G. POLYA

JAK TO ROZWIĄZAĆ ?

WYDANIE DRUGIE

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 1993

Tytuł oryginału

G. Polya – HOW TO SOLVE IT

Tłumaczył z języka angielskiego LESZEK KUBIK

Okładkę i strony tytułowe projektował DARIUSZ LITWINIEC

Książka zalecana przez Ministra Edukacji Narodowej do użytku szkolnego i wpisana do zestawu książek pomocniczych do nauki matematyki na poziomie szkoły średniej ogólnokształcącej. Numer w zestawie 325/92.

ISBN 83-01-11195-X

PRZEDMOWA

Wielkie odkrycie rozwiązuje zawsze jakiś wielki problem. Ale rozwiązanie każdego problemu ma pewne cechy odkrycia. Wasz problem może być skromny; jeśli jednak zaciekawi on was i pobudzi do czynu wasze zdolności twórcze i jeśli rozwiążecie go własnymi siłami, możecie doznać emocji towarzyszącej napięciu umysłu i triumfowi dokonanego odkrycia. Takie emocje przeżyte w odpowiednim wieku mogą zrodzić zamiłowanie do twórczej pracy umysłowej i wywrzeć piętno na umyśle i charakterze na całe życie.

Tak więc nauczyciel matematyki ma wielką szansę. Jeśli poświęci swój czas na ćwiczenie swoich uczniów w szablonowych działaniach, wówczas zabije ich zainteresowanie, zahamuje ich intelektualny rozwój i nie wykorzysta swojej szansy. Jeśli jednak rozbudzi ich zainteresowanie, dając im do rozwiązania zadania odpowiednie do posiadanego przez nich zasobu wiedzy, i pomoże im przy rozwiązywaniu, zadając pytania naprowadzające na właściwą drogę, może wpoić w nich zamiłowanie do samodzielnego myślenia.

Podobnie uczeń szkoły, której program zawiera choć trochę matematyki, ma niezwykłą szansę. Szansę tę oczywiście zaprzepaści, jeśli traktuje matematykę jako przedmiot, który musi sobie tylko zaliczyć i który powinien po ostatnim egzaminie zapomnieć jak najszybciej. Szansę tę może zaprzepaścić nawet uczeń mający nieco wrodzonych zdolności do matematyki. Musi on bowiem, tak jak każdy, odkryć swoje zdolności i zamiłowania. Nie może wiedzieć, że lubi ciastko z malinami, jeśli nigdy takiego ciastka nie próbował.

Może jednakże przekonać się, że zadanie matematyczne może być taką rozrywką jak krzyżówka i że wytężona praca może być tak upragnionym ćwiczeniem jak szybki gem tenisa. Znalazłszy przyjemność w matematyce nie zapomni jej szybko i jest duża szansa, że matematyka stanie się dla niego czymś istotnym: ulubioną rozrywką, narzędziem w jego pracy zawodowej, zawodem lub wielką ambicją.

Autor przypomina sobie czasy, gdy sam był studentem, ambitnym i żądnym zrozumienia nieco matematyki i fizyki. Słuchał wykładów, czytał książki, starał się zrozumieć istotę rozwiązań i przytaczanych faktów, lecz jedno pytanie wciąż go niepokoiło: „No tak, rozwiązanie spełnia swoje zadanie, jest to właściwe rozwiązanie; ale jak można wymyślić takie rozwiązanie? No tak, to doświadczenie przebiega jak należy, zaobserwowane zjawisko jest niezaprzeczalnym faktem; lecz jak można odkryć takie fakty? Jak ja sam mógłbym wymyślić takie rozwiązania lub odkryć takie fakty?" Dzisiaj autor naucza matematyki na uniwersytecie; przypuszcza, że niektórzy z jego najzdolniejszych studentów zadają sobie podobne pytania, i stara się zaspokoić ich ciekawość. Starając się zrozumieć nie tylko rozwiązanie tego czy innego problemu, lecz także sposób, w jaki zostało ono znalezione, i starając się wyjaśnić innym sam proces znajdowania rozwiązania, autor postanowił w końcu napisać niniejszą książkę. Autor ma nadzieję, że będzie ona użyteczna dla nauczycieli, którzy chcą rozwijać zdolności swoich uczniów do rozwiązywania problemów, i dla uczniów, którzy pragną rozwijać swoje własne zdolności.

Chociaż książka ta zwraca szczególną uwagę na potrzeby studentów i nauczycieli matematyki, to jednak powinna ona zaciekawić każdego, kto interesuje się metodami prowadzącymi do nowych odkryć i wynalazków. Zainteresowanie tymi metodami jest, być może, większe niż można by na pierwszy rzut oka przypuszczać. Ilość miejsca poświęconego w popularnych dziennikach i tygodnikach na krzyżówki i innego rodzaju zagadki wydaje się wskazywać na to, że ludzie tracą trochę czasu na rozwiązywanie zagadnień nie mających żadnego praktycznego znaczenia. Za chęcią rozwiązania tego czy innego problemu, nie dającego żadnych istotnych korzyści, może jednak kryć się głębsze zaciekawienie: chęć poznania metod znajdowania rozwiązań.

Niniejsza książka napisana jest nieco zwięźle, lecz w sposób możliwie prosty, i oparta jest na długich i poważnych badaniach metod rozwiązywania zadań. Ten rodzaj badań, zwany przez niektórych *heurystyką,* nie jest obecnie modny, lecz ma za sobą bogatą przeszłość, a także pewną przyszłość.

Badając metody rozwiązywania zadań zauważamy inne oblicze matematyki. Tak, matematyka ma dwa oblicza: jest ona rygorystyczną nauką Euklidesa, lecz jest także czymś innym. Matematyka przedstawiona tak, jak to zrobił Euklides, jest systematyczną nauką dedukcyjną; lecz matematyka w procesie tworzenia staje się nauką eksperymentalną, indukcyjną. Oba aspekty matematyki są tak stare, jak sama matematyka. Jednak drugi aspekt jest pod jednym względem nowy: matematyki *in statu nascendi,* w procesie tworzenia, nigdy przedtem nie przedstawiono w taki właśnie sposób ani uczniowi, ani samemu nauczycielowi, ani szerokiemu ogółowi.

Heurystyka wiąże się z wieloma naukami; poszczególne jej części można uznać za wchodzące w skład matematyki, logiki, psychologii, pedagogiki, a nawet filozofii. Autor, dobrze zdając sobie sprawę z możliwości krytykowania go przez innych i świadom ograniczonych ram swojej wiedzy, chciałby na jedno zwrócić uwagę: ma on pewne doświadczenie w rozwiązywaniu problemów oraz w nauczaniu matematyki na różnych poziomach.

Przedmiot tej książki będzie potraktowany szerzej w obszerniejszej książce autora, będącej na ukończeniu.

G. Polya

SPIS RZECZY

Część I. W KLASIE

Cel

Główne części i główne pytania

Dalsze przykłady

Część II. JAK TO ROZWIĄZAĆ?

Część III. KRÓTKI SŁOWNIK HEURYSTYCZNY

* Zawiera tylko odsyłacze do innych artykułów.

* Zawiera tylko odsyłacze do innych artykułów.

* Zawiera tylko odsyłacze do innych artykułów.

JAK TO ROZWIĄZAĆ?

1.

Staraj się *zrozumieć* zadanie.

2.

Znajdź związek między danymi i niewiadomymi.
Możesz być zmuszony rozpatrywać zadania pomocnicze, jeżeli nie możesz znaleźć związku bezpośrednio.
Powinieneś w końcu ułożyć pewien *plan* rozwiązywania zadania.

3.

Wykonaj swój plan.

4.

Przestudiuj otrzymane rozwiązanie.

ZROZUMIENIE ZADANIA

- ***Co jest niewiadome? Co jest dane? Jaki jest warunek?***
- **Czy warunek można spełnić? Czy warunek wystarcza do określenia niewiadomej? Czy jest on może niewystarczający? Albo zbyt obszerny? A może sprzeczny?**
- **Zrób rysunek. Wprowadź odpowiednie oznaczenia.**
- **Wydziel poszczególne części warunku. Czy możesz je zapisać?**

UKŁADANIE PLANU ROZWIĄZANIA

- **Czy nie spotkałeś się już kiedyś z tym zadaniem? A może spotkałeś się z tym samym zadaniem w nieco innej postaci?**
- ***Czy znasz jakieś pokrewne zadanie?* Czy znasz jakieś twierdzenie, które mogłoby tu być użyte?**
- ***Spójrz na niewiadomą!* I spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze znane ci zadanie mające tę samą lub podobną niewiadomą.**
- ***Oto rozwiązane już przedtem zadanie, pokrewne z twoim zadaniem. Czy nie mógłbyś z niego skorzystać?* Czy nie mógłbyś skorzystać z jego wyniku? Czy nie mógłbyś skorzystać z zastosowanej w nim metody? Czy nie trzeba wprowadzić jakiegoś elementu pomocniczego, aby móc z tego zadania skorzystać?**
- **Czy nie mógłbyś postawić zadania na nowo, w inny sposób? Czy nie mógłbyś tego zrobić jeszcze inaczej? Odwołaj się do definicji.**
- **Jeśli nie możesz rozwiązać postawionego zadania, spróbuj najpierw rozwiązać jakieś zadanie pokrewne. Czy nie mógłbyś wymyślić jakiegoś bardziej dostępnego zadania pokrewnego? Bardziej ogólnego zadania? Bardziej specjalnego? Analogicznego? Czy nie mógłbyś rozwiązać części zadania? Zatrzymaj tylko część warunku, resztę odrzuć; do jakiego stopnia niewiadoma jest wtedy określona, jak może się ona zmieniać? Czy nie mógłbyś wydobyć czegoś pożytecznego z danych? Czy nie mógłbyś rozpatrzyć innych danych, mogących określić niewiadomą? Czy nie mógłbyś zmienić niewiadomej albo danych, albo — jeśli trzeba — i niewiadomej i danych, tak aby nowa niewiadoma i nowe dane były bliższe sobie?**
- **Czy skorzystałeś ze wszystkich danych? Czy skorzystałeś z całego warunku? Czy brałeś pod uwagę wszystkie istotne pojęcia zawarte w zadaniu?**

WYKONYWANIE PLANU

- **Wykonując swój plan rozwiązania *sprawdzaj każdy krok.* Czy jest dla ciebie jasne, że krok jest poprawny? Czy możesz to udowodnić?**

RZUT OKA WSTECZ

- **Czy możesz *sprawdzić wynik?* Czy możesz sprawdzić uzasadnienie rozwiązania?**
- **Czy możesz otrzymać wynik w inny sposób? Czy możesz objąć go jednym rzutem oka?**
- **Czy możesz wykorzystać wynik albo metodę rozwiązania do innego zadania?**

WSTĘP

Rozważania tej książki grupują się wokół podanej listy pytań i wskazówek zatytułowanej *Jak to rozwiązać?*. Każde pytanie czy wskazówka zacytowane z tej listy są wydrukowane *kursywą*. Całą listę będziemy w dalszym ciągu nazywali krótko „listą" lub „naszą listą".

Na stronicach tej książki omówimy cel tej listy, pokażemy na przykładach praktyczną korzyść z niej i wyjaśnimy leżące u podstaw pojęcia i operacje myślowe. Jako wstępne objaśnienie można powiedzieć: Jeżeli skierujecie pytania i wskazówki listy do siebie i użyjecie ich w sposób właściwy, mogą one wam pomóc w rozwiązaniu waszego zadania. Jeżeli skierujecie je do któregoś z waszych uczniów, możecie mu pomóc w rozwiązaniu jego zadania.

Książka jest podzielona na cztery części.

Pierwsza część jest zatytułowana *W klasie*. Składa się ona z dwudziestu ustępów. Na ustępy będziemy się powoływali podając ich numer drukiem **półgrubym**, np. ustęp **7**. W ustępach **1-5** omawiamy w sposób ogólny *Cel* naszej listy. W ustępach **6-17** wyjaśniamy, co to są *Główne części i główne pytania* listy i rozpatrujemy pierwszy przykład praktyczny. W ustępach **18, 19, 20** podajemy *Dalsze przykłady*.

Druga, bardzo krótka część zatytułowana jest *Jak to rozwiązać?*. Napisana jest w formie dialogu: nieco wyidealizowany nauczyciel odpowiada na krótkie pytania nieco wyidealizowanego ucznia.

Trzecią, najobszerniejszą częścią jest *Krótki słownik heurystyczny;* powołując się nań będziemy go krótko nazywali *Słownikiem*. Zawiera on sześćdziesiąt siedem artykułów ułożonych w porządku alfabetycznym tytułów ([1]). Na przykład znaczenie terminu HEURYSTYKA (wydrukowanego kapitalikami) wyjaśnione jest w artykule pod tymże tytułem na str. 112. Jeśli podając w tekście tytuł artykułu będziemy chcieli odesłać doń czytelnika, wydrukujemy tytuł kapitalikami. Niektóre artykuły są dość ściśle związane z pierwszą częścią, dla której stanowią dodatkową ilustrację i bardziej specjalny komentarz. Inne artykuły wykraczają nieco poza ramy nakreślone w pierwszej części; wyjaśniają one podłoże tej części.

Artykuł NOWOCZESNA HEURYSTYKA gra rolę klucza. Wyjaśnia związek między głównymi artykułami i planem *Słownika*. Zawiera także wskazówki, w jaki sposób znaleźć informacje dotyczące poszczególnych pozycji listy. Ponieważ artykuły *Słownika* wykazują wielką różnorodność, należy podkreślić z naciskiem, że jednak istnieje pewien wspólny plan i pewna jedność tych artykułów. Kilka dłuższych artykułów poświęconych jest systematycznemu, choć dość zwięzłemu badaniu pewnych ogólnych tematów. Inne zawierają bardziej specjalne uwagi, odsyłają do innych artykułów, podają dane historyczne, cytaty, aforyzmy, a nawet żarty.

Słownika nie należy czytać zbyt szybko; jego tekst jest często napisany zwięźle, a tu i ówdzie jest dość subtelny. Czytelnik może szukać w *Słowniku* informacji dotyczących różnych spraw. Jeśli sprawy te wyniknęły przy rozwią-

([1]) W niniejszym przekładzie polskim zachowano zasadę alfabetycznego uporządkowania artykułów, co spowodowało inną ich kolejność niż w oryginale angielskim (*przypisek redakcji wydania polskiego*).

zywaniu zadań przez niego samego lub przez jego uczniów, to bardzo wzrasta szansa odniesienia korzyści ze *Słownika*.

Czwarta część zatytułowana jest *Zadania, wskazówki, rozwiązania*. W części tej podajemy bardziej ambitnym czytelnikom kilka zadań do rozwiązania. Każde zadanie zaopatrzone jest we wskazówkę (podaną w odpowiednim miejscu), która może naprowadzić na podaną dalej drogę rozwiązania.

Często wspominaliśmy już o „uczniu" i o „nauczycielu" i w dalszym ciągu często będziemy się do nich odwoływali. Należy zauważyć, że „uczniem" może być student szkoły wyższej albo uczeń szkoły średniej, albo wreszcie ktokolwiek inny, kto uczy się matematyki. Podobnie „nauczycielem" może być profesor szkoły wyższej, nauczyciel szkoły średniej albo ktokolwiek, kogo interesuje metodyka nauczania matematyki. Autor spogląda na zagadnienie czasem z punktu widzenia ucznia, czasem z punktu widzenia nauczyciela (ten ostatni przypadek przeważa w pierwszej części). Jednak najczęściej (szczególnie w trzeciej części) punkt widzenia autora jest punktem widzenia osoby, która nie jest ani nauczycielem, ani uczniem, lecz po prostu osobą pragnącą rozwiązać stojące przed nią zadanie.

Część I. W KLASIE

Cel

1. Pomaganie uczniowi. Jednym z najważniejszych zadań nauczyciela jest pomaganie swoim uczniom. Zadanie to nie jest takie proste; wymaga ono czasu, doświadczenia, poświęcenia i właściwych zasad.

Uczeń powinien zdobyć możliwie duże doświadczenie w samodzielnej pracy. Jeśli jednak zostawimy go samemu sobie wraz z jego problemem, bez żadnej pomocy, albo pomożemy mu za mało, może on nie robić żadnych postępów. Jeśli pomożemy mu za dużo, nic już dla niego nie zostanie do zrobienia. Nauczyciel powinien pomagać, ale ani zbyt dużo, ani zbyt mało, tak aby uczniowi pozostała odpowiednia, *rozsądnie wybrana część pracy*.

Jeśli uczeń nie jest w stanie zrobić wiele, nauczyciel powinien przynajmniej pozostawić mu złudzenie samodzielnej pracy. W tym celu powinien pomagać uczniowi możliwie dyskretnie, *nienatarczywie*.

Najlepiej jest jednak pomagać w sposób naturalny. Nauczyciel powinien postawić się na miejscu ucznia, zobaczyć jakie jest jego położenie, zrozumieć, co się dzieje w jego umyśle i zadać mu takie pytanie lub wskazać na taki krok w rozumowaniu, który *mógłby uczniowi samodzielnie przyjść na myśl*.

2. Pytania, wskazówki, operacje myślowe. Chcąc pomagać uczniowi skutecznie, lecz nienatarczywie i naturalnie, nauczyciel powinien wciąż zadawać te same pytania i wskazywać te same kroki w rozumowaniu. I tak w wielu zadaniach musimy zadać pytanie: *Co jest niewiadome?* Możemy zmieniać słowa i pytać się o to samo na wiele różnych sposobów: Czego szukamy? Co chcemy znaleźć? Co musimy zbadać? Celem tych pytań jest skupienie uwagi ucznia wokół niewiadomej. Czasami osiągamy ten sam wynik bardziej naturalnie przy pomocy wskazówki: *Spójrz na niewiadomą!* Pytanie i wskazówka zmierzają do tego samego: do wywołania tej samej czynności myślowej.

Autorowi wydawało się, że będzie rzeczą pożyteczną zebrać i pogrupować typowe pytania i wskazówki, które są pomocne przy omawianiu zadań z uczniami. Lista, którą przestudiujemy, zawiera tego rodzaju pytania i wskazówki pieczołowicie wybrane i uporządkowane; są one w równym stopniu użyteczne dla ludzi rozwiązujących zadania samodzielnie. Jeżeli czytelnik jest w dostatecznym stopniu zaznajomiony z tą listą i widzi kryjące się za wskazówką sugerowane działanie, to uświadomi sobie, że lista ta wylicza, w sposób pośredni, *typowe operacje myślowe użyteczne przy rozwiązywaniu zadań.* Operacje te są spisane w kolejności, w jakiej najczęściej można je spotkać.

3. Ogólność jest ważną cechą charakterystyczną pytań i wskazówek zawartych w naszej liście. Weźmy pod uwagę pytania: *Co jest niewiadome? Co jest dane? Jaki jest warunek?* Pytania te są tak ogólne, że można je zadać przy rozpatrywaniu wszelkiego rodzaju zadań. Ich zastosowanie nie jest ograniczone do żadnego tematu. Nasze zadanie może być zadaniem algebraicznym lub geometrycznym, matematycznym lub nie matematycznym, teoretycznym lub praktycznym, zagadnieniem poważnym lub

jedynie zagadką — to nie robi żadnej różnicy; powyższe pytania mają sens i mogą nam pomóc w rozwiązaniu.

Właściwie istnieje nawet pewne **ograniczenie**, ale nie ma ono nic wspólnego z tematem zadania. Niektóre pytania i wskazówki z naszej listy stosują się tylko do zadań typu „znaleźć", a nie stosują się do zadań typu "udowodnić". Jeśli mamy do czynienia z zadaniem drugiego typu, musimy stosować inne pytania; patrz Zadania typu „znaleźć", zadania typu „udowodnić".

4. Zdrowy rozsądek. Pytania i wskazówki naszej listy są ogólne, ale oprócz tego są one naturalne, proste, oczywiste i wynikają po prostu ze zdrowego rozsądku. Weźmy wskazówkę: *Spójrz na niewiadomą! I spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze znane zadanie mające tę samą lub podobną niewiadomą.* Ta wskazówka radzi nam zrobić to, co i tak zrobilibyśmy bez niczyjej rady, jeśli poważnie interesujemy się naszym zadaniem. Jesteś głodny? Wówczas starasz się otrzymać pożywienie i przypominasz sobie znane sposoby zdobycia pożywienia. Masz do czynienia z problemem jakieś konstrukcji geometrycznej? Wtedy usiłujesz zbudować trójkąt i przypominasz sobie znane sposoby konstruowania trójkątów. Masz jakiekolwiek zadanie? Starasz się wtedy znaleźć odpowiednią niewiadomą i przypominasz sobie znane sposoby znajdowania takiej lub podobnej niewiadomej. Jeśli tak robisz, postępujesz dokładnie zgodnie ze wskazówką, którą przytoczyliśmy z naszej listy. I jesteś na właściwym tropie; wskazówka jest dobra: sugeruje ona nam postępowanie, które bardzo często kończy się powodzeniem.

Wszystkie pytania i wskazówki naszej listy są naturalne, proste i oczywiste — po prostu są zgodne ze zdrowym rozsądkiem, lecz wyrażają one zwykły zdrowy rozsądek w sposób ogólny. Sugerują pewien sposób postępowania, który w sposób naturalny przyjmuje każda osoba poważnie zainteresowana swoim zadaniem i mająca nieco zdrowego rozsądku. Lecz osoba przyjmująca właściwy sposób postępowania zazwyczaj nie troszczy się o wyrażenie swojego postępowania w sposób jasny i przejrzysty, a być może nawet nie potrafi tego zrobić; nasza lista próbuje tego dokonać.

5. Nauczyciel i uczeń. Naśladowanie i praktyka. Jeśli nauczyciel skierowuje do swoich uczniów pytanie lub wskazówkę z naszej listy, to może to robić z myślą o osiągnięciu dwóch celów: po pierwsze, z myślą o udzieleniu pomocy uczniowi w rozwiązaniu danego konkretnego zadania, po drugie, z myślą o rozwinięciu zdolności ucznia, tak aby w przyszłości mógł samodzielnie rozwiązywać zadania.

Doświadczenie pokazuje, że odpowiednio stosowane pytania i wskazówki naszej listy bardzo często pomagają uczniowi. Wszystkie one mają dwie wspólne cechy: zdrowy rozsądek i ogólność. Ponieważ wynikają ze zwykłego zdrowego rozsądku, często pojawiają się w sposób naturalny; mogą przyjść na myśl uczniowi same, bez niczyjej pomocy. Ponieważ są ogólne, pomagają w sposób nienatarczywy; po prostu wskazują ogólny kierunek zostawiając uczniowi wiele do zrobienia. Wspomniane wyżej dwa cele są jednak ściśle ze sobą związane; jeśli uczniowi uda się rozwiązać dane zadanie, to tym samym rozwinie on nieco swoje ogólne zdolności do rozwiązywania zadań. Następnie, nie powinniśmy zapominać, że nasze pytania są ogólne, a więc stosowane w wielu przypadkach. Jeśli to samo pytanie wielokrotnie pomaga rozwiązać zadanie,

uczeń zauważy to i sam zacznie zadawać to pytanie w podobnych sytuacjach. Zadając to pytanie często, może uchwycić właściwą myśl pytania, odkryć właściwy sposób stosowania go. Wtedy rzeczywiście zrozumie to pytanie i przyswoi je sobie.

Uczeń może przyswoić sobie pytania naszej listy tak dobrze, że w końcu będzie w stanie samodzielnie zadawać sobie odpowiednie pytania w odpowiedniej chwili i dokonywać odpowiednich operacji myślowych w sposób naturalny i spontaniczny. Taki uczeń wyciągnął z pewnością z naszej listy maksimum korzyści. Powstaje pytanie, co ma robić nauczyciel, aby osiągnąć ten możliwie najlepszy wynik?

Rozwiązywanie zadań jest taką samą umiejętnością praktyczną, jak np. pływanie. Każdą praktyczną umiejętność osiągamy przez naśladowanie i ćwiczenie. Chcąc pływać, naśladujemy innych w tym, co oni robią ze swoimi rękami i nogami, aby utrzymać głowę ponad wodą, i w końcu zdobywamy tę umiejętność przez wielokrotne ćwiczenie. Chcąc rozwiązywać zadania, musimy obserwować innych, naśladować ich i w końcu nauczymy się tego przez ćwiczenie rozwiązywania zadań.

Nauczyciel, który chce rozwinąć zdolności swoich uczniów do rozwiązywania zadań, musi rozbudzić w nich zainteresowanie do tych zadań i dać im możność naśladowania i zdobywania praktyki. Jeżeli chce przyzwyczaić ich do operacji myślowych towarzyszących pytaniom i wskazówkom naszej listy, zwraca się do nich z tymi pytaniami i wskazówkami, ilekroć może to zrobić w sposób nie sztuczny. Ponadto, jeśli rozwiązuje jakieś zadanie sam przed uczniami, powinien nieco dramatyzować swoje myśli i zadawać sobie te same pytania, które zadaje uczniom pomagając im. Dzięki temu uczniowie odkryją w końcu, na czym polega właściwe stosowanie naszych pytań i wskazówek. Tym samym zdobędą coś, co jest ważniejsze od poznania jakiegokolwiek szczególnego faktu matematycznego.

Główne części i główne pytania

6. Cztery fazy. Chcąc znaleźć rozwiązanie, możemy wielokrotnie zmieniać nasz punkt widzenia, nasz sposób patrzenia na zadanie. I powinniśmy to robić. Na początku naszej pracy nasz pogląd na zadanie jest na ogół niekompletny; po otrzymaniu pewnych wyników staje się on nieco inny, niż był na początku; gdy zadanie jest już prawie rozwiązane, nasz pogląd nań jest jeszcze inny.

Aby odpowiednio pogrupować pytania i wskazówki naszej listy, wyróżniamy cztery fazy pracy. Po pierwsze, musimy *zrozumieć* zadanie; musimy dobrze zdawać sobie sprawę, co jest żądane. Po drugie, musimy zobaczyć, jak poszczególne wielkości są ze sobą powiązane, jak łączy się niewiadoma z danymi, aby wyrobić sobie jakieś pojęcie o rozwiązaniu i zrobic pewien *plan*. Po trzecie, *wykonujemy* nasz plan. Po czwarte, *rzucamy okiem wstecz* na otrzymane rozwiązanie, analizujemy je i omawiamy.

Każda z tych faz jest ważna. Może się wprawdzie zdarzyć, że uczeń wpadnie na wyjątkowo dobry pomysł i przeskakując wszelkie przygotowawcze fazy otrzyma rozwiązanie od razu. Takie szczęśliwe pomysły są, oczywiście, jak najbardziej pożądane. Jednakże może się zdarzyć coś bardzo niepożądanego i nieszczęśliwego, jeśli uczeń opuści którąkolwiek z czterech faz nie mając dobrego pomysłu. Najgorzej, jeśli uczeń zabiera się do rachunków czy konstrukcji *nie zrozumiawszy* zadania. Zabieranie się do szczegółów bez spostrzeżenia głównych związków między wielkościami i bez jakiegokolwiek *planu* jest zazwyczaj bezużyteczne. Uczeń mógłby uniknąć wielu błędów, gdyby wykonując swój plan *sprawdzał każdy krok*. Może zaprzepaścić największe korzyści płynące z rozwiązania zadania, jeżeli zaniedba rozważenie na nowo i *przeanalizowanie* otrzymanego rozwiązania.

7. Zrozumienie zadania. Niemądrze jest odpowiadać na pytanie, któregośmy nie zrozumieli.

Żałośnie jest pracować dla osiągnięcia celu, którego nie pragnęliśmy. Tego rodzaju niemądre i żałosne rzeczy często zdarzają się, zarówno w szkole, jak i poza nią. Nauczyciel powinien starać się nie dopuszczać do tego, aby miały one miejsce w jego klasie. Uczeń powinien zrozumieć zadanie. Powinien jednak nie tylko zrozumieć zadanie, ale także chcieć je rozwiązać. Nie zawsze jest winą ucznia, że nie rozumie zadania lub że go zadanie nie ciekawi. Zadanie powinno być odpowiednio dobrane: powinno być nie za trudne i nie za łatwe, nie sztuczne i interesujące, i czasem powinno mieć naturalną i ciekawą interpretację.

Przede wszystkim słowne sformułowanie zadania musi być zrozumiane. Nauczyciel może to w pewnej mierze sprawdzić: prosi ucznia o powtórzenie sformułowania; uczeń powinien umieć płynnie sformułować zadanie. Uczeń powinien także umieć wskazać podstawowe elementy zadania: niewiadomą, dane i warunek. Dlatego też nauczyciel rzadko może obejść się bez pytań: *Co jest niewiadome? Co jest dane? Jaki jest warunek?*

Uczeń powinien rozpatrzyć podstawowe elementy zadania uważnie, wielokrotnie i z różnych stron. Jeżeli z zadaniem związana jest pewna figura, powinien *zrobić rysunek* i wskazać na nim niewiadomą oraz dane. Jeżeli trzeba te elementy jakoś nazwać, powinien *wprowadzić odpowiednie oznaczenia* poświęcając nieco uwagi właściwemu wyborowi symboli, powinien rozważyć te obiekty, dla których ma wybrać symbole. Jest jeszcze jedno pytanie, które może być użyteczne na tym przygotowawczym etapie, pod warunkiem, że nie będziemy oczekiwać ostatecznej odpowiedzi, lecz tylko tymczasowej: *Czy warunek można spełnić?*

(W części II (str. 55) *Zrozumienie zadania* dzielimy na dwa etapy: *Zaznajomienie się z zadaniem* i *Głębsze wniknięcie w zadanie.*)

8. Przykład. Zilustrujmy niektóre punkty rozważane w poprzednim ustępie. Weźmy pod uwagę następujące proste zadanie: *Znaleźć przekątną prostopadłościanu znając jego długość, szerokość i wysokość.*

Aby osiągnąć korzyść z tego zadania, uczniowie powinni dobrze znać twierdzenie Pitagorasa i pewne jego zastosowania w geometrii płaszczyzny, mogą natomiast słabo znać geometrię przestrzenną. Nauczyciel może polegać tutaj na naturalnej znajomości stosunków przestrzennych u uczniów.

Nauczyciel może zadanie uczynić ciekawszym nadając mu bardziej konkretną postać. Klasa jest prostopadłościanem, którego wymiary można zmierzyć, a także ocenić je w przybliżeniu; uczniowie powinni znaleźć przekątną, mierząc ją w sposób pośredni. Nauczyciel pokazuje długość, szerokość i wysokość klasy, wskazuje gestem przekątną, a następnie ożywia swój rysunek zrobiony na tablicy, wracając wielokrotnie do rozpatrywania klasy.

Dialog między nauczycielem a uczniami może rozpocząć się w następujący sposób:

— *Co jest niewiadome?*

— Długość przekątnej prostopadłościanu.

— *Co jest dane?*

— Długość, szerokość i wysokość prostopadłościanu.

— *Wprowadźcie odpowiednie oznaczenia.* Jaką literą oznaczycie niewiadomą?

— x.

— Jakimi literami oznaczycie długość, szerokość i wysokość?

— a, b, c.

— *Jaki jest warunek* wiążący a, b, c i x?

— x jest przekątną prostopadłościanu, dla którego a, b i c są odpowiednio długością, szerokością i wysokością.

— Czy nasze zadanie jest sensowne? To znaczy, *czy warunek wystarcza do określenia niewiadomej?*

— Tak jest. Jeżeli znamy a, b, c, to znamy prostopadłościan. Jeżeli prostopadłościan jest określony, to przekątna jest także określona.

9. Układanie planu rozwiązania. Plan mamy wtedy, gdy wiemy — przynajmniej w zarysie — jakich obliczeń lub konstrukcji musimy dokonać, aby otrzymać niewiadomą. Droga prowadząca od zrozumienia zadania do ułożenia planu rozwiązania może być długa i zawiła. Najważniejszą rzeczą w rozwiązaniu zadania jest wpaść na pomysł planu rozwiązania. Ten pomysł może wyłaniać się stopniowo. Albo też, po pozornie bezowocnych próbach i wahaniach, może przyjść nagle, w postaci błysku, jako „genialna myśl". Najlepsze, co nauczyciel może uczynić dla swoich uczniów, jest poddać im taki dobry pomysł w sposób nienatarczywy. Pytania i wskazówki, które omówimy, dążą do wywołania u uczniów takiego pomysłu.

Aby być w stanie zrozumieć sytuację ucznia, nauczyciel powinien przypomnieć sobie swoje własne doświadczenie, swoje trudności i sukcesy w rozwiązywaniu zadań.

Wiadomo, oczywiście, że trudno jest mieć dobry pomysł, jeśli ma się niewielką wiedzę o przedmiocie, a wręcz niemożliwe jest mieć taki pomysł przy zupełnym braku wiadomości z danego zakresu. Dobre pomysły oparte są na zdobytym uprzednio doświadczeniu i wiedzy. Samo pamiętanie pewnych faktów jest niewystarczające dla powstania dobrego pomysłu, ale nie można mieć żadnych dobrych pomysłów, nie przypominając sobie odpowiednich faktów; same materiały budowlane nie wystarczają do zbudowania domu, ale nie można zbudować domu, nie zebrawszy potrzebnych materiałów. Materiałami potrzebnymi do rozwiązania zadania matematycznego są pewne elementy naszej poprzednio zdobytej wiedzy matematycznej, takie jak poprzednio rozwiązane zadania lub poprzednio udowodnione twierdzenia. Dlatego też często należy rozpocząć pracę nad zadaniem od pytania: *Czy znasz jakieś pokrewne zadanie?*

Cała trudność polega na tym, że zazwyczaj jest wiele zadań w pewnym sensie pokrewnych naszemu, to jest mających z nim pewien wspólny element. Jak można wybrać spośród nich jedno lub kilka zadań rzeczywiście dla nas użytecznych? Otóż mamy wskazówkę, która zwraca naszą uwagę na istotny wspólny element: *Spójrz na niewiadomą! I spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze znane zadanie mające tę samą lub podobną niewiadomą.*

Jeśli udało nam się przypomnieć poprzednio rozwiązane zadanie, ściśle związane z naszym obecnym zadaniem, to mamy szczęście. Powinniśmy postarać się być wartymi tego szczęścia; możemy to uczynić wyciągając z niego tak wiele korzyści, jak tylko można. *Oto rozwiązane już przedtem zadanie, pokrewne twemu zadaniu. Czy nie mógłbyś z niego skorzystać?*

Rozpatrzone wyżej pytania, dobrze zrozumiane i potraktowane na serio, bardzo często pomagają w powstaniu właściwego szeregu myśli; nie mogą one jednak pomagać zawsze, gdyż nie są to żadne pytania magiczne. Jeśli nie pomagają, musimy rozejrzeć się za innymi punktami styczności i zbadać różne aspekty naszego zadania; musimy zmieniać, przekształcać i modyfikować zadanie. *Czy nie mógłbyś postawić zadania na nowo, w inny sposób?* Niektóre pytania naszej listy wspominają o specjalnych sposobach modyfikacji zadania: o uogólnieniu, o specjalizacji, o użyciu analogii, o odrzuceniu części warunku itd.; szczegóły te są ważne, lecz na razie nie możemy się w nie wdawać. Modyfikacja zadania może prowadzić do odpowiedniego zadania pomocniczego: *Jeśli nie możesz rozwiązać postawionego zadania, spróbuj najpierw rozwiązać jakieś zadanie pokrewne.*

Próbując korzystać z różnych znanych zadań czy twierdzeń, rozpatrując różne modyfikacje, eksperymentując z różnymi zadaniami pomocniczymi, możemy tak daleko oddalić się od naszego początkowego zadania, że powstanie obawa całkowitego zagubienia go. Jest jednak dobre pytanie, które może nas przyprowadzić z powrotem do wyjściowego zadania: *Czy skorzystałeś ze wszystkich danych? Czy skorzystałeś z całego warunku?*

10. Przykład. Wracamy do przykładu rozpatrywanego w ustępie **8.** Przestaliśmy się zajmować tym przykładem w chwili, gdy uczniowie dopiero co zrozumieli zadanie i zaczęli wykazywać pewne zainteresowanie nim. Mogą mieć teraz pewne własne pomysły, mogą wykazywać pewną inicjatywę. Jeśli nauczyciel mimo wnikliwej obserwacji nie może dopatrzyć się żadnych objawów takiej inicjatywy, musi pieczołowicie podjąć na nowo swój dialog z uczniami. Musi być przygotowany na powtarzanie z pewnymi modyfikacjami pytań, na które uczniowie nie odpowiedzą. Musi być przygotowany na denerwujące milczenie uczniów (które oznaczymy wielokropkiem ...).

— *Czy znacie jakieś pokrewne zadanie?*

— ...

— *Spójrzcie na niewiadomą! Czy znacie zadanie o takiej samej niewiadomej?*

— ...

— Hm. *Co jest niewiadome w naszym zadaniu?*

— Przekątna prostopadłościanu.

— Czy znacie jakieś *zadanie o tej samej niewiadomej?*

— Nie. Jeszcze nigdy nie robiliśmy zadania, w którym występowałaby przekątna prostopadłościanu.

— Czy znacie jakieś *zadanie o podobnej niewiadomej?*

— ...

— No cóż. Przekątna jest odcinkiem, odcinkiem linii prostej. Czy nigdy nie rozwiązywaliście zadania, w którym niewiadomą była długość odcinka?

— Ależ oczywiście. Rozwiązywaliśmy takie zadania. Np. takie zadanie: Znaleźć bok trójkąta prostokątnego.

— Bardzo dobrze! *Oto rozwiązane już przedtem zadanie pokrewne z waszym zadaniem. Czy nie moglibyście z niego skorzystać?*

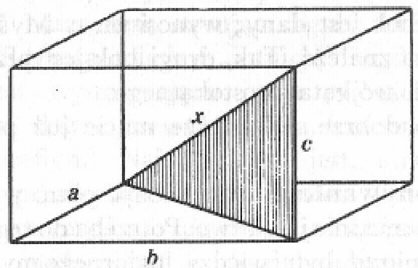
— ...

— Mieliście to szczęście, że pamiętacie rozwiązane już poprzednio zadanie pokrewne z waszym obecnym zadaniem. Czy nie chcielibyście z tego skorzystać? *Czy nie moglibyście wprowadzić jakiegoś elementu pomocniczego, aby móc z tego zadania skorzystać?*

— ...

— Pamiętacie pewne zadanie o trójkącie. Spójrzcie na rysunek. Czy macie na nim jakiś trójkąt?

Miejmy nadzieję, że ostatnia uwaga była wystarczająco wyraźna, aby naprowadzić na myśl wprowadzenia trójkąta prostokątnego (zakreskowanego na rysunku 1), którego przeciwprostokątną jest szukana przekątna. Jednakże nauczyciel powinien być przygotowany i na to, że nawet ta bardzo wyraźna uwaga może nie wystarczyć do pobudzenia aktywności uczniów; dlatego też powinien liczyć



Rys. 1

się z koniecznością użycia całej gamy coraz to wyraźniejszych uwag i aluzji.

— Czy nie chcielibyście mieć na rysunku trójkąta?

— Jaki trójkąt chcielibyście mieć na rysunku?

— Nie możecie jeszcze znaleźć przekątnej prostopadłościanu; powiedzieliście jednak, że umiecie znaleźć bok trójkąta. Co więc chcielibyście uczynić?

— Czy potrafilibyście znaleźć przekątną prostopadłościanu, gdyby ona była bokiem trójkąta?

Gdy w końcu przy mniejszej lub większej pomocy uczniowie wprowadzą właściwy element pomocniczy — trójkąt prostokątny zakreskowany na rysunku 1 — nauczyciel powinien przekonać się, że uczniowie wybiegają myślą naprzód w dostatecznym stopniu, zanim zachęci ich do przeprowadzenia rachunków.

— Myślę, że narysowanie tego trójkąta było dobrym pomysłem. Macie więc już trójkąt. Ale czy macie niewiadomą?

— Niewiadoma jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego. Możemy ją obliczyć stosując twierdzenie Pitagorasa.

— Owszem, możecie, gdy znacie oba boki; a czy znacie je?

— Jeden bok jest dany; wynosi on c. Myślę, że drugi jest nietrudno znaleźć. Tak, drugi bok jest przeciwprostokątną innego trójkąta prostokątnego.

— Bardzo dobrze. Widzę, że macie już pewien plan.

11. Wykonywanie planu. Ułożyć plan, wpaść na pomysł rozwiązania, nie jest łatwo. Potrzeba do tego wielu rzeczy: poprzednio zdobytej wiedzy, logicznego myślenia, skoncentrowania się nad celem, jaki mamy osiągnąć, i jeszcze jednego — szczęścia. Wykonać plan jest znacznie łatwiej; potrzeba do tego głównie cierpliwości.

Plan daje nam tylko ogólny szkic rozwiązania. Musimy się przekonać, że wszystkie szczegóły mieszczą się w ramach tego szkicu. Musimy więc cierpliwie sprawdzić wszystkie szczegóły, jeden za drugim, aż wszystko stanie się zupełnie jasne i nie pozostanie żaden ciemny zakątek, gdzie mógłby się kryć błąd.

Jeżeli uczeń rzeczywiście zrozumiał plan, nauczyciel może być względnie spokojny o rozwiązanie. Główne niebezpieczeństwo polega na tym, że uczeń może swój plan zapomnieć. To może łatwo się zdarzyć, jeżeli uczeń otrzymał plan z zewnątrz i zaakceptował go polegając na

autorytecie nauczyciela. Jeżeli jednak wypracował on ten plan sam, nawet przy pewnej pomocy, i zrozumiał ostateczny pomysł rozwiązania z zadowoleniem, wówczas nie tak łatwo zapomni on ten pomysł. Nauczyciel musi jednak domagać się, aby uczeń *sprawdził każdy krok* swojego postępowania.

O poprawności każdego kroku naszego rozumowania możemy przekonać się albo „intuicyjnie", albo „formalnie". Możemy skupić umysł na naszej tezie tak długo, aż ujrzymy ją tak jasno i wyraźnie, że nie będziemy mieć żadnej wątpliwości, że jest ona prawdziwa. Możemy też wyprowadzić naszą tezę stosując reguły formalnego dowodzenia. (Różnica między „intuicją" i „dowodem formalnym" jest wystarczająco jasna w wielu ważnych przypadkach; dalsze rozważania na ten temat możemy zostawić filozofom.) Najważniejsze jest, aby uczeń był rzeczywiście przekonany o poprawności każdego kroku. W pewnych przypadkach nauczyciel może podkreślić różnicę między „widzeniem" i „dowodzeniem": *Czy jest dla was jasne, że ten krok naszego rozumowania jest poprawny?* A czy potrafilibyście także *udowodnić, że ten krok jest poprawny?*

12. Przykład. Podejmijmy na nowo naszą pracę nad przykładem poczynając od miejsca, w którym ją przerwaliśmy pod koniec ustępu **10.** Uczeń uchwycił wreszcie pomysł rozwiązania. Widzi on trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątną jest niewiadoma x, a jedną przyprostokątną jest dana wysokość prostopadłościanu c. Druga przyprostokątna tego trójkąta jest przekątną podstawy prostopadłościanu. Należy nalegać na ucznia, aby wprowadził odpowiednie oznaczenia. Drugą przyprostokątną rozważanego trójkąta, tj. przekątną podstawy o bokach a i b powinien oznaczyć przez y. W ten sposób może on jaśniej uchwycić myśl rozwiązania, która polega na wprowadzeniu pomocniczego zadania z niewiadomą y. W końcu rozpatrując kolejno dwa trójkąty prostokątne uczeń może otrzymać (patrz rysunek 1)

$$x^2 = y^2 + c^2,$$
$$y^2 = a^2 + b^2,$$

a stąd, rugując pomocniczą niewiadomą y,

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$
$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Nauczyciel nie powinien przerywać uczniowi, jeżeli on poprawnie przeprowadza powyższe działania. Można co najwyżej domagać się, aby *sprawdził każdy krok*. I tak nauczyciel może spytać się:

— Czy *widzisz wyraźnie*, że trójkąt o bokach x, y, c jest prostokątny?

Na to pytanie uczeń może szczerze powiedzieć „Tak", ale mógłby być mocno zakłopotany, gdyby nauczyciel niezadowolony intuicyjnym przekonaniem ucznia kontynuował pytanie:

— A czy mógłbyś *udowodnić*, że ten trójkąt jest prostokątny?

Dlatego też nauczyciel powinien raczej unikać tego pytania, jeśli klasa nie jest dobrze zapoznana z geometrią przestrzenną. Nawet przy dobrej jej znajomości jest pewne niebezpieczeństwo, że odpowiedź na takie pytanie może stanowić trudność dla większości uczniów.

13. Rzut oka wstecz. Nawet zupełnie dobrzy uczniowie po otrzymaniu rozwiązania zadania i starannym

zapisaniu toku rozumowania zamykają książkę i biorą się do czego innego. Postępując tak, opuszczają ważną i pouczającą fazę pracy. Spoglądając wstecz na otrzymane rozwiązanie, ponownie rozpatrując i analizując wynik i drogę doń prowadzącą, mogliby utwierdzić swoją wiedzę i rozwinąć swoje zdolności do rozwiązywania zadań. Dobry nauczyciel powinien zrozumieć (i wpoić ten pogląd w swoich uczniów), że żaden problem nigdy nie jest wyczerpany całkowicie. Zawsze coś zostaje jeszcze do zrobienia; badając problem dostatecznie wnikliwie możemy ulepszyć każde rozwiązanie, a w każdym razie zawsze udoskonalić nasze zrozumienie rozwiązania.

Uczeń wykonał swój plan. Zapisał rozwiązanie sprawdzając każdy krok. Powinien więc mieć dostateczne podstawy, by wierzyć, że jego rozwiązanie jest poprawne. Jednakże można zawsze zrobić błąd, zwłaszcza gdy dowód jest długi i skomplikowany. Dlatego też sprawdzenie jest bardzo pożądane. Szczególnie, jeśli istnieje jakiś szybki i intuicyjny sposób sprawdzenia rozwiązania lub dowodu, nie należy go pominąć. *Czy możesz sprawdzić wynik? Czy możesz sprawdzić uzasadnienie rozwiązania?*

Aby przekonać się o istnieniu lub o jakości jakiegoś przedmiotu, chcemy go zobaczyć i dotknąć. Wolimy polegać na dwu różnych zmysłach. Podobnie nasze przekonania matematyczne wolimy opierać na dwu różnych dowodach: *Czy możesz otrzymać wynik w inny sposób?* Wolimy, oczywiście, dowód krótki i intuicyjny niż długi i uciążliwy: *Czy możesz objąć to jednym rzutem oka?*

Jednym z pierwszych i najważniejszych obowiązków nauczyciela jest niestwarzanie wrażenia, że zadania matematyczne mają mały związek ze sobą, a żadnego związku z czymkolwiek innym. Mamy naturalną sposobność do zbadania związków naszego zadania z innymi, gdy spoglądamy wstecz na jego rozwiązanie. Spoglądanie wstecz na rozwiązanie będzie dla uczniów rzeczywiście interesujące, jeśli dla znalezienia go dokonali oni rzetelnego wysiłku i są przekonani, że pracowali dobrze. Wówczas będą oni chcieli zobaczyć, co jeszcze mogliby przy tym samym wysiłku otrzymać i co robić, aby ich praca w przyszłości była równie owocna. Nauczyciel powinien zachęcić uczniów do zastanowienia się nad przypadkami, w których mogliby oni skorzystać z użytej tu metody rozwiązania lub z samego rozwiązania. *Czy możesz wykorzystać wynik albo metodę rozwiązania do innego zadania?*

14. Przykład. W ustępie **12** uczniowie otrzymali w końcu następujący wynik: Jeżeli trzy krawędzie prostopadłościanu wychodzące z jednego wierzchołka mają długości a, b, c, to przekątna prostopadłościanu wynosi

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Czy możesz sprawdzić wynik? Nauczyciel nie może oczekiwać dobrej odpowiedzi na to pytanie od niedoświadczonych uczniów. Uczniowie powinni jednak dość wcześnie przekonać się, że zadania rozwiązywane „na literach" mają dużą przewagę nad zadaniami czysto liczbowymi; jeżeli zadanie rozwiązane jest „na literach", to jego wynik można poddać wielu próbom sprawdzającym, których do wyniku zadania liczbowego w ogóle nie można zastosować. Nasz przykład, chociaż dosyć prosty, może to pokazać. Nauczyciel może zadać szereg pytań dotyczących wyników, na które uczniowie mogą natychmiast odpowiedzieć „Tak"; odpowiedź „Nie" wskazałaby na poważny defekt naszego rozwiązania.

— *Czy skorzystałeś ze wszystkich danych?* Czy wszystkie dane a, b, c, występują w naszym wzorze na przekątną?

— Długość, szerokość i wysokość grają w naszym zadaniu tę samą rolę; nasze zadanie jest symetryczne ze względu na a, b, c. Czy wyrażenie, jakie otrzymaliśmy na przekątną, jest symetryczne ze względu na a, b, c? Czy pozostanie ono bez zmiany, gdy a, b, c zamieniamy miejscami?

— Nasze zadanie jest zadaniem z geometrii przestrzennej: znaleźć przekątną prostopadłościanu mając dane jego wymiary a, b, c. Zadanie to jest podobne do zadania z geometrii płaskiej: znaleźć przekątną prostokąta mając dane jego wymiary a, b. Czy wynik naszego „przestrzennego" zadania jest podobny do wyniku zadania „płaskiego"?

— Gdy wysokość c maleje i w końcu znika, prostopadłościan staje się prostokątem. Jeśli podstawimy $c = 0$ w naszym wzorze, to czy otrzymamy poprawny wzór na przekątną prostopadłościanu?

— Gdy wysokość c rośnie, to przekątna też rośnie. Czy nasz wzór pokazuje to?

— Jeżeli wszystkie trzy wymiary a, b, c prostopadłościanu powiększymy w tym samym stosunku, to przekątna wzrośnie w tymże stosunku. Jeżeli podstawimy w naszym wzorze $12a$, $12b$, $12c$ odpowiednio na miejsce a, b, c, to wyrażenie na przekątną otrzymane po tym podstawieniu powinno być także pomnożone przez 12. Czy jest tak istotnie?

— Jeżeli a, b, c zmierzone są w metrach, to nasz wzór podaje przekątną również w metrach; jeżeli zamienimy wszystkie wymiary na centymetry, to wzór powinien pozostać prawdziwy. Czy jest tak istotnie?

(Dwa ostatnie pytania są w zasadzie równoważne; patrz SPRAWDZANIE ZA POMOCĄ WYMIARÓW.)

Powyższe pytania dają kilka korzyści. Przede wszystkim na inteligentnym uczniu nie może nie wywrzeć wrażenia fakt, że nasz wzór wytrzymuje tyle prób sprawdzających. Poprzednio uczeń był przekonany o prawdziwości wzoru, ponieważ wyprowadził go starannie. Teraz jednak jest on jeszcze bardziej przekonany i to dodatkowe przekonanie płynie z innego źródła; jest to pewnego rodzaju „oczywistość doświadczalna". Dalej, dzięki wymienionym wyżej pytaniom szczegóły wzoru osiągają nowe znaczenie i stają się powiązane z różnymi faktami. Jest więc większa szansa, że uczniowie zapamiętają wzór; ich wiedza została ugruntowana. W końcu, powyższe pytania można bez trudu przenieść na przypadek innych, podobnych zadań. Zdobywszy nieco doświadczenia w rozwiązywaniu podobnych zadań inteligentny uczeń może uchwycić leżące u podstaw tych pytań ogólne idee: korzystanie ze wszystkich istotnych danych, zmianę danych, symetrię, analogię. Jeżeli kierowanie swej uwagi w tych kierunkach stanie się jego nawykiem, to jego zdolność do rozwiązywania zadań znacznie wzrośnie.

Czy możesz sprawdzić dowód? Sprawdzenie na nowo całego dowodu, krok po kroku, może być konieczne w pewnych trudnych i ważnych przypadkach. Zazwyczaj wystarczy wybrać do ponownego sprawdzenia bardziej subtelne miejsca. W naszym zadaniu byłoby wskazane przedyskutować na nowo kwestię, w którą raczej nie należało się wdawać, gdy zadanie nie było jeszcze rozwiązane: Czy umiałbyś *dowieść*, że trójkąt o bokach x, y, c jest trójkątem prostokątnym? (Patrz koniec ustępu **12.**)

Czy możesz wykorzystać wynik albo metodę rozwiązania do innego zadania? Po jednym czy dwóch przykładach nieco zachęceni uczniowie łatwo znajdą zastosowanie, polegające w gruncie rzeczy na podawaniu *konkretnych interpretacji* dla abstrakcyjnych elementów matematycznych naszego zadania. Już sam nauczyciel użył takiej konkretnej interpretacji, gdy jako prostopadłościan występujący w zadaniu wziął salę, w której odbywała się lekcja. Nierozgarnięty uczeń może zaproponować jako zastosowanie, aby obliczyć przekątną kawiarni zamiast przekątnej klasy. Jeżeli uczniowie sami nie mogą wymyślić nic istotnie nowego, nauczyciel może sam postawić nieco odmienny problem, na przykład: „Mając daną długość, szerokość i wysokość prostopadłościanu znaleźć odległość jego środka od wierzchołka".

Uczniowie mogą skorzystać z *wyniku* zadania, które dopiero co rozwiązali, zauważając, że szukana odległość jest połową obliczonej przed chwilą przekątnej. Mogą oni też skorzystać z *metody* poprzedniego zadania, wprowadzając odpowiednie trójkąty prostokątne (ta ostatnia możliwość jest mniej oczywista i w naszym przypadku jest nieco niezgrabna).

Po tym zastosowaniu nauczyciel może omówić położenie czterech przekątnych prostopadłościanu i sześciu ostrosłupów, których podstawami są ściany prostopadłościanu, wspólnym wierzchołkiem środek prostopadłościanu, a krawędziami bocznymi połowy przekątnych. Gdy wyobraźnia geometryczna uczniów jest już dostatecznie ożywiona, nauczyciel powinien powrócić do swego pytania. *Czy możesz wykorzystać wynik albo metodę rozwiązania do innego zadania?* Obecnie jest większa szansa, że uczniowie znajdą jakąś bardziej interesującą interpretację, na przykład następującą.

Na środku płaskiego prostokątnego dachu o długości 21 m i szerokości 16 m trzeba ustawić maszt o wysokości 8 m. Maszt ma być przymocowany czterema linami, wychodzącymi z tego samego punktu, 2 m poniżej wierzchołka masztu, i biegnącymi do czterech rogów dachu budynku. Jak długa jest każda lina?

Uczniowie mogą użyć metody zadania szczegółowo przez nich rozwiązanego, wprowadzając jeden trójkąt prostokątny w płaszczyźnie pionowej, a drugi w płaszczyźnie poziomej. Albo też mogą skorzystać z wyniku, wyobrażając sobie prostopadłościan, którego przekątną x jest jedna z czterech lin, a krawędzie wynoszą

$$a = 10{,}5, \quad b = 8, \quad c = 6.$$

Bezpośrednie zastosowanie wzoru daje $x = 14{,}5$.

Więcej przykładów znajduje się w artykule CZY MOŻESZ SKORZYSTAĆ Z WYNIKU?

15. Różne podejścia. Zatrzymajmy się jeszcze na chwilę nad zadaniem rozpatrywanym w poprzednich ustępach **8, 10, 12, 14**. Główną część pracy — odkrycie planu działania — opisaliśmy w ustępie **10**. Zauważmy, że nauczyciel mógł postępować inaczej. Zaczynając od tego samego miejsca, co w ustępie **10**, mógł on pójść inną drogą, zadając następujące pytania:

— *Czy znacie jakieś zadanie pokrewne?*

— Czy znacie jakieś *analogiczne* zadanie?

— Otóż nasze zadanie jest zadaniem z geometrii przestrzennej. Czy nie przychodzi wam na myśl jakieś prostsze, analogiczne zadanie na płaszczyźnie?

— Zwróćcie uwagę, że nasze zadanie dotyczy figury przestrzennej; chodzi o znalezienie przekątnej prostopadłościanu. Jakie mogłoby być analogiczne zadanie dotyczące figury na płaszczyźnie? Powinno ono dotyczyć przekątnej...

— ...prostokąta!

Uczniowie, nawet jeśli myślą bardzo powoli i są bierni, i nie byli w stanie niczego wymyślić do tej pory, zostali w końcu zmuszeni do wzięcia udziału choćby w bardzo

skromnym zakresie w znalezieniu pomysłu rozwiązania. Prócz tego, jeśli uczniowie są tak powolni, nauczyciel nie powinien zabierać się do zadania o prostopadłościanie nie przedyskutowawszy poprzednio dla przygotowania uczniów analogicznego zadania o prostokącie. Wtedy może on kontynuować swoje pytania w następujący sposób:

— *Oto rozwiązane już przedtem zadanie pokrewne z waszym zadaniem. Czy nie moglibyście z niego skorzystać?*

— *Czy nie trzeba wprowadzić jakiegoś elementu pomocniczego, aby móc z tego zadania skorzystać?*

W końcu nauczycielowi może udać się naprowadzić uczniów na właściwą myśl. Polega ona na tym, aby rozpatrywać przekątną danego prostopadłościanu jako przekątną odpowiedniego prostokąta, który trzeba wprowadzić na rysunku (jako przecięcie prostopadłościanu z płaszczyzną przechodzącą przez dwie przeciwległe krawędzie). Myśl jest w zasadzie ta sama co poprzednio (ustęp **10**), ale podejście jest inne. W ustępie **10** kontakt z wiedzą, jaką rozporządzają uczniowie, osiągnięto poprzez niewiadomą; przypomnieli oni sobie poprzednio rozwiązane zadanie, ponieważ tam niewiadoma była ta sama, co w rozpatrywanym obecnie zadaniu. W niniejszym ustępie, kierując się analogią, znaleźliśmy pomysł rozwiązania.

16. Metoda nauczyciela zadawania pytań pokazana w ustępach **8, 10, 12, 14, 15** polega w zasadzie na następującym: Zaczynaj od pytania ogólnego lub wskazówki ogólnej z naszej listy, a następnie — jeśli trzeba — przechodź stopniowo do bardziej specjalnych i konkretnych pytań i wskazówek, aż trafisz na takie, które spotkają się z reakcją umysłu ucznia. Jeśli chcesz pomóc uczniowi w wykorzystaniu jego myśli, zacznij znów, o ile możności, od ogólnego pytania czy wskazówki zawartej w liście, a następnie — jeśli trzeba — przechodź znów do bardziej specjalnych i tak dalej.

Nasza lista jest pierwszą listą tego rodzaju; wydaje się, że wystarcza do większości prostych przypadków, ale nie ulega wątpliwości, że można by ją udoskonalić. W każdym bądź razie jest ważne, aby wskazówki, od których zaczynamy, były proste, naturalne i ogólne i aby ich lista była krótka.

Wskazówki muszą być proste i naturalne, gdyż w przeciwnym przypadku mogłyby być *natrętne*.

Wskazówki muszą być ogólne, dające się zastosować nie tylko do danego zadania, ale także do zadań wszelkiego rodzaju, jeśli mają one pomóc w rozwinięciu *zdolności* ucznia, a nie być tylko jakąś specjalną sprawnością.

Lista musi być krótka, aby pytania można było często powtarzać w sposób naturalny przy zmieniających się okolicznościach; wtedy jest szansa, że uczeń przyswoi sobie wreszcie te pytania i że przyczynią się one do rozwoju jego *umysłowości*.

Należy przechodzić stopniowo do coraz bardziej specjalnych wskazówek, aby *udział w pracy* ucznia mógł być tak wielki, jak to tylko możliwe.

Powyższa metoda zadawania pytań nie jest sztywna; i dobrze, że tak jest, gdyż tutaj każda sztywna, mechaniczna i pedantyczna metoda jest na pewno zła. Nasza metoda dopuszcza pewną elastyczność i pewne modyfikacje oraz różne podejścia (ustęp **15**); można i należy ją tak stosować, aby pytania zadawane przez nauczyciela *mogły same przyjść uczniowi na myśl*.

Jeżeli czytelnik pragnie wypróbować w swojej klasie przedstawioną tu metodę, to powinien, rzecz prosta, postępować ostrożnie. Powinien pieczołowicie przestudiować przykład przedstawiony w ustępie **8**, a także podane dalej przykłady w ustępach **18, 19, 20**. Powinien starannie przygotować przykłady, które zamierza przedyskutować, rozpatrując także różne podejścia. Powinien rozpocząć od kilku prób i stopniowo przekonywać się, jak on sam umie stosować tę metodę, jak ją przyjmą uczniowie i ile ona zajmuje czasu.

17. Dobre pytania i złe pytania. Jeżeli dobrze zrozumieliśmy sformułowaną w poprzednim ustępie metodę zadawania pytań, to przez porównanie z nią możemy ocenić jakość innych wskazówek, które mogłyby pomóc uczniom.

Wróćmy do sytuacji z początku ustępu **10**, kiedy to zadaliśmy pytanie: *Czy znasz jakieś pokrewne zadanie?* Zamiast tego można by, mając najlepszą intencję pomóc uczniom, zadać pytanie: *Czy nie moglibyście zastosować tu twierdzenia Pitagorasa?*

Intencja mogła być najlepsza, ale pytanie jest jednym z najgorszych. Musimy uświadomić sobie, w jakiej sytuacji zostało ono zadane; zauważymy wówczas, że istnieje długi ciąg zastrzeżeń co do tego rodzaju „pomocy".

(1) Jeżeli uczeń jest bliski rozwiązania, to może zrozumieć wskazówkę zawartą w pytaniu; jeżeli zaś jest daleki od rozwiązania, to bardzo możliwe, że nie pojmie w ogóle, do czego pytanie zmierza. Tak więc pytanie nie udziela pomocy tym uczniom, którym jest ona najbardziej potrzebna.

(2) Jeżeli wskazówka zostanie zrozumiana, to odkryje ona całą tajemnicę; uczniowi pozostanie już niewiele do zrobienia.

(3) Wskazówka jest zbyt specjalna. Jeżeli nawet uczeń może z niej skorzystać przy rozwiązywaniu danego za-

dania, to nie nauczy się niczego, co mogłoby mu się przydać przy rozwiązywaniu zadań w przyszłości. Pytanie nie jest pouczające.

(4) Nawet jeśli uczeń zrozumie wskazówkę, to chyba nie będzie w stanie zrozumieć, w jaki sposób nauczycielowi przyszła do głowy myśl, aby zadać takie pytanie. I w jaki sposób mógłby on sam dojść do takiego pytania? Pytanie to zjawia się jako nienaturalna niespodzianka, jak królik wyciągnięty z kapelusza; na pewno nie jest to pouczające. Żadnego z tych zastrzeżeń nie można skierować przeciwko postępowaniu opisanemu w ustępie **10** bądź w ustępie **15**.

Dalsze przykłady

18. Zadanie konstrukcyjne. *W dany trójkąt wpisać kwadrat, tak aby dwa jego wierzchołki leżały na podstawie trójkąta, a dwa pozostałe wierzchołki na dwu pozostałych bokach trójkąta, po jednym na każdym z boków.*

— *Co jest niewiadome?*

— Kwadrat.

— *Co jest dane?*

— Dany jest trójkąt. Więcej nic.

— *Jaki jest warunek?*

— Cztery wierzchołki kwadratu mają leżeć na obwodzie trójkąta. Dwa wierzchołki na podstawie trójkąta i po jednym wierzchołku na dwu pozostałych bokach trójkąta.

— *Czy warunek można spełnić?*

— Przypuszczam, że tak. Ale nie jestem pewien.

— Zadanie nie wydaje ci się chyba zbyt łatwe. *Jeśli nie możesz rozwiązać danego zadania, spróbuj najpierw rozwiązać*

jakieś zadanie pokrewne. Czy mógłbyś spełnić pewną *część warunku?*

— Co Pan rozumie przez część warunku?

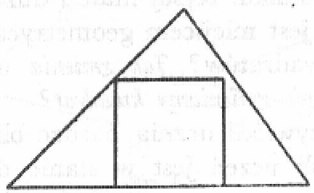
— Otóż widzisz, warunek dotyczy wszystkich wierzchołków kwadratu. Ile wierzchołków ma kwadrat?

— Cztery.

— Część warunku dotyczyłaby więc mniej niż czterech wierzchołków. *Zatrzymaj tylko część warunku, resztę odrzuć.* Jaką część warunku łatwo jest spełnić?

— Łatwo jest narysować kwadrat z dwoma wierzchołkami na obwodzie trójkąta, a nawet kwadrat z trzema wierzchołkami na obwodzie trójkąta!

— *Zrób rysunek!*



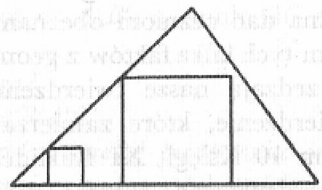
Rys. 2

Uczeń robi rysunek 2.

— *Zatrzymałeś tylko część warunku,* a *odrzuciłeś resztę. Do jakiego stopnia niewiadoma jest teraz określona?*

— Kwadrat nie jest określony, jeśli ma tylko trzy wierzchołki na obwodzie trójkąta.

— Oczywiście! *Zrób rysunek.*



Rys. 3

Uczeń robi rysunek 3.

— Jak powiedziałeś, kwadrat nie jest określony przez *część warunku, jaką zatrzymałeś. Jak on może się zmieniać?*

— ...

— Trzy wierzchołki twojego kwadratu znajdują się na obwodzie trójkąta, ale czwarty wierzchołek nie leży jeszcze tam, gdzie powinien. Twój kwadrat, jak powiedziałeś, nie jest określony, może się on zmieniać; to samo dotyczy czwartego wierzchołka. *Jak może się on zmieniać?*

— ...

— Wypróbuj to doświadczalnie, jeśli chcesz. Narysuj więcej kwadratów o trzech wierzchołkach leżących na obwodzie trójkąta, w ten sam sposób, co dwa kwadraty będące już na rysunku. Rysuj małe i duże kwadraty. Jak ci się zdaje, co jest miejscem geometrycznym czwartych wierzchołków kwadratów? *Jak zmienia się czwarty wierzchołek kwadratu, gdy zmieniamy kwadrat?*

Nauczyciel przywiódł ucznia bardzo blisko do pomysłu rozwiązania. Jeśli uczeń jest w stanie domyślić się, że miejscem geometrycznym czwartych wierzchołków jest linia prosta, to już ten pomysł uchwycił.

19. Zadanie typu „udowodnić". *Dwa kąty leżą w różnych płaszczyznach, ale każde ramię jednego z nich jest równoległe do odpowiedniego ramienia drugiego i zwroty ich są zgodne. Udowodnić, że kąty te są równe.*

Jest to podstawowe twierdzenie geometrii przestrzennej. Zadanie to można dać uczniom obeznanym z geometrią płaską i znającym tych kilka faktów z geometrii przestrzennej, które poprzedzają nasze twierdzenie w *Elementach* Euklidesa. (Twierdzenie, które zamierzamy udowodnić, jest twierdzeniem 10 Księgi XI Euklidesa.) W dalszym ciągu będziemy drukować *kursywą* nie tylko pytania

i wskazówki cytowane z naszej listy, ale także inne, odpowiadające tamtym, podobnie jak zadania typu „udowodnić" odpowiadają zadaniom typu „znaleźć". (Tę odpowiedniość omawiamy dokładnie w artykule ZADANIA TYPU „ZNALEŹĆ", ZADANIA TYPU „UDOWODNIĆ", punkty 5, 6.)

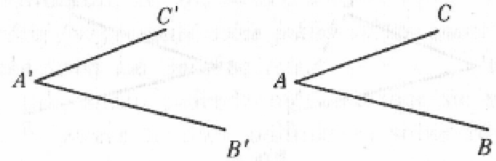
— *Jakie jest założenie?*

— Dwa kąty leżą w różnych płaszczyznach. Każde ramię jednego z nich jest równoległe do odpowiedniego ramienia drugiego i zwroty ich są zgodne.

