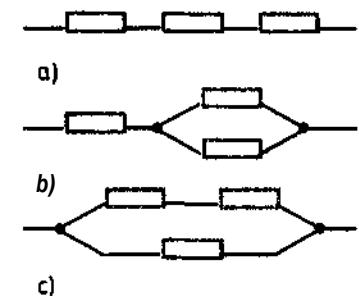
Autor: Nie masz racji, stawiając wzór (40.2) na uprzywilejowanej pozycji. Rozwiążmy zadanie.

Kuchenka elektryczna ma trzy segmenty o jednakowym oporze R . Jeżeli wszystkie trzy segmenty są połączone równolegle, woda w czajniku zaczyna wrzeć po $t_0 = 6$ min. Po jakim czasie zacznie wrzeć ta sama masa wody w czajniku przy różnych połączeniach segmentów kuchenki (rys. 40.1)?

Czytelnik A: Przede wszystkim znajdziemy opór całkowity dla każdego wariantu połączenia segmentów. Przy połączeniu równoległym opór całkowity $R_0 = \frac{R}{3}$.

W wariantach a, b, c (rys. 40.1) odpowiednio mamy

$$\begin{cases} R_a = 3R, \\ R_b = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R, \\ R_c = \frac{2R^2}{3R} = \frac{2}{3}R. \end{cases} \quad (40.4)$$



Niech U oznacza napięcie źródła prądu. Posługując się prawem Ohma, znajdziemy całkowite natężenie prądu płynącego przez kuchenkę w każdym wariantie...

Autor (przerywając): Nie trzeba wyznaczać natężenia prądu. Oznaczmy przez t_0 , t_a , t_b , t_c czas potrzebny do ogrzania wody w czajniku w każdym z rozpatrywanych wariantów. Wydzielane ciepło jest równe iloczynowi mocy i czasu ogrzewania. W każdym z wariantów wydziela się tyle samo ciepła. Stosując wzór (40.3) na moc prądu, otrzymujemy

$$\frac{U^2 t_0}{R_0} = \frac{U^2 t_a}{R_a} = \frac{U^2 t_b}{R_b} = \frac{U^2 t_c}{R_c}. \quad (40.5)$$

Podstawiając do (40.5) zależności (40.4) i skracając następnie

wspólne czynniki (U^2 i $\frac{1}{R}$). znajdujemy

$$3t_0 = \frac{t_a}{3} = \frac{2t_b}{3} = \frac{3t_c}{2}$$

Stąd od razu uzyskujemy wartości poszukiwanych wielkości:

$$t_a = 9t_0 = 54 \text{ min}, \quad t_b = \frac{9}{2}t_0 = 27 \text{ min}, \quad t_c = 2t_0 = 12 \text{ min}.$$

Zwracam uwagę, że w tym zadaniu wygodnie było zastosować wzór (40.3) na moc właśnie dlatego, że napięcie w każdym wariantie połączeń było takie samo.

Zajmiemy się teraz następującym zagadnieniem.

Dane jest źródło prądu o sile elektromotorycznej \mathcal{E} i oporze wewnętrznym r zamknięte zewnętrznym oporem R . Jaka wartość ma współczynnik sprawności źródła?

Czytelnik B:

Współczynnik sprawności źródła jest to stosunek mocy użytecznej (tj. mocy wydzielanej w oporze zewnętrznym) do mocy całkowitej (tj. sumy mocy wydzielanych w oporach wewnętrznym i zewnętrznym):

$$\eta = \frac{I^2 R}{I^2 (R+r)} = \frac{R}{R+r}. \quad (40.6)$$

Autor: Zgadza się.

Załóżmy, że opór wewnętrzny źródła jest stały, zmienia się tylko opór zewnętrzny. Jak będzie się przy tym zmieniał współczynnik sprawności źródła prądu?

Czytelnik B: Dla $R = 0$ (krótkie spięcie, zwarcie) $\eta = 0$. Dla $R = r$, $\eta = 0,5$. Przy nieskończonym wzroście R współczynnik sprawności dąży do jedności.

Autor: Masz rację.

A jak się przy tym zmienia moc użyteczna (moc wydzielana w oporze zewnętrznym)?

Czytelnik B: Ponieważ wzrostowi oporu R odpowiada wzrost współczynnika sprawności, zatem będzie się również zwiększała moc użyteczna. Krócej mówiąc, im większy opór R , tym większa moc użyteczna.

Autor: Mylisz się. Wzrost współczynnika sprawności źródła oznacza, że rośnie stosunek mocy użytecznej do mocy całkowitej źródła, lecz moc użyteczna może przy tym maleć. W istocie moc użyteczna

$$P_u = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+r)^2} R = \frac{\mathcal{E}^2}{r} \frac{x}{(x+1)^2}, \quad (40.7)$$

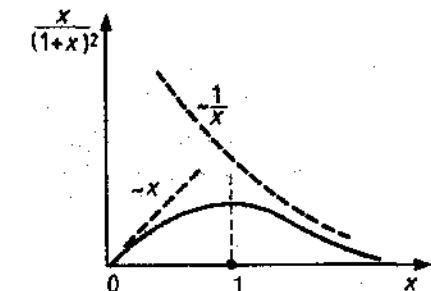
gdzie $x = \frac{R}{r}$. Jeżeli $x \ll 1$, to

$P_u \sim x$. Jeżeli $x \gg 1$, to $P_u = \frac{1}{x}$.

Maksymalną wartość przyjmuje P_u dla $x = 1$ ($R = r$),

przy tym $P_u = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$. Na rysunku

40.2 zamieszczono wykres funkcji $y = \frac{x}{(x+1)^2}$, ilustrujący



Rys. 40.2

zmianę mocy użytecznej w miarę wzrostu oporu zewnętrznego.

Czytelnik B: Zrozumiałem. A czy można określić maksymalną wartość mocy, poszukując maksimum funkcji $y = \frac{x}{(x+1)^2}$ z wykorzystaniem pochodnej?

Autor: Oczywiście, tylko trzeba dobrze znać zasady rachunku różniczkowego.

Czytelnik B: Pochodna jest równa $y' = \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4}$. Przyrównując ją do zera, otrzymujemy $x = 1$.

Autor: Obliczyłeś poprawnie. Rozwiążemy następujące zadanie:

Dwieście połączonych równolegle żarówek o oporze $R = 300 \Omega$ każda przyłączono do źródła prądu o sile elektromotorycznej $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$ i oporze wewnętrznym $r = 0,5 \Omega$. Obliczyć moc wy-

dzielaną w każdej żarówce i względną zmianę mocy wydzielanej w żarówce w wyniku przepalenia się jednej z dwustu żarówek. Opór przewodów połączonych pominić (rys. 40.3).

Czytelnik B: Natężenie prądu całkowitego w zewnętrznym odcinku obwodu jest równe $I_c = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{R}{n}} = 50$ A. Natężenie prądu w jednej żarówce jest równe $I = I_c/n = 0,25$ A. Stąd znajdujemy moc wydzielaną w jednej żarówce: $P = I^2 R = 18,75$ W. Aby obliczyć względną zmianę mocy wydzielanej w żarówce, gdy jedna z dwustu się przepaliła, wyznaczę najpierw moc P_1 w jednej żarówce dla $n = 199$, a następnie obliczę stosunek

$$k = \frac{P_1 - P}{P}. \quad (40.8)$$

Autor: Nie polecam takiego sposobu obliczania poszukiwanej wielkości k . Należy ją wyrazić w postaci ogólnej przez opory R i r oraz przez liczbę żarówek n . Zapiszemy najpierw moc:

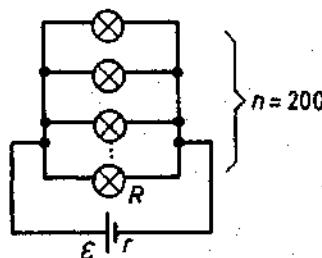
$$P = \frac{R}{n^2} \frac{\mathcal{E}^2}{\left(r + \frac{R}{n}\right)^2},$$

$$P_1 = \frac{R}{(n-1)^2} \frac{\mathcal{E}^2}{\left(r + \frac{R}{n-1}\right)^2}.$$

Podstawiając te wyrażenia do (40.8), otrzymujemy

$$k = \left(\frac{P_1}{P} - 1\right) = \left(\frac{nr + R}{nr - r + R}\right)^2 - 1 = \left[\frac{1}{1 - \frac{r}{nr + R}}\right]^2 - 1.$$

Ułamek w mianowniku po prawej stronie ostatniej równości (w wy-



Rys. 40.3

niku tego, że w obwodzie jest dużo żarówek i opór jednej jest dużo większy od oporu wewnętrznego źródła prądu) jest dużo mniejszy od jedności. Dlatego skorzystamy z przyblizonego wzoru (37.10):

$$k = \left(1 - \frac{r}{nr + R}\right)^{-2} - 1 \approx \frac{2r}{nr + R}. \quad (40.9)$$

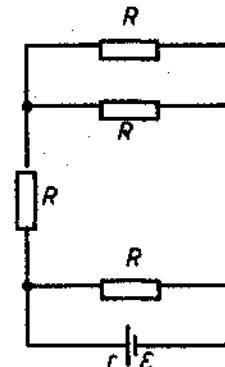
Podstawiając do (40.9) wartości z treści zadania, znajdujemy $k \approx 0,0025$.

Czytelnik B: A dlaczego miał Pan zastrzeżenia do tego, aby najpierw obliczyć P_1 , a następnie, podstawiwszy wartości do (40.8), obliczyć k ?

Autor: Widzisz, że $k = 0,0025$. To znaczy, że aby otrzymać ten wynik, stosując twój (liczbowy) sposób, należałoby obliczyć wartość P_1 z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Z góry nie wiesz nawet, z jaką dokładnością powinieneś obliczyć moc P_1 . Gdybyś obliczając ją poprzedział na drugim miejscu po przecinku, to doszedłbyś do wniosku, że moc P_1 jest równa mocy P .

Zadania

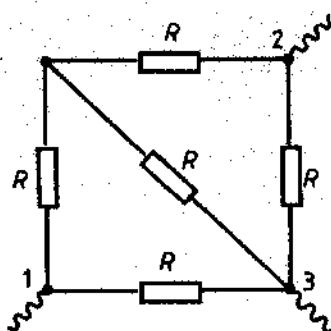
40.1. Obwód elektryczny jest przedstawiony na rysunku 40.4. Dane są: sila elektromotoryczna źródła prądu $\mathcal{E} = 100$ V, jego opór wewnętrzny $r = 36 \Omega$; współczynnik sprawności η źródła jest równy 50%. Oblicz opór R i moc użyczną P źródła prądu.



Rys. 40.4

40.2. Do źródła prądu przyłączono opór zewnętrzny, który jest $k = 4$ razy większy od oporu wewnętrznego źródła. Jak się zmieni współczynnik sprawności η źródła, jeżeli do oporu zewnętrznego dołączy się równolegle opór dodatkowy, który jest $n = 2$ razy większy od oporu wewnętrznego źródła?

- 40.3. Kilka jednakowych oporów R połączono w układ przedstawiony na rysunku 40.5. Za pierwszym razem układ ten przyłączono do źródła w punktach 1 i 2, a za drugim – w punktach 1 i 3. Oblicz opór wewnętrzny r źródła prądu, jeżeli stosunek wartości współczynnika sprawności źródła prądu w pierwszym i drugim wypadku jest równy $\frac{16}{25}$. Znajdź obydwie wartości współczynnika sprawności.



Rys. 40.5

- 40.4. Oporы w kuchence elektrycznej połączone są w układ przedstawiony na rysunku 40.5, który włączono do sieci w punktach 1 i 2. Na kuchence tej w ciągu pewnego czasu udaje się doprowadzić do wrzenia 500 g wody. Ile wody można doprowadzić do wrzenia w tym samym czasie, jeżeli układ oporów kuchenki elektrycznej zostanie włączony do sieci w punktach 1 i 3? Temperatura początkowa wody w obydwu wypadkach jest jednakowa, strat ciepła nie uwzględniać.
- 40.5. 1,5 l wody o temperaturze początkowej 20°C postawiono na kuchenkę elektryczną mającą dwa segmenty o jednakowych oporach. Gdy segmenty połączone są równolegle, woda zaczyna wrzeć po czasie $t_1 = 15$ min, przy czym $m_1 = 100$ g wody zamienia się w parę. Co się stanie z wodą, jeżeli segmenty zostaną połączone szeregowo i ogrzewanie wody będzie trwało $t_2 = 60$ min? Ciepło parowania wody $c_p = 22,6 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$. Ile czasu t_3 potrzeba, by ogrzać tę wodę do wrzenia przy włączeniu jednego segmentu?
- 40.6. Do źródła prądu o sile elektromotorycznej $S = 5$ V za pierwszym razem przyłączono opór $R_1 = 4\Omega$, a drugim razem – opór $R_2 = 9\Omega$. W obydwu wypadkach w oporze zewnętrznym wydzielają się jednakowa moc P . Wyznacz tę moc i opór wewnętrzny r źródła prądu.

41. Jak się opisuje pole magnetyczne prądu?

Autor:

Kiedy powstaje stałe w czasie pole magnetyczne?

Czytelnik A: Powstaje ono w pobliżu magnesu trwałego albo w pobliżu przewodnika, w którym płynie prąd stały.

Autor:

Aby określić natężenie pola elektrostatycznego w pewnym punkcie przestrzeni, należy umieścić w tym punkcie ładunek próbny i zmierzyć działającą na niego siłę.

A jak się postępuje, jeśli chodzi o pole magnetyczne?

Co i w jaki sposób wykorzystujesz w celu określenia wielkości charakteryzujących pole magnetyczne?

Czytelnik A: Można nasypać na kartkę papieru warstwę opałków żelaznych.

W polu magnetycznym opałki się namagnesują; będą się obracać i ustawać wzdłuż linii pola.

Czytelnik B: Można się posłużyć igłą kompasu albo wykorzystać ramkę z prądem.

Autor: Opowiedz o ramce z prądem dokładniej.

Czytelnik B: Na ten temat niewiele wiem. Lepiej będzie, jeśli Pan o tym opowie.

Autor:

Aby zbadać pole magnetyczne, wykorzystujemy zarówno opałki żelazne, jak również igłę kompasu. Najlepiej jednak posłużyć się małym obwodem (ramką) / prądem. Wprowadzając ramkę w pole, określa się kierunek, zwrot i wartość wektora indukcji magnetycznej (oznaczanej \vec{B}), który jest odpowiednikiem wektora natężenia pola elektrostatycznego. Linie indukcji magnetycznej to linie, do których styczne w danym punkcie mają kierunek i właściwość indukacji \vec{B} .

Weźmy pod uwagę ramkę o powierzchni 5 z płynącym w niej stałym prądem o natężeniu I ; przypisujemy ramce jednostkowy

dodatni wektor normalny \vec{n} , zdefiniowany jako wektor o wartości równej jedności (1, bez jednostki), prostopadły do płaszczyzny ramki. Zwrot tego wektora określa reguła korkociągu; jest on zgodny z osiowym przemieszczaniem korkociągu wkręcanego prostopadle w płaszczyznę ramki podczas jego obracania zgodnie ze zwrotem prądu w ramce (rys. 41.1). Pole magnetyczne wywiera na ramkę działanie orientujące — obraca ramkę, ustawiając ją ostatecznie w określonym położeniu.

Kierunek wektora normalnego w tym położeniu równowagi jest zgodny z kierunkiem wektora \vec{B} w danym punkcie pola. Jeżeli ramkę się obróci, to powstaje moment M sił pola, dążący do przywrócenia ramce położenia równowagi. Moment M zależy od kąta α odchylenia wektora normalnego od kierunku wektora \vec{B} . Dla $\alpha = 90^\circ$ moment jest maksymalny; oznaczmy go symbolem M_0 . Stosunek $\frac{M_0}{IS}$ w danym punkcie pola jest równy wartości wektora B w tym punkcie.

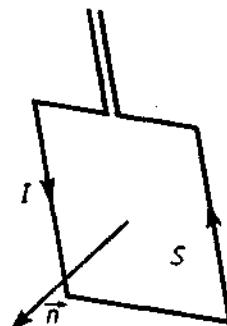
$$B = \frac{M_0}{IS}. \quad (41.1)$$

A teraz narysuj linie indukcji magnetycznej w sytuacjach przedstawionych na rysunku 41.2a—d. Linie poprowadź w zaznaczonych płaszczyznach.

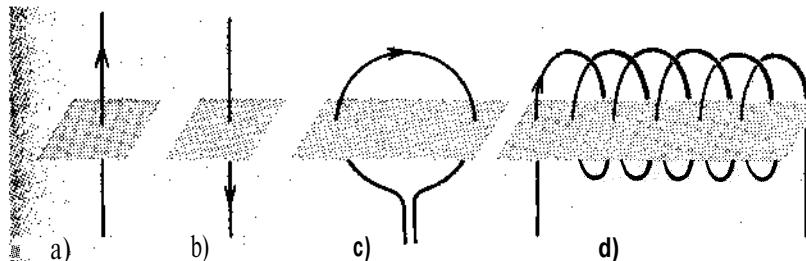
Czytelnik B: Moim zdaniem obraz linii wygląda tak (rys. 41.3a—d).
Autor: Zauważcie, że

zwrot linii indukcji magnetycznej, odpowiadający regule korkociągu, osiowo przemieszczaniu korkociągu jest zgodny ze zwrotem

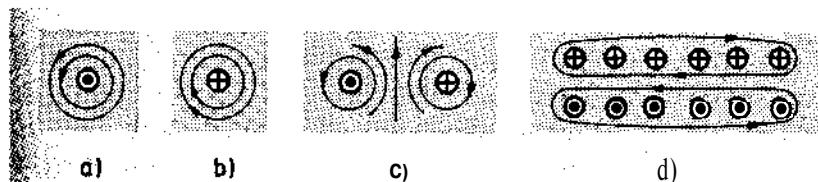
Czym się różni obraz linii indukcji pola magnetycznego od obrazu linii pola elektrostatycznego?



Rys. 41.1



Rys. 41.2



Rys. 41.3

Czytelnik B: Linie pola elektrycznego zaczynają się w dodatnich, a kończą w ujemnych ładunkach elektrycznych. Dla pola magnetycznego nie ma odpowiednika ładunku elektrycznego.

Linie indukcji pola magnetycznego są liniami zamkniętymi.

Autor: Dobrze. Teraz podam kilka użytecznych wzorów na obliczanie indukcji magnetycznej B :

a) pole magnetyczne prądu o natężeniu I płynącego w nieskończonym przewodzie prostoliniowym w odległości R od przewodu:

$$B = \frac{I}{2\pi R} \quad (41.2)$$

b) pole magnetyczne wytworzone przez prąd o natężeniu I płynący w przewodzie kołowym o promieniu R (w środku okręgu)

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (41.3)$$

cy w nim prąd o natężeniu I (N — liczba zwojów, l — długość solenoidu):

$$B = k \frac{NI}{l} \quad (41.4)$$

(zwracam uwagę, że pole magnetyczne wewnątrz solenoidu jest jednorodne).

W tych wzorach k oznacza współczynnik proporcjonalności zależny od wyboru układu jednostek. W układzie jednostek SI:

$$k = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}. \quad (41.5)$$

Wielkość μ_0 to przenikalność magnetyczna próżni. Zaznaczę, że jeśli rozpatrujemy prądy w ośrodku, to we wszystkich wzorach zamiast μ_0 należy stosować $\mu_0 \mu_r$, gdzie μ_r — względna przenikalność magnetyczna ośrodka. Jednostkę indukcji magnetycznej w układzie SI określa się jako indukcję magnetyczną takiego pola, w którym na ramkę o powierzchni 1 m^2 z prądem o natężeniu 1 A działa maksymalny moment siły równy $1 \text{ N} \cdot \text{m}$. Ta jednostka nosi nazwę tesla (T): $1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$.

Czytelnik B: Czytałem, że każde pole magnetyczne prądu można opisać, wykorzystując prawo Biota-Savarta-Laplace'a. Jak to się robi?

Autor: Aby odpowiedź na to pytanie była zrozumiała, musimy odwołać się do rachunku wektorowego.

Jakie znasz działania na wektorach?

Czytelnik A: Dodawanie, rozkładanie i mnożenie przez liczbę.

Autor: Wyjaśnię wam jeszcze jedno działanie: mnożenie wektorowe. Iloczynem wektorowym dwóch wektorów \vec{A} i \vec{B} jest wektor \vec{C} prostopadły do płaszczyzny wektorów \vec{A} i \vec{B} , mający zwrot zgodny z przemieszczeniem korkociągu obracającego się od wektora \vec{A} do wektora \vec{B} w kierunku mniejszego kąta φ (rys. 41.4). Wartość (moduł) iloczynu wektorowego:

$$C = AB \sin \varphi. \quad (41.6)$$

Iloczyn wektorowy zapisuje się następująco:

$$\vec{C} = (\vec{A} \times \vec{B}). \quad (41.7)$$

Jeżeli wektory \vec{A} i \vec{B} są wzajemnie prostopadłe, to $C = AB$. Jeżeli wektory \vec{A} i \vec{B} są równoległe o zwrotach zgodnych lub przeciwnych, to ich iloczyn wektorowy jest równy zeru.

Zwracam uwagę, że

$$(\vec{B} \times \vec{A}) = -(\vec{A} \times \vec{B}). \quad (41.8)$$

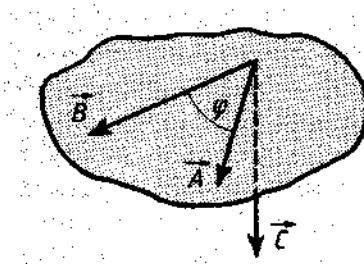
Czytelnik B: To dla mnie nowość. Wygląda na to, że iloczyn wektorów może być równy零u nawet wtedy, gdy ani jeden z wektorów nie równa się零u. Oprócz tego przedstawienie czynników powoduje zmianę iloczynu (dokładniej, zmienia się jego znak, co oznacza zmianę zwrotu wektora \vec{C} na przeciwny).

Autor: Słusznie. A teraz przejdźmy do prawa Biota-Savarta-Laplace'a. Niech w jakimś przewodzie płynie prąd o natężeniu I . Wydzielimy maleńki odcinek przewodu o długości Δl i wprowadźmy wektor $\vec{\Delta l}$, którego zwrot jest zgodny ze zwrotem prądu, a wartość jest równa długości Δl tego odcinka; $I\vec{\Delta l}$ będziemy nazywać elementem prądu. Wybierzmy

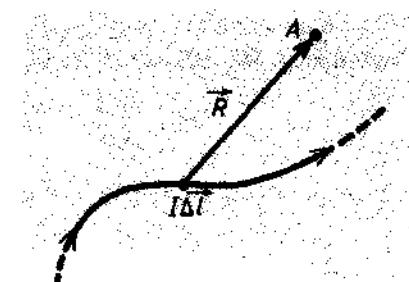
pewien punkt A obserwacji i poprowadźmy do niego z wydzielonego elementu prądu wektor \vec{R} (rys. 41.5).

