GALAT / ERROR

Praktikum Metode Numerik 2022

PENDAHULUAN : ANALITIK & NUMERIK

$$\int_0^4 x^3 - 4x^2 + 12\, dx$$

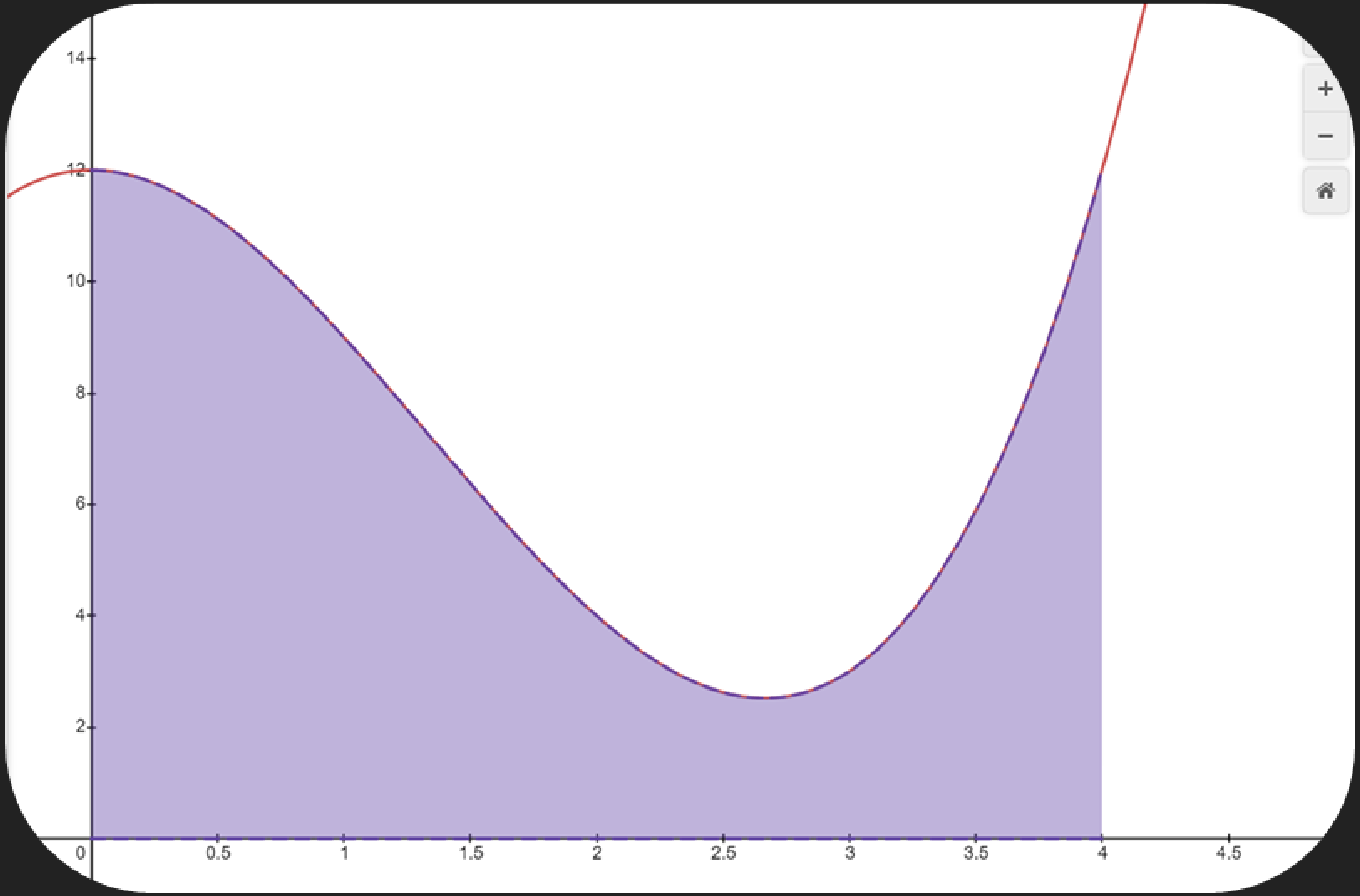
$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + 12x\right]_0^4$$