— *Jaka jest teza?*

— Kąty są równe.

— *Zrób rysunek. Wprowadź odpowiednie oznaczenia.*



Rys. 4

Uczeń kreśli kąty jak na rysunku 4 i wybiera przy mniejszej lub większej pomocy nauczyciela oznaczenia podane na tymże rysunku.

— *Jakie jest założenie?* Wypowiedz je, proszę, używając twoich oznaczeń.

— Punkty A, B, C nie leżą w tej samej płaszczyźnie, co A', B', C'. Poza tym $AB \| A'B'$, $AC \| A'C'$. Ramię AB ma ten sam zwrot co $A'B'$, a ramię AC ten sam zwrot co $A'C'$.

— *Jaka jest teza?*

— $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$.

— *Spójrz na tezę! I spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze znane twierdzenie mające tę samą lub podobną tezę.*

— Jeśli dwa trójkąty są przystające, to odpowiednie kąty są sobie równe.

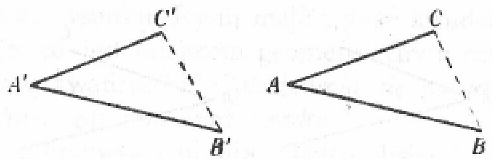
— Bardzo dobrze. *Masz więc twierdzenie pokrewne z twoim, udowodnione już poprzednio. Czy nie mógłbyś z niego skorzystać?*

— Myślę, że tak, ale nie wiem jeszcze, w jaki sposób.

— *Czy nie trzeba wprowadzić jakiegoś pomocniczego elementu, aby móc z tego twierdzenia skorzystać?*

— ...

— No cóż, twierdzenie, które tak dobrze przytoczyłeś, dotyczy trójkątów, pary trójkątów przystających. Czy na twoim rysunku występują trójkąty?



Rys. 5

— Nie, ale mógłbym je wykreślić. Połączmy B z C i B' z C'. Powstały dwa trójkąty, $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$.

— Słusznie, ale do czego nam są potrzebne te trójkąty?

— Do dowodu tezy, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$.

— Świetnie! Jakich trójkątów potrzebujesz, aby tego dowieść?

— Trójkątów przystających. No tak, oczywiście, mogę wybrać B, C, B' i C' tak, aby

$$AB = A'B', \quad AC = A'C'.$$

— Bardzo dobrze! Czego więc teraz chcesz dowieść?

— Chcę dowieść, że moje trójkąty są przystające:

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

Gdybym potrafił tego dowieść, to teza, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, wynikałaby natychmiast.

— Doskonale! Przed tobą stoi więc nowy cel: dowieść nowej tezy. *Spójrz na tezę. I spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze znane twierdzenie mające tę samą lub podobną tezę.*

— Dwa trójkąty są przystające, jeżeli... jeżeli trzy boki jednego z nich są odpowiednio równe trzem bokom drugiego.

— Oczywiście. Każde inne twierdzenie byłoby tutaj niewłaściwe. *Masz więc twierdzenie pokrewne twemu, udowodnione już poprzednio. Czy nie mógłbyś z niego skorzystać?*

— Mógłbym, gdybym wiedział, że $BC = B'C'$.

— Racja. Co jest więc twoim celem?

— Udowodnić, że $BC = B'C'$.

— *Spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze znane twierdzenie mające taką samą lub podobną tezę.*

— No tak, znam twierdzenie kończące się w ten sposób: „... wówczas te dwa odcinki są sobie równe". Ale ono tu nie pasuje.

— *Czy nie trzeba wprowadzić jakiegoś pomocniczego elementu, aby móc z niego skorzystać?*

— ...

— Zastanów się, jak możesz udowodnić, że $BC = B'C'$, skoro na rysunku BC i $B'C'$ nie są zupełnie ze sobą związane?

— ...

— *Czy skorzystałeś z założenia? Jakie jest założenie?*

— Zakładamy, że $AB \| A'B'$ i $AC \| A'C'$. No tak, oczywiście, muszę z tego skorzystać.

— *Czy skorzystałeś z całego założenia?* Mówisz, że $AB \| A'B'$. Czy to jest wszystko, co wiesz o tych odcinkach?

— Nie. Wiem jeszcze, że $AB = A'B'$, z konstrukcji. Odcinki te są więc równoległe i równe sobie. To samo jest z odcinkami AC i $A'C'$.

— Dwa równe i równoległe odcinki — to jest ciekawa konfiguracja. *Czy spotkałeś się z tym?*

— Oczywiście! Tak! Równoległobok! Połączmy A z A', B z B' i C z C'.

— Niezła myśl. Ile równoległoboków masz teraz na rysunku?

— Dwa. Nie, trzy. Nie, dwa. To jest są dwa, co do których natychmiast można się przekonać, że są równoległobokami. Jest jeszcze trzeci, który wygląda jak równoległobok; myślę, że uda mi się udowodnić, że tak jest istotnie. Wówczas dowód będzie zakończony!

Z poprzednich odpowiedzi mogliśmy wywnioskować, że uczeń jest inteligentny. Ale jego ostatnia uwaga utwierdza nas w tym ostatecznie.

Ten uczeń jest w stanie odgadnąć wynik matematyczny i wyraźnie odróżnić dowód od przewidywania. Zdaje sobie także sprawę z tego, że przewidywanie może być bardziej lub mniej prawdopodobne. Uczeń ten rzeczywiście odniósł jakąś korzyść z lekcji matematyki; posiada pewne istotne doświadczenie w rozwiązywaniu zadań, jest w stanie wpaść na dobry pomysł i wykorzystać go.

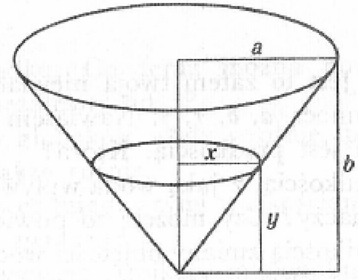
20. Wyznaczanie prędkości. *Woda wpływa do naczynia w kształcie stożka z prędkością* r m³ *na minutę. Naczynie ma kształt stożka obrotowego o podstawie położonej w płaszczyźnie poziomej i o wierzchołku skierowanym ku dołowi; promień podstawy wynosi* a, *wysokość stożka* b. *Znaleźć prędkość, z jaką podnosi się poziom wody, gdy jej głębokość wynosi* y. *Następnie podać wartość liczbową niewiadomej przyjmując, że* $a = 4$ m, $b = 3$ m, $r = 2$ m³/min *i* $y = 1$ m.

Zakładamy, że uczniowie znają najprostsze reguły różniczkowania i pojęcie „prędkości zmiany".

— *Co jest dane?*

— Promień podstawy stożka $a = 4$ m, wysokość stożka $b = 3$ m, prędkość, z jaką woda wpływa do naczynia, $r = 2$ m³/min oraz głębokość wody w pewnym momencie $y = 1$ m.

— W porządku. Sformułowanie zadania wydaje się sugerować, że chwilowo nie powinniśmy rozważać wartości liczbowych, a operować literami, wyrazić niewiadomą przez a, b, r, y i dopiero na końcu, po otrzymaniu



Rys. 6

rozwiązania w literach, podstawić wartości liczbowe. Ja poszedłbym za tą sugestią. Powiedz więc, *co jest niewiadome?*

— Prędkość, z jaką podnosi się poziom wody, gdy głębokość wody wynosi y.

— Co to znaczy? Czy mógłbyś to powiedzieć inaczej?

— Prędkość, z jaką wzrasta głębokość wody.

— Co to znaczy? *Czy nie mógłbyś tego powiedzieć jeszcze inaczej?*

— Prędkość zmiany głębokości wody.

— W porządku, prędkość zmiany y. Ale co to jest prędkość zmiany? *Odwołaj się do definicji.*

— Prędkość zmiany funkcji jest to pochodna.

— Tak jest. Ale czy y jest funkcją? Jak powiedzieliśmy przedtem, nie rozpatrujemy na razie liczbowej wartości y. Czy można sobie wyobrazić, że y zmienia się?

— Tak, głębokość wody y wzrasta wraz z upływem czasu.

— A więc y jest funkcją czego?

— Czasu t.

— Dobrze. *Wprowadź odpowiednie oznaczenia.* Jak byś zapisał prędkość zmiany funkcji y w symbolach matematycznych?

— $\frac{dy}{dt}$.

— Dobrze. Jest to zatem twoja niewiadoma. Masz ją wyrazić za pomocą a, b, r, y. Nawiasem mówiąc jedna z tych danych jest prędkością. Która?

— r jest prędkością, z jaką woda wpływa do naczynia.

— Co to znaczy? Czy możesz to powiedzieć inaczej?

— r jest prędkością zmiany objętości wody w naczyniu.

— Co to znaczy? *Czy możesz to powiedzieć jeszcze inaczej?* Jak byś to zapisał stosując *odpowiednie oznaczenia?*

— $r = \frac{dV}{dt}$.

— Co to jest V?

— Objętość wody w naczyniu w chwili t.

— Zgoda. Masz więc wyrazić $\frac{dy}{dt}$ za pomocą $a, b, \frac{dV}{dt}, y$. Jak to zrobisz?

— ...

— *Jeśli nie możesz rozwiązać postawionego zadania, spróbuj najpierw rozwiązać jakieś zadanie pokrewne.* Jeśli nie widzisz jeszcze związku między $\frac{dy}{dt}$ i danymi, spróbuj ustalić jakiś prostszy związek, który by cię mógł zbliżyć do celu.

— ...

— Czy nie widzisz, że istnieją inne związki? Na przykład, czy y i V są od siebie niezależne?

— Nie. Gdy y rośnie, V musi także rosnąć.

— A więc między y i V istnieje pewien związek. Co to za związek?

— No, V jest objętością stożka o wysokości y. Ale ja jeszcze nie znam promienia podstawy.

— Mimo to możesz nim operować. Nazwij go jakoś, powiedzmy x.

— $V = \frac{\pi x^2 y}{3}$.

— W porządku. Co teraz można powiedzieć o x? Czy jest on niezależny od y?

— Nie. Gdy głębokość wody y rośnie, promień powierzchni wody także rośnie.

— Istnieje więc między tymi wielkościami pewien związek. Co to za związek?

— Ależ oczywiście, trójkąty są podobne, więc

$$a : y = a : b .$$

— Mamy więc jeszcze jeden związek. Trzeba z niego skorzystać. Nie zapomnij, że chciałeś znaleźć związek między V i y.

— Mamy

$$x = \frac{ay}{b}, \quad V = \frac{\pi a^2 y^3}{3b^2}.$$

— Bardzo dobrze. Wydaje się, że to nas zbliża do celu, nieprawda? Nie możesz jednak zapomnieć o swoim właściwym celu. *Co jest niewiadome?*

— Oczywiście $\frac{dy}{dt}$.

— Masz znaleźć związek między $\frac{dy}{dt}, \frac{dV}{dt}$ oraz pozostałymi wielkościami. A tutaj masz związek między y, V i pozostałymi wielkościami. Co więc trzeba zrobić?

— Zróżniczkować! Oczywiście!

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi a^2 y^2}{b^2} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

I to wszystko.

— Wspaniale! A co z wartościami liczbowymi?

— Jeżeli $a = 4$, $b = 3$, $\frac{dV}{dt} = r = 2$, $y = 1$, to

$$2 = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 1}{9} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Część II. JAK TO ROZWIĄZAĆ?

Dialog

Zaznajomienie się z zadaniem

Od czego powinienem zacząć? Zacznij od sformułowania zadania.

Co mogę zrobić? Przedstaw sobie zadanie jako pewną całość tak jasno poglądowo, jak tylko możesz. Nie zwracaj na razie uwagi na szczegóły.

Co mogę przez to zyskać? Powinieneś zrozumieć zadanie, dobrze się z nim zaznajomić, wbić sobie w pamięć jego cel. Skupienie uwagi na zadaniu może dać bodziec twojej pamięci do przypomnienia wszystkiego, co może się przydać do rozwiązania zadania.

Głębsze wniknięcie w zadanie

Od czego powinienem zacząć? Zacznij znów od sformułowania zadania. Zacznij w momencie, gdy sformułowanie to jest już dla ciebie tak jasne i tak dobrze utrwalone w twej pamięci, że możesz je na chwilę stracić z oczu bez obawy zapomnienia go.

Co mogę zrobić? Wydziel główne części swojego zadania. Założenie i teza są głównymi częściami zadania typu „udowodnić"; niewiadoma, dane i warunek są głównymi częściami zadania typu „znaleźć". Rozpatrz główne części swego zadania, każdą z osobna, następnie po kolei jedną po drugiej, rozpatrz je w różnych kombinacjach, rozpatrując każdy szczegół w nawiązaniu do pozostałych szczegółów oraz w nawiązaniu do całego zadania.

Co mogę przez to zyskać? Powinieneś zapoznać się ze szczegółami, które być może odegrają jakąś rolę później.

Poszukiwanie pomysłu rozwiązania

Od czego powinienem zacząć? Od rozpatrzenia głównych części swojego zadania. Zacznij w momencie, gdy dzięki swej poprzedniej pracy dokładnie oddzieliłeś te części od siebie i zrozumiałeś je oraz gdy wydaje ci się, że możesz polegać na swojej pamięci.

Co mogę zrobić? Rozpatrz swoje zadanie z różnych stron i szukaj powiązań ze swą uprzednio zdobytą wiedzą.

Rozpatruj swoje zadanie z różnych stron. Uwypuklaj różne jego części, badaj różne szczegóły, badaj te same szczegóły ponownie, ale w inny sposób, wiąż ze sobą szczegóły w różny sposób, podchodź do nich z różnych stron. Próbuj ujrzeć w każdym szczególe coś nowego. Próbuj znaleźć nową interpretację całości.

Szukaj powiązań ze swą uprzednio zdobytą wiedzą. Spróbuj przypomnieć sobie, co pomogło ci w podobnych sytuacjach w przeszłości. Spróbuj rozpoznać w tym, co badasz, coś znanego, a w tym, co rozpoznajesz, coś użytecznego.

Co mógłbym zauważyć? Jakąś myśl pomocną, a być może nawet pomysł rozwiązania, który by od razu wskazał ci drogę do samego końca.

W jaki sposób myśl może być pomocna? Myśl pokazuje ci całą drogę rozwiązania lub jej część; wskazuje bardziej

lub mniej dokładnie, jak możesz postępować. Pomysły bywają bardziej lub mniej kompletne. Powinieneś być szczęśliwy, jeżeli masz w ogóle jakikolwiek pomysł.

Co mogę zrobić z pomysłem niekompletnym? Powinieneś go rozpatrzyć. Jeśli wydaje ci się, że możesz z niego coś skorzystać, rozpatrz go dokładniej. Jeśli wydaje ci się, że można na nim polegać, powinieneś przekonać się, jak daleko on cię zawiedzie i rozpatrzyć powstałą sytuację. Dzięki twemu dobremu pomysłowi sytuacja zmieniła się. Rozpatrz nową sytuację z różnych stron i szukaj powiązań ze swą uprzednio zdobytą wiedzą.

Co mogę zyskać czyniąc to znów? Możesz mieć szczęście i wpaść na nowy pomysł. Być może twój następny pomysł zawiedzie cię wprost do rozwiązania. Być może będziesz potrzebował jeszcze kilku dobrych pomysłów. Być może któryś z twoich pomysłów zawiedzie cię na błędną drogę. Mimo to powinieneś być zadowolony z wszystkich nowych pomysłów, także z najdrobniejszych, także z niezupełnie jasnych, także z dodatkowych pomysłów precyzujących dokładniej pomysły niejasne albo poprawiających mniej szczęśliwe pomysły. Jeżeli nawet chwilowo nie masz żadnych godnych uwagi pomysłów, powinieneś być zadowolony, jeśli twoje zrozumienie zadania staje się pełniejsze, bardziej spójne i jednorodne.

Wykonanie planu

Od czego powinienem zacząć? Od szczęśliwego pomysłu, który cię przywiódł do rozwiązania. Zacznij wykonywać plan, gdy jesteś pewien, że uchwyciłeś główną myśl, i jesteś przekonany, że potrafisz uporać się z wszelkimi szczegółami, jakie mogą wyniknąć.

Co mogę zrobić? Umocnij swą myśl. Przeprowadź dokładnie wszelkie operacje algebraiczne czy geometryczne, co do których zauważyłeś przedtem, że są wykonalne. Przekonaj się o poprawności każdego kroku na drodze formalnego rozumowania lub za pomocą intuicji, lub też, jeśli to możliwe, obiema metodami. Jeśli twoje zadanie jest bardzo złożone, możesz rozróżnić „wielkie" kroki i „małe" kroki; każdy wielki krok składa się z kilku małych. Sprawdź najpierw wielkie kroki, a następnie przejdź do małych kroków.

Co mogę przez to zyskać? Posiadanie rozwiązania, którego każdy krok jest bez najmniejszej wątpliwości poprawny.

Rzut oka wstecz

Od czego powinienem zacząć? Od rozwiązania, kompletnego i poprawnego w każdym szczególe.

Co mogę zrobić? Rozpatrz rozwiązanie z różnych stron i szukaj powiązań ze zdobytą uprzednio wiedzą.

Rozpatrz szczegóły rozwiązania i staraj się uczynić je tak prostymi, jak to tylko możliwe; przyjrzyj się rozleglejszym częściom rozwiązania i postaraj się je skrócić; postaraj się objąć całe rozwiązanie jednym spojrzeniem. Staraj się ulepszyć mniejsze i większe części rozwiązania, a także całe rozwiązanie, tak aby stało się ono bardziej intuicyjne i aby pasowało do twojej dotychczasowej wiedzy w możliwie najnaturalniejszy sposób. Przyjrzyj się dokładnie metodzie, która cię doprowadziła co celu, postaraj się uchwycić jej istotne punkty i spróbuj zastosować ją do innych zadań. Przyjrzyj się dokładnie wynikowi i spróbuj zastosować go do innych zadań.

Co mogę przez to zyskać? Możesz znaleźć nowe, lepsze

rozwiązanie, możesz odkryć nowe, ciekawe fakty. W każdym bądź razie, jeśli przyzwyczaisz się do dokładnego badania i bacznego przyglądania się swemu rozwiązaniu, zdobędziesz pewną dobrze uporządkowaną wiedzę, z której w każdej chwili będziesz mógł skorzystać, i rozwiniesz swoje zdolności do rozwiązywania zadań.

Część III. KRÓTKI SŁOWNIK HEURYSTYCZNY

Analogia jest to pewien rodzaj podobieństwa. Obiekty podobne zgadzają się ze sobą w pewnym stopniu; w obiektach analogicznych *zgadzają się pewne relacje* między ich odpowiednimi częściami.

1. Prostokąt jest analogonem prostopadłościanu. Istotnie, relacje między bokami prostokąta są podobne do relacji między ścianami prostopadłościanu:

Każdy bok prostokąta jest równoległy do jednego z boków i prostopadły do pozostałych boków.

Każda ściana prostopadłościanu jest równoległa do jednej ze ścian i prostopadła do pozostałych ścian.

Nazwijmy bok „elementem ograniczającym" prostokąt, a ścianę „elementem ograniczającym" prostopadłościan. Możemy obecnie dwa poprzednie stwierdzenia zastąpić jednym, które stosuje się w równym stopniu do obu figur:

Każdy element ograniczający jest równoległy do jednego z elementów ograniczających i prostopadły do pozostałych elementów ograniczających.

Wyraziliśmy więc pewne związki, które są wspólne dla dwóch porównywanych przez nas układów obiektów: dla boków prostokąta i dla ścian prostopadłościanu. Analogia między tymi układami polega na tej wspólnocie związków.

2. Analogią przeniknięte jest całe nasze myślenie: nasza codzienna mowa i nasze proste wnioskowanie, jak również literackie sposoby wyrażania się i największe naukowe

osiągnięcia. Analogii używa się na bardzo różnych poziomach. Ludzie często używają analogii mglistych, dwuznacznych, niepełnych lub niezupełnie określonych, lecz analogia może także osiągnąć matematyczny stopień precyzji. Każdy rodzaj analogii może grać pewną rolę w odkryciu rozwiązania i dlatego nie należy zaniedbywać żadnej z nich.

3. Powinniśmy być szczęśliwi, jeśli usiłując rozwiązać jakieś zadanie odkryjemy *analogiczne, prostsze zadanie*. W ustępie **15** nasze pierwotne zadanie dotyczyło przekątnej prostopadłościanu; rozpatrzenie prostszego, analogicznego zadania, dotyczącego przekątnej prostokąta doprowadziło nas do rozwiązania początkowego zadania. Rozpatrzymy jeszcze jeden przypadek tego samego rodzaju. Mamy rozwiązać następujące zadanie:

Znaleźć środek ciężkości jednorodnego czworościanu.

Bez znajomości rachunku całkowego i przy niewielkiej znajomości fizyki niełatwo to zadanie rozwiązać; w czasach Archimedesa czy Galileusza było ono poważnym problemem naukowym. Tak więc jeśli chcemy rozwiązać to zadanie przy możliwie najmniejszym zasobie wstępnych wiadomości, powinniśmy rozejrzeć się za analogicznym, prostszym zadaniem. W sposób naturalny przychodzi tu na myśl odpowiednie zadanie na płaszczyźnie:

Znaleźć środek ciężkości jednorodnego trójkąta.

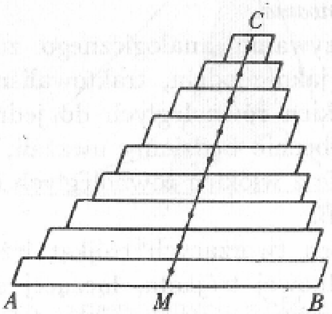
Mamy teraz dwa zagadnienia zamiast jednego. Ale odpowiedzieć na dwa pytania może być łatwiej niż na jedno, o ile te dwa pytania są rozsądnie ze sobą powiązane.

4. Odłóżmy chwilowo na bok nasze początkowe zadanie dotyczące czworościanu i skoncentrujmy się nad analogicznym, prostszym zadaniem dotyczącym trójkąta. Aby rozwiązać to zadanie, musimy wiedzieć coś niecoś

o środkach ciężkości. Następująca zasada jest bardzo naturalna:

Jeżeli układ mas S składa się z części, których środki ciężkości leżą w tej samej płaszczyźnie, wówczas w tej samej płaszczyźnie leży środek ciężkości całego układu S.

Ta zasada wystarcza do rozwiązania zadania dotyczącego trójkąta. Przede wszystkim wynika z niej, że środek ciężkości trójkąta leży w płaszczyźnie trójkąta. Następnie możemy uważać, że trójkąt składa się z włókien (cienkich



Rys. 7

pasków, „nieskończenie wąskich" prostokątów) równoległych do jednego z boków trójkąta (na rysunku 7 równoległych do boku AB). Środkiem ciężkości każdego włókna (każdego prostokąta) jest oczywiście jego środek i wszystkie te środki leżą na prostej łączącej wierzchołek C przeciwległy bokowi AB ze środkiem M boku AB (patrz rysunek 7).

Każda płaszczyzna przechodzącą przez środkową CM trójkąta zawiera środki ciężkości wszystkich włókien równoległych, które tworzą trójkąt. Z tego wynika, że środek ciężkości całego trójkąta leży na tejże środkowej. Ale musi on również leżeć na dwu pozostałych środkowych; środkiem ciężkości musi więc być *wspólny punkt przecięcia wszystkich trzech środkowych*.

Byłoby pożądane, aby przekonać się w sposób czysto geometryczny, niezależnie od jakichkolwiek założeń mechaniki, że trzy środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

5. Po rozpatrzeniu przypadku trójkąta przypadek czworościanu jest zupełnie łatwy. Rozwiązaliśmy zadanie analogiczne do naszego pierwotnego zadania; mamy więc *model do naśladowania*.

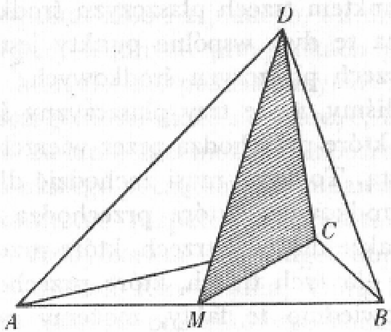
Przy rozwiązywaniu analogicznego zadania, którego użyjemy teraz jako modelu, traktowaliśmy trójkąt ABC jako zbiór włókien równoległych do jednego z jego boków — AB. Obecnie będziemy uważali, że czworościan $ABCD$ składa się z włókien równoległych do jednej z jego krawędzi — AB.

Środki włókien tworzących trójkąt leżą na tej samej prostej — środkowej trójkąta, łączącej środek M boku AB z przeciwległym wierzchołkiem C. Środki włókien tworzących czworościan leżą w tej samej płaszczyźnie, łączącej środek M krawędzi AB z przeciwległą krawędzią CD (patrz rysunek 8); możemy tę płaszczyznę MCD nazwać *płaszczyzną środkową* czworościanu.

W przypadku trójkąta mieliśmy trzy środkowe, takie jak MC, z których każda musiała zawierać środek ciężkości trójkąta. Dlatego też te trzy środkowe musiały się przeciąć w jednym punkcie, który jest właśnie środkiem ciężkości trójkąta. W przypadku czworościanu mamy sześć płaszczyzn środkowych, takich jak MCD, łączących środek krawędzi z krawędzią przeciwległą; każda z tych płaszczyzn środkowych musi zawierać środek ciężkości czworościanu. Dlatego też tych sześć płaszczyzn środko-

wych musi przeciąć się w jednym punkcie, który jest właśnie środkiem ciężkości czworościanu.

6. Tak więc rozwiązaliśmy zadanie o środku ciężkości jednorodnego czworościanu. Aby nasze rozwiązanie uczynić kompletnym, należałoby jeszcze przekonać się na drodze czysto geometrycznej, niezależnie od rozwiązań



Rys. 8

mechanicznych, że wspomnianych sześć płaszczyzn środkowych przecina się w jednym punkcie.

Gdy rozwiązaliśmy zadanie o środku ciężkości jednorodnego trójkąta, zauważyliśmy, że należałoby stwierdzić — aby nasze rozwiązanie uzupełnić — iż trzy środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Zadanie to jest analogiczne do wspomnianego wyżej, ale niewątpliwie łatwiejsze.

I znów do rozwiązania zadania dotyczącego czworościanu możemy użyć łatwiejszego zadania dotyczącego trójkąta (które możemy uważać tutaj za rozwiązane). Istotnie, rozpatrzmy trzy płaszczyzny środkowe przechodzące przez trzy krawędzie DA, DB, DC wychodzące z wierzchołka D; każda z płaszczyzn środkowych przechodzi także przez środek przeciwległej krawędzi (płaszczyzna środkowa przechodząca przez DC przechodzi przez punkt M; patrz rysunek 8). Te trzy płaszczyzny środkowe przecinają płaszczyznę trójkąta ABC wzdłuż trzech środkowych tego trójkąta. Te trzy środkowe przecinają się w jednym punkcie (jest to wynik analogicznego, prostszego zadania) i ten punkt, tak jak i punkt D, jest wspólnym punktem trzech płaszczyzn środkowych. Linia prosta łącząca te dwa wspólne punkty jest wspólna dla wszystkich trzech płaszczyzn środkowych.

Udowodniliśmy, że te trzy płaszczyzny środkowe spośród sześciu, które przechodzą przez wierzchołek D, mają wspólną prostą. To samo musi zachodzić dla tych trzech płaszczyzn środkowych, które przechodzą przez wierzchołek A, a także dla tych trzech, które przechodzą przez B i wreszcie dla tych trzech, które przechodzą przez C. Wiążąc odpowiednio te fakty, możemy udowodnić, że sześć płaszczyzn środkowych ma punkt wspólny. (Trzy płaszczyzny środkowe przechodzące przez boki trójkąta ABC wyznaczają punkt wspólny, oraz trzy proste, wzdłuż których się parami przecinają i które spotykają się w tym wspólnym punkcie. Ale jak właśnie udowodniliśmy, przez każdą taką prostą przecięcia musi przejść jeszcze jedna płaszczyzna środkowa.)

7. Zarówno w punkcie 5, jak i w punkcie 6 użyliśmy do rozwiązania zadania o czworościanie analogicznego, prostszego zadania, dotyczącego trójkąta. Jednakże te dwa przypadki są różne pod jednym ważnym względem. W punkcie 5 użyliśmy *metody* analogicznego, prostszego zadania, którego rozwiązanie naśladowaliśmy krok po kroku. W punkcie 6 użyliśmy *wyniku* analogicznego, prostszego zadania i nie troszczyliśmy się o to, jak ten wynik otrzymano. Niekiedy możemy użyć *zarówno metody, jak i wyniku* analogicznego, prostszego zadania. Nawet nasz poprzedni przykład wskazuje na to, jeżeli będziemy uważali rozważania punktu 5 i 6 za różne części rozwiązania tego samego zadania.

Nasz przykład jest typowy. Rozwiązując dane zadanie często możemy skorzystać z rozwiązania analogicznego, prostszego zadania; może nam się udać skorzystać z metody albo z wyniku, albo i z jednego, i z drugiego. Oczywiście w bardziej trudnych przypadkach mogą powstać komplikacje, których nie pokazaliśmy w naszym przykładzie. W szczególności może się zdarzyć, że rozwiązania analogicznego zadania nie można bezpośrednio, natychmiast użyć do naszego początkowego zadania. Wtedy może okazać się korzystne rozpatrzyć rozwiązanie na nowo, zmieniać je i modyfikować tak długo, dopóki nie znajdziemy takiej postaci rozwiązania, którą będzie można zastosować do naszego początkowego zadania.

8. Pożądane jest przewidzieć wynik, a przynajmniej pewne jego elementy, z pewnym stopniem prawdopodobieństwa. Takie przewidywania często są oparte na analogii.

Przypuśćmy na przykład, że wiemy, iż środek ciężkości jednorodnego trójkąta pokrywa się ze środkiem ciężkości jego trzech wierzchołków (tzn. ze środkiem ciężkości trzech punktów materialnych o jednakowej masie, umieszczonych w wierzchołkach trójkąta). Wiedząc to, możemy przypuszczać, że środek ciężkości jednorodnego czworościanu pokrywa się ze środkiem ciężkości jego czterech wierzchołków.

To przypuszczenie jest „wnioskowaniem przez analogię". Wiedząc, że trójkąt i czworościan są pod wieloma względami podobne, przypuszczamy, że są one podobne pod jeszcze jednym względem. Byłoby nierozsądnie uważać prawdopodobieństwo takiego przypuszczenia za pewność, ale równie albo nawet jeszcze mniej rozsądnie byłoby nie rozpatrywać w ogóle takich prawdopodobnych przypuszczeń.

Wnioskowanie przez analogię jest najprostszym rodzajem wnioskowania, ale być może i najważniejszym. Dostarcza nam ono bardziej lub mniej prawdopodobnych przypuszczeń, które doświadczenie i ściślejsze rozumowanie potwierdzi lub nie. Chemik eksperymentujący na zwierzętach, aby przewidzieć działanie swoich preparatów na ludzi, wyciąga wnioski przez analogię. Lecz tak samo uczynił pewien mały chłopiec, którego znałem. Jego ulubiony pies miał być badany przez weterynarza. Chłopiec spytał: „Kto to jest weterynarz?“ „Lekarz zwierząt“(1). „Jakie zwierzę jest lekarzem zwierząt?“.

9. Wniosek wyciągnięty przez analogię opartą na wielu równoległych faktach ma większą wagę niż wniosek wyciągnięty przez analogię opartą na mniejszej ilości faktów. Jednak jakość jest tutaj ważniejsza niż ilość. Jasne, wyraźne analogie mają większą wagę niż nieuchwytne i mgliste podobieństwo; systematycznie uporządkowane przykłady liczą się bardziej niż przypadkowo zebrane fakty.

Powyżej (w punkcie 8) wysunęliśmy przypuszczenie o środku ciężkości czworościanu. Przypuszczenia tego dostarczyła nam analogia; przypadek czworościanu jest analogiczny do przypadku trójkąta. Możemy wzmocnić nasze przypuszczenie badając jeszcze jeden analogiczny

(1) W oryginale angielskim *animal doctor* można rozumieć dwojako: jako „lekarz zwierząt“ i jako „lekarz-zwierzę“. Język polski nie oddaje tej dwuznaczności i stąd w przekładzie polskim drugie pytanie chłopca wydaje się trochę nienaturalne (*przypisek tłumacza*).

przypadek, przypadek jednorodnego pręta (tj. odcinka prostej o jednostajnej gęstości).

Analogia między

odcinkiem, trójkątem, czworościanem

ma wiele aspektów. Odcinek leży na prostej, trójkąt na płaszczyźnie, czworościan w przestrzeni. Odcinki prostoliniowe są najprostszymi jednowymiarowymi ograniczonymi figurami, trójkąty — najprostszymi wielobokami, czworościany — najprostszymi wielościanami.

Odcinek ma dwa zerowymiarowe elementy ograniczające (dwa punkty końcowe), a jego wnętrze jest jednowymiarowe.

Trójkąt ma trzy zerowymiarowe i trzy jednowymiarowe elementy ograniczające (trzy wierzchołki i trzy boki), a jego wnętrze jest dwuwymiarowe.

Czworościan ma cztery zerowymiarowe, sześć jednowymiarowych i cztery dwuwymiarowe elementy ograniczające (cztery wierzchołki, sześć krawędzi i cztery ściany), a jego wnętrze jest trójwymiarowe.

Liczby te można zebrać w następującej tablicy. Kolejne kolumny zawierają ilości zero-, jedno-, dwu- i trójwymiarowych elementów, kolejne wiersze zawierają liczby odnoszące się do odcinka, trójkąta i czworościanu:

2	1		
3	3	1	
4	6	4	1

Niewielka znajomość potęg dwumianu wystarcza, aby w tych liczbach rozpoznać część trójkąta Pascala. Znaleźliśmy godną uwagi regularność dla odcinka, trójkąta i czworościanu.

10. Jeżeli przekonaliśmy się, że porównywane przez nas obiekty są ściśle ze sobą związane, to „wnioskowanie

przez analogię", takie jak przytoczymy niżej, może mieć dla nas pewną wartość.

Środek ciężkości jednorodnego odcinka pokrywa się ze środkiem ciężkości jego dwóch końców. Środek ciężkości jednorodnego trójkąta pokrywa się ze środkiem ciężkości jego trzech wierzchołków. Czy nie powinniśmy podejrzewać, że środek ciężkości jednorodnego czworościanu pokrywa się ze środkiem ciężkości jego czterech wierzchołków?

Dalej, środek ciężkości jednorodnego odcinka dzieli odległość między jego końcami w stosunku 1 : 1. Środek ciężkości trójkąta dzieli odległość między wierzchołkami a środkiem boku przeciwległego w stosunku 2 : 1. Czy nie powinniśmy podejrzewać, że środek ciężkości jednorodnego czworościanu dzieli odległość każdego wierzchołka od środka ciężkości przeciwległej ściany w stosunku 3 : 1?

Wydaje się zupełnie nieprawdopodobne, aby przypuszczenia sugerowane przez powyższe pytania miały być fałszywe, aby taka piękna regularność miała być naruszona. Przekonanie, że harmonia, prostota i porządek nie mogą być zwodnicze kieruje badaczami zarówno w matematyce, jak i w innych gałęziach nauki. Przekonanie to wyraża powiedzenie łacińskie: *simplex sigillum veri* (prostota jest pieczęcią prawdy).

(Poprzednie rozważania sugerują rozciągnięcie ich na n wymiarów. Wydaje się nieprawdopodobne, aby to, co jest prawdziwe dla pierwszych trzech wymiarów, dla $n = 1,2,3$, miało być fałszywe dla większych wartości n. To przypuszczenie jest „wnioskowaniem przez indukcję"; wskazuje ono, że indukcja jest w sposób naturalny oparta na analogii. Patrz Indukcja i indukcja matematyczna.)

11. Zakończymy bieżący ustęp krótkim rozpatrzeniem

najważniejszych przypadków, w których analogia osiąga precyzję pojęć matematycznych.

(I) Dwa układy obiektów matematycznych, nazwijmy je S i S', są ze sobą związane w ten sposób, że relacje między obiektami układu S są rządzone tymi samymi prawami, co relacje między obiektami układu S'.

Ten rodzaj analogii między S i S' jest zilustrowany tym, co mówiliśmy w punkcie 1; jako S trzeba wziąć boki prostokąta, a jako S' ściany prostopadłościanu.

(II) Między obiektami dwóch układów S i S' istnieje jedno-jednoznaczna odpowiedniość zachowująca pewne relacje. Znaczy to, że jeżeli taka relacja zachodzi między obiektami jednego układu, to ta sama relacja zachodzi między odpowiadającymi im obiektami drugiego układu. Taki związek między dwoma układami jest bardzo precyzyjnym rodzajem analogii; nosi on nazwę izomorfizmu.

(III) Między obiektami dwóch układów S i S' istnieje jedno-wieloznaczna odpowiedność zachowująca pewne relacje. Taki związek (który ma wielkie znaczenie w różnych działach matematyki wyższej, w szczególności w teorii grup, i którego nie będziemy tu szczegółowo omawiać) nosi nazwę homomorfizmu.

Homomorfizm jest innym, bardzo precyzyjnym rodzajem analogii.

Bolzano, Bernard (1781-1848), logik i matematyk, poświęcił znaczną część swego obszernego wykładu logiki, *Wissenschaftslehre,* heurystyce (tom III, str. 293-575). Pisze on o tej części swej pracy tak: „Nie myślę bynajmniej, abym był w stanie przedstawić tutaj jakikolwiek proces badania, którego by już dawno nie zauważyli wszyscy utalentowani ludzie, i wcale nie obiecuję, że znajdziecie tu cokolwiek nowego. Zadam sobie tylko trud jasnego sformułowania reguł i metod badania, jakimi posługują się wszyscy rozsądni ludzie, w większości przypadków nawet nieświadomie. Chociaż nie mam złudzeń, że nawet tylko to uda mi się całkowicie, to jednak mam nadzieję, że to, co tu podaję, może się pewnym ludziom spodobać i może mieć pewne zastosowania."

Co jest niewiadome? Czego żądamy? Co chcemy znaleźć? Czego mamy szukać?

Co jest dane? Co znamy?

Jaki jest warunek? Jaki warunek wiąże niewiadomą z danymi?

Nauczyciel może zadawać te pytania, aby przekonać się, czy uczeń zrozumiał zadanie; uczeń powinien umieć jasno na nie odpowiedzieć. Prócz tego, pytania te zwracają uwagę ucznia na główne części zadania typu „znaleźć": na niewiadomą, na dane i na warunek. Ponieważ rozpatrzenie tych części może być konieczne jeszcze nieraz, nauczyciel może zadawać te same pytania w dalszych fazach rozwiązywania zadania. (Przykłady znajdują się w ustępach **8**, **10**, **18**, **20**, w artykułach: UKŁADANIE RÓWNAŃ (punkty 3, 4), ZADANIA PRAKTYCZNE (punkt 1), ZAGADKI, a także w innych miejscach.)

Powyższe pytania mają duże znaczenie dla rozwiązującego zadanie. Za pomocą nich rozwiązujący zadanie sprawdza, czy dobrze to zadanie zrozumiał, i skupia swoją uwagę na tej czy innej głównej części zadania. Rozwiązywanie polega w zasadzie na wiązaniu niewiadomej z danymi. Dlatego też rozwiązujący zadanie powinien wielokrotnie skupić uwagę na tych elementach, zadając sobie pytania: *Co jest niewiadome? Co jest dane?*

Może się zdarzyć, że zadanie ma wiele niewiadomych albo że warunek składa się z kilku części, które trzeba rozpatrywać oddzielnie, albo że pożądane jest rozpatrzyć którąś z danych oddzielnie. Dlatego też możemy korzystać z różnych modyfikacji naszego pytania, jak na przykład: Jakie są niewiadome? Co jest pierwszą daną w naszym zadaniu? Co jest drugą daną? Z jakich różnych części składa się warunek? Jaka jest pierwsza część warunku?

Głównymi częściami zadania typu „udowodnić" są założenia i teza; odpowiednie pytania mają tu postać: *Co jest założeniem? Co jest tezą?*

Może się zdarzyć, że będziemy musieli nieco zmienić słowne sformułowanie albo treść tych użytecznych pytań, np.: Co zakładasz? Jakie są poszczególne części twego założenia? (Przykład znajduje się w ustępie **19**.)

Czy możesz skorzystać ze swego wyniku? Rozwiązanie zadania własnymi siłami jest odkryciem. Jeżeli zadanie nie jest trudne, to odkrycie nie jest wielkie, ale zawsze jest to odkrycie. Dokonawszy jakiegoś odkrycia, choćby skromnego, powinniśmy zbadać, czy nie kryje się za nim coś więcej. Powinniśmy wyciągnąć, co się tylko da, z nowego wyniku, a także z zastosowanej metody rozwiązania. Wykorzystaj swój sukces! *Czy możesz wykorzystać wynik albo metodę rozwiązania do innego zadania?*

1. Łatwo można wymyślać nowe zadania, jeśli jest się trochę obeznanym z głównymi sposobami modyfikacji zadań, takimi jak UOGÓLNIENIE, SPECJALIZACJA, ANALOGIA, ROZKŁADANIE I SKŁADANIE NA NOWO. Po prostu zaczynamy od danego zadania, wyprowadzamy z niego inne wspomnianymi wyżej sposobami, z tych nowych zadań wyprowadzamy jeszcze inne i tak dalej. Ten proces jest teoretycznie nieograniczony, ale w praktyce rzadko posuwamy się w nim daleko, gdyż otrzymywane

w ten sposób zadania często są bardzo trudne, albo nawet wcale nie dają się rozwiązać.

Z drugiej strony, możemy tworzyć nowe zadania, które dają się łatwo rozwiązać w oparciu o rozwiązania poprzedniego zadania; jednakże te nowe, łatwe zadania są często mało ciekawe.

Nie jest łatwo znaleźć nowe zadanie, które byłoby zarówno ciekawe, jak i dające się rozwiązać; do tego potrzeba doświadczenia, zamiłowania i szczęścia. Tym niemniej powinniśmy się zawsze rozejrzeć za innymi ciekawymi zadaniami, gdy udało nam się jakieś zadanie rozwiązać. Dobre zadania są jak pewne gatunki grzybów: rosną grupami. Znalazłszy jedno powinieneś rozejrzeć się dookoła: jest duża szansa, że w pobliżu znajdują się inne.

2. Zilustrujemy to na tym samym przykładzie, który rozpatrywaliśmy w ustępach **8, 10, 12, 14, 15.** Zaczynamy więc od następującego zadania:

Mając dane trzy wymiary (długość, szerokość i wysokość) prostopadłościanu, znaleźć jego przekątną. Jeżeli znamy rozwiązanie tego zadania, to łatwo rozwiążemy każde z następujących zadań (z których pierwsze dwa, w nieco innej postaci, były rozpatrywane w ustępie **14**).

Mając dane trzy wymiary prostopadłościanu znaleźć promień kuli opisanej na tym prostopadłościanie.

Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, którego środek jest spodkiem wysokości ostrosłupa. Mając daną wysokość ostrosłupa i boki jego podstawy znaleźć krawędzie boczne.

Mając dane współrzędne prostokątne (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) dwóch punktów w przestrzeni znaleźć odległość tych punktów.

Zadania te łatwo rozwiązujemy, ponieważ różnią się one niewiele od wyjściowego zadania, którego rozwiązanie znamy. W każdym przypadku dodajemy do naszego wyjściowego zadania pewne nowe pojęcia, jak kula opisana, ostrosłup, współrzędne prostokątne. Te pojęcia łatwo dodać i łatwo wyeliminować; pozbywszy się ich dochodzimy z powrotem do naszego wyjściowego zadania.

Powyższe zadania są ciekawe, ponieważ pojęcia, jakie wprowadziliśmy do wyjściowego zadania, są ciekawe. Ostatnie zadanie, zadanie o odległości dwóch punktów o danych współrzędnych, jest nawet ważnym zadaniem, ponieważ współrzędne prostokątne są ważne.

3. Oto inne zadanie, które łatwo rozwiązać, gdy zna się rozwiązanie naszego wyjściowego zadania. Mając daną długość, szerokość i przekątną prostopadłościanu znaleźć jego wysokość.

Istotnie, rozwiązanie naszego wyjściowego zadania polega w gruncie rzeczy na ustanowieniu związku między czterema wielkościami — trzema wymiarami prostopadłościanu i jego przekątną. Jeżeli znamy którekolwiek trzy spośród nich, to czwartą możemy wyliczyć z naszego związku. Tak więc możemy rozwiązać nasze nowe zadanie.

Mamy tu przykład otrzymywania z danego rozwiązanego już zadania nowych, łatwych do rozwiązania zadań: traktujemy wyjściową niewiadomą jako daną, a jedną z wyjściowych danych jako niewiadomą. Związek łączący niewiadomą z danymi jest ten sam w obu zadaniach, starym i nowym. Znalazłszy ten związek w jednym zadaniu możemy go wykorzystać także w drugim.

Powyższy przykład otrzymywania nowych zadań przez zamianę ról niewiadomej i którejś z danych różni się znacznie od przykładu podanego w punkcie 2.

4. Utwórzmy teraz kilka nowych zadań innymi sposobami.

Naturalnym *uogólnieniem* naszego wyjściowego zadania jest następujące zadanie: Znaleźć przekątną graniastosłupa pochyłego mając dane trzy krawędzie wychodzące z tego samego końca przekątnej i trzy kąty zawarte między tymi krawędziami.

Przez *specjalizację* otrzymujemy następujące zadanie: Znaleźć przekątną sześcianu o danej krawędzi.

Analogia jest niewyczerpanym źródłem otrzymywania różnych nowych zadań. Oto kilka otrzymanych z zadań rozpatrywanych w punkcie 2: Znaleźć przekątną ośmiościanu foremnego o danej krawędzi. Znaleźć promień kuli opisanej na czworościanie foremnym o danej krawędzi. Mając dane współrzędne geograficzne (długość i szerokość) dwóch punktów na powierzchni ziemi (którą uważamy za kulę) znaleźć odległość sferyczną między nimi.

Wszystkie te zadania są ciekawe, ale tylko jedno — otrzymane przez specjalizację — można rozwiązać natychmiast, opierając się na rozwiązaniu wyjściowego zadania.

5. Z danego zadania możemy otrzymywać nowe zadanie traktując pewne jego elementy jako zmienne.

Szczególnym przypadkiem zadania rozpatrywanego w punkcie 2 jest zadanie polegające na znalezieniu promienia kuli opisanej na sześcianie, którego krawędź jest dana. Traktujemy sześcian i wspólny środek sześcianu i kuli jako stałe, a zmieniamy promień kuli. Gdy promień kuli jest mały, kula jest całkowicie zawarta w sześcianie. Gdy promień rośnie, kula coraz bardziej rozprzestrzenia się (jak gumowy balon w trakcie nadymania). W pewnej chwili kula dotyka ścian sześcianu; nieco później dotyka krawędzi; jeszcze później kula przechodzi przez wierzchołki sześcianu. Jakie wartości przyjmuje promień kuli w tych trzech krytycznych momentach?

6. Doświadczenie matematyczne ucznia jest niekompletne, jeżeli nigdy nie zdarzyło mu się rozwiązać zadania

wymyślonego przez siebie. Nauczyciel może pokazywać uczniom, na czym polega tworzenie nowych zadań z rozwiązanego już zadania i w ten sposób rozbudzić w nich żądzę wiedzy. Nauczyciel tworząc nowe zadanie może zostawić część odkrycia uczniom. Na przykład mówiąc o rozszerzającej się kuli, którą dopiero co rozpatrywaliśmy (w punkcie 5), może zapytać się: „Co moglibyście spróbować obliczyć? Jaka wartość promienia kuli jest szczególnie interesująca"?

Czy możesz sprawdzić wynik? *Czy możesz sprawdzić tok rozumowania?* Rzetelna odpowiedź twierdząca, po dokonaniu sprawdzeń, utwierdza nasze zaufanie do rozwiązania i przyczynia się do trwałości naszej wiedzy.

1. Wyniki liczbowe zadań matematycznych można sprawdzić przez porównanie ich z liczbami otrzymanymi w rzeczywistości lub z oceną tych liczb opartą na zdrowym rozsądku. Ponieważ zadania wynikające z potrzeb praktycznych albo z naturalnej ciekawości prawie zawsze dotyczą dających się obserwować faktów, należałoby się spodziewać, że takie porównania z rzeczywistością będą z reguły dokonywane. Jednakże każdy nauczyciel wie, że uczniowie otrzymują nieraz wręcz nieprawdopodobne wyniki i przechodzą nad tym do porządku dziennego. Niektórzy uczniowie wcale się nie niepokoją, gdy w wyniku otrzymują 4916 m jako długość statku oraz 8 lat i 2 miesiące jako wiek kapitana, o którym wiadomo — nawiasem mówiąc — że jest dziadkiem. Tego rodzaju lekceważenie oczywistości niekoniecznie świadczy o głupocie, ale raczej o zobojętnieniu na sztuczne zadania.

2. Do zadań rozwiązywanych „na literach" można zastosować więcej, i to znacznie ciekawszych sprawdzeń niż do zadań rozwiązywanych „na liczbach" (patrz

ustęp 14). Rozpatrzmy jako nowy przykład ostrosłup ścięty o podstawie kwadratowej. Jeżeli bok podstawy dolnej wynosi a, bok podstawy górnej b, a wysokość ostrosłupa ściętego h, to znajdujemy, że objętość jego wynosi

$$\frac{a^2+ab+b^2}{3}h.$$

Możemy sprawdzić ten wynik przez SPECJALIZACJĘ. Istotnie, jeżeli $a = b$, to ostrosłup ścięty staje się prostopadłościanem o podstawie kwadratowej, a wzór przyjmuje postać a^2h; jeśli zaś $b = 0$, to ostrosłup ścięty staje się zwykłym ostrosłupem, a wzór przyjmuje postać $\frac{a^2h}{3}$. Możemy zastosować jeszcze SPRAWDZENIE ZA POMOCĄ WYMIARÓW. Istotnie, wymiarem naszego wyrażenia jest sześcian długości. Dalej, możemy sprawdzić wzór *zmieniając dane*. Rzeczywiście, jeśli dowolna z dodatnich wielkości a, b, c wzrasta, to wartość naszego wyrażenia też wzrasta.

Tego rodzaju sprawdzenia można stosować nie tylko do wyniku końcowego, ale także do wyniku pośredniego. Są one tak użyteczne, że warto się do nich przygotować; patrz ZMIANA ZADANIA, punkt 4. Aby móc zastosować te sprawdzenia, może być korzystne uogólnienie zadania „na liczbach" i zamiana jego na zadanie „na literach"; patrz UOGÓLNIENIE, punkt 3.

3. *Czy możesz sprawdzić tok rozumowania?* Sprawdzając tok rozumowania krok za krokiem powinniśmy unikać zwykłego powtarzania. Po pierwsze, zwykłe powtórzenie może stać się nudnym i niepouczającym przymuszeniem swojej uwagi. Po drugie, jeśli zrobiliśmy raz jakiś błąd, to jest bardzo prawdopodobne, że zrobimy go i drugi raz, o ile okoliczności są te same, co poprzednio. Jeżeli czujemy, że jest konieczne prześledzenie całego rozumowania krok za krokiem, to powinniśmy przynajmniej zmienić kolejność kroków albo ich ugrupowanie, aby wprowadzić pewną zmianę.

4. Można najpierw wybrać najsłabsze punkty dowodu i zbadać je. Wymaga to mniejszego wysiłku i jest bardziej interesujące. Przy wybieraniu punktów dowodu, które warto zbadać, bardzo użyteczne jest pytanie: CZY SKORZYSTAŁEŚ ZE WSZYSTKICH DANYCH?

5. Jest jasne, że nasza niematematyczna wiedza nie może być oparta wyłącznie na dowodach formalnych. Bardziej trwała część naszej codziennej wiedzy ustawicznie potwierdza się i umacnia poprzez nasze codzienne doświadczenie. Sprawdzanie przez obserwację stosuje się najbardziej systematycznie w naukach przyrodniczych. W naukach fizycznych tego rodzaju sprawdzenia przybierają postać pieczołowicie przeprowadzanych doświadczeń i pomiarów; łączy się je z rozumowaniem matematycznym. Czy nasza wiedza matematyczna może być oparta jedynie na dowodach formalnych?

Jest to pytanie natury filozoficznej, nad którym nie możemy się tutaj zastanawiać. Jest jednak pewne, że nasza wiedza matematyczna: moja czy też wiedza matematyczna uczniów, jest oparta nie tylko na dowodach formalnych. Jeżeli w ogóle istnieje trwała wiedza, to ma ona obszerną podstawę doświadczalną; tę podstawę rozszerza i utwierdza każde zadanie, którego wynik sprawdza się doświadczalnie.

Czy możesz otrzymać wynik w inny sposób?

Jeżeli rozwiązanie, które w końcu znaleźliśmy, jest długie i skomplikowane, to jest rzeczą naturalną przypuszczać, że istnieje jakieś prostsze i bardziej bezpośrednie rozwiązanie. *Czy możesz otrzymać wynik w inny sposób? Czy możesz zobaczyć go jednym rzutem oka?* Jednakże nawet wówczas, gdy udało nam się znaleźć zupełnie zadowalające nas rozwiązanie, możemy być zainteresowani w znalezieniu innego rozwiązania. Pragniemy przekonać się o prawdziwości wyniku teoretycznego za pomocą otrzymania go dwoma różnymi sposobami, tak jak pragniemy odczuć istnienie obiektu materialnego za pomocą dwóch różnych zmysłów. Znalazłszy dowód chcemy znaleźć inny dowód, podobnie jak pragniemy dotknąć jakiegoś przedmiotu, gdy go spostrzeżemy.

Lepiej jest mieć dwa dowody niż jeden. „Bezpieczniej jest żeglować z dwiema kotwicami".

1. *Przykład.* Znaleźć pole powierzchni bocznej S ściętego stożka obrotowego mając dany promień podstawy dolnej R, promień podstawy górnej r i wysokość h.

Zadanie to można rozwiązać różnymi sposobami. Możemy na przykład skorzystać ze znanego już wzoru na pole powierzchni bocznej stożka pełnego. Ponieważ stożek ścięty powstaje ze stożka pełnego przez odcięcie od niego mniejszego stożka, więc jego powierzchnia boczna jest różnicą powierzchni bocznych tych dwóch stożków pełnych; pozostaje tylko wyrazić te dwie powierzchnie boczne przez R, r i h. Dokonując tego dochodzimy do wzoru

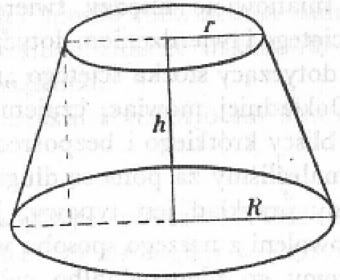
$$S = \pi (R + r)\sqrt{(R - r)^2 + h^2}.$$

Otrzymawszy w jakiś tam sposób, po długich rachunkach ten wynik, chcielibyśmy znaleźć jakiś prostszy i bardziej bezpośredni dowód. *Czy możesz otrzymać wynik w inny sposób? Czy możesz zobaczyć go jednym rzutem oka?*

Pragnąc ujrzeć cały wynik w sposób bardziej intuicyjny możemy zacząć od rozpatrzenia znaczenia geometrycznego jego poszczególnych części. I tak możemy zauważyć, że

$$\sqrt{(R - r)^2 + h^2}$$

jest długością *tworzącej* stożka ściętego. (Tworzącą jest jeden z nierównoległych boków trapezu równoramiennego, przez obrót którego wokół osi łączącej środki jego boków



Rys. 9

równoległych otrzymuje się stożek ścięty; patrz rysunek 9.) Dalej możemy odkryć, że,

$$\pi(R + r) = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2}$$

jest średnią arytmetyczną obwodów obu podstaw stożka ściętego. Przyglądając się tej części wzoru baczniej, możemy ją także zapisać w postaci

$$\pi(R + r) = 2\pi \frac{R + r}{2};$$

jest to *obwód przekroju środkowego* stożka ściętego. (Przekrojem środkowym nazywamy tutaj przekrój stożka ściętego płaszczyzną równoległą do obu podstaw stożka, połowiącą jego wysokość.)

Znalazłszy nowe interpretacje poszczególnych części wzoru możemy ujrzeć cały wzór w innym świetle. Możemy go przeczytać następująco:

pole = obwód przekroju środkowego × tworząca.

Przypomnijmy sobie regułę obliczania pola trapezu:

pole = linia środkowa × wysokość.

(Linia środkowa jest równoległa do podstaw trapezu i połowi wysokość.) Czując intuicyjnie analogię między obu twierdzeniami, mianowicie między twierdzeniem dotyczącym stożka ściętego i twierdzeniem dotyczącym trapezu, widzimy wynik dotyczący stożka ściętego „niemal jednym rzutem oka". Dokładniej mówiąc, czujemy, że jesteśmy obecnie bardzo bliscy krótkiego i bezpośredniego dowodu wyniku, który znaleźliśmy za pomocą długiego rachunku.

2. Rozpatrzony przykład jest typowy. Jeżeli jesteśmy niezupełnie zadowoleni z naszego sposobu wyprowadzenia wyniku, to chcemy go ulepszyć albo całkiem zmienić. W tym celu badamy wynik, staramy się lepiej zrozumieć, ujrzeć jakieś jego nowe aspekty. Najpierw może nam się udać zauważyć nową interpretację jakiejś małej części wyniku. Następnie możemy mieć szczęście odkryć jakiś nowy sposób pojmowania innej części.

Badając poszczególne części jedną po drugiej i rozpatrując je na różne sposoby możemy w końcu ujrzeć cały wynik w innym świetle. Nasze nowe ujęcie wyniku może nam zasugerować jakiś nowy dowód.

Trzeba przyznać, że wszystko to może się prędzej zdarzyć doświadczonemu matematykowi rozwiązującemu poważny problem niż początkującemu uczniowi biedzącemu się nad elementarnym zadaniem. Matematyk, który ma wiele wiadomości, jest bardziej niż uczeń wystawiony na niebezpieczeństwo korzystania ze zbyt wielu wiadomości i konstruowania niepotrzebnie skomplikowanego dowodu.

Ale — z drugiej strony — doświadczony matematyk łatwiej niż początkujący uczeń oceni nową interpretację drobnej części wyniku i zbierając razem małe ulepszenia łatwiej przekształci cały wynik.

Jednakże nawet w zupełnie elementarnych kursach może się zdarzyć, że uczniowie podadzą niepotrzebnie skomplikowane rozwiązanie. W takim wypadku nauczyciel powinien pokazać im, przynajmniej raz czy dwa, nie tylko prostszy sposób rozwiązania zadania, ale także, jak w samym wyniku znaleźć wskazówki prowadzące do prostszego rozwiązania.

Patrz także artykuł Reductio ad absurdum i dowód nie wprost.

Czy nie mógłbyś postawić zadania na nowo, w inny sposób? *Czy nie mógłbyś tego zrobić jeszcze inaczej?* Te pytania zmierzają do odpowiedniej Zmiany zadania.

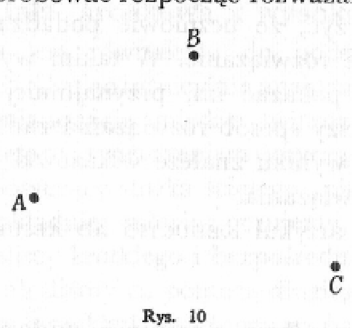
Wróć do definicji. Patrz artykuł Definicja.

Czy nie mógłbyś wydobyć czegoś pożytecznego z danych? Przed nami znajduje się nierozwiązane zadanie. Musimy *znaleźć związek między danymi i niewiadomą.* Możemy wyobrazić sobie nasze nierozwiązane zadanie jako wolną przestrzeń między danymi i niewiadomą, jako przerwę, przez którą mamy przeprowadzić most. Budowę naszego mostu możemy rozpocząć z którejkolwiek strony: od niewiadomej albo od danych.

Spójrz na niewiadomą! I spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze ci znane zadanie mające tę samą lub podobną niewiadomą. Te wskazówki radzą rozpocząć pracę od niewiadomej.

Spójrz na dane! *Czy nie mógłbyś wydobyć czegoś pożytecznego z danych?* To znów radzi nam rozpocząć pracę od danych.

Okazuje się, że zwykle lepiej jest rozpocząć rozumowanie od niewiadomej (patrz PAPPUS i PRACA OD KOŃCA DO POCZĄTKU). Jednakże rozpoczęcie pracy od danych ma również szanse powodzenia i zasługuje na zilustrowanie. Często warto spróbować rozpocząć rozważania od danych.



Rys. 10

Przykład. Mamy dane trzy punkty A, B i C. Poprowadzić przez punkt A linię, która przejdzie między punktami B i C w równych od nich odległościach.

Co jest dane? Dane są trzy punkty A, B i C. Robimy rysunek pokazując dane (rysunek 10).

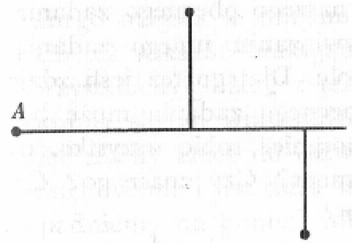
Co jest niewiadomą? Linia prosta.

Jaki jest warunek? Szukana prosta przechodzi przez punkt A i przechodzi pomiędzy punktami B i C w tej samej odległości od każdego. Zbieramy razem na rysunku niewiadomą i dane, pokazując żądane relacje (rysunek 11). Na naszym rysunku, zrobionym zgodnie z *definicją* odległości punktu od prostej, mamy kąty proste wprowadzone przez tę definicję.

Rysunek jest jednak wciąż „zbyt prosty". Nieznana prosta jest wciąż niedostatecznie powiązana z danymi A, B i C. Na rysunku trzeba wprowadzić jakieś linie pomocnicze, trzeba coś dodać — ale co? Nawet dość dobry uczeń może być tu bezradny. Można oczywiście

próbować różnych rzeczy, ale najlepszym pytaniem, jakie mu może przyjść na myśl jest: *Czy nie mógłbyś wydobyć czegoś pożytecznego z danych?*

Istotnie, co jest dane? Trzy punkty przedstawione na rysunku 10 i nic więcej. Na razie nie wykorzystaliśmy dostatecznie punktów B i C; trzeba jakoś z nich skorzystać.



Rys. 11

Rys. 12

Ale co można zrobić z dwoma tylko punktami? Połączyć je linią prostą. Wykonujemy więc rysunek 12.

Jeżeli nałożymy na siebie rysunki 11 i 12, rozwiązanie może ukazać nam się natychmiast: mamy dwa trójkąty prostokątne, które są przystające; mamy także bardzo ważny nowy punkt przecięcia dwóch prostych.

Czy nie spotkałeś się już kiedyś z tym zadaniem? Jest możliwe, że już kiedyś rozwiązaliśmy to samo zadanie, które mamy teraz rozwiązać, albo że słyszeliśmy o nim, albo że mieliśmy do czynienia z bardzo podobnym zadaniem. Powinniśmy zbadać te możliwości. Staramy się przypomnieć, co się już kiedyś zdarzyło. *Czy nie spotkałeś się już kiedyś z tym zadaniem? A może spotkałeś się z tym samym zadaniem w nieco innej postaci?* Nawet jeśli odpowiedź jest negatywna, tego rodzaju pytania mogą pomóc nam zebrać potrzebną wiedzę.

Pytania zadanego w tytule tego artykułu używa się często w bardziej ogólnym znaczeniu. Aby rozwiązać zadanie, musimy wydobyć z naszej pamięci odpowiednie elementy, zmobilizować właściwe części naszej drzemiącej wiedzy (POSTĘP I SUKCES). Nie możemy, oczywiście, wiedzieć z góry, które części naszej wiedzy mogą być tu przydatne; istnieją jednak pewne możliwości, które powinniśmy rozpatrzyć. I tak każdy element naszego obecnego zadania, który grał jakąś rolę w rozwiązaniu innego zadania, znów może odegrać pewną rolę. Dlatego też jeśli zdaje nam się, że jakiś element obecnego zadania może być ważny, to powinniśmy przypomnieć sobie wszystko, co o nim wiemy. Co to za element? Czy znasz go? *Czy nie spotkałeś się już kiedyś z nim?*

Czy skorzystałeś ze wszystkich danych? Dzięki progresywnej mobilizacji naszej wiedzy o wiele lepiej będziemy rozumieli nasze zadanie przy końcu rozwiązywania go niż na początku (patrz POSTĘP I SUKCES, punkt 1). Ale na jakim etapie znajdujemy się obecnie? Czy mamy to, co potrzebujemy? Czy właściwie rozumiemy zadanie? *Czy skorzystałeś ze wszystkich danych? Czy skorzystałeś z całego warunku?* Odpowiednim pytaniem dla zadań typu „udowodnić" jest: *Czy skorzystałeś z całego założenia?*

1. Dla ilustracji wróćmy do zadania o prostopadłościanie postawionego w ustępie **8** (i rozpatrywanego w ustępach **10, 12, 14, 15**). Może się zdarzyć, że uczeń wpadnie na pomysł, aby obliczyć przekątną ściany, $\sqrt{a^2+b^2}$, ale na tym się zatrzyma. Nauczyciel może mu pomóc pytając: *Czy skorzystałeś ze wszystkich danych?* Uczeń nie może nie zauważyć, że wyrażenie $\sqrt{a^2+b^2}$ nie zawiera trzeciej danej c. Dlatego też będzie się starał wprowadzić c do rozważań. Jest duża szansa, że spostrzeże prowadzący do roz-

wiązania trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $\sqrt{a^2+b^2}$ i c i o przeciwprostokątnej będącej szukaną przekątną prostopadłościanu. (Inna ilustracja znajduje się w artykule ELEMENTY POMOCNICZE, punkt 3.)

Omawiane tutaj pytania są bardzo ważne. Rozpatrzony przykład pokazuje jasno ich zastosowanie do budowania rozwiązania. Mogą nam one pomóc w znalezieniu niejasnego miejsca w zrozumieniu przez nas zadania. Mogą nam też wskazać brakujący element. Gdy wiemy, że nie korzystaliśmy jeszcze z jakiegoś elementu, to oczywiście staramy się go wprowadzić do naszych rozważań. Tak więc mamy klucz do rozwiązania, mamy określoną linię postępowania i jest duża szansa, że trzymając się tej linii, wpadniemy na pomysł rozwiązania.

2. Omówione przez nas pytania są pomocnicze nie tylko przy konstruowaniu rozwiązania, lecz także przy sprawdzaniu go. Przypuśćmy dla przykładu, że mamy sprawdzić dowód twierdzenia, którego założenie składa się z trzech części. Wszystkie trzy części są istotne dla prawdziwości twierdzenia, to znaczy, jeżeli odrzucimy którąkolwiek część założenia, to twierdzenie przestaje być prawdziwe. Jeśli więc w dowodzie nie korzystamy z jakiejś części założenia, to dowód musi być fałszywy. Czy w dowodzie *korzystamy z całego założenia?* Czy korzystamy z pierwszej części założenia? Gdzie korzystamy z pierwszej części założenia? Gdzie korzystamy z drugiej części założenia? A gdzie z trzeciej? Odpowiadając na te wszystkie pytania sprawdzamy dowód.

Ten rodzaj sprawdzania jest efektywny, pouczający i niemal niezbędny dla gruntownego zrozumienia długiego i uciążliwego toku rozumowania, o czym INTELIGENTNY CZYTELNIK powinien wiedzieć.