Prawo Biota-Savarta-Laplace'a brzmi: Indukcja magnetyczna \vec{B} pola wytworzonego w punkcie A przez element prądu $I\vec{\Delta l}$ jest określona wyróżnieniem

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\vec{\Delta l} \times \vec{R}}{R^3}. \quad (41.9)$$



Rys. 41.4



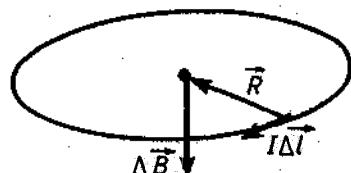
Rys. 41.5

Aby następnie znaleźć wektor całkowitej indukcji w punkcie A , należy wykonać sumowanie (całkowanie) wektorów $\Delta \vec{B}$ pochodzących od wszystkich elementów prądu, na jakie można by podzielić rozpatrywany przewód z prądem (w postaci cienkiego drutu, ale również przewód o dowolnym kształcie).

Wyrażenia (41.2) — (41.4) są wynikiem takiej właśnie operacji. Rozpatrzmy najprostszy przykład — pole w środku przewodu kołowego. Rysunek 41.6 ilustruje prawo Biota-Savarta-Laplace'a dla dowolnie wybranego elementu prądu $I\Delta l$ przewodu kołowego. Łatwo zauważać (gdyż $\Delta l \perp R$), że

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \Delta l. \quad (41.10)$$

Rys. 41.6



Jeżeli będziemy przemieszczać się po okręgu z prądem (przechodząc do kolejnych elementów prądu), to kierunek i zwrot ΔB oraz samo wyrażenie (41.10) nie będą się zmieniać. Dlatego

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \sum \Delta l = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R = \mu_0 \frac{I}{2R}.$$

A więc doszliśmy do wyrażenia (41.3).

Zadania

- 41.1. Znajdź indukcję magnetyczną B pola w punkcie leżącym pośrodku między dwoma równoległymi prostoliniowymi przewodami, jeśli płynie w nich prąd o natężeniu I , a odległość między przewodami wynosi d . Uzględnij dwie sytuacje: 1) zwroty prądów są zgodne, 2) zwroty prądów są przeciwe.
- 41.2. Znajdź indukcję pola magnetycznego B w środku dwóch współśrodkowych przewodów kołowych (natężenie prądu I promienie R i $2R$) dla prądów płynących: 1) w jednej płaszczyźnie, w tą samą stronę; 2) w jednej płaszczyźnie, w przeciwną stronę; 3) w płaszczyznach wzajemnie prostopadłych.

- 41.3. W dwóch dowolnych punktach do pierścienia z drutu dołączono dwa przewody, ułożone na prostych będących przedłużeniami promieni pierścienia, połączone z oddalonym źródłem prądu. Określ indukcję pola magnetycznego w środku pierścienia.
- 41.4. Dwa długie równoległe przewody są od siebie oddalone o $l = 5$ cm. Oblicz wartość wektora indukcji magnetycznej B w punkcie A , znajdującym się w odległości $r_1 = 4$ cm od jednego i $r_2 = 3$ cm od drugiego przewodu. W przewodach płyną jednakowe prądy o natężeniu $I = 12$ A. Uzględnij dwie sytuacje: 1) prądy mają zwroty zgodne; 2) prądy mają zwroty przeciwe.
- 41.5. Dwa nieskończoność długie prostoliniowe przewody krzyżują się pod kątem prostym (nie leżą w tej samej płaszczyźnie). W przewodach płyną prądy o natężenach $I_1 = 80$ A oraz $I_2 = 60$ A. Odległość miedzy przewodami $d = 10$ cm. Oblicz wartość wektora indukcji magnetycznej w punkcie środkowym najkrótszego odcinka łączącego te przewody.

42. Jak wzajemnie oddziałują prądy elektryczne?

Autor:

Jak działa pole magnetyczne na przewód z prądem?

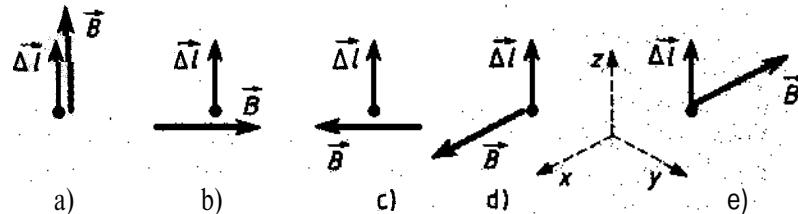
Czytelnik A: Jeżeli ustawiśmy lewą dłoni w ten sposób, że wektor indukcji ma zwrot do jej strony wewnętrznej i cztery wyciągnięte palce wskazują zwrot prądu, to odchylony kciuk wskaże kierunek i zwrot siły działającej na przewód z prądem.

Autor: To prawda. Jednak niczego nie powiedziałeś o wartości siły. Działanie pola magnetycznego na prąd wyraża prawo Ampère. Niedługo po tym czasie, kiedy odkryto zjawisko indukcji elektromagnetycznej, André-Marie Ampère (1775–1836) stwierdził, że sila magnetyczna działa na przewód z prądem zgodnie z prawem Ampèra.

(42.1)

Występuje tutaj znany już wam iloczyn wektorowy. Można sprawdzić, że kierunki i zwroty wektorów wchodzących do wzoru (42.1) zgadzają się z regułą lewej dloni.

A teraz spróbujcie określić kierunek i zwrot siły działającej na element prądu w polu magnetycznym w sytuacjach przedstawionych na rysunku 42.1.



Rys. 42.1

Czytelnik A: Skorzystam z reguły lewej dloni.

Autor: Nie mam nic przeciwko temu. Jednak radzę nabierać wprawy w stosowaniu wyrażenia (42.1); uczcie się posługiwać iloczynem wektorowym.

Czytelnik A: Dobrze. Na rysunku a) wektory $\vec{\Delta l}$ i \vec{B} są równoległe: to znaczy ich iloczyn wektorowy jest równy zero i pole na element prądu nie działa. Na rysunku b) będziemy obracać korkociąg od wektora $\vec{\Delta l}$ do wektora \vec{B} — obrót jest zgodny z ruchem wskazówek zegara; przemieszczanie osiowe korkociągu zachodzi prostopadle do płaszczyzny kartki i ma zwrot od nas. Taki też zwrot będzie miała siła.

Autor: Dobrze. A teraz przeprowadzaj manipulacje z korkociągiem w myśl i wypowiadaj już gotowy wynik.

Czytelnik A: Na rysunku c) siła jest prostopadła do płaszczyzny kartki i ma zwrot do nas. Na rysunku d) siła ma kierunek poziomy, a zwrot w prawo (dokładniej — jest zgodna z osią y). Na rysunku e) zwrot siły w porównaniu z poprzednim zmienił się na przeciwny.

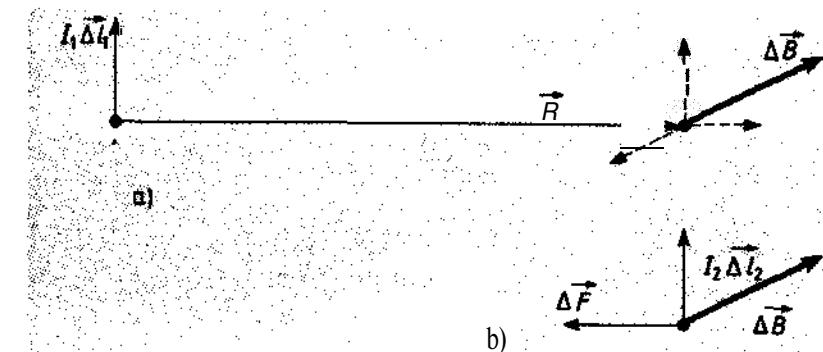
Autor: Wszystko zrobiłeś poprawnie. Przejdziemy do rozpatrywania wzajemnego oddziaływania prądów elektrycznych. Niech będą dwie elementy prądów: $I_1 \vec{\Delta l}_1$ oraz $I_2 \vec{\Delta l}_2$; $\vec{\Delta F}$ — siła, która pierwszy

element prądu działa na drugi. Będziemy rozumować następująco: element prądu $I_1 \vec{\Delta l}_1$ wytwarza w miejscu, gdzie znajduje się element drugiego prądu, pole magnetyczne $\vec{\Delta B}$, które zgodnie z prawem Biota-Savarta-Laplace'a może być przedstawione w postaci (rys. 42.2a):

$$\vec{\Delta B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1}{R^3} (\vec{\Delta l}_1 \times \vec{R}). \quad (42.2)$$

Pole, zgodnie z prawem Ampère'a, działa na element prądu $I_2 \vec{\Delta l}_2$ siłą $\vec{\Delta F}$ (rys. 42.2b):

$$\vec{\Delta F} = \gamma_2 (\vec{\Delta l}_2 \times \vec{\Delta B}). \quad (42.3)$$



Rys. 42.2

Podstawiając (42.2) do (42.3), uzyskujemy następujące wyrażenie na siłę, którą element prądu $I_1 \vec{\Delta l}_1$ działa na element prądu $I_2 \vec{\Delta l}_2$:

$$\vec{\Delta F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi R^3} [\vec{\Delta l}_2 \times (\vec{\Delta l}_1 \times \vec{R})]. \quad (42.4)$$

Przy sposobności — patrząc na rysunek 42.2 łatwo dostrzec wynik, który powinniście znać bardzo dobrze: przewody równoległe, w których płyną prądy o tym samym zwrocie wzajemnie się przyciągają.

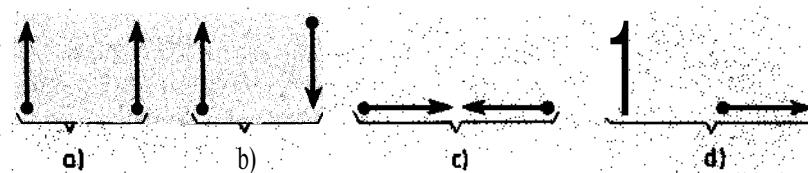
Czytelnik B: Jeśli chodzi o prądy elementarne (element prądu), wszystko jest zrozumiałe. A co zrobić z prądem płynącym w konkretnych przewodach?

Autor: Trzeba rozłożyć (w myśl oczywistej) każdy z przewodów na elementy prądu, określić oddziaływanie wzajemne dla każdej pary prądów elementarnych (jeden ze składników pary jest oczywiście w jednym, a drugi w drugim przewodzie), a następnie znaleźć sumę sił elementarnych.

Czytelnik B: W zasadzie jest to zrozumiałe. Ale jak wykonać tak uciążliwą operację w praktyce?

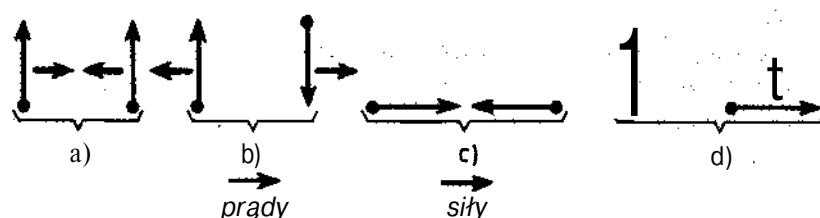
Autor: W praktyce będziesz to robił dopiero wtedy, gdy poznasz matematykę wyższą i nauczysz się całkować. A na razie wystarczy ograniczyć się do oddziaływania prądów elementarnych.

Na rysunku 42.3 przedstawiono cztery pary prądów elementarnych. Korzystając z wyrażenia (42.4), narysujcie kierunki i zwroty sił przyłożonych do każdego z przedstawionych prądów.



Rys. 42.3

Czytelnik B: Czy mógłbym to zrobić? Na rysunku a) prądy przyciągają się wzajemnie, na rysunku b) — odpychają się, na rysunku c) — nie oddziałują, a na rysunku d) wychodzi jakiś nonsens: na prawy prąd siła działa, a na lewy nie działa. Oto mój rysunek (rys. 42.4).



Rys. 42.4

Autor: Twój rysunek jest poprawny.

Czytelnik B: Ale przecież na rysunku d) nie jest spełniona trzecia zasada dynamiki Newtona! Działanie nie równa się tu przeciwdziałaniu.

Czytelnik A: A może trzecia zasada dynamiki Newtona jest słuszna tylko w mechanice? Przecież tutaj mamy do czynienia z prądami elektrycznymi?

Czytelnik B: Nie zgadzam się.

Autor: To jest tak. Trzecia zasada dynamiki Newtona jest prawem fundamentalnym; z niej wynika zasada zachowania pędu. Zatem odrzucenie trzeciej zasady dynamiki Newtona powinno doprowadzić do odrzucenia zasady zachowania pędu.

Czytelnik B: A więc wypada przyjąć, że na rysunku 42.4d jest przedstawiona fizyczna niedorzeczność.

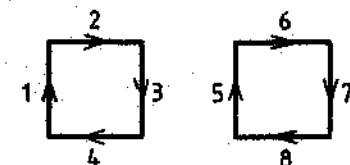
Autor: Jednakże rysunek jest poprawny. Szukajcie wyjścia z tej trudnej sytuacji.

Czytelnik B (po namyśle): Zdaje się, że zrozumiałem, o co chodzi.

Rozpatrywalismy prądy elementarne. Te prądy są nie zamknięte. Natomiast prądy, z którymi zazwyczaj mamy do czynienia, są prądami zamkniętymi.

Spróbuje zastanowić się nad oddziaływaniem dwóch prądów zamkniętych, z których każdy składa się na przykład z czterech prądów elementarnych (rys. 42.5). Dla wygody

Rys. 42.5



na rysunku zostały one ponumerowane. Weźmy na przykład prąd elektryczny 1. Znajdę siły, jakimi działają nan prądy 5, 6, 7, 8. Dodam te siły. Następnie wezmę kolejno prądy 2, 3 i 4. W wyniku mogę znaleźć siłę wypadkową przyłożoną do każdego z prądów zamkniętych. Myślę, że siły wypadkowe będą równe co do wartości i przeciwnie co do zwrotu, zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona.

Autor: Twój wniosek co do sił wypadkowych przyłożonych do prądów zamkniętych, jest słuszny.

Czytelnik B: A więc nie ma żadnego paradoksu.

Autor: A co uczynić z prädami elektrycznymi zmiennymi? Przecież

zadanie 42.3

Widzeliśmy, że zasada zachowania pędu jest prawdziwa dla ruchów mechanicznych przedmiotów o masie skończonej. Kiedy jednak mówiąc o ruchach mechanicznych przedmiotów o nieokreślonej masie, mówimy o ruchach cząstek? Czy zasada zachowania pędu jest prawdziwa dla ruchów cząstek? Wysokość, z jaką odchylają się druty podtrzymujące przewód, jeżeli płynie w nim prąd o natężeniu $I = 2\text{ A}$?

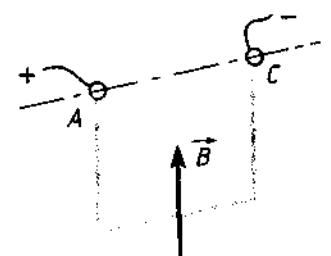
Czytelnik B: Wstrząsające!

Autor: Można w tym miejscu podkreślić wielkie znaczenie nauki. Człowiek myślący kategoriami naukowymi wyjdzie / założenia, z zasadą zachowania pędu jest spełniona w każdym wypadku. Wobec tego pozorne jej naruszenie może być związane tylko z nieznieniem dodatkowego „obiektu”, unoszącego (albo wnoszącego) ze sobą pewien pęd. Natomiast człowiek nieprzwykły do myślenia w sposób naukowy nieprawdopodobne, wręcz głupie, zdanie, że w danym sytuacji zasada zachowania pędu po prostu została naruszona. Przeciwnie, się nie da doskonale zdefiniować stanowiskiem głoszącym, że zasada zachowania pędu jest spełniona dla ruchów mechanicznych przedmiotów o nieokreślonej masie. W takim wypadku zasada zachowania pędu jest spełniona dla ruchów cząstek, ale nie dla ruchów przedmiotów o nieokreślonej masie.

Kiedy po raz pierwszy zasada zachowania pędu elektronów (częstotliwość elektryczna) została udowodniona eksperymentalnie? Ostatnio przyjęto się powiedzieć, że zasada ta została udowodniona przy pomocy piora do gąsienic!

Zadania

- 42.1. W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = 0.25\text{ T}$ skierowanym pionowo umieszczeno poziomo prostoliniowy przewód o masie $m = 10\text{ g}$ i długości $l = 20\text{ cm}$. Przewód zawieszono na cienkich długich drutach. O jaki kat odchylą się druty podtrzymujące przewód, jeżeli płynie w nim prąd o natężeniu $I = 2\text{ A}$?
- 42.2. Przewód miedziany o polu przekroju $S = 3\text{ mm}^2$, zgięty tak, że tworzy trzy boki kwadratu, może się swobodnie obracać wokół poziomej osi AC (rys. 42.6). Przewód wprowadzono w jedno-



Rys. 42.6

zdjęcie, pole magnetyczne, którego indukcja $B = 0.2\text{ T}$ jest zwrócone pionowo do góry. Oblicz o jaki kat θ odchylą się przewód, jeżeli płynie przez niego prąd o natężeniu $I = 2.6\text{ A}$.

43. Czy dobrze znasz prawo Faradaya i regułę Lenza?

Autor:

Proszę zdefiniować strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez pewną powierzchnię (ramkę).

Czytelnik B:

Strumieniem indukcji magnetycznej Φ przechodzącym przez powierzchnię S nazywa się wielkość równa iloczynowi indukcji magnetycznej B , pola tej powierzchni (płaskiej) S i cosinusu kąta między prostą prostopadłą do powierzchni i wektorem indukcji magnetycznej:

$$\Phi = BS \cos \alpha. \quad (43.1)$$

Czytelnik A:

Strumień indukcji magnetycznej jest proporcjonalny do liczby linii indukcji magnetycznej, przecinających powierzchnię ramki.

Autor: Zgadzam się z obydwooma określeniami. Jakie są warunki stosowności wzoru (43.1)?

Czytelnik B: Nie rozumiem pytania.

Autor: A to dlatego, że nie przywykłeś do stawiania podobnych pytań. Wzór (43.1) można stosować przy założeniu, że wektor indukcji nie zmienia się ani co do wartości, ani co do kierunku w granicach tej powierzchni. Innymi słowy, pole magnetyczne w obrębie ramki powinno być jednorodne.

Jaką jednostkę strumienia indukcji magnetycznej stosuje się w układzie jednostek SI?

Czytelnik B: Nie pamiętam.

Autor: Jednostką tą jest weber. Strumień indukcji magnetycznej wynosi 1 weber, jeśli przez płaską powierzchnię o polu 1 m² przechodzącą prostopadle do niej linię pola magnetycznego o indukcji 1 T.

Następne pytanie:

Czy strumień indukcji przenikający przez ramkę zmienia się w czasie, jeżeli przemieszcza się ona ruchem postępowym w jednorodnym polu magnetycznym?

Czytelnik B: A jaki jest tor przemieszczania — prostoliniowy czy nie?

Autor: Czyżby to było istotne?

Czytelnik B: Zrozumiałem. Strumień nie zmienia się.

Autor: Dobrze. A kiedy się zmienia?

Czytelnik B: Jeżeli ramka przemieszcza się w polu niejednorodnym albo kiedy obraca się w polu jednorodnym.

Autor: Słusznie.

Czytelnik B: Teraz przejdźmy do zjawiska indukcji elektromagnetycznej. Na czym ono polega?

Czytelnik B:

Przy zmianie w czasie strumienia Φ przenikającego przez obwód w obwodzie tym wzbudza się prąd elektryczny (prąd indukcyjny). Można uważać, że prąd ten powstaje pod działaniem pewnej siły elektromotorycznej indukcji \mathcal{E} .

Autor: Wspaniale. A teraz następne pytanie.

Czytelnik B: Jakie prawo (albo jakieś prawa) opisują zjawiska indukcji elektromagnetycznej?

Czytelnik B:

Prawo Faradaya: Siła elektromotoryczna indukcji \mathcal{E} jest proporcjonalna do szybkości zmiany w czasie strumienia indukcji $\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ (w SI współczynnik proporcjonalności, jak myślę, jest równy jedności):

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}. \quad (43.2)$$

Autor: Poprawnie sformułowałeś prawo Faradaya. Jednak we wzorze (43.2) z przyzwyczajenia napisałeś znak „-“ i nie objaśniłeś, skąd się wziął.

Należy pamiętać, że zjawisko indukcji elektromagnetycznej jest opisywane nie tylko przez prawo Faradaya, lecz także przez regułę Lenza, która objaśnia znak „-“.

Czytelnik A:

Reguła Lenza: Prąd indukcyjny ma zawsze taki kierunek, że jego własne pole magnetyczne przeciwdziała przyczynie, która ten prąd indukcyjny wzbudziła.

Pamiętam to sformułowanie, ale niezupełnie rozumiem.

Autor:

Prawo Faradaya określa wartość siły elektromotorycznej, reguła Lenz'a zaś jej kierunek.

Teraz o samej regule Lenza. Zastanówmy się nad nią z punktu widzenia zasady zachowania energii. Przypuśćmy, że będziemy nasuwać przewodzący pierścieri raz na zwykły ołówek, a za drugim razem — na magnes trwały o kształcie pręta. W drugim wypadku w pierścieniu pojawia się prąd indukcyjny. To zaś oznacza, że podczas nasuwania pierścienia byliśmy zmuszeni do wykonania dodatkowej pracy. Ale dodatkowa praca może być wykonana tylko z powodu istnienia dodatkowej siły oporu (przeciwko tej sile). Zatem prąd indukcyjny w pierścieniu powinien być skierowany tak, aby zapewnić pojawienie się wspomnianej siły oporu.

Czytelnik A: Dopiero teraz zrozumiałem zjawisko indukcji.

Czytelnik B: Czyżby regułę Lenza też można było odkryć przy biurku? Przecież tutaj wykorzystuje się tylko zasadę zachowania energii.

Autor: Masz rację. Zwróć tylko uwagę, że obok zasady zachowania energii wykorzystuje się eksperymentalny fakt pojawienia się prądu indukcyjnego.

