第二季第 10 课：单子 “单子不就是自函子范畴上的幺半群而已么，有什么问题吗?”经过前面对函子范畴、幺半群的讨论，现在可以引入单子。就像范畴关注自态射，在函子范畴的研究中也更加关注范畴到自身的自函子，以及如此构成的自函子范畴。自态射的复合结构产生了幺半群，在自函子范畴中，函子的复合问题则产生了单子。

用自函子的复合，以及自函子和恒等函子之间的自然变换，阐述了单子的定义。用交换图的方式表述，可以联想到张量代数。我们讲解了张量代数中的结合律和幺元律是如何用交换图表示的，它们作为自然同构，和单子中的概念是符合的。

接下来引入例子。熟知的部分函数问题，以及编程中的异常处理，数学上是幂集相关的单子问题。把无定义也就是异常部分视为单点集，原先集合上的函数就转化为了带点集合上的问题，构成了集合自函子范畴上的 Maybe 单子。

另一个例子是从字母表的集合生成有限字符串，这是 Kleene 星运算实现的自由幺半群，它也构成单子。这个单子的意义体现在字符串和字符串之间可以串接。

单子的研究和伴随函子也有密切的关系。伴随函子和单子可以互相确定。我们简要阐述了一对伴随函子的复合所产生的自函子。这个自函子可以产生单子。

单子 范畴 $\mathcal{C}$ 映射到自身的函子称为**自函子 (endofunctor)**，这样的函子构成了自函子范畴，记为：

$$\mathbf{End}^{\mathcal{C}} = \mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{C}), \quad \mathbf{End}_{\mathcal{C}} = \mathbf{Fct}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathcal{C})$$

类似于对象 $X \in \mathcal{C}$ 的自态射集 $\mathrm{End}(X)$ 在自态射的复合下具有幺半群的结构，自函子范畴上的函子态射集 $\mathrm{Nat}(F,F)$ 也可以讨论复合问题. 在共变自函子范畴 $\mathbf{End}^{\mathcal{C}}$ 上的自然变换 $\Phi \in \mathrm{Nat}(F,F)$ 如下：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right=50, "G"', ""{name=D, above}] & \mathcal{C} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\Phi"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FX \arrow[rrr, "Ff"] \arrow[dd, "\Phi X"'] & & & FY \arrow[dd, "\Phi Y"] \\
\arrow[r, phantom, "\Leftarrow"] & X \arrow[ul] \arrow[dl] \arrow[r] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\Uparrow"] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\Downarrow"] & Y \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "\Rightarrow"] & \\
GX \arrow[rrr, "Gf"'] & & & GY
\end{tikzcd}$$

恒等函子 $1_{\mathcal{C}} \in \mathbf{End}^{\mathcal{C}}$ 是特殊的自函子，当 $F = 1_{\mathcal{C}}$ 或 $G = 1_{\mathcal{C}}$ 退化为恒等函子时，自然变换退化为函子：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, "f"] \arrow[dd] & & & X \arrow[dd] \\
\arrow[r, phantom, "\Leftarrow"] & X \arrow[ul] \arrow[dl] \arrow[r, "f"] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\Downarrow"] & Y \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "\Rightarrow"] & \\
GX \arrow[rrr, "Gf"'] & & & GY
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FX \arrow[rrr, "Ff"] \arrow[dd] & & & FY \arrow[dd] \\
\arrow[r, phantom, "\Leftarrow"] & X \arrow[ul] \arrow[dl] \arrow[r, "f"'] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\Uparrow"] & Y \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "\Rightarrow"] & \\
X \arrow[rrr, "f"'] & & & Y
\end{tikzcd}$$

例 0.0.1: 幂集

在自函子范畴中，对共变幂集函子 $T = 2^{(-)} \in \mathbf{End}^{\mathbf{Set}}$ 的讨论，转化为自然变换 $\eta \in \mathrm{Nat}(1_{\mathbf{Set}}, T)$. 令 η_X 把集合的元素映射为单点集，$Tf = f_*$ 则是映射的像给出的推出：

$$\begin{aligned} \eta_X : X &\to 2^X & Tf : 2^X &\to 2^Y \\ x &\mapsto \eta_X(x) = \{x\} & \{x_1, x_2, \cdots\} &\mapsto f(\{x_1, x_2, \cdots\}) \end{aligned}$$

