第二季第 3 课：可表函子 I 映射到集合范畴上的函子范畴是一类特别重要的范畴，构成了可表函子问题的基本设定。为了引入相关概念，首先讨论单点集。单点集发出的共边 Hom 函子，构造了集合对象和态射集的同构。这是集合元素的态射式定义，它相当于用共边 Hom 函子构造了集合范畴上的恒等函子。

在 (有限维) 线性空间上可以构造线性对偶空间。对偶空间的元素是从原线性空间到域的线性函数。对偶空间相当于这样的线性函数构成的集合，它可以用线性空间范畴上反变 Hom 函子描述。这样通过反变 Hom 函子构造了线性对偶空间函子。

另一个常见的可表函子的例子是幂集的构造。幂集由子集族构成，而子集和特征函数是一一对应的，这样建立起了幂集和特征函数集在集合范畴中的同构。我们用反变 Hom 函子，把集合对象转化成集合到二元集的态射集，它就是特征函数集。这样通过反变 Hom 函子构造了幂集函子。

幂集函子的机构是许多数学问题的基础，如实分析和概率中的 sigma-环/sigma-代数，以及点集拓扑的公理。拓扑结构是在幂集的基础上，按照特定公理规定的子集族，是更精细的结构。类似于用特征函数作为态射集来构造幂集函子的过程，我们引入 Sierpiński 空间，用拓扑空间中的态射集，也就是连续函数的集合，来构造对应的函子，即通过反变 Hom 函子构造开集函子。

单点集 在同构的意义下可以把任意集合视为单点集出发的映射的集合

$$X = h^{\mathbb{1}} X \tag{0.0.1}$$

如下图：

$$\begin{tikzcd}
 & x_1 = \varphi_{x_1}(1) \\
\mathbb{1} = \{1\} \arrow[ur, mapsto, "\varphi_{x_1}"] \arrow[r, mapsto, "\varphi_{x_2}"] \arrow[dr, mapsto, "\varphi_{x_3}"'] & x_2 = \varphi_{x_2}(1) \\
 & x_3 = \varphi_{x_3}(1)
\end{tikzcd}$$

例 0.0.1: 恒等函子

一个范畴 $\mathcal{C}$ 到自身有**恒等函子 (identity functor)**：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} &: \mathcal{C} \to \mathcal{C} \\
X &\mapsto \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(X) = X \\
Y &\mapsto \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(Y) = Y \\
\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} &: \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(F(X),F(Y)) \\
f &\mapsto \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(f) = f
\end{aligned} \tag{0.0.2}$$

例 0.0.2: 线性空间范畴上的遗忘函子

K-线性空间范畴 $\mathbf{Vct}_K$ 是集合范畴的子范畴，有遗忘函子 $U : \mathbf{Vct}_K \to \mathbf{Set}$，$\mathbf{Vct}_K$ 中的态射集是 $\mathbf{Set}$ 中的态射集的子集，非线性的映射都被排除在外 $\mathbf{Vct}_K(X,Y) \subset \mathbf{Set}(UX,UY)$。

单位向量 $1 \in K$ 在 K-线性映射 $f \in \mathbf{Vct}_K(K,V) = h^K V$ 下的像 $f(1)$ 决定了 f 本身，从集合范畴看，像的集合就是线性空间本身 $UV = \{f(1) : f \in h^K V\}$，同构于态射集 $\mathbf{Vct}_K(K,V) = h^K V$。用遗忘函

子表述为：

$$
\begin{aligned}
U : \mathbf{Vct}_K &\to \mathbf{Set} \\
K &\mapsto UK \\
V &\mapsto UV \\
\mathbf{Vct}_K(K,V) = h^K V &\to \mathbf{Set}(UK,UV) \\
f &\mapsto Uf = f
\end{aligned}
\tag{0.0.3}
$$