Innymi słowy, aby „odkryć” regułę Lenza fizyk-teoretyk powinien znać zasadę zachowania energii i prawo Faradaya. Dla utrwalenia materiału rozwiążemy zadanie:

Ramka o polu powierzchni S obraca się jednostajnie z prędkością kątową ω to w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B . Jak zmienia się w czasie siła elektromotoryczna indukcji? W jakich położeniach ramki siła elektromotoryczna indukcji jest równa零? W jakich położeniach jest maksymalna?

Zadanie ilustruje rysunek 43.1, na którym pokazano przekrój poprzeczny ramki w kilku położeniach. W jakim położeniu strumień przenikający przez ramkę jest maksymalny?

Czytelnik A: W położeniu 1.

Autor: W jakim położeniu ramki występuje maksymalna szybkość zmiany strumienia przenikającego przez ramkę?

Czytelnik A (bez przekonania):
Także w położeniu 1.

Czytelnik B: Myślę, że w położeniu 2, gdy wówczas linie indukcji magnetycznej leżą w płaszczyźnie ramki i dlatego przy obrocie najszybciej zmienia się strumień indukcji magnetycznej. W położeniu 2 siła elektromotoryczna indukcji jest maksymalna.

Autor: Zgadza się. A w którym położeniu siła elektromotoryczna indukcji jest równa零?

Czytelnik B: W położeniu 1. W tym położeniu obracająca się ramka prześlizguje się wzdłuż linii indukcji magnetycznej.

Autor: Masz rację. Zwróć uwagę: strumień przenikający przez ramkę i szybkość zmiany tego strumienia — to dwie różne „rzeczy”. W położeniu 1 strumień jest maksymalny, a szybkość jego zmiany równa się零. W położeniu 2, przeciwnie, szybkość zmiany strumienia jest maksymalna, a sam strumień równa się零. Następnie założymy, że $a = \omega t$ i rozpatrzmy sytuację, której odpowiada położenie pośrednie 3. Mamy

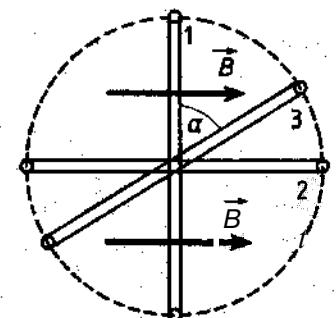
$$\Phi = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t.$$

Chcemy znaleźć stosunek $\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ przy dostatecznie małych wartościach Δt .

At. Zapiszmy

$$Ad) = BS[\cos(\omega t + \omega \Delta t) - \cos \omega t] = \\ \sim BS[\cos \omega t \cos \omega \Delta t - \sin \omega t \sin \omega \Delta t - \cos \omega t].$$

Ponieważ $\omega \Delta t \ll 1$, można napisać $\cos \omega \Delta t \approx 1$ i $\sin \omega \Delta t \approx \omega \cdot \Delta t$.

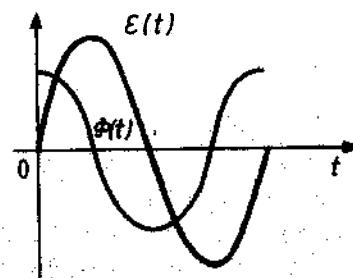


Rys. 43.1

(tutaj kąt jest wyrażany nie w stopniach, lecz w radianach). Stąd znajdujemy

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = BS\omega \sin\omega t.$$

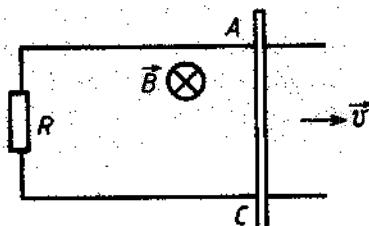
Na rysunku 43.2 pokazano zależność od czasu strumienia i szybkości jego zmiany, tj. zależność od czasu siły elektromotorycznej \mathcal{E}_i . Otrzymaliśmy wynik stwierdzający, że w ramce obracającej się ze stałą prędkością kątową w jednorodnym polu magnetycznym indukuje się przemienna siła elektromotoryczna, zmieniająca się w czasie sinusoidalnie.



Rys. 43.2

Zadania

- 43.1.** Po dwóch prętach metalowych połączonych oporem $R = 10 \Omega$ porusza się (stale zachowując kontakt elektryczny) zwora metalowa AC z prędkością $v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Układ znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = 1 \text{ T}$ skierowanej prostopadle do płaszczyzny obwodu (rys. 43.3). Oblicz moc P związaną z przesuwaniem zwory, wiedząc, że płynie przez nią stały prąd indukcyjny. Długość zwory $l = 0,5 \text{ m}$. Oblicz także natężenie tego prądu. Pomiń opór prętów i zwory.

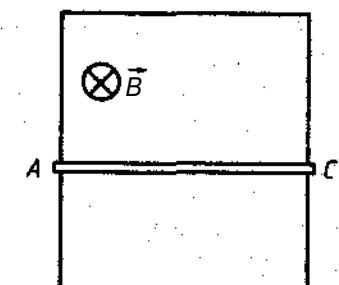


Rys. 43.3

- 43.2.** W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\Phi = 0,1 \text{ T}$ znajduje się przeciety pierścień z drutu (zwój), którego pole powierzchni $S = 5 \text{ cm}^2$, a opór $R = 2 \Omega$. Płaszczyzna pierścienia jest prostopadła do linii indu-

cji magnetycznej pola. Do kohców pierścienia przyłączono galwanometr. Oblicz ładunek q przepływający przez galwanometr w wyniku obrócenia pierścienia o kąt $\alpha = 120^\circ$.

- 43.3.** W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji magnetycznej B skierowanej poziomo umieszczono konstrukcję przedstawioną na rysunku 43.4. Płaszczyzna konstrukcji jest prostopadła do linii indukcji pola magnetycznego. Zwora AC swobodnie ślizga się po przewodach bez zrywania kontaktu. Rys. 43.4



elektrycznego. Oblicz indukcję B , jeśli zwora osiąga maksymalną prędkość $v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Gęstość materiału zwory $d = 8,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, jego oporność elektryczna (opór właściwy) $p = 1,75 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$.

44. Czy znasz pojęcia samoindukcji i indukcyjności?

Autor: Porozmawiamy o zjawisku samoindukcji.

Czytelnik B: Wydaje mi się, że właśnie teraz nadszedł stosowny moment, aby zadać pytanie: dlaczego przepaliła się żarówka?

Autor: Co masz na myśli?

Czytelnik B: Czytałem, że gdy wyłączamy światło, w obwodzie elektrycznym w wyniku zjawiska samoindukcji powstaje dodatkowy prąd. Ten prąd nosi nazwę prądu rozwierania. Rezultat jest taki, że całkowity prąd płynący przez żarówkę w tym właśnie momencie ulega wzmacnieniu i żarówka może się przepalić. Wprawdzie nie wiem, jak można by bliżej wyjaśnić powstanie prądu rozwierania. ale...

Czytelnik A: Nie jeden raz widziałem, że żarówka się przepaliła, ale

wcale nie w chwili wyłączania, lecz odwrotnie — w chwili włączania. Po naciśnięciu wyłącznika światło na chwilę zapala się i to dość jasno. Właśnie w tym momencie następuje przepalenie żarówki.

Czytelnik B: Rzeczywiście, tak to się odbywa. Ja też to obserwowałem. Wydaje się, że nie ma to nic wspólnego z prądami rozwierania.

Autor: Spróbujmy po kolej wyjaśnić to zjawisko. Najpierw chcę powiedzieć, że przepalenie się żarówki w mieszkaniu w chwili włączania światła nie ma żadnego związku z samoindukcją.

Aby można było obserwować jakieś przejawy samoindukcji, w obwodzie powinna być wystarczająco duża indukcyjność (o indukcyjności porozmawiamy za chwilę). W zwykłej domowej sieci elektrycznej indukcyjność jest niewielka. Przepalenie się żarówki jest tutaj związane z faktem, że opór przewodnika wzrasta ze wzrostem jego temperatury. Po włączeniu światła temperatura włókna żarówki wzrasta od pokojowej do 2400°C, przy czym także wzrasta, i to dosyć znacznie, opór włókna w żarówce. Przewidziany dla żarówki opór jest jej oporem w stanie roboczym. Znaczy to, że w chwili włączania, gdy włókno żarowe w żarówce jeszcze nie zdążyło się rozgrzać, jego opór jest mniejszy od zaprojektowanego. Przy danym napięciu w sieci moc wydzielana we włóknie żarówki zgodnie z wzorem (40.3), jest większa od mocy zaprojektowanej dla żarówki. Dlatego właśnie żarówka może się przepalić.

Czytelnik B: A co z prądami rozwierania?

Autor: Takie prady rzeczywiście istnieją. Dają one o sobie znać w przemysłowych obwodach prądu przemiennego, mających znaczne indukcyjności. Prady rozwierania rzeczywiście wiążą się ze zjawiskiem samoindukcji. A ponieważ już wyjaśniliśmy powstałe nieporozumienie, możemy przejść wreszcie do tego zjawiska.

Przy zmianie natężenia prądu w obwodzie będzie także zmieniały się strumień pola magnetycznego wytwarzanego przez ten prąd. W wyniku tego w tym samym obwodzie będzie indukowana pewna siła elektromotoryczna. Zjawisko to nazywa się samoindukcją, natomiast wspomniana siła elektromotoryczna — to siła elektromotoryczna samoindukcji.

Załóżmy, że w obwodzie płynie prąd stały. Po przerwaniu obwodu natężenie prądu gwałtownie maleje. Zatem zmniejsza się również strumień pola magnetycznego przenikający przez dany obwód.

Zgodnie z prawem Faradaya powstaje siła elektromotoryczna indukcji (w tym wypadku — samoindukcji). Zgodnie z regułą Lenza kierunek tej siły elektromotorycznej powinien być taki, aby wystąpiło przeciwdziałanie zewnętrznej przyczynie doprowadzającej do zmniejszenia strumienia magnetycznego. Wynika stąd, że prąd indukcyjny rozwierania będzie skierowany tak samo jak prąd płynący i będzie podtrzymywać zanikający prąd płynący wcześniej. Wyłączenie powoduje przede wszystkim pojawienie się znacznego napięcia indukcyjnego (powoduje ono przeskok iskry w miejscu przerwania obwodu). Oczywiście przy włączaniu powstaje prąd indukcyjny zwierania o kierunku przeciwnym do kierunku prądu podstawowego (przy tym wypadkow natężenie prądu łagodnie wzrasta od zera do pewnej ustalonej wartości).

W jednych obwodach zjawisko samoindukcji przejawia się silniej, w innych słabiej. Na przykład samoindukcja dla przewodu prostoliniowego przejawia się znacznie słabiej, niż dla tego samego przewodu zwiniętego w spiralę (solenoid). W związku z tym wprowadzono specjalną wielkość, która charakteryzuje właściwości samoindukcyjne obwodu — jego indukcyjność. Zgodnie z prawem Biota-Savarta-Laplace'a indukcja pola jest proporcjonalna do natężenia prądu. Z drugiej strony strumień magnetyczny jest proporcjonalny do indukcji. Stąd strumień magnetyczny zależy od natężenia prądu następująco:

$$\Phi = LI. \quad (44.1)$$

Współczynnik proporcjonalności L nazywa się indukcyjnością danego obwodu. Jej jednostką w układzie SI jest henr (H). Indukcyjność przewodu wynosi jeden henr, jeżeli płynący w nim prąd o natężeniu 1 A wytwarza strumień magnetyczny równy 1 Wb.

Czytelnik A: Z pojęciem indukcyjności już się zetknąłem. Występowało ono przy rozpatrywaniu drgari elektromagnetycznych w obwodzie zamkniętym. Mam na myśli wzór na okres drgari

$$T = 2\pi\sqrt{L/C}. \quad (44.2)$$

Autor: Masz rację. Zwróć uwagę, że w celu zwiększenia indukcyjności obwodu zwija się przewód, nadając mu kształt solenoidu. Czasem w literaturze nazwę „indukcyjność” stosuje się w innym znaczeniu,

odnosząc ją do samego solenoidu (mówiąc się: „obwód drgan składa się z pojemności i indukcyjności”).

Na zakończenie spróbujcie wyprowadzić wzór na indukcyjność solenoidu, jeżeli dane są: natężenie prądu I , liczba zwojów N , długość solenoidu l , pole jednego zwoju S .

Czytelnik B: Skorzystam z wzorów (41.4) i (41.5). Indukcję pola magnetycznego wewnętrz solenoidu wyraża wzór

$$B = \mu_0 I \frac{N}{l}. \quad (44.3)$$

Strumień jest równy $\Phi = BS$.

Autor: W tym miejscu się pomyliłeś. Trzeba uwzględnić całkowity strumień przepływający przez wszystkie N zwojów solenoidu. Zatem

$$\Phi = NBS. \quad (44.4)$$

Czytelnik B: Po podstawieniu (44.3) do (44.4), a następnie skorzystaniu z (44.1), otrzymuję kolejno

$$\Phi = NBS = N\mu_0 I \frac{N}{l} S = \mu_0 I \frac{N^2 S}{l} = LI,$$

skąd ostatecznie

$$\mu_0 = \frac{N^2 S}{l}. \quad (44.5)$$

Autor: Nie mam zastrzeżeń.

45. Czy wiesz, jak się odbijają i załamują promienie świetlne?

Pierwsza optyka geometryczna ludzka zna od dawna. Jedenik do zauważania naszych kątów mimo wiejskiej prostoty opisują złożone zjawiska. Ale nie znamy pojęcia ośrodku, ponieważ zawsze mówiliśmy o ośrodkach ziemskich, rzek, jezior, mórz, ale nie o ośrodkach rzeczywistych, takich jak powietrze, woda, szkło, kryształy itp.

Autor:

Proszę sformułować prawo odbicia i załamania światła.

Czytelnik A:

Prawo odbicia: Kąt padania światła równy jest kątem odbicia.
Prawo załamania: Stosunek sinusa kąta padania światła do sinusa kąta załamania jest równy współczynnikowi załamania ośrodka.

Autor: Takie sformułowania są niedokładne. Po pierwsze nie powiedziałeś, że

promień padający i odbity (albo załamany) oraz prosta prostopadła do granicy ośrodków, na której zachodzi odbicie (albo załamanie), wystawiona w punkcie padania promienia leży w jednej płaszczyźnie.

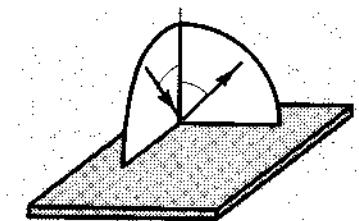
Przecież jeżeli tego się nie powie, można sobie wyobrazić odbicie na przykład tak jak pokazano na rysunku 45.1, czego w rzeczywistości nie spotykamy. Po wtóre, twoje sformułowanie prawa załamania odnosi się do przykładu szczególnego: padania promienia z powietrza na granicę jakiegoś ośrodka. Niech w ogólności promień pada z ośrodka o współczynniku załamania n_1 na granicę z ośrodkiem o współczynniku załamania n_2 . Oznaczmy kąt padania przez α_1 , a kąt załamania — przez α_2 . W tym wypadku prawo załamania można zapisać w postaci

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (45.1)$$

Stąd wynika twoje sformułowanie pod warunkiem, że dla powietrza $n_1 = 1$.

Rozwiążmy zadanie.

Moneta leży w wodzie na głębokości H . Będziemy patrzeć na nią z góry w kierunku pionowym. Na jakiej głębokości zobaczymy monetę?



Rys. 45.1

Czytelnik A: Wiem, że powstaje wrażenie uniesienia monety. Odpowiedzieć bardziej konkretnie nie potrafię.

Autor: Poprowadźmy z punktu O monety dwa promienie OA i OB_1B (rys. 45.2a). Promień OA nie załamuje się (jest pionowy), promień OB_1B załamuje się. Przypuśćmy, że te dwa rozbieżne promienie trafiają do oka. Oko zobaczy obraz monety w punkcie przecięcia się rozbieżnych promieni AO i BB_1 , czyli w punkcie O_1 . Z rysunku widać, że poszukiwana odległość h jest związana z głębokością H zależnością

$$h \operatorname{tg} \alpha_1 = H \operatorname{tg} \alpha_2,$$

stąd

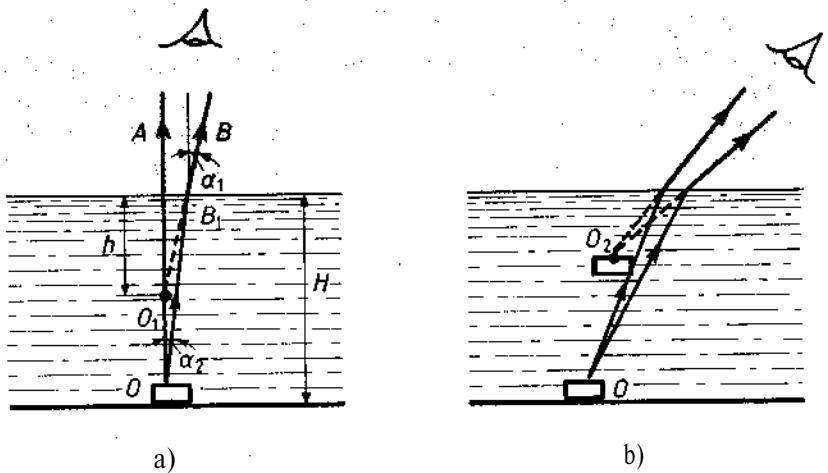
$$h = H \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1}. \quad (45.2)$$

Ze względu na niewielkie wartości kątów α_1 i α_2 można zastosować przybliżony wzór

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx a \quad (45.3)$$

(kąt wyrażony jest nie w stopniach, lecz w radianach). Wykorzystując (45.3), zapiszemy wzór (45.2) w innej postaci

$$h \approx H \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = ? \quad (45.4)$$



Rys. 45.2

Ponieważ dla wody $n = \frac{4}{3}$, to $h = \frac{3}{4}H$.

Czytelnik B: A gdzie będzie widać obraz, jeżeli spojrzy się na monetę nie pionowo, lecz nieco z boku?

Autor: W tej sytuacji będzie się wydawać, że moneta nie tylko jest uniesiona, ale że jest również przesunięta w stronę obserwatora (rys. 45.2b). Oczywiście obliczenia w tym wypadku znacznie się komplikują. Rozwiążmy zadanie.

Nurek wzroście h stoi na dnie jeziora o głębokości H , Obliczyć minimalną odległość od punktu, gdzie stoi nurek, do tych punktów dna, które może on zobaczyć wyniku całkowitego odbicia światła od powierzchni wody.

Czytelnik A: Takie zadania potrafię rozwiązywać. Oznaczmy poszukiwaną odległość przez L . Bieg promienia z punktu A do oka nurka pokazano na rysunku 45.3. Spośród punktów, które nurek może zobaczyć w wyniku całkowitego odbicia od powierzchni wody, punkt A jest punktem położonym najbliżej nurka. Na przykład promień wychodzący z bliższego punktu B nie odbija się, lecz załamuje (linia kreskowa na rys. 45.3). Kąt α_0 jest kątem całkowitego odbicia. Może być obliczony z wzoru

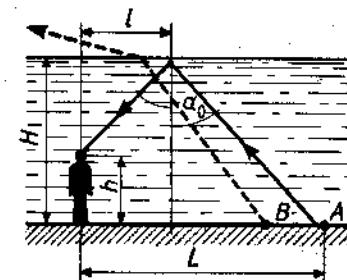
$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{n}. \quad (45.5)$$

Z rysunku łatwo zauważyć, że

$$L = h \operatorname{tg} \alpha_0 + 2(H - h) \operatorname{tg} \alpha_0 = (2H - h) \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Ponieważ

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}},$$



Rys. 45.3

po skorzystaniu z (45.5) otrzymujemy

$$L = \frac{2H-h}{\sqrt{n^2-1}}. \quad (45.6)$$

Podstawiając $n = \frac{4}{3}$, znajdujemy, że $L = \frac{2}{\sqrt{7}}(2H-h)$.

Autor: Całkiem słusznie. A co będzie widział nurek nad swoją głową?
Czytelnik A: Nad głową będzie widział jasne koło o promieniu

$I = \frac{u}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{7}}(H-h)$. Poza granicą tego koła będzie widział obrazy przedmiotów znajdujących się na dnie.

Czytelnik B: A jeśli dno, na którym stoi nurek, nie jest poziome, lecz pochyłe?

Autor: Wtedy odległość L będzie zależna od tego, w jakim kierunku nurek patrzy. Nietrudno sobie wyobrazić, że jest ona minimalna, gdy nurek patrzy w kierunku wznoszenia się dna, a maksymalna, gdy nurek patrzy w przeciwną stronę. Wynik otrzymany w poprzednim zadaniu będzie teraz miał zastosowanie wtedy, gdy nurek patrzy w kierunku, w którym wysokość dna nie zmienia się (równolegle do brzegu). Zadanie z pochyłym dnem polecam do rozwiązania samodzielnego (zadanie 45.2).

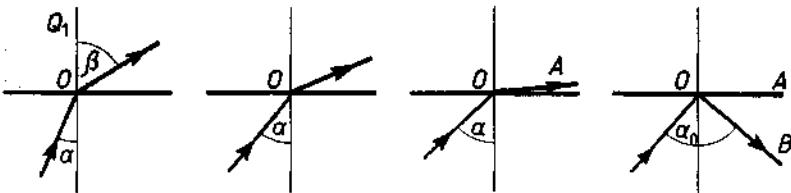
Czytelnik B: Rozwiązanie zadania było oparte na znajomości zjawiska całkowitego wewnętrznego odbicia. Samo to zjawisko wydaje mi się nieco zagadkowe, niezupełnie je rozumiem. Sądzę, że przy ciągłej zmianie kąta padania promienia może wystąpić skokowa zmiana jego dalszego biegu.

Autor: Co masz na myśli?

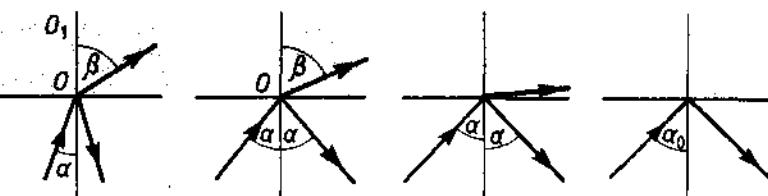
Czytelnik B: Objaśnię moją wypowiedź za pomocą rysunku 45.4. Stopniowo zwiększam kąt padania α . Przy tym promień załamany coraz bardziej odchyla się od prostej prostopadłej OO_1 , kąt β staje się coraz większy. I oto następuje sytuacja, gdy kąt β osiąga wartość 90° . Gdy teraz kąt α zostanie zwiększyły choćby minimalnie, to promień OA skokowo przekształca się w promień OB . I to jest właśnie dla mnie zagadkowe.