3. Omówione pytania zmierzają do zbadania, czy

zrozumieliśmy nasze zadanie całkowicie. Na pewno nie zrozumieliśmy go całkowicie, jeśli nie wzięliśmy pod uwagę jakiejkolwiek istotnej danej, warunku czy założenia. Ale nie zrozumieliśmy go także wówczas, gdy nie zdaliśmy sobie sprawy ze znaczenia jakiegoś istotnego pojęcia. Dlatego dla zbadania, czy rozumiemy nasze zadanie, powinniśmy także zapytać: *Czy brałeś pod uwagę wszystkie istotne pojęcia zawarte w zadaniu?* Patrz artykuł Definicja, punkt 7.

4. Powyższych uwag nie można jednak stosować bezkrytycznie i bez żadnych ograniczeń. W gruncie rzeczy ich bezpośrednie zastosowanie ogranicza się do zadań „dobrze postawionych" i sensownych.

Dobrze postawione i sensowne zadanie typu „znaleźć" musi zawierać wszystkie potrzebne dane i ani jednej zbytecznej danej; także jego warunek musi być dokładnie wystarczający, ani nie sprzeczny, ani zbyt obszerny. Rozwiązując takie zadanie musimy oczywiście skorzystać ze wszystkich danych i z całego warunku.

Obiektem zadania typu „udowodnić" jest twierdzenie matematyczne. W dobrze postawionym i sensownym zadaniu każdy punkt założenia twierdzenia musi być istotny dla tezy. Dowodząc takiego twierdzenia musimy oczywiście korzystać z każdego punktu założenia.

Zadania matematyczne w tradycyjnych podręcznikach są z reguły dobrze postawione i sensowne. Nie można jednakże zbytnio polegać na tym; jeśli mamy choćby najmniejszą wątpliwość co do tego, powinniśmy zapytać: Czy warunek można spełnić? Starając się odpowiedzieć na to lub na podobne pytanie możemy przekonać się, przynajmniej w pewnej mierze, że nasze zadanie jest właściwie postawione.

Pytanie postawione w tytule niniejszego artykułu i pytania pokrewne można i należy zadawać bez żadnych

modyfikacji tylko wówczas, gdy wiemy, że nasze zadanie jest sensowne i dobrze postawione, albo przynajmniej — gdy nie ma żadnego powodu, aby w to wątpić.

5. Istnieją pewne niematematyczne zadania, które mogą być w pewnym sensie „dobrze postawione". Na przykład od dobrych zadań szachowych wymaga się, aby miały tylko jedno rozwiązanie i aby nie było zbytecznych figur na szachownicy.

Jednakże Zadania praktyczne są zazwyczaj dalekie od tego, aby można je było uznać za dobrze postawione. Jeżeli chcemy do nich zastosować pytania rozpatrzone w niniejszym artykule, to musimy je wpierw gruntownie na nowo rozpatrzyć.

Czy warunek można spełnić? *Czy warunek wystarcza do określenia niewiadomej? Czy jest on może niewystarczający? Albo zbyt obszerny? Albo sprzeczny?*

Te pytania są często użyteczne w początkowej fazie rozwiązywania zadania, gdy nie wymagamy ostatecznej odpowiedzi na nie, ale tylko odpowiedzi tymczasowej, tego, co przewidujemy. Patrz na przykład ustępy **8** i **18**.

Dobrze jest przewidzieć każdą cechę charakterystyczną wyniku, do którego zmierzamy. Jeśli wiemy, czego możemy się spodziewać, to wiemy, w jakim kierunku powinniśmy się posuwać. Ważną cechą charakterystyczną zadania jest ilość jego rozwiązań. Najbardziej interesujące są takie zadania, które mają tylko jedno rozwiązanie; skłonni jesteśmy uważać zadania o jednoznacznie określonym rozwiązaniu za jedyne „sensowne" zadania. Czy nasze zadanie jest „sensowne" w tym znaczeniu? Jeśli potrafimy na to pytanie odpowiedzieć, choćby tylko opierając się na niezupełnie pewnym przewidywaniu, to nasze zainteresowanie zadaniem wzrośnie i możemy pracować lepiej.

Czy nasze zadanie jest „sensowne"? Pytanie to jest użyteczne w początkowej fazie naszej pracy, jeżeli potrafimy na nie łatwo odpowiedzieć. Jeżeli jest trudno dać na nie odpowiedź, to kłopot z uzyskaniem odpowiedzi może przewyższyć uzyskany przez to wzrost zainteresowania zadaniem. To samo dotyczy pytania *„Czy warunek można spełnić?"* i pytań pokrewnych z naszej listy. Powinniśmy je stawiać, gdyż jest możliwe, że odpowiedź na nie będzie łatwa i wiarogodna. Nie powinniśmy jednak nalegać na uzyskanie odpowiedzi, gdy wydaje się, że trudno będzie ją otrzymać i że będzie ona niezbyt jasna.

Odpowiednimi pytaniami dla zadań typu „udowodnić" są: *Czy jest prawdopodobne, że twierdzenie jest prawdziwe? Czy może bardziej prawdopodobne jest, że jest ono fałszywe?* Samo sformułowanie pytania pokazuje jasno, że oczekujemy jedynie przewidywania, prawdopodobnej tymczasowej odpowiedzi.

Czy znasz jakieś pokrewne zadanie? Trudno sobie wyobrazić zadanie absolutnie nowe, niepodobne do żadnego z poprzednio rozwiązanych zadań i nie związane z żadnym z nich. Gdyby jednak takie zadanie istniało, byłoby ono nierozwiązalne. Istotnie, rozwiązując zadanie zawsze korzystamy z poprzednio rozwiązanych zadań, używając ich wyników lub stosowanych w nich metod, lub wykorzystując zdobyte przy ich rozwiązywaniu doświadczenie. Oczywiście zadania, z których korzystamy, muszą być w jakiś sposób związane z naszym obecnym zadaniem. Dlatego też stawiamy pytanie: *Czy znasz jakieś pokrewne zadanie?*

Zwykle nie ma żadnych trudności w przypomnieniu sobie poprzednio rozwiązanych zadań związanych więcej lub mniej z naszym obecnym zadaniem. Przeciwnie,

możemy znaleźć zbyt dużo takich zadań i cała trudność może polegać na wybraniu zadania, które by było dla nas użyteczne. Musimy rozejrzeć się za zadaniami najbardziej związanymi z naszym; dlatego też spoglądamy na niewiadomą (patrz artykuł SPÓJRZ NA NIEWIADOMĄ) albo szukamy poprzednio rozwiązanych zadań, które powstają z naszego obecnego zadania przez UOGÓLNIENIE, SPECJALIZACJĘ lub ANALOGIĘ. Celem omawianego tu pytania jest mobilizacja naszej poprzednio zdobytej wiedzy (patrz POSTĘP I SUKCES, punkt 1). Istotna część naszej wiedzy matematycznej jest zebrana w postaci uprzednio dowiedzionych twierdzeń. Dlatego też zadajemy pytanie: *Czy znasz jakieś twierdzenie, które mogłoby tu być użyteczne?* To pytanie może być szczególnie odpowiednie, gdy nasze zadanie jest zadaniem typu „udowodnić", to znaczy gdy mamy udowodnić albo obalić dane twierdzenie.

Definicja terminu jest to wyjaśnienie jego znaczenia za pomocą innych terminów, o których zakładamy, że są już znane.

1. *Terminy specjalne* w matematyce są dwojakiego rodzaju. Jedne przyjmuje się jako terminy pierwotne i nie definiuje się ich. Inne traktuje się jako terminy pochodne i określa się je we właściwy sposób, to znaczy wyjaśnia się ich znaczenie za pomocą terminów pierwotnych i terminów pochodnych poprzednio zdefiniowanych. Tak więc nie dajemy formalnej definicji takich pojęć pierwotnych jak punkt, prosta i płaszczyzna (¹). Dajemy natomiast formalne

(¹) Poglądy na te pojęcia zmieniły się od czasów Euklidesa i jego greckich naśladowców, którzy definiowali punkt, prostą i płaszczyznę. Jednakże ich „definicje" trudno nazwać definicjami formalnymi; są to raczej pewnego rodzaju intuicyjne ilustracje. Ilustracje są oczywiście dopuszczalne, a nawet bardzo pożądane w toku nauczania.

definicje takich pojęć jak „dwusieczna kąta", „okrąg" czy „parabola".

Definicję ostatniego z tych terminów można podać w następujący sposób. *Parabolą* nazywamy miejsce geometryczne punktów, które są jednakowo odległe od ustalonego punktu i od ustalonej prostej. Ten ustalony punkt nazywamy *ogniskiem* paraboli, a ustaloną prostą — *kierownicą* paraboli. Rozumie się, że wszystkie rozpatrywane tu elementy leżą na tej samej płaszczyźnie i że ustalony punkt (ognisko) nie leży na ustalonej prostej (kierownicy).

Nie zakłada się, że czytelnik zna sens określonych terminów: paraboli, ogniska paraboli i kierownicy paraboli. Zakłada się natomiast, że czytelnik zna sens wszystkich pozostałych terminów: punktu, prostej, odległości punktu od innego punktu, miejsca geometrycznego itd.

2. *Definicje podawane w słownikach* niewiele się różnią pod względem zewnętrznej formy od definicji matematycznych, ale istota ich jest inna.

Autora słownika interesuje potoczne znaczenie słów. *Przyjmuje* on oczywiście to potoczne znaczenie i nadaje mu postać definicji.

Matematyka nie interesuje potoczne znaczenie terminów, a w każdym razie nie to go interesuje przede wszystkim. Małe ma dla niego znaczenie, co w mowie potocznej może oznaczać „okrąg", „parabola" lub inny tego rodzaju termin specjalny. Definicja matematyczna *nadaje* sens matematyczny terminom.

3. *Przykład.* Znaleźć punkt przecięcia danej prostej z parabolą, której ognisko i kierownica są dane.

Nasze podejście do każdego zadania musi zależeć od stanu naszej wiedzy. Nasze podejście do powyższego zadania zależy głównie od naszej znajomości własności paraboli. Jeżeli wiemy dużo o paraboli, staramy się zrobić

użytek z naszej wiedzy i wydobyć z niej coś, co by nam mogło pomóc. *Czy znasz jakieś twierdzenie, które mogłoby tu być użyteczne? Czy znasz jakieś pokrewne zadanie?*

Jeżeli wiemy mało o paraboli, ognisku i kierownicy, to te terminy raczej nam przeszkadzają i oczywiście chcielibyśmy się ich pozbyć. Jak można się ich pozbyć? Posłuchajmy dialogu nauczyciela i ucznia, omawiających przedstawione wyżej zadanie. Wybrali oni już odpowiednie oznaczenia: P oznacza dowolny spośród szukanych punktów przecięcia, O — ognisko, k — kierownicę, p — prostą przecinającą parabolę.

— *Co jest niewiadome?*

— Punkt P.

— *Co jest dane?*

— Proste p i k oraz punkt O.

— *Jaki jest warunek?*

— P jest punktem przecięcia prostej p i paraboli, której kierownicą jest k, a ogniskiem O.

— Dobrze. O ile wiem, niewiele zajmowałeś się studiowaniem własności paraboli, ale myślę, że potrafisz powiedzieć, co to jest parabola.

— Parabola jest to miejsce geometryczne punktów równo odległych od ogniska i od kierownicy.

— Tak jest. Dobrze pamiętasz definicję. Musisz jednak z niej skorzystać; *wróć do definicji.* Co możesz powiedzieć o swoim punkcie P opierając się na definicji paraboli?

— P leży na paraboli, a więc jest jednakowo oddalony od k i od O.

— Dobrze. *Zrób rysunek.*

Uczeń prowadzi na rysunku 13 linie PO i PQ. Linia PQ jest prostopadłą poprowadzoną z punktu P do prostej k.

— *Czy nie mógłbyś teraz postawić zadania w inny sposób?*

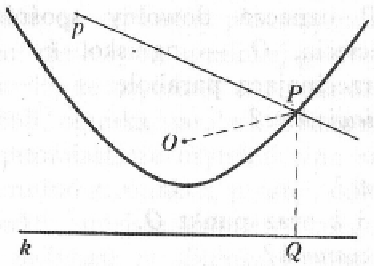
. . . .

— Czy nie mógłbyś sformułować warunku zadania korzystając z wprowadzonych przed chwilą odcinków?

— P jest takim punktem prostej p, że $PO = PQ$.

— Dobrze. Ale powiedz słowami: co to jest PQ?

— Odległość punktu P od prostej k.



Rys. 13

— Dobrze. Czy nie mógłbyś teraz sformułować zadania na nowo? Ale zrób to starannie, pełnym zdaniem.

— Znaleźć na danej prostej p punkt P jednakowo odległy od danego punktu O i od danej prostej k.

— Zwróć uwagę na postęp, jaki zrobiłeś, przechodząc od początkowego sformułowania zadania do sformułowania obecnego. Początkowe sformułowanie zadania było pełne niezbyt jeszcze dobrze ci znanych terminów specjalnych: parabola, ognisko, kierownica; brzmiało ono nieco pompatycznie i nieprzystępnie. A teraz nie ma nawet śladu po tych specjalnych terminach; uprzystępniłeś zadanie. Bardzo dobrze.

4. Wynikiem pracy dokonanej w poprzednim przykładzie jest *wyeliminowanie terminów specjalnych.* Rozpoczęliśmy od sformułowania zadania, które zawierało pewne

terminy specjalne (parabola, ognisko, kierownica), i doszliśmy w końcu do nowego sformułowania bez tych terminów.

Aby wyeliminować jakiś termin specjalny, trzeba znać jego definicję; ale sama znajomość definicji nie wystarczy, trzeba z niej jeszcze skorzystać. W poprzednim przykładzie nie wystarczało pamiętać definicji paraboli. Decydującym krokiem było wprowadzenie na rysunku odcinków PO i PQ, których równość wynikała z definicji paraboli. Takie postępowanie jest typowe. Do pierwotnie występujących w zadaniu elementów dodajemy nowe, odpowiednio wybrane. Opierając się na definicji ustanawiamy pewne związki między wprowadzonymi elementami. Jeżeli te związki wyrażają całkowicie sens rozważanego pojęcia, znaczy to, że skorzystaliśmy z definicji. Skorzystanie z definicji terminu specjalnego jest równoznaczne z wyeliminowaniem tego terminu.

Opisane wyżej postępowanie można nazwać *wracaniem do definicji.*

Wracając do definicji terminu specjalnego uwalniamy się od tego terminu, ale wprowadzamy zamiast tego nowe elementy i nowe związki. Uzyskana w wyniku tego zmiana w rozumieniu przez nas zadania może mieć duże znaczenie. W każdym bądź razie każde nowe sformułowanie zadania, każda ZMIANA ZADANIA może nas zbliżyć do uzyskania wyniku.

5. *Definicje i znane twierdzenia.* Jeżeli znamy nazwę „parabola" i mamy pewne pojęcie o kształcie tej krzywej, lecz nic więcej o niej nie wiemy, to nasza wiedza oczywiście nie wystarczy do rozwiązania zadania podanego wyżej w charakterze przykładu ani do żadnego innego poważnego zadania geometrycznego dotyczącego paraboli. Jaka wiedza jest do tego niezbędna?

Można uważać, że geometria składa się z aksjomatów, definicji i twierdzeń. W aksjomatach nie wspomina się o paraboli; aksjomaty dotyczą tylko takich terminów pierwotnych, jak punkt, prosta itd. W każdym rozumowaniu geometrycznym związanym z parabolą, przy rozwiązywaniu każdego zadania dotyczącego paraboli trzeba korzystać albo z definicji paraboli, albo z twierdzeń o niej. Aby takie zadanie rozwiązać, trzeba znać przynajmniej definicję, ale lepiej jest znać także kilka twierdzeń.

To, co powiedzieliśmy o paraboli, dotyczy oczywiście każdego innego podobnego pojęcia. Gdy zaczynamy rozwiązywać zadanie zawierające takie pojęcie, nie możemy jeszcze wiedzieć, co będzie dla nas korzystniejsze: skorzystać z definicji pojęcia, czy też z pewnych twierdzeń dotyczących tego pojęcia; jedno jest wszakże pewne: musimy skorzystać z jednego lub drugiego.

W pewnych jednak przypadkach nie mamy wyboru. Jeżeli znamy tylko definicję pojęcia i nic więcej, to musimy skorzystać z definicji. Gdy nasza znajomość pojęcia niewiele wykracza poza definicję, wówczas najlepsze, co możemy zrobić, to wrócić do definicji. Jeżeli jednak znamy wiele twierdzeń o tym pojęciu i mamy wiele doświadczenia w operowaniu nim, to jest szansa, że trafimy na odpowiednie twierdzenie, które nas naprowadzi na rozwiązanie zadania.

6. *Różne definicje.* Powierzchnię kuli definiuje się zwykle jako miejsce geometryczne punktów równo odległych od danego punktu. (Mamy tu na myśli punkty przestrzeni, a nie płaszczyzny.) Jednakże powierzchnię kuli można by zdefiniować jako powierzchnię opisaną przez okrąg obracający się wokół średnicy. Znane są jeszcze inne definicje powierzchni kuli. Możliwych jest wiele definicji.

Gdy mamy rozwiązać dane zadanie, w którym występuje jakieś pojęcie, jak np. „powierzchnia kuli" czy „parabola", i chcemy wrócić do jego definicji, to często musimy wybrać jedną spośród różnych definicji. W takim przypadku wiele może zależeć od właściwego wyboru. Należy wybrać taką definicję, która będzie najlepiej pasowała do danego zadania.

Znalezienie pola powierzchni kuli było w czasach Archimedesa wielkim i trudnym zadaniem. Rozwiązując je Archimedes miał do wyboru podane wyżej dwie definicje powierzchni kuli. Wolał pojmować powierzchnię kuli jako powierzchnię powstałą przez obrót okręgu wokół ustalonej średnicy. W okrąg wpisał wielobok foremny o parzystej liczbie boków w ten sposób, że ustalona średnica okręgu łączyła dwa jego przeciwległe wierzchołki. Wielobok foremny aproksymował okrąg i obracając się wraz z nim tworzył wypukłą powierzchnię złożoną z powierzchni dwóch stożków, o wierzchołkach położonych w przeciwległych końcach danej średnicy i z powierzchni wielu stożków ściętych położonych między tymi dwoma stożkami. Ta złożona powierzchnia aproksymowała powierzchnię kuli. Skorzystał z tego Archimedes przy obliczaniu pola powierzchni kuli. Gdybyśmy pojmowali powierzchnię kuli jako miejsce geometryczne punktów równo odległych od środka, to nie dostalibyśmy tak szybko żadnej prostej aproksymacji.

7. Wracanie do definicji jest ważne w trakcie szukania rozwiązania, ale jest ono równie ważne w trakcie sprawdzania rozwiązania.

Przypuśćmy, że ktoś podał rzekomo nowe rozwiązanie zadania Archimedesa znalezienia pola powierzchni kuli. Jeżeli ma on tylko niezupełnie jasne pojęcie o kuli, to jego rozwiązanie na pewno nie jest dobre. Może on nawet mieć dużo wiadomości o kuli, ale nie mogę o tym wiedzieć, jeżeli nie korzysta z tego pojęcia w trakcie rozwiązywania zadania, i rozwiązanie to nie może być dobre. Dlatego też śledząc rozwiązanie czekam na chwilę w której będzie powiedziane coś istotnego o kuli, w której użyta będzie definicja kuli lub jakieś twierdzenie o kuli. Jeżeli taka chwila nie nadejdzie, rozwiązanie nie jest dobre.

Powinniśmy, rzecz prosta, w ten sam sposób sprawdzać nie tylko rozwiązania innych, ale także swoje własne. *Czy brałeś pod uwagę wszystkie istotne pojęcia zawarte w zadaniu?* W jaki sposób skorzystałeś z danego pojęcia? Czy skorzystałeś z jego znaczenia, z jego definicji? Czy skorzystałeś z istotnych faktów i znanych twierdzeń dotyczących tego pojęcia?

Znaczenie wracania do definicji przy sprawdzaniu rozwiązania podkreślał Pascal, który sformułował regułę: „*Substituer mentalement les définitions à la place des définis*", co znaczy: „Podstawiać w myśli definicje na miejsce definiowanych terminów". Znaczenie wracania do definicji przy konstruowaniu rozwiązania podkreślał Hadamard.

8. Wracanie do definicji jest ważną operacją myślową. Jeżeli chcemy zrozumieć, dlaczego definicje słów są tak ważne, powinniśmy przedtem uświadomić sobie, że same słowa są ważne. Trudno byłoby myśleć nie korzystając ze słów, znaków czy jakichś innych symboli. Słowa i znaki mają więc pewną siłę. Ludzie prymitywni wierzą, że słowa i symbole mają siłę magiczną. Możemy ich zrozumieć, ale nie powinniśmy podzielać ich wiary. Powinniśmy wiedzieć, że siła słowa tkwi nie w jego brzmieniu, nie w *vocis flatus* — w tchnieniu powietrza spowodowanym przez mówiącego, ale w pojęciach, do których się słowo odnosi, oraz w rezultacie — w faktach, na których opierają się pojęcia.

Dlatego też szukanie znaczenia i faktów poza samymi słowami jest zdrową i słuszną tendencją. Wracając do definicji matematyk chce uchwycić rzeczywiste związki między obiektami matematycznymi kryjące się za terminami specjalnymi, podobnie jak fizyk szuka określonych eksperymentów kryjących się za jego terminami, a zwykły człowiek mający nieco zdrowego rozsądku chce od słów przejść do konkretnych faktów, aby nie być oszukiwanym przez czcze słowa.

Descartes, René (1596-1650), wielki matematyk i filozof, miał zamiar podać uniwersalną metodę rozwiązywania zadań. Jednakże nie dokończył swych *Reguł kierowania umysłem.* Fragmenty tego traktatu znalezione w jego notatkach i wydane po jego śmierci zawierają więcej, i to bardziej interesujących materiałów dotyczących rozwiązywania zadań niż jego bardziej znane dzieło *Discours de la Méthode (Rozprawa o metodzie)*, mimo że *Discours* było prawdopodobnie napisane później niż *Reguły*. Następujące słowa Descartesa wydają się opisywać powstanie *Reguł*: „Gdy jako młody człowiek słyszałem o jakimś pomysłowym odkryciu, starałem się dojść do tego odkrycia sam, nie czytając pracy autora. Czyniąc to zauważyłem, że korzystałem z pewnych reguł".

Diagnoza. Słowa tego używamy tutaj jako terminu specjalnego w znaczeniu pedagogicznym. Oznacza ono „dokładną charakterystykę pracy ucznia". Pracę ucznia charakteryzuje stopień, jaki mu nauczyciel stawia, ale jest to charakterystyka niedoskonała, oceniająca pracę ucznia jedynie z grubsza. Nauczyciel pragnący ulepszyć pracę ucznia potrzebuje dokładniejszej charakterystyki, musi znać jego dobre i złe strony, tak jak lekarz chcący wyleczyć pacjenta musi postawić diagnozę.

Zajmiemy się tutaj szczególnie sprawnością ucznia w rozwiązywaniu zadań. Jak można ją scharakteryzować? Możemy osiągnąć pewną korzyść z rozróżnienia czterech faz rozwiązania. Istotnie, zachowanie się ucznia w poszczególnych fazach charakteryzuje go dość dokładnie.

Bodaj najbardziej rozpowszechnionym niedomaganiem przy rozwiązywaniu zadań jest *niepełne zrozumienie zadania*, wynikające z braku koncentracji. Co się tyczy *układania planu rozwiązania* i uzyskania ogólnej idei rozwiązania, to częste są dwa przeciwstawne błędy. Niektórzy uczniowie od razu zabierają się do rachunków i konstrukcji, bez żadnego planu czy ogólnej idei; inni czekają nieporadnie na przyjście jakiegoś pomysłu nie czyniąc nic, co mogłoby nadejście takiego pomysłu przyśpieszyć. Najczęstszym błędem w *wykonywaniu planu* jest nieuwaga i brak cierpliwości do sprawdzania każdego kroku. Zaniedbanie jakiegokolwiek *sprawdzenia wyniku* jest bardzo częste; uczeń jest zadowolony, że uzyskał wynik, odkłada ołówek i nawet najbardziej nieprawdopodobny wynik nie zdziwi go. Nauczyciel, postawiwszy dokładną diagnozę tego rodzaju błędów ucznia, może go z nich wyleczyć kładąc nacisk na pewne pytania naszej listy.

Dobry pomysł lub „nagłe olśnienie" są to potoczne nazwy dla szybkiego i niespodziewanego posunięcia się naprzód w rozwiązywaniu zadania; patrz POSTĘP I SUKCES, punkt 6. Powstanie w umyśle dobrego pomysłu jest trudne do opisania, chociaż jest to rzecz każdemu dobrze znana. Warto zauważyć, że bardzo sugestywny opis powstawania dobrego pomysłu podał taki autorytet jak Arystoteles.

Większość ludzi zgodzi się, że powstanie dobrego pomysłu jest „aktem przenikliwości". Arystoteles tak określa „przenikliwość": „Przenikliwość jest to uchwycenie istotnych związków między rozpatrywanymi elementami w niedostrzegalnie krótkim czasie, dokonane na drodze domysłu. Tak na przykład, jeżeli widzicie jakąś osobę rozmawiającą w określony sposób z bogatym człowiekiem, możecie natychmiast zgadnąć, że ta osoba chce pożyczyć pieniędzy. Albo zauważywszy, że jasna strona księżyca jest zawsze skierowana w stronę słońca, możecie nagle uchwycić, dlaczego tak jest; mianowicie dlatego, że księżyc świeci odbitym światłem słonecznym" (1).

Pierwszy przykład nie jest zły, lecz jest raczej trywialny; nie trzeba wiele przenikliwości, aby zgadywać cokolwiek, co się tyczy bogatych ludzi i pieniędzy, i pomysł jaki nam przyszedł do głowy trudno nazwać bardzo dobrym. Jednakże drugi przykład jest wręcz uderzający, jeżeli wysilimy nieco naszą wyobraźnię, aby ujrzeć go w warunkach, w jakich powstał.

Musimy sobie uświadomić, że człowiek współczesny Arystotelesowi musiał obserwować słońce i gwiazdy, jeżeli chciał się orientować w czasie, gdyż nie było wówczas zegarków na rękę. Musiał obserwować fazy księżyca, jeżeli planował nocną podróż, gdyż nie było latarni ulicznych. Znał niebo o wiele lepiej niż współczesny mieszczuch i jego naturalna inteligencja nie była przyćmiona przez nieprzemyślane urywki teorii astronomicznych w ujęciu gazetowym. Widział księżyc w pełni jako płaską tarczę, podobną do tarczy słońca, ale znacznie mniej

(1) Tekst jest nieco zmieniony. Dokładniejsze tłumaczenie (angielskie — *przyp. tłum.*) znajduje się w dziele Williama Whewella *The Philosophy of the Inductive Sciences*, tom II, 1847, str. 131.

jasną. Musiały go dziwić ciągłe zmiany kształtu i położenia księżyca. Zdarzało mu się także obserwować księżyc w ciągu dnia, podczas wschodu i zachodu słońca. Zauważył on, że „jasna strona księżyca jest zawsze zwrócona w stronę słońca". Już samo to było dużym osiągnięciem. I oto nagle zauważa on, że zmieniający się wygląd księżyca jest podobny do różnych wyglądów kuli oświetlonej z jednej strony, tak że połowa jej jest świecąca, a połowa ciemna. Pojmuje on już słońce i księżyc nie jako płaskie tarcze, ale jako kuliste ciała, z których jedno daje, a drugie pochłania światło. Rozumie istotne związki między obserwowanymi faktami i natychmiast „w niedostrzegalnie krótkim czasie" zmienia swoje poprzednie poglądy. W jego wyobraźni nastąpił nagły skok. W jego umyśle powstał dobry pomysł, błysk geniuszu.

Elementy pomocnicze. O wiele lepiej rozumiemy nasze zadanie przy końcu pracy niż w chwili, gdy dopiero zabieramy się do zadania (Postęp i sukces, punkt 1). Gdy posuwamy się z naszą pracą naprzód, dodajemy nowe elementy do elementów rozpatrywanych początkowo. Element, kóry wprowadzamy w nadziei, że posunie on rozwiązanie naprzód, nazywamy *elementem pomocniczym.*

1. Istnieją różne rodzaje elementów pomocniczych. Rozwiązując zadanie geometryczne możemy wprowadzić w naszym rysunku nowe linie, *linie pomocnicze.* Rozwiązując zadanie algebraiczne możemy wprowadzić *pomocniczą niewiadomą* (patrz Zadania pomocnicze, punkt 1). *Twierdzenie pomocnicze* jest to twierdzenie, którego dowodzimy w nadziei, że posunie ono naprzód rozwiązanie naszego pierwotnego zadania.

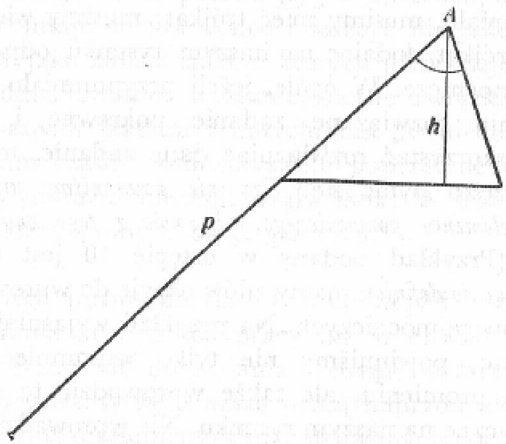
2. Jest wiele powodów, dla których wprowadza się elementy pomocnicze. Jesteśmy zadowoleni, gdy udało nam się przypomnieć jakieś *zadanie pokrewne z naszym i rozwiązane już przedtem.* Jest wysoce prawdopodobne, że możemy z niego skorzystać, ale nie wiemy jeszcze jak. Przypuśćmy na przykład, że rozwiązujemy zadanie geometryczne i że zadanie pokrewne, które rozwiązaliśmy poprzednio, a które nam się obecnie przypomniało, dotyczy trójkątów. Ale na naszym rysunku nie ma żadnego trójkąta. Aby móc skorzystać z zadania, które się nam przypomniało, musimy mieć trójkąt; musimy więc wprowadzić trójkąt dodając na naszym rysunku odpowiednie linie pomocnicze. W ogóle, jeżeli przypomniało nam się poprzednio rozwiązane zadanie pokrewne i chcemy z niego skorzystać rozwiązując dane zadanie, to powinniśmy często pytać się: *Czy nie powinniśmy wprowadzić jakiegoś elementu pomocniczego, aby móc z tego zadania skorzystać?* (Przykład podany w ustępie **10** jest typowy.)

Wracając do definicji mamy znów okazję do wprowadzenia elementów pomocniczych. Na przykład wyjaśniając co to jest okrąg, powinniśmy nie tylko wspomnieć o jego środku i promieniu, ale także wprowadzić te elementy geometryczne na naszym rysunku. Nie wprowadziwszy ich nie moglibyśmy zrobić żadnego konkretnego użytku z definicji; podanie definicji bez rysowania jest tylko czczą gadaniną.

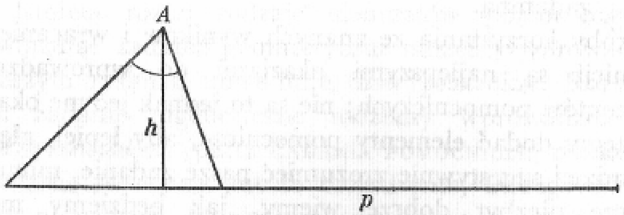
Próby korzystania ze znanych wyników i wracanie do definicji są najlepszymi okazjami do wprowadzenia elementów pomocniczych; nie są to jednak jedyne okazje. Możemy dodać elementy pomocnicze, aby lepiej, głębiej i bardziej sugestywnie zrozumieć nasze zadanie, mimo że jeszcze niezbyt dobrze wiemy, jak będziemy mogli skorzystać z dodanych elementów. Możemy po prostu przeczuwać, że to jest „dobry pomysł", pojmować zadanie w ten właśnie sposób, z takimi dodatkowymi elementami.

Możemy mieć taki czy inny powód do wprowadzenia jakiegoś elementu pomocniczego, ale jakiś w ogóle powód powinniśmy mieć. Nie należy wprowadzać elementów pomocniczych zupełnie bezmyślnie.

3. *Przykład.* Zbudować trójkąt mając dany jeden kąt, wysokość poprowadzoną z wierzchołka danego kąta i obwód trójkąta.



Rys. 14



Rys. 15

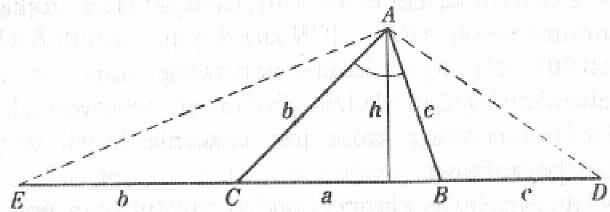
Wprowadzamy odpowiednie oznaczenia. Niech α oznacza dany kąt, h daną wysokość poprowadzoną z wierzchołka A

kąta α, a p dany obwód. *Robimy rysunek,* na którym z łatwością zaznaczamy kąt α i wysokość h. *Czy skorzystaliśmy ze wszystkich danych?* Nie, na naszym rysunku nie ma danej długości p, równej obwodowi trójkąta. Musimy więc wprowadzić p. Ale jak?

Możemy próbować wprowadzić p na różne sposoby. Próby przedstawione na rysunkach 14 i 15 okazały się niezbyt szczęśliwe. Starając się wyjaśnić dlaczego te próby okazały się niezadowalające, możemy zauważyć, że jest tak z powodu braku symetrii.

Istotnie, trójkąt ma trzy szukane boki a, b, c. Jak zwykle przez a oznaczamy bok przeciwległy wierzchołkowi A; wiemy, że

$$a + b + c = p.$$



Rys. 16

Boki b i c grają tę samą rolę; można je ze sobą zamienić; nasze zadanie jest symetryczne względem b i c. Ale na naszych rysunkach 14 i 15 b i c nie grają tej samej roli; umieszczając odcinek p traktowaliśmy b i c w różny sposób; rysunki 14 i 15 psują naturalną symetrię zadania względem b i c. Powinniśmy umieścić odcinek p tak, aby jego stosunek do b i do c był taki sam.

Te rozważania mogą nam zasugerować, aby umieścić odcinek p tak, jak na rysunku 16. Do boku a trójkąta dodajemy odcinek CE o długości b z jednej strony i odcinek BD o długości c z drugiej strony, tak że na rysunku 16 powstaje odcinek ED o długości

$$b+a+c=p.$$

Jeżeli mamy nieco doświadczenia w rozwiązywaniu zadań konstrukcyjnych, nie omieszkamy wraz z odcinkiem ED wprowadzić na naszym rysunku pomocniczych odcinków AD i AE, z których każdy jest podstawą trójkąta równoramiennego. Istotnie, rozsądnie jest wprowadzić do zadania elementy, które są szczególnie proste i dobrze znane, jak np. w naszym zadaniu trójkąty równoramienne.

Okazuje się, że wprowadzenie naszych pomocniczych odcinków było bardzo szczęśliwe. Badając nowy rysunek możemy zauważyć, że $\sphericalangle EAD$ wiąże się w bardzo prosty sposób z danym kątem α. Istotnie, korzystając z trójkątów równoramiennych ABD i ACE znajdujemy, że $\sphericalangle DAE = \frac{1}{2}\alpha + 90°$. Po tej uwadze naturalna staje się chęć zbudowania trójkąta DAE. Tak więc wprowadziliśmy zadanie pomocnicze, które jest znacznie łatwiejsze niż zadanie początkowe.

4. Nauczyciele i autorzy podręczników nie powinni zapominać, że inteligentny uczeń i INTELIGENTNY CZYTELNIK nie zadowoli się sprawdzeniem poprawności poszczególnych kroków rozumowania. Chce on znać także motywy i cele tych kroków. Wprowadzenie elementu pomocniczego jest krokiem rzucającym się w oczy. Jeżeli pomysłowa linia pomocnicza pojawia się na rysunku w sposób oderwany, bez żadnego uzasadnienia i zupełnie niespodziewanie rozwiązuje zadanie, to inteligentny uczeń i inteligentny czytelnik są rozczarowani; czują się oszukani. Matematyka jest interesująca tak długo, dopóki zajmuje nasz umysł i nasze siły twórcze. Jednakże umysł i siły twórcze są bezczynne, jeżeli motyw i cel najistotniejszego kroku pozostają niezrozumiałe. Wyjaśnienie takich kroków przez odpowiednie uwagi (jak wyżej w punkcie 3) albo przez starannie wybrane pytania i wskazówki (jak w ustępach **10, 18, 19, 20**) wymaga dużo czasu i wysiłku; może to się jednak okazać opłacalne.

Figury geometryczne są nie tylko obiektami zadań geometrycznych, ale stanowią także dużą pomoc w rozwiązywaniu wszelkiego rodzaju zadań, w których początkowo nie ma nic geometrycznego. Tak więc mamy dwa powody, dla których trzeba rozpatrzyć rolę figur geometrycznych w rozwiązywaniu zadań.

1. Jeżeli rozważane zadanie jest zadaniem geometrycznym, to musimy rozpatrzyć jakąś figurę. Figurę tę możemy rozważać tylko w naszej wyobraźni, albo też na szkicu wykonanym na papierze. W pewnych wypadkach może być pożądane tylko wyobrażenie sobie figury bez jej rysowania; jeżeli jednak mamy zbadać kolejno jeden po drugim różne szczegóły, to należy zrobić rysunek. Jeżeli szczegółów jest dużo, to nie możemy zmieścić ich wszystkich jednocześnie w wyobraźni, podczas gdy wszystkie one jednocześnie znajdują się na papierze. Szczegół wyrysowany w naszej wyobraźni możemy zapomnieć, szczegół naszkicowany na papierze pozostaje i gdy wracamy do niego, to przypomina nam o poprzednio uczynionych uwagach; oszczędza nam kłopotu przypominania sobie naszych poprzednich rozważań.

2. Rozpatrzymy teraz dokładniej korzystanie z figur w zadaniach na konstrukcje geometryczne.

Rozpoczynamy szczegółowe rozpatrywanie takiego zadania od zrobienia rysunku zawierającego niewiadomą i dane związane ze sobą tak, jak żąda tego warunek zadania.

Aby zadanie dokładnie zrozumieć, powinniśmy rozpatrzyć każdą daną i każdą część warunku oddzielnie; następnie powinniśmy z powrotem zebrać te części razem i traktować warunek jako całość, starając się widzieć jednocześnie różne związki wymagane przez nasze zadanie. Byłoby bardzo trudno operować tymi wszystkimi szczegółami, oddzielać je od siebie i znów łączyć w jedną całość nie mając rysunku na papierze.

Z drugiej jednak strony, dopóki nie rozwiążemy zadania całkowicie, dopóty będzie wątpliwe, czy taką figurę można w ogóle narysować. Czy można spełnić cały warunek występujący w zadaniu? Nie jesteśmy upoważnieni do odpowiedzi „tak", dopóki nie otrzymamy ostatecznego rozwiązania; mimo to przypuszczamy, że jest to możliwe i robimy rysunek, o którym zakładamy, że niewiadoma jest związana z danymi tak, jak żąda tego warunek. Mogłoby się wydawać, że robiąc taki rysunek czynimy niczym nie uzasadnione założenie.

Tak jednak nie jest. W każdym bądź razie tak nie musi być. Nie postępujemy niewłaściwie, gdy badając nasze zadanie dopuszczamy *możliwość* istnienia obiektu, w którym niewiadoma i dane są związane żądanym warunkiem, pod warunkiem, że nie pomylimy możliwości z pewnością. Sędzia nie postępuje niewłaściwie, gdy przesłuchując oskarżonego przyjmie hipotezę, że oskarżony dopuścił się zarzucanej mu zbrodni, pod warunkiem, że sam w tę hipotezę zbyt pochopnie nie uwierzy. Zarówno matematyk, jak i sędzia mogą przypuszczać, dopóki badanie nie doprowadzi ich do określonego rezultatu.

Metoda podejścia do zadania konstrukcyjnego polegająca na rozpoczynaniu badań od zrobienia szkicu, na którym z założenia spełniony jest warunek, pochodzi od geometrów greckich. Wzmiankę o tym mamy w krótkim, nieco zagadkowym zdaniu Pappusa: *Przypuść, że to, co należy zrobić, jest już zrobione.* Następujące zalecenie jest nieco mniej zwięzłe, ale jaśniejsze: *Zrób rysunek hipotetycznej figury, przypuściwszy, że warunek zadania jest spełniony całkowicie.*

Zalecenie to dotyczy geometrycznych zadań konstrukcyjnych, ale w rzeczywistości nie ma potrzeby ograniczać się do tego szczególnego rodzaju zadań. Możemy rozciągnąć nasze zalecenie na wszelkiego rodzaju zadania typu „znaleźć", nadając mu następującą ogólną postać: *Rozpatrz hipotetyczną sytuację, w której z założenia warunek zadania jest całkowicie spełniony.*

Porównaj artykuł PAPPUS, punkt 6.

3. Omówmy kilka spraw dotyczących praktycznego robienia rysunków.

(I) Czy rysunki należy robić dokładnie, czy w sposób przybliżony; używając przyborów kreślarskich, czy też odręcznie?

Oba sposoby sporządzania rysunków mają swoje zalety. Rysunki dokładne grają w zasadzie tę samą rolę w geometrii, co dokładne pomiary w fizyce; w praktyce jednak dokładne rysunki są mniej ważne niż dokładne pomiary, gdyż twierdzenia geometryczne sprawdza się o wiele częściej niż prawa fizyki. Jednakże początkujący powinien sporządzić wiele rysunków tak dokładnie, jak tylko może, aby zdobyć pewne doświadczenie. Prócz tego zaleta dokładnych rysunków polega na tym, że mogą one bardziej zaawansowanym nasunąć na myśl pewne twierdzenie geometryczne. Tym niemniej dla przeprowadzenia rozumowania zazwyczaj wystarczająco dobre są starannie zrobione rysunki odręczne. Prócz tego sporządza się je znacznie szybciej. Oczywiście, rysunki odręczne nie mogą wyglądać absurdalnie; linii prostych nie należy rysować jako faliste, a okręgi nie powinny wyglądać jak kartofle.

Niedokładny rysunek może czasami zasugerować fałszywy wniosek. Niebezpieczeństwo tego nie jest jednak wielkie i możemy się przed nim zabezpieczyć różnymi sposobami, w szczególności zmieniając rysunek. Nie ma żadnego niebezpieczeństwa wyciągnięcia fałszywego wniosku, jeżeli skoncentrujemy się na logicznych związkach między poszczególnymi elementami i uświadomimy sobie, że rysunek jest tylko czymś pomocniczym, a nie podstawą dla naszych wniosków; faktyczną podstawą dla wyciągania wniosków są logiczne związki. (W sposób pouczający ilustrują to znane paradoksy, w których sprytnie wykorzystuje się tendencyjne niedokładności rysunku.)

(II) Ważne jest, aby między elementami zachodziły żądane związki. Nie jest natomiast ważne, w jakiej kolejności są one zbudowane. Dlatego też należy wybierać najbardziej wygodną kolejność. Na przykład, aby zilustrować trysekcję kąta, chcemy narysować dwa kąty α i β takie, aby $\alpha = 3\beta$. Zaczynając od narysowania dowolnego kąta α nie możemy zbudować kąta β za pomocą cyrkla i liniału. Dlatego też wybieramy dość mały, lecz poza tym dowolny kąt β i zaczynając od niego budujemy kąt α, co jest łatwe.

(III) Nasz rysunek nie powinien sugerować żadnej niezamierzonej własności szczegółowej. Poszczególne części rysunku nie powinny sugerować żadnych związków między sobą, których nie żąda zadanie. Odcinki nie powinny wydawać się równe lub prostopadłe, jeżeli nie muszą być takie. Trójkąty nie powinny wyglądać jak równoramienne czy równoboczne, jeżeli nie żąda tego zadanie. Trójkąt o kątach 45°, 60° i 75° jest w określonym znaczeniu tego słowa najbardziej „odległy" zarówno od

trójkątów równoramiennych, jak i od równobocznych([1]). Jeżeli chcecie rozpatrywać „ogólny" trójkąt, to rysujcie trójkąt o powyższych kątach 45°, 60° i 75°, albo trójkąt niewiele różniący się od niego.

(IV) Aby uwypuklić różną rolę różnych linii, możemy rysować grube linie i cienkie, ciągłe i przerywane, albo też używać różnych kolorów. Rysujemy linię bardzo lekko, jeżeli nie jesteśmy jeszcze zupełnie zdecydowani, czy użyjemy ją jako linię pomocniczą, czy nie. Możemy narysować dane elementy czerwonym ołówkiem oraz użyć innych kolorów dla podkreślenia ważnych części rysunku, jak na przykład par trójkątów podobnych itd.

(V) Czy dla zilustrowania geometrii przestrzennej należy używać trójwymiarowych modeli, czy też rysunków na papierze i na tablicy?

Trójwymiarowe modele są bardzo pożądane, ale sporządzanie jest kłopotliwe, a gotowe modele drogo kosztują. Tak więc zazwyczaj musimy zadowolić się rysunkami, choć niełatwo uczynić je poglądowymi. Jest bardzo pożądane, aby początkujący nabrali nieco doświadczenia na modelach zrobionych własnoręcznie z kartonu. Pożyteczne jest także traktować otaczające nas przedmioty jako reprezentacje pojęć geometrycznych. I tak pudełko, cegła albo klasa mogą przedstawiać prostopadłościan, ołówek — walec obrotowy, abażur lampy — ścięty stożek kołowy itd.

4. Rysunki na papierze są łatwe do zrobienia i łatwe do zapamiętania. Figury płaskie znamy szczególnie dob-

([1]) Jeżeli kątami trójkąta są α, β, γ i przy tym $90^\circ > \alpha > \beta > \gamma$, to przynajmniej jedna z różnic $90^\circ - \alpha$, $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$ jest mniejsza od 15°, chyba że $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$. Istotnie

$$\frac{3(90^\circ - \alpha) + 2(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)}{6} = 15^\circ$$

rze, a zadania dotyczące figur płaskich są szczególnie dostępne. Możemy wyciągnąć jakąś korzyść z tych okoliczności. Możemy wykorzystać naszą zdolność do operowania figurami przy operowaniu niegeometrycznymi obiektami, jeżeli uda nam się znaleźć odpowiednią geometryczną interpretację dla tych niegeometrycznych obiektów.

Istotnie, wszelkiego rodzaju geometrycznych interpretacji, wykresów i diagramów używa się we wszystkich naukach: nie tylko w fizyce, chemii i naukach przyrodniczych, ale także w ekonomii, a nawet psychologii. Używając interpretacji geometrycznej staramy się wszystko wyrazić w języku figur; staramy się wszelkiego rodzaju zadania sprowadzić do zadań geometrycznych.

Dlatego też jeśli nawet wasze zadanie nie jest zadaniem geometrycznym, możecie spróbować zrobić rysunek. Znalezienie jasnej interpretacji geometrycznej dla waszego niegeometrycznego zadania może być istotnym krokiem naprzód w rozwiązaniu zadania.

Heurystyka albo *ars inveniendi* była to nazwa pewnej gałęzi wiedzy, niezbyt jasno opisanej, zaliczanej to do logiki, to do filozofii, to do psychologii, często podawanej tylko w ogólnych zarysach, rzadko przedstawianej szczegółowo i dziś już w zasadzie zapomnianej. Celem heurystyki jest badanie metod i reguł dokonywania odkryć. Pewne ślady takich badań można znaleźć u komentatorów EUKLIDESA, szczególnie ciekawe jest jedno miejsce u PAPPUSA. Najbardziej znane są sposoby budowania systemu heurystyki przez DESCARTESA i LEIBNIZA, wielkich matematyków i zarazem filozofów. Bernard BOLZANO przedstawił godne uwagi dokładne ujęcie heurystyki. Niniejsza książeczka jest próbą wskrzeszenia heurystyki

w nowoczesnej acz skromnej postaci. Patrz artykuł NOWOCZESNA HEURYSTYKA.

Przymiotnik „heurystyczny" oznacza „służący do odkrycia".

Indukcja i indukcja matematyczna. Indukcja jest to proces odkrywania ogólnych praw na podstawie obserwowania i zestawiania przypadków szczególnych. Stosuje się ją we wszystkich naukach, nawet w matematyce. Indukcji matematycznej używamy w matematyce jedynie do dowodów twierdzeń specjalnego rodzaju. Jest raczej niefortunne, że nazwy indukcji i indukcji matematycznej są tak ściśle ze sobą związane, gdyż między oboma procesami istnieje bardzo słaby związek logiczny. Istnieje jednak pewien związek natury praktycznej: często korzystamy z obu metod jednocześnie. Zilustrujemy obie metody na tym samym przykładzie.

1. Możemy przypadkowo zauważyć, że

$$1+8+27+64=100,$$

a następnie uwzględniając, że liczby po lewej stronie równości są sześcianami, a liczba po prawej stronie kwadratem, możemy temu faktowi nadać interesującą postać:

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2.$$

Czy często się zdarza, że taka suma kolejnych sześcianów jest kwadratem jakiejś liczby?

Zadając to pytanie jesteśmy podobni do przyrodnika, który będąc pod wrażeniem ciekawej rośliny czy ciekawej formacji geologicznej stawia pytanie natury ogólniejszej. Nasze pytanie ogólne dotyczy sumy sześcianów kolejnych liczb naturalnych:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3.$$

Doprowadził nas do niego „przypadek szczególny" $n=4$.

Co możemy zrobić, aby odpowiedzieć na nasze pytanie? To, co zrobiłby przyrodnik: zbadać inne przypadki szczególne. Przypadki szczególne $n = 2, 3$ są jeszcze prostsze niż przypadek rozpatrywany. Następnym przypadkiem jest $n = 5$. Dołączmy jeszcze dla kompletu przypadek $n = 1$. Zbierając systematycznie wszystkie te przypadki szczególne — tak jak by geolog zebrał swoje okazy jakiejś rudy — otrzymujemy interesującą tabelę:

$$1 = 1 = 1^2$$

$$1+8 = 9 = 3^2$$

$$1+8+27 = 36 = 6^2$$

$$1+8+27+64 = 100 = 10^2$$

$$1+8+27+64+125 = 225 = 15^2$$

Trudno uwierzyć, aby te wszystkie sumy kwadratów liczb naturalnych były kwadratami jedynie przez przypadek. W podobnym przypadku przyrodnik byłby niemal pewny, że ogólne prawo sugerowane przez zaobserwowane poprzednio przypadki szczególne jest słuszne; to ogólne prawo jest niemal dowiedzione przez *indukcję*. Matematyk wyraża się z większą rezerwą, chociaż oczywiście w zasadzie rozumuje on tak samo. Powiedziałby, że indukcja mocno sugeruje następujące twierdzenie:

Suma sześcianów pierwszych n liczb naturalnych jest kwadratem pewnej liczby naturalnej.

2. Rozpatrzone przykłady doprowadziły nas do przypuszczenia, że istnieje godne uwagi, nieco tajemnicze prawo. Dlaczego te sumy kolejnych sześcianów mają być kwadratami? Jednakże, jak widać, są one kwadratami.

Co zrobiłby w takiej sytuacji przyrodnik? Kontynuowałby badanie swojego przypuszczenia. Może on przy tym przeprowadzić badanie w różnych kierunkach. Może np. zebrać dalsze dowody doświadczalne swego prawa; jeśli my chcemy zrobić to samo, musimy sprawdzić następne przypadki: $n = 6, 7, \dots$ Przyrodnik może także przebadać fakty, których obserwacja doprowadziła go do jego przypuszczenia; porównuje je starannie, stara się dojść do jakiejś głębszej regularności albo do jakichś innych analogii. Postąpmy i my w ten sposób.

Zbadajmy jeszcze raz przypadki $n = 1, 2, 3, 4, 5$, które zebraliśmy w naszej tabeli. Dlaczego wszystkie te sumy są kwadratami? Co można powiedzieć o tych kwadratach? Ich podstawami są 1, 3, 6, 10, 15. Co można powiedzieć o tych podstawach? Czy istnieje jakaś głębsza regularność, jakaś dalsza analogia? W każdym bądź razie nie wydaje się, aby podstawy rosły nieregularnie. W jaki sposób one rosną? Różnica między dwoma kolejnymi wyrazami tego ciągu także rośnie:

$$3-1 = 2, \quad 6-3 = 3, \quad 10-6 = 4, \quad 15-10 = 5.$$

Otóż te różnice są wyraźnie regularne. Możemy tu zauważyć zaskakującą analogię między podstawami kwadratów. Możemy zauważyć godną uwagi regularność ciągu liczb 1, 3, 6, 10, 15:

$$1 = 1,$$

$$3 = 1+2,$$

$$6 = 1+2+3,$$

$$10 = 1+2+3+4,$$

$$15 = 1+2+3+4+5.$$

Jeżeli ta regularność jest zupełnie ogólna (a trudno przypuścić, żeby nie była), to przewidywane przez nas twierdzenie przybiera bardziej dokładną postać:

Dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, *mamy*

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2.$$

3. Sformułowane wyżej twierdzenie znaleźliśmy przy pomocy indukcji. Sposób, w jaki je znaleźliśmy, daje nam pewne pojęcie o indukcji, która jest oczywiście jednostronna i niedoskonała, ale jednak godna uwagi. Indukcja usiłuje znaleźć regularność i zgodność leżącą poza obserwacjami. Jej najbardziej znanymi narzędziami są: uogólnienie, specjalizacja i analogia. Wstępne uogólnienie wynika z próby zrozumienia zaobserwowanych faktów: oparte jest ono na analogii, a sprawdza się je przez dalsze przypadki szczególne.

Poprzestaniemy na tych uwagach o indukcji, co do której panuje duża niezgoda wśród filozofów. Należy jednak dodać, że wiele osiągnięć matematycznych znaleziono najpierw drogą indukcji, a następnie udowodniono. Matematyka rygorystycznie przedstawiona jest systematyczną nauką dedukcyjną, ale matematyka dopiero powstająca, szukająca nowych twierdzeń, jest eksperymentalną nauką indukcyjną.

4. W matematyce, tak jak w naukach fizycznych, możemy używać obserwacji i indukcji do odkrywania ogólnych praw. Istnieje jednak pewna różnica między matematyką i fizyką. W fizyce nie ma większego autorytetu niż obserwacja i indukcja, w matematyce zaś jest taki autorytet: ścisły dowód.

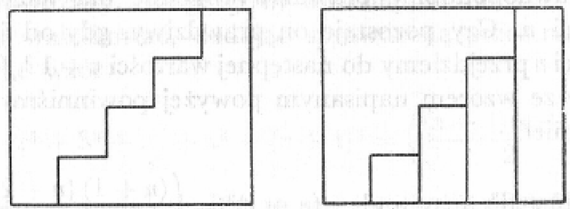
Pracując jakiś czas doświadczalnie, dobrze jest następnie znaleźć swój punkt widzenia. Odkryliśmy ciekawe prawo, ale rozumowanie, które nas doń doprowadziło,

było jedynie doświadczalne, wysoce prawdopodobne, prowizoryczne, heurystyczne; spróbujmy teraz ustanowić je ostatecznie za pomocą ścisłego dowodu.

Doszliśmy więc do zadania typu „udowodnić": dowieść albo obalić sformułowane poprzednio (patrz wyżej punkt 2) prawo.

Uprośćmy je nieco. Możemy wiedzieć, że

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$



a) b)

Rys. 17

W każdym bądź razie łatwo to sprawdzić. Weźmy pod uwagę prostokąt o bokach n i $n+1$ i podzielmy go linią łamaną na dwie części tak jak na rysunku 17a, który odpowiada przypadkowi $n = 4$. Obie połowy prostokąta mają kształt schodów. Każda z nich ma pole $1+2+\ldots+n$; dla $n = 4$ pole wynosi $1+2+3+4$ (patrz rysunek 17b). Pole całego prostokąta wynosi $n(n+1)$. Połowę tego stanowi pole figury w kształcie schodów; to dowodzi naszego wzoru.

Możemy więc nasz wynik znaleziony przez indukcję zapisać w postaci

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

5. Jeżeli nie mamy pojęcia, jak dowieść tego wzoru, to możemy go przynajmniej sprawdzić. Sprawdźmy ten

wzór dla najbliższego przypadku, którego nie rozpatrywaliśmy, tj. dla $n = 6$. Dla tej wartości wzór przybiera postać

$$1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = \left(\frac{6 \cdot 7}{2}\right)^2$$

i po obliczeniach okazuje się, że równość rzeczywiście ma miejsce: obie strony równości są równe 441.

Możemy ten wzór sprawdzić bardziej efektywnie. Wzór jest prawdopodobnie prawdziwy ogólnie dla wszystkich wartości n. Czy pozostaje on prawdziwy, gdy od jakiejś wartości n przejdziemy do następnej wartości $n+1$? Jednocześnie ze wzorem napisanym powyżej powinniśmy więc także mieć

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right)^2.$$

Otóż sprawdzenie jest bardzo proste. Odejmując od obu stron tego wzoru odpowiednie strony poprzedniego wzoru otrzymamy

$$(n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2.$$

A to jest łatwe do sprawdzenia. Prawą stronę możemy zapisać w postaci

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 [(n+2)^2 - n^2] = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 [n^2 + 4n + 4 - n^2] =$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4}(4n+4) = (n+1)^2(n+1) = (n+1)^3.$$

Nasz doświadczalnie znaleziony wzór przeszedł pomyślnie swoją próbę życiową.

Zobaczmy dokładniej, co ta próba oznacza. Sprawdziliśmy bez najmniejszej wątpliwości, że

$$(n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2.$$

Nie wiemy jeszcze, czy na pewno wzór

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$$

jest prawdziwy. Ale *gdybyśmy* wiedzieli, że tak *jest*, moglibyśmy wnioskować, dodając sprawdzoną przez nas równość, że wzór

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

jest *także* prawdziwy. Jest to ten sam wzór dla następnej liczby naturalnej $n+1$. Otóż wiemy już, że nasz wzór jest prawdziwy dla $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Na podstawie tego, co przed chwilą powiedzieliśmy, nasz wzór będąc prawdziwy dla $n = 6$ musi być także prawdziwy dla $n = 7$; będąc prawdziwy dla $n = 7$ jest prawdziwy dla $n = 8$; i tak dalej. Nasz wzór zachodzi więc dla wszystkich n; udowodniliśmy tym samym, że jest on ogólnie prawdziwy.

6. Przeprowadzony wyżej dowód musi służyć za wzór w wielu podobnych przypadkach. Co jest w tym wzorze istotnego?

Twierdzenie, które mamy udowodnić, musi być z góry podane w ścisłej postaci.

W twierdzeniu tym musi występować liczba naturalna n.

Twierdzenie musi być dostatecznie wyraźnie przedstawione tak, abyśmy mieli możliwość sprawdzenia, czy pozostaje ono prawdziwe przy przejściu od n do następnej liczby naturalnej $n+1$.

Jeżeli uda nam się to efektywnie sprawdzić, możemy na tej podstawie wnioskować, że nasze twierdzenie musi być prawdziwe dla $n+1$, o ile jest prawdziwe dla n. Gdy jesteśmy już tak daleko, to wystarczy wiedzieć, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$; stąd wynika, że jest prawdziwe dla $n = 2$; stąd dalej wynika prawdziwość twierdzenia dla $n = 3$ i tak dalej. Przechodząc od dowolnej liczby naturalnej do następnej dowodzimy ogólnie naszego twierdzenia.

To postępowanie jest tak często stosowane, że zasługuje na specjalną nazwę. Można by je nazwać „dowodem przez przejście od n do $n+1$", albo jeszcze prościej „przejściem do następnej liczby naturalnej". Niestety, przyjętym terminem jest „indukcja matematyczna". Nazwa ta jest wynikiem przypadkowej okoliczności. Ściśle sformułowane twierdzenie, które mamy udowodnić, może pochodzić z dowolnego źródła, i z logicznego punktu widzenia nie ma znaczenia, co to za źródło. Jednak w wielu przypadkach, tak jak w rozpatrywanym tu dokładnie przypadku, źródłem tym jest indukcja; twierdzenie jest znalezione eksperymentalnie i dowód okazuje się matematycznym uzupełnieniem indukcji. To wyjaśnia nazwę indukcji matematycznej.

7. Jest jeszcze jedna sprawa, dość subtelna, ale ważna dla każdego, kto chce sam znajdywać dowody. Poprzednio znaleźliśmy dwa różne twierdzenia przez obserwację i indukcję, jedno po drugim; pierwsze w punkcie 1, drugie w punkcie 2. Drugie twierdzenie było bardziej dokładne niż pierwsze.

Dla drugiego twierdzenia znaleźliśmy sposób sprawdzenia przejścia od n do $n+1$ i tym samym znaleźliśmy dowód przez „indukcję matematyczną". Gdybyśmy mieli do czynienia z pierwszym twierdzeniem, zaniedbując precyzję nadaną mu przez drugie twierdzenie, to wątpliwe, czy udałoby się nam znaleźć taki dowód. Istotnie, pierwsze twierdzenie jest mniej dokładne, wyrażone mniej „explicite", nie tak „namacalnie" i mniej nadające się do sprawdzania niż drugie. Przejście od pierwszego twierdzenia do drugiego, od mniej dokładnego do bardziej dokładnego sformułowania było ważnym krokiem przygotowującym ostateczny dowód.

Jest to w pewnym sensie paradoksalne. Drugie twierdzenie jest mocniejsze; z niego natychmiast wynika pierwsze twierdzenie, podczas gdy pierwsze, nieco „mgliste" twierdzenie bynajmniej nie pociąga za sobą bardziej precyzyjnego, drugiego twierdzenia. Tak więc łatwiej jest dowieść mocniejszego twierdzenia niż słabszego; jest to PARADOKS ODKRYWCY.

Inteligentny czytelnik książek matematycznych pragnie dwóch rzeczy:

Po pierwsze, wiedzieć, że dany krok rozumowania jest poprawny.

Po drugie, widzieć cel tego kroku.

Inteligentny słuchacz wykładów matematyki pragnie tego samego. Jeżeli nie może on ujrzeć, że dany krok rozumowania jest poprawny, a nawet podejrzewa, że jest on być może niepoprawny, to może protestować i zadać wykładowcy pytanie. Jeżeli nie może zauważyć żadnego celu w danym kroku rozumowania ani nie widzi żadnego powodu, dla którego ten krok się przeprowadza, to zazwyczaj nie umie nawet sformułować jasno swego zastrzeżenia, nie protestuje, jest po prostu przerażony i znudzony oraz gubi wątek rozumowania.

Inteligentny nauczyciel i inteligentny autor podręczników powinien o tym pamiętać. Niewątpliwie należy pisać i mówić poprawnie; ale to nie wystarcza. Wywód poprawnie przedstawiony w książce czy na tablicy może być niedostępny i niepouczający, jeżeli cel poszczególnych kroków jest niezrozumiały, jeżeli czytelnik czy słuchacz nie może zrozumieć, jak w ogóle było możliwe wpaść na takie rozumowanie, jeżeli nie jest w stanie z przeprowadzonego wywodu wyciągnąć żadnych wniosków co do tego, jak mógłby on sam znaleźć takie rozumowanie.

Pytania i wskazówki naszej listy mogą pomóc autorowi i nauczycielowi podkreślić cel i motywy jego rozumowania. Szczególnie użyteczne jest tu pytanie: CZY SKORZYSTAŁEŚ ZE WSZYSTKICH DANYCH? Zadając to pytanie autor i nauczyciel wskazują na powód, dla którego rozpatrują daną, do tej pory jeszcze nie wykorzystaną. Czytelnik czy słuchacz może korzystać z tego samego pytania, aby zrozumieć powód, dla którego autor czy nauczyciel rozpatruje jakiś element, i może czuć, że zadając to pytanie mógłby sam odkryć ten krok rozumowania.

Inteligentny uczeń często sam sobie zadaje pytania podobne do pytań naszej listy. Możliwe, że on sam odkrył te pytania; możliwe, że słysząc takie pytanie od kogoś, sam doszedł do tego, jak we właściwy sposób należy z niego korzystać. Być może nie zdaje sobie nawet sprawy z tego, że w kółko powtarza to samo stereotypowe pytanie. Możliwe też, że szczególnie lubi to pytanie; wie, że to pytanie jest częścią jego właściwie przeprowadzonego rozumowania w określonej fazie pracy i uzyskuje właściwe podejście do zadania stawiając sobie właściwe pytanie.

Inteligentny uczeń może zauważyć, że pytania i wskazówki naszej listy są użyteczne. Może zupełnie dobrze zrozumieć wyjaśnienia i przykłady ilustrujące określone pytanie, może przewidywać właściwy sposób korzystania z pytania; jego zrozumienie nie będzie jednak rzeczywiście pełne, dopóki nie natknie się w swej własnej pracy na postępowanie, które dane pytanie chce wywołać, i przekonany o jego użyteczności samodzielnie nie odkryje właściwego sposobu korzystania z tego pytania.

Inteligentny uczeń powinien być przygotowany na stawianie sobie wszystkich pytań naszej listy, ale nie powinien stawiać żadnego pytania, jeżeli nie skłoni go do tego staranne rozpatrzenie zadania i jego własna bezstronna opinia. Rzeczywiście, musi on sam osądzić, czy obecna sytuacja jest dostatecznie podobna do pewnej innej sytuacji, w której widział, że zastosowanie tego pytania było uwieńczone sukcesem.

Inteligentny uczeń przede wszystkim stara się zrozumieć zadanie tak dobrze i głęboko, jak tylko może. Jednak samo zrozumienie nie wystarcza; musi skoncentrować się na tym zadaniu, musi rzeczywiście chcieć je rozwiązać. Jeżeli nie może wykrzesać w sobie rzeczywistego pragnienia rozwiązania zadania, to zrobi najlepiej, gdy zaniecha rozwiązania go. Cały sekret prawdziwego sukcesu polega na tym, aby poświęcić się bez reszty naszemu zadaniu.

Jeżeli nie możesz rozwiązać danego zadania, nie pozwól, aby to niepowodzenie martwiło cię za bardzo, ale spróbuj znaleźć pocieszenie w łatwiejszym, częściowym sukcesie: *spróbuj najpierw rozwiązać jakieś zadanie pokrewne;* może ci to dodać odwagi do ponownego zaatakowania twego pierwotnego zadania. Nie zapominaj, że człowiek jako istota myśląca obchodzi przeszkodę, której nie może bezpośrednio pokonać, wymyśla odpowiednie zadanie pomocnicze, gdy nie może rozwiązać danego zadania.

Czy nie mógłbyś wymyślić jakiegoś bardziej dostępnego zadania pokrewnego? Powinieneś teraz wymyślić, a nie tylko przypomnieć sobie jakieś zadanie pokrewne; zakładam, ma się rozumieć, że próbowałeś już skorzystać z pytania: *Czy znasz jakieś pokrewne zadanie?*

Pozostałe pytania zawarte w tej części naszej listy, która rozpoczyna się od słów stanowiących tytuł tego artykułu, mają na celu to samo: ZMIANĘ ZADANIA. Są różne sposoby, którymi można osiągnąć ten cel: UOGÓLNIENIE, SPECJALIZACJA, ANALOGIA itd.; są to różne sposoby ROZKŁADANIA I SKŁADANIA NA NOWO.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716), wielki matematyk i filozof, miał zamiar napisać dzieło *Sztuka dokonywania odkryć*, ale nigdy nie wykonał swego zamierzenia. Jednakże liczne urywki rozsiane w jego pracach świadczą o tym, że miał on ciekawe zapatrywania na ten temat, którego ważność często podkreślał. Pisał on: „Nie ma nic ważniejszego niż ujrzeć źródła odkrycia, które moim zdaniem są bardziej ciekawe niż samo odkrycie".

