

第二季第 10 课：单子 “单子不就是自函子范畴上的幺半群而已么，有什么问题吗？”经过前面对函子范畴、幺半群的讨论，现在可以引入单子。就像范畴关注自态射，在函子范畴的研究中也更加关注范畴到自身的自函子，以及如此构成的自函子范畴。自态射的复合结构产生了幺半群，在自函子范畴中，函子的复合问题则产生了单子。

用自函子的复合，以及自函子和恒等函子之间的自然变换，阐述了单子的定义。用交换图的方式表述，可以联想到张量代数。我们讲解了张量代数中的结合律和幺元律是如何用交换图表示的，它们作为自然同构，和单子中的概念是符合的。

接下来引入例子。熟知的部分函数问题，以及编程中的异常处理，数学上是幂集相关的单子问题。把无定义也就是异常部分视为单点集，原先集合上的函数就转化为了带点集合上的问题，构成了集合自函子范畴上的 Maybe 单子。

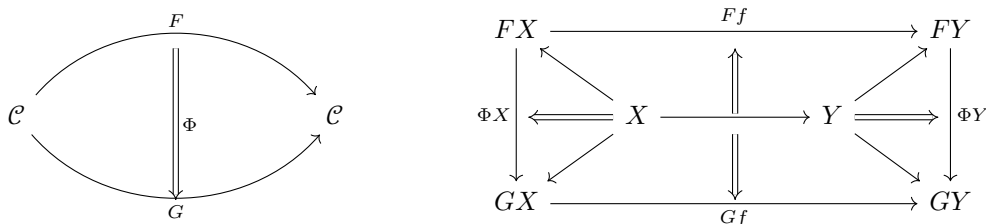
另一个例子是从字母表的集合生成有限字符串，这是 Kleene 星运算实现的自由幺半群，它也构成单子。这个单子的意义体现在字符串和字符串之间可以串接。

单子的研究和伴随函子也有密切的关系。伴随函子和单子可以互相确定。我们简要阐述了一对伴随函子的复合所产生的自函子。这个自函子可以产生单子。

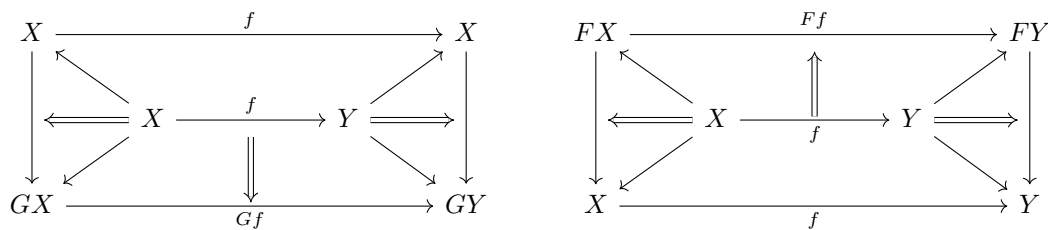
单子 范畴 \mathcal{C} 映射到自身的函子称为**自函子 (endofunctor)**，这样的函子构成了自函子范畴，记为：

$$\mathbf{End}^{\mathcal{C}} = \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{C}), \quad \mathbf{End}_{\mathcal{C}} = \mathbf{Fct}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{C})$$

类似于对象 $X \in \mathcal{C}$ 的自态射集 $\text{End}(X)$ 在自态射的复合下具有幺半群的结构，自函子范畴上的函子态射集 $\text{Nat}(F, G)$ 也可以讨论复合问题。在共变自函子范畴 $\mathbf{End}^{\mathcal{C}}$ 上的自然变换 $\Phi \in \text{Nat}(F, G)$ 如下：



恒等函子 $1_{\mathcal{C}} \in \mathbf{End}^{\mathcal{C}}$ 是特殊的自函子，当 $F = 1_{\mathcal{C}}$ 或 $G = 1_{\mathcal{C}}$ 退化为恒等函子时，自然变换退化为函子：

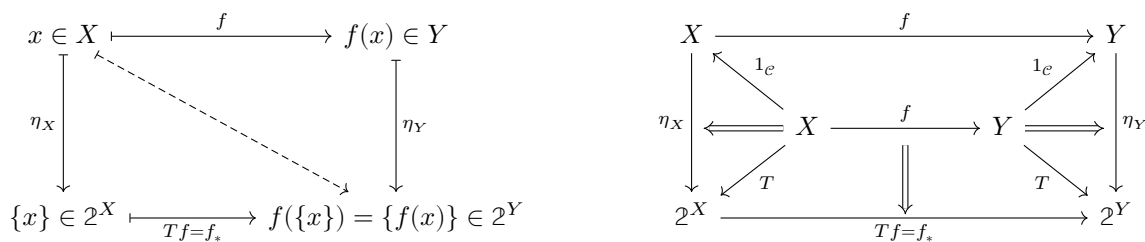


例 0.0.1: 幂集

在自函子范畴中，对共变幂集函子 $T = 2^{(-)} \in \mathbf{End}^{\mathbf{Set}}$ 的讨论，转化为自然变换 $\eta \in \text{Nat}(1_{\mathbf{Set}}, T)$ 。令 η_X 把集合的元素映射为单点集， $Tf = f_*$ 则是映射的像给出的推出：