线性对偶函子　对偶空间的构造过程视为反变 Hom 函子，称为**对偶函子 (dual functor)**：

$$
\begin{aligned}
h_K : \mathbf{Vct}_K^{\mathrm{op}} &\xrightarrow{*} \mathbf{Vct}_K \\
V &\mapsto V^* = h_K(V) = \mathrm{Hom}(V,K) \\
W &\mapsto W^* = h_K(W) = \mathrm{Hom}(W,K) \\
h_K : \mathrm{Hom}(V,W) &\xrightarrow{*} \mathrm{Hom}(W^*,V^*) \\
f &\mapsto f^* \\
f^* : h_K(W) &\to h_K(V) \\
w^* &\mapsto f^*(w^*) = w^* \circ f
\end{aligned}
\tag{0.0.4}
$$

它相当于拉回：

$$
\begin{tikzcd}
K & & V \arrow[ll, "w^*\circ f\in V^*=h_K V"'] \arrow[dd, "f\in\mathbf{Vct}_K{[V,W]}=\mathrm{Hom}(V,W)"] \\
& \arrow[r, phantom, "f^*\in\mathbf{Vct}_K{[W^*,V^*]}\ \Uparrow\ \overset{h_K}{\Longleftarrow}"] & \\
& & W \arrow[uull, "w^*\in W^*=h_K W\in\mathbf{Vct}_K"]
\end{tikzcd}
$$

幂集函子　指标集 I 标记集合范畴 $\mathbf{Set}$ 中的对象得到集族 $\{X_i\}_{i\in I}$．令 $X\in\mathbf{Set}$ 为集合，则 X 中的子集构成的集族

$$\{X_i \mid X_i \subseteq X\}_{i\in I}$$

为 X 的子集族．所有的子集构成的子集族称为**幂集 (power set)**，记为

$$2^X = \{A \mid A \subseteq X\}$$

这里 2^X 中的 2 来源于二值集合 $2=\{0,1\}$，利用它可以方便地讨论逻辑命题．2 还体现在幂集 2^X 的势和集合 X 的势满足：

$$|2^X| = 2^{|X|}$$

从集合 $X \in \mathbf{Set}$ 到幂集 $2^X \in \mathbf{Set}$ 的诱导过程，可以理解为集合范畴 $\mathbf{Set}$ 到自身的函子[1]，即幂集函子. 函数 $f : X \to Y$ 是集合范畴中的态射 $f \in \mathbf{Set}(X, Y)$，它可以以共变 $f \mapsto f_*$ 和反变 $f \mapsto f^*$ 两种方式构成幂集之间的态射。共变的 f_* 称为**推出 (pushforward)**，反变的 f^* 称为**拉回 (pullback)**，在泛函分析、微分几何、代数几何等领域都有类似的概念，范畴论中的伴随函子既是对这种概念的抽象.

具体而言，函数 $f : X \to Y$ 作为态射实现集合中的元素 $x \mapsto f(x)$ 的映射，推出 f_* 则实现了子集的映射，产生了从子集 $A \in 2^X$ 到**像 (image)**或**正向像 (direct image)** $f_*A = f(A) \in 2^Y$。幂集函子在推出 f_* 下构成了共变函子. 类似地，拉回 f^* 产生了从子集 $B \in 2^Y$ 到**原像 (preimage)**或**逆向像 (inverse image)** $f^*B = f^{-1}(B) \in 2^X$：

$$
\begin{aligned}
&f_* : 2^X \to 2^Y &\qquad &f^* : 2^Y \to 2^X \\
&\quad A \mapsto f_*A = f(A) &\qquad &\quad B \mapsto f^*B = f^{-1}(B)
\end{aligned}
\tag{0.0.5}
$$

幂集函子在拉回 f^* 下构成了反变函子. 注意到无论 $f \in \mathbf{Set}(X, Y)$ 作为集合的映射是否可逆，$f^* : 2^Y \to 2^X$ 作为幂集的态射都可逆：

1. 若 f 不是单射，$\exists x_1, x_2 \in X$ 使得有共同的值 $y = f(x_1) = f(x_2) \in Y$，则 $f : X \to Y$ 作为集合的态射不可逆. 不过 $f_* : 2^X \to 2^Y$ 作为幂集的态射可逆，包含 y 的集合 $B \in 2^Y$，其原像 $f^*B = f^{-1}(B) \in 2^X$ 包含 x_1, x_2.