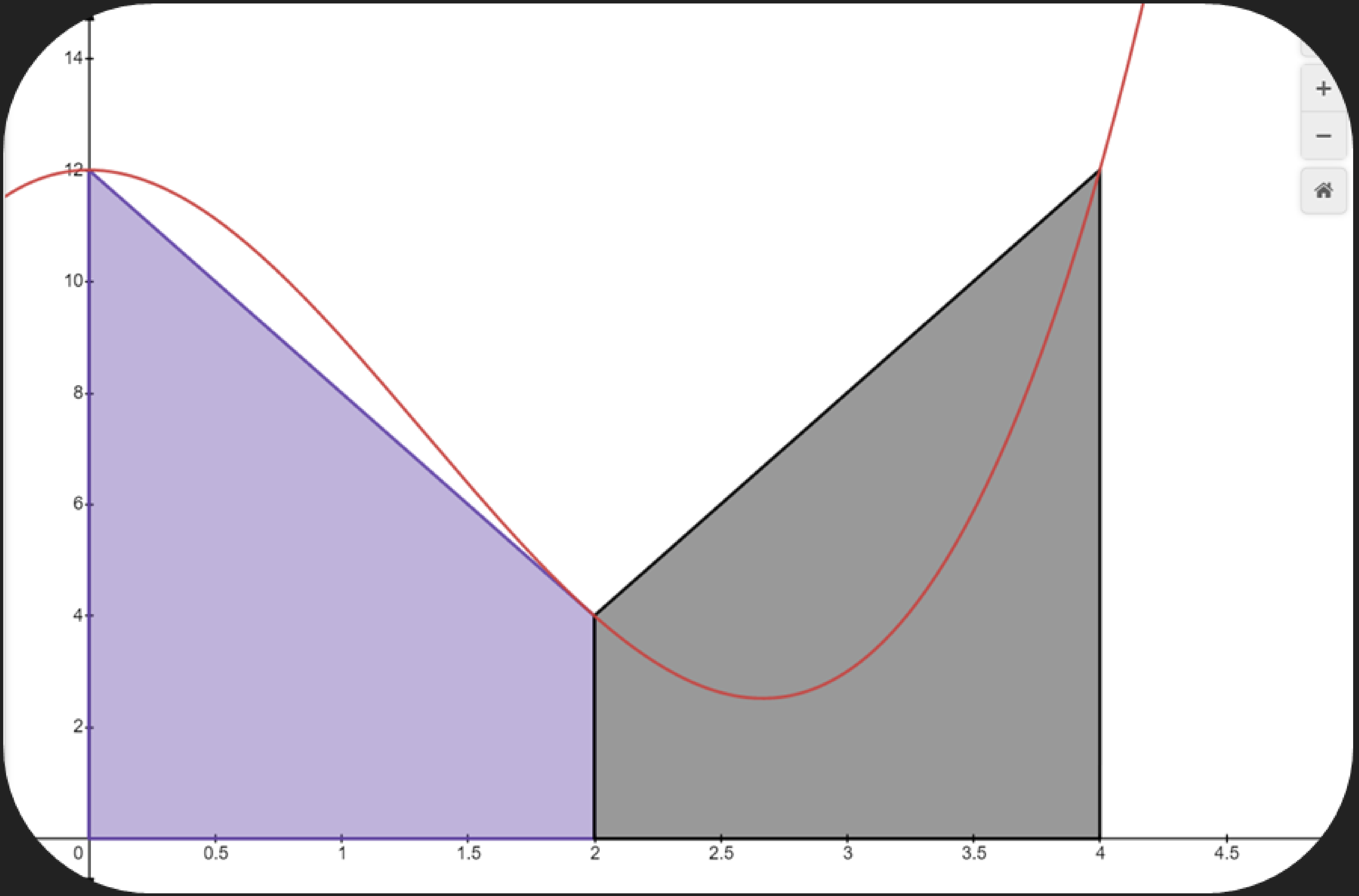
$$= \left(\frac{(4)^4}{4} - \frac{4}{3}(4)^3 + 12(4)\right) - \left(\frac{(0)^4}{4} - \frac{4}{3}(0)^3 + 12(0)\right)$$

