

第一季第 3 课：偏序集范畴 本节课继续讨论集合上构造出的范畴。承接上次课讲过的关系范畴，本节课特别讲一类常见的关系，即偏序关系。

我们用自然数等数系阐述了通常用不等号描述的偏序关系。除此之外还讨论了整数上通过整除关系构造的偏序关系，这是讨论数论问题的一个起点，偏序的构造将在数论的高级主题中发挥作用。

进一步我们发现，任何偏序的结构都可以转为范畴，即偏序集范畴。过去在代数中讨论的偏序问题，现在可以置于范畴论的框架下，讨论更宏观的偏序，比如线性子空间的包含、拓扑空间中开集的包含这样的结构。这类范畴的特点是两个对象之间只有最多一个态射。反过来，两个对象之间只有一个态射的范畴就是偏序集范畴。

理解了偏序集范畴后，再回顾集合范畴中的子集包含偏序，对于子集族就自然可以构造一个偏序集范畴。我们给出了有限集的子集族的构造方式，以及幂集的概念，幂集的结构在未来将发展出可表函子的概念。我们简要地介绍了在子集族上构造拓扑空间的方法，特别是平凡拓扑和离散拓扑。从集合构造拓扑，把集合范畴转到了拓扑空间范畴，从而从代数过渡到了几何。

偏序集以及偏序集范畴的结构较为简单，有利于理解范畴论的一些基本概念。接下来介绍函子的概念。我们给出了函子的例子，从带有偏序的自然数范畴到线性空间范畴的函子，阐述了这个函子是如何保持偏序结构的。函子把源范畴所需的结构信息保持到了目标范畴，使得跨领域的研究成为可能。

函子在保持结构方面分为共变函子和反变函子，我们介绍了反范畴的概念，可以用范畴和反范畴来描述共变和反变函子。数学中常见的用指标标记对象的方式，得到了函子方式的理解，即把抽象指标集视为范畴，通过函子映射到具体的对象族。这样得到了正向系统与反向系统的概念，这是后面学习范畴论中重要的正向极限与反向极限的基础。

偏序集范畴 范畴 \mathcal{C} 的任何态射集 $\text{Hom}(X, Y)$ 若至多包含一个态射，则称为**偏序集范畴 (posetal category)**。这个名字显然和偏序集 (X, \leq) 相关。以偏序集 (X, \leq) 中的元素为对象，定义态射集为：

$$\text{Hom}(x, y) = \begin{cases} \{\rho_x^y\} & x \leq y \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases} \quad (0.0.1)$$

按照偏序的性质：

- 自反性： $x \leq x$ 使得 $\text{End}(x) = \{\rho_x^x\}$
- 反对称性： $(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$ ，不同对象之间只有一个方向的态射
- 传递性： $(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ ，态射的复合律

这样得到了一个偏序集范畴。反过来，一个偏序集范畴中，态射集最多包含单个态射，并且需要满足态射的复合规律，借助偏序集范畴中的态射，使得范畴的对象集合构成了偏序集。

偏序集里全部的图表都交换。

例 0.0.1. 离散动力系统

集合范畴的对象 $X \in \mathbf{Set}$, 有初始点 x_0 及自态射 $f: X \rightarrow X$, 这样构成离散动力系统 (discrete dynamic system):

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

这样构造了函子:

$$F: \mathcal{N} \rightarrow \mathbf{Set}$$

$$n \mapsto x_n$$

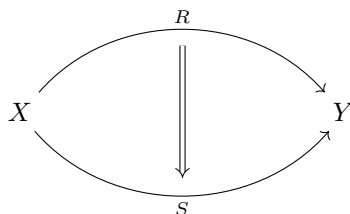
自然数 (\mathbb{N}, \leq) 带有偏序, 函子 F 则保持这个偏序构成序列 $\{x_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ 。