Autor: Ale przecież twój rysunek jest błędny! Oto poprawny rysunek (rys. 45.5).

Czytelnik B: Nie rozumiem.



Rys. 45.4



Rys. 45.5

Autor: Wszystko jest bardzo proste. Trzeba wziąć pod uwagę, że przy padaniu promienia na granicę dwóch ośrodków tworzą się dwa promienie — załamany i odbity. Istotne jest to, że w miarę zwiększania kąta padania a natężenie promienia załamanego maleje w sposób ciągły, a odbitego — ciągle wzrasta. Gdy kąt β dojdzie do 90° , natężenie promienia odbitego staje się równe natężeniu promienia padającego. Jak widzicie, żadnego skoku tutaj nie ma.

Czytelnik A: Czy można zmienić kierunek promienia, ustawiając na jego drodze układ złożony z płasko-równoległych przezroczystych płytaków?

Autor: A jak myślisz?

Czytelnik A: Myślę, że w zasadzie można, przecież na płytach promien się załamuje, zmienia się jego kierunek.

Czytelnik B: Nie zgadzam się. Po wyjściu z płytaków promień mimo wszystko będzie równoległy do kierunku pierwotnego.

Autor: Udowodnij to na przykładzie stosu kilku płytaków o różnych współczynnikach załamania.

Czytelnik B: Wezmę trzy płytaki, których współczynniki załamania są równe n_1 , n_2 i n_3 . Bieg promienia przechodzącego przez ten

układ pokazano na rysunku 45.6. Rozpatrując załamanie promienia na każdej z istniejących granic, zapiszemy

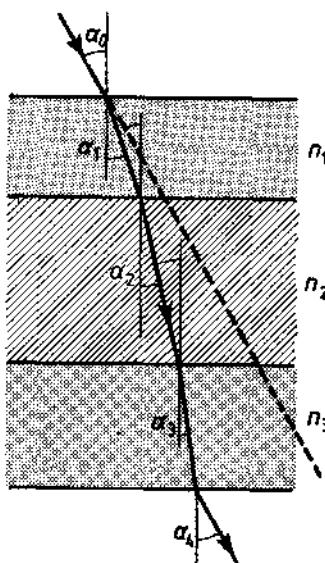
$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} = n_1, \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} = \frac{n_3}{n_2}, \quad \frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_4} = \frac{1}{n_3}.$$

Mnożąc lewe i prawe strony tych równań, otrzymujemy

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_4} = 1.$$

Stąd wynika, że $\alpha_0 = \alpha_4$, co Rys. 45.6



Autor: Zupełnie słusznie.

A teraz zastanowimy się nad tym, jakie są granice stosowności praw optyki geometrycznej.

Czytelnik B: Prawa te nie mogą być stosowane, gdy pewne charakterystyczne rozmiary, na przykład średnica przeszkody na drodze światła lub otworu w ekranie, są dostatecznie małe — rzędu długości fali świetlnej. Wtedy przejawiają się falowe właściwości światła.

Autor: Taką właśnie odpowiedź zwykle słyszy się na egzaminach. Można się z nią zgodzić, chociaż nie jest w pełni wyczerpująca. W każdym razie jest tutaj zawarta słuszna myśl, że prawa optyki geometrycznej mają ograniczenie związane z długością fali świetlnej. A czy istnieją ograniczenia stosowności praw optyki geometrycznej, o ile tak można powiedzieć, po drugiej stronie — po stronie wielkich odległości?

Czytelnik B: Jeżeli rozpatrywane odległości są większe od długości fali światła, to prawa optyki geometrycznej dobrze opisują zachowanie się światła. Tak nam przynajmniej mówiono wcześniej. Myślę, że duże odległości nie ograniczają stosowania praw optyki geometrycznej.

Autor: Mylisz się. Wyobraź sobie następującą sytuację. W przestrzeni kosmicznej wysłano promień światła, przy czym możliwość jego rozproszenia jest całkowicie wykluczona. Założmy, że aparat wysyłający promień światła obracał w czasie jednej sekundy o kąt 60° . Nasuwa się pytanie: Z jakimi prędkościami powinny przemieszczać się podczas obrotu te punkty promienia, które znajdują się w odległościach przekraczających 300 000 km od aparatu?

Czytelnik B: Rozumiem pytanie. Takie punkty powinny przemieszczać się z prędkościami większymi niż prędkość światła. Jednak zgodnie z teorią względności, nie mogą istnieć prędkości większe od prędkości światła w wypadku ciał materialnych. Natomiast tutaj jest mowa o promieniu.

Autor: Czy zatem promień światła jest niematerialny? Jak widzicie, optyka geometryczna nie ma zastosowania na zbyt wielkich odległościach. W tym wypadku należy uwzględnić fakt, że wiązka światła, której osią jest dany promień, to strumień cząstek światła (strumień fotonów). Fotony, które wyleciały z aparatu wcześniej zanim został obrócony, niczego „nie wiedzą” o wykonanym obrocie i kontynuują swój ruch w tym kierunku, w jakim zostały wysłane. W nowym kierunku polecam nowe fotony. Tak więc nie występuje żaden obrót promienia jako całości.

Czytelnik B: A jak można by określić ilościowo granice stosowności praw optyki geometrycznej dla wielkich odległości?

Autor: Odległości powinny być takie, aby czas, który ma światło na ich przebycie, był dużo mniejszy od czasów rozpatrywanych, na przykład dużo mniejszy od czasu obracania aparatu wysyłającego promień świetlny. Wtedy promień jako całość nie ulega destrukcji, można więc stosować prawa optyki geometrycznej.

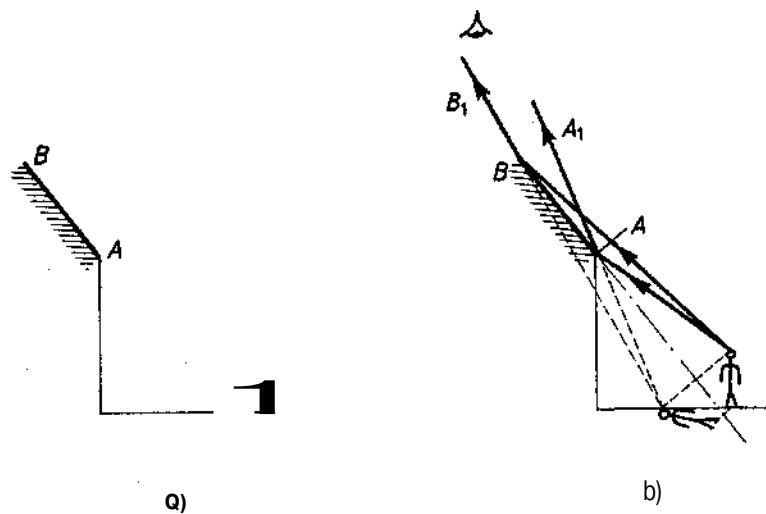
Zadania

- 45.1.** Patrzymy pionowo z góry na przedmiot nakryty płyta szklana, na którą została nalana woda. Grubość płyty $d_1 = 5$ cm, warstwy wody $d_2 = 10$ cm. Współczynnik załamania szkła $n_1 = 1,6$, wody $n_2 = 1,33$. W jakiej odległości h od powierzchni wody będzie widoczny obraz przedmiotu?
- 45.2.** Nurek mający wzrost $h = 1,8$ m stoi na płaskim dnie nachylonym pod kątem $\beta = 15^\circ$ do poziomu na głębokości $H = 5$ m pod powierzchnią wody. Oblicz minimalną odległość L mierzoną po dnie od punktu, gdzie stoi nurek, do tych punktów dna, które nurek może zobaczyć w wyniku całkowitego wewnętrznego odbicia od powierzchni wody.
- 45.3.** Dana jest płyta szklana o grubości $d = 5$ cm i o współczynniku załamania $n = 1,5$. Dla jakiego kąta padania a z powietrza promienie odbity i załamany przez płytę będą wzajemnie prostopadłe? Oblicz dla tego kąta padania przesunięcie x promienia w wyniku przejścia przez płytę.
- 45.4.** Dana jest płyta szklana o grubości d i współczynniku załamania n . Kąt padania promienia z powietrza na płytę jest równy kątowi całkowitego wewnętrznego odbicia dla szkła, z którego wykonano płytę. Oblicz przesunięcie x promienia po przejściu przez płytę.

46. Czy umiesz konstruować graficznie obrazy wytwarzane za pomocą zwierciadeł i soczewek?

Autor: Często absolwenci przystępujący do egzaminu nie potrafią poprawnie wykonać konstrukcji graficznej obrazów wytwarzanych przez zwierciadła płaskie i kuliste, soczewki i rozmaite układy optyczne. Przeanalizujemy kilka przykładów.

Wyznaczyć konstrukcyjnie obraz człowieka wytworzony przez zwierciadło płaskie w sytuacji przedstawionej na rysunku 46.1a.



Rys. 46.1

Czytelnik A: Wydaje mi się, że obraz nie powstanie, gdyż zwierciadło jest umieszczone zbyt wysoko.

Autor: Mylisz się. Obraz zostanie wytworzony. Jego konstrukcję przedstawiono na rysunku 46.1b. Nietrudno się przekonać, że w celu skonstruowania obrazu wystarczy przedłużyć płaszczyzny zwierciadła i już można wskazać, gdzie powstanie obrazu człowieka. Położony jest on jak wiadomo, symetrycznie względem płaszczyzny zwierciadła.

Czytelnik A: Ale czy ten człowiek zobaczy swój obraz?

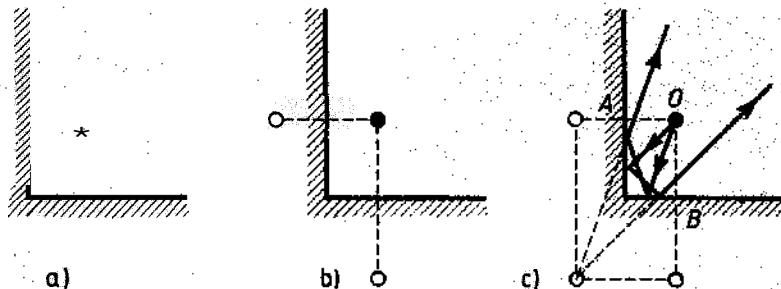
Autor: To już inne pytanie. Człowiek rzeczywiście nie zobaczy swojego obrazu. A to dlatego, że zwierciadło jest zbyt wysoko i że jest nieodpowiednio nachylone. Obraz człowieka w tym zwierciadle zobaczą tylko ci obserwatorzy, którzy znajdują się w granicach kąta wyznaczonego przez promienie AA_1 i BB_1 . Należy przypomnieć ogólną zasadę:

do określonej powierzchni wyciągnięty promień odbiciowy jest równoległy do odbijającego się promienia, a jego przedłużeniem jest oś odbicia.

(Na rysunkach 45.2 i 46.1b widzimy obraz w miejscu przecięcia się przedłużen).

Rozpatrzmy konstrukcję obrazu tworzonego przez układ dwóch wzajemnie prostopadłych zwierciadł płaskich (rys. 46.2a).

Czytelnik A: W tym wypadku nastąpi odbicie światła wychodzącego z przedmiotu od dwóch płaszczyzn zwierciadlnych, w wyniku czego otrzyma się dwa obrazy (rys. 46.2b)



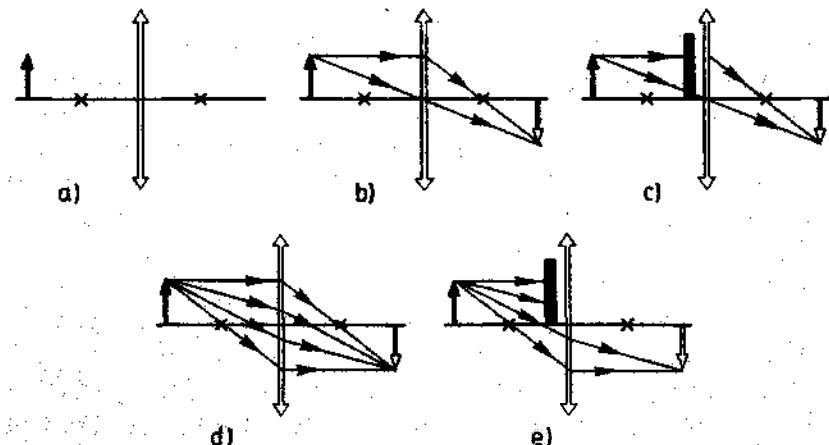
Rys. 46.2

Autor: Zgubiłeś jeszcze trzeci obraz. Zwróć uwagę na to, że promienie, które wyszły z przedmiotu w granicach kąta prostego AOB (rys. 46.2c) podlegają nie jednemu, lecz dwóm odbiciom: najpierw od jednego, a potem od drugiego zwierciadła.

Na rysunku 46.2c pokazano bieg dwóch takich promieni. Punkt przecięcia ich przedłużen, po dwukrotnym odbiciu, określa położenie trzeciego obrazu przedmiotu. Teraz rozpatrzymy kilka przykładów konstrukcji obrazów tworzonych przez soczewkę skupiąjącą.

Znaleźć konstrukcyjnie obraz przedmiotu wytworzony przez soczewkę, w sytuacji przedstawionej na rysunku 46.3a.

Czytelnik A: To bardzo proste. Moją konstrukcję pokazano na rysunku 46.3b.



Rys. 46.3

Autor: Dobrze.

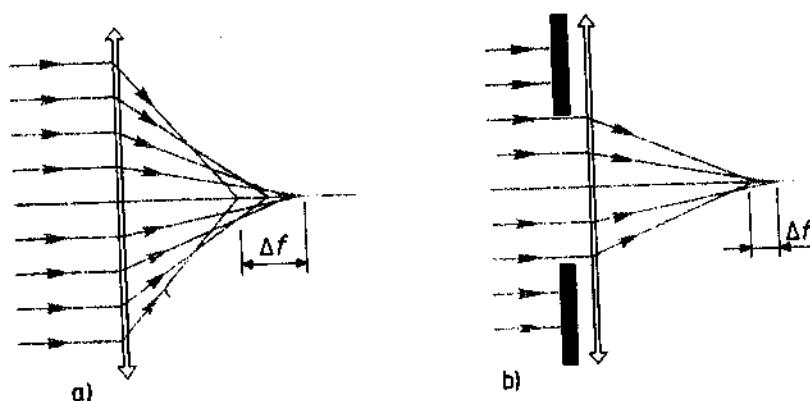
Wyobraż sobie, że połowa soczewki zasłonięto nieprzezroczystym ekranem (rys. 46.3c). Co się wtedy stanie z obrazem?

Czytelnik A: Obraz zniknie.

Autor: Mylisz się. Zapominasz, że obraz dowolnego punktu przedmiotu (na przykład końca strzałki) uzyskuje się w wyniku przecięcia się nie tylko dwóch promieni, lecz nieskończoności wielkiej ich liczby (rys. 46.3d). Zwykle ograniczamy się do dwóch promieni, gdyż wystarczą one do wyznaczenia położenia obrazu. Ekran w danym zadaniu zatrzymuje tylko część promieni padających na soczewkę. Pozostała część przechodzi przez soczewkę i tworzy obraz przedmiotu (rys. 46.3e). Ponieważ teraz w utworzeniu obrazu uczestniczy mniej promieni, uzyskuje się obraz mniej jasny.

Czytelnik B: Z Pana objaśnien wynika, że przez zasłonięcie części soczewki nieprzezroczystym ekranem zmieniamy tylko jasność obrazu. Jednak wszyscy, którzy zajmują się fotografią, wiedzą, że przysłaniając obiektyw aparatu, tj. zmieniając powierzchnię czynną soczewki, obok zmniejszenia jasności uzyskuje się także inny efekt – obraz staje się ostrzejszy. Jak to objaśnić?

Autor: Zadałeś jak najbardziej właściwe pytanie. Otóż wszystkie nasze konstrukcje wykonujemy przy założeniu, że możemy pominąć defekty układów optycznych (w tym zadaniu — soczewek). To prawda, że tutaj termin „defekty” (czy „wady”) nie jest najlepszy, ponieważ mamy na myśli nie jakieś przypadkowe niedoskonałości soczewek, lecz raczej ich zasadnicze właściwości. Wiadomo, że jeśli dwa promienie równoległe do głównej osi optycznej padają na soczewkę w różnej odległości od osi, to po załamaniu przez soczewkę promień te przetną główną oś optyczną w różnych punktach (rys. 46.4a), wtedy ognisko soczewki (punkt przecięcia wszystkich promieni równoległych do głównej osi optycznej) będzie rozmyte, obraz przedmiotu będzie nieostry. Im większa jest szerokość wiązki promieni, tym większe jest wspomniane rozmycie. Gdy przysłaniamy soczewkę za pomocą diafragmy (przysłony), przechodzi przez nią coraz węższa wiązka promieni, w wyniku czego nieostrość obrazu trochę się zmniejsza (rys. 46.4b).



Rys. 46.4

Czytelnik B: Czy można to rozumieć w ten sposób, że przysłaniając soczewkę kosztem jasności obrazu zwiększymy jego ostrość?

Autor: Dokładnie tak (chociaż nie mówiliśmy tutaj o tzw. głębi ostrości). Jednak trzeba pamiętać, że konstruując obrazy, egzaminowani mają prawo zakładać, iż

wia/ka promieni równoległych była skierowana wzdłuż osi; jeśli natomiast wiązka promieni równoległych była skierowana pod pewnym katem do głównej osi optycznej, wtedy punkt przecięcia promieni leży w płaszczyźnie ogniskowej.

Przy tym jest istotne, aby egzaminowani rozumieли, że takie podejście jest przybliżone; bardziej dokładne wymaga wprowadzenia poprawek uwzględniających wady układów optycznych.

Czytelnik A: A co to jest płaszczyzna ogniskowa soczewki?

Autor: To płaszczyzna przechodząca przez ognisko soczewki i prostopadła do głównej osi optycznej.

Zajmiemy się pytaniem:

Czym różni się obraz wytworzony przez zwierciadło płaskie od obrazu otrzymanego za pomocą soczewki skupiającej w przykładowie przedstawionym na rysunku 46.3?

Czytelnik A: Obraz uzyskany za pomocą zwierciadła jest pozorny, natomiast obraz wytworzony przez soczewkę jest rzeczywisty.

Autor: Masz rację.

Wyjaśnij dokładniej, na czym polega różnica między obrazami pozornymi i rzeczywistymi.

Czytelnik B:

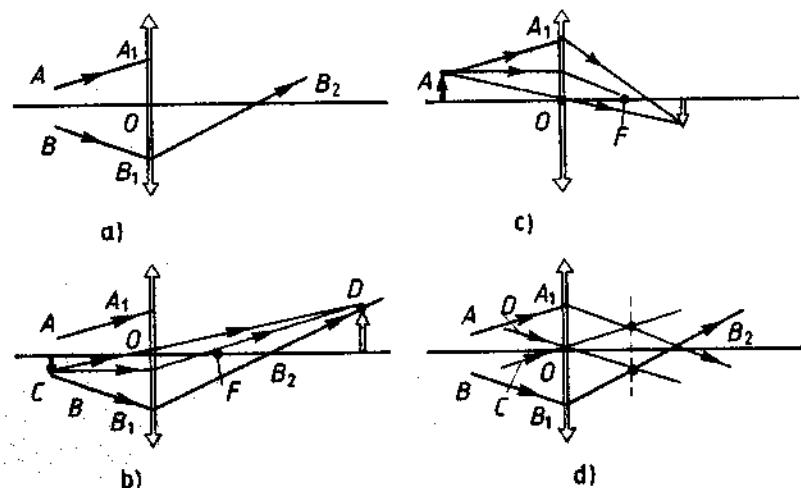
Obraz pozorny tworzy się w wyniku przecięcia nie samych promieni, lecz ich przedłużenia, a rzeczywisty — tworzy się w wyniku przecięcia samych promieni.

Nic dziwnego, że obraz pozorny może znajdować się gdzieś za ścianą — tam, gdzie promienie w żaden sposób nie mogą się znaleźć.

Autor: Słusznie.

Obraz pozorny nie ma żadnego ogniska, potem nie ma żadnego punktu skupienia, potem nie ma żadnego punktu skupienia, potem nie ma żadnego punktu skupienia, potem nie ma żadnego punktu skupienia,

Weźmy pod uwagę przykład zilustrowany na rysunku 46 za



Rys. 46.5

Wyznaczyć konstrukcyjnie kierunek promienia AA_1 po jego przejściu przez soczewkę skupiającą, jeżeli znany jest bieg innego promienia BB_1B_2 przechodzącego przez tę soczewkę.

Czytelnik A: Przecież nie znamy ogniskowej soczewki!

Autor: Za to dany jest bieg innego promienia przed i za soczewką.

Czytelnik A: Nigdy nie robiliśmy takich konstrukcji.

Czytelnik B: Myślę, że na początku trzeba wyznaczyć ogniskową soczewki. W tym celu można narysować gdziekolwiek na lewo od soczewki pionową strzałkę tak, aby jej koniec znajdował się na promieniu BB_1 . Oznaczmy ten koniec literą C (rys. 46.5b). Następnie z punktu C prowadzimy promień przez środek soczewki, który przejdzie przez nią bez załamania i w punkcie D przetnie się z promieniem B_1B_2 . Punkt Z jest oczywiście obrazem korica naszej strzałki. Teraz pozostało poprowadzić z końca strzałki C trzeci promień, równoległy do głównej osi optycznej soczewki. Po załamaniu się promien ten powinien przejść przez znany nam już obraz korica strzałki, tj. punkt D. Punkt przecięcia tego trzeciego promienia z osią główną jest właśnie poszukiwanym ogniskiem soczewki. Opisaną konstrukcję przedstawiono na rysunku 46.5b.

Następnie, znając ogniskową soczewki, wykreślimy dalszy bieg promienia AA_1 po jego przejściu przez soczewkę. W tym celu narysujemy jeszcze jedną strzałkę, której koniec powinien znajdować się na promieniu AA_1 (rys. 46.5c). Wykorzystując znalezioną ogniskową (położenie ogniska) soczewki, konstruujemy obraz drugiej strzałki. Poszukiwany promień (dalszy bieg promienia AA_1) przejdzie przez punkt A_1 i koniec obrazu strzałki. Konstrukcje te pokazano na rysunku 46.5c.