$$= \frac{80}{3}$$

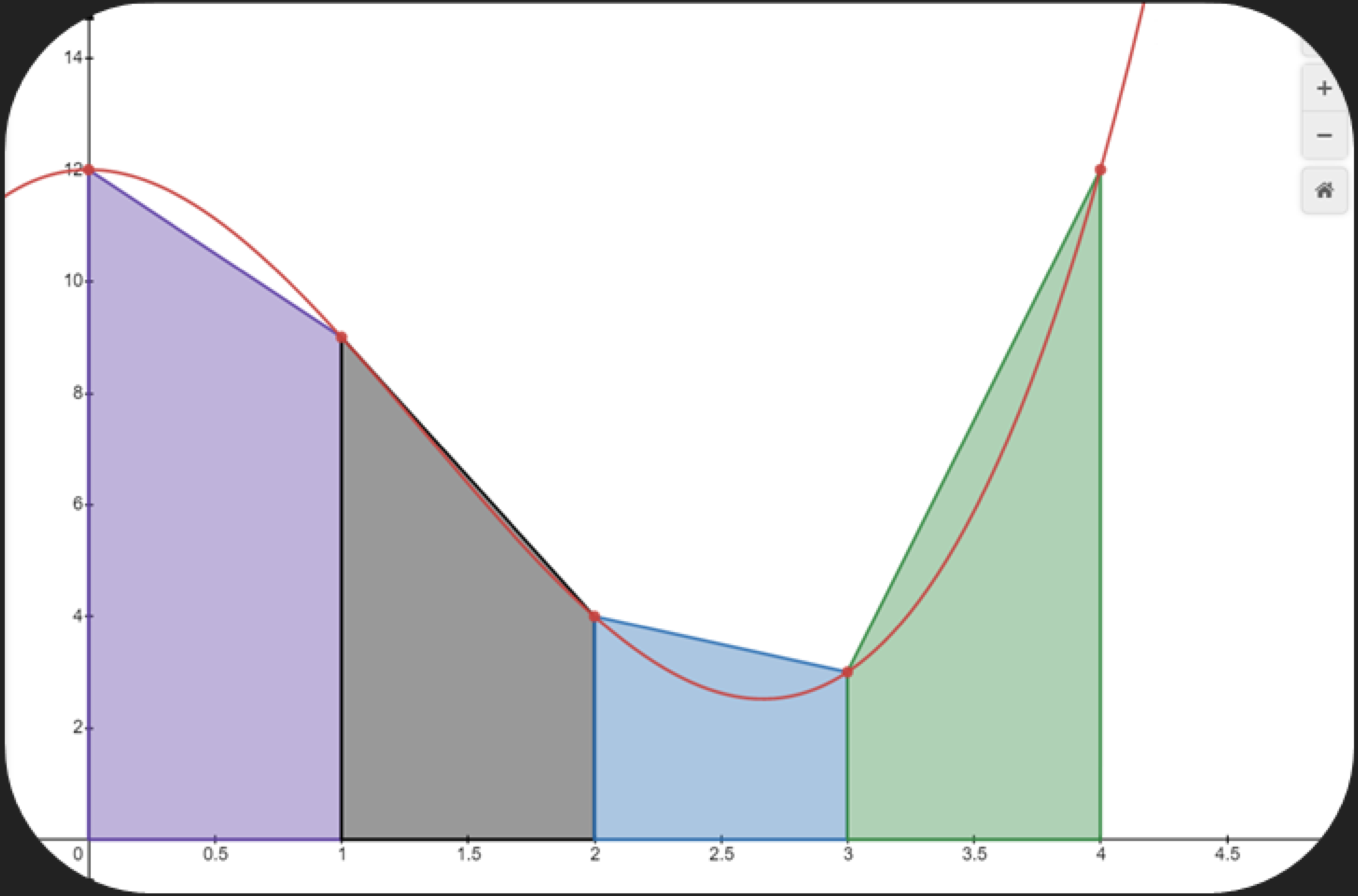
PENDAHULUAN : ANALITIK & NUMERIK

$$\int_0^4 x^3 - 4x^2 + 12\,dx$$

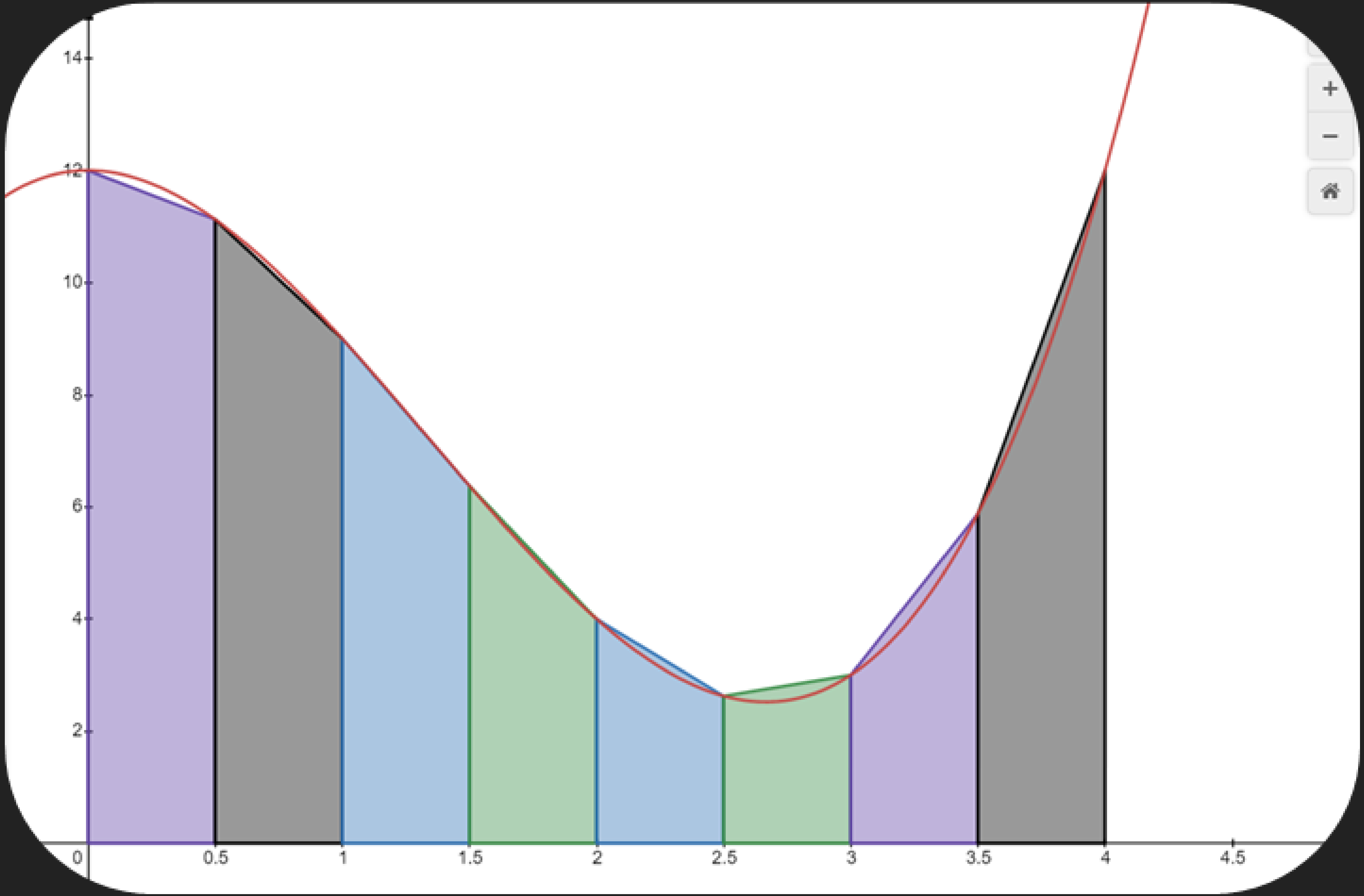




14
12
10
8
6
4
2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5



14
12
10
8
6
4
2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5



14
12
10
8
6
4
2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5

KOMPUTASI NUMERIK

Komputasi yang mengikuti suatu algoritma pendekatan (aproksimasi) untuk menyelesaikan suatu persoalan.

Penggunaaan algoritma pendekatan memungkinkan terjadinya kesalahan terhadap nilai eksaknya, sehingga dapat memunculkan nilai galat/error.

