第二季第 5 课: Yoneda 引理 研究一个范畴,可以讨论从这个范畴到集合范畴的函子,这样有了可表函子的概念. 可表函子讨论的是函子是否可以等价为 Hom 函子,体现了 Hom 函子的价值. 我们讨论了如何用一个对象,诱导出范畴上的 Hom 函子,以及不同的这类 Hom 函子之间的联系. 本次课基本的例子是矩阵. 矩阵空间之间的转换可以用左乘和右乘实现,也可以理解为通过线性映射和通过自然变换两种方式,这里蕴含了对偶的性质.

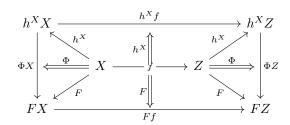
接下来给出了 Yoneda 引理的一种推导方式,说明对象的恒等元在自然变换下的像,决定了自然变换本身. Yoneda 引理的问题描述、证明过程、应用都具有比较抽象的表达方式. 我们用矩阵为例说明 Yoneda 引理的意义. 矩阵空间的转换,若以自然变换来描述,将看到单位矩阵在自然变换下的像如何构成特定矩阵集合中的元,也就是泛元. 这样的泛元,又决定了自然变换本身.

范畴  $\mathcal C$  到集合范畴 **Set** 的共变和反变函子范畴,有如下常用记号。以对象  $A \in \mathcal C$  诱导的 Hom 函子为例:

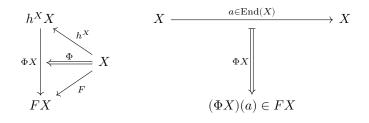
$$\begin{split} h^A &= \mathcal{C}(A,-) = \mathrm{Hom}(A,-) \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}} = \mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathbf{Set}) \\ h_A &= \mathcal{C}(-,A) = \mathrm{Hom}(-,A) \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^\mathrm{op}} = \mathbf{Fct}(\mathcal{C}^\mathrm{op},\mathbf{Set}) \end{split}$$

注: $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$  就是预层范畴的记号, $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$  是余预层范畴的记号。

Yoneda 引理 继续沿用可表函子的记号,在函子范畴  $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$  中讨论自然变换  $\Phi \in \mathrm{Nat}(h^X, F)$ ,让两个函子  $h^X$  和 F 分别作用于  $f: X \to Z$ :



自然变换  $\Phi$  令上图的外框交换。这里值得注意的是用 Hom 函子  $h^X$  作用于 X 自身,产生了 X 上的自态射集  $\operatorname{End}(X) = h^X X = \mathcal{C}(X,X)$ ,而自然变换  $\Phi$  从 X 产生了集合范畴中的态射  $\Phi X \in \operatorname{\mathbf{Set}}(\operatorname{End}(X),FX)$ , $\Phi X$  把 X 上的自态射转为集合 FX 中的元素  $(\Phi X)(a)$ :



 $\Phi X: a \mapsto (\Phi X)(a)$  的映射过程,结合自然变换的性质,产生了 Yoneda 引理:

下图中外框中的节点表示态射集对象,内框中的节点表示态射集中的元素:

$$\operatorname{End}(X) = \mathcal{C}(X,X) \xrightarrow{h^X f} f \circ 1_X = f$$

$$\downarrow^{\Phi X} \downarrow^{\Phi Z} \downarrow^{\Phi Z}$$

$$U = (\Phi X)(1_X) \xrightarrow{Ff} (Ff)(U) = (\Phi Z)(f)$$

$$\downarrow^{F}$$

$$FX \xrightarrow{Ff} FZ$$

- 1. 图中从左上到左下:  $\Phi X$  的作用,X 的幺元  $1_X \in \text{End}(X)$  产生泛元  $U = (\Phi X)(1_X) \in FX$
- 2. 图中左下到右下: 继续复合 Ff,  $(Ff \circ \Phi_X)(1_X) = (Ff)(U) = (Ff)((\Phi X)(1_X))$
- 3. 图中从左上到右上:  $h^X f$  的作用  $h^X f$ :  $\operatorname{End}(X) \to h^X Z$  ::  $1_X \mapsto f \circ 1_X = f$
- 4. 图中右上到右下:继续复合  $\Phi Z$ ,  $(\Phi Z \circ h^X f)(1_X) = (\Phi Z)((h^X f)(1_X)) = (\Phi Z)(f)$

以上产生了从左上到右下的两条映射路径,根据交换性  $(\Phi Z) \circ h^X f = Ff \circ (\Phi X)$ ,代入泛元得到  $(\Phi Z)(f) = Ff(U)$ . 这样证明了,自然变换  $\Phi$  由泛元  $U = (\Phi X)(1_X)$  所决定. 这就是 Yoneda 引理 (Yoneda lemma). 自然变换决定泛元,而泛元也决定自然变换,于是有一一对应:

$$U = (\Phi X)(1_X) \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} \Phi \tag{0.0.1}$$