Lemat, czyli „twierdzenie pomocnicze". Słowo to pochodzi z języka greckiego; bardziej dosłownym tłumaczeniem byłoby „to, co się zakłada".

Przypuśćmy, że staramy się dowieść twierdzenia *A*. W trakcie dowodzenia przyszło nam na myśl, aby sformułować inne twierdzenie, powiedzmy *B*, takie, że gdyby ono było prawdziwe, to korzystając z niego moglibyśmy dowieść twierdzenia *A*. Zakładamy chwilowo, że twierdzenie *B* jest prawdziwe, odkładając jego dowód na później i kontynuujemy dowód twierdzenia *A*. Twierdzenie *B*, którego prawdziwość założyliśmy, jest twierdzeniem pomocniczym dla danego twierdzenia *A*.

To wyjaśnia nam w sposób typowy obecne znaczenie słowa „lemat".

Mądrość przysłów. Rozwiązywanie zadań jest podstawową czynnością ludzkiej aktywności. Istotnie, większa część naszego świadomego myślenia związana jest z jakimś zadaniem czy problemem. Jeżeli nie oddajemy się czczym rozmyślaniom albo śnieniu na jawie, to nasze myśli dążą do jakiegoś celu; staramy się zawsze rozwiązać jakieś zadanie.

Jedni ludzie odnoszą większe, inni mniejsze sukcesy w osiąganiu swoich celów i rozwiązywaniu swoich zadań. Nie trudno to zauważyć i takie różnice w sukcesach bywają omawiane i komentowane przez bliźnich. Wydaje się, że kwintesencja tych komentarzy zachowana jest w pewnych przysłowiach. W każdym razie istnieje wiele przysłów zdumiewająco dobrze charakteryzujących typowe postępowanie przy rozwiązywaniu zadań, zawierających istotę zdrowego rozsądku, powszechnie stosowane fortele i powszechnie popełniane błędy. W przysłowiach jest wiele bystrych i subtelnych uwag, ale — rzecz prosta — nie stanowią one systemu naukowego wolnego od niezgodności i niejasności. Przeciwnie, do wielu przysłów można znaleźć inne, dające wręcz przeciwną wskazówkę. Prócz tego przysłowia można bardzo różnie interpretować. Byłoby nierozsądnie traktować przysłowia jako autorytatywne źródło mądrości dającej się zawsze i wszędzie stosować. Szkoda byłoby jednak nie skorzystać z poglądowych opisów heurystycznego postępowania, jakie są zawarte w przysłowiach.

Zebranie i pogrupowanie przysłów dotyczących układania planu, poszukiwania sposobów, wyboru linii działania, krótko mówiąc: przysłów dotyczących rozwiązywania zadań — mogłoby być interesującym zadaniem. W niniejszej książce rozporządzamy tylko małą cząstką miejsca potrzebnego do wykonania tego zadania; dlatego też najlepsze, co możemy zrobić, jest przytoczyć kilka przysłów ilustrujących główne fazy rozwiązania, uwypuklone w naszej liście i omawiane w ustępach **6-14** i gdzie indziej. Przytoczone przysłowia złożone są kursywą.

1. Pierwszą rzeczą, jaką musimy zrobić rozwiązując zadanie, jest zrozumieć je: *Kto źle rozumie, źle odpowiada.* Musimy jasno widzieć cel, do którego zmierzamy: *Pomyśl o końcu zanim rozpoczniesz.* Jest to rada stara jak świat; łacińskie powiedzenie mówi: *respice finem.* Niestety, nie każdy zwraca uwagę na tę dobrą radę i ludzie często zaczynają rozmyślać, mówić, a nawet konkretnie działać nie zrozumiawszy należycie, do czego ich praca powinna zmierzać. *Głupi troszczy się o początek, mądry o koniec.* Jeżeli nie zdajemy sobie dokładnie sprawy z celu, do którego zmierzamy, to łatwo możemy oddalić się od naszego zadania i zaniechać jego rozwiązywania. *Mądry zaczyna od końca, głupi kończy na początku.*

Jednakże nie wystarczy zrozumieć zadanie; trzeba także pragnąć jego rozwiązania. Nie mamy żadnej szansy rozwiązania trudnego zadania, jezeli nie mamy szczerej chęci rozwiązać go; mając zaś taką szczerą chęć mamy też i szansę rozwiązania. *Tam, gdzie jest chęć, jest też i sposób*(¹).

2. Ułożenie planu, uchwycenie koncepcji odpowiedniego działania jest głównym osiągnięciem w rozwiązywaniu zadania.

Dobra myśl — to duże szczęście, natchnienie — to dar bogów; powinniśmy sobie na to zasłużyć: *Pilność jest matką szczęścia. Wytrwałość zabija zwierzynę. Dębu nie ścina się*

(¹) Por. polskie: Dla chcącego nie ma nic trudnego (*przyp. tłum*).

jednym uderzeniem. Jeżeli na razie nie udało ci się, to spróbuj od nowa. Jednakże nie wystarczy próbować w kółko w ten sam sposób. Należy próbować różnych sposobów, zmieniać nasze próby. *Próbuj wszystkich kluczy pęku. Strzały robi się z wszystkich rodzajów drzewa.* Musimy dostosować nasze próby do istniejących okoliczności. *Żagle trzeba ustawiać zgodnie z wiatrem. Krój swoje palto w zależności od sukna*(¹). *Musimy tak postępować, jak możemy, jeśli nie jesteśmy w stanie postępować tak, jak byśmy chcieli*(²). Jeśli wam się nie udało, musimy próbować innych środków. *Mądry zmienia swoje zamiary, głupi — nigdy.* Od samego początku powinniśmy się liczyć nawet z tym, że nasz schemat może zawieść, i mieć w rezerwie drugi. *Miej dwie cięciwy do swego łuku.* Możemy oczywiście przesadzić z tym przechodzeniem od jednego schematu do drugiego, tracąc niepotrzebnie czas. Możemy wówczas usłyszeć ironiczny komentarz: *Rób i przerabiaj, dzień jest dostatecznie długi.* Prawdopodobnie mniej będziemy błądzić, jeżeli nie stracimy z oczu naszego celu. *Celem rybołówstwa jest nie zarzucanie wędki, ale łapanie ryb.*

Często dokonujemy dużego wysiłku, aby wydobyć z naszej pamięci coś użytecznego, a gdy pojawia się myśl, która mogłaby nam pomóc, nie doceniamy jej, gdyż wygląda ona niepokaźnie. Ekspert nie ma, być może, więcej pomysłów niż człowiek niedoświadczony, ale może je lepiej ocenić i lepiej wykorzystać. *Mądry człowiek tworzy sobie więcej okazji niż ich znajduje. Mądry człowiek tworzy narzędzia z wszystkiego, co mu wejdzie pod rękę. Mądry człowiek*

(¹) Por. polskie: Tak krawiec kraje, jak mu materiału staje (*przyp. tłum.*).

(²) Por. polskie: Jak się nie ma, co się lubi, to się lubi co się ma (*przyp. tłum.*).

przekształca możliwość w powodzenie. Możliwe, że przewaga eksperta polega na tym, że ustawicznie poluje na okazje. *Miej oko na główną szansę.*

3. Powinniśmy rozpocząć wykonywanie planu w odpowiednim momencie, gdy plan dojrzeje, ale nie wcześniej. Nie powinniśmy działać zbyt pochopnie. *Spójrz zanim skoczysz. Spróbuj zanim uwierzysz. Rozumna zwłoka czyni drogę bezpieczną.* Jednakże, z drugiej strony, nie powinniśmy wahać się zbyt długo. *Jeżeli chcesz żeglować bezpiecznie, nigdy nie rozwijaj żagli. Rób to, co ci się wydaje najrozsądniejsze, i spodziewaj się najlepszego. Użyj swego sposobu, a Bóg udzieli ci swego błogosławieństwa.*

Musimy sami osądzić, czy nadszedł odpowiedni moment, aby zacząć wykonywać nasz plan. A oto przestroga, która wskazuje na najbardziej powszechne błędy i pomyłki naszego sądu: *Szybko wierzymy w to, czego pragniemy.*

Nasz plan daje zazwyczaj jedynie ogólny szkic postępowania. Musimy przekonać się, że szczegóły pasują do tego szkicu, a więc musimy starannie zbadać wszystkie szczegóły, jeden po drugim. *Na drabinę wchodzi się szczebel po szczeblu. Powolutku aż do skutku. Zrób to etapami.*

Wykonując swój plan musimy baczyć, aby poszczególne kroki wystąpiły w odpowiedniej kolejności, która często jest wręcz przeciwna do kolejności ich odkrywania. *To, co głupi robi na końcu, mądry robi na początku.*

4. Rzut oka wstecz na kompletne rozwiązanie jest ważną i pouczającą fazą pracy. *Nie myśli dobrze ten, kto nie myśli na nowo. Drugie myśli są najlepsze.*

Badając na nowo nasze rozwiązanie możemy znaleźć dodatkowe potwierdzenie wyniku. Trzeba zwrócić uwagę początkującemu, że takie dodatkowe potwierdzenie jest cenne, że lepiej mieć dwa dowody niż jeden. *Bezpieczniej jest pływać z dwiema kotwicami.*

5. Oczywiście nie wyczerpaliśmy przysłów komentujących rozwiązywanie zadań. Wątpliwe jednak, czy liczne inne przysłowia, które można by tu przytoczyć, dostarczyłyby jakichś nowych tematów. Zawierałyby one raczej pewne modyfikacje tematów już poruszonych. Pewne bardziej schematyczne i bardziej subtelne aspekty procesu rozwiązywania zadań leżą raczej poza zakresem MĄDROŚCI PRZYSŁÓW.

Opisując bardziej systematycznie różne aspekty rozwiązywania zadań autor starał się od czasu do czasu naśladować szczególne właściwości przysłów, co wcale nie jest łatwe. Niżej podanych jest kilka „syntetycznych" przysłów, które opisują bardziej subtelne podejścia.

Cel wskazuje metodę.

Twoimi pięcioma najlepszymi przyjaciółmi są: Co, Dlaczego, Gdzie, Kiedy i Jak. Jeżeli potrzebujesz rady, zwróć się o nią do Co, zwróć się do Dlaczego, zwróć się do Gdzie, do Kiedy i do Jak, i do nikogo więcej.

Nie wierz niczemu, ale wątp tylko w to, co budzi wątpliwość.

Rozejrzyj się wokół, gdy znalazłeś pierwszego grzyba lub dokonałeś pierwszego odkrycia; one rosną gromadnie.

Modyfikacja zadania. Owad stara się wymknąć z pokoju przez szybę, próbuje tej beznadziejnej rzeczy wielokrotnie, a nie spróbuje tego zrobić przez następne okno, które jest otwarte i przez które dostał się do pokoju. Mysz postępuje bardziej inteligentnie: gdy złapie się w pułapkę, stara się prześliznąć między dwiema listwami, później między następnymi dwiema listwami, z kolei między jeszcze innymi; zmienia swoje próby, bada różne możliwości. Człowiek potrafi, a przynajmniej powinien potrafić, zmieniać swoje próby jeszcze bardziej inteligentnie, badać różne możliwości z większym zrozumieniem, uczyć się na własnych błędach. „Próbuj, próbuj jeszcze" — brzmi popularna rada. I to jest dobra rada. Owad, mysz i człowiek słuchają jej; i jeśli jedno z nich uzyskuje przy tym pomyślniejsze wyniki niż inne, to dlatego, że *modyfikuje swoje zadanie* bardziej inteligentnie.

1. Przy końcu naszej pracy, gdy już otrzymaliśmy rozwiązanie, nasze pojęcie o zadaniu jest pełniejsze i właściwsze niż na początku. Chcąc przejść od początkowego zrozumienia zadania do właściwszego, lepiej dostosowanego, próbujemy różnych punktów widzenia, patrzymy na zadanie z różnych stron.

Sukces w rozwiązywaniu zadania zależy od wyboru właściwego podejścia, od zaatakowania fortecy od jej najsłabszej strony. Aby przekonać się, jakie podejście jest właściwe, która strona jest najsłabsza, próbujemy różnych podejść i stron, *modyfikujemy zadanie*.

2. Modyfikacja zadania jest sprawą istotną. Fakt ten można wyjaśnić na różne sposoby. I tak z pewnego punktu widzenia postęp w rozwiązywaniu zadania przejawia się jako mobilizacja i organizacja uprzednio zdobytej wiedzy. Musimy wydobyć z pamięci i zastosować do naszego zadania pewne elementy. Otóż modyfikacja zadania pomaga w wydobyciu z pamięci takich elementów. Ale w jaki sposób?

Przypominamy sobie różne rzeczy przez pewnego rodzaju „działania przez styczność", zwane „kojarzeniem umysłu"; to co znajduje się w danej chwili w naszym umyśle wykazuje tendencję do przypomnienia wszystkiego, co miało z tym kiedykolwiek jakiś związek. (Nie ma tu miejsca ani potrzeby, aby przedstawić dokładniej teorię kojarzenia, czy omawiać jej ograniczoność.) *Modyfikując zadanie* wprowadzamy do rozważań nowe elementy,

a tym samym stwarzamy nowe kontakty, nowe możliwości nawiązania do elementów, które będą odpowiednie dla naszego zadania.

3. Nie można spodziewać się rozwiązania żadnego wartościowego zadania bez intensywnego skupienia się nad nim. Jednakże intensywna koncentracja naszej uwagi nad tą samą rzeczą łatwo nas męczy. Aby uwaga pozostawała skupiona, obiekt, ku któremu jest ona zwrócona, musi nieustannie zmieniać się.

Jeżeli nasza praca rozwija się pomyślnie, to zawsze jest się czym zająć, są nowe sprawy do zbadania, nasza uwaga jest zajęta, a zainteresowanie pracą żywe. Jeśli jednak nie robimy postępów, to nasza uwaga rozprasza się, zainteresowanie pracą maleje, zadanie zaczyna nas męczyć, myśli zaczynają błądzić i powstaje niebezpieczeństwo zupełnego zaniechania rozwiązywania zadania. Aby ustrzec się przed tym niebezpieczeństwem, musimy *postawić sobie jakieś nowe pytanie* dotyczące naszego zadania.

Nowe pytanie stwarza nowe, niewykorzystane jeszcze możliwości kontaktów z naszą poprzednią wiedzą, przywraca nadzieję na uchwycenie jakichś użytecznych kontaktów. Nowe pytanie *przywraca nasze zainteresowanie zadaniem* poprzez modyfikację zadania, pokazując pewne jego nowe aspekty.

4. *Przykład.* Znaleźć objętość ostrosłupa ściętego o podstawie kwadratowej, mając dany bok a podstawy dolnej, bok b podstawy górnej i wysokość h ostrosłupa ściętego.

To zadanie można dać do rozwiązania klasie obeznanej ze wzorami na objętość prostopadłościanów i ostrosłupów. Jeżeli uczniowie nie wpadają sami na żaden pomysł, nauczyciel może zacząć od *modyfikacji danych* zadania. Zaczynamy od ostrosłupa ściętego, dla którego $a > b$. Co się stanie, gdy b będzie rosło, aż stanie się równe a? Stożek ścięty stanie się prostopadłościanem, a jego objętość wyniesie a^2h. Co się stanie, gdy b będzie malało, aż przyjmie wartość 0? Stożek ścięty stanie się stożkiem pełnym, a jego objętość wyniesie $a^2h/3$.

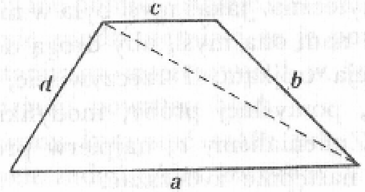
Ta modyfikacja danych przede wszystkim przyczyni się do zwiększenia zainteresowania zadaniem. Poza tym może zasugerować, aby w ten czy inny sposób skorzystać z przytoczonych wyników dotyczących prostopadłościanu i ostrosłupa. W każdym bądź razie znaleźliśmy określone własności wyniku końcowego: wzór końcowy musi być taki, że przy $b = a$ przyjmuje wartość a^2h, a przy $b = 0$ przyjmuje wartość $a^2h/3$. Korzystnie jest znać z góry pewne własności wyniku, do którego dążymy. Własności te mogą zasugerować nam coś godnego uwagi, a w każdym razie dają możność sprawdzenia końcowego wyniku, gdy go już znajdziemy. Mamy więc z góry odpowiedź na pytanie: CZY MOŻESZ SPRAWDZIĆ WYNIK? (Patrz ten artykuł, punkt 2).

5. *Przykład.* Zbudować trapez mając dane cztery jego boki a, b, c, d.

Niech a będzie podstawą dolną, a c — podstawą górną; boki a i c są równoległe, ale nie równe, boki b i d nie są równoległe. Jeżeli nie mamy żadnego innego pomysłu, to możemy zacząć od modyfikacji danych.

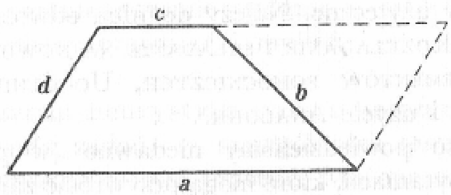
Zaczynamy od trapezu, dla którego $a > c$. Co się dzieje, gdy c maleje, aż wreszcie przyjmuje wartość 0? Trapez degeneruje się i staje się trójkątem. Ale trójkąt jest dobrze znaną i prostą figurą, którą umiemy zbudować przy różnych danych; mogłaby być jakaś korzyść z wprowadzenia tego trójkąta na rysunku. Robimy to rysując jedną tylko linię pomocniczą — przekątną trapezu (rysunek 18). Badając ten trójkąt dochodzimy jednak do wniosku, że

trudno z niego skorzystać; znamy dwa boki a i b, gdy tymczasem powinniśmy mieć trzy dane.



Rys. 18

Spróbujmy czego innego. Co się dzieje, gdy c rośnie, aż wreszcie stanie się równe a? Trapez staje się równoległobokiem. Czy moglibyśmy z niego jakoś skorzystać? Nie trzeba wielkiego badania, aby zwrócić uwagę na trójkąt, który dodaliśmy do pierwszego trapezu, gdy rysowaliśmy równoległobok (patrz rysunek 19). Ten trójkąt łatwo zbudować; mamy trzy dane: trzy jego boki b, d i $a - c$.



Rys. 19

Modyfikując początkowe zadanie (konstrukcja trapezu) doszliśmy do bardziej dla nas dostępnego zadania pomocniczego (konstrukcja trójkąta). Korzystając z wyniku zadania pomocniczego z łatwością rozwiązujemy nasze początkowe zadanie (musimy uzupełnić równoległobok).

Nasz przykład jest typowy. Typowe jest także to, że nasza pierwsza próba zawiodła. Jednakże przyjrzawszy się jej ponownie możemy zauważyć, że nie była ona tak zupełnie bezużyteczna. Jakaś myśl była w niej; w szczególności nasunęła nam ona myśl, aby drogą do naszego celu była konstrukcja trójkąta. I rzeczywiście, doszliśmy do naszej drugiej, pomyślnej próby, modyfikując pierwszą, niepomyślną. Zmienialiśmy c; najpierw próbowaliśmy je zmniejszać, a następnie zwiększać.

6. Tak jak w poprzednim przykładzie, często musimy próbować różnych modyfikacji zadania. Musimy je zmieniać, formułować na nowo, przekształcać i przekształcać, aż wreszcie znajdujemy coś użytecznego. Może nas też czegoś nauczyć własne niepowodzenie; w niepomyślnej próbie może tkwić jakiś dobry pomysł i *modyfikując* ją możemy dojść do próby pomyślniejszej. Bardzo często, tak jak w poprzednim przykładzie, po różnych próbach dochodzimy do bardziej dostępnego zadania pomocniczego.

7. Istnieją pewne sposoby modyfikacji zadania, które są z reguły użyteczne. Należy do nich odwołanie się do DEFINICJI, ROZKŁADANIE I SKŁADANIE NA NOWO, wprowadzanie ELEMENTÓW POMOCNICZYCH, UOGÓLNIENIE, SPECJALIZACJA i użycie ANALOGII.

8. To, co powiedzieliśmy niedawno (w punkcie 3) o nowych pytaniach, które mogą przywrócić zainteresowanie zadaniem, jest ważne dla właściwego korzystania z naszej listy.

Nauczyciel może korzystać z listy, aby pomóc uczniom. Jeżeli uczeń posuwa się naprzód w rozwiązywaniu zadania, to nie potrzebuje żadnej pomocy i nauczyciel nie powinien zadawać mu żadnych pytań, ale pozwolić mu pracować samemu, co jest oczywiście korzystniejsze dla rozwinięcia jego samodzielności. Gdy jednak uczeń tkwi w miejscu z rozwiązaniem, nauczyciel powinien oczywiście postarać się znaleźć odpowiednie pytanie czy wskazówkę, aby mu pomóc. Istnieje bowiem niebezpieczeństwo, że zadanie znudzi ucznia i że je porzuci; albo też zadanie przestanie go interesować i w wyniku zobojętnienia popełni jakiś poważny błąd.

Z listy możemy korzystać także przy rozwiązywaniu swoich własnych zadań. Aby korzystać z niej w sposób właściwy, postępujemy tak jak poprzednio. Gdy robimy dostateczne postępy, gdy nowe uwagi wyłaniają się samorzutnie, byłoby niemądrze hamować nasz spontaniczny postęp zbytecznymi pytaniami. Gdy jednak nasz postęp uległ zahamowaniu, gdy nic nowego nie przychodzi nam na myśl, istnieje niebezpieczeństwo, że zadanie znudzi nas. Wtedy należy pomyśleć o pewnych ogólnych ideach, które mogłyby być pomocne, o pewnych pytaniach czy wskazówkach listy, które by odpowiadały istniejącej sytuacji. Pożądane jest każde pytanie, które ma szanse wskazać nam jakiś nowy aspekt zadania; może nam ono przywrócić zainteresowanie zadaniem, spowodować, że nie przestaniemy pracować i myśleć.

Nowoczesna heurystyka stara się zrozumieć proces rozwiązywania zadań, w szczególności *operacje myślowe najczęściej użyteczne* w tym procesie. Ma ona różne źródła informacji i żadnego z nich nie można lekceważyć. Przy poważnym badaniu heurystyki należy brać pod uwagę tak logiczne, jak i psychologiczne tło. Nie można lekceważyć tego, co powiedzieli w tym względzie tacy starzy autorzy jak Pappus, Descartes, Leibniz i Bolzano. W żadnym jednak razie nie wolno lekceważyć bezstronnego doświadczenia. Podstawą, na której buduje się heurystykę, musi być doświadczenie w rozwiązywaniu zadań i doświadczenie w obserwowaniu innych ludzi rozwiązujących zadania. Nie można przy tym lekceważyć żadnego rodzaju zadań. Należy wyszukiwać wspólne cechy sposobów traktowania wszystkich rodzajów zadań; naszym celem powinny być ogólne rysy charakterystyczne, niezależne od rodzaju i tematyki zadania. Badanie heurystyki ma cele „praktyczne": lepsze zrozumienie operacji myślowych najczęściej użytecznych przy rozwiązywaniu zadań może mieć dodatni wpływ na nauczanie, w szczególności na nauczanie matematyki.

Niniejsza książka jest pierwszą próbą zrealizowania tego programu. Pokażemy, w jaki sposób różne artykuły naszego *Słownika* pasują do tego programu.

1. Nasza lista jest w zasadzie listą operacji myślowych najczęściej użytecznych przy rozwiązywaniu zadań; pytania i wskazówki tej listy naprowadzają na te operacje. Niektóre z tych operacji opisujemy ponownie w części drugiej książki, a niektóre omawiamy bardziej dokładnie i ilustrujemy w części pierwszej.

Po dodatkowe informacje dotyczące poszczególnych pytań i wskazówek listy odsyłamy czytelnika do tych piętnastu artykułów *Słownika*, których tytułami są pierwsze zadania piętnastu ustępów listy: Co JEST NIEWIADOME? CZY WARUNEK MOŻNA SPEŁNIĆ? ZRÓB RYSUNEK ... CZY MOŻESZ WYKORZYSTAĆ WYNIK? Czytelnik pragnący informacji dotyczących jakiegoś szczególnego pytania czy wskazówki listy powinien spojrzeć na pierwsze słowa ustępu, w którym to pytanie czy wskazówka znajduje się, a następnie zajrzeć do artykułu *Słownika*, którego tytułem są wspomniane pierwsze słowa. Na przykład wskazówka *„Wróć do definicji"* znajduje się w ustępie naszej listy, którego pierwsze zdanie brzmi: CZY NIE MÓGŁBYŚ POSTAWIĆ ZADANIA NA NOWO, W INNY SPOSÓB? W artykule pod tym tytułem czytelnik znajdzie odsyłacz do DEFINICJI. W artykule pt. DEFINICJA wskazówka, o którą czytelnikowi chodzi, jest wyjaśniona i zilustrowana.

2. Proces rozwiązywania zadań jest procesem złożonym, mającym kilka różnych aspektów. W dwunastu głównych artykułach niniejszego *Słownika* omawiamy niektóre z tych aspektów dosyć szczegółowo; tytuły tych artykułów podamy niżej.

Gdy intensywnie pracujemy, postęp naszej pracy działa na nas bezpośrednio; cieszymy się, gdy postęp jest szybki, jesteśmy przygnębieni, gdy jest powolny. Co przy rozwiązywaniu zadań jest istotne dla POSTĘPU I SUKCESU? Na artykuł omawiający tę sprawę często powołujemy się w innych częściach *Słownika*. Należy go przeczytać dość wcześnie.

Starając się rozwiązać zadanie rozpatrujemy kolejno różne jego aspekty, ciągle rozważamy je w naszym umyśle na różne strony; MODYFIKACJA ZADANIA jest w naszej pracy bardzo istotna. Możemy modyfikować zadanie poprzez ROZKŁADANIE I SKŁADANIE NA NOWO jego elementów, poprzez odwoływanie się do DEFINICJI pewnych jego terminów albo też możemy wykorzystać tak bogate źródła jak UOGÓLNIENIE, SPECJALIZACJA i ANALOGIA. Modyfikacja zadania może nas doprowadzić do ELEMENTÓW POMOCNICZYCH albo do odkrycia bardziej dostępnego ZADANIA POMOCNICZEGO.

Należy starannie rozróżniać dwa rodzaje zadań: ZADANIA TYPU „ZNALEŹĆ" i ZADANIA TYPU „UDOWODNIĆ". Nasza lista jest specjalnie dostosowana do zadań typu „znaleźć". Aby móc ją stosować także do zadań typu „udowodnić", należy ją zrewidować i zmienić niektóre z jej pytań i wskazówek.

W zadaniach wszelkiego rodzaju, a szczególnie w trudniejszych zadaniach matematycznych, dużą a często nieodzowną pomocą są odpowiednie OZNACZENIA i FIGURY GEOMETRYCZNE.

4. Proces rozwiązywania zadań ma wiele aspektów, ale niektórych z nich w ogóle nie rozpatrywaliśmy w tej książce, a inne tylko bardzo krótko. Wydaje mi się w zupełności uzasadnione, aby w pierwszym, krótkim wykładzie nie poruszać spraw, które mogłyby się okazać zbyt subtelne, zbyt specjalne albo zbyt kontrowersyjne.

Prowizoryczne, jedynie prawdopodobne ROZUMOWANIE HEURYSTYCZNE jest ważne przy znajdowaniu rozwiązania, ale nie powinieneś go uważać za dowód; musisz zgadywać i domyślać się, ale także zbadać swój domysł. Naturę rozumowania heurystycznego omawiamy w OZNAKACH POSTĘPU, ale można by o tym powiedzieć wiele więcej.

Rozpatrzenie pewnych wzorów logicznego myślenia jest dla heurystyki ważne, ale nie wydawało mi się wskazane zamieszczać tu jakiś specjalny artykuł poświęcony tej sprawie. Są tylko dwa artykuły poświęcone przede wszystkim aspektom psychologicznym: WYTRWAŁOŚĆ, NADZIEJA, SUKCES i PODŚWIADOMA PRACA. Znajduje się także marginesowa uwaga o psychologii zwierząt; patrz PRACA OD KOŃCA DO POCZĄTKU.

Podkreślamy, że wszelkiego rodzaju zadania, w szczególności ZADANIA PRAKTYCZNE, a nawet ZAGADKI znajdują się w polu działania heurystyki. Podkreślamy także, że poszukiwanie niezawodnych REGUŁ DOKONYWANIA ODKRYĆ jest zadaniem niepoważnym. Heurystyka omawia zachowanie się człowieka stojącego w obliczu jakiegoś zadania; podpatrywanie ludzi stojących wobec jakichś problemów było prawdopodobnie w zwyczaju już od samego początku istnienia społeczeństwa ludzkiego i wydaje się, że kwintesencja tego rodzaju dawnych obserwacji zachowała się w MĄDROŚCI PRZYSŁÓW.

4. W *Słowniku* zawartych jest kilka artykułów dotyczących bardziej ogólnych aspektów. Artykuły te, albo pewne ich części, mogą specjalnie zainteresować uczniów lub nauczycieli.

Kilka artykułów omawia metodyczne zagadnienia ważne w matematyce elementarnej. Są to: PAPPUS, PRACA OD KOŃCA DO POCZĄTKU (cytowane już w punkcie 3), REDUCTIO AD ABSURDUM I DOWÓD NIE WPROST, INDUKCJA I INDUKCJA MATEMATYCZNA, UKŁADANIE RÓWNAŃ, SPRAWDZANIE ZA POMOCĄ WYMIARÓW i PO CO DOWODZIĆ? Niektóre artykuły, jak TYPOWE ZADANIA i DIAGNOZA skierowane są głównie do nauczycieli, inne, jak INTELIGENTNY UCZEŃ, INTELIGENTNY CZYTELNIK i PRZYSZŁY MATEMATYK — do bardziej niż przeciętnie ambitnych uczniów.

Należy zauważyć, że dialogi między nauczycielem i jego uczniami podane w ustępach **8**, **10**, **18**, **19**, **20** i w różnych artykułach *Słownika* mogą służyć za model nie tylko nauczycielowi pragnącemu wskazać swej klasie drogę do rozwiązania, ale także osobie, która sama rozwiązuje zadanie. Opisanie myślenia jako „rozmowy w myśli", jako swego rodzaju dialogu osoby myślącej ze samą sobą nie jest czymś bezsensownym. Wspomniane wyżej dialogi między nauczycielem i uczniem pokazują nam, w jaki sposób uzyskuje się postęp w rozwiązywaniu zadania; osoba rozwiązująca zadanie, rozmawiając sama ze sobą, może dokonać postępu w ten sam sposób.

5. Nie mamy zamiaru podawać tu tytułów wszystkich pozostałych artykułów; wspomnimy jedynie o kilku grupach artykułów.

Niektóre artykuły zawierają uwagi historyczne dotyczące naszego przedmiotu: DESCARTES, LEIBNIZ, BOLZANO,

HEURYSTYKA, TERMINY STARE I NOWE, PAPPUS (ten ostatni artykuł zacytowaliśmy już w punkcie 4).

Kilka artykułów wyjaśnia terminy specjalne: WARUNEK, WNIOSEK, LEMAT.

Niektóre artykuły zawierają jedynie odsyłacze do innych artykułów (w spisie rzeczy oznaczone są one gwiazdką *).

6. Celem heurystyki jest, ogólnie mówiąc, badanie procesów, które stosują się do wszelkiego rodzaju zadań, niezależnie od ich tematyki. Jednakże w niniejszym wykładzie podajemy jako przykłady prawie wyłącznie zadania z matematyki elementarnej. Należy zwrócić uwagę, że jest to pewne ograniczenie, ale mamy nadzieję, że nie przyniesie ono wielkiego uszczerbku naszym dążeniom. Istotnie, zadania elementarnej matematyki są dostatecznie różnorodne, a badanie ich rozwiązań jest szczególnie dostępne i interesujące. Prócz tego nie zapomnieliśmy zupełnie o zadaniach niematematycznych, aczkolwiek przytaczaliśmy je jako przykłady rzadko. Nigdy nie przytaczaliśmy poważniejszych zadań matematycznych, ale to właśnie one stanowią rzeczywiste podłoże niniejszego wykładu heurystyki. Matematyk-specjalista, którego ten wykład nieco zainteresuje, z łatwością dorzuci pochodzące z jego własnego doświadczenia przykłady, aby wyjaśnić sobie sprawy zilustrowane tu na przykładach elementarnych.

7. Autor niniejszej książki pragnie wyrazić swoją wdzięczność i uznanie kilku współczesnym autorom nie przytoczonym w artykule o HEURYSTYCE. Są to: fizyk i filozof Ernst Mach, matematyk Jacques Hadamard oraz psychologowie William James i Wolfgang Köhier. Autor pragnie także wspomnieć psychologa K. Dunckera i matematyka F. Kraussa, których praca (opublikowana wówczas, gdy badania autora były już dość zaawansowane i częściowo opublikowane) zawiera pewne tezy będące odpowiednikiem tez podanych w tej książce.

Oto rozwiązane już przedtem zadanie pokrewne twemu zadaniu. To jest dobra wiadomość; zadanie o znanym rozwiązaniu i związane z naszym obecnym zadaniem jest z pewnością mile widziane. Jest ono jeszcze milej widziane, jeżeli związek ten jest bliski, a rozwiązanie proste. Jest duża szansa, że takie zadanie przyda nam się przy rozwiązywaniu naszego zadania.

Omawiana tu sytuacja jest typowa i ważna. Aby jasno zdać sobie z niej sprawę, porównajmy ją z sytuacją, w jakiej się znajdujemy, gdy rozwiązujemy jakieś zadanie pomocnicze. W obu przypadkach naszym celem jest rozwiązanie jakiegoś zadania A, a my wprowadzamy do rozważań inne zadanie B w nadziei, że uda nam się w jakiś sposób z niego skorzystać przy rozwiązywaniu danego zadania A. Różnica między obu przypadkami polega na naszym stosunku do zadania B. W jednym przypadku udało nam się przypomnieć dawne zadanie B o znanym rozwiązaniu; nie wiemy jednak jeszcze, jak z niego skorzystać. W drugim przypadku udało nam się wymyślić nowe zadanie B; wiemy (albo przynajmniej przewidujemy), jak skorzystać z zadania B, ale jeszcze nie wiemy, jak je rozwiązać. Cała różnica między obu sytuacjami polega właśnie na trudnościach dotyczących zadania B. Gdy te trudności pokonamy, możemy użyć zadania B w ten sam sposób w obu przypadkach; możemy użyć wyniku albo metody (jak wyjaśniono w artykule ZADANIE POMOCNICZE, punkt 3), albo, jeśli mamy szczęście, i wyniku, i metody. W sytuacji rozpatrywanej tu (którą krótko charakteryzuje tytuł niniejszego artykułu) znamy dobrze rozwiązanie zadania *B*, ale nie wiemy jeszcze, jak z niego skorzystać. Dlatego też pytamy: *Czy nie mógłbyś z niego skorzystać? Czy nie mógłbyś skorzystać z jego wyniku? Czy nie mógłbyś skorzystać z zastosowanej w nim metody?*

Zamiar skorzystania z poprzednio rozwiązanego zadania wpływa na nasze podejście do obecnego zadania. Starając się związać ze sobą oba zadania, nowe i stare, wprowadzamy do nowego zadania elementy odpowiadające pewnym ważnym elementom starego zadania. Przypuśćmy na przykład, że nasze zadanie polega na opisaniu kuli na danym czworościanie. Jest to zadanie geometrii przestrzennej. Może nam się przypomnieć, że rozwiązaliśmy przedtem analogiczne zadanie geometrii płaskiej opisania okręgu na danym trójkącie. Dalej przypomina nam się, że w starym zadaniu geometrii płaskiej korzystaliśmy z symetralnych boków trójkąta, tzn. z prostych prostopadłych do boków i połowiących je. Jest rzeczą rozsądną spróbować wprowadzić coś analogicznego do naszego obecnego zadania. Tak więc możemy wprowadzić do rozważań w naszym obecnym zadaniu, jako odpowiednie elementy pomocnicze, płaszczyzny prostopadłe do krawędzi czworościanu i połowiące je. Wprowadzając ten pomysł w życie możemy łatwo dojść do rozwiązania naszego zadania geometrii przestrzennej naśladując analogiczne rozwiązanie zadania płaskiego.

Omówiony przykład jest typowy. Rozpatrzenie uprzednio rozwiązanego zadania pokrewnego naszemu doprowadza nas do wprowadzenia elementów pomocniczych; wprowadzanie odpowiednich elementów pomocniczych umożliwia wykorzystanie w pełni zadania pokrewnego do rozwiązania naszego obecnego zadania. Zmierzamy do tego, gdy myśląc o możliwości skorzystania z uprzednio rozwiązanego zadania pokrewnego pytamy: *Czy nie trzeba wprowadzić jakiegoś pomocniczego elementu, aby móc z tego zadania skorzystać?*

Oto udowodnione już poprzednio twierdzenie pokrewne twemu. Ta wersja omawianego tu zadania jest zilustrowana w ustępie **19**.

Oznaczenia. Jeżeli chcesz zdać sobie sprawę z korzyści płynących z odpowiednio wybranych i dobrze znanych oznaczeń, spróbuj dodać kilka niezbyt małych liczb nie używając dobrze znanych cyfr arabskich; możesz natomiast, jeżeli chcesz, skorzystać z cyfr rzymskich. Dodaj na przykład liczby MMMXC, MDXCVI, MDCXLVI, MDCCLXXXI, MDCCCLXXXVII.

Trudno przecenić ważność oznaczeń matematycznych. Współczesny dziesiętny system liczenia ma wielką przewagę nad starożytnym, który nie miał takiego wygodnego sposobu pisania liczb. Przeciętny współczesny student, który jest obeznany z powszechnie przyjętymi oznaczeniami algebry, geometrii analitycznej i rachunku różniczkowego i całkowego, ma wielką przewagę nad starożytnym matematykiem greckim przy rozwiązywaniu zadań dotyczących powierzchni i objętości, na których ćwiczył się geniusz Archimedesa.

1. Mówienie i myślenie są ze sobą ściśle związane; używanie słów pomaga umysłowi. Niektórzy filozofowie i filologowie idą nawet nieco dalej i twierdzą, że używanie słów jest niezbędne do myślenia.

Jednakże wydaje się, że oni nieco przesadzają. Jeżeli mamy nieco doświadczenia w poważnych badaniach matematycznych, to wiemy, że można dokonać dość poważnej pracy umysłowej nie używając słów, po prostu patrząc na figury geometryczne lub manipulując symbolami algebraicznymi. Figury i symbole są ściśle związane z myśleniem matematycznym, ich użycie pomaga umysłowi. Moglibyśmy ulepszyć nieco wąskie twierdzenie filozofów i filologów stawiając słowa na równi z symbolami innego rodzaju i mówiąc, że *używanie symboli jest niezbędne do myślenia.*

W każdym bądź razie używanie symboli matematycznych jest podobne do używania słów. Oznaczenia matematyczne są pewnego rodzaju językiem, *une langue bien faite,* językiem dobrze dostosowanym do swego przeznaczenia, zwięzłym i precyzyjnym, z regułami, które — w przeciwieństwie do reguł zwykłej gramatyki — nie znoszą żadnych wyjątków.

Jeżeli przyjmiemy ten punkt widzenia, to UKŁADANIE RÓWNAŃ okaże się pewnego rodzaju tłumaczeniem, tłumaczeniem ze zwykłego języka na język symboli matematycznych.

2. Niektóre symbole matematyczne, jak $+$, $-$, $=$ i inne, mają ustalone, tradycyjne znaczenie, ale inne symbole, jak małe i wielkie litery łacińskiego i greckiego alfabetu, używane są w różnych zadaniach w różnych znaczeniach. Gdy spotkamy się z nowym zadaniem, musimy wybrać pewne symbole, musimy *wprowadzić odpowiednie oznaczenia.* W zwykłym języku mamy coś analogicznego. Wiele słów jest używanych w różnych znaczeniach, w różnych kontekstach; gdy zależy nam na precyzji, musimy starannie dobierać słowa.

Ważnym krokiem w rozwiązywaniu zadania jest wybór oznaczeń. Należy go dokonać starannie. Czas, jaki tracimy na wybór oznaczeń, może nam być zwrócony z nawiązką przez czas, jaki zaoszczędzimy unikając zamieszania i niepewności. Poza tym dobierając starannie oznaczenia musimy wnikliwie myśleć o elementach zadania, które należy oznaczyć. Tak więc wybranie odpowiednich oznaczeń może pomóc w zrozumieniu zadania.

3. Dobre oznaczenia powinny być niedwuznaczne, treściwe i łatwe do zapamiętania; powinny unikać szkodliwych znaczeń wtórnych, a wykorzystywać użyteczne znaczenia wtórne; porządek i związki między symbolami powinny sugerować porządek i związki między obiektami.

4. Symbole powinny być przede wszystkim *niedwuznaczne.* Jest niedopuszczalne, aby ten sam symbol oznaczał dwa różne obiekty w tym samym zadaniu. Jeżeli rozwiązując jakieś zadanie oznaczysz pewną wielkość przez a, to powinieneś unikać oznaczania przez a czegokolwiek innego, co ma jakiś związek z tym zadaniem. Możesz oczywiście w innym zadaniu użyć litery a w innym znaczeniu.

Chociaż jest zabronione używać tego samego symbolu dla oznaczenia różnych obiektów, to nie jest zabronione używać różnych symboli na oznaczenie tego samego obiektu. I tak iloczyn liczb a i b można zapisać jako

$$a \times b, \quad a \cdot b, \quad ab.$$

W pewnych przypadkach korzystniej jest używać dwu, a nawet więcej różnych znaków na oznaczenie tego samego, ale takie przypadki wymagają szczególnej ostrożności. Zazwyczaj lepiej jest używać dokładnie jednego symbolu na oznaczenie jednego obiektu, a w żadnym razie nie należy używać kilku symboli bez zastanowienia.

5. Dobry symbol powinien być *łatwy do zapamiętania* i do rozpoznania; symbol powinien natychmiast przywodzić nam na myśl obiekt, a obiekt — symbol.

Prosty pomysł wybierania symboli tak, aby były one łatwo rozpoznawalne, polega na używaniu *pierwszych liter nazw* obiektów jako ich symboli. Na przykład w ustępie

20 prędkość (po angielsku *rate*) oznaczaliśmy przez r, czas (*time*) przez t, objętość (*volume*) przez V. Nie możemy jednak tak zawsze postępować. I tak w ustępie **20** rozpatrywaliśmy promień (*radius*), ale nie mogliśmy oznaczyć go przez r, ponieważ ta litera była już zajęta na oznaczenie prędkości. Są jeszcze inne motywy ograniczające wybór symboli oraz inne sposoby wybierania symboli tak, aby były one łatwo rozpoznawalne. Omówimy je niżej.

6. Gdy *porządek i związki między symbolami sugerują porządek i związki między obiektami*, wówczas oznaczenia są nie tylko łatwo rozpoznawalne, ale także szczególnie pomocne w kształtowaniu waszego pojęcia o zadaniu. Zilustrujemy to na kilka przykładach.

(I) Dla oznaczenia obiektów, które są pokrewne w naszym zadaniu, używamy liter, które są bliskie w alfabecie. I tak na ogół używamy początkowych liter alfabetu a, b, c dla oznaczenia wielkości danych lub stałych, a końcowych liter alfabetu x, y, z dla oznaczenia nieznanych wielkości lub zmiennych.

W ustępie **8** używaliśmy liter a, b, c na oznaczenie danej długości (*length*), szerokości (*width*) i wysokości (*height*) prostopadłościanu. W tym wypadku oznaczenie a, b, c było lepsze od oznaczenia tych wielkości początkowymi literami nazw l, w, h. Trzy dane długości grają w zadaniu tę samą rolę, co podkreśla użycie kolejnych liter. Prócz tego, jak powiedzieliśmy, dane wielkości oznaczamy najczęściej początkowymi literami alfabetu. Gdyby w jakimś innym przypadku trzy dane długości grały różne role i gdyby było ważne wiedzieć, które długości są poziome, a która pionowa, oznaczenie l, w, h mogłoby być korzystniejsze.

(II) Dla oznaczenia obiektów tej samej kategorii wybieramy często litery tego samego alfabetu. Dla różnych

kategorii obiektów używamy różnych alfabetów. I tak w geometrii płaskiej używamy często

wielkich liter łacińskich A, B, C,... na oznaczenie punktów,

małych liter łacińskich a, b, c,... na oznaczenie odcinków,

małych liter greckich α, β, γ,... na oznaczenie kątów.

Jeżeli dwa obiekty różnych kategorii wiąże ze sobą jakaś szczególna relacja, która jest ważna dla naszego zadania, to na oznaczenie tych obiektów możemy wybrać odpowiadające sobie litery różnych alfabetów, jak A i a, B i b i tak dalej. Znanym przykładem są powszechnie stosowane oznaczenia dla trójkątów:

A, B, C oznaczają wierzchołki,
a, b, c oznaczają boki,
α, β, γ oznaczają kąty.

Rozumie się przy tym, że a jest bokiem przeciwległym do wierzchołka A, a kąt przy tym wierzchołku nazywa się α.

(III) W ustępie **20** litery a, b, x, y są szczególnie dobrze wybrane, jeśli chodzi o wskazanie charakteru i związków między oznaczonymi elementami. Litery a, b wskazują, że oznaczone przez nie wielkości są stałe; litery x, y oznaczają wielkości zmienne; a poprzedza b, tak jak x poprzedza y; to sugeruje, że relacja między a i b jest taka sama, jak między x i y. I rzeczywiście, a i x są to odcinki poziome, a b i y pionowe oraz $a : b = x : y$.

7. Oznaczenie

$$\triangle ABC \sim \triangle EFG$$

wskazuje, że powyższe trójkąty są podobne. W nowoczesnych książkach wzór ten rozumie się w ten sposób, że te trójkąty są podobne i że wierzchołki odpowiadają sobie w napisanej kolejności: wierzchołkowi A odpowiada wierzchołek E, wierzchołkowi B wierzchołek F, wierzchołkowi C wierzchołek G. W starych książkach nie wprowadzano tego zastrzeżenia co do kolejności odpowiadających sobie wierzchołków; czytelnik musiał patrzeć na rysunek albo pamiętać dowód podobieństwa, aby wiedzieć, który wierzchołek odpowiada któremu.

Nowoczesne oznaczenie jest o wiele korzystniejsze od starego. Stosując nowoczesne oznaczenie możemy wyprowadzić wnioski ze wzoru nie patrząc na rysunek. Możemy na przykład wnioskować, że

$$\sphericalangle A = \sphericalangle E,$$

$$AB : BC = EF : FG$$

i tak dalej. Stare oznaczenie wyraża sobą mniej i nie pozwala na wyciąganie takich wniosków.

Oznaczenie wyrażające sobą więcej niż inne oznaczenie można nazwać bardziej *treściwym*. Nowoczesny symbol podobieństwa trójkątów jest bardziej treściwy niż stary; odzwierciedla porządek elementów i związki między nimi pełniej niż stary symbol, a więc może być podstawą do wyciągnięcia większej ilości wniosków niż stary symbol.

8. Słowa mają *znaczenie wtórne*. Pewne konteksty, w których dane słowo często występuje, mają na nie wpływ i dodają coś do jego pierwotnego znaczenia, jakiś odcień albo znaczenie wtórne. Pisząc starannie staramy się spośród słów mających prawie to samo znaczenie wybrać to, którego znaczenie wtórne najlepiej pasuje do danej sytuacji.

W oznaczeniach matematycznych mamy coś podobnego. Nawet symbole matematyczne mogą przejmować pewnego rodzaju znaczenia wtórne od kontekstów, w których ich się najczęściej używa. Jeżeli dobieramy oznaczenia starannie, to musimy brać to pod uwagę. Wyjaśnijmy to dokładniej.

Są litery, które nabrały mocno zakorzenionego, tradycyjnego znaczenia. Tak np. e oznacza zazwyczaj podstawę logarytmów naturalnych, i — jednostkę urojoną $\sqrt{-1}$, π — stosunek obwodu koła do jego średnicy. W zasadzie lepiej jest używać tych symboli tylko w ich tradycyjnym znaczeniu. Jeżeli używamy tych symboli w jakimś innym znaczeniu, to może się zdarzyć, że wmiesza się ich tradycyjne znaczenie i będzie nam przeszkadzało, a nawet wprowadzi nas w błąd. Inna sprawa, że takie szkodliwe znaczenia wtórne sprawiają mniej kłopotu początkującym, którzy jeszcze wiele nie studiowali, niż matematykowi, który jednak powinien mieć dość doświadczenia, aby poradzić sobie z taką przeszkodą.

Wtórne znaczenia symboli mogą być także pomocne, a nawet bardzo pomocne, jeżeli stosuje się je z umiarem. Oznaczenie stosowane już w poprzednich przypadkach może pomóc nam przypomnieć sobie jakieś użyteczne postępowanie; rzecz prosta powinniśmy być na tyle uważni, aby wyraźnie oddzielić obecne (pierwotne) znaczenie symboli od ich poprzedniego (wtórnego) znaczenia. *Ustalone oznaczenia* [tak jak tradycyjne oznaczenia poszczególnych elementów trójkąta, wspomniane wyżej w punkcie 6, przykład (II)] mają wiele zalet; będąc wielokrotnie poprzednio używane mogą nam pomóc przypomnieć sobie różne stosowane poprzednio rozumowania. Wzory pamiętamy w jakiejś ustalonej postaci. Powinniśmy więc być szczególnie ostrożni, gdy z pewnych względów musimy użyć ustalonego oznaczenia w nieco innym od powszechnie używanego znaczenia.

9. Może się zdarzyć, że gdy mamy wybrać jedno z dwu oznaczeń, jeden wzgląd przemawia za jednym z nich,

inny wzgląd za drugim. Aby wybrać bardziej odpowiednie oznaczenie, potrzeba doświadczenia i dobrego gustu, tak jak doświadczenia i gustu potrzeba, aby dobrać odpowiednich słów. Dobrze jest jednak zdawać sobie sprawę z różnych zalet i wad oznaczeń omówionych powyżej. W każdym bądź razie powinniśmy starannie dobierać oznaczenia i mieć *jakieś uzasadnienie* naszego wyboru.

10. Nie tylko najbardziej beznadziejni uczniowie w klasie, ale także całkiem inteligentni mogą czuć wstręt do algebry. W jej oznaczeniach jest zawsze coś dowolnego i sztucznego, uczenie się nowych oznaczeń jest obciążaniem sobie pamięci. Inteligentny uczeń nie będzie chciał się zgodzić na to, jeżeli nie będzie widział żadnych korzyści płynących z tego. Niechęć inteligentnego ucznia do algebry jest uzasadniona, jeżeli nie ma on okazji przekonać się osobiście, we własnej praktyce, że *język symboli matematycznych pomaga umysłowi*. Pomóc mu w zdobyciu tego przekonania jest ważnym, jednym z najważniejszych zadań nauczyciela.

Powiedziałem, że jest to ważne zadanie, ale nie mogę powiedzieć, aby było ono łatwe. Mogą nam w nim pomóc uczynione wyżej uwagi. Patrz także artykuł UKŁADANIE RÓWNAŃ. Sprawdzanie wzoru poprzez dokładne omówienie jego własności można polecić jako szczególnie pouczające ćwiczenie; patrz ustęp **14** oraz artykuł CZY MOŻESZ SPRAWDZIĆ WYNIK?, punkt 2.

Oznaki postępu. Gdy Kolumb i jego towarzysze żeglowali na zachód przez nieznany ocean, cieszyli się, ilekroć ujrzeli ptaki. Uważali ptaki za pomyślny znak wskazujący bliskość lądu. Za każdym razem rozczarowywali się jednak. Wypatrywali także innych znaków. Myśleli, że pływające wodorosty i nisko płynące chmury mogą

oznaczać bliskość lądu, ale też się rozczarowywali. Jednakże pewnego dnia znaki zaczęły się mnożyć. W czwartek 11 października 1492 roku, spostrzegli bekasy oraz zieloną trzcinę blisko statku. Załoga żaglowca *Pinta* zauważyła trzcinę i jakąś tyczkę; wyłowili inną małą tyczkę, która — jak się okazało — była obrobiona jakimś żelaznym przedmiotem; ujrzeli także inny kawałek trzciny, jakąś roślinę lądową i małą deskę. Załoga żaglowca *Nina* także spostrzegła oznaki lądu; zauważyli oni małą gałązkę pokrytą jagodami. Wszyscy znów oddychali z ulgą i cieszyli się z tych znaków. I rzeczywiście, następnego dnia ujrzeli ląd, pierwszą wyspę Nowego Świata.

Nasze przedsięwzięcie może być ważne lub drugorzędne, możemy rozwiązywać zadanie dowolnego rodzaju — jeśli jednak pracujemy intensywnie, pilnie wypatrując oznak postępu, tak jak Kolumb i jego towarzysze wypatrywali znaków wskazujących na bliskość lądu. Dla zrozumienia, co jest rozsądne uważać za znak zbliżającego się rozwiązania, omówimy kilka przykładów.

1. *Przykłady.* Mam rozwiązać zadanie szachowe: dać mata czarnemu królowi, powiedzmy w dwu ruchach. Na szachownicy znajduje się biały skoczek w dużej odległości od czarnego króla; wydaje się, że jest on zbędny. Do czego on mógłby się przydać? Na razie muszę zostawić to pytanie bez odpowiedzi. Jednakże po różnych próbach biorę pod uwagę nowy ruch i spostrzegam, że ten ruch wprowadza w grę tego pozornie zbędnego białego skoczka. To spostrzeżenie robi mi nową nadzieję. Uważam je za pomyślny znak: jest szansa, że ten nowy ruch będzie ruchem właściwym. Dlaczego?

W poprawnie postawionym zadaniu szachowym nie ma figur niepotrzebnych. Dlatego też powinniśmy brać pod uwagę wszystkie figury znajdujące się na szachownicy;

powinniśmy skorzystać ze wszystkich danych. Poprawne rozwiązanie z pewnością korzysta ze wszystkich figur, nawet z tego pozornie zbędnego białego skoczka. Pod tym ostatnim względem nowy ruch, który zamierzam zrobić, zgadza się z właściwym ruchem, który mam znaleźć. Nowy ruch jest więc podobny do właściwego ruchu; może jest to więc właściwy ruch.

Ciekawe jest rozpatrzyć podobną sytuację w zadaniu matematycznym. Moim zadaniem jest wyrazić pole trójkąta przez jego trzy boki a, b, c. Zrobiłem już sobie coś w rodzaju planu. Wiem, bardziej lub mniej jasno, jakie związki geometryczne muszę wziąć pod uwagę i jakiego rodzaju rachunków muszę dokonać. Jednakże nie jestem zupełnie pewien, czy mój plan będzie działał. Jeżeli teraz, postępując zgodnie z planem, zauważę, że we wzorze na pole, który mam znaleźć, występuje wielkość

$$\sqrt{b+c-a},$$

mam powód do radości. Dlaczego?

Trzeba wziąć pod uwagę, że suma dowolnych dwóch boków trójkąta jest większa od trzeciego boku. Wprowadza to pewne ograniczenie. Dane długości a, b, c nie mogą być zupełnie dowolne; na przykład $b+c$ musi być większe niż a. Jest to istotna część warunku, a my powinniśmy *skorzystać z całego warunku*. Jeżeli $b+c$ nie jest większe od a, to wzór, którego szukam, na pewno staje się iluzoryczny. Otóż wspomniany wyżej pierwiastek kwadratowy staje się nierzeczywisty, jeżeli $b+c-a$ jest ujemne, a więc jeżeli $b+c$ jest mniejsze niż a; a więc powyższy pierwiastek kwadratowy nie może przedstawiać wielkości rzeczywistej w tych okolicznościach, w których szukane wyrażenie musi stać się iluzoryczne. Tak więc mój wzór, w którym występuje wspomniany pierwiastek kwadratowy, ma ważną własność, która przysługuje także prawdziwemu wzorowi na pole trójkąta. Mój wzór jest więc podobny do prawdziwego wzoru; mógłby być prawdziwym wzorem.

Oto następny przykład. Chciałem kiedyś udowodnić pewne twierdzenie z geometrii przestrzennej. Bez wielkiego trudu znalazłem pierwszy krok, który wydał się celowy; lecz na tym utknąłem. Do zakończenia dowodu czegoś brakowało. Gdy zaniechałem tego dnia dowodu, miałem znacznie jaśniejszy niż na początku obraz tego, jak dowód powinien wyglądać, jak należy wypełnić lukę w dowodzie; nie byłem jednak w stanie tej luki wypełnić. Następnego dnia po dobrym wypoczynku nocnym zajrzałem znów do tego twierdzenia i wkrótce trafiłem na analogiczne twierdzenie w geometrii płaskiej. Byłem od razu przekonany, że teraz uzyskam rozwiązanie swego zadania i myślę, że miałem podstawę, by tak sądzić. Dlaczego?

Analogia to dobry przewodnik. Rozwiązanie zadania z geometrii przestrzennej często opiera się na analogicznym zadaniu z geometrii płaskiej (patrz ANALOGIA, punkty 3-7). Tak więc w moim przypadku już od samego początku było prawdopodobne, że w szukanym dowodzie trzeba będzie korzystać jako z lematu z pewnego twierdzenia geometrii płaskiej, twierdzenia tego rodzaju jak to, które mi właśnie przyszło do głowy. „To twierdzenie jest potrzebne do lematu, jakiego potrzebuję; to twierdzenie mogłoby być lematem, jakiego potrzebuję" — takie było moje rozumowanie.

Gdyby Kolumb i jego ludzie zadali sobie trud, aby rozumować jasno, to rozumowaliby podobnie. Wiedzieli, jak wygląda morze blisko brzegu. Wiedzieli, że tu znacznie częściej niż na otwartym morzu można spotkać w powietrzu przybyłe z lądu ptaki, a w wodzie — pływające przedmioty zagarnięte przez morze z brzegu. Wielu z nich musiało to obserwować, gdy wracali do rodzinnego portu z poprzednich podróży. Dzień przed ujrzeniem wyspy San Salvador, gdy pływające przedmioty stały się tak częste, myśleli: „Wygląda, jakbyśmy się zbliżali do lądu; bardzo możliwe, że zbliżamy się do lądu" i „wszyscy znów oddychali z ulgą i cieszyli się z tych znaków".

2. *Heurystyczny charakter oznak postępu.* Zwróćmy uwagę na pewną sprawę, która jest już być może jasna dla każdego; jest ona jednak bardzo ważna i dlatego powinna być wyjaśniona do końca.

Zilustrowany przez poprzednie przykłady typ rozumowania zasługuje na uwagę i na poważne traktowanie, mimo że dostarcza on jedynie prawdopodobnych wniosków, a nie niezawodnej pewności. Rozpatrzmy na nowo, pedantycznie, do przesady szczegółowo jedno takie rozumowanie:

Jeżeli zbliżamy się do lądu, często widzimy ptaki.
Otóż widzimy teraz ptaki.
A więc prawdopodobnie zbliżamy się do lądu.

Bez słowa „prawdopodobnie" wniosek byłby oczywiście zwodniczy. Istotnie, Kolumb i jego towarzysze widzieli wiele razy ptaki, lecz się rozczarowywali. Nadszedł jednak dzień, kiedy ujrzeli bekasy; następnego dnia ujrzeli ląd.

Ze słowem „prawdopodobnie" wniosek jest rozsądny i naturalny, ale w żadnym razie nie jest to wniosek udowodniony; jest to jedynie wskazówka, heurystyczna sugestia. Byłoby wielkim błędem zapomnieć, że taki wniosek jest tylko prawdopodobny i traktować go jako coś pewnego. Ale jeszcze większym błędem byłoby w ogóle nie brać tego wniosku pod uwagę. Jeżeli bierzesz heurystyczny wniosek za pewność, możesz być omaniony i rozczarować się; jeżeli jednak lekceważysz w ogóle heurystyczne wnioskowanie, to nie osiągniesz żadnego postępu. Najważniejsze oznaki postępu są oznakami heurystycznymi. Czy powinniśmy im ufać? Czy powinniśmy iść za nimi? Idź za nimi, ale miej oczy otwarte. Ufaj, ale patrz. I nigdy nie wyrzekaj się własnego sądu.

3. *Oznaki postępu, dające się jasno wyrazić.* Możemy spojrzeć na poprzednie przykłady z innego punktu widzenia.

W jednym z tych przykładów za pomyślny znak uważaliśmy fakt, że udało nam się wprowadzić do rozważań daną, z której do tej pory nie korzystaliśmy (białego skoczka). I mieliśmy zupełną rację. Istotnie, rozwiązać zadanie, to w zasadzie *znaleźć związek między danymi i niewiadomą.* Prócz tego powinniśmy — przynajmniej w dobrze postawionych zadaniach — skorzystać z wszystkich danych, związać każdą z nich z niewiadomą. Tak więc wprowadzenie do rozważań jeszcze jednej danej jest zupełnie słusznie odczuwane jako postęp, jako krok naprzód.

W innym przykładzie uważaliśmy za pomyślny znak fakt, że nasz wzór uwzględnił istotną część warunku. I mieliśmy zupełną rację. Istotnie, powinniśmy *skorzystać z całego warunku.* Tak więc wzięcie pod uwagę jeszcze jednej części warunku jest słusznie odczuwane jako postęp, jako skierowanie się we właściwym kierunku.

W jeszcze innym przykładzie uważaliśmy za pomyślny znak znalezienie prostszego, analogicznego zadania. To jest także usprawiedliwione. Istotnie, analogia jest jednym z głównych źródeł odkryć. Jeżeli inne sposoby zawodzą, powinniśmy spróbować *wymyślić analogiczne zadanie.* Dlatego też, jeśli takie zadanie pojawia się spontanicznie, samorzutnie, bez naszej pomocy, to oczywiście cieszymy się; czujemy, że zbliżamy się do rozwiązania.

Po tych przykładach możemy teraz łatwo uchwycić ogólną myśl. Istnieją pewne operacje myślowe z reguły użyteczne przy rozwiązywaniu zadań. (Najczęstsze operacje tego rodzaju są zebrane w specjalnej liście w tej książce.) Jeżeli uda nam się przeprowadzić taką operację (gdy zwiążemy jeszcze jedną daną z niewiadomą, gdy weźmiemy pod uwagę jeszcze jedną część warunku, gdy znajdziemy prostsze analogiczne zadanie), to ten sukces odczuwamy jako oznakę postępu. Zrozumiawszy tę podstawową rzecz, możemy dość jasno wyrazić naturę innych oznak postępu. Wszystko, co musimy zrobić, to przeczytać naszą listę i spoglądać na różne pytania i wskazówki z naszego nowo zdobytego punktu widzenia.

Zatem pełne zrozumienie natury niewiadomej oznacza postęp. Systematyczne uporządkowanie różnych danych, tak że łatwo możemy wskazać każdą z nich, także oznacza postęp. Jasne uświadomienie sobie warunku jako pewnej całości może oznaczać istotny postęp; a wydzielenie z warunku poszczególnych części może być także istotnym krokiem naprzód. Gdy znaleźliśmy figurę, którą możemy sobie łatwo wyobrazić, albo oznaczenia, które można łatwo zapamiętać, to możemy słusznie wierzyć, że dokonaliśmy pewnego postępu. Przypomnienie sobie *rozwiązanego uprzednio zadania pokrewnego naszemu* może być decydującym krokiem naprzód we właściwym kierunku.

I tak dalej, i tak dalej. Każdej jasno pojętej operacji myślowej odpowiada pewna dająca się jasno wyrazić oznaka postępu. Nasza lista odpowiednio czytana jest także listą oznak postępu.

Pytania i wskazówki naszej listy są proste i oczywiste, po prostu wynikają ze zwykłego zdrowego rozsądku. Powtarzaliśmy to już wielokrotnie. To samo można powiedzieć o związanych z pytaniami i wskazówkami oznakach postępu. Do odczytania tych oznak niepotrzebna jest żadna tajemna wiedza. Wystarczy nieco zdrowego rozsądku i, oczywiście, nieco doświadczenia.

4. *Oznaki postępu nie dające się tak jasno wyrazić.* Gdy pracujemy z zapałem, wczuwamy się w rytm naszego postępu: jesteśmy rozradowani, gdy postęp jest szybki; jesteśmy przygnębieni, gdy jest on powolny. Różnice te odczuwamy zupełnie wyraźnie, bez potrzeby wychwytywania jakichś wyraźnych znaków. Nastrój, wyczucie, ogólne aspekty sytuacji wskazują nam nasz postęp. Nie jest to łatwe do wyrażenia. „Wydaje się, że to jest dla mnie dobre" albo „To nie jest takie dobre" — mówi człowiek niewyrobiony. Bardziej wyrobieni ludzie wyrażają się nieco subtelniej: „To jest dobrze wyważony plan", albo: „Nie, brak jeszcze czegoś i to psuje harmonię". Jednakże poza tymi prymitywnymi i niejasnymi wyrażeniami kryje się niewątpliwe przeczucie, za którym z ufnością idziemy i które często prowadzi nas we właściwym kierunku. Jeżeli takie przeczucie jest bardzo silne i pojawia się nagle, to mówimy o natchnieniu. Ludzie zazwyczaj wierzą swoim natchnieniom, lecz czasem zawodzą się na nich. W gruncie rzeczy należy przeczucia wskazujące drogę i natchnienie traktować tak samo, jak rozpatrzone poprzednio, bardziej jasno dające się wyrazić oznaki postępu. Ufaj im, ale miej oczy otwarte.

Jaka jest natura tych przeczuć wskazujących drogę? Czy za takimi wyrażeniami jak „dobrze wyważony" czy „harmonijny" kryje się coś bardziej sprecyzowanego?

Pytania te mają bardziej spekulatywny niż praktyczny charakter, ale rozważania niniejszego artykułu sugerują odpowiedź, którą warto chyba tu podać: Ponieważ dające się bardziej jasno wyrazić oznaki postępu związane są z powodzeniem albo niepowodzeniem pewnych raczej określonych operacji myślowych, możemy przypuszczać, że nasze nie dające się tak jasno wyrazić przeczucia mogą być podobnie związane z innymi, bardziej zamaskowanymi rodzajami działalności umysłu — być może bardziej „psychologicznymi", a mniej „logicznymi".

5. *W jaki sposób pomagają oznaki postępu?* Mam pewien plan. Widzę dość jasno, od czego powinienem zacząć i co w pierwszej fazie powinienem robić. Nie widzę jednak dalszej części swej drogi; nie jestem zupełnie pewien, czy mój plan będzie działał; a w każdym razie mam jeszcze długą drogę do przebycia. Dlatego też zaczynam ostrożnie iść w kierunku wskazanym przez mój plan i wypatruję oznak postępu. Jeżeli są one rzadkie i niewyraźne, staję się coraz bardziej niepewny, waham się, czy iść dalej tą drogą. A jeśli przez dłuższy czas nie ma ich zupełnie, mogę się załamać, wrócić do początku i spróbować innej drogi. Jeśli zaś w trakcie wykonywania planu oznaki postępu stają się coraz liczniejsze, moje niezdecydowanie słabnie, duch rośnie, i posuwam się naprzód z rosnącą ufnością, tak jak Kolumb i jego towarzysze zanim ujrzeli wyspę San Salvador.

Oznaki postępu mogą być przewodnikiem naszej działalności. Ich brak może przestrzec nas przed wejściem w ślepą uliczkę, zaoszczędzić nam czasu i wysiłku; ich obecność może spowodować, że skupiamy nasze wysiłki na właściwym punkcie.

