第二季第 5 课：Yoneda 引理　研究一个范畴，可以讨论从这个范畴到集合范畴的函子，这样有了可表函子的概念．可表函子讨论的是函子是否可以等价为 Hom 函子，体现了 Hom 函子的价值．我们讨论了如何用一个对象，诱导出范畴上的 Hom 函子，以及不同的这类 Hom 函子之间的联系．本次课基本的例子是矩阵．矩阵空间之间的转换可以用左乘和右乘实现，也可以理解为通过线性映射和通过自然变换两种方式，这里蕴含了对偶的性质．

接下来给出了 Yoneda 引理的一种推导方式，说明对象的恒等元在自然变换下的像，决定了自然变换本身．Yoneda 引理的问题描述、证明过程、应用都具有比较抽象的表达方式．我们用矩阵为例说明 Yoneda 引理的意义．矩阵空间的转换，若以自然变换来描述，将看到单位矩阵在自然变换下的像如何构成特定矩阵集合中的元，也就是泛元．这样的泛元，又决定了自然变换本身．

范畴 $\mathcal{C}$ 到集合范畴 **Set** 的共变和反变函子范畴，有如下常用记号。以对象 $A \in \mathcal{C}$ 诱导的 Hom 函子为例：

$$h^A = \mathcal{C}(A,-) = \mathrm{Hom}(A,-) \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}} = \mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathbf{Set})$$

$$h_A = \mathcal{C}(-,A) = \mathrm{Hom}(-,A) \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} = \mathbf{Fct}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathbf{Set})$$

注：$\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ 就是预层范畴的记号，$\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ 是余预层范畴的记号。

Yoneda 引理　继续沿用可表函子的记号，在函子范畴 $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ 中讨论自然变换 $\Phi \in \mathrm{Nat}(h^X, F)$，让两个函子 h^X 和 F 分别作用于 $f : X \to Z$：

$$\begin{tikzcd}
h^X X \arrow[rrrr, "h^X f"] \arrow[dd, "\Phi X"'] & & & & h^X Z \arrow[dd, "\Phi Z"] \\
 & X \arrow[ul, "h^X"'] \arrow[dl, "F"] \arrow[l, Rightarrow, "\Phi"'] \arrow[r, no head] & f \arrow[r] \arrow[u, Rightarrow, "h^X"] \arrow[d, Rightarrow, "F"'] & Z \arrow[ur, "h^X"] \arrow[dr, "F"'] \arrow[r, Rightarrow, "\Phi"] & \\
FX \arrow[rrrr, "Ff"'] & & & & FZ
\end{tikzcd}$$

自然变换 Φ 令上图的外框交换。这里值得注意的是用 Hom 函子 h^X 作用于 X 自身，产生了 X 上的自态射集 $\mathrm{End}(X) = h^X X = \mathcal{C}(X,X)$，而自然变换 Φ 从 X 产生了集合范畴中的态射 $\Phi X \in \mathbf{Set}(\mathrm{End}(X), FX)$，$\Phi X$ 把 X 上的自态射转为集合 FX 中的元素 $(\Phi X)(a)$：

$$\begin{tikzcd}
h^X X \arrow[dd, "\Phi X"'] & \\
 & X \arrow[ul, "h^X"'] \arrow[dl, "F"] \arrow[l, Rightarrow, "\Phi"'] \\
FX &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "a \in \mathrm{End}(X)"] \arrow[d, phantom, ""] & X \\
\arrow[d, Rightarrow, "\Phi X"'] & \\
(\Phi X)(a) \in FX &
\end{tikzcd}$$

$\Phi X : a \mapsto (\Phi X)(a)$ 的映射过程，结合自然变换的性质，产生了 Yoneda 引理：

下图中外框中的节点表示态射集对象，内框中的节点表示态射集中的元素：

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{End}(X) = \mathcal{C}(X,X) \arrow[rrr, "h^X f"] \arrow[ddd, "\Phi X"'] & & & h^X Z \arrow[ddd, "\Phi Z"] \\
& 1_X \arrow[r, mapsto, "h^X f"] \arrow[d, "\Phi X"'] & f \circ 1_X = f \arrow[d, "\Phi Z"] & \\
& U = (\Phi X)(1_X) \arrow[r, mapsto, "Ff"'] & (Ff)(U) = (\Phi Z)(f) & \\
FX \arrow[rrr, "Ff"'] & & & FZ
\end{tikzcd}
$$