$$\begin{aligned} \eta_X : X &\rightarrow 2^X & Tf : 2^X &\rightarrow 2^Y \\ x &\mapsto \eta_X(x) = \{x\} & \{x_1, x_2, \dots\} &\mapsto f(\{x_1, x_2, \dots\}) \end{aligned}$$

满足交换图：



举例，集合 $X = \{x_1, x_2\}$ 的幂集有二进制描述 $\{00, 01, 10, 11\}$ ，共有 $2^{|X|} = 2^2 = 4$ 个元素。幂集函子的二次复合 $T^2 = T \circ T$ 也是自函子，对幂集再做幂集， $T^2 X = 2^{2^X}$ 有 $2^{2^2} = 16$ 个元素。从二次幂集退回幂集的方式为如下态射，即通过并集合并：

$$\mu_X: T^2 X \rightarrow TX$$

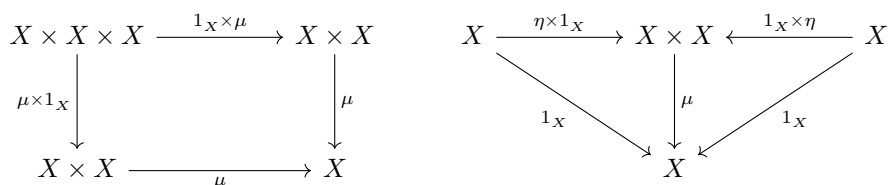
$$B = \{A_1, A_2, \dots\} \mapsto \mu_X B = \bigcup A_i$$

集合上的有限序列在串接二元运算和空串下构成自由幺半群：

例 0.0.2: Kleene 星

Kleene 星的构造视为共变自函子 $T \in \mathbf{End}^{\mathbf{Set}}$ ，把字母表集合转化为字符串集合。类似上例的讨论， η 把单个字母映射为单字符字符串， μ 为字符串的串接。

以上的讨论体现了自函子范畴 $\mathbf{End}^{\mathbf{Set}}$ 中，自然变换 $\eta \in \mathbf{Nat}(1_{\mathbf{Set}}, T)$ 和 $\mu \in \mathbf{Nat}(T^2, T)$ 的意义。回顾幺半群的定义，用交换图来描述：对于集合范畴的对象 $X \in \mathbf{Set}$ ，态射 $\mu: X \times X \rightarrow X$ 和 $\eta: 1 \rightarrow X$ 使得下图交换：



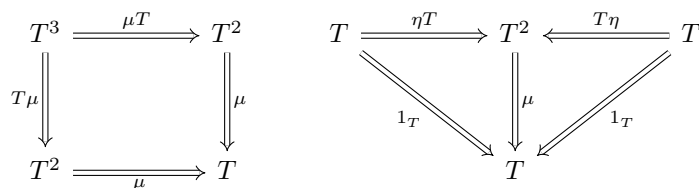
之后不限于集合范畴，引入了一般性的结合子、单位子的概念，并将其用于幺半范畴的概念。把上述态射置于函子和自然变换的框架下研究，这种构造方式产生了单子的概念：

定义 0.0.1: 单子

范畴 \mathcal{C} 上的单子 $(\mathbf{monad})(T, \eta, \mu)$ 包含：

- 一个自函子 $T \in \mathbf{End}^{\mathcal{C}}$
- 一个自然变换 $\eta: 1_{\mathcal{C}} \rightarrow T$ ，称为单位 (unit)
- 一个自然变换 $\mu: T^2 \rightarrow T$ ，称为乘法 (multiplication)

使得下图交换



左图描述的是结合律，右图描述的是幺元。这幅图非常接近么半范畴的构造，为了强调自然变换使用了双线箭头。实际上单子就是自函子范畴上的么半群。

前面例子中，集合范畴上的共变幂集函子在前述方式下构成单子。Kleene 星的构造类似。

伴随范畴 在下图伴随函子对 $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ 中固定对象 $X \in \mathcal{C}$ ，记 $T = \mathcal{C}(X, G-)$ 及 $h^{FX} = \mathcal{D}(FX, -)$ ：