Jednakże oznaki postępu mogą być także zwodnicze. Kiedyś zaniechałem pewnej drogi z powodu braku oznak

postępu. Ale człowiek, który przyszedł po mnie i poszedł tą samą drogą nieco dalej, dokonał ważnego odkrycia — ku mojemu wielkiemu i długo trwającemu żalowi. Człowiek ten nie tylko miał więcej wytrwałości ode mnie, ale także odczytał poprawnie pewną oznakę postępu, której ja nie zauważyłem. Może się też zdarzyć przeciwnie, że będziemy radośnie szli pewną drogą, zachęcani pomyślnymi oznakami postępu i nagle natrafimy na jakąś niespodziewaną przeszkodę wyglądającą na nie do przezwyciężenia.

Tak jest, oznaki postępu mogą w pewnych poszczególnych przypadkach uczynić nam zawód, ale w znacznej większości przypadków są dobrymi przewodnikami. Myśliwy może od czasu do czasu pomylić ślady zwierzyny, ale na ogół nie wolno mu popełniać takich omyłek — w przeciwnym przypadku nie mógłby żyć z myślistwa.

Do właściwego interpretowania oznak postępu potrzebne jest doświadczenie. Niektórzy towarzysze Kolumba z pewnością wiedzieli z doświadczenia, jak wygląda morze blisko brzegu, i dlatego byli w stanie zauważyć znaki, które wskazywały na to, że zbliżają się do lądu. Ekspert wie z doświadczenia, jak wygląda sytuacja, i czuje, gdy rozwiązanie jest blisko; dlatego też jest on w stanie odczytywać znaki, które wskazują, że zbliża się rozwiązanie. Ekspert zna więcej oznak sukcesu niż osoba niedoświadczona i zna je lepiej; na tym polega jego przewaga. Doświadczony myśliwy spostrzega ślady zwierzyny, a nawet szacuje ich świeżość, wówczas gdy niedoświadczony nie jest w stanie niczego zauważyć.

Główna zaleta wybitnie utalentowanego człowieka może polegać na tym, że posiada on pewnego rodzaju specjalną wrażliwość umysłu. Będąc doskonale wrażliwym odczuwa on subtelne znaki postępu albo zauważa ich brak, wówczas gdy osoba mniej utalentowana nie jest w stanie zauważyć żadnej różnicy.

6. *Sylogizm heurystyczny.* W punkcie 2 spotkaliśmy się ze sposobem rozumowania heurystycznego, który zasługuje na dalsze rozpatrzenie i na specjalną nazwę. Zacznijmy od powtórzenia tego rozumowania w następującej postaci:

Jeżeli zbliżamy się do lądu, często widzimy ptaki.
Otóż widzimy teraz ptaki.

A więc staje się bardziej wiarogodne, że zbliżamy się do lądu.

Dwa zdania leżące powyżej linii poziomej można by nazwać *przesłankami*, zdanie poniżej tej linii — *wnioskiem*, a cały wzór rozumowania można nazwać *sylogizmem heurystycznym*.

Przesłanki podaliśmy tutaj w tej samej postaci, co w punkcie 2, ale wniosek sformułowaliśmy tu staranniej. Bardziej uwypukliliśmy istotę rzeczy. Kolumb i jego towarzysze od samego początku przypuszczali, że żeglując na zachód znajdą wreszcie ląd; i musieli mieć pewne zaufanie do tego przypuszczenia — w przeciwnym przypadku w ogóle by nie wyruszali. W trakcie podróży każdy wypadek, większy czy mniejszy, odnosili do swego podstawowego pytania: „Czy zbliżamy się do lądu?" Ich ufność rosła i malała wraz z zachodzeniem lub brakiem pewnych nowych zdarzeń; wiara każdego żeglarza wahała się bardziej lub mniej w zależności od jego doświadczenia i charakteru. Całe dramatyczne napięcie tej podróży polegało na tych wahaniach wiary.

Przytoczony sylogizm heurystyczny wskazuje na właściwą, sensowną podstawę zmian poziomu ufności. Zasadniczą rolą tego rodzaju rozumowania jest spowodować takie zmiany, a to jest lepiej wyrażone przez podane tu sformułowanie, niż przez sformułowanie punktu 2.

Ogólny wzór sugerowany przez nasz przykład można sformułować następująco:

Jak wiemy, jeżeli A jest prawdą, to prawdą jest także B.
Otóż okazuje się, że B jest prawdą.

A więc A staje się bardziej wiarogodne.

Jeszcze krócej:

Jeżeli A, to B.
B jest prawdą.

A jest bardziej wiarogodne.

W tym schemacie linia pozioma zastępuje słowa „a więc" i wyraża implikację (wynikanie), zasadnicze ogniwo wiążące przesłanki z wnioskiem.

7. *Natura rozumowań prawdopodobnych.* W tej małej książeczce zajmujemy się kwestią filozoficzną. Omawiamy ją na tyle praktycznie i potocznie, i na tyle unikamy zbyt mądrego wyrażenia się, na ile jest to możliwe, ale mimo to nasz przedmiot jest filozoficzny. Dotyczy on natury rozumowania heurystycznego oraz — nieco szerzej — pewnego rodzaju rozumowania, które nie jest niezawodne, ale jest ważne, i które z braku lepszego terminu będziemy nazywali *rozumowaniem prawdopodobnym*.

Oznaki, które przekonują odkrywcę, że jego myśl jest dobra, wskazówki, które nam przewodzą w naszych codziennych sprawach, wynikająca z okoliczności oczywistość prawnika, indukcyjna oczywistość naukowca, statystyczna oczywistość wielu różnych spraw — wszystkie te rodzaje oczywistości zgadzają się ze sobą w dwu istotnych punktach. Po pierwsze, te oczywistości nie są równoważne pewności wynikającej ze ścisłego dowodu. Po drugie są one użyteczne przy zdobywaniu istotnie nowej wiedzy, a nawet są niezbędne dla każdej, nieściśle matematycznej czy logicznej wiedzy, dla każdej wiedzy, która dotyczy rzeczywistego świata. Rozumowanie, które podpada pod ten rodzaj oczywistości, moglibyśmy nazwać „rozumowaniem heurystycznym“ albo „rozumowaniem indukcyjnym“, albo (jeśli chcemy uniknąć rozszerzania znaczenia istniejących już terminów) „rozumowaniem prawdopodobnym“. Przyjmiemy tutaj tę ostatnią nazwę.

Wprowadzony wyżej sylogizm heurystyczny można uważać za najprostszy i najbardziej rozpowszechniony wzór rozumowania prawdopodobnego. Przypomina on pewien klasyczny wzór rozumowania niezawodnego, tzw. „*modus tollens* sylogizmu hipotetycznego“. Podamy tu obok siebie oba wzory:

Rozumowanie niezawodne	*Rozumowanie heurystyczne*
Jeżeli A, to B.	Jeżeli A, to B.
B jest fałszem.	B jest prawdą.
A jest fałszem.	A jest bardziej wiarogodne.

Porównanie tych dwóch wzorów może być pouczające. Pozwala nam ono wniknąć w naturę rozumowania prawdopodobnego (heurystycznego, indukcyjnego), co bez tego porównania jest trudne do osiągnięcia.

Oba wzory mają tę samą pierwszą przesłankę:

Jeżeli A, to B.

Różnią się drugą przesłanką. Stwierdzenia:

B jest fałszem, B jest prawdą,

są wręcz przeciwne, ale mają one „podobną naturę logiczną“, znajdują się one na tym samym „pozionie logicznym“. Wielka różnica powstaje po przesłankach. Wnioski:

A jest fałszem, A jest bardziej wiarogodne,

znajdują się na różnych poziomach logicznych i ich stosunki do ich odpowiednich przesłanek są różnej natury logicznej.

Wniosek sylogizmu niezawodnego jest tej samej natury logicznej co przesłanki. Poza tym ten wniosek jest w pełni określony i niezawodnie wynika z przesłanek. Jeżeli mój sąsiad i ja zgadzamy się przyjąć przesłanki, to nie możemy w sposób rozsądny nie zgadzać się co do przyjęcia także wniosku, bez względu na różnice naszych upodobań i innych przekonań.

Wniosek sylogizmu heurystycznego różni się swoją naturą logiczną od przesłanek; jest on mniej jasny, nie tak dokładny, określony jedynie w pewnym stopniu. Wniosek ten można porównać do siły; ma kierunek i wielkość. Popycha nas w pewnym kierunku: A staje się *bardziej* wiarogodne. Wniosek ma także pewną wielkość: A może stać się *o wiele bardziej* wiarogodne albo *tylko trochę bardziej* wiarogodne. Wniosek nie jest w pełni określony i nie wynika niezawodnie z przesłanek. *Kierunek jest określony i wynika z przesłanek, wielkość nie.* Każda rozsądna osoba zgodzi się, że z przesłanek wynika, iż A staje się bardziej wiarogodne (na pewno nie mniej wiarogodne). Jednak mój sąsiad i ja możemy nie zgadzać się co do tego, *o ile* bardziej wiarogodne staje się A, gdyż nasze temperamenty, nasze wykształcenia i nasze umysłowości mogą być różne.

W sylogizmie niezawodnym przesłanki stanowią *pełną podstawę*, na której opiera się wniosek. Jeżeli obie przesłanki mają miejsce, to wniosek też ma miejsce. Jeżeli zdobędziemy jakąś nową informację, która nie zmieni naszej wiary w przesłanki, to nie może ona zmienić naszej wiary we wniosek.

W sylogizmie heurystycznym przesłanki stanowią tylko *część podstawy*, na której opiera się wniosek, część w pełni określoną i „widzialną"; istnieje jednak jeszcze niewyrażona, niewidzialna część, utworzona przez coś innego, być może przez jakieś nie dające się określić wyczucie, przez nieokreślone przyczyny. Istotnie, może się zdarzyć, że zdobędziemy jakąś nową informację, która zupełnie nie narusza naszej wiary w obie przesłanki, a wpływa na naszą wiarę dotyczącą A w sposób wręcz przeciwny do sposobu wyrażonego przez wniosek sylogizmu. Na podstawie przesłanek naszego sylogizmu heurystycznego jedynie rozsądne jest uważać A za bardziej prawdopodobne. Jednakże nazajutrz mogę znaleźć powody — nie kolidujące w ogóle z przesłankami — dla których A wydaje się mniej prawdopodobne albo nawet zupełnie niemożliwe. Wniosek może się zachwiać, a nawet całkiem upaść, na skutek wstrząsu w niewidzialnej części jego podstawy, mimo że przesłanki, widzialna część podstawy wniosku, pozostają zupełnie niezachwiane.

Wydaje się, że te uwagi wyjaśniają nieco naturę rozumowania heurystycznego, indukcyjnego i innych rodzajów nie niezawodnego, prawdopodobnego rozumowania, które jest tak nieuchwytne, gdy podchodzić doń z punktu widzenia czystej, niezawodnej logiki. Wydaje się, że trzeba by było wielu jeszcze konkretnych przykładów, rozpatrzenia innych rodzajów sylogizmu heurystycznego oraz zbadania pojęcia prawdopodobieństwa i innych związanych z tym pojęć, aby uzupełnić wybrane tu podejście; por. książkę autora *Mathematics and Plausible Reasoning*.

Racje heurystyczne są ważne, chociaż niczego nie dowodzą. Wyjaśnienie naszych racji heurystycznych jest także ważne, chociaż oprócz racji wyjaśnionych jest wiele innych, które pozostają niewyjaśnione, a są być może jeszcze ważniejsze.

Pappus, znakomity matematyk grecki, żyjący prawdopodobnie około 300 roku n.e. W siódmej księdze swoich *Collectiones* Pappus przedstawia gałąź wiedzy, którą nazywa *analyomenos*. Można by to przetłumaczyć jako „Skarbnica analizy" albo „Sztuka rozwiązywania zadań", albo nawet „Heurystyka"; wydaje się, że ten ostatni termin będzie tu najodpowiedniejszy. Łatwo znaleźć dobry przekład angielski wspomnianego urywka dzieła Pappusa (1); niżej podajemy pewnego rodzaju wolną przeróbkę oryginalnego tekstu:

„Tak zwana heurystyka jest — aby ująć to krótko — specjalnym zbiorem doktryn przeznaczonym dla tych, którzy po przestudiowaniu zwykłych *Elementów* pragną zdobyć zdolność rozwiązywania zadań matematycznych, i użytecznym tylko do tego celu. Heurystyka jest dziełem trzech ludzi: Euklidesa, autora *Elementów*, Apolloniusza z Pergi i Aristaeusa starszego. Uczy ona sposobów analizy i syntezy.

W analizie punktem wyjścia jest to, do czego mamy dojść w zadaniu; przyjmujemy to za prawdę i wyciągamy z tego wnioski, z tych wniosków nowe wnioski, aż dochodzimy do punktu, z którego można rozpocząć syntezę. W analizie przyjmujemy to, czego żąda od nas zadanie, za zrobione już (to, co mamy znaleźć, za znalezione już, to, co mamy udowodnić, za prawdziwe). Badamy, z ja-

(1) T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Cambridge 1908, vol. I, str. 138.

kich poprzednich elementów można by wyprowadzić żądany wynik; następnie badamy, co dla tych poprzednich elementów mogłoby być poprzednim elementem i tak dalej, aż przechodząc od jednych elementów do drugich dochodzimy wreszcie do czegoś już znanego lub uznanego za prawdę. To postępowanie nazywamy *analizą* albo rozwiązywaniem od końca, albo rozwiązywaniem *regresyjnym*.

W syntezie natomiast, odwracając ten proces, zaczynamy od tego, do czego doszliśmy na końcu analizy, od rzeczy już znanej albo uznanej za prawdziwą. Z tego wyprowadzamy to, co poprzedzało tę rzecz w analizie; kontynuujemy te wyprowadzenia w odwrotnej kolejności niż w analizie, aż w końcu osiągamy to, co było żądane. To postępowanie nazywamy *syntezą* albo rozwiązywaniem konstruktywnym, albo rozumowaniem *progresywnym*.

Są dwa rodzaje analizy; jeden rodzaj, to analiza zadań typu „udowodnić", której celem jest ustalenie prawdziwych twierdzeń; drugi rodzaj, to analiza zadań typu „znaleźć", której celem jest znalezienie niewiadomej.

Zadanie typu „udowodnić" polega na udowodnieniu lub obaleniu jasno sformułowanego twierdzenia A. Nie wiemy jeszcze, czy twierdzenie A jest prawdziwe czy fałszywe; jednakże z A wyprowadzamy inne twierdzenie B, z B jeszcze inne twierdzenie C i tak dalej, aż dojdziemy do ostatniego twierdzenia L, co do którego wiemy, czy jest prawdziwe, czy fałszywe. Jeżeli twierdzenie L jest prawdziwe, to twierdzenie A też będzie prawdziwe, o ile wszystkie nasze wywody są odwracalne. Opierając się na twierdzeniu L dowodzimy twierdzenia K, które poprzedza L w analizie i postępując dalej w ten sam sposób wracamy z powrotem drogą przebytą w analizie; opierając się na C dowodzimy B, opierając się na B do-

wodzimy A i w ten sposób osiągamy swój cel. Jeśli jednak twierdzenie L jest fałszywe, to tym samym udowodniliśmy, że twierdzenie A jest także fałszywe.

Zadanie typu „znaleźć" polega na znalezieniu pewnej niewiadomej x spełniającej pewien jasno sformułowany warunek. Nie wiemy jeszcze, czy wielkość spełniająca taki warunek jest w ogóle możliwa czy nie; jednakże zakładając, że istnieje x spełniające ten warunek, wyprowadzamy z x inną niewiadomą y, która musi spełniać jakiś pokrewny warunek; następnie wiążemy z y jeszcze inną niewiadomą i tak dalej, aż dochodzimy do ostatniej niewiadomej z, którą możemy znaleźć jakąś znaną metodą. Jeżeli rzeczywiście istnieje jakieś z spełniające nałożony nań warunek, to będzie istniało także x spełniające wyjściowy warunek, o ile wszystkie nasze wywody są odwracalne. Najpierw znajdujemy z; następnie, znając z, znajdujemy niewiadomą, która poprzedza z w analizie; postępując dalej w ten sam sposób wracamy z powrotem drogą przebytą w analizie i w końcu znając y otrzymujemy x, a zatem osiągamy swój cel. Jeżeli jednak nie ma żadnej wielkości, która by spełniała warunek nałożony na z, to zadanie dotyczące wielkości x nie ma rozwiązania".

Nie należy zapominać, że podaliśmy wyżej nie dosłowny przekład, ale wolną przeróbkę, pewnego rodzaju *parafrazę*. Pewne różnice między oryginałem i parafrazą wymagają komentarzy, gdyż tekst Pappusa jest ważny pod wieloma względami.

1. W naszej parafrazie używamy bardziej precyzyjnej terminologii niż to jest w oryginale i wprowadzamy symbole A, B, ...,L oraz x, y,...,z, czego nie ma w oryginale.

2. W parafrazie mówimy o „zadaniach matematycznych" (str. 165, wiersz 19), podczas gdy w oryginale jest mowa o „zadaniach geometrycznych". Podkreślamy tym,

że sposoby postępowania opisane przez Pappusa bynajmniej nie ograniczają się do zadań geometrycznych; w gruncie rzeczy nie ograniczają się one nawet do zadań matematycznych. Musimy to zilustrować przykładami, gdyż ogólność heurystyki i jej zależność od natury i przedmiotu zadania jest rzeczą ważną (patrz ustęp 3).

3. *Przykład algebraiczny.* Znaleźć x spełniające równanie

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0.$$

Jest to zadanie typu „znaleźć", niezbyt łatwe dla początkującego. Osoba zabierająca się do tego zadania powinna być zapoznana z analizą; oczywiście nie ze słowem „analiza", ale z ideą dochodzeń do celu przez kolejne redukcje. Prócz tego powinna znać najprostsze typy równań. Nawet przy pewnej wiedzy trzeba mieć dobry pomysł, nieco szczęścia i nieco inwencji, aby zauważyć, że skoro $4^x = (2^x)^2$, $4^{-x} = (2^x)^{-2}$, to może być korzystne wprowadzić niewiadomą

$$y = 2^x.$$

I rzeczywiście, to podstawienie jest korzystne; równanie względem y, otrzymane z wyjściowego równania

$$8\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 54\left(y + \frac{1}{y}\right) + 101 = 0$$

wygląda prościej niż równanie wyjściowe. Nasze zadanie nie kończy się jednak na tym. I znów trzeba mieć nieco inwencji, aby wpaść na pomysł innego podstawienia

$$z = y + \frac{1}{y},$$

które przekształca nasz warunek na

$$8z^2 - 54z + 101 = 0.$$

Na tym kończy się analiza, o ile oczywiście osoba rozwiązująca zadanie jest obeznana z rozwiązywaniem równań kwadratowych.

Na czym polega synteza? Na przeprowadzeniu krok po kroku obliczeń, których możliwość przewidziała analiza. Osoba rozwiązująca zadanie nie potrzebuje mieć żadnych nowych pomysłów, aby zakończyć to zadanie; teraz potrzebne jest tylko nieco cierpliwości i uwagi przy obliczaniu poszczególnych niewiadomych. Kolejność obliczeń jest odwrotna do kolejności, w jakiej wprowadzało się niewiadome; najpierw znajdujemy z ($z = \frac{5}{2}, \frac{17}{4}$), następnie y ($y = 2, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}$), a na końcu szukane x ($x = 1, -1, 2, -2$). W syntezie wracamy z powrotem drogą przebytą w analizie i w tym przypadku łatwo zauważyć dlaczego tak jest.

4. *Przykład niematematyczny.* Człowiek pierwotny chce przejść przez potok; nie może jednak zrobić tego tak, jak zwykle, gdyż przez noc poziom wody podniósł się. Tak więc przejście przez potok staje się przedmiotem zadania; „przejście przez potok" jest niewiadomą x tego prymitywnego zadania. Człowiek może sobie przypomnieć, że przechodził przez inny potok po drzewie obalonym w poprzek potoku. Rozgląda się więc za odpowiednim zwalonym drzewem, które staje się jego nową niewiadomą y. Nie może znaleźć odpowiedniego drzewa, ale jest wiele drzew stojących nad potokiem; chciałby, aby jedno z nich się przewróciło. Czy mógłby on spowodować, aby któreś z drzew przewróciło się w poprzek potoku? Jest to wspaniały pomysł; jest także nowa niewiadoma: w jaki sposób powalić drzewo w poprzek potoku?

Ten szereg myśli trzeba nazwać analizą, jeśli przyjmujemy terminologię Pappusa. Jeżeli człowiekowi pierwotnemu uda się doprowadzić swoją analizę do końca, to może on stać się wynalazcą mostu i siekiery. Co będzie syntezą? Wprowadzenie myśli w czyn. Ostatnim aktem syntezy będzie przejście przez potok po zwalonym drzewie.

Analizę i syntezę wypełniają te same obiekty; w analizie ćwiczą one umysł człowieka, a w syntezie jego mięśnie; analiza polega na myśleniu, synteza na czynach. Jest jeszcze inna różnica; kolejność jest odwrócona. Przejście przez potok jest pierwszym pragnieniem, od którego zaczyna się analiza, i ostatnim czynem, na którym kończy się synteza.

5. Nasza parafraza tekstu Pappusa nieco dobitniej niż tekst oryginalny zwraca uwagę na naturalny związek analizy z syntezą. Po rozpatrzeniu powyższych przykładów związek ten ujawnia się wyraźnie. Analiza występuje oczywiście najpierw, synteza potem; analiza jest to odkrywanie, synteza — wykonywanie; *analiza jest to układanie planu, synteza — wykonywanie planu.*

6. Parafraza zachowuje, a nawet uwypukla pewne dziwne zdania oryginału: „przyjmujemy to, czego żąda od nas zadanie, za już zrobione, to, co mamy znaleźć — za znalezione, to, co mamy udowodnić — za prawdziwe". Jest to paradoksalne; czy nie jest jedynie oszukiwaniem samego siebie przyjmować, że zadanie, które mamy rozwiązać, jest już rozwiązane? Jest to niejasne; jaki jest tego sens? Jednakże jeśli dokładnie przyjrzymy się kontekstowi, w jakim te zdania występują, i spróbujemy rzetelnie wgryźć się w nasze własne doświadczenie w rozwiązywaniu zadań, to sens tych zdań stanie się jasny.

Rozpatrzmy najpierw zadanie typu „znaleźć". Oznaczmy niewiadomą przez x, a dane przez a, b, c. „Przyjąć, że zadanie jest rozwiązane" znaczy przypuścić, że istnieje obiekt x spełniający dany warunek, to znaczy będący w takiej zależności od danych a, b, c, jaką przewiduje warunek. Przypuszczenie to robimy po prostu po to, aby rozpocząć analizę; jest ono prowizoryczne i nieszkodliwe. Gdyby bowiem nie było takiego obiektu x, to analiza musiałaby nas doprowadzić w końcu do zadania, które nie ma rozwiązania. Tym samym stałoby się jasne, że nasze wyjściowe zadanie nie ma rozwiązania. Nasze przypuszczenie jest więc pożyteczne. Aby zbadać warunek, musimy sobie wyobrazić albo geometrycznie unaocznić związki, które według warunku zadania mają zachodzić między x oraz a, b, c; jak można by to zrobić bez wyobrażenia sobie x jako istniejącego? Poza tym nasze przypuszczenie jest zupełnie naturalne. Człowiek pierwotny, którego myśli i czyny omawialiśmy w punkcie 4, wyobrażał sobie siebie przechodzącego po drzewie przez potok na długo przed tym, zanim rzeczywiście to zrobił; widział on swoje zadanie już jako „rozwiązane".

Zadanie typu „udowodnić" polega na tym, aby udowodnić pewne twierdzenia A. Rada: „przyjmij A jako prawdziwe" po prostu zachęca do wyciągania wniosków z twierdzenia A, mimo że jeszcze go nie udowodniliśmy. Ludzie o pewnej mentalności i o określonym filozoficznym podejściu mogą się wzdragać przed wyciąganiem wniosków z nieudowodnionego twierdzenia; jednakże tacy ludzie nigdy nie rozpoczną analizy.

Porównaj Figury geometryczne, punkt 2.

7. W parafrazie dwa razy używamy ważnego zwrotu „o ile wszystkie nasze wywody są odwracalne" (patrz str. 166, wiersz 5 od dołu i str. 167, wiersz 15-16). Jest to interpolacja; tekst oryginalny nic takiego nie zawiera; brak tego zastrzeżenia zaobserwowano i poddano krytyce w nowszych czasach. Patrz Zadanie pomocnicze, punkt 6, gdzie wprowadza się pojęcie „redukcji odwracalnej".

8. Analizę zadania typu „udowodnić" objaśniliśmy

w parafrazie używając zupełnie innych słów niż użyte w oryginale, ale sensu nie zmieniliśmy ani trochę; w każdym bądź razie nie było naszym zamiarem zmieniać sensu. Natomiast analizę zadania typu „znaleźć" objaśniliśmy w parafrazie bardziej konkretnie, niż to jest zrobione w oryginale. W oryginale podany jest opis nieco ogólniejszej procedury, konstrukcji *łańcucha równoważnych zadań pomocniczych*, co opisujemy w artykule ZADANIE POMOCNICZE, punkt 7.

9. Wiele elementarnych podręczników geometrii zawiera pewne uwagi o analizie, o syntezie i o przyjmowaniu, że zadanie jest rozwiązane. Ta niemalże zakorzeniona tradycja pochodzi według wszelkiego prawdopodobieństwa od Pappusa, choć watpię, czy jest jakiś współczesny autor podręcznika, który znałby prace samego Pappusa. Omawiana sprawa jest wystarczająco ważna, aby wspominać o niej w elementarnych podręcznikach. Jest jednak duże niebezpieczeństwo, że będzie ona źle zrozumiana. Już samo to, że poruszanie tej sprawy ogranicza się do podręczników geometrii, świadczy o braku zrozumienia jej u współczesnych autorów; patrz powyżej, punkt 2. Jeżeli przytoczone tu uwagi przyczynią się do lepszego zrozumienia tych spraw, to będzie to wystarczającym usprawiedliwieniem ich obszerności.

Po inne przykłady, odmienny punkt widzenia i dalsze uwagi odsyłamy czytelnika do artykułu PRACA OD KOŃCA DO POCZĄTKU. Porównaj także artykuł REDUCTIO AD ABSURDUM I DOWÓD NIE WPROST, punkt 2.

Paradoks odkrywcy. Bardziej ambitny plan może mieć większą szansę zrealizowania.

To brzmi paradoksalnie. Jednakże przechodząc od jednego zadania do drugiego, możemy nieraz zauważyć,

że nowym, bardziej ambitnym zadaniem łatwiej jest operować niż zadaniem wyjściowym. Może być łatwiej odpowiedzieć na więcej pytań niż tylko jedno. Może być łatwiej udowodnić ogólniejsze twierdzenie i rozwiązać ogólniejsze zadanie.

Paradoks znika, jeśli bliżej przyjrzymy się kilku przykładom (UOGÓLNIENIE, punkt 2; INDUKCJA I INDUKCJA MATEMATYCZNA, punkt 7). Bardziej ambitny plan może mieć większą szansę zrealizowania, o ile jest oparty nie na bezpodstawnej zarozumiałości, ale na spostrzeganiu rzeczy, które się kryją za rzeczami bezpośrednio widzialnymi.

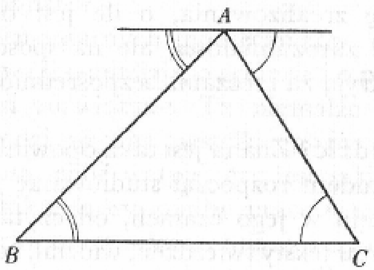
Po co dowodzić? Znana jest taka opowieść o Newtonie: Jako młody student rozpoczął studiowanie geometrii, jak było w zwyczaju w jego czasach, od czytania *Elementów* Euklidesa. Czytał teksty twierdzeń, widział, że są one prawdziwe, a dowody omijał. Zastanawiał się, dlaczego ktokolwiek może troszczyć się o dowody rzeczy tak oczywistych. Jednakże wiele lat później zmienił swoje zdanie i wychwalał Euklidesa.

Opowieść może być autentyczna lub nie, pozostaje jednak pytanie: Dlaczego powinniśmy uczyć się i nauczać dowodów? Co jest lepsze: nie dowodzić niczego, dowodzić wszystkiego, czy też dowodzić pewnych tylko rzeczy? A jeśli dowodzić tylko pewnych rzeczy, to których?

1. *Dowody zupełne.* Dla pewnego rodzaju logików istnieją tylko dowody zupełne. Jeśli coś rości sobie pretensje do bycia dowodem, to nie może zawierać żadnych luk, żadnej niepewności, gdyż w przeciwnym wypadku nie jest dowodem. Czy można znaleźć w życiu codziennym albo w praktyce prawniczej, albo w naukach fizycznych dowody zupełne, które by czyniły zadość tak wielkim wymaganiom? Chyba nie. Dlatego też trudno zrozumieć

jak mogła nam przyjść do głowy myśl o takim doskonale zupełnym dowodzie?

Można powiedzieć z lekką przesadą, że ludzkość przejęła tę myśl od jednego człowieka i z jednej książki: od Euklidesa i jego *Elementów*. W każdym bądź razie badanie elementów geometrii płaskiej stwarza w dalszym ciągu najlepszą okazję do zapoznania się z ideą ścisłego dowodu.



Rys. 20

Weźmy jako przykład dowód twierdzenia: *w każdym trójkącie suma kątów jest równa dwóm kątom prostym*(1). Rysunek 20, który tkwi wryty w pamięci większości z nas, nie wymaga wielkich objaśnień. Przez wierzchołek A przechodzi prosta równoległa do boku BC. Kąty trójkąta leżące przy wierzchołkach B i C są równe odpowiednim kątom przy wierzchołku A, jak to zaznaczono na rysunku; równość ta wynika stąd, że kąty naprzemianległe wewnętrzne, leżące przy dwóch równoległych, są zawsze równe. Trzy kąty trójkąta są więc równe trzem kątom o wspólnym wierzchołku A, tworzącym kąt półpełny, czyli dwa kąty proste; twierdzenie jest więc udowodnione.

(1) Część twierdzenia 32 Księgi I *Elementów* Euklidesa. Podany tutaj dowód nie pochodzi od Euklidesa, był jednak znany Grekom.

Jeżeli uczeń przeszedł przez lekcje matematyki nie zrozumiawszy całkowicie kilku dowodów, takich jak powyższy, to ma prawo mieć pretensję do swojej szkoły i do swego nauczyciela. Istotnie, powinniśmy rozróżniać rzeczy bardziej i mniej ważne. Jeżeli uczeń nie poznał tego czy innego szczególnego faktu geometrycznego, to nie stracił znów tak dużo; z faktów tych może w swym późniejszym życiu niewiele korzystać. Jeżeli jednak nie zaznajomił się z dowodami geometrycznymi, to stracił najlepsze i najprostsze przykłady prawdziwej oczywistości, stracił najlepszą okazję do poznania idei ścisłego rozumowania. Bez tego brak mu będzie wzoru, z którym mógłby porównać wszelkiego rodzaju rzekome oczywistości spotykane we współczesnym życiu.

Krótko mówiąc, jeżeli jednym z celów wykształcenia ogólnego jest dać uczniowi pojęcie o intuicyjnej oczywistości i rozumowaniu logicznym, to musi się w nim znaleźć miejsce na dowody geometryczne.

2. *System logiczny*. Geometria, taka jak ją przedstawił Euklides w *Elementach*, nie jest zbiorem faktów, ale systemem logicznym. Aksjomaty, definicje i twierdzenia podane są nie w przypadkowej kolejności, ale w określonym i doskonałym porządku. Każde twierdzenie jest umieszczone w takim miejscu, że można je oprzeć na poprzedzających je aksjomatach, definicjach i twierdzeniach. Możemy traktować uporządkowanie twierdzeń jako główne osiągnięcie Euklidesa, a utworzony przez nie system logiczny jako główną zaletę *Elementów*.

Geometria Euklidesa jest nie tylko systemem logicznym, ale także pierwszym i największym przykładem takiego systemu, który inne nauki starały się i nadal starają się naśladować. Czy inne nauki — szczególnie te bardzo odległe od geometrii, jak psychologia czy nauki prawne — powinny naśladować sztywną logikę Euklidesa? Jest to sprawa do dyskusji; ale nikt nie może na serio brać udziału w tej dyskusji, jeśli nie zna systemu Euklidesa.

System geometryczny jest scementowany przez dowody. Każde twierdzenie jest związane z poprzednimi aksjomatami, definicjami i twierdzeniami za pomocą dowodu. Bez zrozumienia tych dowodów nie można zrozumieć samej istoty systemu.

Krótko mówiąc, jeżeli jednym z zadań wykształcenia ogólnego jest dać uczniowi pojęcie o systemie logicznym, to musi się w nim znaleźć miejsce na dowody geometryczne.

3. *System mnemotechniczny.* Autor wcale nie myśli, że idee intuicyjnej oczywistości, ścisłego rozumowania i systemu logicznego są dla kogokolwiek zbędne. Jednakże mogą być przypadki, w których badanie tych idei nie uważa się, z powodu braku czasu lub z innych powodów, za absolutnie niezbędne. Ale nawet i w takich przypadkach dowody mogą być pożądane.

Dowody prowadzą do oczywistości; w ten sposób dowody wiążą się z systemem logicznym i pomagają nam zapamiętać różne rzeczy powiązane razem ze sobą. Weźmy pod uwagę rozpatrzony wyżej przykład (patrz rysunek 20). Rysunek sprawia, że fakt, iż suma kątów trójkąta wynosi 180°, staje się oczywisty. Rysunek wiąże ten fakt z innym faktem, że kąty naprzemianległe są równe. Fakty związane ze sobą są bardziej interesujące i łatwiejsze do zapamiętania niż fakty odizolowane. Tak więc nasz rysunek umieszcza w naszej pamięci dwa związane ze sobą twierdzenia geometryczne; rysunek ten i twierdzenia mogą utkwić w naszym umyśle nierozerwalnie: zawsze, gdy pomyślimy o tych twierdzeniach, przed oczami pojawi się nam rysunek.

Przejdźmy teraz do przypadku, gdy nie uważa się za niezbędne zaznajomienie się z jakimiś ogólnymi ideami, a żąda się jedynie poznania pewnych określonych faktów. Nawet w takim przypadku fakty muszą być podawane w pewnym powiązaniu, jako pewnego rodzaju system, gdyż fakty odizolowane znacznie trudniej zapamiętać, a łatwiej zapomnieć. Każdy rodzaj związku, który wiąże fakty w sposób prosty, naturalny i trwały, jest tu mile widziany. System faktów nie musi być oparty na logice; wystarczy, aby skutecznie pomagał naszej pamięci; musi być tym, co nazywamy systemem *mnemotechnicznym*. Jednakże nawet dla czysto mnemotechnicznego systemu dowody mogą być użyteczne, zwłaszcza proste dowody. Przypuśćmy na przykład, że uczeń musi zapamiętać fakt dotyczący sumy kątów trójkąta i inny fakt dotyczący kątów naprzemianległych. Czy może być prostszy, bardziej naturalny i bardziej skuteczny pomysł zapamiętania tych faktów niż zapamiętanie rysunku 20?

Krótko mówiąc, jeśli nawet nie przywiązuje się żadnej specjalnej wagi do ogólnych idei logicznych, to dowody mogą być użyteczne jako metoda mnemotechniczna.

4. *System książki kucharskiej.* Omawialiśmy korzyści płynące z dowodów, ale bynajmniej nie twierdziliśmy, że wszystkie dowody należy podawać *in extenso.* Przeciwnie, istnieją sytuacje, w których jest to niemal niemożliwe; jednym z tych przypadków jest uczenie rachunku różniczkowego i całkowego studentów szkół inżynierskich.

Rachunek różniczkowy i całkowy wykładany według nowoczesnych wzorów ścisłości wymaga dowodów o pewnym stopniu trudności i subtelności (dowody „epsilonowe"). Ale przyszli inżynierowie studiują rachunek różniczkowy i całkowy z punktu widzenia jego zastosowań i nie mają ani dosyć czasu, ani dosyć wprawy i zainteresowania, aby przebijać się przez długie dowody i oceniać ich subtelność. Powstaje więc silna pokusa, aby odrzucić wszystkie dowody. Jednakże, postępując tak, wprowadzamy rachunek różniczkowy i całkowy do poziomu książki kucharskiej.

Książka kucharska podaje dokładnie, jakie produkty spożywcze należy wziąć i co z nimi zrobić, aby otrzymać daną potrawę, ale nie podaje żadnego uzasadnienia swoich przepisów; uzasadnienie przepisu budyniu polega na zjedzeniu go. Książka kucharska może służyć świetnie swojemu celowi. Istotnie, ona nie wymaga żadnego logicznego czy mnemotechnicznego systemu, ponieważ przepisy są zapisane albo wydrukowane i nie trzeba ich pamiętać.

Jednakże autor podręcznika rachunku różniczkowego i całkowego czy wykładowca nie może spełnić swego zadania, jeśli naśladuje zbyt ściśle system książki kucharskiej. Jeżeli uczy on odpowiedniego postępowania nie dając żadnych dowodów, to nie będzie to zrozumiane. Jeżeli podaje reguły bez uzasadnienia, to niepowiązane reguły zostaną szybko zapomniane. Matematyki nie można sprawdzić w ten sam sposób, co budyń; jeżeli odrzucić wszelkiego rodzaju uzasadnienia, to kurs rachunku różniczkowego i całkowego może łatwo stać się zbiorem niepowiązanych ze sobą, niestrawnych informacji.

5. *Dowody niezupełne.* Najlepszym wybrnięciem z dylematu między zbyt trudnymi dowodami a poziomem książki kucharskiej może być rozsądne skorzystanie z dowodów niezupełnych.

Dla ścisłego logika dowód niezupełny nie jest w ogóle dowodem. I z pewnością należy starannie odróżnić dowody niezupełne od zupełnych; niedobrze jest pomieszać jedno z drugim, ale jeszcze gorzej jest sprzedawać jedno jako drugie. Niedobrze jest, gdy autor podręcznika nie przyznaje

się otwarcie, że podaje dowód niezupełny, oscylując wyraźnie między bojaźliwością a pewnością siebie, że dowód jest zupełny. Jednak dowody niezupełne mogą być pożyteczne, gdy się ich używa we właściwym miejscu i z wyczuciem. Ich celem nie jest zastąpić dowody zupełne, czego nigdy by nie mogły zrobić, ale uczynić wykład ciekawszym i powiązać różne elementy.

Przykład 1. *Równanie algebraiczne stopnia n ma dokładnie n pierwiastków.* Z twierdzeniem tym, zwanym zasadniczym twierdzeniem algebry, często trzeba zapoznać studentów zupełnie nieprzygotowanych do zrozumienia dowodu. Jednakże wiedzą oni, że równanie stopnia pierwszego ma jeden pierwiastek, a równanie stopnia drugiego — dwa pierwiastki. Poza tym część naszego trudnego twierdzenia można łatwo wykazać: *żadne równanie stopnia n nie ma więcej niż n różnych pierwiastków.* Czy wspomniane fakty stanowią pełny dowód zasadniczego twierdzenia algebry? W żadnym wypadku! Wystarczają jednak na to, aby uczynić twierdzenie bardziej ciekawym i bardziej prawdopodobnym, i aby utrwalić je w umysłach studentów, co jest rzeczą najważniejszą.

Przykład 2. *Suma dwóch dowolnych kątów płaskich utworzonych przez krawędzie kąta trójściennego jest większa od trzeciego kąta płaskiego.* Oczywiście to twierdzenie jest równoważne twierdzeniu, że *w trójkącie sferycznym suma dwóch dowolnych boków jest większa od trzeciego boku.* Zauważywszy to myślimy w sposób naturalny o analogii między trójkątem sferycznym i trójkątem prostoliniowym. Czy te uwagi tworzą dowód? W żadnym wypadku; ale pomagają one nam zrozumieć i zapamiętać podane na początku twierdzenie.

Nasz pierwszy przykład jest ciekawy z historycznego punktu widzenia. Przed około 300 laty matematycy wierzyli w zasadnicze twierdzenie algebry nie mając jego zupełnego dowodu; w zasadzie nie mieli wiele więcej podstaw do wierzenia weń, niż wspomniane wyżej uwagi. Nasz drugi przykład wskazuje na ANALOGIĘ jako na ważne źródło domysłów i przypuszczeń. W matematyce, tak jak w naukach przyrodniczych i fizycznych, źródłem odkrycia jest często obserwacja, analogia i indukcja. Te sposoby, ostrożnie i z wyczuciem stosowane do tworzenia prawdopodobnego, heurystycznego dowodzenia, mają szczególnie duże znaczenie dla fizyków i inżynierów. (Patrz także INDUKCJA I INDUKCJA MATEMATYCZNA, punkty 1, 2, 3.)

Rolę dowodów niezupełnych i zainteresowanie nimi wyjaśnia do pewnego stopnia badanie procesu rozwiązywania zadań. Pewne doświadczenie w rozwiązywaniu zadań wskazuje, że pierwsza idea dowodu jest bardzo często niekompletna. Może się w niej zawierać najistotniejsza uwaga, główny związek, zalążek dowodu, ale szczegóły trzeba opracować później; szczegóły te są często kłopotliwe. Niektórzy autorzy, ale nieliczni, mają dar przedstawiania właśnie zalążka dowodu, głównej idei, w jej najprostszej postaci i wskazywania na naturę szczegółów, którymi trzeba dowód uzupełnić. Taki dowód, chociaż niezupełny, może być znacznie bardziej pouczający niż dowód przedstawiony ze wszystkimi szczegółami.

Krótko mówiąc, dowody niezupełne mogą być pewnego rodzaju sposobami mnemotechnicznymi (ale, oczywiście, nie zastąpią one dowodów zupełnych), gdy naszym celem jest względna zwięzłość wykładu, a nie ściśle logiczny wywód.

Jest bardzo niebezpiecznie namawiać do dowodów niezupełnych. Jednakże możliwe nadużycia można ograniczyć podając kilka reguł. Po pierwsze, jeżeli dowód jest niezupełny, to trzeba to wyraźnie powiedzieć. Po drugie, autor czy nauczyciel nie ma prawa podawać niezupełnego

dowodu twierdzenia, jeżeli sam nie zna bardzo dobrze dowodu pełnego.

Trzeba przyznać, że nie jest łatwo podać dobry dowód zupełny.

Podświadoma praca. Pewnego wieczoru chciałem porozmawiać z przyjacielem o pewnym autorze, ale nie mogłem sobie przypomnieć nazwiska autora. Drażniło mnie to, gdyż pamiętałem dość dobrze jedno z jego opowiadań. Pamiętałem także pewną historię o samym autorze, którą chciałem opowiedzieć; właściwie pamiętałem wszystko, z wyjątkiem nazwiska. Raz za razem próbowałem przypomnieć sobie to nazwisko, ale wszystko na próżno. Następnego dnia rano, gdy tylko pomyślałem o swoim wczorajszym kłopocie, nazwisko autora znalazłem w pamięci bez żadnego wysiłku.

Bardzo możliwe, że czytelnik pamięta tego rodzaju sytuację z własnego doświadczenia. A jeżeli pasjonuje go rozwiązywanie zadań, to prawdopodobnie przydarzyło mu się coś podobnego przy ich rozwiązywaniu. Często zdarza się, że nic ci się nie udaje w twoim przedsięwzięciu; pracujesz bardzo intensywnie, ale bez żadnego rezultatu. Ale gdy wrócisz do niego po nocnym wypoczynku albo po kilkudniowej przerwie, zjawia się dobry pomysł i z łatwością rozwiązujesz problem. Natura zagadnienia nie gra tu większej roli; w ten sposób może nam przyjść do głowy zapomniane słowo, trudne słowo do krzyżówki, początek kłopotliwego listu albo rozwiązanie zadania matematycznego.

Tego rodzaju zdarzenia stwarzają wrażenie istnienia jakiejś *podświadomej pracy*. Faktem jest, że zadanie po dłuższej przerwie może powrócić do naszej świadomości w zasadzie wyjaśnione, znacznie bliższe rozwiązania niż w chwili, gdy opuściło naszą świadomość. Kto je wyjaśnił? Kto zbliżył je do rozwiązania? Oczywiście my sami, pracując nad nim podświadomie. Trudno jest dać inną odpowiedź, chociaż psychologowie wpadli na pomysł innej odpowiedzi, która, być może, okaże się kiedyś bardziej zadowalająca.

Bez względu na to, jaka jest istota teorii pracy podświadomej, jest pewne, że istnieją granice, poza które nie powinniśmy wykraczać świadomym myśleniem. Istnieją momenty, w których lepiej zostawić zadanie na uboczu. „Poradź się swojej poduszki" — mówi stara rada. Pozwoliwszy nieco odpocząć zadaniu i sobie możemy nazajutrz więcej uzyskać mniejszym wysiłkiem. „To, czego nie może dziś, może jutro" — mówi inne stare powiedzenie. Nie jest jednak wskazane odkładać na bok zadanie, do którego chcemy później wrócić, bez wrażenia, że cośkolwiek już dokonaliśmy; powinniśmy przynajmniej coś ustalić, wyjaśnić nieco jakiś aspekt zadania i dopiero wtedy przestać nad nim pracować.

Tylko takie zadania wracają w bardziej wyjaśnionej postaci do naszych umysłów, których rozwiązania gorąco pragnęliśmy, ale nad którymi pracowaliśmy z wielkim napięciem; wydaje się, że świadomy wysiłek i napięcie są niezbędne, aby spowodować podświadomą pracę. W każdym bądź razie byłoby za łatwo, gdyby tak nie było; moglibyśmy wówczas rozwiązywać trudne zadania po prostu śpiąc i czekając na dobry pomysł.

W dawnych czasach nagły dobry pomysł uważano za natchnienie, za dar bogów. Musisz zasłużyć sobie na ten dar pracą, a przynajmniej żarliwym pragnieniem (¹).

(¹) Po dokładniejsze omówienie „nieświadomego myślenia" odsyłamy czytelnika do Jacquesa Hadamarda, *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*.

Postęp i sukces. Czy posunąłeś się naprzód w rozwiązywaniu zadania? Co jest twoim zasadniczym osiągnięciem? Tego rodzaju pytania możemy kierować sami do siebie, gdy rozwiązujemy jakieś zadanie, albo do ucznia, którego pracę nadzorujemy. Tak więc jesteśmy przyzwyczajeni do oceniania, z większym czy mniejszym przybliżeniem, postępu i sukcesu w konkretnych przypadkach. Krok od takich konkretnych przypadków do ogólnego opisu nie jest wcale łatwy. Musimy go jednak dokonać, jeżeli chcemy, aby nasze badanie heurystyki było jako tako kompletne; musimy spróbować wyjaśnić, na czym w ogóle polega postęp i sukces w rozwiązywaniu zadań.

1. Aby rozwiązać zadanie, musimy posiadać pewną wiedzę o przedmiocie, którego zadanie dotyczy, i musimy wybrać i zebrać razem odpowiednie elementy naszej istniejącej, ale drzemiącej wiedzy. Nasze zrozumienie zadania jest znacznie lepsze pod koniec jego rozwiązywania, niż na początku. Co przybyło do naszego pojęcia o zadaniu? To, co nam się udało wydobyć z naszej pamięci. Aby rozwiązać zadanie, musimy przypomnieć sobie różne istotne fakty. Jeżeli rozwiązujemy zadanie matematyczne, to musimy przypomnieć sobie poprzednio rozwiązane zadania, znane twierdzenia i definicje. Wydobywanie z pamięci takich elementów można nazwać *mobilizacją*.

2. Jednakże aby rozwiązać zadanie, nie wystarczy zebrać izolowane fakty; musimy powiązać te fakty i ich kombinacja musi być dobrze dostosowana do danego zadania. Tak więc rozwiązując zadanie matematyczne, musimy zbudować rozumowanie wiążące cały zebrany materiał w dobrze dostosowaną do zadania całość. To dostosowywanie i wiązanie ze sobą faktów można nazwać *organizacją*.

3. W rzeczywistości jednak nigdy nie można mobilizacji i organizacji oddzielić od siebie. Pracując w skupieniu nad zadaniem przypominamy sobie jedynie fakty, które są mniej lub bardziej związane z celem, do którego dążymy, i wiążemy i organizujemy w jedną całość tylko te materiały, które zebraliśmy i zmobilizowaliśmy.

Mobilizacja i organizacja są jedynie dwoma *aspektami* tego samego złożonego procesu, który ma jeszcze wiele innych aspektów.

4. Inny aspekt postępu naszej pracy polega na tym, że nasz *sposób rozumienia zadania zmienia się*. Wzbogacone o te wszystkie materiały, które nam się przypomniały, dostosowane do nich i przerobione, nasze pojęcie o zadaniu jest o wiele pełniejsze pod koniec pracy niż było na początku. Pragnąc przejść od początkowego rozumienia zadania do bardziej adekwatnego, lepiej dostosowanego do naszej wiedzy, próbujemy różnych punktów widzenia, spoglądamy na zadanie z różnych stron. Trudno zrobić jakikolwiek postęp bez Modyfikacji zadania.

5. Gdy zbliżamy się do ostatecznego celu, widzimy go coraz lepiej, a gdy widzimy go lepiej, sądzimy, że jesteśmy bliżej niego. Gdy badanie naszego zadania postępuje naprzód, *przewidujemy* coraz wyraźniej, co należy zrobić, aby otrzymać rozwiązanie, i jak to należy zrobić. Gdy rozwiązujemy zadanie matematyczne, możemy przewidzieć — jeśli mamy szczęście — że można skorzystać z pewnego znanego twierdzenia, że może nam pomóc rozpatrzenie pewnego rozwiązanego uprzednio zadania albo że trzeba odwołać się do znaczenia pewnego terminu specjalnego. Takich rzeczy nie przewidujemy z całkowitą pewnością, a tylko z pewnym stopniem prawdopodobieństwa. Zyskamy zupełną pewność, gdy otrzymamy całkowite rozwiązanie, ale zanim dojdziemy do pewności, często musimy zadowolić się bardziej lub mniej prawdopodobnym domysłem. Bez rozważań, które są jedynie prawdopodobne i prowizoryczne, nigdy byśmy nie mogli znaleźć pewnego i ostatecznego rozwiązania. Potrzebujemy Rozumowania heurystycznego.

6. Co to jest postęp w kierunku rozwiązania? Jest to postępująca naprzód mobilizacja i organizacja naszej wiedzy, ewolucja naszego rozumienia zadania, rosnące przewidywania kroków, które utworzą ostateczne rozwiązanie. Możemy robić postępy stopniowo, małymi, niedostrzegalnymi krokami, ale od czasu do czasu możemy zrobić znaczny postęp nagle i zupełnie niespodziewanie. Taki nagły postęp w kierunku rozwiązania nazywamy Dobrym pomysłem, dobrą ideą, szczęśliwą myślą (w niemieckim istnieje bardziej specjalny termin: *Einfall*). Co to jest dobry pomysł? Niespodziewana i nagła zmiana naszego poglądu, nagła reorganizacja naszego sposobu pojmowania zadania, wynurzające się właśnie, pewne w naszym przekonaniu przewidywanie kroków, jakich należy dokonać, aby dojść do rozwiązania.

7. Przeprowadzone wyżej rozważania stanowią odpowiednią podstawę dla pytań i wskazówek naszej listy.

Wiele z tych pytań i wskazówek dąży bezpośrednio do *mobilizacji* naszej uprzednio zdobytej wiedzy: *Czy nie spotkałeś się już kiedyś z tym zadaniem? A może spotkałeś się z tym samym zadaniem w nieco innej postaci? Czy znasz jakieś pokrewne zadanie? Czy znasz jakieś twierdzenie, które mogłoby tu być użyteczne? Spójrz na niewiadomą! I spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze znane zadanie mające tę samą lub podobną niewiadomą.*

Są pewne typowe sytuacje, w których sądzimy, że zebraliśmy już odpowiedni materiał i dążymy do lepszej organizacji tego, co zmobilizowaliśmy: *Oto rozwiązane już* *przedtem zadanie pokrewne z twoim zadaniem. Czy nie mógłbyś z niego skorzystać? Czy nie mógłbyś skorzystać z jego wyniku? Czy nie mógłbyś skorzystać z zastosowanej w nim metody? Czy nie trzeba wprowadzić jakiegoś elementu pomocniczego, aby móc z tego zadania skorzystać?*

Są inne typowe sytuacje, w których sądzimy, że nie zebraliśmy jeszcze wystarczającego materiału. Zastanawiamy się, czego brak: *Czy skorzystałeś ze wszystkich danych? Czy skorzystałeś z całego warunku? Czy brałeś pod uwagę wszystkie istotne pojęcia zawarte w zadaniu?*

Niektóre pytania zmierzają bezpośrednio do modyfikacji zadania: *Czy nie mógłbyś postawić zadania na nowo, w inny sposób? Czy nie mógłbyś tego zrobić jeszcze inaczej?* Wiele pytań dąży do modyfikacji zadania w określony sposób, jak przez odwołanie się do DEFINICJI, przez korzystanie z ANALOGII, UOGÓLNIENIA, SPECJALIZACJI, ROZKŁADANIA I SKŁADANIA NA NOWO.

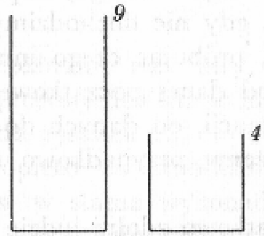
Jeszcze inne pytania sugerują, aby *przewidzieć* naturę rozwiązania, które chcemy otrzymać: *Czy warunek można spełnić? Czy warunek wystarcza do określenia niewiadomej? Czy jest on może niewystarczający? Albo zbyt obszerny? Albo sprzeczny?*

Pytania i wskazówki naszej listy nie wspominają bezpośrednio o *dobrym pomyśle*, w rzeczywistości jednak wszystkie są z nim związane. Starając się zrozumieć zadanie, przygotowujemy grunt pod dobry pomysł, układając plan rozwiązania staramy się go sprowokować, sprowokowawszy przeprowadzamy go, rzucając okiem wstecz na tok rozumowania i na wynik staramy się go lepiej wykorzystać (1).

(1) Niektóre sprawy omawiane w tym artykule są dokładniej rozpatrzone w artykule autora, Acta Psychologica 4 (1938), str. 113-170.

Praca od końca do początku. Jeżeli chcemy zrozumieć zachowanie się ludzi, to musimy porównać je z zachowaniem się zwierząt. Zwierzęta także „mają zadanie" i „rozwiązują zadania". Psychologia doświadczalna dokonała w ostatnich dziesięcioleciach zasadniczego postępu w badaniach czynności różnych zwierząt „rozwiązujących zadania". Nie możemy omówić tu tych badań, ale opiszemy szkicowo jedno proste i pouczające doświadczenie i nasz opis posłuży nam za pewnego rodzaju komentarz metody analizy, czyli metody „pracy od końca do początku". Nawiasem mówiąc, metodę tę omawiamy w tej książce także gdzie indziej, mianowicie w artykule poświęconym PAPPUSOWI, któremu zawdzięczamy ważny opis tej metody.

1. Spróbujmy odpowiedzieć na następujące trickowe pytanie: *Jak można przynieść z rzeki dokładnie sześć litrów wody, gdy mamy tylko dwa naczynia: czterolitrowe i dziewięciolitrowe?*



Rys. 21

Wyobraźmy sobie dokładnie dane narzędzia, za pomocą których mamy pracować: dwa naczynia. (*Co jest dane?*) Wyobraźmy sobie dwa cylindryczne naczynia o jednakowych podstawach, których wysokości mają się tak do siebie, jak 9 do 4 (patrz rysunek 21). Gdyby na powierzchni bocznej każdego naczynia była skala składająca się z poziomych linii poprowadzonych w równych odległościach, z której moglibyśmy odczytać wysokość poziomu wody, to nasze zadanie byłoby łatwe. Ale nie ma takiej skali na naczyniach, a więc jesteśmy wciąż daleko od rozwiązania.

Nie wiemy jeszcze, jak odmierzyć dokładnie sześć litrów; ale czy możemy odmierzyć jakąś inną ilość? (*Jeżeli nie możesz rozwiązać postawionego zadania, spróbuj najpierw rozwiązać jakieś zadanie pokrewne. Czy nie mógłbyś wydobyć czegoś pożytecznego z danych?*) Zróbmy coś, pobawmy się trochę. Moglibyśmy napełnić całkowicie większe naczynie i odlać z niego do mniejszego naczynia tyle wody, ile się w nim zmieści; w większym naczyniu zostałoby więc pięć litrów. Czy moglibyśmy także uzyskać sześć litrów? Oto znów nasze dwa puste naczynia. Moglibyśmy także...

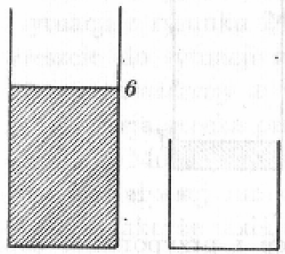
Postępujemy teraz tak samo jak większość ludzi, gdy spotyka się z tą zagadką. Zaczynamy od dwóch pustych naczyń, próbujemy tego i owego, napełniamy naczynia i je opróżniamy, a gdy nie dochodzimy do wyniku, zaczynamy od nowa, próbując czego innego. *Pracujemy od początku do końca,* od danej początkowej sytuacji do żądanej końcowej sytuacji, od danych do niewiadomej. Po wielu próbach możemy przypadkowo trafić na rozwiązanie.

2. Jednakże wyjątkowo zdolni ludzie albo ludzie, którzy mieli okazję nauczyć się na swoich lekcjach matematyki czegoś więcej niż tylko rutyniarskich operacji, nie tracą zbyt dużo czasu na takie próby, lecz odwracają zadanie i zaczynają pracować od końca do początku.

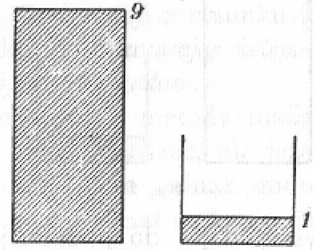
Co my mamy zrobić? (*Co jest niewiadome?*) Wyobraźmy sobie tak jasno jak tylko można sytuację końcową, do której zmierzamy. Wyobraźmy sobie, że oto mamy przed sobą większe naczynie z dokładnie sześcioma litrami

wody, a mniejsze naczynie puste, tak jak na rysunku 22. (*Zacznijmy od tego, co jest żądane* i *przypuśćmy, że to, czego szukamy, jest już znalezione* — powiada Pappus.)

Z jakiej poprzedniej sytuacji moglibyśmy otrzymać żądaną końcową sytuację wskazaną na rysunku 22? (*Zbadajmy, z jakich poprzednich elementów można by wyprowadzić żądany wynik* — powiada Pappus). Moglibyśmy oczywiście napełnić całkowicie większe naczynie, otrzymując dziewięć litrów. Ale następnie musielibyśmy być



Rys. 22



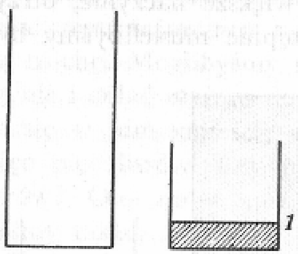
Rys. 23

w stanie wylać dokładnie trzy litry. Aby to uczynić... musimy mieć po prostu jeden litr w mniejszym naczyniu! To jest myśl. Patrz rysunek 23.

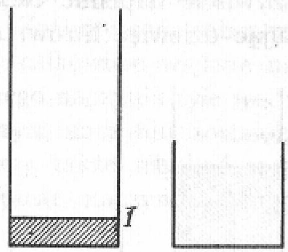
Krok, który dopiero co zrobiliśmy, nie jest łatwy. Niewiele osób jest w stanie wykonać go bez wielkiego wahania. Istotnie, zauważając znaczenie tego kroku przewidujemy od razu podany niżej zarys postępowania przy dalszym rozwiązywaniu.

Ale jak możemy osiągnąć wspomnianą przed chwilą sytuację, którą ilustruje rysunek 23? (*Zbadajmy, co dla tych poprzednich elementów mogłoby być poprzednim elementem.*) Ponieważ ilość wody w rzece jest dla naszych celów nieograniczona, więc sytuacja z rysunku 23 jest równoważna sytuacji z rysunku 24 albo sytuacji z rysunku 25.

Łatwo zauważyć, że jeśli mamy dowolną z sytuacji przedstawionych na rysunku 23, 24, i 25, to równie dobrze możemy osiągnąć każdą inną z tych sytuacji. Jednakże nie tak łatwo dojść do sytuacji przedstawionej na rysunku 25, chyba że *widzieliśmy ją już przedtem*, natknąwszy się na nią przypadkowo w jednej z naszych początkowych prób. Bawiąc się dwoma naczyniami mogli-

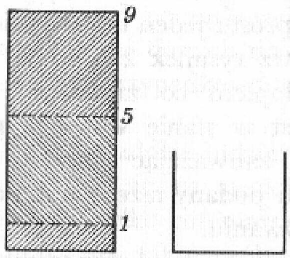


Rys. 24



Rys. 25

byśmy dojść do podobnej sytuacji i przypomnieć sobie teraz, we właściwym momencie, że sytuacja z rysunku 25 może powstać tak, jak sugeruje rysunek 26: Napełniamy



Rys 26

całkowicie większe naczynie i przelewamy z niego cztery litry wody do mniejszego naczynia, a następnie do rzeki; z pozostałej w większym naczyniu wody powtórnie przelewamy do mniejszego naczynia, a następnie do rzeki

cztery litry wody. *Doszliśmy wreszcie do czegoś już znanego* (są to słowa Pappusa) i korzystając z metody analizy, *pracując od końca do początku*, odkryliśmy właściwy ciąg operacji.

Wprawdzie odkryliśmy właściwy ciąg operacji w odwrotnym porządku, ale wszystko, co nam zostało do zrobienia, to tylko *odwrócić proces* i *zacząć od tego, do czego doszliśmy na końcu analizy*(jak mówi Pappus). Najpierw dokonujemy operacji wskazanych przez rysunek 26 i otrzymujemy sytuację z rysunku 25; następnie przechodzimy do sytuacji z rysunku 24, dalej do sytuacji z rysunku 23 i wreszcie do sytuacji z rysunku 22. *Odwracając kolejność kroków wprowadzamy w końcu to, co było żądane.*

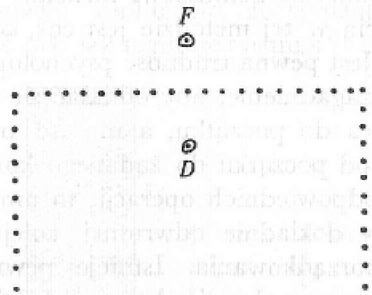
3. Tradycja grecka przypisuje odkrycie metody analizy Platonowi. Można by się z tym nie zgadzać, ale jeżeli nawet metody tej nie odkrył Platon, to jednak godny uwagi jest fakt, że jakiś uczony grecki uznał za konieczne przypisać to odkrycie geniuszowi filozofa.

I z pewnością w tej metodzie jest coś, co nie jest powierzchowne. Jest pewna trudność psychologiczna w tym, aby odwrócić zagadnienie, aby oddalać się od celu, pracować od końca do początku, a nie iść prostą, bezpośrednią drogą od początku do żądanego końca. Gdy odkryjemy ciąg odpowiednich operacji, to umysł nasz musi je rozważać w dokładnie odwrotnej kolejności od ich aktualnego uporządkowania. Istnieje pewnego rodzaju psychologiczny wstręt do tej odwrotnej kolejności; w wyniku tego nawet zdolny uczeń może nie zrozumieć metody analizy, jeżeli nie przedstawimy jej bardzo starannie.

Jednakże nie trzeba być geniuszem, aby rozwiązać konkretne zadanie idąc od końca do początku; może to zrobić każdy, kto ma nieco zdrowego rozsądku. Koncentrujemy się nad żądanym celem; wyobrażamy sobie końcową sytuację, w której chcielibyśmy się znaleźć. Z jakiej poprzedniej sytuacji moglibyśmy przejść do naszej końcowej sytuacji? Jest to zupełnie naturalne pytanie; zadając je pracujemy w przeciwnym kierunku: od końca do początku. Zupełnie prymitywne zadania mogą w sposób naturalny doprowadzić do pracy od końca; patrz Pappus, punkt 4.

Praca od końca do początku jest procesem leżącym w zasięgu każdego zdrowo myślącego człowieka i niewątpliwie była stosowana w praktyce przez matematyków i niematematyków jeszcze przed Platonem. To, co grecki uczony mógł uznać za osiągnięcie godne geniusza Platona, to sformułowanie tego procesu w sposób ogólny i uznanie go za szczególnie użyteczną operację przy rozwiązywaniu matematycznych i niematematycznych zadań.

4. A teraz zajmiemy się doświadczeniem psychologicznym, choć może przejście od Platona do psów, kur i szym-



Rys. 27

pansów wyda się zbyt raptowne. Płot tworzy trzy boki prostokąta; czwarty bok jest niezagrodzony (patrz rysunek 27). Po jednej stronie płotu, w punkcie D, stawiamy psa, a po drugiej, w punkcie F, umieszczamy pożywienie. Dla psa jest to zadanie dość łatwe. Zapewne przysiądzie

on najpierw, jak gdyby chciał skoczyć prosto do pożywienia, ale następnie szybko odwróci się, obiegnie w pośpiechu koniec płotu i z łatwością dopadnie do pożywienia. Jednakże czasami, szczególnie gdy punkty D i F są blisko siebie, rozwiązanie może nie być takie proste; pies może stracić trochę czasu na szczekanie, wdrapywanie się i skakanie na płot zanim „wpadnie na dobry pomysł“ (jakbyśmy powiedzieli), obiegnięcie płotu dookoła.

Ciekawe jest porównanie zachowania się różnych zwierząt postawionych na miejscu psa. Zadanie jest bardzo łatwe dla szympansa czy dla czteroletniego dziecka (dla którego trzeba by było położyć bardziej atrakcyjną przynętę niż pożywienie). Jednakże zadanie staje się niespodziewanie trudne dla kury, która biega podniecona tam i z powrotem wzdłuż swojej strony płotu i może stracić dużo czasu, zanim dobierze się do pożywienia, o ile w ogóle doń się dobierze. Może się to jednak przypadkowo udać po długiej bieganinie.

5. Nie możemy budować wielkiej teorii na podstawie jednego prostego doświadczenia, które przedstawiliśmy tu tylko szkicowo. Może być jednak pożyteczne zanotować pewne oczywiste analogie, pod warunkiem, że jesteśmy przygotowani na powtórne ich sprawdzenie i przemyślenie.

Przy rozwiązywaniu dowolnego rodzaju zadania musimy obejść jakąś przeszkodę; nasze doświadczenie z pożywieniem może więc mieć dla nas pewną symboliczną wartość. Kura postępowała jak ludzie, którzy rozwiązują swoje zadania dokonując wielu mozolnych prób i dochodzą w końcu do celu jedynie przez szczęśliwy przypadek, bez wniknięcia w powody, dla których ten cel osiągnęli. Pies, który wdrapywał się, skakał i szczekał zanim obiegł płot, rozwiązał swoje zadanie mniej więcej tak dobrze, jak my swoje zadanie z dwoma naczyniami. Wyobrażenie sobie skali, która wskazuje poziom wody w naszych naczyniach, było swego rodzaju niemal bezużytecznym wdrapywaniem się wskazującym jedynie, że to, do czego dążymy, nie jest takie proste. My także, podobnie jak pies, staraliśmy się najpierw iść do naszego celu bezpośrednio, a dopiero potem wpadliśmy na pomysł zmiany kierunku badań. Pies, który po krótkim zbadaniu sytuacji odwrócił się i szybko obiegł płot, robi wrażenie — słuszne czy nie — obdarzonego większą intuicją niż my.