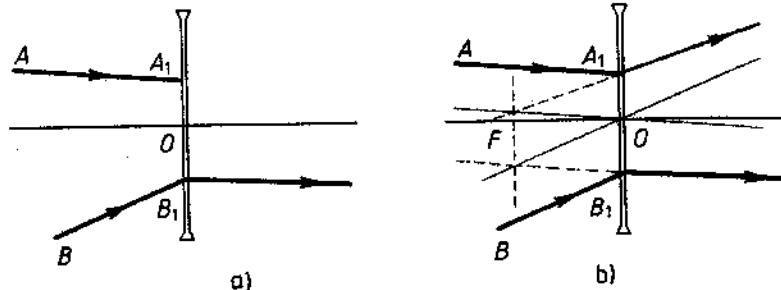
Autor: Twoje rozważania są słusze — odnajdujesz obraz pewnego przedmiotu pomocniczego (strzałki). Zwracam uwagę, że metoda ta jest wygodna, gdy na przykład trzeba określić położenie obrazu punktu świecącego leżącego na głównej osi optycznej soczewki. Wtedy z punktu świecącego należy wystawić strzałkę i następnie wykonać konstrukcję jej obrazu. Podstawa obrazu strzałki jest poszukiwanym obrazem punktu świecącego. Jednak w rozpatrywanym powyżej przykładzie ta metoda jest zbyt uciążliwa. Istnieje prostsza metoda konstrukcyjna. Aby otrzymać ognisko soczewki, poprowadźmy przez jej środek promień DO , równoległy do promienia BB_1 (rys. 46.5d). Te dwa promienie, ponieważ są równoległe, przecinają się za soczewką w płaszczyźnie ogniskowej (przekrój płaszczyzny ogniskowej zaznaczono na rysunku 46.5d linią kreskową). Następnie poprowadźmy przez środek soczewki promień CO , równoległy do AA_1 . Opierając się na tym, że te dwa promienie również powinny przeciąć się za soczewką w płaszczyźnie ogniskowej, określamy kierunek promienia AA_1 po jego przejściu przez soczewkę. Jak widzicie, wynik uzyskaliśmy znacznie prościej.

Czytelnik B: Tak, ta metoda konstrukcyjna jest znacznie prostsza.

Autor:

Spróbujcie rozwiązać tym sposobem analogiczne zadanie, w którym zamiast soczewki skupiającej zastosowano soczewkę rozpraszającą (rys. 46.6a).

Czytelnik B: Poprowadzę promień równoległy do promienia BB_1 i przechodzący przez środek soczewki (rys. 46.6b). W odróżnieniu od poprzedniego zadania teraz będą się przecinać te same promienie, ale ich przedłużenia (zauważmy, że dla promienia przechodzącego przez środek przedłużenie jest tąsame / tym



Rys. 46.6

promieniem), w wyniku czego płaszczyzna ogniskowa zawierająca punkt przecięcia będzie teraz nie po prawej, lecz po lewej stronie soczewki (linia kreskowa na rys. 46.6b).

Autor (przerywając): Zaznaczę, że obraz wytworzony za pomocą soczewek rozpraszających jest wsze pozorny.

Czytelnik B (kontynuując): Następnie poprowadzę przez środek soczewki promień równoległy do promienia AA_1 i wykreślę poszukiwany promień, biorąc pod uwagę warunek, że jego przedłużenie przecina się z promieniem równoległym (do AA_1) w płaszczyźnie ogniskowej.

Autor: Dobrze. Odpowiedz, bez wykonywania konstrukcji:

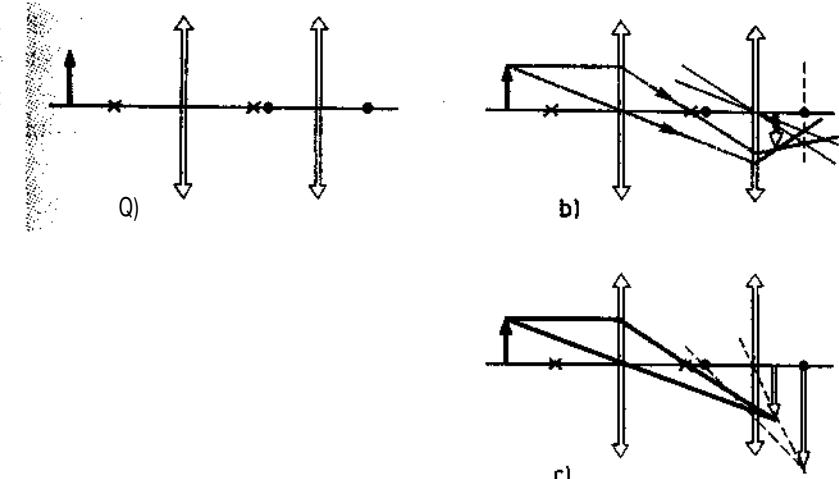
Gdzie powstanie obraz przedmiotu (dosyć długiego i cienkiego), którego jedna część znajduje się przed ogniskiem soczewki skupiającej, a druga część za ogniskiem?

Czytelnik B: Wyobrażę sobie położenia obrazów kilku punktów przedmiotu znajdujących się w różnych odległościach od soczewki. Przy tym punkty położone za ogniskiem dadzą obraz rzeczywisty (będzie się on znajdował po drugiej stronie soczewki), a punkty leżące przed ogniskiem dadzą obraz pozorny (będzie się on znajdował po tej samej stronie soczewki co przedmiot). W miarę zbliżania wybranych punktów do ogniska ich obrazy będą oddalać się do nieskończoności.

Autor: Wspaniale. Tak więc w danej sytuacji obraz przedmiotu

da się z dwóch części (na lewo i na prawo od soczewki), przy czym każda z nich zaczyna się w pewnej skończonej odległości od soczewki i rozciąga się do nieskończoności. Jak widzicie, możliwa jest odpowiedź twierdząca na pytanie: Czy przedmiot może mieć jednocześnie i obraz pozorny, i rzeczywisty? Widzę, że zasady konstruowania obrazów tworzących za pomocą soczewek zrozumieliście wystarczająco dobrze. Dlatego przejdziemy do trudniejszego zagadnienia — konstruowania obrazów wytwarzanych za pomocą układu złożonego z dwóch soczewek. Rozwiążmy zadanie:

Dane są dwie soczewki skupiące, które mają wspólną główną oś optyczną i różne ogniskowe. Wyznaczyć konstrukcyjnie obraz pionowej strzałki, wytwarzany za pomocą takiego układu optycznego (rys. 46.7a). Ogniska jednej soczewki oznaczono na rysunku krzyżykami, a drugiej — kółkami.



Rys. 46.7

Czytelnik B: Aby skonstruować obraz strzałki wytworzony za pomocą układu złożonego z dwóch soczewek, należy najpierw wykreślić jej obraz dawany przez pierwszą soczewkę; drugiej soczewki można nie uwzględniać. Następnie należy ten obraz potraktować jako przedmiot i, nie zwracając uwagi na pierwszą soczewkę, skonstruować jego obraz wytwarzany przez drugą soczewkę.

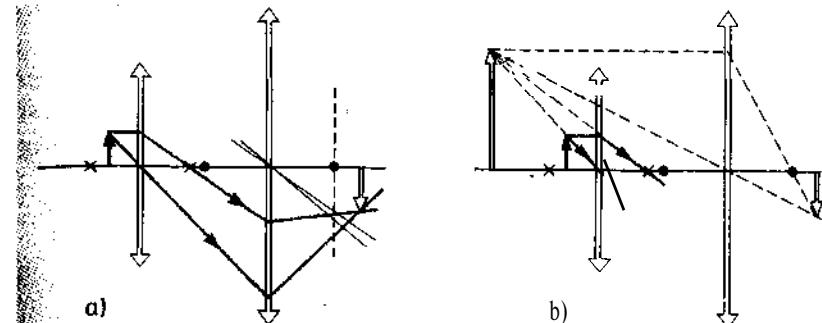
Autor: Popełniłeś tutaj bardzo charakterystyczny błąd. Wielokrotnie miałem okazję słyszeć taką niepoprawną odpowiedź. Weźmy pod uwagę dwa promienie wychodzące z końca strzałki i prześledźmy ich bieg przez dany układ soczewek (rys. 46.7b). Konstrukcja biegu promieni po przejściu przez pierwszą soczewkę jest prosta. Aby wyjaśnić, jaki będzie bieg promieni po przejściu przez drugą soczewkę, poprowadzimy pomocnicze promienie, równoległe do naszych promieni i przechodzące przez środek drugiej soczewki. Przy tym wykorzystamy metodę zastosowaną w poprzednich przykładach (promień równoległy po przejściu przez soczewkę powinny przeciąć się w płaszczyźnie ogniskowej). Właśnie w punkcie przecięcia się promieni po ich przejściu przez drugą soczewkę znajduje się poszukiwany obraz ostrza strzałki. Wszystkie te konstrukcje pokazano na rysunku 46.7b. Teraz popatrzcie, do jakiego doszliśmy wyniku, gdybyśmy skorzystali z twojej propozycji. Zaproponowaną konstrukcję odtworzono na rysunku 46.7c. Tutaj liniami ciągłymi pokazano konstrukcję obrazu tworzonego przez pierwszą soczewkę, a liniami kreskowymi konstrukcję obrazu dawanego przez drugą soczewkę. Jak widzicie, tym sposobem otrzymano by całkiem inny wynik (wynik niepoprawny!).

Czytelnik B: Ale ja dobrze pamiętam, że konstruowaliśmy obrazy jakoś właśnie tym sposobem, o którym powiedziałem.

Autor: Możliwe, że konstruowaliście w ten sposób. Rzec w tym, że twój sposób konstruowania w niektórych sytuacjach okazuje się słuszny, gdyż prowadzi do takich samych wyników, jakie uzyskuje się przy zastosowaniu mojej poprawnej metody. Można to zadeemonstrować na rozpatrzonym przykładzie, pod warunkiem, że przesunie się strzałkę bliżej pierwszej soczewki — jej ognisko. Na rysunku 46.8a pokazano konstrukcję obrazu wykonaną przy zastosowaniu mojej metody, a na rysunku 46.8b — twojej metody. Jak widzicie, w danym przykładzie wyniki są jednakowe.

Czytelnik B: Jak rozstrzygnąć kiedy można się posługiwać moją metodą konstruowania obrazu?

Autor: Dla dwóch soczewek nietrudno sformułować warunek stosowności twojej metody. Dla większej liczby soczewek te warunki się komplikują. Dlatego w ogóle nie ma potrzeby ich rozpatrywania. Posługujcie się zawsze moją metodą i wszystko będzie w porządku. Na zakończenie chce zadać jeszcze jedno pytanie.



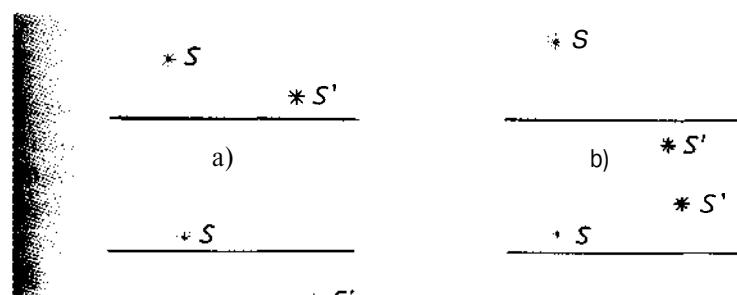
Rys. 46.8

Czy soczewka obustronnie wklesła może być soczewką skupiającą?

Czytelnik B: Wiem, jaka jest odpowiedź na to pytanie. Soczewka dwustronnie wklesła w powietrzu jest soczewką rozpraszającą. Jednak stanie się ona soczewką skupiającą, jeżeli umieści się ją w ośrodku o większym współczynniku załamania aniżeli współczynnik załamania materiału soczewki, soczewka zaś dwuwypukła umieszczona w takim ośrodku będzie światło rozpraszała.

Zadania

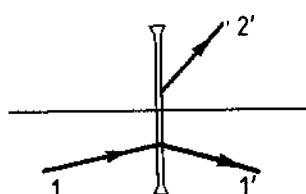
46.1. Na rysunku 46.9 dane są położenia głównej osi optycznej zwierciadła sferycznego, punktu świecącego S i jego obrazu S' .



Rys. 46.9

Wyznacz konstrukcyjnie położenie wierzchołka A zwierciadła i jego ogniska F . Rozpatrz warianty a), b), c), d).

- 46.2. Znajdź konstrukcyjnie bieg promienia 2 przed soczewką rozpraszającą, jeżeli znane jest położenie soczewki i jej głównej osi optycznej, bieg promienia 1 przed i za soczewką oraz bieg promienia 2' po przejściu przez soczewkę (rys. 46.10).



Rys. 46.10

- 46.3. Na rysunku 46.11 pokazane jest położenie przedmiotu i jego obrazu. Znajdź konstrukcyjnie położenie soczewki i jej ognisk.



Rys. 46.11

47. C/y dobrze rozwiążujesz zadania dotyczące zwierciadeł i soczewek?

Autor: Chcę podać kilka ogólnych uwag, które mogą się okazać bardzo użyteczne podczas rozwiązywania zadań dotyczących soczewek i zwierciadeł sferycznych (wypukłych i wklęsłych). Wzory stosowane przy rozwijaniu takich zadań dzieli się na dwie grupy.

Do pierwszej grupy należą wzory wiążące wzajem ogniskową f soczewki (zwierciadła), odległość x przedmiotu

soczewki (zwierciadła), odległość y obrazu od soczewki (zwierciadła):

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f} \quad (47.1)$$

gdzie x, y, f traktowane są jako wielkości, których znak może się zmieniać, zależnie od sytuacji. Przy tym możliwe są tylko trzy następujące warianty:

Soczewki skupiące i zwierciadła wklęsłe:

$$x > f$$

- 1) $x > 0, f > 0, y > 0$,
obraz rzeczywisty

$$x < f$$

- 2) $x > 0, f > 0, y < 0$,
obraz pozorny

Soczewki rozpraszające i zwierciadła wypukłe:

- 3) $x > 0, f < 0, y < 0$
obraz pozorny

Tak więc odległość x jest zawsze dodatnia; ogniskowa f jest dodatnia dla soczewek skupiających i zwierciadeł wklęszych, ujemna dla soczewek rozpraszających i zwierciadeł wypukłych; odległość y jest dodatnia dla obrazów rzeczywistych i ujemna dla obrazów pozornych.

Czytelnik A: Jeżeli dobrze zrozumiałem, z wzoru ogólnego (47.1) można otrzymać trzy wzory, w których wielkości f, x, y przyjmują wartości wyłącznie dodatnie:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f} \\ 2) \quad & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f} \\ 3) \quad & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f} \end{aligned} \quad (47.2)$$

Autor: Dobrze zrozumiałeś.

Czytelnik A: Dotychczas nie zwracałem uwagi na analogię między soczewkami i odpowiednimi zwierciadłami sferycznymi.

Autor: Do drugiej grupy należą wzory, które wiążą ogniskową soczewki (zwierciadła) z innymi charakteryzującymi ją wielkościami.

Dla zwierciadła mamy prostą zależność

$$f = \pm \frac{R}{n}, \quad (47.3)$$

gdzie R — promień krzywizny zwierciadła; znak plus odnosi się do zwierciadeł wklęszych (ogniskowa dodatnia), znak minus do wypukłych (ogniskowa ujemna).

Dla soczewek mamy

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (47.4)$$

gdzie n — współczynnik załamania materiału soczewki; R_1 i R_2 — promienie krzywizny jej powierzchni. Jeżeli promień R odnosi się do wypukłej powierzchni soczewki, traktowany jest jako wielkość dodatnia (ze znakiem plus), jeżeli natomiast dotyczy wklęszej powierzchni soczewki, traktowany jest jako wielkość ujemna (ze znakiem minus). Nietrudno się przekonać, że soczewki dwuwypukłe, płasko-wypukłe i wypukło-wklęsłe są soczewkami skupiającymi, ponieważ zgodnie z wzorem (47.4) mają one ogniskowa dodatnia.

Czytelnik A: A jaka będzie postać wzoru (47.4), jeżeli umieści się soczewkę w ośrodku o współczynniku załamania n_0 ?

Autor: Wtedy zamiast (47.4) będziemy mieć

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_0} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (47.5)$$

Jeżeli soczewka zostanie przeniesiona z ośrodka o mniejszej gęstości optycznej ($n_0 < n$) do ośrodka o większej gęstości optycznej ($n_0 > n$), to zgodnie z wzorem (47.5) znak ogniskowej się zmieni i dlatego soczewka skupiąca stanie się rozpraszająca, natomiast soczewka rozpraszająca przekształci się w skupiąjącą.

Przejdźmy do rozwiązywania konkretnych zadani.

Wypukła powierzchnia soczewki płasko-wypukłej o promieniu krzywizny R i współczynniku załamania n została posrebrzona i w ten sposób powstało specyficzne zwierciadło wklęsle. Znaleźć ogniskowa takiego zwierciadła.

Czytelnik A: Spróbuje rozwiązać. Skierujmy promień równolegle do głównej osi optycznej. Po odbiciu się od posrebrzonej powierzchni wyjdzie on z soczewki i przy tym załamie się (rys. 47.1). Gdyby promień się nie załamał, to przeciąłby główną oś optyczną w odległości $\frac{R}{2}$ od zwierciadła, zgodnie

Rys. 47.1

z (47.3). W wyniku załamania promień przecina główną oś optyczną nieco bliżej zwierciadła. Oznaczmy poszukiwaną ogniskową literą f . Z rysunku widać, że

$$\frac{R}{2} \operatorname{tg} \alpha_1 = f \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Ponieważ kąty α_1 i α_2 są małe, można zastosować wzór (45.3). Otrzymamy

$$\frac{R}{2f} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} \approx \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = n.$$

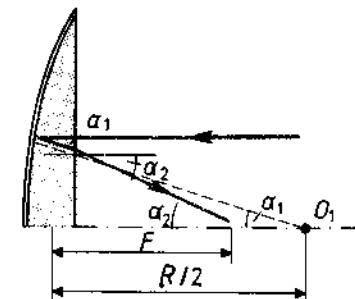
Stąd znajdujemy, że

$$f = \frac{R}{2n}. \quad (47.6)$$

Czytelnik B: Proponuję rozwiązać to zadanie inaczej. Wiadomo, że jeżeli połącz się dwa układy o ogniskowych f_1 i f_2 , to nowy układ będzie miał ogniskową f , określana zgodnie z regułą dodawania zdolności skupiających (mocy optycznych):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}, \quad ,47.7,$$

W danym przykładzie wchodzące do układu soczewka ma ognisko $f_1 = -\frac{R}{n}$, zgodnie z wzorem (47.4), gdzie jeden z promieni



należy przyrównać do nieskończoności. Drugi element układu, zwierciadło wklęsłe, ma ogniskową $f_2 = \frac{R}{2}$. Podstawiając wyrażenia na f_1 i f_2 do wzoru (47.7), znajdujemy

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R} + \frac{2}{R}, \quad (47.8)$$

skąd

$$f = \frac{R}{n+1}. \quad (47.9)$$

Widać stąd, że rozwiązanie czytelnika A nie jest poprawne [jego wynik to wzór (47.6)].

Autor (do Czytelnika B): Nie, to właśnie ty się pomyliłeś. Wynik (47.6) jest poprawny.

Czytelnik B: Czyżby w danej sytuacji nie miała zastosowania reguła (47.7)?

Autor: Ta reguła jest słuszna i można ją tu zastosować.

Czytelnik B: Ale jeżeli słuszny jest wzór (47.7), to również słuszny jest wzór (47.9).

Autor: Tu właśnie nie masz racji. Rzec w tym, że w zadaniu promień światła przechodzi przez soczewkę dwa razy (tarn i z powrotem).

Dlatego trzeba dodawać zdolności skupiające zwierciadła i dwóch (!) soczewek, a więc zamiast równania (47.8) należy zapisać

$$\frac{1}{f} = 2\frac{n-1}{R} + \frac{2}{R},$$

skąd znajdujemy, że $\frac{1}{f} = -\frac{2n-2+2}{R}$, a zatem $f = \frac{R}{2n}$, co w pełni zgadza się z wynikiem (47.6). Rozwiążmy inne zadanie.

Soczewka skupiąca daje obraz przedmiotu powiększony cztery razy. Jeżeli przesunie się ten przedmiot o 5 cm, to powiększenie zmniejszy się dwa razy. Znaleźć ogniskową soczewki.

Czytelnik A: W takich zadaniach płaczę się i gubię: trzeba narysować bieg promieni dla położenia pierwszego, następnie dla drugiego i porównać wyniki.

Autor: Myślę, że w tym zadaniu w ogóle nie trzeba rysować biegu promieni. Zgodnie z wzorem (47.1) dla danego położenia mamy $\frac{1}{f} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{k_1 x_1}$. Biorąc pod uwagę, że $\frac{1}{x_1} = k_1$ - powiększenie w pierwotnym położeniu, otrzymujemy

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{k_1 x_1} = \frac{k_1 + 1}{k_1 x_1} \quad \text{albo} \quad x_1 = \frac{k_1 + 1}{k_1} f.$$

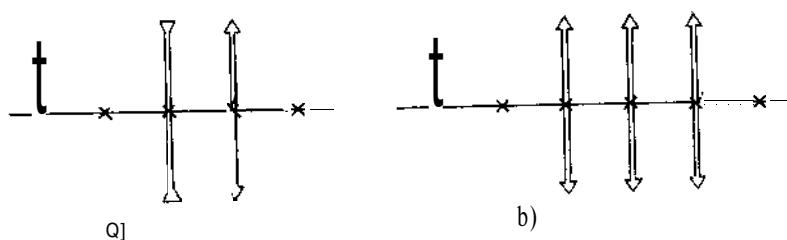
Analogicznie zapiszmy $x_2 = \frac{k_2 + 1}{k_2} f$. W ten sposób

$$x_2 - x_1 = \frac{k_2 - k_1}{k_1 k_2} f. \quad (47.10)$$

Zgodnie z treścią zadania $x_2 - x_1 = 5$ cm, $k_1 = 4$, $k_2 = 2$. Podstawiając te wartości do (47.10), otrzymujemy wynik $f = 20$ cm.