1. 图中从左上到左下：ΦX 的作用，X 的幺元 $1_X \in \mathrm{End}(X)$ 产生泛元 $U = (\Phi X)(1_X) \in FX$
2. 图中左下到右下：继续复合 Ff，$(Ff \circ \Phi_X)(1_X) = (Ff)(U) = (Ff)((\Phi X)(1_X))$
3. 图中从左上到右上：$h^X f$ 的作用 $h^X f : \mathrm{End}(X) \to h^X Z :: 1_X \mapsto f \circ 1_X = f$
4. 图中右上到右下：继续复合 ΦZ，$(\Phi Z \circ h^X f)(1_X) = (\Phi Z)((h^X f)(1_X)) = (\Phi Z)(f)$

以上产生了从左上到右下的两条映射路径，根据交换性 $(\Phi Z) \circ h^X f = Ff \circ (\Phi X)$，代入泛元得到 $(\Phi Z)(f) = Ff(U)$. 这样证明了，自然变换 Φ 由泛元 $U = (\Phi X)(1_X)$ 所决定. 这就是 **Yoneda 引理 (Yoneda lemma)**. 自然变换决定泛元，而泛元也决定自然变换，于是有一一对应：

$$
U = (\Phi X)(1_X) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \Phi \tag{0.0.1}
$$

如果 F 为 X 所表示的可表函子，即有自然同构 $\Phi \in \mathrm{Nat}(h^X, F)$，Yoneda 引理给出了集合范畴中的同构

$$
\mathrm{Nat}(h^X, F) \simeq FX \tag{0.0.2}
$$

表示对象在可表函子下的像 FX 是一个集合，集合中的元和自然同构一一对应. 换句话说，若 $F \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ 是 $X \in \mathcal{C}$ 表示的可表函子，则集合 $FX \in \mathbf{Set}$ 按照上式决定了：

$$
\begin{aligned}
\eta : FX &\to \mathrm{Nat}(h^X, F) \\
s &\mapsto \eta(s) = \Phi_s
\end{aligned}
$$

矩阵的例子 有限维线性空间选取了基就确定了向量表示，有限维的线性映射对应矩阵。取值于环 R 的有限维列向量构成范畴 $\mathcal{C} = \mathbf{Col}_R$，其中的态射就是 R-矩阵，它通过矩阵乘法的方式把 n-维的对象 R_n 转为 m-维的对象：

$$
[f_i^j] \in R_m^n = \mathbf{Col}_R(R_n, R_m) = h^{R_n} R_m = h_{R_m} R_n
$$

矩阵空间 R_m^n 中的矩阵都是态射，这样得到一对范畴 $\mathcal{C} = \mathbf{Col}_R$ 上的 Hom 函子：

$$
\begin{aligned}
h^{R_n} : \mathbf{Col}_R &\to \mathbf{Set} & \qquad h_{R_m} : \mathbf{Col}_R &\to \mathbf{Set} \\
R_a &\mapsto h^{R_n} R_a = R_a^n & R_b &\mapsto h_{R_m} R_b = R_m^b
\end{aligned}
$$

范畴 $\mathcal{C} = \mathbf{Col}_R$ 中取两个对象 $X = R_x, Y = R_y$，得到 Hom 函子 $h^X = h^{R_x}, h^Y = h^{R_y}$。以 h^X 为例，$f \in \mathrm{Hom}(A, B) = R_b^a$ 在 h^X 下有 $h^X f : h^X A \to h^X B :: \varphi \mapsto (h^X f)(\varphi)$。$f \in R_b^a$ 和 $\varphi \in R_a^x$ 视为矩阵，则 $(h^X f)(\varphi) = f\varphi \in R_b^x$ 正是矩阵乘法：

$$\begin{tikzcd}
B=R_b & & A=R_a \arrow[ll, "f\in R_b^a"'] \arrow[ll, phantom, shift right=4, "\xLeftarrow{h^X f}"] \\
& X=R_x \arrow[ul, "(h^X f)(\varphi)=f\varphi\in h^X B=R_b^x"] \arrow[ur, "\varphi\in h^X A=R_a^x"'] &
\end{tikzcd}$$

$f\varphi$ 的复合相当于用 f 左乘作用于 φ:

$$\begin{aligned}
f:R_a^x &\to R_b^x \\
\varphi &\mapsto f\varphi=\begin{bmatrix} f_1^1 & \cdots & f_1^a \\ \vdots & & \vdots \\ f_b^1 & \cdots & f_b^a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1^1 & \cdots & \varphi_1^x \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_a^1 & \cdots & \varphi_a^x \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