例 0.0.2. 关系

关系范畴 \mathbf{Rel} 中的对象为集合, 态射为关系 $R \subseteq X \times Y$ 。若有两个关系 $R, S \in \mathbf{Hom}(X, Y)$, 若关系 R 蕴含 S , 即 $R \implies S$, 从集合上看则有 $X \times Y$ 中的子集包含关系:

$$R \subseteq S$$

这样构造了包含偏序, 使得 $X \rightarrow Y$ 的关系全体构成偏序集范畴。



Σ 图 带有偏序结构的抽象指标集 (I, \leq) 视为偏序集范畴, 其对象为指标, 用它来标记范畴 \mathcal{C} 中的对象, 产生了对象族 $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i \in I}$. 写成函子形式:

$$(I, \leq) \rightarrow \mathcal{C}$$

$$i \mapsto X_i$$

$$j \mapsto X_j$$

$$k \mapsto X_k$$

(0.0.2)

函子把抽象指标集的偏序结构映射到对象族中. 令 $i \leq j \leq k$, $\mathbf{Hom}(i, j) = \{\rho_i^j\}$ 及 $\mathbf{Hom}(j, k) = \{\rho_j^k\}$. 且 $i \leq k$ 即 $\mathbf{Hom}(i, k) = \{\rho_i^k = \rho_j^k \circ \rho_i^j\}$.

共变函子把 $\rho_i^j: i \rightarrow j$ 映射为 $\psi_i^j: X_i \rightarrow X_j$, 满足:

$$\psi_i^k = \psi_j^k \circ \psi_i^j$$

反变函子把 $\rho_i^j : i \rightarrow j$ 映射为 $\varphi_i^j : X_j \rightarrow X_i$, 满足:

$$\varphi_i^k = \varphi_i^j \circ \varphi_j^k$$

这样把偏序集的结构赋予了范畴 \mathcal{C} 中被考察的对象和态射. 函子的像构成了 \mathcal{C} 中的子范畴. 偏序集里全部的图表都交换, 故这个子范畴中的图表也都交换. 子范畴称为 Σ 图表 [?].

反范畴 将一个范畴中的态射全部反向, 得到反范畴.

定义 0.0.3.

令 \mathcal{C} 为范畴, \mathcal{C}^{op} 为 \mathcal{C} 的 **反范畴 (opposite category)**, 若:

- $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 对于任意 $X, Y \in \mathcal{C}$: $\mathcal{C}^{\text{op}}(X, Y) = \mathcal{C}(Y, X)$

共变函子与反变函子 上述 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 型的函子也称为**共变函子 (covariant functor)**. 与它相对的是**反变函子 (contravariant functor)**, 即:

$$F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$$

$$X \mapsto F(X)$$

$$Y \mapsto F(Y)$$

$$F : \mathcal{C}^{\text{op}}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(F(Y), F(X))$$

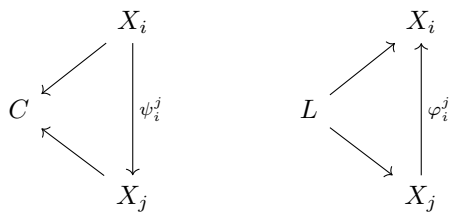
$$h \mapsto F(h)$$

$$F(h) : F(Y) \rightarrow F(X)$$

这里 \mathcal{C}^{op} 是如上定义的 \mathcal{C} 的反范畴. 也就是说, \mathcal{C}^{op} 中的对象和态射和 \mathcal{C} 一一对应, 只是态射的方向相反.

反变函子 $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ 的记号, 就相当于共变函子中把态射的箭头反向.

正向系统与反向系统 带偏序的抽象指标集 (I, \leq) 视为偏序集范畴. 按照 (0.0.2) 的方式构造 Σ 图表, 通过共变或反变的函子 $\Sigma : (I, \leq) \rightarrow \mathcal{C}$ 标记 Σ 图表中的对象, 赋予偏序的性质. 其 Σ 图表在共变时称为**正向系统 (direct system)**或**归纳系统 (inductive system)**, 在反变时 Σ 图表 $\text{Im } \Sigma = \{X_i \in \mathcal{C}\}_{i \in I}$ 称为**反向系统 (inverse system)**或**投射系统 (projective system)**.



上图给出了一类满足交换性的对象 $C, L \in \mathcal{C}$ 。图左的正向系统中, $C \in \mathcal{C}$ 使得 Σ 图表中每个对象都存在射向 C 的态射, 且使得附加了 C 的 Σ 图交换。图右的反向系统中, $L \in \mathcal{C}$ 使得 Σ 图表中每个对象都存在接受 C 的态射, 且使得附加了 L 的 Σ 图交换。