如果 F 为 X 所表示的可表函子,即有自然同构  $\Phi \in Nat(h^X, F)$ ,Yoneda 引理给出了集合范畴中的同构

$$Nat(h^X, F) \simeq FX \tag{0.0.2}$$

表示对象在可表函子下的像 FX 是一个集合,集合中的元和自然同构一一对应. 换句话说,若  $F \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$  是  $X \in \mathcal{C}$  表示的可表函子,则集合  $FX \in \mathbf{Set}$  按照上式决定了:

$$\eta: FX \to \operatorname{Nat}(h^X, F)$$
  
$$s \mapsto \eta(s) = \Phi_s$$

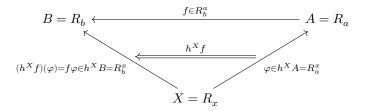
**矩阵的例子** 有限维线性空间选取了基就确定了向量表示,有限维的线性映射对应矩阵。取值于环 R 的有限维列向量构成范畴  $\mathcal{C} = \mathbf{Col}_R$ ,其中的态射就是 R-矩阵,它通过矩阵乘法的方式把 n-维的对象  $R_n$  转为 m-维的对象:

$$[f_i^j] \in R_m^n = \mathbf{Col}_R(R_n, R_m) = h^{R_n}R_m = h_{R_m}R_n$$

矩阵空间  $R_m^n$  中的矩阵都是态射,这样得到一对范畴  $\mathcal{C} = \mathbf{Col}_R$  上的 Hom 函子:

$$\begin{split} h^{R_n}: \mathbf{Col}_R \to \mathbf{Set} & h_{R_m}: \mathbf{Col}_R \to \mathbf{Set} \\ & R_a \mapsto h^{R_n} R_a = R_a^n & R_b \mapsto h_{R_m} R_b = R_m^b \end{split}$$

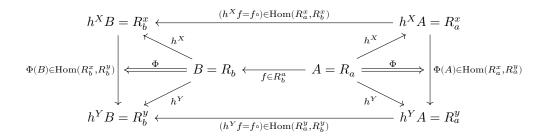
范畴  $\mathcal{C}=\mathbf{Col}_R$  中取两个对象  $X=R_x,Y=R_y$ ,得到 Hom 函子  $h^X=h^{R_x},h^Y=h^{R_y}$ 。以  $h^X$  为例,  $f\in \mathrm{Hom}(A,B)=R_b^a$  在  $h^X$  下有  $h^Xf:h^XA\to h^XB::\varphi\mapsto (h^Xf)(\varphi)$ 。  $f\in R_b^a$  和  $\varphi\in R_a^x$  视为矩阵,则  $(h^Xf)(\varphi)=f\varphi\in R_b^x$  正是矩阵乘法:



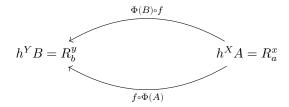
 $f\varphi$  的复合相当于用 f 左乘作用于  $\varphi$ :

$$\begin{split} f:R_a^x \to R_b^x \\ \varphi \mapsto f\varphi = \begin{bmatrix} f_1^1 & \cdots & f_1^a \\ \vdots & & \vdots \\ f_b^1 & \cdots & f_b^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^1 & \cdots & \varphi_1^x \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_a^1 & \cdots & \varphi_a^x \end{bmatrix} \end{split}$$

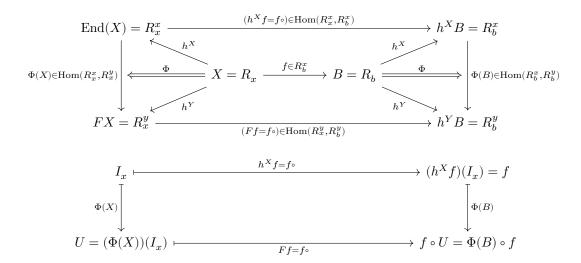
考虑自然变换  $\Phi \in \text{Nat}(h^X, h^Y)$ , 对于任意对象  $A = R_a, B = R_b$  下图外框交换:



自然变换的交换图要求  $f \circ \Phi(A) = \Phi(B) \circ f$ ,  $h^X A \to h^Y B$  有两条复合路径,按照不同的先后顺序转换行列的维度,最终完成了维度转换。其中  $f \in \operatorname{Hom}(A,B)$  是行数  $a \to b$  的转换  $f: R_a \to R_b$ ,自然变换 $\Phi \in \operatorname{Nat}(h^X,h^Y)$  是列数  $x \to y$  的转换  $\Phi: \operatorname{Hom}(R_x,-) \to \operatorname{Hom}(R_y,-)$ :



下面用矩阵的方式来说明 Yoneda 引理的意义。记  $F = h^Y$ ,考虑自然变换  $\Phi \in \operatorname{Nat}(h^X, F)$ ,并令  $A = X = R_x$ .按照 Yoneda 引理的方式,考虑对恒等元也就是单位矩阵  $I_x \in \operatorname{End}(X)$  的映射:



这里出现了泛元  $U=(\Phi(X))(I_x)\in R_x^y$ ,它是 x 行 y 列的矩阵空间,根据 Yoneda 引理其中的矩阵和自然变换对应。从恒等元  $I_x$  生成泛元 U 的过程,把自然变换的信息传递到泛元中:

$$\Phi(X): (\operatorname{End}(X) = R_x^x) \to (FX = R_x^y)$$
 
$$I_x \mapsto U = (\Phi(X))(I_x)$$

单位矩阵  $I_x$  是平凡的,而泛元 U 作为自然变换  $\Phi$  作用的结果,蕴含了自然变换  $\Phi$  的全部信息,可以借由 Yoneda 引理决定自然变换  $\Phi$  本身.

 $R_x^y$  中的矩阵以左乘方式实现了  $R^y \to R^x$  的态射,同一个矩阵也对应了矩阵的右乘作用。类似于前述  $f\varphi$  的复合相当于用 f 左乘  $\varphi$ , $(\Phi B)(f)$  相当于用  $\Phi B$  右乘作用于 f:

$$\begin{split} \Phi B: R_b^x \to R_b^y \\ f \mapsto (\Phi B)(f) = \begin{bmatrix} f_1^1 & \cdots & f_1^x \\ \vdots & & \vdots \\ f_b^1 & \cdots & f_b^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1^1 & \cdots & m_1^y \\ \vdots & & \vdots \\ m_x^1 & \cdots & m_x^y \end{bmatrix} \end{split}$$