第二季第 4 课: 可表函子 II 上讲讨论了集合范畴上用反变 Hom 函子构造幂集的过程,并发展为拓扑空间范畴上的开集函子,这是点集拓扑的基础。进一步到代数拓扑上,可以用定义在单位闭区间上的实连续参数曲线,描述拓扑空间中的连续道路。这类参数曲线是拓扑空间中的连续映射,因此是拓扑空间范畴中的态射。从单位闭区间出发的参数曲线的全体,构成了用共变 Hom 函子描述的态射集。于是通过共变 Hom 函子构造了拓扑空间上的道路函子。

拓扑学的一个基本研究思想是同伦,其中涉及在带基点的拓扑空间上讨论闭路的集合。类似于前面的做法,用定义在单位圆上的实连续参数曲线,描述拓扑空间中的连续闭道路。从单位圆出发的参数曲线的全体,构成了用共变 Hom 函子描述的态射集。于是通过共变 Hom 函子构造了拓扑空间上的闭路函子。

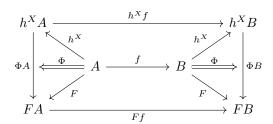
经过一系列例子,我们可以总结出各种类似问题的共性:在一个范畴上选定特定的对象,构造从这个对象出发(共变)或终结(反变)的 Hom 函子,形成的态射集描述了特定的问题,这就是可表函子。我们将通过自然变换的方式引入可表函子的定义。

可表函子 范畴论研究箭头,特别关注固定起止点的箭头集合即态射集,并将态射集纳入到集合范畴中讨论:

$$\operatorname{Hom}(X,Y) \in \mathbf{Set}$$

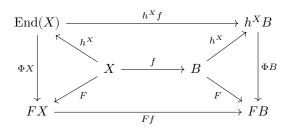
Hom 函子的作用是把范畴 \mathcal{C} 中的对象转变为和对象相关的态射集,从而把对对象的讨论转化为对对象相关的态射集的讨论. 数学上许多的问题都可以用 Hom 函子描述. 由于 Hom 函子可以把具体范畴的对象转化到集合范畴 $\mathcal{C} \to \mathbf{Set}$,可表函子的思想就是让同样具有 $\mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ 形式的函子,在表示的意义上视为 Hom 函子,使得更多的问题都成为可以用 Hom 函子描述的问题.

固定对象 $X \in \mathcal{C}$,给定函子 $F \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$,借助 h^X 可以进一步讨论函子范畴 $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ 中的自然变换 $\Phi \in \mathbf{Nat}(h^X, F)$,使得下图外框交换:



如果 Φ 是自然同构,则称 F 为 X 所表示的**可表函子** (representable functor), (X,Φ) 称为 F 的表示 (representation). 类似可以定义反变版本的可表函子. 显然 Hom 函子可表. 在同构的意义下,可表函子视为 Hom 函子.

可表函子来源于对象 $X \in \mathcal{C}$. 上图中令 A = X 则有:



这样可以讨论 X 上的恒等态射 $1_X \in \operatorname{End}(X) = h^X X$. 在上图中恒等态射在 ΦX 的像称为 **泛元 (universal element)**:

$$U = (\Phi X)(1_X) \in FX$$

道路函子 拓扑空间 X 上的连续参数曲线产生 X 上的道路,道路是连续参数曲线的等价类. 常把下述共变 Hom 函子称为**道路函子 (path functor)**:

$$\begin{split} h^I: \mathbf{Top} &\to \mathbf{Set} \\ X &\mapsto \mathbf{Top}(I, X) = h^I X \\ Y &\mapsto \mathbf{Top}(I, Y) = h^I Y \\ h^I: \mathbf{Top}(X, Y) &\to \mathbf{Set}(h^I X, h^I Y) \\ f &\mapsto h^I f \\ h^I f: h^I X &\to h^I Y \\ \gamma &\mapsto h^I (\gamma) = f \circ \gamma \end{split} \tag{0.0.1}$$

对于带基点的拓扑空间范畴 **Top***,同样可以应用共变 Hom 函子.将单位闭区间 I=[0,1] 替换为单位圆周 $S=I/\sim$,以圆周上的点作为参数曲线的参数,可以让道路构成闭路.相应得到的函子 h^S 称为**闭路函子** (loop functor)

$$\begin{split} h^S: \mathbf{Top^*} &\to \mathbf{Set} \\ (X,x) &\mapsto h^S(X,x) \\ (Y,y) &\mapsto h^S(Y,x) \\ h^S: \mathbf{Top^*}[(X,x),(Y,y)] &\to \mathbf{Set}[h^S(X,x),h^S(Y,x)] \\ f &\mapsto h^S f \\ h^S f: h^S(X,x) &\to h^S(Y,x) \\ \gamma &\mapsto (h^S f)(\gamma) = f \circ \gamma \end{split} \tag{0.0.2}$$