GALAT / ERROR

Kesalahan yang ditimbulkan karena proses pengukuran atau penggunaan hampiran (aproksimasi).

Umumnya muncul karena :

- Galat bawaan dari masukan
- Metode penyelesaian
- Adanya proses pembulatan dalam suatu perhitungan
- Model matematika kompleks (e.g. fenomena alam)
- dll.

ANALISIS GALAT

- Sangatlah penting untuk dilakukan dalam perhitungan yang menggunakan komputasi numerik.
- Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya.
- Semakin kecil galat, semakin teliti solusi numerik yang didapatkan.
- Kita harus paham:
  - Bagaimana menghitung galat
  - Bagaimana galat timbul

RUMUS GALAT

- Galat abstrak : $x_\varepsilon = x - \overline{x}$
- Galat relatif : $x_R = \dfrac{x - \overline{x}}{x}$
- Galat relatif hampiran : $x_R = \dfrac{x - \overline{x}}{\overline{x}}$
- % Galat relatif : $x_R \times 100\%$

SUMBER KESALAHAN PADA KOMPUTASI NUMERIK

1. Galat pembulatan (round-off error)
2. Galat pemotongan (truncation error)
3. Galat eksperimental
4. Galat pemrograman

ERROR PEMBULATAN

Misalkan nilai α = 3,45436565 dibulatkan dalam bentuk dua desimal sehingga akan diperoleh α = 3,45. Maka, nilai ε = | 3,45436565 - 3,45 | = 0,436565.

Contoh lainnya seperti nilai β = 4,56795332 dibulatkan dalam bentuk 4 desimal akan diperoleh β = 4,5680. Mka, nilai ε = | 4,56795332 - 4,5680 | = 0,00004668

Jika diperhatikan nilai ε untuk kasus error pembulatan selalu :