Nie powinniśmy jednak nawet kury ganić za jej niezgrabność. Trudno jest odwrócić się i oddalać się od celu, posuwać się nie patrząc nań ustawicznie, nie iść prostą drogą do upragnionego celu. Istnieje oczywista analogia między oporami i trudnościami kury i naszymi.

Przyszły matematyk powinien sprytnie rozwiązywać zadania; ale to nie wystarcza. W swoim czasie będzie on rozwiązywał ważne problemy matematyczne; ale przedtem powinien odkryć, jaki rodzaj problemów szczególnie odpowiada jego wrodzonym zdolnościom.

Dla niego najważniejszą częścią pracy nad zadaniem jest rzut oka wstecz na kompletne rozwiązanie. Przyglądając się tokowi swej pracy i ostatecznej postaci rozwiązania może znaleźć dużo różnych rzeczy godnych uwagi. Może zastanowić się nad trudnością zadania i nad decydującym o rozwiązaniu pomyśle; może próbować uchwycić, co mu przeszkadzało, a co mu ostatecznie pomogło. Może zwrócić uwagę na proste, intuicyjne idee: *Czy możesz objąć to jednym rzutem oka?* Może zastosować i porównać różne metody: *Czy możesz otrzymać wynik w inny sposób?* Może starać się głębiej wniknąć w swoje zadanie porównując je z zadaniami poprzednio rozwiązanymi; może starać się wymyślić nowe zadania, które mógłby rozwiązać w oparciu o całkowicie zakończoną właśnie pracę: *Czy możesz wykorzystać wynik albo metodę rozwiązania do innego zadania?* Przemyślawszy rozwiązane przez siebie zadania tak dokładnie, jak tylko można, może zdobyć dobrze uporządkowaną wiedzę, gotową do dalszego użytku.

Przyszły matematyk uczy się, tak jak każdy, przez naśladowanie i praktykę. Powinien poszukać sobie właściwego modelu do naśladowania. Powinien bacznie obserwować dobrego nauczyciela. Powinien współzawodniczyć ze zdolnym kolegą. Następnie powinien — i to jest bodaj najważniejsze — czytać nie tylko obowiązujące podręczniki, ale także inne książki dobrych autorów, aż natrafi na takiego autora, którego naśladowanie najbardziej mu odpowiada. Powinien szukać i cieszyć się z wszystkiego co wydaje mu się proste, pouczające lub piękne. Powinien rozwiązywać zadania, wybierać te, które mu najbardziej odpowiadają, rozważać ich rozwiązania i wymyślać nowe zadania. W ten sposób i wszelkimi innymi sposobami powinien starać się dokonać swego pierwszego ważnego odkrycia: powinien odkryć, co lubi, a czego nie lubi, powinien odkryć swój gust, swoje upodobania.

***Reductio ad absurdum* i dowód nie wprost** są to różne, choć pokrewne procesy.

Reductio ad absurdum wykazuje fałszywość założenia przez wyprowadzenie zeń oczywistego absurdu. „Sprowadzenie do niedorzeczności" jest metodą matematyczną, ale wykazuje pewne podobieństwo do ironii, która jest ulubioną metodą satyryków. Ironia pozornie zgadza się z pewną opinią, uwypukla ją, przesadza, aż wreszcie doprowadza ją do oczywistego absurdu.

Dowód nie wprost ustanawia prawdziwość twierdzenia przez wykazanie fałszywości przypuszczenia przeciwnego do tego twierdzenia. A więc dowód nie wprost wykazuje pewne podobieństwo do chwytu polityka, który wywyższa jednego kandydata w ten sposób, że szkaluje jego konkurenta.

Zarówno *reductio ad absurdum*, jak i dowód nie wprost są skutecznymi narzędziami przy dokonywaniu odkryć, dla wnikliwego umysłu zupełnie naturalnymi. Jednakże niektórzy filozofowie i wielu początkujących nie lubi tych metod; jest to zupełnie zrozumiałe; przecież także satyrycy i stosujący tricki politycy nie zwracają się do wszystkich ludzi. Najpierw zilustrujemy skuteczność obu metod na przykładach, a następnie omówimy pewne zastrzeżenia przeciw nim.

1. *Reductio ad absurdum.* Napiszcie kilka liczb, używając każdej z dziesięciu cyfr dokładnie raz, tak aby suma liczb wynosiła 100.

Możemy się czegoś nauczyć próbując rozwiązać tę zagadkę, której sformułowanie wymaga pewnych wyjaśnień.

Co jest niewiadome? Pewien zbiór liczb; przy tym przez liczby rozumiemy tu oczywiście liczby naturalne.

Co jest dane? Liczba 100.

Jaki jest warunek? Warunek ma dwie części. Po pierwsze, wypisując żądany zbiór liczb musimy użyć każdą z dziesięciu cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dokładnie jeden raz. Po drugie, suma wszystkich liczb tego zbioru musi być równa 100.

Zatrzymaj tylko część warunku, resztę odrzuć. Pierwszą część warunku łatwo jest spełnić. Weźmy liczby 19, 28, 37, 46, 50 każda cyfra występuje dokładnie raz. Ale druga część warunku nie jest oczywiście spełniona; suma liczb wynosi

180, a nie 100. Moglibyśmy jednak postępować lepiej. „Próbuj, próbuj od nowa". I oto

$$19+28+30+7+6+5+4=99.$$

Pierwsza część warunku jest spełniona, a druga część jest prawie spełniona; zamiast 100 otrzymaliśmy 99. Oczywiście łatwo możemy spełnić drugą część warunku, jeśli odrzucimy pierwszą:

$$19+28+31+7+6+5+4=100.$$

Pierwsza część warunku jest niespełniona: cyfra 1 występuje dwa razy, a cyfra 0 ani razu; inne cyfry są w porządku. „Próbuj, próbuj od nowa".

Jednakże po kilku niepomyślnych próbach możemy zwątpić, czy w ogóle jest możliwe otrzymać 100 w żądany sposób. W końcu powstaje takie zadanie: *Udowodnić, że jest niemożliwe spełnić jednocześnie obie części podanego warunku.*

Zupełnie dobrze uczniowie mogą stwierdzić, że jest to zadanie ponad ich siły. Jednakże przy właściwym podejściu rozwiązanie jest dość proste. *Powinniśmy zbadać hipotetyczną sytuację, w której obie części warunku są spełnione.*

Przypuszczamy, że taka sytuacja w rzeczywistości nie może mieć miejsca, i nasze przypuszczenie ma pewne podstawy, gdyż opiera się na naszych nieudolnych próbach. Jednakże nie przesądzajmy sprawy i rozpatrzmy sytuację, w której hipotetycznie, rzekomo, obie części warunku są spełnione. Wyobraźmy więc sobie zbiór liczb, których suma wynosi 100. Muszą to być liczby jedno- lub dwucyfrowe.

Cyfr, za pomocą których zapisane są nasze liczby, jest dziesięć i muszą to być różne cyfry, gdyż każda z cyfr

0, 1, 2, ..., 9 ma wystąpić dokładnie raz. Tak więc suma cyfr wszystkich naszych liczb wynosi

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$$

Niektóre z tych cyfr oznaczają jednostki, inne dziesiątki. Nie trzeba wielkiej przenikliwości, aby wpaść na myśl, że suma cyfr oznaczających dziesiątki może grać dużą rolę. Niech więc t oznacza tę sumę. Suma pozostałych cyfr, oznaczających jednostki, wynosi zatem $45-t$. Stąd suma wszystkich liczb naszego zbioru musi być równa

$$10t+(45-t)=100.$$

Mamy tu równanie, z którego można wyznaczyć t. Jest to równanie pierwszego stopnia. Daje ono

$$t=\frac{55}{9}.$$

A więc coś jest niewątpliwie nie w porządku. Wartość na t, jaką znaleźliśmy, nie jest liczbą naturalną, a t powinno oczywiście być liczbą naturalną. Wychodząc z przypuszczenia, że obie części naszego warunku można jednocześnie spełnić, doszliśmy do jawnej niedorzeczności. Jak można to wyjaśnić? Nasze początkowe przypuszczenie musi być fałszywe, obie części warunku *nie mogą* być jednocześnie spełnione. Tak więc osiągnęliśmy swój cel; udało nam się udowodnić, że dwie części podanego warunku nie dadzą się ze sobą pogodzić.

Nasze rozumowanie jest typowym *reductio ad absurdum*.

2. *Uwagi*. Rzućmy okiem wstecz na powyższe rozumowanie i spróbujmy zrozumieć jego główną myśl.

Chcemy udowodnić, że pewnego warunku nie można spełnić, tj. że nigdy nie może powstać sytuacja, w której

wszystkie części warunku są jednocześnie spełnione. Ale zanim jeszcze cokolwiek udowodniliśmy, musimy się liczyć z możliwością powstania takiej sytuacji. Tylko przez postawienie sobie takiej hipotetycznej sytuacji i przez dokładne jej zbadanie możemy mieć nadzieję, że zauważymy w niej coś zdecydowanie błędnego. I musimy znaleźć jakiś taki zdecydowanie błędny punkt, jeżeli chcemy wykazać, że ta hipotetyczna sytuacja jest niemożliwa. Możemy więc zauważyć, że procedura, która okazała się owocna w naszym przykładzie, jest w ogólności rozsądna: Musimy zbadać hipotetyczną sytuację, w której spełnione są wszystkie części warunku, *mimo że taka sytuacja wygląda na bardzo mało prawdopodobną*.

Bardziej doświadczony czytelnik może tu zauważyć jeszcze inną rzecz. Główny krok naszego postępowania polegał na ułożeniu równania względem t. Otóż moglibyśmy dojść do tego samego równania bez przypuszczenia, że coś jest nie w porządku w warunku. Jeżeli chcemy ułożyć równanie, musimy wyrazić w języku matematycznym fakt, że wszystkie części warunku są spełnione, *mimo że jeszcze nie wiemy, czy jest rzeczywiście możliwe spełnienie jednocześnie wszystkich części tego warunku.*

Nasze postępowanie nie przesądza sprawy. Możemy spodziewać się, że znajdziemy niewiadomą spełniającą warunek, albo możemy spodziewać się, że wykażemy niemożliwość spełnienia warunku. Jeżeli badanie jest dobrze przeprowadzone, to w obu przypadkach rozpoczyna się w ten sam sposób: od zbadania hipotetycznej sytuacji, w której warunek jest spełniony. Dopiero dalszy tok badania pokazuje, która nadzieja była słuszna.

Porównaj artykuł FIGURY GEOMETRYCZNE, punkt 2. Porównaj także artykuł PAPPUSA; analiza, która kończy się obaleniem danego twierdzenia albo pokazaniem, że dane zadanie typu „znaleźć" nie ma rozwiązania, jest to w rzeczywistości *reductio ad absurdum*.

3. *Dowód nie wprost.* Liczby pierwsze są to liczby 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,..., których nie można rozłożyć na mniejsze czynniki, chociaż one są większe od 1. (To ostatnie zdanie wyklucza liczbę 1, której oczywiście nie można rozłożyć na mniejsze czynniki, ale która jest innej natury i nie powinna być zaliczana do liczb pierwszych.) Liczby pierwsze są „podstawowymi elementami", na które można rozłożyć wszystkie liczby całkowite (większe od 1). Na przykład

$$630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

rozkłada się na iloczyn pięciu liczb pierwszych.

Czy ciąg liczb pierwszych jest nieskończony, czy też gdzieś się kończy? Naturalne jest przypuszczenie, że ciąg liczb pierwszych nigdy się nie kończy. Gdyby się gdzieś kończył, to wszystkie liczby całkowite można by rozłożyć na skończoną liczbę podstawowych elementów i świat okazałby się „zbyt ubogi". Powstaje więc zadanie udowodnienia istnienia nieskończenie wielu liczb pierwszych.

Zadanie to bardzo się różni od typowych zadań z matematyki elementarnej, i początkowo wydaje się bardzo niedostępne. Ale jak powiedzieliśmy, jest bardzo mało prawdopodobne, aby istniała ostatnia liczba pierwsza, powiedzmy P. Dlaczego jest to tak mało prawdopodobne?

Wyobraźmy sobie taką mało prawdopodobną sytuację, w której hipotetycznie, rzekomo, istnieje ostatnia liczba pierwsza P. Moglibyśmy wtedy wypisać ciąg wszystkich liczb pierwszych 2, 3, 5, 7, 11, ..., P. Dlaczego jest to tak mało prawdopodobne? Co w tym jest złego? Czy moglibyśmy wskazać na coś, co jest zupełnie błędne? Otóż

istotnie, możemy. Możemy zbudować liczbę

$$Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot P) + 1.$$

Liczba Q jest większa od P, a więc rzekomo Q nie może być liczbą pierwszą. W konsekwencji Q musi dzielić się przez jakąś liczbę pierwszą. Otóż wszystkie liczby pierwsze, jakie według naszego przypuszczenia istnieją, to liczby 2, 3, 5, ..., P, ale Q przy dzieleniu przez każdą z tych liczb daje resztę 1; tak więc Q nie dzieli się przez żądaną ze wspomnianych liczb pierwszych, które według przypuszczenia są wszystkimi liczbami pierwszymi. Mamy więc coś, co jest zdecydowanie nie w porządku; Q musi albo być liczbą pierwszą, albo musi być podzielne przez jakąś liczbę pierwszą. Wychodząc z przypuszczenia, że istnieje ostatnia liczba pierwsza, doszliśmy do oczywistego absurdu. Jak to można wyjaśnić? Nasze początkowe przypuszczenie musi być błędne; nie może być ostatniej liczby pierwszej. I w ten sposób udało nam się udowodnić, że ciąg liczb pierwszych nigdy się nie kończy.

Nasz dowód jest typowym dowodem nie wprost. (Przy tym jest to słynny dowód, pochodzący do Euklidesa; patrz twierdzenie 20 Księgi IX *Elementów*.)

Udowodniliśmy nasze twierdzenie (że ciąg liczb pierwszych nigdy się nie kończy) przez obalenie sprzecznego z nim twierdzenia przeciwnego (że ciąg liczb pierwszych gdzieś się kończy), które obaliliśmy przez wyprowadzenie z niego oczywistego absurdu. Połączyliśmy więc dowód nie wprost z *reductio ad absurdum*; połączenie to jest także bardzo typowe.

4. *Zastrzeżenia.* Badane przez nas postępowania spotykają się z pewną opozycją. Podnosi się przeciw nim wiele zastrzeżeń, które — jak się zdaje — są tylko różnymi postaciami tego samego podstawowego zastrzeżenia. Omó-

wiliśmy tutaj znajdującą się na poziomie tej książki „praktyczną" postać tego zastrzeżenia.

Znaleźć nieoczywisty dowód jest pewnym osiągnięciem intelektualnym, ale nauczyć się takiego dowodu, albo nawet tylko zrozumieć go całkowicie, wymaga także pewnego wysiłku umysłu. Jest zupełnie naturalne, że chcemy wyciągnąć jakąś korzyść z naszego wysiłku, zatrzymać coś w pamięci; to, co zatrzymujemy w pamięci powinno — rzecz prosta — być prawdziwe i poprawne, a nie fałszywe i niedorzeczne.

Wydaje się jednak, że jest trudno zapamiętać coś prawdziwego z metody *reductio ad absurdum*. Metoda ta zaczyna od fałszywego przypuszczenia i wyprowadza zeń równie fałszywe, choć może bardziej widocznie fałszywe wnioski, aż dochodzi do ostatniego, jawnie fałszywego wniosku. Jeżeli nie chcemy przechowywać w naszej pamięci fałszu, to powinniśmy to wszystko jak najszybciej zapomnieć. Nie jest to jednak możliwe do wykonania, ponieważ w czasie dowodzenia musimy wszystkie kroki dokładnie pamiętać.

Zastrzeżenie skierowane pod adresem dowodu niewprost można sformułować bardzo krótko. Słuchając takiego dowodu musimy przez cały czas skupiać naszą uwagę na fałszywym przypuszczeniu, które powinniśmy zapomnieć, a nie na prawdziwym twierdzeniu, które powinniśmy zapamiętać.

Jeżeli chcemy właściwie ocenić istotę tych zastrzeżeń, to musimy rozróżnić dwa rodzaje korzystania z *reductio ad absurdum*: możemy stosować *reductio ad absurdum* albo jako narzędzie badania, albo jako sposób wyjaśnienia. To samo dotyczy dowodu nie wprost.

Należy stwierdzić, że *reductio ad absurdum* jako sposób wyjaśniania nie jest niczym niezmąconym błogosławieństwem. Takie *reductio*, zwłaszcza gdy jest długie, może stać się dla czytelnika czy słuchacza bardzo dokuczliwe. Wszystkie wyprowadzenia, które kolejno wykonujemy, są poprawne, ale wszystkie sytuacje, z jakimi się spotykamy, są niemożliwe. Nawet wysławianie się może stać się nużące, jeżeli — jak powinno — stale podkreśla, że wszystko opiera się na początkowym przypuszczeniu; słowa „hipotetycznie", „zgodnie z przypuszczeniem", „rzekomo" muszą się nieustannie powtarzać. Chcemy daną sytuację odrzucić i zapomnieć o niej, gdyż jest niemożliwa, ale z drugiej strony musimy ją mieć w pamięci i badać ją, gdyż jest podstawą do zrobienia następnego kroku. Ta wewnętrzna sprzeczność może stać się na dalszą metę nieznośna.

Byłoby jednak głupio wyrzec się metody „*reductio ad absurdum*" jako narzędzia pozwalającego dokonywać odkrycia. Może ona w sposób naturalny wypłynąć sama i przynieść rozstrzygnięcie, gdy wydaje się, że wszystkie inne sposoby zostały już wyczerpane. Pokazują to poprzednie przykłady.

Trzeba nieco doświadczenia, aby zauważyć, że nie ma zasadniczej sprzeczności w naszych dwóch stanowiskach. Doświadczenie uczy, że zazwyczaj nie jest zbyt trudno zamienić dowód nie wprost na dowód bezpośredni albo doprowadzić dowód znaleziony przez długie *reductio ad absuraum* do bardziej przyjemnej postaci, w której *reductio ad absurdum* może zniknąć zupełnie (albo też po odpowiednich przygotowaniach można je zredukować do kilku trafnych zdań).

Krótko mówiąc, jeżeli chcemy w pełni wykorzystać nasze zdolności, to powinniśmy być zaznajomieni zarówno z metodą *reductio ad absurdum*, jak i z metodą dowodu nie wprost. Jednakże gdy udało nam się dojść do wyniku jedną z tych metod, nie powinniśmy zapomnieć o spojrzeniu wstecz na rozwiązanie i zapytaniu: *Czy możesz otrzymać wynik w inny sposób?*

Zilustrujemy teraz przykładami to, o czym była mowa.

5. *Przekształcenie reductio ad absurdum.* Rzućmy okiem wstecz na rozumowanie podane w punkcie 1. *Reductio ad absurdum* zaczynało się od sytuacji, która — jak się później okazało — jest niemożliwa. Wydobądźmy jednak z rozumowania tę jego część, która jest niezależna od początkowego fałszywego przypuszczenia i zawiera prawdziwą informację. Śledząc na nowo to, co poprzednio zrobiliśmy, możemy zauważyć, że następujące stwierdzenie jest bez wątpienia prawdziwe: Jeżeli do zapisania jedno- lub dwucyfrowych liczb pewnego zbioru użyto wszystkich dziesięciu cyfr, i to każdej tylko raz, to suma liczb tego zbioru jest postaci

$$10t + (45 - t) = 9(t + 5).$$

A więc suma ta jest podzielna przez 9. Nasza zagadka żąda zaś, aby ta suma była równa 100. Czy to jest możliwe? Oczywiście nie, gdyż 100 nie dzieli się przez 9.

Reductio ad absurdum, które doprowadziło do odkrycia dowodu, znikło zupełnie w naszej nowej postaci dowodu.

Nawiasem mówiąc, czytelnik obeznany z metodą „wykluczania dziewiątek“ może teraz objąć całe rozumowanie jednym rzutem oka.

6. *Odwrócenie dowodu nie wprost.* Rzućmy okiem wstecz na rozumowanie podane w punkcie 3. Śledząc ponownie uważnie to, co zrobiliśmy, możemy znaleźć elementy dowodu, które są niezależne od jakichkolwiek fałszywych przypuszczeń. Jednakże, jeśli chcemy znaleźć dowód bezpośredni, to najlepiej rozpatrzyć na nowo sens samego wyjściowego zadania.

Co mamy na myśli, mówiąc że ciąg liczb pierwszych nigdy się nie kończy? Oczywiście rzecz następującą: gdy ustalimy jakikolwiek skończony zbiór liczb pierwszych $2, 3, 5, 7, 11, \ldots, P$, gdzie P jest ostatnią znalezioną do tej pory liczbą pierwszą, to zawsze znajdzie się jeszcze jedna liczba pierwsza. Co więc musimy zrobić, aby udowodnić istnienie nieskończenie wielu liczb pierwszych? Musimy wskazać sposób znajdowania liczby pierwszej różnej od wszystkich znalezionych dotąd liczb pierwszych. Tak więc nasze zadanie typu „udowodnić“ sprowadziło się w gruncie rzeczy do zadania „typu znaleźć“. *Mając dane liczby pierwsze* $2, 3, 5, \ldots, P$ *znaleźć nową liczbę pierwszą* N *różną od wszystkich danych liczb pierwszych.*

Sformułowawszy na nowo nasze początkowe zadanie w tej postaci, dokonaliśmy zasadniczego kroku. Jest już teraz dość łatwo zauważyć, jak skorzystać z istotnych części naszego poprzedniego dowodu dla nowego celu. Istotnie, liczba

$$Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot P) + 1$$

jest z pewnością podzielna przez jakąś liczbę pierwszą. Weźmy teraz — i to jest główna myśl — jako N dowolny (na przykład najmniejszy) dzielnik pierwszy liczby Q. (Jeżeli okaże się, że Q jest liczbą pierwszą, to oczywiście $N = Q$.) Liczba Q przy dzieleniu przez każdą z liczb pierwszych $2, 3, 5, \ldots, P$ daje — jak łatwo widać — resztę 1. Żadna z nich nie może być więc liczbą N, która jest dzielnikiem liczby Q. Ale to jest właśnie to, o co nam chodzi: N jest liczbą pierwszą i jest różne od wszystkich znalezionych dotąd liczb pierwszych $2, 3, 5, 7, 11, \ldots, P$.

Dowód ten podaje określoną metodę przedłużania coraz dalej, bez końca, ciągu liczb pierwszych. Nie ma w niej nic „nie wprost“, nie trzeba rozpatrywać żadnej niemożliwej sytuacji. Jednakże w zasadzie jest to to samo, co nasz poprzedni dowód nie wprost, który udało nam się odwrócić, zamienić na dowód bezpośredni.

Reguły dokonywania odkryć. Pierwszą regułą dokonywania odkryć jest mieć zdolności i szczęście. Drugą regułą jest być wytrwałym dotąd, aż wpadniesz na dobry pomysł.

Warto chyba przypomnieć, choć może to być trochę brutalne, że dążenie do znalezienia niezawodnych reguł dokonywania odkryć jest beznadziejne. Tego rodzaju reguły prowadzące do rozwiązania wszelkich możliwych problemów matematycznych byłyby bardziej pożądane niż kamień filozoficzny, daremnie poszukiwany przez alchemików. Takie reguły dokonywałyby cudów; na świecie nie ma jednak cudów. Znalezienie niezawodnych reguł, dających się stosować do wszelkiego rodzaju problemów jest odwiecznym marzeniem filozofów; jednak marzenie to pozostanie na zawsze tylko marzeniem.

Rozsądny rodzaj heurystyki nie może dążyć do znalezienia niezawodnych reguł; ale może dążyć do zbadania tych metod (operacji myślowych, posunięć, kroków), które są na ogół użyteczne przy rozwiązywaniu zadań. Z metod tych korzysta każdy rozsądny człowiek, dostatecznie zainteresowany swoim zadaniem. Na te metody naprowadzają pewne stereotypowe pytania i wskazówki, które inteligentni ludzie sami sobie podsuwają, a inteligentny nauczyciel podsuwa swoim uczniom. Zbiór takich pytań i wskazówek sformułowanych dostatecznie ogólnie i odpowiednio uporządkowanych jest pewnie mniej pożądany niż kamień filozoficzny, ale można go podać. Lista pytań i wskazówek, którą badamy w tej książce, jest właśnie takim zbiorem.

Reguły uczenia. Pierwszą regułą uczenia jest umieć to, czego masz nauczyć. Drugą regułą uczenia jest umieć trochę więcej niż to, czego masz nauczyć.

Autor tej książki nie sądzi, aby wszystkie reguły postępowania były dla nauczycieli zupełnie bezużyteczne; w przeciwnym przypadku nie odważyłby się napisać całej książki o właściwym postępowaniu nauczycieli i uczniów. Jednakże nie należy zapominać, że nauczyciel matematyki musi umieć nieco matematyki, a nauczyciel pragnący nauczyć swych uczniów właściwego podejścia do zadań musi sam to podejście posiadać.

Reguły wysławiania się. Pierwszą regułą wysławiania się jest mieć coś do powiedzenia. Drugą regułą jest kontrolowanie siebie, gdy masz dwie rzeczy do powiedzenia: najpierw powiedz pierwszą rzecz, a potem drugą, a nie obie jednocześnie.

Rozkładanie i składanie na nowo to ważne procesy umysłowe.

Przypuśćmy, że badasz pewien interesujący cię obiekt: dom, który masz zamiar wynająć, ważny lecz niezrozumiały telegram, jakiś przedmiot, którego pochodzenie i przeznaczenie jest dla ciebie zagadką, albo jakikolwiek problem, który masz zamiar rozwiązać. Masz już pewne pojęcie o tym obiekcie jako o całości, ale to pojęcie jest — być może — nie wystarczająco jasne. Wtedy uderza cię jakiś szczegół i całą swoją uwagę skupiasz na nim. Następnie rozpatrujesz inny szczegół, a potem jeszcze inny. Samorzutnie mogą powstać pewne kombinacje szczegółów i po chwili znów patrzysz na obiekt jako na całość, ale wygląda on już nieco inaczej. Rozkładasz całość na części, a następnie składasz te części na nowo w całość, która wydaje się już w mniejszym lub większym stopniu inna.

1. Jeżeli przechodzisz do szczegółów, to możesz się w nich zgubić. Zbyt wiele szczegółów lub zbyt drobiazgowe szczegóły stanowią obciążenie umysłu. Szczegóły mogą spowodować, że zwrócisz za małą uwagę na rzecz zasadniczą albo w ogóle jej nie ujrzysz. Pomyśl o człowieku w lesie, któremu drzewa przeszkadzają ten las zobaczyć.

Nie chcemy, rzecz prosta, tracić czasu na niepotrzebne szczegóły; musimy zachować nasze siły na rzecz istotną. Trudność polega jednak na tym, że nie możemy z góry przewidzieć, które szczegóły okażą się w końcu potrzebne, a które nie.

Dlatego też należy przede wszystkim zrozumieć zadanie jako całość. Zrozumiawszy zadanie będziemy lepiej mogli osądzić, które szczegóły będą najistotniejsze. Zbadawszy jeden czy dwa istotne szczegóły będziemy mogli lepiej osądzić, które dalsze szczegóły zasługują na bliższe zbadanie. Przechodźmy do szczegółów i rozkładajmy zadanie na części stopniowo, ale nie posuwajmy się w tym dalej, niż trzeba.

Oczywiście, nauczyciel nie może oczekiwać, że wszyscy uczniowie będą postępowali rozsądnie. Przeciwnie, wielu uczniów ma bardzo niemądry i zły zwyczaj zabierania się do szczegółów przed zrozumieniem zadania jako całości.

2. Rozpatrzmy teraz zadanie matematyczne, zadanie typu „znaleźć".

Zrozumiawszy zadanie jako całość, zrozumiawszy jego cel, jego istotę, chcemy przejść do szczegółów. Od czego powinniśmy zacząć? Prawie we wszystkich przypadkach rozsądnie jest zacząć od rozpatrzenia głównych części zadania, którymi są niewiadoma, dane i warunek. Prawie we wszystkich przypadkach wskazane jest rozpocząć szczegółowe badanie zadania od pytań: *Co jest niewiadome? Co jest dane? Jaki jest warunek?*

Co powinniśmy zrobić, jeżeli chcemy zbadać dalsze szczegóły? Często wskazane jest zbadać każdy szczegół osobno, *wydzielić poszczególne części warunku* i zbadać je osobno.

Może się okazać konieczne, zwłaszcza gdy nasze zadanie jest trudniejsze, rozłożyć zadanie jeszcze bardziej, zbadać jeszcze więcej szczegółów. Może się okazać konieczne *odwołać się do definicji* jakiegoś terminu, wprowadzić i zbadać nowe elementy zawarte w definicji.

3. Po rozłożeniu zadania staramy się złożyć na nowo jego elementy w jakiś inny sposób. W szczególności możemy próbować utworzyć z elementów naszego zadania jakieś inne, łatwiejsze zadanie, które — być może — moglibyśmy wykorzystać jako zadanie pomocnicze.

Istnieją oczywiście nieograniczone możliwości składania elementów zadania na nowo. Trudne zadania wymagają oryginalnych, wyjątkowych, zamaskowanych kombinacji. Pomysłowość rozwiązującego zadanie przejawia się w oryginalności kombinowania elementów zadania. Istnieją jednak pewne powszechnie stosowane i dość proste rodzaje kombinacji, zupełnie wystarczające dla prostszych zadań. Powinniśmy je dokładnie znać i najpierw ich próbować, nawet gdybyśmy w końcu byli zmuszeni uciekać się do mniej oczywistych sposobów.

Podajemy niżej formalną klasyfikację najpowszechniejszych i najbardziej użytecznych kombinacji. Budując z danego zadania nowe zadanie możemy

(1) zachować niewiadomą, a zmienić resztę (dane i warunek), albo

(2) zachować dane, a zmienić resztę (niewiadomą i warunek), albo

(3) zmienić i niewiadomą, i dane.

Rozpatrzmy niżej te przypadki.

Przypadki (1) i (2) częściowo się pokrywają. Istotnie, można zachować zarówno niewiadomą, jak i dane i przekształcić zadanie zmieniając jedynie postać warunku. Na przykład dwa następujące zadania, chociaż w sposób oczywisty równoważne, nie są zupełnie identyczne:

Zbudować trójkąt równoboczny mając dany jego bok.

Zbudować trójkąt równokątny mając dany jego bok.

Różnica dwóch sformułowań, która jest w tym przykładzie nieznaczna, w innych przypadkach może być poważna. Takie przypadki są nawet pod pewnymi względami ważne, ale omówienie ich tutaj zajęłoby nam zbyt wiele miejsca. Porównaj artykuł ZADANIE POMOCNICZE, punkt 7, ostatnia uwaga.

4. *Zachowanie niewiadomej* a zmiana danych i warunku w celu przekształcenia danego zadania jest często użyteczne. Celem wskazówki SPÓJRZ NA NIEWIADOMĄ są zadania o tej samej niewiadomej. Możemy próbować przypomnieć sobie rozwiązane uprzednio zadanie tego typu: *I spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze znane zadanie mające tę samą lub podobną niewiadomą.* Nie mogąc sobie przypomnieć takiego zadania możemy spróbować je wymyślić: *Czy nie mógłbyś rozpatrzyć inne dane, mogące określić niewiadomą?*

Im ściślej jest nowe zadanie związane z naszym danym zadaniem, tym większa szansa, że odniesiemy z niego jakąś korzyść. Dlatego też zachowując niewiadomą staramy się zachować także pewne dane i pewną część warunku, i zmienić możliwie mało tylko jedną czy dwie dane i małą część warunku. Dobrą metodą jest tu opuścić coś, nic nie dodając; zachowujemy niewiadomą, *zachowujemy tylko część warunku, resztę odrzucamy,* ale nie wprowadzamy na miejsce odrzuconej części warunku nic nowego ani nie dodajemy żadnych nowych danych. Przykłady i uwagi o tym przypadku znajdują się w punktach 7 i 8.

5. *Zachowując dane* możemy próbować wprowadzić jakąś użyteczną i jednocześnie łatwą do znalezienia nową niewiadomą. Taką niewiadomą należy otrzymać z wyjściowych danych; taką niewiadomą mamy na myśli, gdy pytamy: CZY NIE MÓGŁBYŚ WYDOBYĆ CZEGOŚ POŻYTECZNEGO Z DANYCH?

Zauważmy, że pożądane są tu dwie rzeczy. Po pierwsze, nowa niewiadoma powinna być taka, aby łatwiej było otrzymać ją z danych niż początkową niewiadomą. Po drugie, nowa niewiadoma powinna być użyteczna, to znaczy powinna — gdy ją już znaleziono — oddać jakąś określoną przysługę w poszukiwaniu wyjściowej niewiadomej. Krótko mówiąc, nowa niewiadoma powinna być pewnego rodzaju kamieniem leżącym pośrodku potoku, używanym przez piechura przechodzącego na drugi brzeg. Kamień ten jest położony bliżej mnie niż przeciwległy brzeg, na który się chcę przedostać. Znalezienie się na tym głazie będzie dla mnie pomocą w osiągnięciu ostatecznego celu — przeciwległego brzegu.

Nowa niewiadoma powinna być jednocześnie łatwa do znalezienia i użyteczna, ale w praktyce często musimy zmniejszyć nasze wymagania. Jeżeli nic lepszego nie przychodzi nam na myśl, to rozsądnie jest wyprowadzić z danych coś, co ma chociaż jakieś szanse być użytecznym; rozsądnie jest także spróbować rozważyć jakąś nową niewiadomą ściśle związaną z wyjściową niewiadomą, nawet jeśli początkowo nie wydaje się, że nową niewiadomą łatwo będzie wyznaczyć.

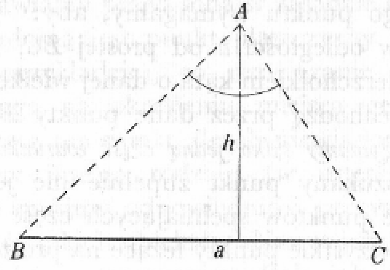
Na przykład, jeśli nowe zadanie polega na znalezieniu przekątnej prostopadłościanu (jak w ustępie 8), to jako nową niewiadomą możemy wprowadzić przekątną jego ściany. Możemy tak zrobić albo dlatego, że *wiemy*, iż gdybyśmy znali przekątną ściany, to moglibyśmy także otrzymać przekątną prostopadłościanu (tak jak w ustępie 10), albo też dlatego, że *widzimy*, iż łatwo jest otrzymać przekątną ściany i przypuszczamy, iż może ona być użyteczna przy znajdowaniu przekątnej prostopadłościanu. (Porównaj artykuł CZY SKORZYSTAŁEŚ ZE WSZYSTKICH DANYCH?, punkt 1.)

Jeżeli nasze zadanie polega na zbudowaniu okręgu, to musimy znaleźć dwie rzeczy: jego środek i promień; możemy powiedzieć, że nasze zadanie ma dwie części. W pewnych przypadkach jedna część jest łatwiejsza niż druga i dlatego rozsądnie jest zawsze wziąć tę możliwość pod uwagę: *Czy nie mógłbyś rozwiązać części zadania?* Zadawszy to pytanie musimy rozpatrzyć szanse poszczególnych części: Czy warto skoncentrować się raczej nad środkiem, czy nad promieniem? Którą z tych wielkości przyjąć za naszą nową niewiadomą? Tego rodzaju pytania są bardzo często użyteczne. W bardziej złożonych lub trudniejszych zadaniach główny pomysł polega często na wydzieleniu z zadania łatwiejszej do rozwiązania, ale istotnej części.

6. *Zmieniając i niewiadomą i dane* oddalamy się od naszego początkowego zadania bardziej niż w poprzednich przypadkach. Tego oczywiście nie lubimy; boimy się całkiem zgubić początkowe zadanie. Może się jednak zdarzyć, że będziemy zmuszeni do większych zmian, jeżeli mniej radykalne zmiany zawiodły i nie doprowadziły nas do niczego prostszego i użytecznego; możemy pokusić się o odejście tak daleko do naszego początkowego zadania, o ile jest duża szansa powodzenia nowego zadania. *Czy nie mógłbyś zmienić niewiadomej albo danych, albo — jeśli trzeba — i niewiadomej i danych, tak aby nowa niewiadoma i nowe dane były bliższe sobie?*

Ciekawym sposobem zmiany i niewiadomej i danych jest zamiana rolami niewiadomej i jednej z danych. (Patrz artykuł CZY MOŻESZ SKORZYSTAĆ ZE SWEGO WYNIKU?, punkt 3.)

7. *Przykład.* Zbudować trójkąt mając dany bok a, wysokość h opuszczoną na ten bok i kąt α przeciwległy do a.



Rys. 28

Co jest niewiadome? Trójkąt.

Co jest dane? Dwa odcinki a i h i jeden kąt α.

Otóż jeżeli jesteśmy trochę obeznani z geometrycznymi zadaniami konstrukcyjnymi, to próbujemy sprowadzić takie zadanie do znalezienia punktu. Rysujemy odcinek BC równy danemu bokowi a; teraz mamy znaleźć jeszcze tylko wierzchołek A trójkąta, przeciwległy do boku a (patrz rysunek 28). Mamy więc w zasadzie nowe zadanie.

Co jest niewiadome? Punkt A.

Co jest dane? Odcinek h, kąt α i dwa punkty B i C w danym położeniu.

Jaki jest warunek? Odległość punktu A od prostej BC musi wynosić h oraz $\sphericalangle BAC = \alpha$.

W gruncie rzeczy przekształciliśmy nasze zadanie zmieniając i niewiadomą i daną. Nową niewiadomą jest punkt, starą niewiadomą był trójkąt. Niektóre dane są te same w obu zadaniach: odcinek h i kąt α; ale w starym zadaniu dana była długość odcinka a, a teraz zamiast tego mamy dane dwa punkty B i C.

Nowe zadanie nie jest trudne. Następująca wskazówka zbliża nas bardzo do rozwiązania.

Wydziel poszczególne części warunku. Warunek składa się z dwóch części. Jedna dotyczy danej h, druga danej α. Od szukanego punktu wymagamy, aby:

(I) leżał w odległości h od prostej BC,

(II) był wierzchołkiem kąta o danej wielkości α, którego ramiona przechodzą przez dane punkty B i C.

Jeżeli *zatrzymamy tylko jedną część warunku, a drugą odrzucimy,* to szukany punkt zupełnie nie jest określony. Istnieje wiele punktów spełniających część (I) warunku, mianowicie wszystkie punkty leżące na prostej równoległej do odcinka BC poprowadzonej w odległości h od niego ([1]). Ta równoległa jest miejscem geometrycznym punktów spełniających część (I) warunku. Miejscem geometrycznym punktów spełniających część (II) jest łuk odpowiedniego okręgu; końcami tego łuku są punkty B i C. Oba miejsca geometryczne możemy narysować; ich przecięcie jest szukanym punktem.

Metoda, którą właśnie zastosowaliśmy, jest z pewnego względu ciekawa; rozwiązując geometryczne zadania konstrukcyjne możemy często z powodzeniem postępować według tej metody: Sprowadzić zadanie do znalezienia

([1]) Prosta przechodząca przez punkty B i C dzieli płaszczyznę na dwie części. Do wyznaczenia punktu A wybieramy tylko jedną półpłaszczyznę i dlatego możemy rozważać tylko jedną równoległą do BC; w przeciwnym przypadku powinniśmy rozważać dwie takie równoległe.

punktu, a punkt znaleźć jako przecięcie dwóch miejsc geometrycznych.

Jednakże pewien krok tej metody jest ciekawy z bardziej ogólnego punktu widzenia; rozwiązując dowolnego rodzaju zadania typu „znaleźć" możemy się na nim wzorować: *Zatrzymaj tylko część warunku, resztę odrzuć.* Czyniąc to osłabiamy warunek danego zadania, nakładamy na niewiadomą mniejsze ograniczenia. *Do jakiego stopnia niewiadoma jest wtedy określona, jak może się ona zmieniać?* Zadając to pytanie stawiamy przed sobą w zasadzie nowe zadanie. Jeżeli niewiadomą jest punkt płaszczyzny (tak jak było w naszym przykładzie), to rozwiązanie tego nowego zadania polega na określeniu miejsca geometrycznego opisanego przez ten punkt. Jeżeli niewiadomą jest obiekt matematyczny innego rodzaju (w ustępie **18** był to kwadrat), to musimy odpowiednio i precyzyjnie określić właściwy zbiór takich obiektów. Nawet jeżeli niewiadomą nie jest obiekt matematyczny (tak jak w następnym przykładzie w punkcie 8), to może być pożyteczne rozpatrzyć i scharakteryzować albo zestawić te obiekty, które spełniają pewną część warunku nałożonego przez dane zadanie na niewiadomą.

8. *Przykład.* W krzyżówce dopuszczającej grę słów i anagramy znajdujemy w kluczu następujące określenie: „Poruszająca się część maszyny — tam i z powrotem (5 liter)".

Co jest niewiadome? Słowo.

Jaki jest warunek? Słowo składa się z pięciu liter. Dotyczy ono jakiejś części maszyny. Musi to być oczywiście polskie słowo i, miejmy nadzieję, niezbyt rzadko używane.

Czy warunek wystarcza do określenia niewiadomej? Nie; albo raczej ta część warunku, która jest w tej chwili zupełnie jasna, nie wystarcza do określenia niewiadomej. Jest dużo słów spełniających ten warunek, jak np. „lewar", „śruba" itd.

Warunek jest sformułowany celowo dwuznacznie. Jeżeli nie możemy znaleźć, co byłoby tam i z powrotem poruszającą się częścią maszyny, to możemy zacząć przypuszczać, że „tam i z powrotem" dotyczy kierunku *czytania* słowa. To może być dobra myśl. Należy zbadać tę możliwość.

Wydziel poszczególne części warunku. Warunek składa się z dwóch części. Jedna dotyczy znaczenia słowa, a druga jego pisowni. Szukane słowo powinno być

(I) krótkim słowem oznaczającym jakąś część maszyny,

(II) słowem pięcioliterowym, które czytane wspak znów oznacza jakąś część jakiejś maszyny.

Jeżeli *zatrzymamy tylko jedną część warunku, a drugą odrzucimy,* to niewiadoma nie będzie całkowicie wyznaczona. Jest wiele słów spełniających część (I) warunku; tworzą one coś w rodzaju miejsca geometrycznego. Możemy „znaleźć" to „miejsce geometryczne", a następnie „wyznaczyć" jego „przecięcie" z „miejscem geometrycznym" słów spełniających część (II) warunku. Naturalną rzeczą jest skupić się nad częścią (I) warunku, przypomnieć sobie słowa o żądanym znaczeniu, a następnie kolejno badać, czy mają odpowiednią długość i czy dają się odczytać wspak. Może się zdarzyć, że przypomni nam się sporo słów, zanim wpadniemy na właściwe: „lewar", „śruba", „kółko", „mutra", „motor".

„Rotor", oczywiście rotor!

9. W punkcie 3 sklasyfikowaliśmy możliwości otrzymywania nowych zadań typu „znaleźć" przez tworzenie odpowiednich nowych kombinacji elementów danego zadania typu „znaleźć". Jeżeli wprowadzamy nie jedno nowe zadanie, ale dwa lub więcej, to powstają nowe

możliwości, o których tylko wspominamy, nie mając zamiaru klasyfikować ich.

Mogą powstać jeszcze inne możliwości, w szczególności rozwiązanie zadania typu „znaleźć" może zależeć od rozwiązania zadania typu „udowodnić". O tej ważnej możliwości tylko wspominamy; ze względu na brak miejsca nie omówimy jej dokładniej.

10. Można dodać tylko kilka krótkich uwag dotyczących zadań typu „udowodnić"; są one analogiczne do podanych wyżej bardziej obszernych uwag o zadaniach typu „znaleźć" (patrz punkty 2-9).

Zrozumiawszy zadanie typu „udowodnić" jako całość powinniśmy na ogół zbadać jego główne części. Głównymi jego częściami są założenia i teza twierdzenia, które mamy udowodnić albo obalić. Powinniśmy te części zrozumieć gruntownie: *Co jest założeniem? Co jest tezą?* Jeżeli zachodzi potrzeba dalszego wniknięcia w szczegóły, to możemy wydzielić poszczególne części założenia i każdą z nich rozpatrzyć oddzielnie. Następnie możemy przejść do dalszych szczegółów, rozkładając zadanie coraz bardziej.

Rozłożywszy zadanie możemy próbować złożyć na nowo jego elementy w jakiś inny sposób. Możemy w szczególności próbować utworzyć z tych elementów nowe twierdzenie. Są tu trzy możliwości.

(1) *Zachowujemy tezę,* a zmieniamy założenie. Najpierw próbujemy przypomnieć sobie jakieś takie twierdzenie: *Spójrz na tezę! I spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze znane ci twierdzenie mające tę samą lub podobną tezę.* Jeżeli nie udaje nam się przypomnieć takiego twierdzenia, próbujmy je wymyślić: *Czy nie mógłbyś wziąć pod uwagę innego założenia, z którego mógłbyś łatwo wyprowadzić tezę?* Założenie możemy zmienić opuszczając w nim coś i nic w zamian za to nie

dodając: *Zachowaj tylko część założenia, a resztę odrzuć; czy teza jest w dalszym ciągu prawdziwa?*

(2) *Zachowujemy założenie,* a zmieniamy tezę: *Czy nie mógłbyś wydobyć czegoś pożytecznego z założenia?*

(3) *Zmieniamy i założenie i tezę.* Możemy być skłonni zmienić obie części twierdzenia, jeżeli zmiana jednej części okazała się bezowocna. *Czy nie mógłbyś zmienić założenia albo tezy, albo — jeśli trzeba — i założenia i tezy, tak aby nowe założenie i nowa teza były bliższe sobie?*

Nie mamy zamiaru klasyfikować tu różnych możliwości, jakie powstają, gdy w celu rozwiązania danego zadania typu „udowodnić" wprowadzamy dwa albo więcej nowych zadań typu „udowodnić" albo gdy wiążemy je z odpowiednim zadaniem typu „znaleźć".

Rozumowanie heurystyczne jest to rozumowanie nie traktowane jako ostateczne i ścisłe, ale jako prowizoryczne i tylko prawdopodobne, którego celem jest odkrycie rozwiązania danego zadania. Często jesteśmy zmuszeni stosować rozumowanie heurystyczne. Zupełną pewność zdobędziemy, gdy znajdziemy kompletne rozwiązanie, ale przed uzyskaniem pewności musimy często zadowolić się bardziej lub mniej prawdopodobnym domysłem. Możemy potrzebować rzeczy prowizorycznych, zanim osiągniemy ostateczne. Konstruując ścisły dowód potrzebujemy rozumowania heurystycznego, tak jak wznosząc budynek potrzebujemy rusztowania.

Patrz artykuł OZNAKI POSTĘPU. Rozumowanie heurystyczne często oparte jest na indukcji albo na analogii; patrz artykuł INDUKCJA I INDUKCJA MATEMATYCZNA oraz ANALOGIA, punkty 8, 9, 10 (1).

(1) Por. także pracę autora w American Mathematical Monthly, vol. 48, str. 450-465.

Rozumowanie heurystyczne samo w sobie jest dobre. Źle natomiast jest mieszać rozumowanie heurystyczne ze ścisłym dowodem. Jeszcze gorzej jest podawać rozumowanie heurystyczne za ścisły dowód.

Nauczanie pewnych przedmiotów, a szczególnie nauczanie rachunku różniczkowego i całkowego dla przyszłych inżynierów i fizyków można by znacznie ulepszyć, gdyby lepiej rozumiano naturę rozumowania heurystycznego, gdyby znano płynące z niego korzyści i jego ograniczone ramy i gdyby podawano je w podręcznikach w sposób jawny, a nie zamaskowany. Rozumowanie heurystyczne stosowane z umiarem i w sposób jawny może być użyteczne; może ono stanowić przygotowanie do ścisłego dowodu, którego zalążek zazwyczaj zawiera. Ale rozumowanie heurystyczne jest raczej szkodliwe, jeżeli podawane jest w sposób zamaskowany, z widoczną oscylacją między bojaźliwością i pewnością siebie. Patrz artykuł PO CO DOWODZIĆ?

Specjalizacja jest to przechodzenie od rozpatrywania danego zbioru obiektów do rozpatrywania mniejszego ich zbioru albo nawet jednego z tych obiektów. Przy rozwiązywaniu zadań specjalizacja jest często pożyteczna.

1. *Przykład.* Niech r będzie promieniem okręgu wpisanego w trójkąt, R promieniem okręgu opisanego na trójkącie, a H najdłuższą z wysokości. Wtedy

$$r+R \leqslant H.$$

Mamy to twierdzenie udowodnić (albo obalić) (1); mamy więc zadanie typu „udowodnić".

(1) American Mathematical Monthly, vol. 50 (1943), str. 124 i vol. 51 (1944), str. 234-236.

Twierdzenie to jest nieco nietypowe. Raczej nie pamiętamy żadnego twierdzenia o trójkątach o podobnej tezie. Jeżeli nic innego nie przychodzi nam do głowy, to możemy sprawdzić to twierdzenie na kilku *przypadkach szczególnych*. Otóż najlepiej znanym trójkątem specjalnym jest trójkąt równoboczny, dla którego

$$r = \frac{H}{3}, \quad R = \frac{2H}{3}.$$

W tym przypadku twierdzenie jest prawdziwe.

Jeżeli nie mamy żadnego innego pomysłu, to możemy rozpatrzyć *nieco ogólniejszy przypadek* trójkątów równoramiennych. Kształt trójkąta równoramiennego zmienia się wraz z kątem przy wierzchołku. Są dwa przypadki graniczne: gdy kąt przy wierzchołku przybiera wartość 0° i gdy ten kąt przybiera wartość 180°. W pierwszym przypadku granicznym podstawa trójkąta znika i oczywiście

$$r = 0, \quad R = \frac{1}{2} H.$$

Twierdzenie sprawdza się więc. Jednakże w drugim przypadku granicznym znikają wszystkie trzy wysokości i

$$r = 0, \quad R = \infty, \quad H = 0.$$

Twierdzenie nie sprawdza się. Udowodniliśmy, że podane twierdzenie jest fałszywe, i w ten sposób rozwiązaliśmy nasze zadanie.

Nawiasem mówiąc, jasne jest, że twierdzenie jest fałszywe także dla bardzo płaskich trójkątów równoramiennych, których kąt przy wierzchołku jest bliski 180°. „Oficjalnie" możemy więc nie rozpatrywać przypadków granicznych, które mogą się wydawać niezupełnie „ortodoksyjne".

2. *L'exception confirme la règle* — wyjątek potwierdza regułę. Musimy przyjąć to znane powiedzenie za żart, śmiejąc się z nieścisłości pewnego rodzaju logiki. Jeżeli sprawę traktujemy poważnie, to oczywiście jeden wyjątek wystarcza, aby obalić jakąkolwiek regułę czy ogólne stwierdzenie. Najpowszechniejsza i w pewnym względzie najlepsza metoda obalania takiego stwierdzenia polega właśnie na wskazywaniu obiektu, który się z tym stwierdzeniem nie zgadza; taki obiekt niektórzy autorzy nazywają *kontrprzykładem*.

Przypuśćmy, że rzekomo ogólna reguła dotyczy pewnego zbioru obiektów; aby tę regułę obalić, dokonujemy *specjalizacji*, wybieramy ze zbioru taki obiekt, który się z regułą nie zgadza. Poprzedni przykład (z punktu 1) pokazuje, jak to się robi. Możemy najpierw zbadać jakiś prosty przypadek szczególny, to jest jakiś obiekt wybrany bardziej lub mniej przypadkowo, dla którego możemy łatwo stwierdzić, czy zgadza się z regułą czy nie. Jeżeli sprawdzenie pokazuje, że ten przypadek nie stosuje się do ogólnej reguły, to tym samym reguła jest obalona i nasze zadanie skończyło się. Jeśli jednakże zbadany obiekt zgadza się z regułą, to zbadanie jego może nam czasem dostarczyć pewnych informacji. Możemy odnieść wrażenie, że reguła jest jednak prawdziwa, i zdobyć pewne sugestie, w jakim kierunku powinniśmy szukać dowodu. Możemy też — tak jak w naszym przykładzie z punktu 1 — zdobyć sugestie, w jakim kierunku powinniśmy szukać kontrprzykładu, tj. jaki inny przypadek szczególny powinniśmy sprawdzić. Możemy modyfikować zbadany właśnie przypadek, badać jakiś nieco ogólniejszy przypadek szczególny i szukać przypadków granicznych, jak było pokazane na przykładzie w punkcie 1.

Przypadki graniczne są szczególnie pouczające. Jeżeli przypuszczamy, że jakieś ogólne stwierdzenie odnosi się do wszystkich ssaków, to musi odnosić się także do tak nietypowego ssaka jak wieloryb. Nie zapominajmy o tym granicznym przypadku ssaka. Badając go możemy obalić ogólne stwierdzenie; jest na to duża szansa, gdyż twórcy uogólnień często skłonni są do przeoczeń takich przypadków granicznych. Jeżeli jednak okaże się, że ogólne stwierdzenie sprawdza się nawet w przypadku granicznym, to otrzymany stąd dowód indukcyjny będzie dość przekonywający, właśnie dlatego, że pokładaliśmy duże nadzieje na obalenie stwierdzenia przez ten przypadek graniczny. Możemy więc pokusić się o modyfikację powiedzenia, od którego zaczęliśmy: „Przewidywane wyjątki potwierdzają regułę".

3. *Przykład.* Dane są prędkości dwóch statków i ich położenia w pewnym momencie; oba statki płyną po linii prostej ze stałą prędkością. Znaleźć odległość statków od siebie w chwili, gdy są one najbliżej względem siebie położone.

Co jest niewiadome? Najkrótsza odległość między dwoma poruszającymi się ciałami. Ciała należy traktować jako punkty materialne.

Co jest dane? Położenia początkowe poruszających się punktów materialnych i ich prędkości. Te prędkości są stałe co do wielkości i co do kierunku.

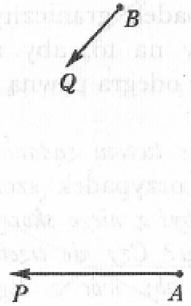
Jaki jest warunek? Należy określić odległość, gdy będzie ona najkrótsza, tzn. w chwili, gdy dwa poruszające się punkty (statki) będą najbliżej siebie położone.

Zrób rysunek. Wprowadź odpowiednie oznaczenia. Na rysunku 29 punkty A i B oznaczają dane położenia początkowe statków. Odcinki skierowane (wektory) AP i BQ przedstawiają dane prędkości: pierwszy statek porusza się wzdłuż linii prostej przechodzącej przez punkty A i P i przebywa

odległość AP w jednostce czasu; podobnie żegluje drugi statek wzdłuż prostej BQ.

Co jest niewiadome? Najkrótsza odległość między dwoma statkami, z których jeden żegluje wzdłuż prostej AP a drugi wzdłuż prostej BQ.

Jest już jasne, co mamy znaleźć; jednakże jeżeli chcemy używać tylko elementarnych metod, to jeszcze zupełnie nie wiemy, jak tego należy szukać. Zadanie nie jest łatwe



Rys. 29

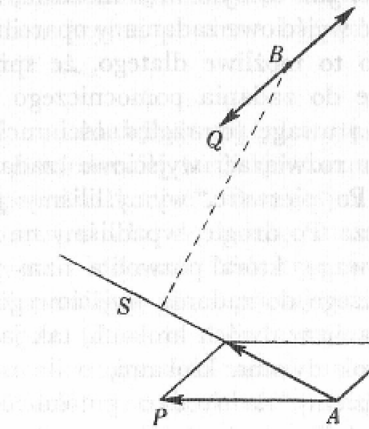
i jego trudność ma pewne szczególne odcienie, które możemy spróbować wyrazić mówiąc, że „jest zbyt duża różnorodność". Położenia początkowe A i B oraz prędkości AP i BQ mogą być dane na różne sposoby; istotnie, cztery punkty A, B, P, Q można wybrać dowolnie. Ale szukane rozwiązanie musi się stosować do wszystkich przypadków, bez względu na to, jak zostały wybrane dane początkowe. Nie widzimy jeszcze, jak dopasować rozwiązanie do tych wszystkich możliwości. Z takiego odczucia „zbytniej różnorodności" może w końcu zrodzić się następujące pytanie i odpowiedź:

Czy nie mógłbyś wymyślić jakiegoś bardziej dostępnego zadania pokrewnego? Bardziej specjalnego zadania? Oczywiście, istnieje graniczny przypadek szczególny, w którym jedna z prędkości znika. No tak, statek znajdujący się w punkcie B może być zakotwiczony, punkt Q może pokrywać się z punktem B. Najkrótszą odległością zakotwiczonego statku od statku płynącego jest odcinek prostopadły poprowadzony z punktu zakotwiczenia pierwszego statku do linii prostej, wzdłuż której płynie drugi statek.

4. Jeżeli podanej wyżej myśli towarzyszy przewidywanie, że kryją się za nią inne jeszcze możliwości, i przeczucie, że ten przypadek graniczny (który mógłby się wydawać zbyt prosty na to, aby można było z niego odnieść jakąś korzyść) odegra pewną rolę, to jest to rzeczywiście świetna myśl.

Oto zadanie pokrewne twemu zadaniu: rozwiązany przed chwilą przez ciebie przypadek szczególny pierwotnego zadania. *Czy nie mógłbyś z niego skorzystać? Czy nie mógłbyś skorzystać z jego wyniku? Czy nie trzeba wprowadzić jakiegoś elementu pomocniczego, aby móc z tego zadania skorzystać?* Oczywiście, z tego zadania trzeba skorzystać, ale jak? Jak można użyć wyniku przypadku, w którym punkt B spoczywa, do przypadku, w którym B porusza się? Spoczynek jest szczególnym przypadkiem ruchu. A ruch jest rzeczą względną — i dlatego bez względu na to, jaka jest prędkość punktu B, mogę go traktować jako punkt będący w spoczynku! A oto ta sama myśl przedstawiona jaśniej: Jeżeli cały układ składający się z obu statków wprawię w ten sam jednostajny ruch, to położenia statków względem siebie nie ulegną zmianie. Względne odległości statków pozostaną te same. W szczególności pozostanie ta sama najkrótsza względna odległość statków, czego obliczenia wymaga od nas zadanie. Otóż mogę nasz układ wprawić w taki dodatkowy ruch, aby prędkość jednego ze statków zredukować do zera i w ten

sposób sprowadzić ogólny przypadek naszego zadania do rozwiązanego już przypadku szczególnego. Dodajmy do prędkości BQ i AP prędkość równą co do wielkości prędkości BQ, lecz przeciwnie skierowaną. To jest właśnie ten element pomocniczy, który umożliwia skorzystanie z wyniku przypadku szczególnego.



Rys. 30

Konstrukcja najkrótszej odległości BS przedstawiona jest na rysunku 30.

5. W podanym wyżej toku rozwiązywania (w punktach 3 i 4) tkwi pewien schemat logiczny, który warto przeanalizować i zapamiętać.

W celu rozwiązania naszego wyjściowego zadania (podanego w pierwszych wierszach punktu 3) rozwiązaliśmy najpierw inne zadanie (w ostatnich wierszach punktu 3), które możemy słusznie nazwać zadaniem pomocniczym. To zadanie pomocnicze jest przypadkiem szczególnym wyjściowego zadania (granicznym przypadkiem szczególnym, w którym jeden ze statków nie porusza się). Wyjściowe zadanie było przedstawione nam do rozwiązania; zadanie pomocnicze wymyśliliśmy w trakcie rozwiązywania zadania wyjściowego. Zadanie wyjściowe wyglądało na bardzo trudne, rozwiązanie zadania pomocniczego było natychmiastowe. Zadanie pomocnicze jako przypadek szczególny było w gruncie rzeczy *o wiele skromniejsze* niż zadanie wyjściowe. Jak to było więc możliwe, że byliśmy w stanie rozwiązać wyjściowe zadanie w oparciu o zadanie pomocnicze? Było to możliwe dlatego, że sprowadzając zadanie wyjściowe do zadania pomocniczego zrobiliśmy dodatkową, istotną uwagę (o względności ruchu).

Udało się nam rozwiązać wyjściowe zadanie dzięki dwóm uwagom. Po pierwsze, wymyśliliśmy pożyteczne zadanie pomocnicze. Po drugie, wpadliśmy na odpowiednią dodatkową uwagę, która pozwoliła nam przejść od zadania pomocniczego do zadania wyjściowego. Rozwiązaliśmy dane zadanie w dwóch krokach, tak jak możemy przejść przez potok dwoma krokami, o ile mamy dość szczęścia i znajdziemy na środku potoku odpowiedni kamień, który mógłby być chwilowym oparciem dla naszej nogi.

6. Specjalizacja ma wiele innych zastosowań, których nie możemy tutaj omówić. Wspomnimy tylko, że może być użyteczna przy sprawdzaniu rozwiązania (patrz artykuł CZY MOŻESZ SPRAWDZIĆ WYNIK?)

Dla nauczyciela często użyteczny jest nieco prymitywny rodzaj specjalizacji. Polega on na podaniu pewnej *konkretnej interpretacji* abstrakcyjnych elementów matematycznych. Na przykład, jeżeli w zadaniu występuje prostopadłościan, to nauczyciel może wziąć jako przykład prostopadłościanu salę, w której odbywa się lekcja (patrz ustęp 8). Przy przerabianiu geometrii analitycznej róg klasy może służyć za początek układu współrzędnych,

podłoga i dwie ściany — za płaszczyzny współrzędnych, a dwie poziome krawędzie sali i jedna pionowa — za osie współrzędnych. Wyjaśniając pojęcie powierzchni obrotowej nauczyciel może narysować kredą na drzwiach krzywą i otwierać je powoli. To są oczywiście proste chwyty, ale nie można niczego zaniedbać, co ma szanse wyjaśnić uczniom matematykę. Matematyka będąc nauką bardzo abstrakcyjną powinna być przedstawiana bardzo konkretnie.

Spójrz na niewiadomą! Jest to stara rada; odpowiednie powiedzenie łacińskie brzmi: *respice finem*, to znaczy „patrz na koniec". Pamiętaj o swoim zamierzeniu. Nie zapomnij o celu, do którego zmierzasz. Myśl o tym, co pragniesz otrzymać. Nie strać z oczu tego, co jest żądane. Zapamiętaj, po co pracujesz. *Spójrz na niewiadomą. Spójrz na tezę.* Ostatnie dwie wersje rady *respice finem* są specjalnie dostosowane do zadań matematycznych; pierwsza do zadań typu „znaleźć", druga do zadań typu „udowodnić".

Skupiając całą naszą uwagę i wolę na celu, do którego dążymy, myślimy o sposobach i drogach doń prowadzących. Jakie są sposoby dojścia do końca zadania? Jak możesz osiągnąć swój cel? Jak możesz otrzymać tego rodzaju wynik? Jakie przyczyny mogłyby spowodować dojście do takiego wyniku? Gdzie widziałeś osiągnięcie takiego wyniku? Co ludzie zwykle robią, aby otrzymać taki wynik? *I spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze znane ci zadanie mające tę samą lub podobną niewiadomą. I spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze znane ci twierdzenie mające tę samą lub podobną tezę.* Dwie ostatnie wersje są znów specjalnie dostosowane odpowiednio do zadań typu „znaleźć" i zadań typu „udowodnić".

1. Rozpatrzmy zadanie matematyczne, typu „znaleźć" i wskazówkę: *Spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze znane ci zadanie mające tę samą niewiadomą.* Porównajmy tę wskazówkę ze wskazówką zawartą w pytaniu: *Czy znasz jakieś pokrewne zadanie?*

Druga wskazówka jest ogólniejsza od pierwszej. Jeżeli jakieś zadanie jest pokrewne z innym zadaniem, to mają one coś wspólnego; mogą w nich występować pewne wspólne obiekty albo pojęcia, albo pewne wspólne dane, albo jakaś taka sama część warunku i tak dalej. Nasza pierwsza wskazówka kładzie nacisk na pewien szczególny wspólny punkt: Oba zadania powinny mieć tę samą niewiadomą. To znaczy, w obu przypadkach niewiadoma powinna być obiektem tego samego rodzaju, na przykład długością odcinka.

W porównaniu z ogólną wskazówką, wskazówka bardziej specjalna jest w pewnym sensie ekonomiczniejsza.

Po pierwsze, możemy zaoszczędzić sobie trochę trudu przy formułowaniu zadania; nie potrzebujemy zastanawiać się nad całym zadaniem, a tylko nad niewiadomą. Zadanie zjawia się przed nami w schematycznej postaci

Mając dane... znaleźć długość odcinka.

Po drugie, jest pewna ekonomia w wyborze zadania. Wiele, wiele zadań może być pokrewnym danemu zadaniu, mając z nim to czy owo wspólnego. Jednakże patrząc na niewiadomą ograniczamy nasz wybór; bierzemy pod uwagę tylko takie zadania, które mają tę samą niewiadomą. I oczywiście, spośród zadań o tej samej niewiadomej wybieramy przede wszystkim zadania najprostsze i najbardziej nam znane.

2. Stojące przed nami zadanie ma postać:

Mając dane... znaleźć długość odcinka.

Otóż najprostsze i najbardziej nam znane zadania tego rodzaju dotyczą trójkątów: Mając dane trzy elementy trójkąta znaleźć długość jakiegoś jego boku. Przypomniawszy to sobie znaleźliśmy coś, co może się okazać pożyteczne: *Oto rozwiązane już przedtem zadanie pokrewne twemu zadaniu. Czy nie mógłbyś z niego skorzystać? Czy nie mógłbyś skorzystać z jego wyniku?* Aby skorzystać ze znanych wyników dotyczących trójkątów, musimy mieć na naszym rysunku jakiś trójkąt. Czy jest na nim jakiś trójkąt? A może trzeba wprowadzić jakiś trójkąt, aby móc skorzystać z tych znanych wyników? *Czy nie trzeba wprowadzić jakiegoś elementu pomocniczego, aby móc z nich skorzystać?*

Istnieje kilka prostych zadań, w których niewiadomą jest bok trójkąta. (Różnią się one od siebie danymi; mogą być dane dwa kąty i jeden bok albo dwa boki i jeden kąt, przy czym kąt może być w różny sposób położony względem danych boków. Wszystkie te zadania są szczególnie proste w przypadku trójkątów prostokątnych.) Mając uwagę skierowaną na stojące przed nami zadanie staramy się dojść do tego, jaki rodzaj trójkąta powinniśmy wprowadzić, jakie poprzednio rozwiązane zadanie (z tą samą niewiadomą co nasza) moglibyśmy najlepiej dostosować do naszego obecnego celu.

Może się zdarzyć, że po wprowadzeniu odpowiedniego trójkąta pomocniczego nie znamy jeszcze jego trzech elementów. Nie jest to jednak absolutnie niezbędne; jeżeli przewidujemy, że brakujący element będzie można w jakiś sposób otrzymać, to zrobiliśmy już zasadniczy krok naprzód; mamy plan rozwiązania.

3. Naszkicowaną wyżej (w punktach 1 i 2) procedurę

ilustruje w zasadzie ustęp **10** (ilustracja jest jednak nieco zaciemniona przez powolność uczniów). Nie jest wcale trudno podać więcej podobnych przykładów. Istotnie, rozwiązywanie prawie wszystkich zadań typu „znaleźć" podawanych zazwyczaj w niższych klasach można rozpocząć od właściwego skorzystania ze wskazówki: *I spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze znane ci zadanie mające tę samą lub podobną niewiadomą.*

Do takich zadań trzeba podchodzić według ustalonego schematu i najpierw spojrzeć na niewiadomą:

1) Mając dane... znaleźć długość odcinka.
2) Mając dane... znaleźć kąt.
3) Mając dane... znaleźć objętość czworościanu.
4) Mając dane... znaleźć punkt.

