集智学园范畴论讲义 v1.7.0809

第二季第 4 课：可表函子 II 上讲讨论了集合范畴上用反变 Hom 函子构造幂集的过程，并发展为拓扑空间范畴上的开集函子，这是点集拓扑的基础。进一步到代数拓扑上，可以用定义在单位闭区间上的实连续参数曲线，描述拓扑空间中的连续道路。这类参数曲线是拓扑空间中的连续映射，因此是拓扑空间范畴中的态射。从单位闭区间出发的参数曲线的全体，构成了用共变 Hom 函子描述的态射集。于是通过共变 Hom 函子构造了拓扑空间上的道路函子。

拓扑学的一个基本研究思想是同伦，其中涉及在带基点的拓扑空间上讨论闭路的集合。类似于前面的做法，用定义在单位圆上的实连续参数曲线，描述拓扑空间中的连续闭道路。从单位圆出发的参数曲线的全体，构成了用共变 Hom 函子描述的态射集。于是通过共变 Hom 函子构造了拓扑空间上的闭路函子。

经过一系列例子，我们可以总结出各种类似问题的共性：在一个范畴上选定特定的对象，构造从这个对象出发 (共变) 或终结 (反变) 的 Hom 函子，形成的态射集描述了特定的问题，这就是可表函子。我们将通过自然变换的方式引入可表函子的定义。

可表函子 范畴论研究箭头，特别关注固定起止点的箭头集合即态射集，并将态射集纳入到集合范畴中讨论：

$$\mathrm{Hom}(X,Y)\in\mathbf{Set}$$

Hom 函子的作用是把范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象转变为和对象相关的态射集，从而把对对象的讨论转化为对对象相关的态射集的讨论. 数学上许多的问题都可以用 Hom 函子描述. 由于 Hom 函子可以把具体范畴的对象转化到集合范畴 $\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$，可表函子的思想就是让同样具有 $\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$ 形式的函子，在表示的意义上视为 Hom 函子，使得更多的问题都成为可以用 Hom 函子描述的问题.

固定对象 $X\in\mathcal{C}$，给定函子 $F\in\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$，借助 h^X 可以进一步讨论函子范畴 $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ 中的自然变换 $\Phi\in\mathrm{Nat}(h^X,F)$，使得下图外框交换：

$$\begin{tikzcd}
h^XA \arrow[rrrr, "h^Xf"] \arrow[dd, "\Phi A"'] & & & & h^XB \arrow[dd, "\Phi B"] \\
 & A \arrow[ul, "h^X"'] \arrow[dl, "F"] \arrow[l, Rightarrow, "\Phi"'] \arrow[rr, "f"] & & B \arrow[ur, "h^X"] \arrow[dr, "F"'] \arrow[r, Rightarrow, "\Phi"] & \\
FA \arrow[rrrr, "Ff"'] & & & & FB
\end{tikzcd}$$

如果 Φ 是自然同构，则称 F 为 X 所表示的**可表函子 (representable functor)**，(X,Φ) 称为 F 的**表示 (representation)**. 类似可以定义反变版本的可表函子. 显然 Hom 函子可表. 在同构的意义下，可表函子视为 Hom 函子.

可表函子来源于对象 $X\in\mathcal{C}$. 上图中令 $A=X$ 则有：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}(X) \arrow[rrrr, "h^Xf"] \arrow[dd, "\Phi X"'] & & & & h^XB \arrow[dd, "\Phi B"] \\
 & & X \arrow[ull, "h^X"'] \arrow[dll, "F"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[ur, "h^X"] \arrow[dr, "F"'] & \\
FX \arrow[rrrr, "Ff"'] & & & & FB
\end{tikzcd}$$

这样可以讨论 X 上的恒等态射 $1_X\in\mathrm{End}(X)=h^XX$. 在上图中恒等态射在 ΦX 的像称为 **泛元 (universal element)**：

$$U=(\Phi X)(1_X)\in FX$$

道路函子 拓扑空间 X 上的连续参数曲线产生 X 上的道路，道路是连续参数曲线的等价类. 常把下述共变 Hom 函子称为**道路函子 (path functor)**:

$$\begin{aligned} h^I : \mathbf{Top} &\to \mathbf{Set} \\ X &\mapsto \mathbf{Top}(I,X) = h^I X \\ Y &\mapsto \mathbf{Top}(I,Y) = h^I Y \\ h^I : \mathbf{Top}(X,Y) &\to \mathbf{Set}(h^I X, h^I Y) \\ f &\mapsto h^I f \\ h^I f : h^I X &\to h^I Y \\ \gamma &\mapsto h^I(\gamma) = f \circ \gamma \end{aligned} \tag{0.0.1}$$

对于带基点的拓扑空间范畴 **Top***，同样可以应用共变 Hom 函子. 将单位闭区间 $I=[0,1]$ 替换为单位圆周 $S = I/\sim$，以圆周上的点作为参数曲线的参数，可以让道路构成闭路. 相应得到的函子 h^S 称为**闭路函子 (loop functor)**

$$\begin{aligned} h^S : \mathbf{Top*} &\to \mathbf{Set} \\ (X,x) &\mapsto h^S(X,x) \\ (Y,y) &\mapsto h^S(Y,x) \\ h^S : \mathbf{Top*}[(X,x),(Y,y)] &\to \mathbf{Set}[h^S(X,x), h^S(Y,x)] \\ f &\mapsto h^S f \\ h^S f : h^S(X,x) &\to h^S(Y,x) \\ \gamma &\mapsto (h^S f)(\gamma) = f \circ \gamma \end{aligned} \tag{0.0.2}$$