$$\varepsilon \leq \frac{10^{-n}}{2}$$

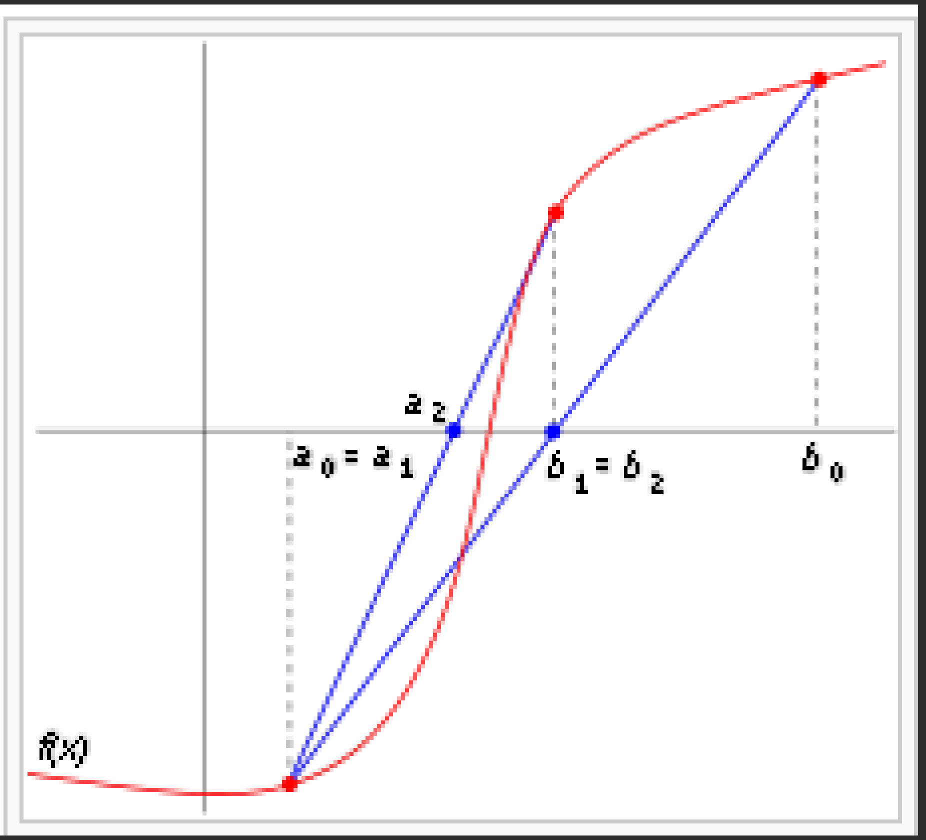
ERROR TRUNKASI

- Adalah galat yang ditimbulkan oleh pembatasan jumlah komputasi yang digunakan pada proses metode numerik.
- Banyak metode dalam metode numerik yang penurunan rumusnya menggunakan proses iterasi yang jumlahnya tak terhingga, sehingga untuk membatasi proses penghitungan, jumlah iterasi dibatasi sampai langkah ke n.
- Hasil penghitungan sampai langkah ke n akan menjadi hasil hampiran dan nilai penghitungan langkah n ke atas akan menjadi galat pemotongan.
- Error ini terjadi ketika suatu rumus komputasi disederhanakan dengan cara membuang suku yang berderajat tinggi. Misalkan pada perhitungan nilai -In 2 dengan rumus :

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$

ERROR PROGRESIF

- Error ini lebih ke arah penanganan stabil atau tidaknya pada proses komputasinya.
- Komputasi yang stabil : konvergen.
- Komputasi yang tidak stabil : divergen.
- Biasanya lebih ke arah pendekatan nilai seperti menghitung nilai x pada persamaan non-linier.



ERROR BATASAN ANGKA

- Biasanya lebih arah ke perhitungan yang nilainya sangat besar maupun sangat kecil.
- Mengingat kembali mengenai int, float, double. Kira – kira apa yang membedakan ketiganya? Ketiga tipe data tersebut cocok digunakan dalam perhitungan seperti apa?

CODING MATLAB

Program 1: Menghitung $\sqrt{2}$

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right)$$

$$x_0 = 1$$

Mencari x_2

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) \\
&= \frac{3}{2} \\
x_2 &= \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{17}{12} = 1.41667
\end{aligned}$$

CODING MATLAB

Program 1: Menghitung $\sqrt{2}$

```
#Menghitung nilai eksak
eksak=sqrt(2);

#Menghitung dengan pendekatan
x=1;
n=input('Masukan nilai n: ');
for i = 1:n;
    y=x;
    x=(y+2/y)/2;
end
E = abs(eksak-x);
fprintf('Pendekatan\t= %f\n', x);
fprintf('Eksak\t= %f\n', sqrt(2));
fprintf('Error\t= %f\n', E);
fprintf('Relatif\t= %f\n', E/x);
```

CODING
MATLAB

Program 1: Menghitung $\sqrt{2}$

```
# Menghitung nilai akar 2 secara eksak
A = sqrt(2);
fprintf('A = %5.15f\n', A);

# Menghitung nilai akar 2 dengan rumus 1
x=1;
e=1;
n=0;
while e > 10^-10; ##diubah sesuai kebutuhan
    y=x;
    x=(y+2/y)/2;
    e=abs(x-y);
    n=n+1;
end
fprintf('n = %i\n', n);
fprintf('x = %f\n',x);
E= abs(x-A);
fprintf('E = %.f\n', E);
```

CODING MATLAB

Program 2: Menghitung e^x

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

```
x = input('Input nilai x : ');
% Menghitung nilai e^x dengan nilai eksak
A = exp(x)

% Menghitung nilai e^x dengan deret Taylor
n = input('Input nilai n : ');
B = 1;
for i = 1:n,
    B = B + (x^2/factorial(i));
end
B

e=abs(A-B);
fprintf('%5.15f', e)
```

TUGAS

- Tentukan nilai galat atau error pada perhitungan nilai $\sqrt{2}$ dengan rumus $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right)$ dengan $n = \{1,2,3,4\}$ dan $x_0 = 1$. Bandingkan dan analisis keempat hasil yang diperoleh.

- Tentukan nilai galat atau error pada perhitungan nilai
  $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{99} + \sqrt{100}$
  dengan ketiga metode di bawah ini lalu bandingkan hasilnya:
  a. Perhitungan secara eksak
  b. Masing-masing akar dibulatkan
  c. Tanpa looping (menggunakan fungsi sum)

- Tentukan nilai galat pada perhitungan nilai $\cos(\pi)$ dengan menggunakan deret Taylor yang dapat dirumuskan sebagai berikut untuk $N = \{4,6,8,10\}$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k * \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$