Zadania

- 47.1. Soczewka o ogniskowej $|f| = 30$ cm daje pomniejszony k_1 razy pozorny obraz przedmiotu ($k_1 = 1,5$). Jaka to soczewka – skupiąca czy rozpraszająca? Gdzie znajduje się przedmiot? Gdzie powstanie obrazu przedmiotu i jakie będzie jego powiększenie k_2 , jeśli soczewkę odsunie się od przedmiotu o $/ = 20$ cm?
- 47.2. Punkt świecący znajduje się na osi optycznej zwierciadła wklęsłego o promieniu krzywizny $R = 50$ cm w odległości $x = 15$ cm od zwierciadła. Gdzie znajduje się obraz punktu? Co się stanie z obrazem, jeżeli zwierciadło odsunie się od punktu świecącego o $/ = 15$ cm?
- 47.3. Układ optyczny składa się z soczewek rozpraszającej i skupiającej (rys. 47.2a; krzyżyki oznaczają ogniska soczewek). Ogniskowa każdej soczewki $|f| = 40$ cm. Przedmiot znajduje się w odległości równej podwojonej ogniskowej przed soczewką rozpraszającą. Wykonaj konstrukcję obrazu wytwarzanego przez dany układ i oblicz, w jakiej odległości od soczewki skupiającej powstanie obrazu.
- 47.4. Układ optyczny składa się z dwóch soczewek skupiających o ogniskowych $f = 30$ cm, rozmieszczonych tak jak pokazano



Rys. 47.2

no na rysunku 47.2b. Przedmiot znajduje się w odległości $x = 60 \text{ cm}$ od zewnętrznej soczewki. Gdzie będzie znajdował się obraz przedmiotu?

- 47.5. Powierzchnia wypukła płasko-wypukłej soczewki o promieniu krzywizny $R = 60 \text{ cm}$ została posrebrzona i w ten sposób powstało specyficzne zwierciadło wklęsłe. W odległości $x = 25 \text{ cm}$ od niego umieszczono przedmiot. Znajdź odległość y obrazu od zwierciadła i powiększenie k obrazu, jeżeli współczynnik załamania materiału soczewki $n = 1,5$.
- 47.6. Wklęsła powierzchnia płasko-wklęszej soczewki o promieniu krzywizny $R = 50 \text{ cm}$ została posrebrzona, w wyniku czego otrzymano nietypowe zwierciadło wypukłe. W odległości $x = 10 \text{ cm}$ od niego umieszczono przedmiot. Znajdź odległość y obrazu od zwierciadła i powiększenie k obrazu, jeżeli współczynnik załamania materiału soczewki $n = 1,5$.
- 47.7. Soczewka skupiąca o ogniskowej $f_1 = 20 \text{ cm}$ znajduje się w odległości $/ = 50 \text{ cm}$ od soczewki rozpraszającej o ogniskowej $|f_2| = 36 \text{ cm}$. Przed soczewką skupiąjącą w odległości $x_1 = 28 \text{ cm}$ od niej znajduje się przedmiot. Określ położenie obrazu i jego powiększenie dawane przez układ.
- 47.8. Na głównej osi optycznej soczewki skupiącej o ogniskowej $/ = 12 \text{ cm}$ znajduje się punktowe źródło światła S w odległości $x = 36 \text{ cm}$ od soczewki. Za soczewką w odległości $/ = 27 \text{ cm}$ umieszczono zwierciadło płaskie. Określ położenie obrazu.

48. Klinowacze i pęsikowacze

Autor: Żyjemy w epoce burzliwego rozwoju nauki i techniki. Fizyka XX wieku znacznie oddziaływała na bieg postępu technicznego i wkraczała we wszystkie dziedziny naszego życia.

Ważne jest, aby zrozumieć, że fizyka XX wieku nie jest zbiorem jakichś nowych zjawisk, nowych formuł matematycznych. Jest to przede wszystkim system nowych pojęć, obejmujący w szczególności również osiągnięcia fizyki wieków ubiegłych (tak zwanej fizyki klasycznej).

Czytelnik B: Nauczanie fizyki w szkole ogranicza się właściwie do fizyki klasycznej. O fizyce współczesnej uczniowie dowiadują się bardzo mało. Na pewno nie jest to właściwe.

Autor: Nie zgadzam się z tobą. I to nie dlatego, że fizyka współczesna jest dla ucznia zbyt skomplikowana, lecz przede wszystkim dlatego, że bez znajomości fizyki klasycznej po prostu nie można uczyć się fizyki współczesnej. Wszystko trzeba robić we właściwej kolejności. Zresztą ucząc się fizyki klasycznej, uczniowie jednocześnie poznają pewne zagadnienia fizyki współczesnej.

Czytelnik B: To poznawanie przypomina krótką wycieczkę do nowych, a do tego niezrozumiałych, miejsc „egzotycznych”. Coś się zobaczy, czymś zadziwi, a reszty się po prostu nie dostrzega.

Autor: Pod tym względem masz rację. Jednak trudno wymyślić inne podejście. To naturalne, że zaczynając uczyć się fizyki, trzeba przede wszystkim opanować jej podstawy klasyczne. Jednak nie wolno się ograniczyć tylko do tych podstaw, trzeba choć częściowo zapoznać się z fizyką współczesną.

Czytelnik B: Wydaje mi się, że pobiczne zapoznanie ze skomplikowanymi zagadnieniami może prowadzić do pojawienia się błędnych poglądów.

Autor: Rzeczywiście, w zagadnieniach fizyki współczesnej egzaminowani popełniają niemało błędów. Dlatego właśnie rozpoczęłem rozmowę o nauczaniu w szkole zagadnień fizyki współczesnej. W tej sprawie należy zachować szczególną ostrożność i rozważę. Proponuję abyśmy dokonali przeglądu wybranych pytań, na które dosyć często słyszy się od uczniów błędne odpowiedzi. Można ich przytoczyć wiele – zwrócić uwagę tylko na niektóre z nich.

Dotyczą one pojęć z zakresu mechaniki kwantowej oraz fizyki atomowej i jądrowej.

Jak fizyka współczesna wyjaśnia nature oporu elektrycznego?

Czytelnik A: Elektrony wewnętrz metalu zderzają się z atomami i jąnami, tworzącymi sieć krystaliczną.

Czytelnik B: Z pewnością nie wszystko jest tutaj takie proste. Nadprzewodnik także ma sieć krystaliczną. Jednak z jakiegoś powodu nie wykazuje oporu elektrycznego.

Autor: Oczywiście, nie wszystko jest tutaj takie proste. Założymy, na chwilę, że sieć krystaliczna jest idealna — wszystkie tworzące ją atomy znajdują się dokładnie w węzłach sieci i nie wykonują drgań cieplnych. Ponadto będziemy zakładać, że do sieci nie dostały się jakieś przypadkowe domieszki atomów innego rodzaju. Okazuje się, że w takim krysztale elektrony pod działaniem zewnętrznego pola elektrycznego będą się poruszać bez żadnych przeszkód; nie będą one „zauważać” atomów, z których jest utworzona sieć krystaliczna. Wydaje się, że sprawa polega nie na samym istnieniu atomów, które swoją obecnością „przeszkadzają” elektronom, lecz na czymś innym.

Fizyka współczesna daje na to pytanie określona odpowiedź: ruchowi elektronów wewnętrz metalu przeszkadzają nie same atomy sieci krystalicznej, lecz wszelkie możliwe zaburzenia idealnej struktury tej sieci. Mogą się one wiązać z chaotycznymi wychyleniami atomów z położen równowagi (odpowiadającymi węzłom sieci) w wyniku drgań cieplnych, a także z obecnością atomów domieszki bezładnie rozrzuconych wewnątrz sieci. Rzecz w tym, że atomy, a tym bardziej elektrony, to nie jakieś „kulki”, lecz obiekty o niezwykłych właściwościach. Tak więc ruch elektronu w krysztale przypomina do pewnego stopnia rozprzestrzenianie się w ośrodku specyficznej fali. Idealna sieć krystaliczna upodabnia się do ośrodka jednorodnego, w którym fala nie podlega jakimkolwiek zaburzeniom.

Czytelnik B: Teraz staje się zrozumiałe, dlaczego metale przechodzą w stan nadprzewodzący // bard/o niskich temperaturach. Zanim ruch cieplny atomów, które jak gdyby „zastygają” // węzłach • • Taka sieć staje się siecią idealną.

Autor: Twój wywód dotyczący natury nadprzewodnictwa jest niesłuszny. Oczywiście, w bardzo niskich temperaturach drgania cieplne atomów w sieci krystalicznej ulegają jak gdyby „zamrożeniu”. I jest to bardzo ważne dla nadprzewodnictwa. Jednak nawet w bardzo niskich temperaturach atomy sieci wciąż będą drgały. Będą one drgały nawet w temperaturze 0 K (gdyby udało się ją osiągnąć). W bardzo niskich temperaturach zmieniają się właściwości samych elektronów: łączą się one w pary, co powoduje, że przestają „zauważać” słabo drgające atomy sieci krystalicznej. W tym miejscu nie można tego bardziej zrozumiale objaśnić, jednak właśnie taki jest obraz fizyczny zjawiska nadprzewodnictwa.

Czytelnik B: Wiele spraw pozostaje niezrozumiałych. Mam na myśli poziom wiedzy ucznia. Czy w takim razie warto było zadawać pytanie o nature oporu elektrycznego?

Autor: Myślę, że warto. Przecież nasuwa się oczywista odpowiedź, oparta na wyobrażeniu o ruchu zwykłych ciał, które mogą ze sobą się zderzać. Nasze omówienie postawionego pytania wykazało, że w tym względzie konieczna jest ostrożność. Tym niemniej dowiedzieliśmy się czegoś nowego o zachodzących procesach. Ale przejdźmy do drugiego pytania.

Jak poruszają się elektrony w atomie?

Czytelnik B: Zgodnie z teorią Bohra, elektrony w atomie poruszają się po orbitach stacjonarnych. Każdej orbicie odpowiada określona energia elektronu (określony poziom energetyczny). Gdy elektron przechodzi z jednej orbity na drugą, wysyła albo pochłania foton.

Autor: Dobrze objaśniłeś podstawy teorii Bohra. Jak jednak myślisz:

Czy przeskok elektronu z jednej orbity na drugą zachodzi momentalnie, czy też wymaga pewnego czasu?

Czytelnik B: Oczywiście, że nie momentalnie. Każde przemieszczenie w przestrzeni wymaga skończonego czasu. Według teorii względności me jest możliwe przemieszczanie z prędkością przewyższającą prędkość światła w próżni, a ta, choć ogromna, jest przecież skończona.

Autor: W takim razie powiedz mi, jaka jest energia elektronu w tych chwilach, gdy opuścił już jedna orbitę, a na nową orbitę jeszcze nie przybył?

Czytelnik B: To jest właśnie niezrozumiałe. Przecież energia elektronu zmienia się skokowo; pośrednie wartości energii elektronu nie istnieją. Po prostu nad tym się nie zastanawiałem.

Autor: A należałoby. W każdym razie Bohr nad tym zagadnieniem na pewno się zastanawiał. Tutaj znowu konieczna jest ostrożność i rozwaga. Elektron w atomie wcale nie porusza się po orbitach. Fizycy dawno już odzegnali się od tego poglądu, jako że nie odpowiada on rzeczywistości.

Czytelnik A: Jednak i dzisiaj graficznie atom przedstawia się w postaci pewnego „układu słonecznego”, w którym elektrony wokół jądra poruszają się po orbitach.

Autor: Dzisiaj jest to zaledwie umowny symbol atomu, tym bardziej uzasadniony, że niezwykle trudno byłoby przedstawić poglądowo rzeczywisty charakter ruchu elektronu w atomie.

Czytelnik B: Pan jednak obiecał zademonstrować choćby tylko niektóre oczywiste błędy. Tymczasem toczy się rozmowa o niezbyt głębokim zrozumieniu fizyki pojedynczych zjawisk.

Autor: No cóż, spróbujmy przedstawić również oczywiste błędy. W podręczniku fizyki napisano, że jeśli wzbudzi się atomy ośrodka tak, by dostatecznie dużo atomów znalazło się nie na dolnym, lecz na górnym poziomie energii, to podczas przechodzenia przez taki ośrodek fala świetlnej o częstotliwości odpowiadającej różnicy energii tych poziomów fala świetlna będzie ulegać nie osłabieniu, lecz odwrotnie, ulegnie wzmacnieniu (w wyniku wymuszenia promieniowania atomów ośrodka).

Czytelnik B: Pamiętam to. Tak się objaśnia zasadę działania lasera.

Autor: Nie mam zastrzeżeń do tego, co napisano w podręczniku. Po prostu chciałbym was zapytać, skąd bierze się fala świetlna, która następnie będzie ulegała wzmacnieniu. Laser jest generatorem światła. On nie tylko zwyczajnie wzmacnia, lecz przede wszystkim tworzy fale świetlne. Tak więc moje pytanie jest następujące

Skąd wzięła się fala świetlna, o której była mowa w podręczniku?

Czytelnik A: Na pewno jest to światło z lampy, którą stosuje się w celu wzbudzenia ośrodka laserowego.

Autor: Oto właśnie oczywisty błąd. Nawiąsem mówiąc, niejeden raz miałem okazję usłyszeć taką odpowiedź.

Czytelnik B: Jest to oczywiście błąd. Przecież nie we wszystkich typach laserów ośrodek wzbudza się światłem. Istnieją lasery wzbudzane wyładowaniem elektrycznym.

Autor: Do tego jeszcze częstotliwość promieniowania wzbudzającego jest zawsze większa od częstotliwości promieniowania generowanego przez laser.

Czytelnik B: Odpowiedź na Pana pytanie była niepoprawna. To rozumiem. Ale nie wiem, jaka odpowiedź byłaby poprawna. Nie mam pojęcia, w jaki sposób zapoczątkowuje się proces generacji laserowej.

Autor: Atom może przejść z górnego poziomu energetycznego na dolny nie tylko w wyniku wymuszania (pod działaniem pewnego promieniowania), ale również samorzutnie, spontanicznie. Akcja laserowa zaczyna się od fal świetlnych, wysyłanych podczas spontanicznych przejść z emisją światła.

Czytelnik B: Ale przecież takie fale powinny się rozchodzić w dowolnych kierunkach. W jaki sposób z takiego nieuporządkowanego procesu można uzyskać promień laserowy, mający określony kierunek?

Autor: Do tego celu wykorzystuje się zwierciadła rezonatora wytyczające w przestrzeni kierunek generacji. Akcja laserowa bierze początek od tych właśnie fal świetlnych, które były przypadkowo wysłane w określonym kierunku.

Ale przejdźmy od elektroniki kwantowej do fizyki jądrowej. Każdy z was ma z pewnością ogólne pojęcie o reakcji łańcuchowej.

Jak rozwija się reakcja łańcuchowa rozszczepienia jąder uranu?

Czytelnik A: Neutron trafia w jądro i rozbija je na dwa fragmenty. Przy tym pojawia się jeszcze kilka neutronów. Każdy z nich „rozszczepia” po jednym jądrze atomowym, co prowadzi do pojawienia się jeszcze większej liczby neutronów, itd.

Autor: Jesli me brać pod uwagę pewnych subtelnosci, to opis zjawiska by! popraw P.Y. Jednak skąd sie bierze ten pierwszy neutron?

Czytelnik A: Skąd mógłby się brać... Może z promieniowania kosmicznego?

Autor: Możliwe. Jak jednak w takim razie poradzisz sobie z okrętem podwodnym o napędzie atomowym, zużywającym paliwo jądrowe? Okręt leży na dnie pod grubą warstwą wody, niezawodnie ochraniającą go przed neutronami promieniowania kosmicznego. Od jakich neutronów rozpoczyna się reakcja łańcuchowa rozwijająca się w silniku okrętu po jego włączeniu?

Czytelnik A: Nie wiem...

Autor: Rzecz w tym, że jądra uranu mogą dzielić się nie tylko w sposób wymuszony (pod działaniem trafiających w nie neutronów), lecz także samorzutnie. Spontanicznie pojawiające się neutrony są właśnie tymi pierwszymi neutronami, które zapoczątkowują reakcję łańcuchową dzielenia się jąder uranu.

Czytelnik B: Powstaje wrażenie, że spontaniczne, czyli przypadkowe procesy grają fundamentalną rolę w wyzwalaniu różnych „pozytycznych” procesów. One zapoczątkowują pracę lasera. One również zapoczątkowują pracę reaktora atomowego.

Autor: Procesy w tych przykładach są oczywiście odmienne. Ale ogólna myśl została wyrażona poprawnie — w obydwu zjawiskach wszystko zaczyna się od procesów przypadkowych. Jest to zagadnienie bardzo zasadnicze. Jednak omówienie go najwyraźniej wykracza poza ramy naszej rozmowy.

Ale wróćmy do reakcji rozpadu jąder uranu. Jak wiadomo, w tej reakcji wydziela się niemała energia. Jak można to wyjaśnić?

Czytelnik B: Na każdą cząstkę w jądrze (każdy neutron i proton) przypada energia wiążania równa w przybliżeniu 7 MeV. Takich cząstek w jądrze uranu jest 235, to znaczy w sumie $7 \text{ MeV} \cdot 235 = 1645 \text{ MeV}$. Tak więc w jądrze uranu zawarta jest ogromna energia. To ona wyzwała się przy rozpadzie jądra.

Autor: Również i ty nie uniknąć będziesz. Z tego, co mówisz wynika, że energia wiążania jest jak gdyby „zaryglowana” wewnątrz jądra i trzeba złamać „zamek” (rozbić jądro), aby wypuścić wspomnianą energię, jak nieszczęścia i smutki / puszczy Pandory. Należy jednak zwrócić uwagę, że gdy mówimy o energii wiążania, to powinniśmy

uświadomić sobie, że termin ten oznacza nie tyle energię, której moglibyśmy wykorzystać, lecz energię brakującą. Wymieniona przez ciebie energia wiążania równa 1645 MeV (w rzeczywistości jest ona nieco większa — około 1700 MeV) jest tą energią, która należy dostarczyć, aby rozbić jądro na pojedyncze neutrony i protony. Podkreślam: to nie jest ta energia, która się wyzwała, ale ta, którą, przeciwnie, ty sam powinieneś włożyć, aby rozbić jądro.

Czytelnik B: Jakaż więc jest ta energia, która wyzwała się przy podziale jądra uranu?

Autor: Istota sprawy polega na tym, że energia wiążania cząstek we fragmentach, które powstają w wyniku podziału jądra uranu, jest większa, niż energia wiążania cząstek w jądrze uranu. Ta różnica energii wiążania właśnie się wyzwała. Niech w jądrze uranu będzie A cząstek i na każdą z nich przypada energia wiążania ΔE_1 .

Niech każdy z fragmentów po rozszczepieniu jądra składa się z $\frac{A}{2}$ cząstek i na każdą z nich niech przypada energia wiążania ΔE_2 . Masę cząstki (nie robiąc różnicy między protonem i neutronem) oznaczmy przez M . Energia jądra uranu

$$E_1 = AMc^2 - A\Delta E_1.$$

Po rozszczepieniu energia obydwu fragmentów wynosi łącznie

$$E_2 = AMc^2 - A\Delta E_2.$$

Ponieważ $\Delta E_2 > \Delta E_1$, to $E_1 > E_2$. Różnica

$$E_1 - E_2 = A(\Delta E_2 - \Delta E_1)$$

jest właśnie ta poszukiwaną energią, która uwalnia się w wyniku rozszczepienia jądra uranu.

Czytelnik B: Dokładnie to właśnie miałem na myśli, gdy odpowidałem na Pana pytanie.

Autor: Możliwe. Jednak twoja odpowiedź tej myśli nie wyrażała.

Odpowiedzi

1.1. $s = 5,5 \text{ km}$.

$$1.2. v = \frac{1}{t-t_1} \sqrt{s^2 - (v_{f_1})^2} = 90 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1.3. $v_2 = 2v_{sr} - v_1 = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $s = v_{sr}(t_1 + t_2) = 160 \text{ km}$.

$$1.4. v_{sr} = \frac{3v_1v_2v_3}{v_1v_2 + v_2v_3 + v_1v_3} = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

1.5. $t = t_3 - \frac{v_2 + v_3}{2v_1} = 0,75 \text{ s}$, $s = \frac{1}{2}t_3^2v_2 = 9 \text{ km}$, $v_{sr} = \frac{3v_1v_2}{v_2 + 3v_1} = 12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

$$1.6. v_{sr} = \frac{4v_1v_2(v_2 + v_3)}{(v_1 + v_2)(v_2 + v_3) + 4v_1v_2} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \frac{1}{a}(v_3^2 - v_2^2) = 48 \text{ m}$$

$$1.7. t = \left(1 + \frac{a_1}{|a_2|}\right)t_1 = 10 \text{ s}, \quad \frac{a_1t_1^2}{2} \left(1 + \frac{a_1}{|a_2|}\right) = 20 \text{ m}, \quad v_{sr} = \frac{a_1t_1}{2} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$a_{sr} = |a_2| = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$1.8. v_0 = \frac{v}{t_2} = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad s = \frac{v_1t_2^2}{2} = 54 \text{ m}$$

$$1.9. |\vec{\Delta v}| = 2v \sin \frac{\pi}{2}; \quad \text{a) } |\Delta v| = v \sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 0,76v; \quad \text{b) } |\Delta \vec{v}| = v \sqrt{2} \approx 1,4v$$

$$\text{c) } |\Delta \vec{v}| = 2v$$

$$|\Delta \vec{a}| = 2 \frac{v^2}{R} \sin \frac{\pi}{2}; \quad \text{a) } |\Delta a| = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \frac{v^2}{R} \approx 0,76 \frac{v^2}{R};$$

$$\text{b) } |\Delta \vec{a}| = \sqrt{2} \frac{v^2}{R} \approx 1,4 \frac{v^2}{R}; \quad \text{c) } |\Delta \vec{a}| \neq 2 \frac{v^2}{R}$$

$$1.10. a = \sqrt{a_s^2 + \text{flf}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

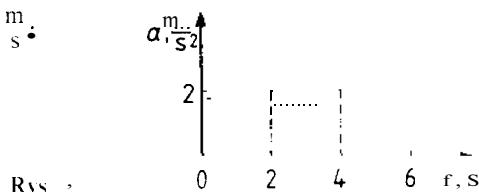
$$1.11. a_r = a_s \operatorname{tg} \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad a = a_s \sqrt{2} \approx 2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

2.1. Patrz rysunek 1;

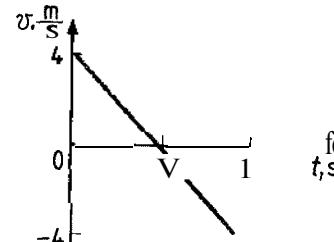
$$1) v_{sr} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad 2) v_{sr} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$0 \leq T < 2 \text{ s}, \quad T = 3 \text{ s}$$

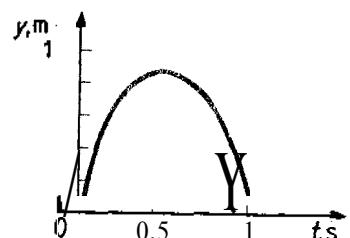
$$4 \text{ s} \leq \tau \leq 6 \text{ s}$$



2.2. Patrz rysunki 2 i 3.

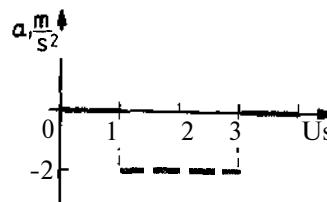


Rys. 2

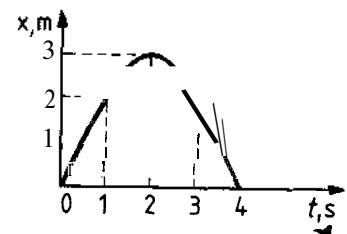


Rys. 3

2.3. Patrz rysunki 4 i 5.

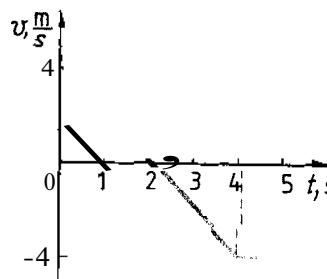


Rys. 4

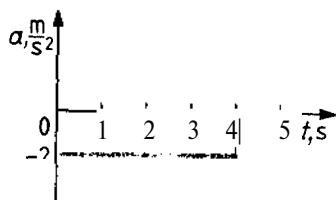


Rys. 5

2.4. Patrz rysunki 6 i 7.



Rys. 6



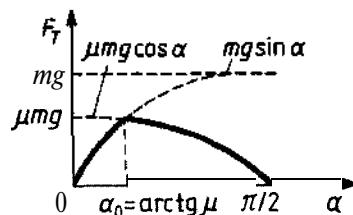
Rys. 7

$$4.1. \mu = \frac{v}{\sqrt{2g}} \operatorname{tg} \chi$$

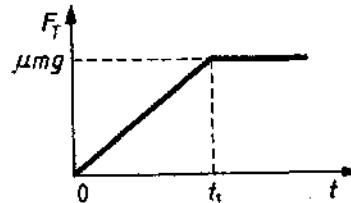
4.2. Patrz rysunek 8.