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} & \mathcal{D} \\
 X & \xrightarrow{F} & FX \\
 \downarrow T = \mathcal{C}(X, G-) & \begin{array}{c} \xleftarrow{\rho} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & \downarrow h^{FX} = \mathcal{D}(FX, -) \\
 G- & \xleftarrow{G} & -
 \end{array}$$

函子同构 $\rho : h^{FX} \xrightarrow{\sim} T$ 使得 T 是 FX 表示的可表函子。 T 作用在 FX 上有 $TFX \simeq \mathcal{D}(FX, FX) = \text{End}(FX)$ ，根据 Yoneda 引理有集合同构 $\text{Nat}(h^{FX}, T) \simeq TFX$ ：

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{F} & FX \\
 \downarrow TFX = \mathcal{C}(X, GFX) & \begin{array}{c} \xleftarrow{\rho} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & \downarrow \mathcal{D}(FX, FX) = \text{End}(FX) \\
 GFX & \xleftarrow{G} & FX
 \end{array}$$

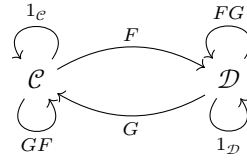
单位态射 1_{FX} 在自然变换下的像是 $X \rightarrow GFX$ 的态射，这样构造了自函子范畴 $\mathbf{End}^{\mathcal{C}}$ 中的自然变换 $\eta \in \text{Nat}(1_{\mathcal{C}}, GF)$ 使得下图交换：

$$\begin{array}{ccccc}
 X_1 & & \xrightarrow{f} & & X_2 \\
 \downarrow \eta_{X_1} & \swarrow 1_{X_1} & \uparrow & \searrow 1_{X_2} & \downarrow \eta_{X_2} \\
 & X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 & \\
 \downarrow GF & \swarrow GF & \downarrow GF & \searrow GF & \downarrow GF \\
 GFX_1 & & \xrightarrow{GFf} & & GFX_2
 \end{array}$$

用对偶的方式可以说明，在自函子范畴 $\mathbf{End}^{\mathcal{D}}$ 中存在自然变换 $\varepsilon \in \text{Nat}(FG, 1_{\mathcal{D}})$ ：

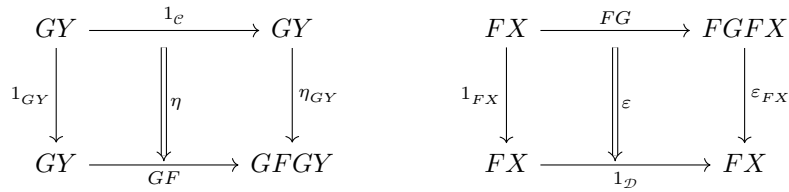
定义 0.0.2: 单位与余单位

在伴随函子对 $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ 中，如上构造的自然变换 $\eta : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ 称为**单位 (unit)**，自然变换 $\varepsilon : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ 称为**余单位 (counit)**。

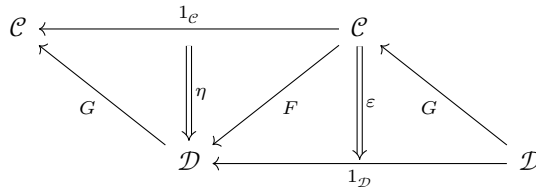


(0.0.1)

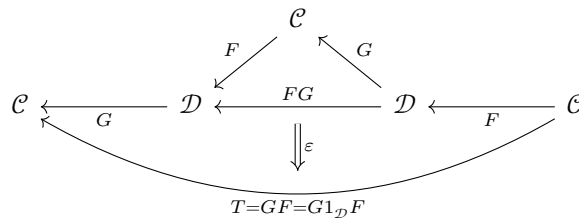
即对于 $\forall X \in \mathcal{C}, \forall Y \in \mathcal{D}$, 下图交换:



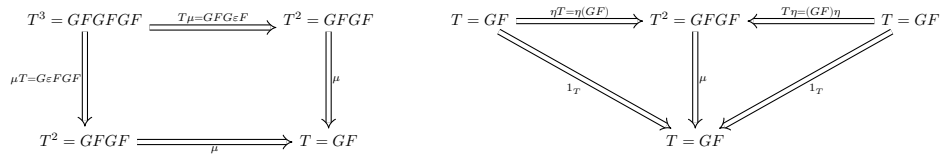
单位与余单位的作用相当于:



令 $T = GF \in \mathbf{End}^{\mathcal{C}}$, 依据上图构造自然变换 $\mu: (T^2 = GF GF) \Rightarrow (T = GF)$:



使得下图交换



于是 $(T = GF, \eta, \mu)$ 构成 $\mathbf{End}^{\mathcal{C}}$ 上的单子. 这样实现了在伴随对上构造单位、余单位和单子的标准过程.