2. 若 f 不是满射，则 $Y - \mathrm{Im}\ f \neq \emptyset$ 非空，$Y - \mathrm{Im}$ 仍有原像 $f^*(Y - \mathrm{Im}\ f) = f^{-1}(Y - \mathrm{Im}\ f) = \emptyset \in 2^X$.

共变和反变幂集函子整理如下：

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "2^{(-)}"] \arrow[d, "f"'] & 2^X \arrow[d, "f_*"] \\
Y \arrow[r, "2^{(-)}"'] & 2^Y
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "2^{(-)}"] \arrow[d, "f"'] & 2^X \\
Y \arrow[r, "2^{(-)}"'] & 2^Y \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}
$$

相对而言反变的拉回有更多研究的价值。利用反变幂集函子 $f \to f^*$ 求原像的性质，可以讨论数学上常用**特征函数 (characteristic function)**. 即通过子集 $A \in 2^X$ 诱导出取值在二元集 $\mathbb{2} = \{0, 1\}$ 上的函数：

$$
\begin{aligned}
&\chi_A : X \to \mathbb{2} \\
&\qquad x \mapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}
\end{aligned}
\tag{0.0.6}
$$

显然，子集 A 在特征函数下的像是 $\chi_A(A) = \mathbb{1}$。注意到 $\mathbf{Set}(X, \mathbb{2})$ 中所有的态射都是特征函数，单点集 $\mathbb{1}$ 在特征函数下的原像正是子集 A 本身，即 $\chi_A^*(\mathbb{1}) = \chi_A^{-1}(\mathbb{1}) = A$，于是集合 X 中的子集 A 和特征函数 χ_A 一一对应，范畴中关注集合 X 上特征函数的全体，即态射集：

$$h_{\mathbb{2}}X = \mathbf{Set}(X, \mathbb{2}) \simeq 2^X$$

在同构的意义下幂集和特征函数集视为相等。于是反变 Hom 函子 $h_{\mathbb{2}}$ 相当于幂集函子 $2^{(-)}$. 从反变 Hom 函子的角度容易理解下图中的态射复合规则：

[1]即自函子，在后面章节将详细讨论

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{2}=\{0,1\} & & X \arrow[ll, "(h_2f)(\chi_B)=\chi_B\circ f\in h_2X"'] \arrow[dd, "f\in\mathbf{Set}(X,Y)"] \arrow[l, phantom, "\overset{h_2}{\Longleftarrow}"] \\
 & \arrow[u, twoheadrightarrow, "h_2f"] & \\
 & & Y \arrow[uull, "\chi_B\in h_2Y"]
\end{tikzcd}
$$

在 Y 中取子集 $B\in 2^Y$，记 Y 中的子集 $A=f^*B=f^{-1}(B)$ 为原像．子集 B 对应特征函数 $\chi_B\in h_2Y$．反变 Hom 函子 h_2 产生的函数集是特征函数的集合，特征函数 χ_B 按照反变 Hom 函子的复合律产生 X 上的特征函数：

$$(h_2f)(\chi_B)=\chi_B\circ f\in h_2X$$

它对应了子集 $A=f^*B=f^{-1}(B)\subseteq X$.

将来会了解到，反变幂集函子是二元集 $\mathbb{2}=\{0,1\}$ 表示的反变可表函子，这就是为什么把 X 的幂集记为 2^X．并且常常记 $X\to Y$ 的函数集合为 $Y^X=h_YX=\mathbf{Set}(X,Y)$．反变幂集函子在拓扑、代数几何等方面的应用更加广泛，幂集函子通常指反变幂集函子，综合以上讨论写为：

$$
\begin{aligned}
h_2:\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}&\to\mathbf{Set}\\
X&\mapsto h_2X=2^X\\
Y&\mapsto h_2Y=2^Y\\
\mathbf{Set}(X,Y)&\to\mathbf{Set}(2^Y,2^X)\\
f&\mapsto f^*\\
f^*:2^Y&\to 2^X\\
B&\mapsto f^*(B)=f^{-1}(B)
\end{aligned}
\tag{0.0.7}
$$

反变幂集函子、共变的推出 f_*、反变的拉回 f^*，这些概念在集合范畴有最一般的定义。在拓扑空间范畴中，体现开集函子和连续性。在实分析中，也用于描述**可测 (measurable)**性质：