- a) $F_T = \mu mg$; b) $F_T = \mu(mg - F \sin \alpha)$; c) $F_T = \mu mg \cos \alpha$
d) $F_T = \mu(mg \cos \alpha - F \sin \alpha)$.

4.4. Patrz rysunek 9. Dla $0 \leq t \leq t_1$ ciało spoczywa, $F_T = F$; dla $t > t_1$ ciało ślizga się po równi, $F_T = \mu mg$.



RYS. 8



Rys. 9

$$6.1. v_{0B} = 11,3 \frac{m}{s}, \quad x = 4 \text{ m}, \quad y = 0,8 \text{ m}, \quad T = 0,5 \text{ s}, \quad v_A = 9,4 \frac{m}{s},$$

$$v_B = 15,2 \frac{m}{s}.$$

$$6.2. 1) l = t \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)};$$

$$2) l = t \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2}.$$

$$6.3. T = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} + \sqrt{\frac{H+3h}{2g}}, \quad z = \frac{\sqrt{3}}{2} (H-h + \sqrt{H^2 + 2hH-3h^2}).$$

$$6.4. \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{4} - \frac{F}{mg} \right).$$

$$6.5. l = 2v_0^2 \frac{\sin \beta}{g \cos^2 \beta}.$$

$$6.6. v_0 = \frac{l}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(l \operatorname{tg} \alpha - H + h)}} \approx 13,8 \frac{m}{s}.$$

$$6.7. l = H \operatorname{ctg} \alpha = 6 \text{ m}.$$

$$6.8. d = \frac{r^2}{g} \sin 2\alpha - l \approx 6 \text{ m}.$$

$$6.9. h = H = 19,6 \text{ m}, \quad d = 3v_0 \cdot \frac{\sqrt{H^2}}{g} - l = 20 \text{ m}.$$

$$6.10. d = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g \cos \beta} (1 + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha) \approx 40 \text{ m}.$$

gdzie $\alpha = 45^\circ - \frac{\beta}{2}$ – kąt wylotu kamienia.

$$7.1. v = \frac{l}{t} [F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha)] \approx 38 \frac{m}{s},$$

$$W = \mu(mg - F \sin \alpha) [(F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha))] \frac{l^2}{2m} \approx 1330 \text{ J}.$$

$$7.2. a = (F \cos \alpha - 2\mu mg + \mu F \sin \alpha) \frac{l}{2m} \approx 2,7 \frac{m}{s^2},$$

$$F_n = \frac{F}{2} (\cos \alpha + \mu \sin \alpha) \approx 43 \text{ N}, \quad F_1 = \frac{2\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \approx 8,2 \text{ N}.$$

$$7.3. a = \frac{1}{3} g \approx 3,3 \frac{m}{s^2}; \quad F_n = \frac{2}{3} mg \approx 13 \text{ N}.$$

$$7.4. a = g \frac{m_3 - (m_2 + m_1) \sin \alpha}{m_1 + m_2 + m_3} \approx 3,5 \frac{m}{s^2},$$

$$F_{n32} = g \frac{m_3(m_1 + m_2)(1 + \sin \alpha)}{m_1 + m_2 + m_3} \approx 50,4 \text{ N},$$

$$F_{n21} = g \frac{m_1 m_3 (1 + \sin \alpha)}{m_1 + m_2 + m_3} \approx 33,6 \text{ N}.$$

$$7.5. a = g \frac{m_3 + m_4 + m_2 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \mu m_1}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \approx 6,9 \frac{m}{s^2}$$

(α – kąt nachylenia środkowej płaszczyzny do poziomu);

$$F_{n12} = g \frac{m_1(m_3 + m_4)(1 + \mu) + m_2 m_1 (\sin \alpha + \mu - \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \approx 8,8 \text{ N},$$

$$F_{n23} = g \frac{(m_3 + m_4)[m_1(\mu + 1) + m_2(1 - \sin \alpha + \mu \cos \alpha)]}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \approx 16,2 \text{ N},$$

$$F = g m_4 \frac{m_2(1 - \sin \alpha + \mu \cos \alpha) + m_1(1 + \mu)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \approx 1,5 \text{ N}.$$

$$7.6. a_1 = g \frac{4m_2 m_3 - m_1(m_2 + m_3)}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)} = \frac{g}{5} \approx 1,96 \frac{m}{s^2},$$

$$a_2 = g \frac{4m_2 m_3 + m_1(m_2 - 3m_3)}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)} - \frac{3g}{5} \approx 5,88 \frac{m}{s^2},$$

$$a_3 = g \frac{4m_2 m_3 - m_1(3m_2 - m_3)}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)} - \frac{g}{5} \approx 1,96 \frac{m}{s^2},$$

$$F_{n1} = \frac{4m_1 m_2 m_3}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)} = \frac{6}{5} mg,$$

$$F_n = 2F_{n1} = \frac{12}{5} mg.$$

$$8.1. a = \frac{g}{3} (\sin \alpha - \sin \beta - \mu \cos \alpha - \mu \cos \beta).$$

$$A_x = -\frac{mg}{2} (\sin \alpha + \sin \beta + \mu \cos \beta - \mu \cos \alpha), \quad A_y = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \frac{mg}{2}.$$

8.2. $s = \frac{v^2}{2kn} \approx 85$ m.

8.3. Kłótek znajduje się w spoczynku;

$F_T = mg \sin \alpha - F = 4.9$ N i jest skierowana w góre równolegle do równej pochyłej.

8.4. $F_1 = F(2\frac{g}{a} \sin \alpha - 1) \approx 120$ N.

8.5. Jeżeli $\tan \alpha \geq \mu$, to kłótek ześlizguje się z równej przy $a = 0$.

Jeżeli $\tan \alpha < \mu$, to

a) przy $a = g \frac{\mu - \tan \alpha}{1 + \mu \tan \alpha}$ kłótek zaczyna się zsuwać w dół,

b) przy $a = g \frac{\tan \alpha - \mu}{1 + \mu \tan \alpha}$ kłótek zaczyna się zsuwać w dół,

natomiast przy $a = g \frac{\tan \alpha + \mu}{1 + \mu \tan \alpha}$ zaczyna poruszać się po równej pochyłej w góre.

8.6. $F = g(m_1 + m_2)(\mu_2 + \mu_1)$.

8.7. 1) Wszystkie ciała znajdują się w spoczynku: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $F \leq 3\mu_3 mg$, $F \leq 2,94$ N;

2) Cały układ porusza się jako jedna całość: $a_1 = a_2 = a_3 = a$,

$$0 < a \leq \mu_1 g, \quad 0 < f \leq 0,98 \frac{m}{s^2}, \quad 3\mu_3 mg < F \leq 2mg(\mu_1 + \mu_2), \\ 2,94 \text{ N} < F \leq 5,88 \text{ N};$$

3) $f_1 = a_3 \neq a_2$, $f_{\text{il}} = f_3 = \mu_1 g = 0,98 \frac{m}{s^2}$, $a_2 = \frac{F}{m} - g(\mu_1 + 2\mu_2) > 0,98 \frac{m}{s^2}$, $F > 2mg(\mu_1 + \mu_2)$, $F > 5,88$ N.

9.1. $\frac{F_{n1}}{F_{n2}} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_1} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_1}} = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$.

9.2. $F_n = 3Mg$ w najniższym punkcie.

$$F_n = 3mg \cos \alpha, \quad a_r = 2g \cos \alpha, \quad a_s = g \sin \alpha, \quad a = g \sqrt{3 \cos^2 \alpha + 1}.$$

9.3. $\frac{F_{\text{wypukły}}}{F_{\text{wklesły}}} = \frac{gR - v^2}{gR + v^2} = 0,425$.

9.4. $(r + 2H) : 2(H - r) : (2H - 5r) = 7:4:1$.

9.5. $H = \frac{2}{3}r = 75$ cm.

9.6. $F_t = mg \left(1 - \frac{v^2}{gR}\right)$, $F_n = mg \left(1 + \frac{v^2}{gR}\right)$; siła nacisku F_B w punkcie B zależy od kierunku ruchu ciała: przy zbliżaniu do fi od strony lewej jest

ona równa $mg \left(\cos \alpha - \frac{v^2}{gR}\right)$ przy zbliżaniu od prawej — jest równa $mg \left(\cos \alpha + \frac{v^2}{gR}\right)$; 1; w tym sensie siła F_B doznaje specyficznej zmiany „skokowej”.

9.7. $v_0 = \sqrt{gln - 5} = \sqrt{5gl}$.

9.8. $h = R \left(1 - \frac{g}{\omega^2 R}\right)$, $F = m\omega^2 R$.

9.9. $h = \frac{25}{27}l$ (d położenia równowagi).

9.10. $F_n = v^2/lm = 3,6$ N.

9.11. $l \approx 1,3r$ (przy rozwiązywaniu posługiwać się wskazówkami z par. 6).

10.1. $\rho = \frac{81\pi}{8GT^2}$.

10.2. $T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}} \approx 1,396$ h ≈ 1 h 24 min.

10.3. $\rho = \frac{3\pi}{T^2 G} \approx 110 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

10.4. $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{r+h_2}{r+h_1}}$, $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2} \frac{h_1}{h_2}}$.

10.5. $v_1 = \sqrt{\frac{GM_Z}{r_Z}} \sim \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

11.1. $W = \frac{mgh}{2} = 1225$ J.

11.2. $W = \frac{mgl}{2} = 19,6$ J.

11.3. $W = 2mgh = 784$ J.

11.4. $W = \frac{F_0(\Delta h)^2}{2\Delta l_0} = 1$ J.

11.5. $s = v \sqrt{\frac{m\Delta l}{2\Delta t}} = 2$ cm, $W = \frac{mv^2}{2} = 1$ kJ.

11.6. $W = \frac{mt^2 g^2}{8} = 57,5$ J.

11.7. Praca siły reakcji nici jest równa zeru w dowolnym przedziale czasu, ponieważ siła reakcji jest prostopadła do przemieszczenia ($\cos 90^\circ = 0$). Praca siły ciężkości w ciągu jednego okresu jest równa zeru, gdyż zmiana energii całkowitej jest równa zeru.

12.1. $\mu = \frac{v_1 \sin \alpha}{v_1 - v_2} \approx 0,2$, tutaj $\sin \alpha = 0,05$.

12.2. $P_s = \frac{mv}{2} \left(\frac{v^2}{2s} + g \sin \alpha + \mu g \cos \alpha \right) \approx 9,4$ kW; $\sin \alpha = 0,02$, $\cos \alpha \approx 1$.

12.3. $W = m(g/f v_{sr} \Delta r) \approx 12,3$ kJ, $F_{sr} = mv_{sr} \left(g + \frac{v_{sr} \Delta r}{f} \right) \approx 61,5$ kW.

$$P_2 = m \left(g + \frac{v_{sr} \Delta r}{f} \right) \left(v + \frac{\Delta r}{2} \right) \approx 64,6 \text{ kW.}$$

12.4. $P = 2mgs \sin \alpha = 30$ kW

12.5. $v_{sr} = \frac{2(1 - \cos \alpha)}{f} = \frac{2}{5} \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$$12.6. P_{st} = \frac{\Delta W}{\Delta t}; \quad 1) 1,5 \text{ W}; \quad 2) 1 \text{ W}; \quad 3) 0,75 \text{ W}.$$

$$12.7. 1) \vec{J}; \quad 2) \hat{w} \vec{J}; \quad 3) 8 \vec{J}.$$

$$13.1. W = -\frac{m}{2}(v_0 + v)(v - v_0 - gt) = 3900 \text{ J}.$$

$$13.2. \mu = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \approx 0,27. \quad 13.3. 1) \frac{1}{2} \quad 2) \frac{1}{v_2} \sqrt{\frac{\mu \operatorname{ctg} \alpha_1}{1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha_2}}.$$

$$13.4. v = v_0 \sqrt{\frac{M}{M+m}} \approx 13,88 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad / / \quad M = \frac{v_0^2 m^2}{(M+m)\mu g} \approx 0,38 \text{ m}$$

$$13.5. F = mg \left(\frac{H}{h} + 1 \right) - V \rho_w g, \quad h_1 = 2h \left(\frac{V \rho_w}{m} - 1 \right) - H \\ (\rho_w - \text{gęstość wody}).$$

$$13.6. v = v_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2} 7,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}, \quad 2) n \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 = 4,43 \text{ m}.$$

$$13.7. h = \frac{v_0^2}{2g} \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{\cos^2 \alpha \sin \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}.$$

$$13.8. 1) F = p_1 \frac{4 \pi r^2}{h(m_1 + m_2)^2} \approx 89 \text{ kN};$$

$$2) F = (m_1 + m_2) g \left[1 + \frac{r^2}{h(m_1 + m_2)^2} \right] \approx 92 \text{ kN}.$$

$$13.9. v = \frac{v_0 m_1}{m_1 + m_2}; \quad 1) \frac{2}{3} v_0, \quad 2) \frac{1}{2} v_0, \quad 3) \frac{1}{3} v_0,$$

$$Q = \frac{m_1 v_0^2}{2} \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right); \quad 1) \frac{1}{6} M v_0^2; \quad 2) \frac{1}{4} M v_0^2; \quad 3) \frac{1}{3} M v_0^2.$$

$$13.10. v_1 = v_0 \sqrt{(nD - 1)(nR + 1)}, \quad v_2 = v_0 \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2 + n}} \quad \rho H \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \beta \frac{1}{n},$$

$$\Delta E = -\frac{mv_0^2}{n+1}, \quad \Delta(mv) = mv_0 \sqrt{\frac{2n}{n+1}} \quad \text{tutaj } n = \frac{M}{m}.$$

$$13.11. s = \frac{1}{n} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) - 9 \text{ m}. \quad 13.12. 1) h_1 = \frac{1}{9} H, \quad 2) h_2 = \frac{1}{18} H;$$

$$2) h = \frac{1}{18} H, \quad \text{gdzie } H = 4l \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{v_0^2}{g}.$$

$$13.13. \tau = \frac{m + M}{m} \sqrt{5gI}. \quad 13.14. 1) hH \frac{M-m}{M+m}$$

$$13.15. h = H \frac{M}{4M + 3m}.$$

$$14.1. \frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{6}{5}} \quad 14.2. \frac{F_{12}}{F_{21}} = \frac{3 - 2 \cos \alpha}{\cos \alpha} \approx 4.$$

$$14.3. r = \frac{m}{s} = 0,43 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{a wyrażono w radianach}).$$

$$14.4. At = v_0 \frac{m}{M+m} \sqrt{\frac{M+m}{k}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{M+m}{A}}.$$

$$14.5. T = 2\pi \sqrt{\frac{A}{s}} \approx 0,35 \text{ s}. \quad 14.6. h = \frac{D \cdot \alpha}{24 \cdot 60 \text{ min} - At} \approx 6,6 \text{ km}.$$

$$15.1. \frac{T_k}{T_Z} = \frac{R_k}{R_Z} \sqrt{\frac{M_Z}{M_k}} \approx 2,4.$$

$$15.2. a = g \left[\left(\frac{T_0 \alpha}{t} \right)^2 - 1 \right] \approx 17 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad T_0 = 1 \text{ s}; \quad \text{przyspieszenie jest zwocone pionowo w góre}.$$

$$15.3. T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{m+a}} \approx 2 \text{ s}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}, \quad \beta \approx 27^\circ.$$

$$15.4. \Delta t = \frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{g} \approx 90 \text{ s}. \quad 16.1. h = \frac{v}{2} = 5800 \text{ m}.$$

$$16.2. A \cdot x = \Delta \varphi \frac{v}{2\pi v}; \quad 1) \Delta x = \frac{\pi v}{2\pi v} = \frac{v}{2v} = 1 \text{ m}; \quad 2) \Delta x = \frac{v}{8v} = 0,25 \text{ m}.$$

$$16.3. v = \frac{v}{2n} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad n = 3. \quad 17.1. \mu \leq \operatorname{tg} \beta.$$

$$17.2. F_{nBE} = F_{nCE} = \frac{M g \sin \alpha}{2 \sin \beta} \approx 98 \text{ N}, \quad F_{F_{nAB}} = F_{F_{nCD}} = \frac{(m + M)g}{2 \sin \alpha} \approx 92 \text{ N}; \\ F = \frac{g}{2} [M \operatorname{ctg} \beta - (M + m) \operatorname{ctg} \alpha] \approx 39 \text{ N}.$$

$$17.3. F_n = \frac{mg \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad F_N = \frac{mg \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$$17.4. a = g \left[\frac{(1 - \cos \alpha_2) \operatorname{tg} \alpha_2}{(1 - \cos \alpha_1) \operatorname{tg} \alpha_1} \right] \approx 27,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \quad \text{przyspieszenie jest zwocone pionowo w góre}.$$

$$17.5. \text{W położeniu 1: } F_{BBC} = \frac{mg \cos^2 \beta}{\sin \alpha} \approx 1,25 \text{ N}.$$

$$F_{AB} = \frac{mg \cos \beta \cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \approx 0,6 \text{ N}.$$

W położeniu 2: $F_{BC} = 1,25 \text{ N}$.

$$F_{AB} = mg \left[\frac{\cos \beta \cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} + \sin 2\beta \right] \approx 1,54 \text{ N}.$$

$$\cos \beta = 1 - \frac{v^2}{2gI} = 0,8.$$

$$18.1. M_B = F_1 a - F_2 a - F_3 \frac{a}{2} + F_5 a = 0,$$

$$M_C = -F_1 \frac{a}{2} + F_2 \frac{a}{2} + F_4 \frac{a}{2} - F_5 \frac{a}{2} = 0; \quad \text{cięlo znajduje się w spoczynku.}$$

$$18.2. F_w \approx 1,5 \text{ N}; \quad M \approx 2 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

$$18.3. F_n = \frac{mg}{2(\sin\alpha + \cos\alpha)}, \quad R = mg \frac{\sqrt{1 + (2 + \operatorname{ctg}\alpha)^2}}{2(1 + \operatorname{ctg}\alpha)}, \quad \text{siła } R \text{ tworzy z pionem kąt } \beta = \operatorname{arc tg}(2 + \operatorname{ctg}\alpha).$$

$$18.4. l_1 = \frac{l\mu}{1 + \mu}.$$

$$18.5. W = mg \sqrt[3]{\frac{m}{n} \frac{\sqrt{2} - 1}{\omega^2}}.$$

$$18.6. a = \operatorname{arc tg} \frac{2\mu(m+M)}{2M+m}.$$

$$19.1. \text{W odległości } \frac{3}{22} R \text{ od środka tarczy na prawo.}$$

- 19.2. 1) W środku wysokości spuszczonej z wierzchołka, w którym jest obciążnik o masie $2m$;
 2) Srodek ciężkości znajduje się na wysokości spuszczonej z wierzchołka, w którym jest obciążnik o masie $2m$, w odległości od niego równej $\frac{7\sqrt{3}}{24}a$.

- 19.3. Na prostej przechodzącej przez środek kuli i wnęki, w odległości $\frac{1}{14}R$ od środka kuli, poza obszarem wnęki.

- 19.4. 1) $x_0 = 2,45 \text{ cm}, \quad y_0 = 0,91 \text{ cm}$ (rys. 19.5a);
 2) $x_0 = 2,45 \text{ cm}, \quad y_0 = 1,5 \text{ cm}$ (rys. 19.5b);
 3) $x_0 = 2 \text{ cm}, \quad y_0 = 2 \text{ cm}$ (rys. 19.5c).

$$20.1. W = \frac{mgh_1}{n} = 300 \text{ J},$$

$$F = \frac{mg}{n} = 750 \text{ N}.$$

$$20.2. // = \frac{\rho_w l}{\rho_r(n+1) - \rho_w n} = 0,5 \text{ cm}.$$

- 20.3. 1) Poziom rtęci ustali się w naczyniach wąskim i szerokim odpowiednio na wysokości:

$$h_1 = \frac{l}{S(n+1)} \left(1 + \frac{\rho_w}{\rho_r} \right) \approx 0,36 \frac{l}{S},$$

$$h_2 = \frac{V}{Sn(n+1)} \left(n - \frac{\rho_w}{\rho_r} \right) \approx 0,3 \frac{V}{S}.$$

Poziom wody znajdzie się na wysokości:

$$h_3 = \frac{V}{Sn(n+1)} \left(2n + 1 - \frac{\rho_w}{\rho_r} \right) \approx 0,82 \frac{V}{S}.$$

- 2) Poziom rtęci w naczyniach szerokim i wąskim znajduje się odpowiednio na wysokości:

$$h_1 = \frac{V}{S(n+1)} \left(1 + \frac{\rho_w}{\rho_r} \right) \approx 0,36 \frac{V}{S},$$

$$h_2 = \frac{V}{S(n+1)} \left(1 - n \frac{\rho_w}{\rho_r} \right) \approx 0,28 \frac{V}{S}.$$

Poziom wody znajdzie się na wysokości:

$$h_3 = \frac{V}{S(n+1)} \left(2 + n - n \frac{\rho_w}{\rho_r} \right) \approx 1,28 \frac{V}{S}.$$

$$21.1. \rho = \frac{Q_2 \rho_1 - Q_1 \rho_2}{Q_2 - Q_1}.$$

$$21.2. \rho_2 = \rho_1 \frac{Q_1 - Q_2}{f_1 - f_1'}$$

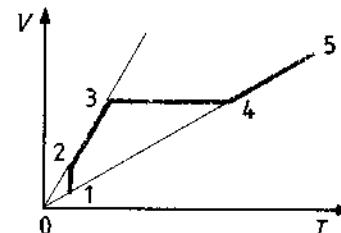
$$21.3. h = \frac{V}{S} \frac{(\rho_o - \rho_i) \left(\frac{19}{20} \rho_o - \rho_i \right)}{\rho_o (\rho_o - \rho_i)} \approx 0,048 \frac{V}{S}.$$

$$21.4. T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S}}.$$

26.1. Rozprężenie.

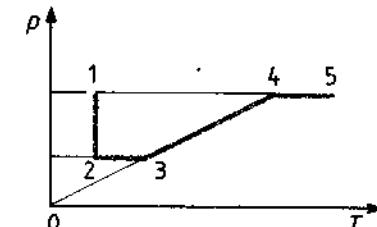
26.2. Masa gazu zmniejszyła się dwa razy.