满足交换图：

$$
\begin{tikzcd}
x \in X \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & f(x) \in Y \arrow[d, "\eta_Y"] \\
\{x\} \in 2^X \arrow[r, mapsto, "Tf=f_*"'] \arrow[u, phantom] & f(\{x\}) = \{f(x)\} \in 2^Y \arrow[ul, mapsto, dashed, leftarrow]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, "f"] \arrow[ddd, "\eta_X"'] & & & Y \arrow[ddd, "\eta_Y"] \\
& X \arrow[ul, "1_{\mathcal{C}}"'] \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "T"] \arrow[l, Leftarrow] & Y \arrow[ur, "1_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, "T"'] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] & {} \\
& & & \\
2^X \arrow[rrr, "Tf=f_*"'] & & & 2^Y
\end{tikzcd}
$$

举例，集合 $X = \{x_1, x_2\}$ 的幂集有二进制描述 $\{00, 01, 10, 11\}$，共有 $2^{|X|} = 2^2 = 4$ 个元素。幂集函子的二次复合 $T^2 = T \circ T$ 也是自函子，对幂集再做幂集，$T^2X = 2^{2^X}$ 有 $2^{2^2} = 16$ 个元素。从二次幂集退回幂集的方式为如下态射，即通过并集合并：

$$
\begin{gathered}
\mu_X : T^2X \to TX \\
B = \{A_1, A_2, \cdots\} \mapsto \mu_X B = \cup A_i
\end{gathered}
$$

集合上的有限序列在串接二元运算和空串下构成自由幺半群：

例 0.0.2: Kleene 星

Kleene 星的构造视为共变自函子 $T \in \mathbf{End}^{\mathbf{Set}}$，把字母表集合转化为字符串集合. 类似上例的讨论，η 把单个字母映射为单字符字符串，μ 为字符串的串接.

以上的讨论体现了自函子范畴 $\mathbf{End}^{\mathbf{Set}}$ 中，自然变换 $\eta \in \mathrm{Nat}(1_{\mathbf{Set}}, T)$ 和 $\mu \in \mathrm{Nat}(T^2, T)$ 的意义. 回顾幺半群的定义，用交换图来描述：对于集合范畴的对象 $X \in \mathbf{Set}$，态射 $\mu : X \times X \to X$ 和 $\eta : 1 \to X$ 使得下图交换：

$$
\begin{tikzcd}
X \times X \times X \arrow[r, "1_X \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times 1_X"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\
X \times X \arrow[r, "\mu"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta \times 1_X"] \arrow[dr, "1_X"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] & X \arrow[l, "1_X \times \eta"'] \arrow[dl, "1_X"] \\
& X &
\end{tikzcd}
$$

之后不限于集合范畴，引入了一般性的结合子、单位子的概念，并将其用于幺半范畴的概念. 把上述态射置于函子和自然变换的框架下研究，这种构造方式产生了单子的概念：

定义 0.0.1: 单子

范畴 $\mathcal{C}$ 上的**单子 (monad)**(T, η, μ) 包含：

- 一个自函子 $T \in \mathbf{End}^{\mathcal{C}}$
- 一个自然变换 $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to T$，称为**单位 (unit)**
- 一个自然变换 $\mu : T^2 \to T$，称为**乘法 (multiplication)**

使得下图交换

$$
\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, Rightarrow, "\mu T"] \arrow[d, Rightarrow, "T\mu"'] & T^2 \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, Rightarrow, "\mu"'] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, Rightarrow, "\eta T"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_T"'] & T^2 \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] & T \arrow[l, Rightarrow, "T\eta"'] \arrow[dl, Rightarrow, "1_T"] \\
& T &
\end{tikzcd}
$$