考虑自然变换 $\Phi\in\mathrm{Nat}(h^X,h^Y)$，对于任意对象 $A=R_a,B=R_b$ 下图外框交换:

$$\begin{tikzcd}
h^X B=R_b^x \arrow[dd, "\Phi(B)\in\mathrm{Hom}(R_b^x,R_b^y)"'] & & & & h^X A=R_a^x \arrow[llll, "(h^X f=f\circ)\in\mathrm{Hom}(R_a^x,R_b^x)"'] \arrow[dd, "\Phi(A)\in\mathrm{Hom}(R_a^x,R_a^y)"] \\
& B=R_b \arrow[ul, "h^X"'] \arrow[dl, "h^Y"] \arrow[l, Rightarrow, "\Phi"'] & & A=R_a \arrow[ll, "f\in R_b^a"] \arrow[ur, "h^X"] \arrow[dr, "h^Y"'] \arrow[r, Rightarrow, "\Phi"] & \\
h^Y B=R_b^y & & & & h^Y A=R_a^y \arrow[llll, "(h^Y f=f\circ)\in\mathrm{Hom}(R_a^y,R_b^y)"]
\end{tikzcd}$$

自然变换的交换图要求 $f\circ\Phi(A)=\Phi(B)\circ f$，$h^XA\to h^YB$ 有两条复合路径，按照不同的先后顺序转换行列的维度，最终完成了维度转换。其中 $f\in\mathrm{Hom}(A,B)$ 是行数 $a\to b$ 的转换 $f:R_a\to R_b$，自然变换 $\Phi\in\mathrm{Nat}(h^X,h^Y)$ 是列数 $x\to y$ 的转换 $\Phi:\mathrm{Hom}(R_x,-)\to\mathrm{Hom}(R_y,-)$:

$$\begin{tikzcd}
h^Y B=R_b^y & & h^X A=R_a^x \arrow[ll, bend right, "\Phi(B)\circ f"'] \arrow[ll, bend left, "f\circ\Phi(A)"]
\end{tikzcd}$$

下面用矩阵的方式来说明 Yoneda 引理的意义。记 $F=h^Y$，考虑自然变换 $\Phi\in\mathrm{Nat}(h^X,F)$，并令 $A=X=R_x$. 按照 Yoneda 引理的方式，考虑对恒等元也就是单位矩阵 $I_x\in\mathrm{End}(X)$ 的映射:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{End}(X) = R_x^x \arrow[rrr, "(h^X f = f\circ) \in \mathrm{Hom}(R_x^x, R_b^x)"] \arrow[dd, "\Phi(X) \in \mathrm{Hom}(R_x^x, R_x^y)"'] & & & h^X B = R_b^x \arrow[dd, "\Phi(B) \in \mathrm{Hom}(R_b^x, R_b^y)"] \\
 & X = R_x \arrow[ul, "h^X"'] \arrow[dl, "h^Y"] \arrow[l, Rightarrow, "\Phi"'] \arrow[r, "f \in R_b^x"] & B = R_b \arrow[ur, "h^X"] \arrow[dr, "h^Y"'] \arrow[r, Rightarrow, "\Phi"] & \\
FX = R_x^y \arrow[rrr, "(Ff = f\circ) \in \mathrm{Hom}(R_x^y, R_b^y)"'] & & & h^Y B = R_b^y
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
I_x \arrow[r, mapsto, "h^X f = f\circ"] \arrow[d, mapsto, "\Phi(X)"'] & (h^X f)(I_x) = f \arrow[d, mapsto, "\Phi(B)"] \\
U = (\Phi(X))(I_x) \arrow[r, mapsto, "Ff = f\circ"'] & f \circ U = \Phi(B) \circ f
\end{tikzcd}
$$

这里出现了泛元 $U = (\Phi(X))(I_x) \in R_x^y$，它是 x 行 y 列的矩阵空间，根据 Yoneda 引理其中的矩阵和自然变换对应。从恒等元 I_x 生成泛元 U 的过程，把自然变换的信息传递到泛元中：

$$
\begin{aligned}
\Phi(X) : (\mathrm{End}(X) = R_x^x) &\to (FX = R_x^y) \\
I_x &\mapsto U = (\Phi(X))(I_x)
\end{aligned}
$$

单位矩阵 I_x 是平凡的，而泛元 U 作为自然变换 Φ 作用的结果，蕴含了自然变换 Φ 的全部信息，可以借由 Yoneda 引理决定自然变换 Φ 本身.

R_x^y 中的矩阵以左乘方式实现了 $R^y \to R^x$ 的态射，同一个矩阵也对应了矩阵的右乘作用。类似于前述 $f\varphi$ 的复合相当于用 f 左乘 φ，$(\Phi B)(f)$ 相当于用 ΦB 右乘作用于 f：

$$
\begin{aligned}
\Phi B : R_b^x &\to R_b^y \\
f &\mapsto (\Phi B)(f) = \begin{bmatrix} f_1^1 & \cdots & f_1^x \\ \vdots & & \vdots \\ f_b^1 & \cdots & f_b^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1^1 & \cdots & m_1^y \\ \vdots & & \vdots \\ m_x^1 & \cdots & m_x^y \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$