Jeżeli mamy nieco doświadczenia z zadaniami z matematyki elementarnej, to od razu przypomni nam się jakieś proste i znane zadanie albo zadania mające tę samą niewiadomą. Jeżeli dane nam do rozwiązania zadanie nie jest jednym z tych prostych i znanych zadań, to oczywiście staramy się zastosować to, co znamy, i wyciągnąć jakąś korzyść z wyników tych prostych zadań. Staramy się wprowadzić do zadania jakiś użyteczny, dobrze znany element; może to być dobrym początkiem.

Dla każdego ze wspomnianych wyżej czterech przypadków istnieje pewien oczywisty plan, pewien uzasadniony domysł co do przyszłego toku postępowania przy rozwiązywaniu zadania.

1) Niewiadomą otrzymamy jako bok jakiegoś trójkąta. Trzeba tylko wprowadzić odpowiedni trójkąt o trzech znanych albo łatwych do otrzymania elementach.

2) Niewiadomą otrzymamy jako kąt jakiegoś trójkąta. Trzeba tylko wprowadzić odpowiedni trójkąt.

3) Niewiadomą będzie można otrzymać, gdy będziemy znali pole podstawy i wysokość czworościanu. Trzeba tylko znaleźć pole którejś ze ścian i odpowiednią wysokość.

4) Niewiadomą otrzymamy jako przecięcie dwóch miejsc geometrycznych, z których każde jest albo okręgiem, albo linią prostą. Trzeba tylko w oparciu o warunek zbudować takie miejsca geometryczne.

We wszystkich tych przypadkach sugerują nam plan jakieś proste zadania o tej samej niewiadomej i chęć skorzystania z ich wyniku albo metody. Wykonując taki plan możemy oczywiście natrafić na pewne trudności, ale mamy pewien pomysł, od czego zacząć, a to jest już dużo.

4. Jesteśmy w znacznie gorszej sytuacji, jeżeli nie ma uprzednio rozwiązanego zadania o tej samej niewiadomej co dane zadanie. W takich przypadkach jest znacznie trudniej zabrać się do danego zadania.

„Znaleźć pole powierzchni kuli o danym promieniu". Zadanie to rozwiązał Archimedes. Chyba nie ma jakiegoś prostszego zadania o tej samej niewiadomej, a z pewnością nie było żadnego takiego prostszego zadania, z którego mógłby skorzystać Archimedes. I rzeczywiście, rozwiązanie Archimedesa można uważać za jedno z najbardziej wybitnych osiągnięć w matematyce.

„Znaleźć pole powierzchni kuli wpisanej w czworościan, którego sześć krawędzi jest danych". Jeżeli znamy wynik Archimedesa, to nie musimy posiadać jego geniuszu, aby to zadanie rozwiązać; trzeba tylko wyrazić promień wpisanej kuli przez sześć krawędzi czworościanu. Nie jest to wcale łatwe, ale tej trudności nie można nawet porównywać z trudnością zadania Archimedesa.

Cała różnica między łatwym i trudnym zadaniem polega na tym, że w pierwszym przypadku znamy, a w drugim nie znamy uprzednio rozwiązanego zadania o tej samej niewiadomej.

5. Gdy Archimedes obliczał pole powierzchni kuli, nie znał — jak wspomnieliśmy — żadnego uprzednio rozwiązanego zadania mającego tę samą niewiadomą. Ale znał on różne uprzednio rozwiązane zadania mające podobną niewiadomą. Istnieją powierzchnie obrotowe, których pole jest łatwiej wyznaczyć niż pole powierzchni kuli i które były dobrze znane w czasach Archimedesa; należą do nich powierzchnie boczne walca obrotowego, stożka obrotowego i ściętego stożka obrotowego. Możemy być pewni, że Archimedes starannie rozpatrzył te prostsze podobne przypadki. Istotnie, w swoim rozwiązaniu stosuje on jako przybliżenie kuli złożoną bryłę składającą się z dwóch stożków i pewnej liczby stożków ściętych (patrz artykuł DEFINICJA, punkt 6).

Jeżeli nie możemy znaleźć uprzednio rozwiązanego zadania, mającego tę samą niewiadomą co stojące przed nami zadanie, to staramy się znaleźć takie uprzednio rozwiązane zadanie, które ma podobną niewiadomą. Zadania takie są luźniej związane z naszym zadaniem niż zadania z tą samą niewiadomą; dlatego też na ogół trudniej jest z nich skorzystać dla naszego celu, ale mimo to mogą być dla nas wartościowe.

6. Dodamy kilka uwag dotyczących zadań typu „udowodnić"; są one analogiczne do podanych wyżej, bardziej obszernych uwag o zadaniach typu „znaleźć".

Mamy udowodnić (albo obalić) jakieś jasno sformułowane twierdzenie. Każde twierdzenie poprzednio udowodnione, które jest jakoś związane z podanym do udowodnienia twierdzeniem, może się nam jakoś przydać. Można się jednak spodziewać najbardziej bezpośredniej pomocy ze strony twierdzeń mających tę samą tezę, co dane twierdzenie. Wiedząc o tym patrzymy na tezę, to znaczy rozpatrujemy nasze twierdzenie zwracając szczególną uwagę na tezę. Nasz sposób patrzenia na twierdzenie można schematycznie wyrazić następująco:

Jeżeli..., to kąty są równe.

Skupiamy naszą uwagę na tezie i staramy się *przypomnieć sobie jakieś dobrze znane twierdzenie mające tę samą lub podobną tezę*. Szczególnie staramy się przypomnieć sobie możliwe proste znane twierdzenie tego rodzaju.

W naszym przypadku jest wiele twierdzeń tego rodzaju i może nam się przypomnieć następujące: „Jeżeli dwa trójkąty są przystające, to ich odpowiednie kąty są równe". *Oto udowodnione już przedtem twierdzenie pokrewne z twoim twierdzeniem. Czy nie mógłbyś z niego skorzystać? Czy nie trzeba wprowadzić jakiegoś elementu pomocniczego, aby móc z tego twierdzenia skorzystać?*

Idąc za tymi wskazówkami i próbując ocenić pomoc, jaką daje nam przypomniane sobie twierdzenie, możemy ułożyć pewien plan: Spróbujmy wykazać żądaną równość kątów w oparciu o trójkąty przystające. Widzimy, że w tym celu musimy wprowadzić do rozważań parę trójkątów zawierających nasze kąty i udowodnić, że są one przystające. Taki plan jest z pewnością dobry i wystarczający, aby rozpocząć pracę. Może on nas doprowadzić do żądanego celu, tak jak w ustępie **19**.

7. Zreasumujmy nasze rozważania. Przypominając sobie uprzednio rozwiązane zadania mające tę samą lub podobną niewiadomą (uprzednio udowodnione twierdzenie mające tę samą lub podobną tezę) mamy dużą szansę rozpoczęcia pracy we właściwym kierunku i możemy ułożyć sobie jakiś plan rozwiązania. W prostszych przypadkach, które w niższych klasach przeważają, wystarczą zwykle naj-

prostsze zadania o tej samej niewiadomej (twierdzenie o tej samej tezie). Próba przypomnienia sobie zadań o tej samej niewiadomej jest oczywistym i rozsądnym pomysłem (porównaj uwagi uczynione na ten temat w ustępie 4). Jest raczej zdumiewające, że tak prosty i użyteczny pomysł nie jest dość powszechnie znany; autor jest skłonny przypuszczać, że tego pomysłu nigdy przedtem nawet nie sformułowano w pełnej ogólności. W każdym bądź razie ani uczniowie, ani nauczyciele matematyki nie powinni lekceważyć korzyści płynących ze wskazówki: *Spójrz na niewiadomą! I spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze znane zadanie mające tę samą lub podobną niewiadomą.*

Sprawdzanie za pomocą wymiarów jest znanym, szybkim i skutecznym sposobem sprawdzania wzorów geometrycznych i fizycznych.

1. Aby sobie przypomnieć, jak dokonuje się takiego sprawdzenia, rozpatrzmy ścięty stożek obrotowy. Niech

R będzie promieniem podstawy dolnej,
r promieniem podstawy górnej,
h wysokością stożka ściętego,
S polem powierzchni bocznej stożka ściętego.

Jeżeli R, r i h są dane, to oczywiście S można wyznaczyć. Znajdujemy wzór

$$S = \pi(R + r)\sqrt{(R - r)^2 + h^2},$$

który chcemy sprawdzić za pomocą wymiarów.

Wymiar wielkości geometrycznej jest rzeczą prostą. I tak R, r i h są to długości odcinków, a więc mierzymy je w centymetrach (przy obraniu centymetra za jednostkę długości), ich wymiarem jest [cm]. Pole S mierzymy w centymetrach kwadratowych; jego wymiarem jest [cm^2].

Dalej, $\pi = 3{,}14159\ldots$ jest liczbą oderwaną; jeżeli chcemy przypisać wymiar czysto liczbowej wartości, to musimy jako jej wymiar przyjąć [cm^0] = 1.

Każdy składnik sumy musi mieć ten sam wymiar, co cała suma. R, r i $R + r$ mają więc ten sam wymiar, mianowicie [cm]. Składniki $(R - r)^2$ i h^2 mają ten sam wymiar (jak powinno być), mianowicie [cm^2].

Wymiar iloczynu jest iloczynem wymiarów poszczególnych czynników; istnieje podobna reguła dotycząca potęg. Zastępując w obu stronach wzoru, który sprawdzamy, wielkości przez ich wymiary, dostajemy

$$[\mathrm{cm}^2] = [1] \cdot [\mathrm{cm}] \cdot [\sqrt{\mathrm{cm}^2}].$$

I tak jest istotnie. Sprawdzenie nie wykryło we wzorze żadnego błędu. Wzór wystawiony na próbę przeszedł ją pomyślnie.

Dalsze przykłady — patrz ustęp **14** i artykuł CZY MOŻESZ SPRAWDZIĆ WYNIK?, punkt 2.

2. Sprawdzenie za pomocą wymiarów możemy stosować do ostatecznego wyniku albo do wyników częściowych, do naszej własnej pracy albo do pracy innych (szczególnie odpowiednie przy sprawdzaniu prac egzaminacyjnych), a także do wzorów, które pamiętamy i do wzorów, jakie przewidujemy.

Jeżeli pamiętasz wzory $4\pi r^2$ i $4\pi r^3/3$ na pole powierzchni i na objętość kuli, ale nie jesteś zupełnie pewien, który wzór do czego się odnosi, to sprawdzenie za pomocą wymiarów rozprasza wszelkie wątpliwości.

3. Sprawdzenie za pomocą wymiarów jest jeszcze ważniejsze w fizyce niż w geometrii.

Rozpatrzmy „proste" wahadło, to jest małe ciężkie ciało zawieszone na drucie, którego długość uważamy za niezmienną i którego ciężar zaniedbujemy. Niech l oznacza długość drutu, g — przyśpieszenie ziemskie, T — okres wahadła.

Rozważania natury mechanicznej wskazują, że T zależy tylko od l i od g. Ale jaka jest postać tej zależności? Możemy pamiętać lub przewidywać, że

$$T = c\, l^m g^n,$$

gdzie c, m, n są to pewne stałe liczbowe. Przypuszczamy więc, że T jest proporcjonalne do pewnych potęg l^m i g^n wielkości l i g.

Patrzymy na wymiary. Ponieważ T oznacza czas, więc mierzymy je w sekundach; jego wymiarem jest [sek]. Wymiarem długości l jest [cm], wymiarem przyśpieszenia ziemskiego g jest $[\text{cm s}^{-2}]$, a wymiarem stałej c jest [1]. Sprawdzanie za pomocą wymiarów prowadzi do równania

$$[\text{s}] = [1] \cdot [(\text{cm})^m] \cdot [(\text{cm s}^{-2})^n],$$

czyli

$$[\text{s}] = [(\text{cm})^{m+n}]\,[\text{s}^{-2n}].$$

Po obu stronach musimy mieć te same potęgi podstawowych jednostek cm i s, a więc musi być

$$0 = m + n, \quad 1 = -2n,$$

czyli

$$n = -\frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2}.$$

Wzór na okres T musi mieć więc postać

$$T = c\, l^{1/2} g^{-1/2} = c\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

W tym przypadku sprawdzenie za pomocą wymiarów daje dużo, ale nie może dać wszystkiego. Po pierwsze, nie daje ono żadnej informacji co do wartości stałej c (która jest równa 2π). Po drugie, nie daje ono żadnej informacji co do granic stosowalności wzoru; wzór jest poprawny tylko dla małych wychyleń wahadła, a i to tylko w przybliżeniu (wzór jest ścisły dla „nieskończenie małych" wychyleń). Mimo tych ograniczeń nie ma żadnej wątpliwości, że rozpatrzenie wymiarów pozwoliło nam szybko i przy użyciu najelementarniejszych środków przewidzieć istotną część wyniku, którego wyczerpujące rozpatrzenie wymagałoby znacznie mocniejszych środków. I tak jest w wielu podobnych przypadkach.

Sprzeczność. Patrz Warunek.

Symetria ma dwa znaczenia: bardziej powszechne, szczególne, geometryczne znaczenie, i mniej powszechne, ogólne znaczenie logiczne.

W elementarnej geometrii przestrzennej rozpatruje się dwa rodzaje symetrii: symetrię względem płaszczyzny (zwanej płaszczyzną symetrii) i symetrię względem punktu (zwanego środkiem symetrii). Ciało ludzkie wydaje się być dość symetryczne, ale w rzeczywistości tak nie jest; wiele organów wewnętrznych jest rozmieszczonych zupełnie niesymetrycznie. Jednak posąg może być zupełnie symetryczny względem pewnej płaszczyzny pionowej, tak że obie jego płaszczyzny wyglądają zupełnie na „dające się zamienić".

Przy ogólniejszym rozumieniu terminu „symetria" pewną całość nazywamy symetryczną, jeżeli ma ona dające się nawzajem zamienić części. Jest wiele rodzajów symetrii; różnią się one od siebie liczbą dających się zamienić części i operacjami, przy których części się zamieniają. I tak sześcian jest wysoce symetryczny; można w nim zamienić ze sobą jego sześć ścian, jego 8 wierzchołków i jego 12 krawędzi. Wyrażenie

$$yz + zx + xy$$

jest symetryczne; każde dwie spośród trzech liter x, y, z można ze sobą zamienić nie zmieniając wyrażenia.

Symetria w sensie ogólnym jest dla naszego przedmiotu ważna. Jeżeli zadanie jest w jakiś sposób symetryczne, to możemy wyciągnąć pewną korzyść z zauważenia jego dających się zamienić części; często opłaca się traktować części grające tę samą rolę w ten sam sposób (patrz artykuł ELEMENTY POMOCNICZE, punkt 3).

To, co jest symetryczne, próbuj traktować symetrycznie i nie psuj bez powodu żadnej naturalnej symetrii. Nieraz jednak jesteśmy zmuszeni do niesymetrycznego traktowania tego, co jest w sposób naturalny symetryczne. Para rękawiczek jest z pewnością symetryczna; jednakże nikt nie traktuje pary rękawiczek zupełnie symetrycznie, nikt nie zakłada obu rękawiczek jednocześnie, lecz jedną po drugiej.

Symetria może być także użyteczna przy sprawdzaniu wyników; patrz ustęp **14**.

Szablonowość i mistrzostwo to dwa przeciwne podejścia do reguł.

1. Stosować regułę dosłownie, sztywno, ślepo, bez względu na to, czy pasuje ona do danej sytuacji czy nie — to jest szablonowość. Niektórzy spośród ludzi postępujących szablonowo, to po prostu głupcy; nigdy nie rozumieli reguły, którą tak sumiennie i bezkrytycznie stosują. Inni stosują szablon z większym powodzeniem: rozumieją reguły, które stosują, a przynajmniej rozumieli je początkowo (zanim nie zaczęli stosować je szablonowo) i wybierają dobrą regułę, taką która pasuje do wielu przypadków, a zawodzi tylko czasami.

Stosować regułę w sposób naturalny, rozsądnie, spostrzegać przypadki, do których ona pasuje, nie pozwalać nigdy, aby słowa reguły zaciemniały cel działania albo możliwości wynikające z danej sytuacji — to jest mistrzostwo.

2. Pytania i wskazówki naszej listy mogą pomóc zarówno osobie rozwiązującej zadanie, jak i nauczycielowi. Ale przede wszystkim należy je zrozumieć, należy nauczyć się właściwego ich stosowania i to nauczyć przez próby i błędy, przez niepowodzenia i sukcesy, przez zdobycie doświadczenia w korzystaniu z nich. Po drugie, ich stosowanie nigdy nie może stać się szablonowe. Nie powinieneś zadawać żadnego pytania ani dawać żadnej wskazówki w sposób bezkrytyczny, idąc za jakimś sztywnym przyzwyczajeniem. Bądź przygotowany na różne pytania i wskazówki i sam je osądzaj. Jeżeli rozwiązujesz trudne i pociągające cię zadanie, to następny krok, który masz zamiar wypróbować, powinien wynikać z uważnego i bezstronnego rozpatrzenia twego problemu. Jeżeli chcesz pomóc uczniowi, to to, co do niego mówisz, powinno wynikać ze zrozumienia jego trudności.

A jeżeli masz skłonności do szablonowego stosowania reguł i musisz się na jakiejś regule opierać, to naucz się następującej reguły: Zawsze korzystaj przede wszystkim ze swego własnego rozumu.

Terminy stare i nowe opisujące postępowanie człowieka przy rozwiązywaniu zadań są często dwuznaczne. Samo postępowanie wszyscy dobrze znają i często omawiają; jednak, tak jak inne czynności umysłu, jest ono trudne do opisania. Wobec braku systematycznych badań tego postępowania nie ma terminów specjalnych na opisanie go;

pewne powszechnie stosowane terminy często czynią jeszcze większe zamieszanie, gdyż różni autorzy używają ich w różnych znaczeniach.

Poniższa krótka lista zawiera kilka nowych terminów używanych w tej książce i kilka starych terminów, których unikaliśmy, oraz kilka starych terminów zachowanych mimo ich dwuznaczności.

Poniższe omówienie terminologii mogłoby czytelnikowi pomieszać w głowie, gdyby nie było należycie poparte przykładami.

1. *Analizę* ładnie określa Pappus. Jest to użyteczny termin opisujący typowy sposób układania planu, zaczynający od niewiadomej (albo od tezy) i postępujący do tyłu w kierunku danych (albo założenia). Niestety słowo to przyjęło wiele różnych znaczeń (na przykład analiza matematyczna, analiza chemiczna, analiza logiczna) i dlatego z żalem unikamy go w naszych badaniach.

2. *Warunek* wiąże niewiadomą zadania typu „znaleźć" z danymi (patrz artykuł ZADANIA TYPU „ZNALEŹĆ", ZADANIA TYPU „UDOWODNIĆ", punkt 3). W tym znaczeniu jest to jasny i użyteczny termin, bez którego się trudno obejść. Często trzeba rozłożyć warunek na kilka części (na część (I) i część (II) w przykładach artykułu ROZKŁADANIE I SKŁADANIE NA NOWO, punkt 7 i 8). Otóż każdą część *całego warunku* zazwyczaj zwie się też *warunkiem*. Tej dwuznaczności, która czasem sprawia trudności, można by łatwo uniknąć przez wprowadzenie jakiegoś terminu specjalnego na oznaczenie części całego warunku; taką część można by na przykład nazwać „klauzulą".

3. *Założenie* oznacza istotną część twierdzenia matematycznego podanego w najpowszechniej używanej postaci (patrz ZADANIA TYPU „ZNALEŹĆ", ZADANIA TYPU „UDOWODNIĆ", punkt 4). Termin ten w tym znaczeniu jest zupełnie jasny i zadowalający. Trudność polega na tym, że każdą część *całego założenia* także nazywa się *założeniem*, tak że założenie może składać się z kilku założeń. Można by tego uniknąć nazywając każdą część całego założenia „klauzulą" lub czymś podobnym. (Porównaj poprzednią uwagę o „warunku".)

4. *Główne części* zadania określone są w artykule ZADANIA TYPU „ZNALEŹĆ", ZADANIA TYPU „UDOWODNIĆ", punkty 3 i 4.

5. *Zadanie typu „znaleźć", zadanie typu „udowodnić"* — jest to para nowych terminów wprowadzonych z żalem na miejsce terminów historycznych, których znaczenie jest jednak obecnie bezpowrotnie pomieszane. W łacińskiej wersji greckich tekstów matematycznych wspólną nazwą dla obu typów zadań jest *propositio*; zadanie typu „znaleźć" zwie się *problema*, a zadanie typu „udowodnić" — *theorema*. W dawniejszym języku matematycznym(¹) słowa: „propozycja", „problem" i „twierdzenie" mają jeszcze „euklidesowskie" znaczenie, ale w nowoczesnym języku matematycznym uległo to zupełnej zmianie; to usprawiedliwia wprowadzenie nowych terminów.

6. *Rozumowanie progresywne.* Terminu tego różni autorzy używali w różnych znaczeniach. Niektórzy autorzy używali go w starym znaczeniu „syntezy" (patrz punkt 9). To ostatnie znaczenie jest uzasadnione, ale terminu tego unikamy tutaj.

7. *Rozumowanie regresyjne.* Niektórzy autorzy używali

(¹) Mowa o dawniejszym angielskim języku matematycznym. Łacińskie *propositio*, *problema* i *theorema*, to angielskie *proposition*, *problem* i *theorem* odpowiednio (*przypisek tłumacza*).

tego terminu w starym znaczeniu „analizy" (porównaj punkt 1 i 6). Jest to uzasadniony termin, ale unikamy go tutaj.

8. *Rozwiązanie* jest to zupełnie jasny termin, jeśli brać go w jego czysto matematycznym znaczeniu; oznacza on dowolny obiekt spełniający warunek zadania typu „znaleźć". I tak rozwiązaniami równania $x^2 - 3x + 2 = 0$ są jego pierwiastki: liczby 1 i 2. Niestety, słowo to ma także inne, nie czysto matematyczne znaczenia, których matematycy używają wraz z jego znaczeniem matematycznym. Rozwiązanie może oznaczać także „proces rozwiązywania zadania" albo „pracę wykonaną przy rozwiązywaniu zadania"; używamy tego słowa w tym właśnie znaczeniu, gdy mówimy o „trudnym rozwiązaniu". Rozwiązanie może także oznaczać wynik pracy dokonanej przy rozwiązywaniu zadania; możemy używać tego słowa w tym znaczeniu, gdy mówimy o „pięknym rozwiązaniu". Może się zdarzyć, że w tym samym zdaniu musimy mówić o obiekcie spełniającym warunek zadania, o pracy wykonanej dla otrzymania go i o wyniku tej pracy; jeżeli wszystkie trzy rzeczy nazwiemy „rozwiązaniem", to zdanie nie będzie zbyt jasne.

9. *Syntezy* używa Pappus w zupełnie dobrze określonym znaczeniu, które zasługuje na to, aby je zachować. Jednakże z żalem unikamy w tej książce tego terminu, dla tych samych powodów, co jego odpowiednik — „analizę" (patrz punkt 1).

Tradycyjny profesor matematyki z popularnych anegdot jest roztargniony. Zazwyczaj sądzi on, że zgubił parasol, mimo że trzyma dwa parasole, po jednym w każdym ręku. Woli stać twarzą do tablicy, a tyłem do klasy. Pisze a, mówi b, myśli c, a powinno być d.

Niektóre z jego powiedzeń są przekazywane z pokolenia na pokolenie.

„Aby rozwiązać to równanie różniczkowe, patrz na nie, dopóki nie przyjdzie ci na myśl rozwiązanie".

„Ta zasada jest tak ogólna, że niemożliwe jest żadne szczególne jej zastosowanie".

„Geometria jest to sztuka poprawnego rozumowania na niepoprawnych rysunkach".

„Moja metoda pokonywania trudności polega na obchodzeniu ich".

„Jaka jest różnica między metodą a pomysłem? Metoda jest to pomysł, którego używasz dwa razy".

Mimo wszystko można się czegoś nauczyć od tego tradycyjnego profesora matematyki. Miejmy nadzieję, że nauczyciel matematyki, od którego nie można się niczego nauczyć, nie stanie się tradycyjnym.

Typowe zadanie. Typowym zadaniem można nazwać zadanie polegające na rozwiązaniu równania $x^2 - 3x + 2 = 0$, jeżeli przedtem było wyjaśnione i zilustrowane rozwiązanie ogólnego równania kwadratowego, tak że uczeń nie ma nic do zrobienia z wyjątkiem podstawienia liczb -3 i 2 w miejsce liter występujących w rozwiązaniu ogólnym. Nawet jeżeli równanie kwadratowe nie było rozwiązane ogólnie „na literach", ale rozwiązano dopiero co pół tuzina podobnych równań kwadratowych o współczynnikach liczbowych, to zadanie takie należy nazwać „typowym". Ogólnie rzecz biorąc, zadanie jest zadaniem „typowym", jeżeli można je rozwiązać albo przez podstawienie danych szczególnych do poprzednio rozwiązanego zadania ogólnego, albo przez naśladowanie krok po kroku, bez jakiejkolwiek oryginalności jakiegoś dobrze znanego przykładu. Dając zadanie typowe nauczyciel podtyka pod nos ucznia bezpośrednią i wymowną odpowiedź na pytanie: *Czy znasz jakieś pokrewne zadanie?* Od ucznia nie wymaga się więc niczego prócz odrobiny uwagi i cierpliwości w postępowaniu według gotowego przepisu; uczeń nie ma sposobności wyrazić swego własnego sądu ani wykorzystać swych zdolności twórczych.

Zadania typowe, nawet wiele zadań typowych, może być potrzebne w nauczaniu matematyki, ale jest niewybaczalne nie dawać uczniom nic więcej do robienia. Uczenie mechanicznego wykonywania typowych operacji matematycznych i niczego więcej leży niewątpliwie poniżej poziomu książki kucharskiej, gdyż przepisy kucharskie zostawiają coś do fantazji i sądu kucharki, a przepisy matematyczne — nic.

Układanie równań jest podobne do tłumaczenia z jednego języka na drugi (Oznaczenia, punkt 1). To porównanie użyte przez Newtona w jego *Arithmetica Universalis* może pomóc w wyjaśnieniu natury pewnych trudności odczuwanych często zarówno przez uczniów jak i przez nauczycieli.

1. Ułożyć równanie znaczy wyrazić w symbolach matematycznych warunek, który jest opisany słowami: jest to tłumaczenie ze zwykłego języka na język wzorów matematycznych. Trudności, jakie możemy mieć przy układaniu równań, są to trudności tłumaczenia.

Do przetłumaczenia zdania z angielskiego na francuski niezbędne są dwie rzeczy. Po pierwsze, musimy dokładnie rozumieć zdanie angielskie. Po drugie, musimy znać sposoby wyrażania się swoiste dla języka francuskiego. Sytuacja jest bardzo podobna, gdy próbujemy wyrazić w symbolach matematycznych warunek podany słowami. Po pierwsze, musimy warunek dokładnie rozumieć.

Po drugie, musimy znać sposoby matematycznego wyrażania się.

Jest stosunkowo łatwo przetłumaczyć zdanie angielskie na francuski, jeżeli można je tłumaczyć słowo po słowie. Istnieją jednak idiomy angielskie, których nie można przetłumaczyć na francuski słowo po słowie. Jeżeli nasze zdanie zawiera takie idiomy, to tłumaczenie staje się trudne; musimy zwrócić mniejszą uwagę na poszczególne słowa, a większą na znaczenie całości; być może przed tłumaczeniem zdania będziemy musieli je przebudować.

Przy układaniu równań mamy to samo. W łatwych przypadkach słowne sformułowanie warunku niemal automatycznie dzieli się na poszczególne części, z których każdą można natychmiast zapisać w symbolach matematycznych. W przypadkach trudniejszych warunek zawiera części, których nie można od razu przełożyć na symbole matematyczne. Jeśli tak się zdarzy, to musimy zwrócić mniejszą uwagę na słowne sformułowanie, a bardziej się skupić na sensie warunku. Może się zdarzyć, że przed rozpoczęciem pisania wzorów będziemy musieli warunek przebudować; powinniśmy robić to z myślą o możliwości matematycznego zapisania tego warunku.

We wszystkich przypadkach, łatwych czy trudnych, musimy zrozumieć warunek, *wydzielić poszczególne części warunku* i zapytać: *Czy możesz je zapisać?* W łatwych przypadkach bez trudu dzielimy warunek na części, które można zapisać w symbolach matematycznych; w przypadkach trudnych odpowiedni podział warunku jest mniej oczywisty.

Powyższe wyjaśnienia należy przeczytać ponownie po przestudiowaniu poniższych przykładów.

2. *Znaleźć dwie liczby, których suma wynosi* 78, *a iloczyn* 1296.

Dzielimy stronicę linią pionową. Po jednej stronie linii piszemy słowne sformułowanie zadania, podzielone na właściwe części. Po drugiej stronie linii piszemy naprzeciw odpowiednich części słownego sformułowania — symbole algebraiczne. Oryginał znajduje się po lewej stronie, przekład na język symboli po prawej.

Sformułowanie zadania

w języku polskim	w języku algebraicznym
Znaleźć dwie liczby,	x, y
których suma wynosi 78	$x+y = 78$
a iloczyn 1296	$xy = 1296$.

W tym przypadku słowne sformułowanie niemal automatycznie dzieli się na części, z których każdą można natychmiast zapisać w symbolach matematycznych.

3. *Znaleźć bok podstawy i wysokość prostopadłościanu o podstawie kwadratowej mając daną jego objętość* 63 cm³ *i pole powierzchni całkowitej* 102 cm².

Co jest niewiadome? Bok podstawy prostopadłościanu, oznaczmy go przez x, i wysokość prostopadłościanu, oznaczmy ją przez y.

Co jest dane? Objętość 63 i pole powierzchni całkowitej 102.

Jaki jest warunek? Prostopadłościan o podstawie kwadratowej o boku x i o wysokości y ma mieć objętość 63 i pole powierzchni całkowitej 102.

Wydziel poszczególne części warunku. Są dwie części warunku: jedna dotyczy objętości, druga — pola powierzchni całkowitej.

Bez wahania dzielimy cały warunek na te dwie części; nie możemy jednak „bezzwłocznie" zapisać je. Musimy wiedzieć, jak oblicza się objętość prostopadłościanu i pole poszczególnych części powierzchni. Jeśli jednak znamy geometrię na tyle, to z łatwością możemy tak sformułować na nowo obie części warunku, aby przekład na język równań stał się możliwy. Po lewej stronie stronicy piszemy istotnie zmienione i rozszerzone sformułowanie zadania, gotowe do przekładu na język algebraiczny.

Znaleźć bok	x
podstawy i wysokość	y
prostopadłościanu o podstawie kwadratowej.	
Po pierwsze. Objętość jest dana.	63
Pole podstawy, którą jest kwadrat o boku x,	x^2
i wysokość	y
wyznaczają objętość, która jest ich iloczynem.	$x^2\, y = 63$
Po drugie. Pole powierzchni całkowitej jest dane.	102
Pole powierzchni całkowitej składa się z pola dwóch kwadratów o boku x	$2x^2$
i z pola czterech prostokątów o podstawie x i wysokości y;	$4xy$
suma tych pól daje pole powierzchni całkowitej.	$2x^2 + 4xy = 102$

4. *Mając dane równanie prostej i współrzędne punktu, znaleźć punkt symetryczny do tego punktu względem tej prostej.*

Jest to zadanie z geometrii analitycznej.

Co jest niewiadome? Punkt o współrzędnych, powiedzmy, p, q.

Co jest dane? Równanie prostej, powiedzmy $y = mx+n$, i punkt o współrzędnych, powiedzmy, a, b.

Jaki jest warunek? Punkty (a, b) i (p, q) są położone symetrycznie względem prostej $y = mx+n$.

Dochodzimy teraz do istotnej trudności: do podzielenia warunku na takie części, aby każdą z nich można było wyrazić w języku geometrii analitycznej. Należy dobrze zrozumieć naturę tej trudności. Podział warunku na części może być pod względem logicznym bez zarzutu, a mimo to może być bezużyteczny. Jest nam tu potrzebny podział na części, które nadają się do wyrażenia analitycznego. Aby znaleźć taki podział, musimy *odwołać się do definicji* symetrii, mając na uwadze środki geometrii analitycznej. Co rozumie się przez symetrię względem prostej? Jakie związki geometryczne można prosto wyrazić w geometrii analitycznej? Skupiamy się na pierwszym pytaniu, ale nie powinniśmy zapominać o drugim. W ten sposób możemy w końcu znaleźć podział, który tu podajemy.

Dany punkt	(a, b)
i punkt szukany	(p, q)
są ze sobą tak związane, że po pierwsze, prosta łącząca je jest prostopadła do danej prostej	$\dfrac{q-b}{p-a} = -\dfrac{1}{m}$
i po drugie, środek odcinka łączącego je leży na danej prostej.	$\dfrac{b+q}{2} = m\dfrac{a+p}{2} + n.$

Uogólnienie jest to przejście od rozpatrywania jednego obiektu do rozpatrywania zbioru zawierającego ten obiekt, albo przejście od rozpatrywania węższego zbioru do rozpatrywania szerszego zbioru, zawierającego nasz węższy zbiór.

1. Jeżeli przypadkowo trafimy na sumę

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100,$$

to możemy zauważyć, że da się to zapisać w ciekawej postaci

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2.$$

Jest rzeczą naturalną zapytać się: Czy często się zdarza, że suma sześcianów kolejnych liczb naturalnych

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

jest kwadratem jakiejś liczby naturalnej? Zadając to pytanie dokonujemy uogólnienia. Jest to szczęśliwe uogólnienie; prowadzi ono od jednej obserwacji do godnego uwagi ogólnego prawa. Wiele wyników w matematyce, fizyce i naukach przyrodniczych znaleziono na drodze szczęśliwych uogólnień. Patrz artykuł INDUKCJA I INDUKCJA MATEMATYCZNA.

2. Uogólnienie może być użyteczne przy rozwiązywaniu zadań. Rozpatrzmy następujące zadanie z geometrii przestrzennej: „Dana jest prosta i ośmiościan foremny w ustalonym położeniu. Znaleźć płaszczyznę przechodzącą przez daną prostą i dzielącą na połowy objętość danego ośmiościanu." To zadanie może się wydawać trudne, ale w rzeczywistości nie trzeba wielkiej znajomości kształtu ośmiościanu foremnego, aby postawić następujące ogólniejsze zadanie: „Dana jest prosta i bryła mająca środek symetrii w ustalonym położeniu. Znaleźć płaszczyznę przechodzącą przez daną prostą i dzielącą na połowy objętość danej bryły." Szukana płaszczyzna przechodzi oczywiście przez środek symetrii bryły i jest wyznaczona przez ten punkt i przez daną prostą. Ponieważ ośmiościan ma środek symetrii, więc tym samym rozwiązaliśmy nasze wyjściowe zadanie.

Czytelnik nie może nie zauważyć, że drugie zadanie jest ogólniejsze niż pierwsze, a mimo to znacznie od niego łatwiejsze. W gruncie rzeczy naszym głównym osiągnięciem przy rozwiązywaniu pierwszego zadania było *wymyślenie drugiego zadania*. Wynajdując drugie zadanie rozpoznaliśmy rolę środka symetrii; *uchwyciliśmy* tę własność ośmiościanu, która jest istotna dla naszego zadania, mianowicie fakt, że ośmiościan ma środek symetrii.

Zadanie ogólniejsze może być łatwiejsze do rozwiązania. Brzmi to paradoksalnie, ale po zapoznaniu się z poprzednim przykładem nie powinno to wzbudzać u nas podobnych odczuć. Głównym osiągnięciem przy rozwiązywaniu zadania szczególnego było wymyślenie zadania ogólnego. Po dokonaniu głównego osiągnięcia pozostaje już tylko do wykonania mniejsza część pracy. Tak więc w naszym przypadku rozwiązanie zadania ogólnego jest tylko mniejszą częścią rozwiązania zadania szczególnego. Patrz artykuł PARADOKS ODKRYWCY.

3. „Znaleźć objętość ostrosłupa ściętego o podstawie kwadratowej, wiedząc, że bok podstawy dolnej ma 10 cm, bok podstawy górnej ma 5 cm, a wysokość ostrosłupa ściętego ma 6 cm". Jeżeli zamiast liczb 10, 5, 6 podstawimy litery, np. a, b, h, to dokonamy uogólnienia. Otrzymamy zadanie ogólniejsze niż zadanie wyjściowe, a mianowicie: „Znaleźć objętość ostrosłupa ściętego o podstawie kwadratowej wiedząc, że bok podstawy dolnej wynosi a, bok podstawy górnej b, a wysokość ostrosłupa ściętego h". Takie uogólnienie może być bardzo użyteczne. Przejście od zadania „na liczbach" do zadania „na literach" otwiera przed nami nowe możliwości; możemy zmieniać dane i przez to możemy sprawdzać nasze wyniki na różne sposoby. Patrz artykuł CZY MOŻESZ SPRAWDZIĆ WYNIK?, punkt 2 oraz MODYFIKACJA ZADANIA, punkt 4.

Warunek jest to jedna z głównych części zadania typu „znaleźć". Patrz ZADANIA TYPU „ZNALEŹĆ", ZADANIA TYPU „UDOWODNIĆ", punkt 3. Patrz także TERMINY STARE I NOWE, punkt 2.

Warunek nazywamy *zbyt obszernym*, jeżeli zawiera zbyteczne części. Warunek nazywamy *sprzecznym*, jeżeli jego części nie dają się ze sobą pogodzić, tak że nie ma żadnego obiektu spełniającego cały ten warunek.

Jeżeli więc warunek jest wyrażony przez więcej równań liniowych niż jest niewiadomych, to jest on albo zbyt obszerny, albo sprzeczny; jeżeli warunek wyrażony jest przez mniej równań niż jest niewiadomych, to nie wystarcza on do określenia niewiadomych; jeżeli warunek jest wyrażony przez dokładnie tyle równań, ile jest niewiadomych, to jest on zazwyczaj akurat wystarczający do określenia niewiadomych, ale w pewnych wyjątkowych przypadkach może on być sprzeczny albo niewystarczający.

Wniosek jest to twierdzenie, które łatwo się otrzymuje badając inne, właśnie znalezione twierdzenie. Angielskie słowo *corollary* (wniosek) pochodzi z łaciny; bardziej dosłownym tłumaczeniem byłoby „podarek" albo „napiwek".

Wydziel poszczególne części warunku. Naszym pierwszym obowiązkiem jest zrozumieć zadanie. Zrozumiawszy zadanie jako całość, przechodzimy do szczegółów. Rozpatrujemy oddzielnie jego główne części: niewiadomą, dane, warunek. Gdy te części tkwią już dobrze w naszym umyśle i nie wpadliśmy jeszcze na żaden dobry pomysł, to przechodzimy do dalszych szczegółów. Rozpatrujemy poszczególne dane, każdą z nich oddzielnie. Zrozumiawszy warunek jako całość, *wydzielamy poszczególne jego części* i rozpatrujemy każdą z nich oddzielnie.

Widzimy teraz na czym polega rola omawianej tu wskazówki. Ma nam ona nasuwać na myśl krok, którego powinniśmy dokonać, gdy staramy się dokładnie wniknąć w zadanie i gdy musimy przechodzić do coraz to dalszych szczegółów. Jest to jeden z kroków przy ROZKŁADANIU I SKŁADANIU NA NOWO.

Wydziel poszczególne części warunku. Czy możesz je zapisać? To pytanie często zadajemy przy UKŁADANIU RÓWNAŃ.

Wykonanie planu. Ułożyć plan a wykonać go to dwie różne rzeczy. W pewnym sensie odnosi się to także do zadań matematycznych; między wykonaniem planu rozwiązania a ułożeniem go są pewne różnice w charakterze pracy.

1. Gdy układamy ostateczny i ścisły dowód, możemy stosować prowizoryczne i jedynie prawdopodobne rozumowanie, tak jak używamy rusztowania do podtrzymania mostu w trakcie jego budowy. Jednakże gdy praca jest dostatecznie zaawansowana, zdejmujemy rusztowanie i most powinien stać sam. Podobnie, gdy rozwiązanie jest już dostatecznie daleko posunięte, odsuwamy na bok wszelkiego rodzaju prowizoryczne i jedynie prawdopodobne rozumowania; wynik powinien być oparty tylko na ścisłym rozumowaniu.

Układając plan rozwiązania nie powinniśmy się zbyt obawiać prawdopodobnego, heurystycznego rozumowania. Wszystko, co prowadzi do słusznej myśli, jest słuszne. Musimy jednak zmienić to stanowisko, gdy zaczynamy wykonywać nasz plan; wtedy powinniśmy się godzić tylko na ścisłe, niezawodne rozumowanie. *Wykonując swój plan rozwiązania sprawdzaj każdy krok. Czy jest dla ciebie jasne, że krok jest poprawny?*

Im troskliwiej sprawdzamy poszczególne kroki przy

wykonywaniu planu, tym swobodniej możemy korzystać z rozumowania heurystycznego w trakcie układania planu.

2. Należy zwrócić pewną uwagę na kolejność pracy nad poszczególnymi szczegółami planu, szczególnie gdy zadanie jest złożone. Nie możemy ominąć żadnego szczegółu, musimy rozumieć związek danego szczegółu z całym zadaniem, nie możemy stracić z oczu powiązań głównych kroków rozwiązania ze sobą. Dlatego też powinniśmy wykonywać swą pracę we właściwej kolejności.

W szczególności nie jest rozsądnie sprawdzać drugorzędne szczegóły, zanim nie mamy rzetelnych podstaw do sądzenia, że główne kroki rozumowania są poprawne. Jeżeli jest jakaś luka w głównej myśli dowodu, to sprawdzenie tego czy tamtego podrzędnego szczegółu byłoby niecelowe.

Kolejność wypracowania poszczególnych szczegółów dowodu może się bardzo różnić od kolejności, w jakiej je wymyślaliśmy; a kolejność, w jakiej podamy te szczegóły w ostatecznej postaci dowodu, może być jeszcze inna. Euklides przedstawia w swoich *Elementach* szczegóły dowodów w sztywnej, symetrycznej kolejności; było to często naśladowane, ale i często krytykowane.

3. W wykładzie Euklidesa wszystkie rozumowania przebiegają w tym samym kierunku: od danych do niewiadomej w zadaniach typu „znaleźć" i od założenia do tezy w zadaniach typu „udowodnić". Każdy nowy element (punkt, prosta itd.) jest poprawnie wyprowadzony z danych albo z elementów poprawnie wyprowadzanych w poprzednich krokach. Każde nowe stwierdzenie jest poprawnie udowodnione w oparciu o założenie albo w oparciu o stwierdzenie poprawnie udowodnione w po-

przednich krokach. Każdy nowy krok, każde nowe stwierdzenie bada się wtedy, gdy się z nim po raz pierwszy spotyka, a więc bada się je tylko raz; możemy skupić całą naszą uwagę na bieżącym kroku, nie musimy patrzeć za siebie ani daleko naprzód. Ostatnim nowym elementem, którego wyprowadzenie musimy sprawdzić, jest niewiadoma. Ostatnim stwierdzeniem, którego dowód musimy zbadać, jest teza. Jeżeli każdy krok, także i ostatni, jest poprawny, to całe rozumowanie jest poprawne.

Euklidesowski sposób wykładu można polecać bez żadnych zastrzeżeń, jeżeli chodzi o zbadanie rozumowania z wszelkimi szczegółami. Zwłaszcza gdy jest to nasze własne rozumowanie, gdy jest ono długie i skomplikowane, gdy badaliśmy je już dokładnie na wielu stronicach, tak że nie zostało już nic do zrobienia z wyjątkiem zbadania każdego szczegółu oddzielnie — wtedy nie możemy zrobić nic lepszego jak wypisać całe rozumowanie w euklidesowski sposób.

Nie można jednakże polecać bez zastrzeżeń euklidesowskiego sposobu wykładu, jeżeli chodzi o zapoznanie z rozumowaniem czytelnika czy słuchacza, który nigdy przedtem o tym rozumowaniu nie słyszał. Wykład Euklidesa jest wspaniały, jeśli chodzi nam o wskazanie każdego szczegółu, ale nie jest zbyt dobry, gdy chodzi nam o wytyczenie głównej linii rozumowania. INTELIGENTNY CZYTELNIK z łatwością widzi, że każdy krok jest poprawny, ale ma wielkie trudności z uchwyceniem źródeł tych kroków, ich celów i ostatniej myśli całego rozumowania. Powodem tych trudności jest to, że wykład Euklidesa bardzo często przebiega w dokładnie przeciwnej kolejności niż naturalny sposób odkrycia tego rozumowania. (Euklidesowski wykład przebiega sztywno według wzoru „syntezy"; patrz PAPPUS, zwłaszcza punkty 3, 4, 5.)

4. Reasumując można powiedzieć, że euklidesowski sposób wykładu postępujący bezwzględnie od danych do niewiadomej i od założenia do tezy jest doskonały dla szczegółowego sprawdzenia rozumowania, ale daleko mu do doskonałości, jeśli chodzi o wyjaśnienie głównej linii rozumowania.

Jest wysoce pożądane, aby uczniowie badali swoje własne rozumowanie w euklidesowski sposób, idąc od danych do niewiadomej i sprawdzając każdy krok, chociaż nie należy tego zbyt sztywno narzucać siłą. Nie jest natomiast zbyt pożądane, aby nauczyciel podawał wiele dowodów w czysto euklidesowski sposób. Euklidesowski sposób może być bardzo użyteczny po dyskusji, w której — jak polecamy w tej książce — uczniowie prowadzeni przez nauczyciela odkrywają możliwie samodzielnie główną myśl rozwiązania. Pożądany wydaje się także sposób — przyjęty przez niektóre podręczniki — podawania najpierw intuicyjnego szkicu głównej myśli, a następnie szczegółów w euklidesowskiej kolejności wykładu.

5. Chcąc się przekonać, że jego twierdzenie jest prawdziwe, sumienny matematyk stara się ujrzeć je w sposób intuicyjny oraz dać formalny dowód. *Czy jest dla ciebie jasne, że jest to poprawne? Czy możesz to udowodnić?* Sumienny matematyk postępuje tu jak kobieta dokonująca sumiennie zakupów. Chcąc się przekonać o jakości towaru, chce go ujrzeć i dotknąć. Intuicyjny wgląd w twierdzenie i jego formalny dowód są dwoma różnymi sposobami spostrzegania prawdy, dającymi się porównać do postrzegania obiektu materialnego dwoma różnymi zmysłami: wzrokiem i dotykiem.

Intuicyjne spostrzeżenie może wybiegać daleko naprzód przed formalny dowód. Każdy inteligentny uczeń nie mając żadnej systematycznej wiedzy z zakresu geometrii przestrzennej, gdy tylko dobrze zrozumiał terminy, może spostrzec, że dwie proste równoległe do tej samej prostej są równoległe względem siebie (trzy proste mogą leżeć w tej samej płaszczyźnie albo nie). Jednakże dowód tego twierdzenia — twierdzenia 9 Księgi 11 *Elementów* Euklidesa — wymaga długich, starannych i pomysłowych przygotowań.

Może się jednak zdarzyć, że formalne operowanie logicznymi regułami i algebraicznymi wzorami znacznie wyprzedza intuicję. Prawie każdy od razu spostrzega, że trzy proste wzięte losowo dzielą płaszczyznę na siedem części (spójrz na jedną skończoną część — trójkąt wyznaczony przez te proste). Chyba nikt nie jest w stanie zauważyć, nawet przy największym skupieniu uwagi, że pięć płaszczyzn wziętych losowo dzieli przestrzeń na 26 części. Jednakże można to ściśle udowodnić, i dowód nie jest nawet długi ani trudny.

Wykonując swój plan sprawdzamy każdy krok. Sprawdzając dany krok możemy oprzeć się na intuicji albo na formalnych regułach. Czasem na czele jest intuicja, a czasem rozumowanie formalne. Interesującym i pożytecznym ćwiczeniem jest dokonać sprawdzenia oboma sposobami. *Czy jest dla ciebie jasne, że krok jest poprawny?* Tak, ja go widzę jasno i wyraźnie. Intuicja jest na czele; ale czy rozumowanie formalne nie może jej dogonić? *Czy możesz to także udowodnić?*

Dążenie do formalnego udowodnienia tego, co się widzi intuicyjnie, i do zobaczenia w sposób intuicyjny tego, co się formalnie udowodniło, jest pobudzającym ćwiczeniem umysłu. Niestety, na lekcjach nie zawsze jest na to dosyć czasu. Typowymi przykładami ilustrującymi tekst tego artykułu są przykłady omówione w ustępach **12** i **14**.

Wytrwałość, nadzieja, sukces. Błędem byłoby sądzić, że rozwiązywanie zadań to czysto „intelektualna sprawa"; ważną rolę gra tu wytrwałość i emocja. Obojętność i bierna zgoda na zrobienie czegokolwiek może wystarczyć do rozwiązania typowego zadania w klasie. Ale do rozwiązania poważnego zagadnienia naukowego potrzebna jest siła woli, której nie złamią lata trudów i gorzkich rozczarowań.

1. Wytrwałość waha się wraz z nadzieją i zwątpieniem, z satysfakcją i rozczarowaniem. Łatwo jest kontynuować badania, gdy sądzimy, że rozwiązanie jest tuż tuż; ale trudno jest być wytrwałym, gdy nie widzimy żadnego sposobu wybrnięcia z trudności. Jesteśmy rozradowani, gdy nasze przewidywania sprawdzają się. Jesteśmy przygnębieni, gdy droga, którą z wiarą szliśmy, jest nagle dalej zamknięta; nasza wytrwałość chwieje się.

Il n'est point besoin espérer pour entreprendre ni réussir pour persévérer. „Nie trzeba mieć nadziei, aby zabrać się do czegoś, ani sukcesów, aby wytrwać". Tak może mówić nieugięta wola albo honor i obowiązkowość, albo szlachetny człowiek o szlachetnej sprawie. Jednakże ten rodzaj wytrwałości nie jest odpowiedni dla naukowca, który powinien mieć nieco nadziei, aby zabrać się do czegoś, i nieco sukcesów, aby wytrwać. W pracy naukowej trzeba rozsądnie dostosowywać wytrwałość do perspektyw na sukces. Nie zabierzesz się do zadania, jeżeli nie jest ono ani trochę ciekawe; zajmiesz się nim poważnie, jeżeli wygląda na pouczające; rzucisz w wir pracy całą swą osobowość, jeśli widzisz wielką obietnicę. Jeżeli postawisz przed sobą jakiś cel, to starasz się go osiągnąć, ale nie stawiasz przed sobą celów niepotrzebnie trudnych. Nie gardzisz małymi sukcesami; przeciwnie, szukasz ich: *Jeżeli nie możesz rozwiązać postawionego zadania, spróbuj najpierw rozwiązać jakieś zadanie pokrewne.*

2. Gdy uczeń robi rzeczywiście niedorzeczne, poważne błędy albo jest rozpaczliwie powolny, to kłopot zwykle polega na tym samym: brak mu zupełnie chęci do rozwiązywania zadania; nie chce mu się nawet należycie zrozumieć zadania, no i nie zrozumiał go. Dlatego też nauczyciel, chcąc na serio pomóc uczniowi, powinien przede wszystkim rozbudzić w nim jakieś zaciekawienie zadaniem, sprawić, aby zapragnął je rozwiązać. Nauczyciel powinien także zostawić uczniowi trochę czasu na zebranie myśli i zabranie się do zadania.

Uczenie rozwiązywania zadań jest to wychowywanie woli. Uczeń rozwiązując zadania, które nie są dla niego zbyt łatwe, uczy się wytrwałości mimo braku sukcesów, uczy się doceniać małe osiągnięcia, czekać na istotną, dobrą myśl i skoncentrować się nad nią bez reszty, gdy nadejdzie. Jeżeli nie miał okazji zaznajomić się w szkole ze zmiennymi emocjami walki o rozwiązanie, to jego wykształcenie matematyczne ma lukę w najistotniejszym punkcie.

Zadania praktyczne różnią się pod różnymi względami od zadań czysto matematycznych; jednakże główne motywy i tok postępowania przy rozwiązywaniu są w zasadzie te same. Praktyczne zadania inżynierskie zazwyczaj zawierają w sobie zadania matematyczne. Powiemy kilka słów o różnicach, analogiach i związkach między tymi dwoma rodzajami zadań.

1. Imponującym zadaniem praktycznym jest budowa tamy na rzece. Nie potrzeba żadnej specjalnej wiedzy, aby to zadanie zrozumieć. W niemal prehistorycznych czasach, na długo przed naszymi czasami naukowych teorii, ludzie budowali pewnego rodzaju tamy w dolinie Nilu i w innych miejscach na świecie, gdzie urodzaj zależał od nawodnienia.

Wyobraźmy sobie zadanie polegające na zbudowaniu ważnej, nowoczesnej tamy.

Co jest niewiadome? W tego rodzaju zadaniu tkwi wiele niewiadomych: dokładna lokalizacja tamy, jej kształt i wymiary, materiał potrzebny do budowy i tak dalej.

Jaki jest warunek? Nie możemy na to pytanie odpowiedzieć jednym krótkim zdaniem, gdyż warunków jest wiele. W tak poważnym projekcie trzeba spełnić liczne ważne wymagania ekonomiczne nie naruszając — o ile to możliwe — wymagań innej natury. Tama powinna dostarczać energii elektrycznej, dawać wodę do nawodnienia pól lub do innego celu oraz chronić przed powodzią. Z drugiej strony, tama powinna możliwie mało przeszkadzać żegludze lub życiu ekonomicznie ważnego gatunku ryb, lub naruszać piękno przyrody i tak dalej. No i, oczywiście, tama powinna kosztować możliwie mało i powinna być zbudowana możliwie szybko.

Co jest dane? Ilość pożądanych danych jest ogromna. Potrzebne nam są dane topograficzne dotyczące najbliższej okolicy rzeki i jej dopływów; dane geologiczne ważne dla zbudowania odpowiednio masywnych fundamentów, dla zorientowania się o możliwości przeciekania wody i o łatwo dostępnych materiałach budowlanych; dane meteorologiczne o rocznych opadach i o poziomie przypływów; dane ekonomiczne o wartości ziemi, która ulegnie zatopieniu, o koszcie materiałów i robocizny i tak dalej.

Nasz przykład pokazuje, że niewiadome, dane i warunki są w zadaniu praktycznym o wiele bardziej złożone i mniej wyraźnie określone niż w zadaniu matematycznym.

2. Aby rozwiązać zadanie, potrzebujemy pewnej ilości uprzednio zdobytej wiedzy. Współczesny inżynier ma do swojej dyspozycji wysoce wyspecjalizowaną wiedzę: nau-

kową teorię wytrzymałości materiałów, swoje własne doświadczenie i masę doświadczeń inżynierskich zebranych w specjalnej literaturze technicznej. Nie możemy tu korzystać z tak specjalnej wiedzy, ale możemy spróbować wyobrazić sobie wiadomości starożytnego egipskiego budowniczego tam.

Widział on, rzecz prosta, różne inne, być może mniejsze tamy: nasypy ziemi lub kamienie powstrzymujące wodę. Widział przypływ niosący resztki wszelkiego rodzaju przedmiotów i napierający na nasyp. Być może pomagał przy naprawianiu nasypu nadwyrężonego przez przypływ. Być może, widział jak napór wody przerywa tamę. Z pewnością słyszał opowiadania o tamach wytrzymujących napór wody przez całe stulecia lub o tamach, które niespodziewanie zostały przerwane i spowodowały katastrofę. Może wyobrażał sobie parcie rzeki na powierzchnię tamy oraz naprężenia i ciśnienie w jej wnętrzu.

Jednakże egipski budowniczy tam nie miał żadnego ścisłego, ilościowego, naukowego pojęcia o parciu cieczy czy o naprężeniach w ciele stałym. Takie pojęcia tworzą istotną część intelektualnego wyposażenia współczesnego inżyniera. Jednakże ten ostatni korzysta także sporo z wiedzy, która nie osiągnęła jeszcze zupełnie ścisłego, naukowego poziomu; to, co on wie o erozji dokonywanej przez płynącą wodę, o przenoszeniu się mułu, o plastyczności i innych niezupełnie jasno opisanych właściwościach pewnych materiałów, jest wiedzą o charakterze raczej doświadczalnym.

Nasz przykład pokazuje, że potrzebna wiedza i pojęcia używane w zadaniach praktycznych są bardziej złożone i mniej ściśle zdefiniowane niż wiedza i pojęcia używane w zadaniach matematycznych.

3. Niewiadome, dane, warunki, pojęcia, niezbędna

wiedza — wszystko to jest bardziej złożone i mniej ścisłe w zadaniach praktycznych niż w zadaniach czysto matematycznych. Jest to ważna różnica, być może główna różnica, i z niej z pewnością wynikają dalsze; jednakże podstawowe motywy i sposoby postępowania przy rozwiązaniu są takie same w obu rodzajach zadań.

Istnieje rozpowszechniona opinia, że do rozwiązywania zadań praktycznych trzeba mieć więcej doświadczenia niż do rozwiązywania zadań matematycznych. Możliwe, że tak jest. Ale bardzo możliwe, że różnica polega na naturze niezbędnej wiedzy, a nie na naszej postawie wobec zadania. Rozwiązując zadanie jednego czy drugiego rodzaju musimy oprzeć się na naszym doświadczeniu z podobnymi zadaniami i często zadajemy pytania: *Czy nie spotkałeś się z tym samym zadaniem w nieco innej postaci? Czy znasz jakieś pokrewne zadanie?*

Rozwiązując zadanie matematyczne zaczynamy od zupełnie jasnych pojęć, które są dość dobrze uporządkowane w naszej głowie. Rozwiązując zadanie praktyczne musimy często zaczynać od raczej mętnych myśli; wyjaśnienie i ucieleśnienie tych myśli może stać się ważną częścią zadania. I tak medycyna jest dziś w lepszym położeniu, jeśli chodzi o zwalczanie chorób zakaźnych, niż była w czasach przed Pasteurem, gdy samo pojęcie infekcji było raczej mgliste. *Czy brałeś pod uwagę wszystkie istotne pojęcia zawarte w zadaniu?* To pytanie jest właściwe dla wszystkich rodzajów zadań, ale korzyść z niego zmienia się w bardzo szerokich granicach w zależności od natury występujących pojęć.

W dobrze postawionym zadaniu matematycznym wszystkie dane i wszystkie części warunku są istotne i trzeba je brać pod uwagę. W zadaniach praktycznych mamy wielką ilość danych i warunków; bierzemy ich pod uwagę tak wiele, jak można, ale niektóre z nich musimy odrzucać. Rozpatrzmy przypadek projektanta dużej tamy. Bierze on pod uwagę interes publiczny i ważne względy ekonomiczne, ale musi zrezygnować z pewnych drobnych żądań i zbytniej doskonałości. Dane w jego zadaniu są, ściśle mówiąc, niewyczerpalne. Przypuśćmy na przykład, że projektant chciałby nieco więcej wiedzieć o naturze geologicznej podłoża, na którym ma być położony fundament. Jednakże musi w końcu przerwać zbieranie danych geologicznych, mimo że pozostają pewne nieuniknione drobne niepewności.

Czy skorzystałeś ze wszystkich danych? Czy korzystałeś z całego warunku? Nie możemy opuścić tych pytań, gdy mamy do czynienia z czysto matematycznymi zadaniami. Jednakże w zadaniach praktycznych powinniśmy stawiać te pytania w postaci zmodyfikowanej: Czy skorzystałeś ze wszystkich danych, które *mogłyby w sposób istotny przyczynić się* do rozwiązania? Czy skorzystałeś ze wszystkich warunków, które *mogłyby istotnie wpłynąć* na rozwiązanie? Dokonujemy oceny odpowiednich dostępnych informacji, zbieramy ich jeszcze więcej, gdy potrzeba, ale w końcu musimy przerwać zbieranie, musimy się ograniczyć do pewnej ilości informacji, musimy z czegoś zrezygnować. „Jeżeli chcesz żeglować zupełnie bezpiecznie, to nigdy nie wyruszaj w morze". Bardzo często jest wiele dodatkowych danych, które nie mają żadnego istotnego wpływu na ostateczną postać rozwiązania.

4. Projektanci starożytnych egipskich tam musieli opierać się na polegającej na zdrowym rozsądku interpretacji swego doświadczenia; na niczym więcej nie mogli się opierać. Współczesny inżynier nie może opierać się jedynie na zdrowym rozsądku, szczególnie gdy projektuje jakieś nowe i śmiałe przedsięwzięcie; musi obliczyć wytrzymałość projektowanej tamy i przewidzieć w sposób liczbowy naprężenia w jej wnętrzu. W tym celu musi zastosować teorię sprężystości (która stosuje się dość dobrze do konstrukcji betonowych). Do zastosowania tej teorii potrzebuje wielu wiadomości z matematyki; praktyczne zadanie inżynierskie prowadzi do zadania matematycznego.

To zadanie matematyczne jest zbyt specjalne, aby je tu omawiać; możemy o nim zrobić tylko pewną ogólną uwagę. Układając i rozwiązując zadanie matematyczne wynikające z zadań praktycznych zadowolamy się zazwyczaj pewnym *przybliżeniem*. Jesteśmy zmuszeni zaniedbać pewne mniej ważne dane i warunki zadania praktycznego. Dlatego też rozsądnie jest zgodzić się na pewne drobne niedokładności w obliczeniach, zwłaszcza gdy chcemy zyskać na prostocie to, co tracimy na dokładności.

5. O przybliżeniach można by powiedzieć wiele rzeczy, które byłyby ciekawe z ogólnego punktu widzenia. Nie możemy jednak zakładać u czytelnika żadnej specjalnej wiedzy matematycznej i dlatego ograniczymy się do jednego intuicyjnego i pouczającego przykładu.

Sporządzanie map geograficznych jest ważnym zadaniem praktycznym. Projektując mapę przyjmujemy często, że ziemia jest kulą. Otóż jest to przybliżone założenie, a nie dokładna prawda. Powierzchnia ziemi nie da się w ogóle określić w sposób matematyczny, a w każdym bądź razie wiemy na pewno, że ziemia jest na biegunach spłaszczona. Jednakże przyjmując, że ziemia jest kulą, możemy sporządzić jej mapę w sposób dużo łatwiejszy. Zyskujemy wiele na prostocie, a niedużo tracimy na dokładności. Istotnie, wyobraźmy sobie wielką piłkę, która ma dokładnie kształt ziemi, o średnicy 1 m na jej równiku. Odległość biegunów takiej piłki jest mniejsza niż 1 m, gdyż ziemia jest spłaszczona, lecz mniejsza tylko o około 3 mm. Kula jest więc dobrym praktycznym przybliżeniem.

Zadania typu „znaleźć", zadania typu „udowodnić". Porównamy ze sobą te dwa typy zadań.

1. Celem zadania typu „znaleźć" jest znalezienie pewnego obiektu, niewiadomej zadania.

Niewiadomą nazywa się także rzecz szukaną lub żądaną. Zadania typu „znaleźć" mogą być zadaniami teoretycznymi lub praktycznymi, abstrakcyjnymi lub konkretnymi, poważnymi problemami lub jedynie zagadkami. Możemy szukać wszelkiego rodzaju niewiadomych; możemy starać się znaleźć, otrzymać, zdobyć, produkować albo konstruować wszelkiego rodzaju obiekty. W zadaniu polegającym na rozwikłaniu tajemniczej historii niewiadomą jest morderca. W zadaniu szachowym niewiadomą jest ruch szachisty. W pewnych zagadkach niewiadomą jest słowo. W pewnych elementarnych zadaniach z algebry niewiadomą jest liczba. W geometrycznym zadaniu konstrukcyjnym niewiadomą jest figura geometryczna.

2. Celem zadania typu „udowodnić" jest wykazać w sposób niezawodny, że pewne jasno sformułowane stwierdzenie jest prawdziwe, albo też wykazać, że jest ono fałszywe. Musimy odpowiedzieć na pytania: Czy to stwierdzenie jest prawdziwe, czy fałszywe? I musimy odpowiedzieć na to pytanie w sposób niezawodny i zdecydowany: albo dowodząc, że stwierdzenie jest prawdziwe, albo dowodząc, że jest fałszywe.

Świadek oświadcza, że oskarżony przebywał określonej nocy w domu. Sędzia musi przekonać się, czy to stwierdzenie jest prawdziwe, czy nie; prócz tego musi on znaleźć możliwie dobre podstawy dla swego przekonania. Przed sędzią stoi więc zadanie typu „udowodnić". Innym zadaniem typu „udowodnić" jest „udowodnić twierdzenie Pitagorasa". Nie mówimy: „Udowodnić albo obalić twierdzenie Pitagorasa". Z pewnych względów byłoby lepiej włączyć do sformułowania zadania możliwości obalenia twierdzenia, ale możemy to zaniedbać, ponieważ wiemy, że szanse obalenia twierdzenia Pitagorasa są raczej małe.

3. Głównymi częściami zadania typu „znaleźć" są *niewiadoma*, *dane* i *warunek*.

Jeżeli mamy zbudować trójkąt o bokach a, b, c, to niewiadomą jest trójkąt, danymi są trzy długości a, b, c i wymagane jest, aby trójkąt spełniał warunek polegający na tym, żeby jego boki miały dane długości a, b, c. Jeżeli mamy zbudować trójkąt, którego wysokości są równe a, b, c, to niewiadomą jest obiekt tego samego rodzaju co poprzednio, dane są te same, ale warunek wiążący niewiadomą z danymi jest inny.

4. Jeżeli zadanie typu „udowodnić" jest zadaniem matematycznym zwykłego rodzaju, to jego głównymi częściami są: *założenie* i *teza* twierdzenia, które mamy udowodnić albo obalić.

„Jeżeli cztery boki czworoboku są równe, to jego przekątne są do siebie prostopadłe". Druga część twierdzenia zaczynającego się od „to" jest to teza, pierwsza część zaczynająca się od „jeżeli" jest to założenie.

Nie we wszystkich twierdzeniach matematycznych można w sposób naturalny wydzielić założenie i tezę. Tak np. chyba jest niemożliwe wydzielić te części w twierdzeniu: „Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych".

5. Jeżeli chcesz rozwiązać zadanie typu „znaleźć", to musisz znać, i to bardzo dobrze znać jego główne części: niewiadomą, dane i warunek. Nasza lista zawiera wiele pytań i wskazówek dotyczących tych części.

Co jest niewiadome? Co jest dane? Jaki jest warunek?
Wydziel poszczególne części warunku.
Znajdź związek między danymi i niewiadomą.
Spójrz na niewiadomą. I spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze znane ci zadanie mające tę samą lub podobną niewiadomą.

Zatrzymaj tylko część warunku, resztę odrzuć; do jakiego stopnia niewiadoma jest wtedy określona, jak może się ona zmieniać? Czy nie mógłbyś wydobyć czegoś pożytecznego z danych? Czy mógłbyś rozpatrzyć inne dane, mogące określić niewiadomą? Czy nie mógłbyś zmienić niewiadomej albo danych, albo — jeśli trzeba — i niewiadomej i danych, tak aby nowa niewiadoma i nowe dane były bliższe sobie?

Czy skorzystałeś ze wszystkich danych? Czy skorzystałeś z całego warunku?

6. Jeżeli chcesz rozwiązać zadanie typu „udowodnić", to musisz znać, i to bardzo dobrze znać, jego główne części: założenie i tezę. Istnieją użyteczne pytania i wskazówki dotyczące tych części, odpowiadające pytaniom i wskazówkom naszej listy, która jest specjalnie dostosowana do zadań typu „znaleźć".