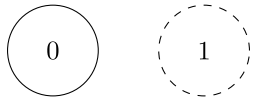
例: 可测空间范畴

可测空间范畴记为 $\mathbf{Meas}$，其对象为可测空间，其态射为可测函数。可测函数 $f\in\mathbf{Meas}(X,Y)$ 定义为：若 $B\subseteq Y$ 是 Y 中的可测集，则原像拉回 $f^*(B)=f^{-1}(B)\subseteq X$ 是 X 中的可测集。
Borel 集和 Borel 代数兼有拓扑和可测的性质，在 Borel 可测的情况，原像拉回在拓扑和可测方面的意义得到了统一。

Sierpiński 空间　在两点集 $S=\{0,1\}$ 上，除了平凡拓扑和离散拓扑外，只有两种拓扑

$$\tau_0=\{\emptyset,\{0\},S\},\quad \tau_1=\{\emptyset,\{1\},S\}$$

二者同构，取拓扑空间 $(S,\mathcal{O}_S)=(S,\tau_1)$ 称为 **Sierpiński 空间 (Sierpiński space)**．对应开集，S 的所有闭集为 $\{\emptyset,\{0\},S\}$．因而 S 包含的单点集 $\{1\}$ 和 $\{0\}$ 分别为开集和闭集.



拓扑 τ_1 按照开集包含偏序构成全序集:

$$s_1 = \emptyset \longrightarrow s_2 = \{1\} \longrightarrow s_3 = X = \{0,1\}$$

拓扑中的子集标记为:

$$\tau_1 = \{s_1, s_2, s_3\} = \{\emptyset, \{1\}, S\}$$

前面用二值集合 $\mathbb{2} = \{0,1\}$ 讨论了子集和**特征函数 (characteristic function)**的对应关系，从而用反变 Hom 函子 $h_{\mathbb{2}}$ 构造了幂集函子，见 (0.0.7) 式.

拓扑结构是幂集的子集，前面我们用幂集函子的研究方式讨论了连续性，现在继续用幂集函子的研究方式讨论类似于特征函数的连续函数. 在拓扑空间范畴 **Top** 中，对应着二值集 $\mathbb{2}$ 的就是两点 Sierpiński 空间 S. 令 $(X, \mathcal{O}_X) \in \textbf{Top}$ 为拓扑空间，讨论拓扑空间范畴中的态射集 $\textbf{Top}(X,S)$，它的形式类似于特征函数，但要求是连续函数:

$$\begin{aligned} \chi_U &: X \to S \\ x \mapsto \chi_U(x) &= \begin{cases} \{1\} & x \in U \\ \{0\} & x \notin U \end{cases} \end{aligned}$$

在 Sierpiński 拓扑中 $\{1\}$ 不仅作为点存在，还是唯一的单点开集. 若 χ_U 为连续函数，则开集 $\{1\}$ 在 χ_U 下的原像 $U = \chi_U^{-1}(\{1\}) \in \xi$ 是开集. 类似于特征函数，这里建立了开集 U 和连续函数 $\chi_U \in \textbf{Top}[(X,\mathcal{O}_X), S]$ 的一一对应:

$$h_S(X,S) = \textbf{Top}((X,\mathcal{O}_X),S) \simeq \mathcal{O}_X$$

在同构的意义下二者相等。类似 (0.0.7) 式有:

$$\begin{aligned} h_S &: \textbf{Top}^{\mathrm{op}} \to \textbf{Set} \\ (X,\mathcal{O}_X) &\mapsto h_S X = \textbf{Top}((X,\mathcal{O}_X),S) = \mathcal{O}_X \\ (Y,\mathcal{O}_Y) &\mapsto h_S Y = \textbf{Top}((Y,\mathcal{O}_Y),S) = \mathcal{O}_Y \\ \textbf{Top}(X,Y) &\to \textbf{Set}(\mathcal{O}_Y,\mathcal{O}_X) \\ f &\mapsto f^* \\ f^* &: \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X \\ V &\mapsto f^*(V) = f^{-1}(V) \end{aligned} \tag{0.0.8}$$