26.3. Patrz rysunek 10.



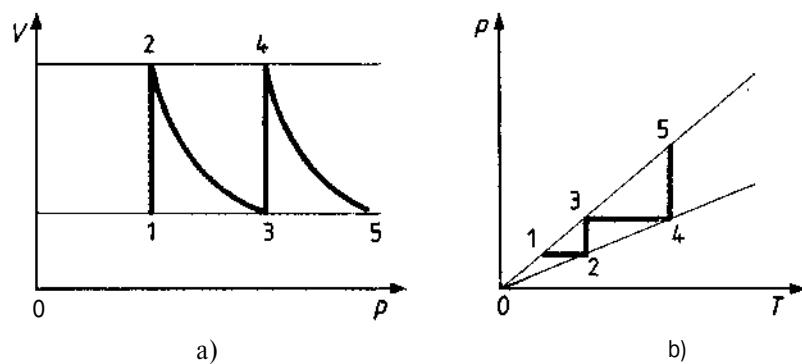
a)

Rys. 10



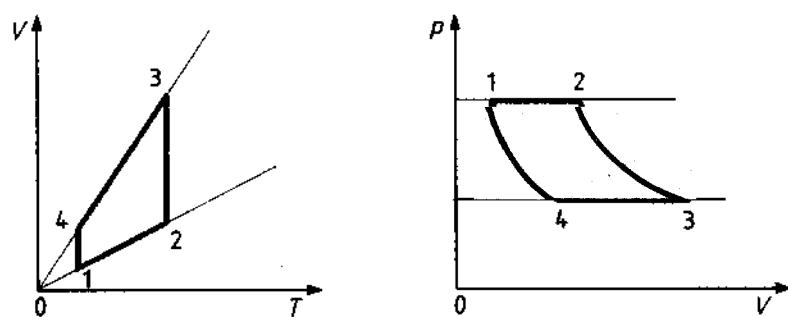
b)

26.4. Patrz rysunek 11.



Rys. 11

26.5. Patrz rysunek 12.



Rys. 12

$$27.1. h_1 = h \frac{p_0 + \rho g}{p_0} \approx 0,11 \text{ m.}$$

$$m = (p_0 + \rho g h) h \frac{SM}{RT} \approx 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ kg.}$$

$$T = (t + 273) \text{ K}, \quad \rho = 13,8 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - \text{gęstość rtecji.}$$

$$27.2. \text{Obniż się o } 3 \text{ cm.} \quad m = (p_0 - \rho g l_1) l_2 \frac{SM}{RT} \approx 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ kg.}$$

$$27.3. \Delta m = \frac{VM(p_1 - p_2)}{RT} \approx 0,057 \text{ kg.}$$

27.4. Zwiększy się o

$$\Delta l = \frac{l_1 [T_1 \rho g h (1 - \cos \alpha) - A(T_2 - T_1) \rho g h]}{T_1 (p_0 - \rho g h \cos \alpha)} = 0,016 \text{ m,}$$

$$m = \frac{(p_0 - \rho g h) l_1 S M}{R T_1} = 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ kg.}$$

27.5. Kropla przesunie się w kierunku kuli B o Δl :

$$1) \Delta l = \frac{V_1}{S} \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2T_1 + (\Delta T_1 - \Delta T_2)}, \quad 2) A = \frac{V_1}{S} \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2T_1 + (\Delta T_2 - \Delta T_1)},$$

$$3) \Delta l = \frac{V_1}{S} \frac{\Delta T_1}{T_1}.$$

$$27.6. \text{Obydwie krople odsuną się od kuli B o } \Delta l = \frac{2}{3} \frac{V_1 \Delta T}{S T_1}.$$

$$27.7. \text{Obydwie krople przesuną się w prawo o } \Delta l = \frac{V_1 \Delta T}{S T_1}.$$

$$27.8. \text{Tłok } A \text{ przemieści się w prawo o } \Delta l = \frac{m_f}{m_i + m_f} = 3 \text{ cm.}$$

$$27.9. H = h \log_2 \frac{p_0 M V}{m R T} = 20 \text{ km.} \quad 27.10. \Delta m = \frac{V M}{R} \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) = 0,02 \text{ kg.}$$

$$28.1. m = \frac{V w_{wzg} \rho_{n1}}{100} = 739 \text{ g; rosa się nie osadzi, ponieważ } \frac{w_{wzg} \rho_{n1}}{100} < \rho_{n2}; \\ k = \frac{R T w_{wzg} \rho_{n1}}{M p} = 0,59\%.$$

$$28.2. \text{Masa suchego powietrza jest większa od masy wilgotnego o } \Delta m = \frac{(M_w - M_s) w_{wzg} V p_{n1}}{R T} = 9,46 \text{ g,} \\ \text{gdzie } M_s \text{ i } M_w \text{ — masy molowe powietrza i wody.}$$

$$28.3. w_{wzg} = \frac{p_{n1} T_2}{p_{n2} T_1} 100\% = 30\%.$$

$$29.1. Q_{1 \rightarrow 2} : Q_{1 \rightarrow 8} : Q_{5 \rightarrow 2} : Q_{4 \rightarrow 2} = \\ = |p_1 V_1 - p_2 V_2| : |p_2 V_1 - p_1 V_1| : |p_2 V_2 - p_1 V_2| \dots |p_1 V_1 - p_2 V_2|,$$

$$29.2. Q_{1 \rightarrow 6} : Q_{3 \rightarrow 2} = 1 : 1, \quad Q_{1 \rightarrow 5} : Q_{8 \rightarrow 2} = p_1 : p_2.$$

$$29.3. 1) w = p_0 V \frac{T_2 - T_1}{T_1} = 138 \text{ J;} \quad 2) W = \left(p_0 + \frac{mg}{S} \right) V \frac{T_2 - T_1}{T_1} = 171 \text{ J.}$$

$$29.4. W = \frac{m}{M} R T \left(1 - \frac{p_2}{p_1 f} \right) \approx 5 \text{ kJ.}$$

29.5. Zmiana energii wewnętrznej jest równa zeru.

$$30.1. W = Q_1 \left[1 - \frac{T_2}{T_1} \right] \approx 1,47 \text{ kJ;} \quad Q_2 = \frac{Q_1 T_2}{T_1} = 350 \text{ cal} \approx 1,47 \text{ kJ}$$

$$30.2. \alpha_{wzg} = \left[1 + \frac{100}{1000} \right] \left[1 + \frac{100}{1000} \right] \left[1 + \frac{100}{1000} \right] \dots \left[1 + \frac{100}{1000} \right] = 1,101^{10} \approx 1,101^{10}.$$

$$30.3. W = \frac{P_e V_2}{M} = 2 \text{ kJ}, \quad \eta = \frac{R}{M(c_v + 2c_p)} = 10,5\%.$$

$$30.4. P_1 = \frac{P_e T_1}{T_1 - T_2} = 186,5 \text{ kW}, \quad Q = \frac{t P_e T_2}{T_1 - T_2} = 5 \text{ MJ}.$$

$$31.1. Q = 3 \cdot \frac{5}{2} R T_1 = 18,7 \text{ kJ}. \quad 31.2. Q = \frac{m}{M} \Delta T (C_v + R) \approx 102 \text{ J}.$$

$$31.3. W = \frac{m}{M} R \Delta T = 604 \text{ J}, \quad Q = \left(\frac{m}{M} R + c_v m \right) \Delta T \approx 2,7 \text{ kJ}.$$

33.1. W punkcie O; 1) zero; 2) $2,55 \cdot 10^{10} \frac{\text{V}}{\text{m}}$, skierowane poziomo i w prawo; 3) $2,55 \cdot 10^{10} \frac{\text{V}}{\text{m}}$, skierowane pionowo w dół; 4) zero. W punkcie O_1 : 1) i 2) $6,45 \cdot 10^9 \frac{\text{V}}{\text{m}}$, skierowane poziomo i w prawo; 3) $3,93 \cdot 10^{10} \frac{\text{V}}{\text{m}}$, skierowane pionowo w dół; 4) $3,27 \cdot 10^{10} \frac{\text{V}}{\text{m}}$, skierowane pionowo w górę.

33.2. W punktach A, B, D: zero; w punkcie C: $V = -2 \cdot 10^{10} \text{ V}$; w punkcie E: $V = 2 \cdot 10^{10} \text{ V}$.

$$33.3. E = 2,2 \cdot 10^{13} \frac{\text{V}}{\text{m}}, \quad V = 1,05 \cdot 10^{10} \text{ V}.$$

$$33.4. E = \frac{4k \sqrt{(q_2 - q_1)^2 d_2^2 + (q_4 - q_3)^2 d_1^2}}{d_1^2 d_2^2} = 0,16 \frac{\text{V}}{\text{m}}. \quad \text{Kąt między kierunkiem natężenia i długą przekątną} \\ \alpha = \arctg \frac{(q_2 - q_1) d_2^2}{(q_4 - q_3) d_1^2} = 45^\circ.$$

33.5. Natężenie w środku trójkąta jest równe zeru; w wierzchołku czworościanu $E = \frac{\sqrt{6} k q}{a^2} \approx 2,6 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$.

33.6. W odległości $r_1 = \frac{l \sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1 + \sqrt{q_2}}} \approx 7,5 \text{ cm}$ od mniejszego ładunku.

$$34.1. 1) E_1 = 0, \quad V_1 = V_0 = 2 \text{ V}. \quad E_2 = \frac{R V_0}{l_2^2} \approx 22 \frac{\text{V}}{\text{m}}, \quad V_2 = 7 \approx 1,33 \text{ V};$$

$$2) E_1 = 0, \quad V_1 = V_0 = 2 \text{ V}. \quad E_2 = \frac{R V_0}{r_1 l_2^2} \approx 11 \frac{\text{V}}{\text{m}}. \quad V_2 \approx 0,66 \text{ V}.$$

$$34.2. E_1 = 0, \quad r_1 = 0; \quad E_2 = k \frac{q_1}{l_2^2} \approx 11 \frac{\text{MV}}{\text{m}}, \quad U_2 = k \left(\frac{q_1}{l_2} - \frac{q_2}{R_2} \right) = -450 \text{ kV}.$$

$$U_1 = k \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{l_2} \right) \approx 5,5 \frac{\text{MV}}{\text{m}}, \quad U_1 = k \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} \right) = -450 \text{ kV}.$$

$$34.3. U = V_0 \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right)$$

$$35.1. t = \frac{\sqrt{2dm}}{\sqrt{eE}} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ s}, \quad r_0 = l \sqrt{\frac{2m}{2dm}} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ m}.$$

$$35.2. E = \frac{mv_0^2 \operatorname{tg} \alpha}{el} = 114 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

$$35.3. a = \frac{(m_1 - m_2) g + E(q_1 - q_2)}{m_1 + m_2}, \quad F_n = \frac{2m_1 m_2 g + E(m_2 q_1 + m_1 q_2)}{m_1 + m_2}.$$

$$35.4. f = \frac{mg + Eq}{\cos \alpha}, \quad F_k = \frac{(mg + Eq) l \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}.$$

$$35.5. l = \sqrt{\frac{5(mg + Eq)l}{m}}.$$

$$36.2. \omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}} \frac{kq^2}{ml \sin^2 \alpha}, \quad r_n = \frac{mg}{\cos \alpha}.$$

$$36.3. v = \sqrt{5gl - \frac{kq^2}{ml}}.$$

$$37.1. I = \frac{I_1 R_1 R_5}{R_4 R_3 + R_3 R_5 + R_4 R_5} = 0,2 \text{ A}. \quad 37.2. I = 1 \text{ A}.$$

$$37.3. R_x = R_g = \frac{R_h R_g}{R_g + R_h} \approx 0,16 \Omega.$$

$$37.4. U = \mathcal{E} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R_V} \right) \approx 9,9 \text{ V}, \quad f = \frac{r}{r + R_1} \approx 100\% = 100\%.$$

$$37.5. a) I = 0, \quad U = \mathcal{E}; \quad b) I = f, \quad U = \mathcal{E} - Ir = 0.$$

$$37.6. I = \frac{\mathcal{E}}{r + R + R_1} \approx 0,196 \text{ A}, \quad f = \frac{r}{r + R + R_1} \approx 100\% \approx 1,96\%.$$

$$37.7. I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - I_3(r_3 + R) + \mathcal{E}_3}{r_1} = 1,5 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - [I_3(r_3 + R) - \mathcal{E}_3]}{r_2} = 2,5 \text{ A},$$

$$I_3 = \frac{1}{r_1 + r_3 + r_1 r_2} \left(\frac{\mathcal{E}_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{\mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2} + \mathcal{E}_3 \right) = 4 \text{ A}.$$

$$37.8. I_1 = \frac{f_1(r_2 + R) - \mathcal{E}_1 R}{r_2 R + r_1 R + r_1 r_2}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2(r_1 + R) - \mathcal{E}_1 R}{r_2 R + r_1 R + r_1 r_2},$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_2 R + r_1 R + r_1 r_2}.$$

1) $I = 1 \text{ A}$, $I_1 = 0$, $I_2 = 1 \text{ A}$; 2) $I \approx 1,1 \text{ A}$, $I_1 = 0,57 \text{ A}$,
 $I_2 = 0,7 \text{ A}$; 3) $I = 0,5 \text{ A}$.

38.1. $C = \frac{12C_1C_2 + 4(C_2^2 + 3C_1^2)}{10C_2 + 3C_1} = 3\frac{17}{23} \mu\text{F}$.

38.2. $Q = \frac{\mathcal{E}R_2 C}{2(r+R_2)} = 6 \mu\text{C}$.

38.3. $Q = \frac{\mathcal{E}CR_1 R_2}{R_1 r + 2R_2 r + 2R_1 R_2}$.

38.4. $R = \frac{rdmv_0^2 \operatorname{tg}\alpha}{\mathcal{E}el - dm v_0^2 \operatorname{tg}\alpha}$.

38.5. $R_2 = 8 \Omega$.

38.6. $a = \operatorname{arc tg} \frac{3\mathcal{E}el}{v_0^2 md}$.

38.7. $\rho = CU = 2 \cdot 10^{-4} \Omega$.

38.8. $q_0 = C_0(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) = 20 \mu\text{C}$,

$q = C \frac{\mathcal{E}_1(R_1 + 2R_1) + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 + R_2} = 110 \mu\text{C}$.

39.1. $U = \mathcal{E}R(3r + R) \approx 3,75 \text{ V}$; $I = \frac{3\mathcal{E}}{3r + R} \approx 0,25 \text{ A}$.

39.2. $\frac{2}{3}R$.

39.3. $\frac{4}{3}R$.

39.4. $\frac{3}{4}R$.

39.5. $\frac{11}{20}R$.

39.6. $\frac{7}{4}R$.

40.1. $R = \frac{5r\eta}{3(1-\eta)} = 60 \Omega$, $P = \frac{\mathcal{E}^2 \eta (1-\eta)}{r} \approx 70 \text{ W}$ ($\eta = 0,5$).

40.2. Zmniejszy się $\frac{n+k+nk}{n(k+1)} = 1,4$ razy.

40.3. $r = \frac{R}{\alpha}$, $\eta_1 \approx 89\%$, $\eta_2 \approx 83\%$.

40.4. $m = 800 \text{ g}$.

40.5. 100 g wody zamieni się w parę; $t_3 \approx 21 \text{ min}$.

41.1. a) $B=0$; b) $B = \frac{2\mu_0 I}{\pi d}$.

41.2. 1) $B = \frac{\mu_0 3I}{4R}$; 2) $B = \frac{\mu_0 I}{4R}$; 3) $B = \frac{\mu_0 I \sqrt{5}}{4R}$.

41.3. $B = 0$.

41.4. 1) $B = \frac{\mu_0 I / l}{2\pi r_1 r_2} = 10^{-4} \text{ T}$;

2) $B = \frac{\mu_0 I / l}{\pi r_1 r_2} = 10^{-4} \text{ T}$.

41.5. $f_i = \frac{\mu_0 \sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{\pi d} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ T}$.

42.1. $a = \operatorname{arc tg} \frac{\bar{B}l}{mg} = \operatorname{arc tg} 1 = 45^\circ$.

42.2. $a = \operatorname{arc tg} \frac{Rr}{2\rho g S} \approx 45^\circ$.

43.1. $P = \frac{B^2 / 2 v^2}{R} = 0,625 \text{ W}$; $I = \frac{B/v}{R} = 0,25 \text{ A}$.

43.2. $q = \frac{BS}{2R} = 12,5 \mu\text{C}$.

43.3. $B = \sqrt{\frac{dp_g}{v}} \approx 4 \cdot 10^{-2} \text{ T}$.

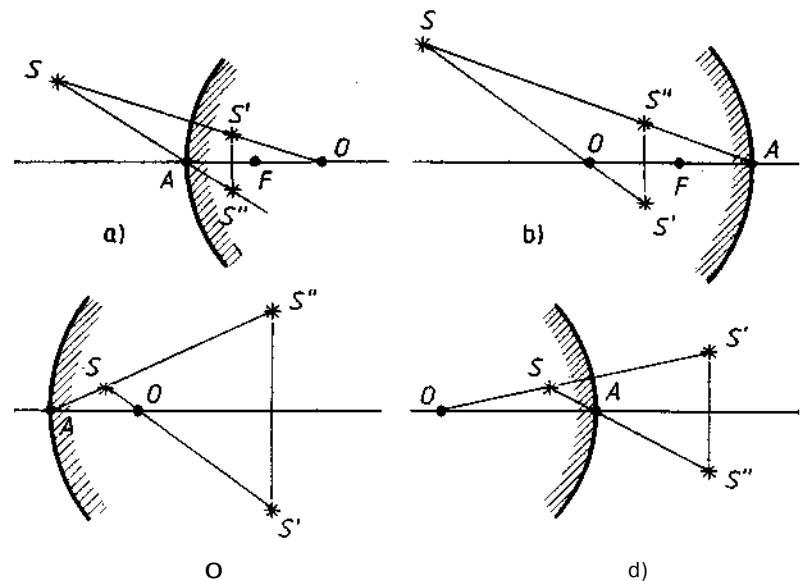
45.1. $h = \frac{rf_1 n_1 + d_1 n_1}{n_1 n_2} \approx 10,6 \text{ cm}$.

45.2. $L = \frac{2H-h}{\sqrt{n^2-1} \cos(x-\beta)}$, $\sin x = \frac{1}{n}$.

45.3. $a = \operatorname{arc tg} n = 56^\circ$, $x = \frac{d(n^2-1)}{n\sqrt{n^2-1}} = 2,3 \text{ cm}$.

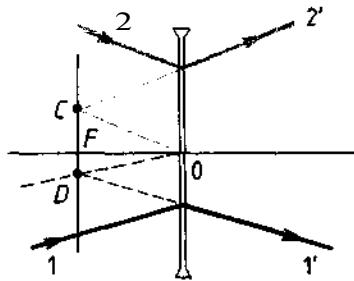
45.4. $x = \frac{d}{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \right)$.

46.1. Patrz rysunek 13.

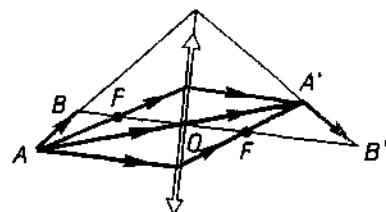


Rys. 13

- 46.2. Patrz rysunek 14; DO równoległy do promienia $1, (CFD)$ – płaszczyzna ogniskowa, promień 2 równoległy do CO .



Rys. 14



Rys. 15

- 46.3. Patrz rysunek 15.

- 47.1. Jest to soczewka rozpraszająca, $x = (1 - k_1)f = 15 \text{ cm}$; obraz odsuwa się od soczewki o

$$\Delta y = \frac{y^2 / f}{(x + f)(x + l + f)} = 6 \text{ cm}; \quad k_2 = \frac{\Delta y}{l + (1 - k_1)f} = 0,4.$$

- 47.2. Obraz jest pozorny, $y = \frac{R \times v}{2x - R} = -37,5 \text{ cm}$,

$$y_1 = \frac{R \times v + f}{2x_1 - R} = 150 \text{ cm} \quad (\text{obraz rzeczywisty}).$$

- 47.3. $y_2 = \frac{5}{2}f = 100 \text{ cm}$.

- 47.4. W miejscu znajdowania się soczewki środkowej. Obraz jest pozorny, $k = 1$.

$$47.5. y = \frac{xR}{2nx - R} = 100 \text{ cm}, \quad k = \frac{R}{2nx - R} = 4.$$

$$47.6. v = -\frac{vR}{2n(x + R)} = -6,25 \text{ cm}, \quad k = \frac{R}{2n(x + R)} = 0,625.$$

$$47.7. y_2 = \frac{f_2 \left(\frac{x_1 f_1}{x_1 - f_1} - l \right)}{f_2 - \left(\frac{x_1 f_1}{x_1 - f_1} - l \right)} = 45 \text{ cm} \quad (\text{od soczewki rozpraszającej}),$$

$$k = \frac{f_1 f_2}{(f_2 + l)(x_1 + f_1) - x_1 f_2} = \frac{45}{8}$$

- 47.8. Obraz znajduje się w odległości 18 cm od zwierka.