Co jest założeniem? Co jest tezą?
Wydziel poszczególne części założenia.
Znajdź związek między założeniem i tezą.
Spójrz na tezę! I spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze znane ci twierdzenie mające tę samą lub podobną tezę.

Zatrzymaj tylko część założenia, resztę odrzuć; czy teza jest w dalszym ciągu słuszna? Czy nie mógłbyś wydobyć czegoś pożytecznego z założenia? Czy nie mógłbyś rozpatrzyć innego założenia, z którego mógłbyś łatwo wyprowadzić tezę? Czy nie mógłbyś zmienić założenia albo tezy, albo — jeśli trzeba — i założenia i tezy, tak aby nowe założenie i nowa teza były bliższe sobie?

Czy skorzystałeś z całego założenia?

7. Zadania typu „znaleźć" są ważniejsze w matematyce elementarnej, zadania typu „udowodnić" — w matematyce wyższej. W niniejszej książce większy nacisk położony jest na zadania typu „znaleźć", ale autor ma nadzieję przywrócić równowagę w pełniejszym potraktowaniu omawianego tu przedmiotu.

Zadanie pomocnicze jest to zadanie, które rozpatrujemy nie dlatego, że naszym celem jest jego rozwiązanie, ale dlatego, że mamy nadzieję, iż rozpatrzenie go może nam pomóc rozwiązać inne zadanie — nasze wyjściowe zadanie. Zadanie wyjściowe jest naszym celem, zadanie pomocnicze jest środkiem, za pomocą którego staramy się ten cel osiągnąć.

Owad usiłuje wydostać się z pokoju przez szybę okienną; próbuje tego wielokrotnie, a nie próbuje wydostać się przez następne okno, które jest otwarte i przez które wpadł do pokoju. Człowiek jest w stanie, a przynajmniej powinien być w stanie, postępować bardziej inteligentnie. Wyższość człowieka polega na tym, że obchodzi on przeszkodę dookoła, jeśli nie może pokonać jej bezpośrednio, że wymyśla odpowiednie zadanie pomocnicze, gdy nie może rozwiązać wyjściowego zadania. Wymyślenie zadania jest ważną operacją umysłu. Postawić jasno nowe zadanie służące innemu zadaniu, uznać je za swój cel, który jest środkiem do uzyskania innego celu, jest to kunsztowne osiągnięcie ludzkiej inteligencji. Nauczenie się (lub nauczenie kogoś), jak w sposób inteligentny operować zadaniami pomocniczymi, jest bardzo ważnym zadaniem.

1. *Przykład.* Znaleźć x spełniające równanie

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Jeżeli zauważymy, że $x^4 = (x^2)^2$, możemy spostrzec, że wprowadzenie nowej niewiadomej

$$y = x^2$$

jest korzystne. Mamy teraz nowe zadanie: znaleźć y spełniające równanie

$$y^2 - 13y + 36 = 0.$$

Nowe zadanie jest zadaniem pomocniczym; mamy zamiar użyć go jako środka do rozwiązania naszego wyjściowego zadania. Niewiadomą y naszego zadania pomocniczego nazywamy odpowiednio *niewiadomą pomocniczą*.

2. *Przykład.* Znaleźć przekątną prostopadłościanu mając dane długości trzech jego krawędzi poprowadzonych z tego samego wierzchołka.

Próba rozwiązania tego zadania (ustęp 8) może nas przez analogię doprowadzić do innego zadania (ustęp 15): Znaleźć przekątną prostokąta mając dane długości dwóch jego boków wychodzących z tego samego wierzchołka.

Nowe zadanie jest zadaniem pomocniczym; rozpatrujemy je, gdyż mamy nadzieję wyciągnąć z niego jakąś korzyść dla naszego wyjściowego zadania.

3. *Korzyść.* Korzyść, jaką wyciągamy z rozpatrzenia zadania pomocniczego, może być dwojakiego rodzaju. Możemy skorzystać z *wyniku* zadania pomocniczego. I tak w przykładzie 1 znalazłszy — rozwiązując równanie kwadratowe względem y — że y równe jest 4 albo 9, wnioskujemy, że $x^2 = 4$ lub $x^2 = 9$, i znajdujemy stąd wszelkie możliwe wartości na x. W innych przypadkach możemy skorzystać z *metody* zadania pomocniczego. I tak w przykładzie 2 zadanie pomocnicze jest zadaniem z geometrii płaskiej; jest ono analogiczne do zadania wyjściowego, które jest zadaniem z geometrii przestrzennej, ale jest prostsze od niego. Jest rzeczą rozsądną wprowadzić tego rodzaju zadanie pomocnicze w nadziei, że będzie ono pouczające, że pozwoli nam ono spróbować zaznajomić się z pewnymi metodami, operacjami czy środkami, z których będziemy mogli później skorzystać rozwiązując nasze zadanie wyjściowe. W przykładzie 2 wybór zadania pomocniczego jest raczej szczęśliwy: badając je dokładnie przekonujemy się, że możemy skorzystać zarówno z jego metody, jak i z wyniku. (Patrz ustęp **15** oraz artykuł CZY SKORZYSTAŁEŚ ZE WSZYSTKICH DANYCH?.)

4. *Ryzyko.* Rozpatrzenie zadania pomocniczego odbywa się kosztem zadania wyjściowego. Tracimy przy tym czas i energię. Jeżeli rozpatrzenie zadania pomocniczego nie da nam żadnej korzyści, to poświęcony mu czas i energia będą bezużytecznie stracone. Dlatego też powinniśmy ćwiczyć się we właściwym dobieraniu zadania pomocniczego. Może być wiele powodów uzasadniających nasz wybór. Zadanie pomocnicze może wydawać się bardziej dostępne niż zadanie wyjściowe; może wydawać się pouczające albo może nas pociągać swoją estetycznością. Niekiedy jedyną zaletą zadania pomocniczego jest to, że jest ono nowe i zawiera nie zbadane jeszcze możliwości; wybieramy je, ponieważ jesteśmy znużeni naszym wyjściowym zadaniem i wydaje nam się, że wyczerpaliśmy już wszelkie możliwe podejścia do niego.

5. *Jak znaleźć zadanie pomocnicze?* Odkrycie rozwiązania danego zadania zależy często od odkrycia odpowiedniego zadania pomocniczego. Niestety, nie ma żadnej niezawodnej metody odkrywania odpowiednich zadań pomocniczych, tak jak nie ma niezawodnej metody odkrycia rozwiązania. Istnieją jednak pytania i wskazówki, które są często pomocne. Należy do nich wskazówka: SPÓJRZ

NA NIEWIADOMĄ. Często do użytecznych zadań pomocniczych prowadzi nas MODYFIKACJA ZADANIA.

6. *Zadania równoważne*. Dwa zadania są *równoważne*, jeżeli z rozwiązania każdego z nich wynika rozwiązanie drugiego. I tak w naszym przykładzie 1 zadanie wyjściowe i zadanie pomocnicze są równoważne.

Rozpatrzmy następujące twierdzenia:

A. W każdym trójkącie równobocznym każdy z jego kątów jest równy 60°.

B. W każdym trójkącie równokątnym każdy z jego kątów jest równy 60°.

Te dwa twierdzenia nie są identyczne. Zawierają one różne pojęcia; jedno z twierdzeń dotyczy równości boków, drugie dotyczy równości kątów trójkąta. Ale każde z tych twierdzeń wynika z drugiego. Dlatego też zadanie polegające na udowodnieniu twierdzenia A jest równoważne zadaniu polegającemu na udowodnieniu twierdzenia B.

Jeżeli mamy udowodnić twierdzenie A, to korzystnie jest wprowadzić jako zadanie pomocnicze zadanie udowodnienia twierdzenia B. Twierdzenie B jest nieco łatwiej udowodnić niż twierdzenie A i — co ważniejsze — możemy *przewidzieć*, że B jest łatwiejsze niż A, możemy tak sądzić, możemy od początku uznać za prawdopodobne, że B jest łatwiejsze niż A. Istotnie, twierdzenie B, które dotyczy tylko kątów, jest bardziej „jednorodne" niż twierdzenie A, które dotyczy zarówno kątów, jak i boków.

Przejście od zadania wyjściowego do zadania pomocniczego nazywamy *redukcją zwrotną* albo *redukcją dwustronną*, albo *redukcją równoważną*, jeżeli te dwa zadania, wyjściowe i pomocnicze, są równoważne. I tak przejście od A do B (patrz wyżej) jest redukcją zwrotną; podobnie jest w przykładzie 1. Redukcje zwrotne są w pewnym względzie ważniejsze i bardziej pożądane niż inne sposoby wprowadzania zadań pomocniczych, ale zadania pomocnicze, które nie są równoważne zadaniu wyjściowemu, mogą być także bardzo użyteczne; patrz przykład 2.

7. *Łańcuchy zadań równoważnych* są częstym zjawiskiem w rozumowaniach matematycznych. Mamy rozwiązać zadanie A; nie możemy znaleźć rozwiązania, ale spostrzegamy, że A jest równoważne innemu zadaniu B. Rozpatrując zadanie B możemy wpaść na trzecie zadanie C, równoważne zadaniu B. Postępując w ten sam sposób sprowadzamy zadanie C do zadania D i tak dalej, aż dochodzimy do ostatniego zadania L, którego rozwiązanie jest znane albo otrzymuje się w prosty sposób. Ponieważ każde zadanie jest równoważne poprzedniemu, więc ostatnie zadanie L musi być równoważne wyjściowemu zadaniu A. Tak więc możemy otrzymać rozwiązanie wyjściowego zadania A z zadania L, które jest ostatnim ogniwem w naszym łańcuchu zadań równoważnych.

Tego rodzaju łańcuchy zadań zauważyli już greccy matematycy, o czym możemy się przekonać z pewnego ważnego urywka u PAPPUSA. Dla ilustracji rozpatrzmy znów nasz przykład 1. Nazwijmy warunkiem (A) warunek nałożony na niewiadomą x:

(A) $$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Jeden ze sposobów rozwiązania tego zadania polega na przekształceniu danego warunku na inny warunek, który nazwiemy warunkiem (B):

(B) $$(2x^2)^2 - 2(2x^2)\,13 + 144 = 0.$$

Zauważ, że warunki (A) i (B) są różne. Różnią się one niewiele — jeśli chcesz tak powiedzieć; są jednak z pewnością równoważne, jak się możesz łatwo o tym przekonać, ale na pewno nie są identyczne. Przejście od (A) do (B) jest nie tylko poprawne, ale ma także jasny cel, oczywisty dla każdego, kto jest obeznany z rozwiązywaniem równań kwadratowych. Idąc dalej w tym samym kierunku przekształcamy warunek (B) na jeszcze inny warunek (C):

(C) $$(2x^2)^2 - 2(2x^2)\,13 + 169 = 25.$$

Postępując dalej w ten sam sposób dostajemy

(D) $$(2x^2 - 13)^2 = 25,$$

(E) $$2x^2 - 13 = \pm 5,$$

(F) $$x^2 = \frac{13 \pm 5}{2},$$

(G) $$x = \pm\sqrt{\frac{13 \pm 5}{2}}.$$

(H) $$x = 3 \quad \text{lub} - 3, \quad \text{lub}\, 2, \quad \text{lub} - 2.$$

Każda redukcja, której dokonaliśmy, była zwrotna. Dlatego też ostatni warunek (H) jest równoważny pierwszemu warunkowi (A), a więc 3, -3, 2, -2 są to wszystkie możliwe rozwiązania naszego wyjściowego zadania.

Przed chwilą wyprowadziliśmy z początkowego warunku (A) ciąg warunków (B), (C), (D),..., z których każdy był równoważny poprzedniemu. Należy na to zwrócić największą uwagę. Warunki równoważne są spełnione przez te same obiekty. Dlatego też jeżeli przechodzimy od danego warunku do nowego, równoważnego mu warunku, mamy te same rozwiązania. Jeżeli jednak przechodzimy od danego warunku do warunku węższego, to gubimy rozwiązania, a jeżeli przechodzimy do warunku szerszego, to otrzymujemy dodatkowe, niewłaściwe rozwiązania, nie mające nic wspólnego z danym zadaniem.

Jeżeli w ciągu kolejnych redukcji przechodzimy do warunku węższego, a następnie znów do warunku szerszego, to możemy zupełnie zagubić zadanie wyjściowe. Aby uniknąć tego niebezpieczeństwa, musimy starannie sprawdzać naturę każdego nowo prowadzonego warunku: Czy jest on równoważny wyjściowemu warunkowi? Pytanie to jest jeszcze ważniejsze, gdy mamy do czynienia nie z jednym równaniem, jak powyżej, ale z układem równań, albo gdy warunek nie jest wyrażony przez równanie, jak na przykład w geometrycznych zadaniach konstrukcyjnych.

(Porównaj artykuł PAPPUS, zwłaszcza punkty 2, 3, 4, 8. Opis na str. 167, wiersze 4-22, jest niepotrzebnie zbyt wąski; opisany jest tam łańcuch zadań typu „znaleźć", z których każde ma inną niewiadomą. Rozpatrzony tutaj przykład jest w pewnym sensie wręcz przeciwny: wszystkie zadania łańcucha mają tę samą niewiadomą, a różnią się jedynie postacią warunku. Żadne takie ograniczenia nie są oczywiście konieczne.)

8. *Redukcja jednostronna.* Mamy dwa zadania A i B, oba nie rozwiązane. Gdybyśmy rozwiązali zadanie A, to moglibyśmy wyprowadzić stąd pełne rozwiązanie zadania B. Ale nie na odwrót; gdybyśmy rozwiązali zadanie B, to otrzymalibyśmy, być może, pewne informacje o zadaniu A, ale nie wiedzielibyśmy, jak z rozwiązania zadania B wyprowadzić pełne rozwiązanie zadania A. W takim przypadku rozwiązanie zadania A daje więcej niż rozwiązanie zadania B. Nazwijmy zadanie A *bardziej ambitnym*, a zadanie B *mniej ambitnym.*

Jeżeli przechodzimy od danego zadania albo do bardziej ambitnego, albo do mniej ambitnego zadania pomocniczego, to ten krok nazywamy *redukcją jednostronną.* Są dwa rodzaje redukcji jednostronnej i oba są w pewnym sensie bardziej ryzykowne niż redukcja dwustronna, czyli zwrotna.

Nasz przykład 2 pokazuje redukcję jednostronną do zadania mniej ambitnego. Istotnie, gdybyśmy rozwiązali zadanie wyjściowe, dotyczące prostopadłościanu o długości, szerokości i wysokości wynoszących odpowiednio a, b, i c, to moglibyśmy przejść do zadania pomocniczego przyjmując $c = 0$ i otrzymując w ten sposób prostokąt o długości a i szerokości b. Po inny przykład redukcji jednostronnej do zadania mniej ambitnego odsyłamy czytelnika do artykułu SPECJALIZACJA, punkty 3, 4, 5. Te przykłady pokazują, że przy pewnym szczęściu może nam się udać użyć mniej ambitnego zadania pomocniczego jako *kroku pośredniego*; łącząc rozwiązanie zadania pomocniczego z odpowiednią uwagą dodatkową możemy otrzymać rozwiązanie zadania wyjściowego.

Redukcja jednostronna do bardziej ambitnego zadania może być także owocna. (Patrz UOGÓLNIENIE, punkt 2; rozpatrz także sprowadzenie pierwszego zadania do zadania drugiego w artykule INDUKCJA I INDUKCJA MATEMATYCZNA, punkty 1 i 2.) Istotnie, bardziej ambitne zadanie może być bardziej dostępne; jest to PARADOKS ODKRYWCY.

Zagadki. Zgodnie z ustępem **3** pytania i wskazówki naszej listy nie zależą od rodzaju zadań i można je stosować do wszelkich zadań. Interesujące będzie sprawdzić tę tezę na różnego rodzaju zagadkach.

Weźmy na przykład słowa:

BYWA LIS I KRET;

zadanie polega na znalezieniu „anagramu", to znaczy na przestawieniu liter zawartych w tych słowach, tak

aby otrzymać jedno słowo. Interesujące jest zauważyć, że przy rozwiązywaniu tej zagadki niektóre pytania naszej listy są tu celowe.

Co jest niewiadome? Słowo.

Co jest dane? Cztery słowa: BYWA LIS I KRET.

Jaki jest warunek? Szukane słowo ma dwanaście liter zawartych w czterech danych słowach. Prawdopodobnie nie jest to jakieś niezwykłe polskie słowo.

Zrób rysunek. Jest bardzo użyteczne zaznaczyć litery kreskami:

— — — — — — — — — — — —

Czy nie mógłbyś postawić zadania na nowo, w inny sposób? Mamy znaleźć słowo zawierające w pewnym uporządkowaniu litery

A, E, I, I, Y, B, K, L, R, S, T, W.

To nowe sformułowanie zadania jest z pewnością równoważne poprzedniemu sformułowaniu (patrz ZADANIA POMOCNICZE, punkt 6). Nowe sformułowanie może okazać się korzystne. Oddzielając samogłoski od spółgłosek (to jest ważne; porządek alfabetyczny nie jest ważny) spostrzegamy inny aspekt zadania. I tak widzimy teraz, że żądane słowo ma pięć sylab, o ile nie zawiera dwugłosek.

Jeśli nie możesz rozwiązać postawionego zadania, spróbuj najpierw rozwiązać jakieś zadanie pokrewne. Zadaniem pokrewnym jest tworzenie słów z niektórych spośród danych słów. Na pewno potrafimy tworzyć krótkie słowa tego rodzaju. Następnie próbujemy znajdować słowa coraz dłuższe. Im więcej liter używamy, tym bliżej szukanego słowa możemy się znajdować.

Czy nie mógłbyś rozwiązać części zadania? Szukane słowo jest na tyle długie, że musi składać się z pewnych części.

Jest to prawdopodobnie słowo złożone albo też jest to słowo pochodne od innego słowa, powstałe przez dodanie jakiejś typowej końcówki. Jaka typowa końcówka mogłaby to być?

_ _ _ _ _ _ _ _ _ YSTA
_ _ _ _ _ _ _ _ YSTKA
_ _ _ _ _ _ _ _ _ ISTA
_ _ _ _ _ _ _ _ ISTKA

Zatrzymaj tylko część warunku, resztę odrzuć. Możemy próbować wymyślić długie słowo, możliwie o pięciu sylabach, zawierające W i Y.

Pytania i wskazówki naszej listy nie mogą działać w sposób magiczny. Nie są w stanie dać nam rozwiązanie wszelkich możliwych zagadek bez żadnego wysiłku z naszej strony. Jeżeli czytelnik chce znaleźć żądane słowo, musi kontynuować próby i myśleć o rozwiązaniu. Pytania i wskazówki naszej listy mogą jedynie sprawić, „aby piłka toczyła się dalej". Gdy zniechęceni brakiem sukcesu jesteśmy skłonni porzucić zadanie, pytania i wskazówki naszej listy mogą zasugerować nam jakąś nową próbę, nowy aspekt, nową modyfikację zadania, dać nam nowego bodźca do pracy; mogą one podtrzymywać nasze myślenie.

Inny przykład znajdzie czytelnik w artykule ROZKŁADANIE I SKŁADANIE NA NOWO, punkt 8.

Zbadaj swój domysł! Twój domysł może być właściwy, ale niemądrze jest przyjmować domysł za prawdę dowiedzioną, jak często robią ludzie prymitywni. Twój domysł może być fałszywy. Ale głupio jest także nie brać domysłu w ogóle pod uwagę, jak czasem robią ludzie pedantyczni. Pewnego rodzaju domysły zasługują na to, aby je traktować poważnie i gruntownie zbadać; są to te domysły, które

nam przychodzą do głowy po bacznym rozpatrzeniu i rzeczywistym zrozumieniu zadania, którym jesteśmy szczerze zainteresowani. Takie domysły zawierają zazwyczaj przynajmniej część prawdy, chociaż, oczywiście, bardzo rzadko zawierają całą prawdę. Jest jednak szansa wydobycia całej prawdy, jeżeli zbadamy taki domysł w sposób właściwy.

Wiele domysłów okazało się fałszywymi, ale mimo to użytecznymi, gdyż prowadziło do lepszych domysłów.

Żaden pomysł nie jest zupełnie zły, jeżeli nie jesteśmy bezkrytyczni. Zupełnie złe jest nie mieć w ogóle żadnego pomysłu.

1. *Nie rób tak.* Oto typowa opowieść o panu Johnie Jonesie. Jones pracuje w biurze. Liczył na podwyżkę pensji, ale jego nadzieja, jak to często bywa, zawiodła go. Podniesiono pensje kilku jego kolegom, ale jemu nie. Jones nie mógł znieść tego spokojnie. Dręczył się tym i dręczył, aż wreszcie powziął podejrzenie, że to dyrektor Brown jest odpowiedzialny za to, że on nie dostał podwyżki.

Nie możemy ganić Jonesa za to, że powziął takie podejrzenie. Istotnie, były pewne oznaki wskazujące na dyrektora Browna. Rzeczywistym błędem Jonesa było to, że powziąwszy to przypuszczenie stał się ślepy na wszystkie znaki kierujące jego podejrzenie w kierunku przeciwnym. Wmówił w siebie głębokie przekonanie, że dyrektor Brown jest jego osobistym wrogiem i zachowywał się tak niemądrze, że niemalże doprowadził do tego, że dyrektor Brown stał się jego rzeczywistym wrogiem.

Kłopot z panem Johnem Jonesem polega na tym, że zachowuje się on tak, jak większość z nas. Nigdy nie zmieni swoich ważniejszych opinii. Zmienia często i nagle swoje mniej ważne opinie, ale nigdy nie wątpi w żadną ze swych opinii, ważniejszych czy mniej ważnych, tak długo, dopóki je podziela. Nigdy w nie nie wątpi, nie kwestionuje ich, ani nie bada ich krytycznie — szczególnie nienawidziłby krytycznego badania, gdyby rozumiał, co to znaczy.

Przyznajmy jednak, że pan John Jones ma do pewnego stopnia rację. Jest on bardzo zajęty; ma obowiązki w biurze i w domu. Ma mało czasu na powątpiewanie czy badanie. W najlepszym wypadku mógłby zbadać tylko niektóre ze swych przekonań; dlaczego więc miałby wątpić w jakieś przekonanie, jeżeli nie ma czasu, aby tę wątpliwość zbadać?

Jednakże nie postępuj tak, jak pan John Jones. Nie pozwól swoim podejrzeniom, domysłom czy przekonaniom rosnąć bez należytego zbadania; nie pozwól, aby bezpodstawnie stały się twymi niewzruszonymi przekonaniami. W każdym bądź razie w sprawach teoretycznych najlepsze idee są zbijane przez bezkrytyczne ich przyjmowanie, natomiast krytyczne badanie ich wydaje owoce.

2. *Przykład matematyczny.* Spośród wszystkich czworokątów o danym obwodzie znaleźć czworokąt o największym polu.

Co jest niewiadome? Czworokąt.

Co jest dane? Dany jest obwód czworokąta.

Jaki jest warunek? Szukany czworokąt powinien mieć pole większe niż jakikolwiek inny czworokąt o tym samym obwodzie. Zadanie to różni się bardzo od zazwyczaj podawanych zadań z geometrii elementarnej i dlatego zupełnie naturalną rzeczą jest zacząć snuć domysły.

Jaki czworokąt ma prawdopodobnie największe pole? Jaki byłby najprostszy domysł? Może się zdarzyć, że słyszeliśmy, iż spośród wszystkich figur o tym samym obwodzie największe pole ma koło; możemy nawet przewidywać pewne przyczyny, dla których prawdopodobnie tak jest. Który więc, czworokąt jest najbliższy kołu? Który czworokąt najbardziej zbliża się do koła pod względem symetrii?

Prawie oczywistym domysłem jest kwadrat. Jeżeli ten domysł traktujemy poważnie, to powinniśmy zdać sobie sprawę z tego, co on oznacza. Powinniśmy mieć odwagę sformułować go: „Spośród wszystkich czworokątów o danym obwodzie największe pole ma kwadrat". Jeżeli decydujemy się zbadać to stwierdzenie, to sytuacja zmienia się. Początkowo mieliśmy przed sobą zadanie typu „znaleźć". Po sformułowaniu naszego domysłu mamy przed sobą zadanie typu „udowodnić"; musimy udowodnić albo obalić sformułowane twierdzenie.

Jeżeli nie znamy żadnego zadania podobnego do naszego, które byłoby już przedtem rozwiązane, to możemy uznać nasze zadanie za trudne. *Jeśli nie możesz rozwiązać postawionego zadania, spróbuj najpierw rozwiązać jakieś zadanie pokrewne. Czy nie mógłbyś rozwiązać części zadania?* Może nam przyjść na myśl, że skoro kwadrat jest uprzywilejowany wśród czworokątów, to tym samym musi on być uprzywilejowany wśród prostokątów. Część naszego zadania byłaby rozwiązana, gdyby udało nam się udowodnić następujące twierdzenie: „Spośród wszystkich prostokątów o danym obwodzie największe pole ma kwadrat".

Twierdzenie to wygląda na bardziej dostępne niż poprzednie; jest ono oczywiście słabsze. W każdym bądź razie powinniśmy uświadomić sobie, co ono oznacza; powinniśmy mieć odwagę sformułować je jeszcze dokładniej. Korzystne może się okazać jego sformułowanie w języku algebry.

Pole prostokąta o bokach a i b wynosi ab.

Bok kwadratu mającego ten sam obwód co wspomniany wyżej prostokąt wynosi $\frac{1}{2}(a+b)$. Pole tego kwadratu wynosi więc $\frac{1}{2}(a+b)^2$. Ma ono być większe niż pole prostokąta, a więc powinno być

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab.$$

Czy jest to prawdą? To samo można zapisać w równoważnej postaci

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab.$$

Ale to jest prawdą, gdyż to jest równoważne stwierdzeniu, że

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

czyli

$$(a-b)^2 > 0,$$

a ta nierówność z pewnością ma miejsce, z wyjątkiem przypadku, gdy $a = b$, tj. gdy badany prostokąt jest kwadratem.

Jeszcze nie rozwiązaliśmy naszego zadania, ale dokonaliśmy już pewnego postępu przez dokładne przyjrzenie się naszemu raczej oczywistemu domysłowi.

3. *Przykład niematematyczny.* W pewnej krzyżówce angielskiej mamy znaleźć angielskie [1] słowo siedmioliterowe, przy czym mamy następujący klucz: „Tam i z powrotem na nowo ożywia ściany"[2].

Co jest niewiadome? Słowo.

Co jest dane? Dana jest długość słowa; słowo jest siedmioliterowe.

[1] Tłumaczowi nie udało się znaleźć odpowiedniego słowa polskiego, które by miało własności podobne do angielskiego słowa z oryginału książki. Może uda się to czytelnikowi? *(przypisek tłumacza)*.

[2] *The Nation*, June 9, 1945, Crossword Puzzle, No. 119.

Jaki jest warunek? Jest on sformułowany w kluczu. Słowo ma oznaczać coś, co na nowo ożywia ściany, ale jest to wciąż jeszcze bardzo mgliste.

Musimy więc zbadać na nowo klucz. Czyniąc to możemy zwrócić szczególną uwagę na pierwszą część warunku: „Tam i z powrotem na nowo...". *Czy nie mógłbyś rozwiązać części zadania?* Mamy szansę odgadnąć początek słowa. Ponieważ powtórzenie czynności jest tak mocno podkreślone, więc bardzo możliwe, że słowo (angielskie, *przyp. tłumacza*) zaczyna się od „re". Jest to prawie oczywisty domysł. Jeżeli zaufamy temu domysłowi, powinniśmy zdać sobie sprawę z tego, co on oznacza. Szukane słowo wyglądałoby tak:

RE – – – – –

Czy możesz sprawdzić wynik? Jeżeli inne słowo krzyżówki krzyżuje się z naszym słowem na pierwszej literze, to to drugie słowo powinno zaczynać się na literę R. Dobrym pomysłem może być zajęcie się teraz tym drugim słowem i sprawdzenie literę R. Jeżeli litera R potwierdzi się, albo przynajmniej nie znajdziemy żadnych racji przeciw niej, wracamy do naszego początkowego słowa. Znów pytamy: *Jaki jest warunek?* Jeśli zbadamy na nowo klucz, możemy zwrócić szczególną uwagę na sam jego początek: „Tam i z powrotem...". Czy z tego wynika, że słowo, którego szukamy, można przeczytać nie tylko z lewa na prawo, ale i z prawa na lewo (wspak)? Jest to mniej oczywisty domysł (istnieją jednak takie przypadki, patrz ROZKŁADANIE I SKŁADANIE NA NOWO, punkt 8).

W każdym bądź razie przyjrzyjmy się temu domysłowi; co on oznacza? Słowo wyglądałoby następująco:

RE – – – ER.

Prócz tego trzecia litera musiałaby być ta sama co piąta; bardzo prawdopodobne, że ta litera będzie spółgłoską, a czwarta środkowa litera — samogłoską.

Czytelnik (znający język angielski) może teraz bez trudu sam zgadnąć słowo. Jeżeli mu się to początkowo nie udaje i nie ma innego pomysłu, to może próbować wstawiać jako środkową literę wszystkie samogłoski jedną po drugiej.

Zbytnia obszerność warunku. Patrz WARUNEK.

Zrób rysunek, patrz FIGURY GEOMETRYCZNE. *Wprowadź odpowiednie oznaczenia;* patrz OZNACZENIA.

Część IV. ZADANIA, WSKAZÓWKI, ROZWIĄZANIA

Niniejsza, ostatnia część książki daje czytelnikowi dodatkową sposobność zdobycia praktyki.

Zadania nie wymagają od czytelnika żadnej wstępnej wiedzy z wyjątkiem wiadomości, jakie powinien on wynieść z dobrej szkoły średniej. Nie są to jednak zadania zbyt łatwe ani szablonowe; niektóre z nich wymagają od czytelnika pewnej oryginalności i pomysłowości [1].

Wskazówki prowadzą do rozwiązania głównie w ten sposób, że zacytowane w nich jest odpowiednie zdanie z naszej listy; dla bardzo uważnego czytelnika pragnącego stosować się do wskazówek będą one stanowiły główną myśl rozwiązania.

Rozwiązania zawierają nie tylko odpowiedź, ale także postępowanie prowadzące do niej, oczywiście bez pewnych szczegółów, z którymi czytelnik musi sobie sam poradzić. W niektórych rozwiązaniach staramy się umożliwić czytelnikowi szersze spojrzenie na zadanie, dodając na końcu pewien komentarz.

[1] Z wyjątkiem zadania 1 (dobrze znanego, ale mimo to podanego tu dla swej zabawności) wszystkie zadania pochodzą z egzaminów konkursowych z matematyki przeprowadzonych na uniwersytecie w Stanford (poczyniono w nich pewne drobne zmiany). Niektóre z tych zadań zostały opublikowane w *The American Mathematical Monthly* lub w *The California Mathematics Council Bulletin.* W tym ostatnim czasopiśmie autor opublikował także niektóre rozwiązania; podane one są w tej książce odpowiednio zmodyfikowane.

Czytelnik, który w rozwiązanie zadania włożył rzetelny wysiłek, ma dużą szansę odniesienia korzyści z podanej tu wskazówki i rozwiązania. Jeżeli doszedł do wyniku sam, bez żadnej pomocy, to może się czegoś nauczyć przez porównanie swojej metody z metodą podaną w tej książce. Jeżeli po dokonaniu rzetelnego wysiłku skłonny jest porzucić rozwiązywanie zadania, to wskazówka może naprowadzić go na myśl, której było mu brak. Jeżeli nawet wskazówka nie pomoże, to czytelnik może zajrzeć do rozwiązania, spróbować wydzielić główną myśl, odłożyć książkę na bok i spróbować dojść do rozwiązania.

Zadania

1. Niedźwiedź wyszedł z punktu P i przeszedł 1 milę idąc cały czas na południe. Następnie zmienił kierunek, i poszedł 1 milę na wschód. Następnie znów obrócił się na lewo i poszedł 1 milę na północ dochodząc do tego samego punktu P, z którego rozpoczął wędrówkę. Jakiego koloru był niedźwiedź?

2. Robert pragnie mieć kawałek ziemi, dokładnie poziomy, w kształcie czworokąta. Dwie linie ograniczające plac mają biec dokładnie z północy na południe, dwie ze wschodu na zachód i każda z nich ma mieć dokładnie 100 stóp długości. Czy Robert może kupić sobie taki plac w USA?

3. Robert ma 10 kieszeni i 44 monety jednodolarowe. Chce umieścić swoje pieniądze w kieszeniach w ten sposób, aby w każdej kieszeni była inna ilość pieniędzy. Czy może on tego dokonać?

4. Do ponumerowania stronic dużego tomu zecer zużył 2989 cyfr. Ile stronic ma tom?

5. W papierach dziadka znaleziono rachunek:

72 indyki $ – 67,9 –

Pierwsza i ostatnia cyfra liczby przedstawiającej niewątpliwie ogólny koszt indyków, zastąpione są tu kreską, gdyż na rachunku wyblakły i stały się nieczytelne.

Jakie cyfry wyblakły i jaka była cena jednego indyka?

6. Dany jest sześciokąt foremny i punkt leżący w tej samej płaszczyźnie. Przez dany punkt przeprowadzić prostą dzielącą dany sześciokąt na dwie części o równych polach.

7. Dany jest kwadrat. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, z których kwadrat widać pod kątem (a) 90°, (b) 45°. (Niech P będzie punktem leżącym na zewnątrz kwadratu, ale w tej samej płaszczyźnie. „Kątem, pod którym widać kwadrat" z punktu P, nazywamy najmniejszy kąt o wierzchołku P zawierający w swych ramionach kwadrat). Naszkicuj oba miejsca geometryczne i opisz je dokładnie.

8. Nazwijmy „osią" bryły prostą łączącą dwa punkty powierzchni bryły, taką, że bryła po obrocie wokół tej prostej o pewien kąt większy od 0° a mniejszy od 360° pokryje się ze sobą.

Znaleźć osie sześcianu. Opisać dokładnie położenie osi i znaleźć kąt obrotu odpowiadający każdej z nich. Zakładając, że krawędź sześcianu ma długość jednostkową, obliczyć średnią arytmetyczną długości osi.

9. W czworościanie (niekoniecznie foremnym) dwie przeciwległe krawędzie mają tę samą długość a i są do siebie prostopadłe. Prócz tego obie krawędzie są prostopadłe do odcinka łączącego ich środki, który ma długość b.

Wyrazić objętość czworościanu przez a i b i dowieść odpowiedzi.

10. Wierzchołek ostrosłupa przeciwległy do podstawy nazwijmy *szczytem*. (a) Ostrosłup nazwijmy „równoramiennym", gdy jego szczyt znajduje się w tej samej odległości od wszystkich *wierzchołków* podstawy. Przyjmując tę definicję udowodnić, że podstawa ostrosłupa równoramiennego jest *wpisana* w okrąg, którego środkiem jest spodek wysokości ostrosłupa.

(b) Nazwijmy teraz ostrosłup równoramiennym, gdy jego szczyt znajduje się w tej samej (prostopadłej) odległości od wszystkich boków podstawy. Przyjmując tę definicję (różną od poprzedniej) udowodnić, że podstawa ostrosłupa równoramiennego jest *opisana* na okręgu, którego środkiem jest spodek wysokości ostrosłupa.

11. Znaleźć x, y, u i v spełniające układ czterech równań

$$\begin{aligned} x + 7y + 3v + 5u &= 16, \\ 8x + 4y + 6v + 2u &= -16, \\ 2x + 6y + 4v + 8u &= 16, \\ 5x + 3y + 7v + u &= -16. \end{aligned}$$

(Może się to wydawać długie i nudne: poszukaj krótkiego sposobu.)

12. Robert, Piotr i Paweł podróżują razem. Piotr i Paweł są dobrymi piechurami; każdy z nich przebywa pieszo p mil na godzinę. Robert ma chore nogi i podróżuje małym samochodem, którym mogą jechać dwie osoby (trzy osoby się w nim nie zmieszczą); samochód przebywa c mil na godzinę. Trzej przyjaciele przyjęli następujący schemat: Wyruszają razem; Paweł jedzie samochodem z Robertem, a Piotr idzie pieszo. Po pewnym czasie Paweł wysiada z samochodu i wędruje dalej pieszo; Robert wraca po Piotra i razem z nim jedzie samochodem, dopóki nie dogoni Pawła. Wtedy następuje zamiana: Paweł jedzie — a Piotr idzie pieszo, tak jak było na początku podróży; całe to postępowanie powtarzają tak często, jak trzeba.

(a) Jaką drogę (ile mil) przebywają przyjaciele w ciągu godziny?

(b) Przez jaką część czasu podróży w samochodzie jedzie tylko jedna osoba?

(c) Zbadaj przypadki graniczne $p = 0$ i $p = c$.

13. Trzy liczby tworzą postęp arytmetyczny, inne trzy liczby tworzą postęp geometryczny. Dodając odpowiednie wyrazy tych dwóch postępów dostajemy kolejno

$$85, \quad 76 \quad \text{i} \quad 84;$$

dodając wszystkie trzy wyrazy postępu arytmetycznego dostajemy 126. Znaleźć wyrazy obu postępów.

14. Określić takie m, aby równanie względem x

$$x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$$

miało cztery pierwiastki rzeczywiste tworzące postęp arytmetyczny.

15. Obwód trójkąta prostokątnego wynosi 60 cm, a wysokość prostopadła do przeciwprostokątnej wynosi 12 cm. Znaleźć boki trójkąta.

16. Ze szczytu góry widzisz na równinie dwa punkty A i B. Proste, wzdłuż których widzisz te punkty, tworzą kąt γ. Nachylenie pierwszej prostej widzenia do płaszczyzny poziomej wynosi α, nachylenie drugiej prostej wynosi β. Wiadomo, że punkty A i B znajdują się na tym samym poziomie i że odległość między nimi wynosi c.

Wyrazić wzniesienie x szczytu góry nad wspólny poziom punktów A i B przez kąty α, β, γ i przez odległość c.

17. Zauważ, że wartością wyrażenia

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$$

dla $n=1, 2, 3$, jest odpowiednio 1/2, 5/6, 23/24. Zgadnij ogólne prawo (obserwując więcej wartości szczególnych, jeśli trzeba) i udowodnij swój domysł.

18. Rozpatrzmy tablicę

$$\begin{aligned} 1 &= 1,\\ 3+5 &= 8,\\ 7+9+11 &= 27,\\ 13+15+17+19 &= 64,\\ 21+23+25+27+29 &= 125. \end{aligned}$$

Zgadnij ogólne prawo sugerowane przez te przykłady, wyraź je w odpowiedniej postaci matematycznej i udowodnij.

19. Bok sześciokąta foremnego ma długość n (n jest liczbą naturalną). Proste równoległe do jego boków poprowadzone w równych odległościach dzielą sześciokąt na T trójkątów równobocznych, z których każdy ma boki o długości 1. Niech V oznacza ilość wierzchołków, jaka istnieje po tym podziale, a L ilość odcinków ograniczających o długości 1 (odcinek ograniczający należy do jednego lub dwóch trójkątów, wierzchołek do dwóch albo więcej trójkątów). Gdy $n=1$, co jest najprostszym przypadkiem, wówczas $T=6$, $V=7$, $L=12$. Rozpatrz przypadek ogólny i wyraź T, V i L przez n. (Zgadywanie jest dobre, dowodzenie jest lepsze.)

20. Na ile sposobów możesz rozmienić dolara?

(„Sposób rozwiązania" jest określony, jeżeli wiadomo, ile użyto monet każdego rodzaju: centów, pięciocentówek, dziesięciocentówek, dwudziestopięciocentówek, pięćdziesięciocentówek.)

Wskazówki

1. *Co jest niewiadome?* Kolor niedźwiedzia — ale jak można odkryć kolor niedźwiedzia wychodząc od danych matematycznych? *Co jest dane?* Sytuacja geometryczna — ale wygląda ona na sprzeczną: jak niedźwiedź mógł po przejściu trzech mil w opisany sposób wrócić do punktu wyjściowego?

2. *Czy znasz jakieś pokrewne zadanie?*

3. Gdyby Robert miał bardzo dużo monet jednodolarowych, to oczywiście nie miałby żadnych trudności z umieszczeniem w każdej kieszeni innej ilości pieniędzy. *Czy nie mógłbyś postawić zadania na nowo?* Jaka jest minimalna ilość monet jednodolarowych, którą można włożyć do 10 kieszeni tak, by żadne dwie różne kieszenie nie zawierały tej samej ilości monet?

4. *Oto zadanie pokrewne z twoim zadaniem:* Ile cyfr zużyłby zecer, gdyby książka miała dokładnie 9 ponumerowanych stronic? (Oczywiście 9). Oto inne *zadanie pokrewne:* Ile cyfr zużyłby zecer, gdyby książka miała dokładnie 99 ponumerowanych stronic?

5. *Czy nie mógłbyś postawić zadania na nowo, w inny sposób?* Jakie mogą być wyblakłe cyfry, skoro cała suma wyrażona w centach dzieli się przez 72?

6. *Czy nie mógłbyś wymyślić jakiegoś bardziej dostępnego zadania pokrewnego? Bardziej ogólnego zadania? Zadania analogicznego?* (Uogólnienie, punkt 2).

7. *Czy znasz jakieś pokrewne zadanie?* Miejsce geometryczne punktów, z których dany odcinek widać pod danym kątem, składa się z dwóch łuków koła, ograniczonych końcami odcinka i symetrycznych względem tego odcinka.

8. Przypuszczam, że czytelnik jest dobrze obeznany z sześcianem i że znalazł pewne osie po prostu przez przyjrzenie się sześcianowi — ale czy są to *wszystkie* osie? *Czy możesz udowodnić,* że twoja lista osi jest wyczerpująca? Czy twoja lista opiera się na jakiejś jasnej zasadzie klasyfikacji?

9. *Spójrz na niewiadomą!* Jest nią objętość czworościanu; wiem, że objętość każdego ostrosłupa można obliczyć, gdy dane jest pole podstawy i wysokość (równa jest ona ich iloczynowi podzielonemu przez 3), ale w tym przypadku nie znam ani podstawy, ani wysokości. *Czy nie mógłbyś wymyślić jakiegoś bardziej dostępnego zadania pokrewnego?* (Czy nie widzisz jakiegoś bardziej dostępnego czworościanu, który byłby częścią danego czworościanu?)

10. *Czy znasz jakieś pokrewne zadanie?* Czy znasz jakieś pokrewne... prostsze... *analogiczne twierdzenie?* Owszem: spodek wysokości jest środkiem podstawy trójkąta równoramiennego. Oto *twierdzenie pokrewne z twoim i udowodnione już przedtem. Czy nie mógłbyś skorzystać... z zastosowanej w nim metody?* Twierdzenia o trójkątach równoramiennych dowodzi się w oparciu o przystające trójkąty prostokątne, dla których wysokość jest wspólnym bokiem.

11. Zakładamy, że czytelnik jest nieco obeznany z układami równań liniowych. Aby rozwiązać taki układ, musimy dokonać pewnych kombinacji na jego równaniach — wyszukaj związki między równaniami, które mogłyby cię naprowadzić na szczególnie korzystne kombinacje.

12. *Wydziel poszczególne części warunku. Czy możesz je zapisać?* Pomiędzy startem i momentem, w którym trzej przyjaciele znów się spotykają, są trzy różne fazy:

(1) Robert jedzie samochodem z Pawłem,
(2) Robert jedzie samochodem sam.
(3) Robert jedzie samochodem z Piotrem.

Oznacz odpowiednio przez t_1, t_2 i t_3 czas trwania poszczególnych faz. Jak mógłbyś podzielić warunek na odpowiednie części?

13. *Wydziel poszczególne części warunku. Czy możesz je zapisać?* Niech

$$a-d, \quad a, \quad a+d$$

będą wyrazami postępu arytmetycznego, a

$$bg^{-1}, \quad b, \quad bg$$

będą wyrazami postępu geometrycznego.

14. *Jaki jest warunek?* Cztery pierwiastki muszą tworzyć postęp arytmetyczny. Jednakże równanie ma pewną szczególną własność: zawiera tylko parzyste potęgi niewiadomej x. Dlatego też jeżeli a jest pierwiastkiem, to $-a$ jest także pierwiastkiem.

15. *Wydziel poszczególne części warunku.* Czy możesz je zapisać? Możemy rozróżnić trzy części w naszym warunku, dotyczące

(1) obwodu,
(2) trójkąta prostokątnego,
(3) wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną.

16. *Wydziel poszczególne części warunku. Czy możesz je zapisać?* Niech a i b będą długościami (nie znanymi) odcinków prostych widzenia, α i β ich nachyleniami do płaszczyzny poziomej. Możemy rozróżnić trzy części warunku dotyczące

(1) nachylenia odcinka a,
(2) nachylenia odcinka b,
(3) trójkąta o bokach a, b i c.

17. Czy *rozpoznajesz* mianowniki 2, 6, 24? *Czy znasz jakieś pokrewne zadanie? Analogiczne zadanie?* (INDUKCJA I INDUKCJA MATEMATYCZNA).

18. Odkrycie przez indukcję wymaga obserwacji. Obserwuj prawe strony wzorów, początkowe wyrazy lewych stron i ich końcowe wyrazy. Jakie jest ogólne prawo?

19. *Zrób rysunek.* Obserwacja rysunku może pomóc ci odkryć ogólne prawo drogą indukcji albo może doprowadzić cię do związków między T, V, L i n.

20. *Co jest niewiadome?* Co mamy znaleźć? Nawet cel zadania może wymagać pewnego wyjaśnienia. *Czy nie mógłbyś wymyślić jakiegoś bardziej dostępnego zadania pokrewnego? Bardziej ogólnego zadania? Analogicznego zadania?* Oto *bardzo* proste zadanie analogiczne: Na ile sposobów możesz zapłacić jednego centa? (Jest dokładnie jeden sposób.) Oto bardziej ogólne zadanie: Na ile sposobów możesz zapłacić kwotę n centów używając pięciu rodzajów monet: centów, pięciocentówek, dziesięciocentówek, dwudziestopięciocentówek, i pięćdziesięciocentówek. Szczególnie jesteśmy zainteresowani przypadkiem szczególnym $n = 100$.

W najprostszych przypadkach szczególnych dla małych n, możemy dojść do odpowiedzi bez żadnej specjalnej metody, po prostu przez próby, przez przegląd możliwości. Oto krótka tabela (którą czytelnik powinien sprawdzić)

n	4	5	9	10	14	15	19	20	24	25
E_n	1	2	2	4	4	6	6	9	9	13

W pierwszym wierszu podane są kwoty, które należy zapłacić, ogólnie oznaczone przez n. W drugim wierszu podane są odpowiednie ilości „sposobów płacenia", ogólnie oznaczone przez E_n. (Dlaczego wybrałem to znakowanie, jest moim sekretem, którego nie chciałbym zdradzać na tym etapie.)

Interesuje nas specjalnie E_{100}, ale jest mała nadzieja, że zdołamy obliczyć E_{100} bez jakiejś określonej metody. W rzeczywistości obecne zadanie wymaga od czytelnika czegoś więcej niż poprzednie zadania; czytelnik powinien *stworzyć* małą *teorię*.

Nasze zagadnienie jest ogólne (obliczyć E_n dla ogólnego n), ale jest „odizolowane". *Czy nie mógłbyś wymyślić jakiegoś bardziej dostępnego zadania pokrewnego? Analogicznego zadania?* Oto *bardzo* proste zadanie analogiczne: Znaleźć A_n, ilość sposobów płacenia kwoty n centów, używając tylko centów ($A_n = 1$).

Rozwiązania

1. Myślisz, że niedźwiedź był biały i że punkt P jest to biegun północny? Czy możesz to udowodnić? Samo przez się rozumie się, że idealizujemy nasze zadanie. Kulę ziemską traktujemy jako idealną kulę, a niedźwiedzia jako poruszający się punkt materialny. Ten punkt poruszający się na południe lub na północ zakreśla łuk *południka*, a poruszając się na wschód zakreśla łuk *równoleżnika*. Musimy rozróżnić dwa przypadki.

(1) Jeżeli niedźwiedź wraca do punktu P wzdłuż południka *różnego* od tego, wzdłuż którego opuszczał on punkt P, to P musi być biegunem północnym. Istotnie, jedynym innym punktem globu, w którym spotykają się dwa południki, jest biegun południowy, ale niedźwiedź mógłby opuścić go jedynie poruszając się na północ.

(2) Niedźwiedź mógłby wrócić do punktu P wzdłuż tego samego południka, wzdłuż którego opuszczał ten sam punkt, gdyby idąc 1 milę na wschód opisał równoleżnik dokładnie n razy, przy czym n może wynosić 1,2,3,.... W tym przypadku P nie jest biegunem północnym, ale punktem równoleżnika położonego bardzo blisko bieguna południowego.

2. Glob ziemski traktujemy, tak jak w rozwiązaniu zadania 1, jako kulę. Plac, jaki Robert chce kupić, jest ograniczony dwoma południkami i dwoma równoleżnikami. Wyobraźmy sobie dwa ustalone południki i równoleżnik *oddalający się* od równika: łuk tego równoleżnika zawarty między ustalonymi południkami jest coraz krótszy. Środek placu jaki chce mieć Robert, powinien więc leżeć na równiku: *nie może* on tego osiągnąć w USA.

3. Najmniejszą możliwą ilością monet jednodolarowych w kieszeni jest oczywiście 0. Następną większą ilością jest 1, następną 2..., ilością monet w ostatniej (dziesiątej) kieszeni jest co najmniej 9. A więc żądana ilość monet wynosi co najmniej

$$0+1+2+3+\ldots+9=45.$$

Robert nie może więc wykonać swego postanowienia: ma tylko 44 dolarów.

4. Tom o 999 stronicach wymaga

$$9+2\cdot 90+3\cdot 900=2889$$

cyfr. Jeżeli nasz duży tom ma x stronic, to

$$2889+4(x-999)=2989, \quad x=1024.$$

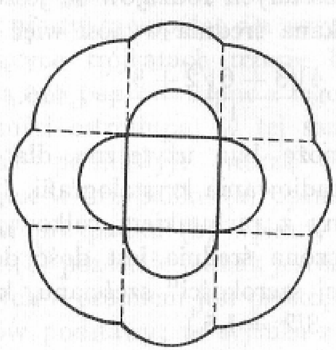
Zadanie to może nas nauczyć, że wstępne oszacowanie niewiadomej może być użyteczne (albo nawet konieczne, jak w tym przypadku).

5. Skoro $-679-$ dzieli się przez 72, to dzieli się zarówno przez 8, jak i przez 9. Skoro dzieli się przez 8, to $79-$ musi dzielić się przez 8 (gdyż 1000 dzieli się przez 8), a więc $79-$ musi być liczbą 792: ostatnią wyblakłą cyfrą jest 2. Skoro liczba -6792 dzieli się przez 9, to suma jej cyfr musi dzielić się przez 9 (reguła „wyrzucania dziewiątek"), a więc pierwszą wyblakłą cyfrą musi być 3. Cena jednego indyka wynosiła więc (w czasach dziadka)

$$\$\,367{,}92 : 72 = \$\,5{,}11.$$

6. *Punkt i figura geometryczna mająca środek symetrii* dane są w ustalonym położeniu (w tej samej płaszczyźnie). Znaleźć prostą przechodzącą przez dany punkt i dzielącą pole danej figury na połowy. Szukana prosta przechodzi oczywiście przez środek symetrii. Patrz PARADOKS ODKRYWCY.

7. Ramiona naszego kąta muszą zawsze przechodzić przez dwa wierzchołki kwadratu. Dopóki przechodzą one przez tę samą parę wierzchołków, wierzchołek kąta porusza się po tym samym łuku koła (na mocy twierdzenia podanego we wskazówce). Dlatego też każde z szukanych



Rys. 31

miejsc geometrycznych składa się z kilku łuków koła: z czterech półokręgów w przypadku (a) i z ośmiu ćwiartek okręgu w przypadku (b); patrz rysunek 31.

8. Oś przebija powierzchnię sześcianu w pewnym punkcie, który jest albo wierzchołkiem sześcianu, albo leży na jego krawędzi, albo leży we wnętrzu jego ściany. Jeżeli oś przechodzi przez punkt krawędzi (ale nie przez któryś z jego końców), to tym punktem musi być środek krawędzi: w przeciwnym przypadku krawędź nie pokryłaby się z sobą po obrocie. Podobnie oś przebijająca wnętrze ściany musi przechodzić przez jej środek. Każda oś musi oczywiście przechodzić przez środek sześcianu. Są więc trzy rodzaje osi:

(1) Cztery osie, z których każda przechodzi przez dwa przeciwległe wierzchołki; kąty obrotu wynoszą 120°, 240°.

(2) Sześć osi, z których każda przechodzi przez środki dwóch przeciwległych krawędzi; kąt obrotu wynosi 180°.

(3) Trzy osie, z których każda przechodzi przez środki dwóch przeciwległych ścian; kąty obrotu wynoszą 90°, 180°, 270°.

Co do długości osi pierwszego rodzaju patrz ustęp 12: długości osi pozostałych rodzajów są jeszcze prostsze do obliczenia. Szukana średnia wynosi więc

$$\frac{4\sqrt{3}+6\sqrt{2}+3}{13}=1{,}416.$$

(Zadanie to może być użyteczne dla przygotowania czytelnika do studiowania krystalografii. Czytelnik dostatecznie obeznany z rachunkiem całkowym zechce zauważyć, że obliczona średnia jest dość dobrym przybliżeniem „średniej szerokości“ sześcianu, która w rzeczywistości wynosi $3/2 = 1{,}5$.)

9. Płaszczyzna przechodząca przez jedną z krawędzi o długości a i przez prostopadłą o długości b dzieli czworościan na dwa *bardziej dostępne*, przystające czworościany, każdy o polu podstawy $ab/2$ i o wysokości $a/2$. Żądana objętość wynosi więc

$$2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{ab}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2b}{6}.$$

10. Podstawą ostrosłupa jest wielobok o n bokach. W przypadku (a) n krawędzi bocznych ostrosłupa jest równych; w przypadku (b) wysokości (poprowadzone ze szczytu) jego n ścian bocznych są równe. Jeżeli poprowadzimy wysokość ostrosłupa i połączymy jej spodek z n wierzchołkami podstawy w przypadku (a) i ze spodkami wysokości n ścian bocznych w przypadku (b), to w obu przypadkach otrzymamy *n trójkątów prostokątnych, dla których wysokość* (ostrosłupa) *jest wspólnym bokiem:* Twierdzę, że tych n trójkątów prostokątnych jest przystających. Istotnie, przeciwprostokątna (krawędź boczna w przypadku (a), wysokość ściany bocznej w przypadku (b)) ma w każdym z nich tę samą długość, zgodnie z definicjami przyjętymi przy formułowaniu zadania; wspomnieliśmy już, że jedna z przyprostokątnych (wysokości ostrosłupa) i jeden kąt (kąt prosty) są wspólne dla wszystkich trójkątów. W n przystających trójkątach trzecie boki muszą być także równe; są one poprowadzone z tego samego punktu (spodka wysokości ostrosłupa) w tej samej płaszczyźnie (w płaszczyźnie podstawy): tworzą one n promieni okręgu, który jest w przypadku (a) opisany na podstawie ostrosłupa, a w przypadku (b) wpisany w tę podstawę. (W przypadku (b) pozostaje jednak jeszcze do pokazania, że wspomnianych n promieni jest prostopadłych do odpowiednich boków podstawy; to wynika z dobrze znanego twierdzenia geometrii przestrzennej o rzutach).

Jest godne uwagi, że figura płaska — trójkąt równoramienny — może mieć w geometrii przestrzennej *dwa różne analogony.*

11. Zauważmy, że pierwsze równanie jest tak związane z ostatnim, jak drugie z trzecim: współczynniki po lewej stronie są te same, tylko napisane w przeciwnej kolejności, a prawe strony równań są przeciwne. Dodajmy stronami pierwsze równanie do ostatniego, a drugie do trzeciego:

$$6(x+u)+10(y+v)=0,$$
$$10(x+u)+10(y+v)=0.$$

Można to uważać za układ dwóch równań liniowych o dwóch niewiadomych $x+u$ i $y+v$. Z łatwością dostajemy

$$x+u=0, \quad y+v=0.$$

Podstawiając w pierwszych dwóch równaniach wyjściowych układu $-x$ zamiast u i $-y$ zamiast v dostajemy

$$-4x+4y=16,$$
$$6x-2y=-16.$$

Jest to prosty układ równań, który daje

$$x=-2, \quad y=2, \quad u=2, \quad v=-2.$$

12. Pomiędzy startem i ponownym spotkaniem się każdy z przyjaciół przebył tę samą odległość. (Pamiętaj, że odległość = prędkość × czas). Rozróżnimy dwie części w warunku:

Robert przebył ten sam dystans co Paweł:

$$ct_1-ct_2+ct_3=ct_1+pt_2+pt_3,$$

Paweł przebył ten sam dystans co Piotr:

$$ct_1+pt_2+pt_3=pt_1+pt_2+ct_3.$$

Drugie równanie daje

$$(c-p)t_1=(c-p)t_3.$$

Zakładamy oczywiście, że samochód jedzie szybciej niż idzie pieszy: $c<p$. Mamy więc

$$t_1=t_3,$$

to znaczy, że Piotr idzie pieszo dokładnie tyle czasu co Paweł. Z pierwszego równania dostajemy

$$\frac{t_3}{t_2}=\frac{c+p}{c-p},$$

co jest oczywiście także wartością ilorazu t_1/t_2. Stąd dostajemy odpowiedzi:

(a) $$\frac{c(t_1-t_2+t_3)}{t_1+t_2+t_3}=\frac{c(c+3p)}{3c+p}.$$

(b) $$\frac{t_2}{t_1+t_2+t_3}=\frac{c-p}{3c-p}.$$

(c) W rzeczywistości mamy $0<p<c$. Są dwa przypadki graniczne:

Jeżeli $p=0$, (a) daje w wyniku $c/3$, a (b) $1/3$.

Jeżeli $p=c$, (a) daje w wyniku c, a (b) 0.

Te wyniki łatwo zobaczyć bez żadnych obliczeń.

13. Warunek łatwo rozdzielić na cztery części wyrażone czterema równaniami

$$n-d+bg^{-1}=85, \quad a+b=76, \quad a+d+bg=84,$$
$$3a=126,$$

Ostatnie równanie daje $a=42$, drugie równanie daje $b=34$. Dodając pozostałe dwa równania (aby wyeliminować d) otrzymujemy

$$2a+b(g^{-1}+g)=169.$$

Ponieważ a i b są już znane, mamy więc tu równanie kwadratowe na g. Daje ono

$$g=2,\quad d=-26 \quad \text{lub} \quad g=1/2,\quad d=25.$$

Nasze postępy są więc następujące:

$$\begin{array}{ccc} 68,\ 42,\ 16 & & 17,\ 42,\ 67 \\ & \text{lub} & \\ 17,\ 34,\ 68 & & 68,\ 34,\ 17. \end{array}$$

14. Jeżeli a i $-a$ są pierwiastkami o najmniejszej wartości bezwzględnej, to w postępie arytmetycznym będą one wyrazami sąsiednimi: postęp będzie więc miał postać

$$-3a,\ -a,\ a,\ 3a.$$

Lewa strona danego równania musi więc mieć postać

$$(x^2-a^2)(x^2-9a^2).$$

Mnożąc i porównując współczynniki przy jednakowych potęgach dostajemy układ równań

$$10a^2=3m+2,\qquad 9a^4=m^2.$$

Rugując a dostajemy

$$19m^2-108m-36=0.$$

Stąd $m=6$ lub $-6/19$.

15. Niech a, b i c oznaczają boki trójkąta, przy czym ostatnia litera oznacza przeciwprostokątną. Trzy części warunku wyrażają się przez

$$a+b+c=60,\qquad a^2+b^2=c^2,\qquad ab=12c.$$

Zauważywszy, że

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

dostajemy

$$(60-c)^2=c^2+24c.$$

Stąd $c=25$ i albo $a=15$, $b=20$, albo $a=20$, $b=15$ (dla trójkąta nie robi to żadnej różnicy).

16. Trzy części warunku wyrażają się przez

$$\sin\alpha=\frac{x}{a},\quad \sin\beta=\frac{x}{b},\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

Wyrugowanie a i b daje

$$x^2=\frac{c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}.$$

17. Przypuszczamy, że

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\dots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

Idąc za wzorem Indukcji i indukcji matematycznej pytamy: Czy domniemany wzór pozostaje prawdziwy przy przejściu od wartości n do następnej wartości $n+1$? Razem z poprzednim wzorem powinniśmy mieć:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\dots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}=1-\frac{1}{(n+2)!}.$$

Sprawdźmy to odejmując stronami od tego wzoru wzór poprzedni

$$\frac{n+1}{(n+2)!}=-\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+1)!},$$

co sprowadza się do

$$\frac{n+2}{(n+2)!}=\frac{1}{(n+1)!}.$$

Ta ostatnia równość jest oczywiście prawdziwa dla $n=1, 2, 3, \dots$ Możemy więc, postępując według wspomnianego wzoru, udowodnić nasze przypuszczenia.

18. Wydaje się, że w n-tym wierszu po prawej stronie jest n^3, a z lewej strony mamy sumę n wyrazów. Ostatnim

wyrazem tej sumy jest m-ta liczba nieparzysta, czyli $2m-1$, gdzie

$$m = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2};$$

patrz INDUKCJA I INDUKCJA MATEMATYCZNA, punkt 4. Ostatni wyraz sumy po lewej stronie powinien więc wynosić

$$2m-1 = n^2+n-1.$$

Możemy stąd wyprowadzić początkowy wyraz rozpatrywanej sumy na dwa sposoby: dokonując wstecz $n-1$ kroków od wyrazu ostatniego, dostajemy

$$(n^2+n-1)-2(n-1) = n^2-n+1;$$

dokonując jeden krok naprzód od ostatniego wyrazu poprzedniego wiersza dostajemy

$$[(n-1)^2+(n-1)-1]+2,$$

co po szablonowych uproszczeniach sprowadza się do tego samego. Świetnie! Twierdzimy więc, że

$$(n^2-n+1)+(n^2-n+3)+\ldots+(n^2+n-1) = n^3,$$

gdzie z lewej strony mamy sumę n kolejnych wyrazów postępu arytmetycznego o różnicy 2. Jeżeli czytelnik zna regułę sumowania takiego postępu (średnia arytmetyczna wyrazu początkowego i końcowego, pomnożona przez ilość wyrazów), to może sprawdzić, że

$$\frac{(n^2-n+1)+(n^2+n-1)}{2}\,n = n^3$$

i w ten sposób udowodnić twierdzenie.

(Zacytowaną regułę łatwo udowodnić za pomocą rysunku trochę różniącego się od rysunku 17.)

19. Obwód sześciokąta foremnego o boku n wynosi $6n$. Dlatego też obwód ten składa się z $6n$ odcinków ograniczających o długości 1 i zawiera $6n$ wierzchołków. Dlatego też przy przejściu od $n-1$ do n V wzrasta o $6n$ jednostek, a więc

$$V = 1+6(1+2+3+\ldots+n) = 3n^2+3n+1;$$

patrz INDUKCJA I INDUKCJĄ MATEMATYCZNA, punkt 4. Trzy przekątne przechodzące przez środek sześciokąta dzielą sześciokąt na sześć (dużych) trójkątów równobocznych. Zbadanie jednego z nich daje

$$T = 6(1+3+5+\ldots+2n-1) = 6n^2$$

(reguła na sumę postępu arytmetycznego podana jest w rozwiązaniu zadania 18). T trójkątów ma łącznie $3T$ boków. W tej ogólnej liczbie $3T$ każdy wewnętrzny odcinek podziału o długości 1 liczony jest dwukrotnie, podczas gdy $6n$ odcinków leżących na obwodzie sześciokąta jest liczonych pojedynczo. Stąd

$$2L = 3T+6n, \quad L = 9n^2+3n.$$

(Dla bardziej zaawansowanego czytelnika: z twierdzenia Eulera o wielokątach wynika, że $T+V+L+1$. Sprawdź ten związek.)

20. Oto dobrze uporządkowany szereg zadań analogicznych: Obliczyć A_n, B_n, C_n, D_n i E_n. Każda z tych wielkości przedstawia ilość sposobów płacenia kwoty n centów; różnica polega na używanych monetach:

A_n — tylko centy,
B_n — centy i pięciocentówki,
C_n — centy, pięciocentówki i dziesięciocentówki,
D_n — centy, pięciocentówki, dziesięciocentówki i dwudziestopięciocentówki,

E_n — centy, pięciocentówki, dziesięciocentówki, dwudziestopięciocentówki i pięćdziesięciocentówki.

Symbole E_n (powód tego oznaczenia jest już teraz jasny) i A_n były używane już przedtem.

Wszystkie sposoby płacenia kwoty n centów przy pomocy wszystkich pięciu rodzajów monet są wyliczone w E_n. Możemy jednak rozróżnić dwie możliwości:

Pierwsza: Nie używamy żadnej pięćdziesięciocentówki. Ilość takich sposobów płacenia wynosi zgodnie z definicją D_n.

Druga: Używamy pięćdziesięciocentówki (być może kilku). Gdy położymy na ladzie pierwszą pięćdziesięciocentówkę, to zostanie do zapłacenia kwota $n-50$ centów, co można zrobić dokładnie E_{n-50} sposobów.

Wnioskujemy stąd, że

$$E_n = D_n + E_{n-50}.$$

Podobnie

$$D_n = C_n + D_{n-25}, \quad C_n = B_n + C_{n-10}, \quad B_n = A_n + B_{n-5}.$$

Chwila uwagi pokazuje, że wzory te pozostają słuszne, jeśli przyjmiemy

$$A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = E_0 = 1$$

(co oczywiście ma sens) i traktujemy każdą z wielkości $A_n, B_n, \ldots, E_n$ za równą 0, jeśli się zdarzy, że wskaźnik jest ujemny. (Na przykład $E_{25} = D_{25}$, jak można zobaczyć bezpośrednio, a to zgadza się z naszym pierwszym wzorem, gdyż $E_{25-50} = E_{-25} = 0$.)

Nasze wzory pozwalają nam obliczać rozpatrywane wielkości w sposób *rekurencyjny*, to znaczy przez przejście do mniejszych wartości n albo do wcześniejszych liter alfabetu. Na przykład możemy obliczyć C_{30} przez proste

dodawanie, jeżeli C_{20} i B_{30} są już znane. W podanej niżej tablicy początkowy wiersz, zatytułowany A_n, i początkowa kolumna, zatytułowana 0, zawierają jedynie liczby 1. (Dlaczego?) Wychodząc od tych liczb początkowych obliczamy inne w sposób rekurencyjny, przez proste dodawanie: każda inna liczba tablicy jest równa albo liczbie znajdującej się ponad nią, albo sumie dwóch liczb: liczby znajdującej się ponad nią i innej liczby znajdującej się w odpowiedniej odległości na lewo od niej. Na przykład

$$C_{30} = B_{30} + C_{20} = 7 + 9 = 16.$$

Obliczenia są przeprowadzone aż do $E_{50} = 50$: możesz zapłacić 50 centów dokładnie na 50 różnych sposobów.

n	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
A_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_n	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
D_n	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	49
E_n	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	50

Prowadząc obliczenia dalej czytelnik może przekonać się, że $E_{100} = 292$: *możesz rozmienić* 1 *dolara na* 292 *różne sposoby*.

Wydawnictwo Naukowe PWN
Wydanie drugie
Arkuszy wydawniczych 13,5
Arkuszy drukarskich 19,25
Reprodukcja wyd. pierwszego
Druk: Wrocławska Drukarnia Naukowa
Nr zam. 89/93