左图描述的是结合律，右图描述的是幺元．这幅图非常接近幺半范畴的构造，为了强调自然变换使用了双线箭头．实际上单子就是自函子范畴上的幺半群．

前面例子中，集合范畴上的共变幂集函子在前述方式下构成单子．Kleene 星的构造类似．

伴随范畴　在下图伴随函子对 $F:\mathcal{C}\rightleftarrows\mathcal{D}:G$ 中固定对象 $X\in\mathcal{C}$，记 $T=\mathcal{C}(X,G-)$ 及 $h^{FX}=\mathcal{D}(FX,-)$：

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "G"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "T=\mathcal{C}(X,G-)"'] & FX \arrow[d, "h^{FX}=\mathcal{D}(FX,-)"] \arrow[l, phantom, "\overset{\rho}{\Leftarrow}"] \\
G- & - \arrow[l, "G"]
\end{tikzcd}
$$

函子同构 $\rho:h^{FX}\xrightarrow{\simeq}T$ 使得 T 是 FX 表示的可表函子．T 作用在 FX 上有 $TFX\simeq\mathcal{D}(FX,FX)=\mathrm{End}(FX)$，根据 Yoneda 引理有集合同构 $\mathrm{Nat}(h^{FX},T)\simeq TFX$：

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "TFX=\mathcal{C}(X,GFX)"'] & FX \arrow[d, "\mathcal{D}(FX,FX)=\mathrm{End}(FX)"] \arrow[l, phantom, "\underset{\rho}{\Leftarrow}"] \\
GFX & FX \arrow[l, "G"]
\end{tikzcd}
$$

单位态射 1_{FX} 在自然变换下的像是 $X\to GFX$ 的态射，这样构造了自函子范畴 $\mathbf{End}^{\mathcal{C}}$ 中的自然变换 $\eta\in\mathrm{Nat}(1_{\mathcal{C}},GF)$ 使得下图交换：

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[rrrr, "f"] \arrow[dd, "\eta_{X_1}"'] & & & & X_2 \arrow[dd, "\eta_{X_2}"] \\
& X_1 \arrow[ul, "1_{\mathcal{C}}"'] \arrow[dl, "GF"] \arrow[rr, "f"] \arrow[l, phantom, "\Leftarrow"] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & X_2 \arrow[ur, "1_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, "GF"'] \arrow[r, phantom, "\Rightarrow"] & \\
GFX_1 \arrow[rrrr, "GFf"'] & & & & GFX_2
\end{tikzcd}
$$

用对偶的方式可以说明，在自函子范畴 $\mathbf{End}^{\mathcal{D}}$ 中存在自然变换 $\varepsilon\in\mathrm{Nat}(FG,1_{\mathcal{D}})$：

定义 0.0.2: 单位与余单位

在伴随函子对 $F:\mathcal{C}\rightleftarrows\mathcal{D}:G$ 中，如上构造的自然变换 $\eta:1_{\mathcal{C}}\Rightarrow GF$ 称为**单位 (unit)**，自然变换 $\varepsilon:FG\Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ 称为**余单位 (counit)**.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[loop above, "1_{\mathcal{C}}"] \arrow[loop below, "GF"] \arrow[rr, bend left, "F"] & & \mathcal{D} \arrow[loop above, "FG"] \arrow[loop below, "1_{\mathcal{D}}"] \arrow[ll, bend left, "G"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
1_{\mathcal{C}} \arrow[d, Rightarrow, "\eta"'] & & FG \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon"] \\
GF & & 1_{\mathcal{D}}
\end{tikzcd}
\tag{0.0.1}
$$

即对于 $\forall X \in \mathcal{C}$, $\forall Y \in \mathcal{D}$, 下图交换:

$$
\begin{tikzcd}
GY \arrow[r, "1_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "1_{GY}"'] & GY \arrow[d, "\eta_{GY}"] \\
GY \arrow[r, "GF"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\eta"] & GFGY
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "FG"] \arrow[d, "1_{FX}"'] & FGFX \arrow[d, "\varepsilon_{FX}"] \\
FX \arrow[r, "1_{\mathcal{D}}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & FX
\end{tikzcd}
$$

单位与余单位的作用相当于:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} & & \mathcal{C} \arrow[ll, "1_{\mathcal{C}}"'] \arrow[dl, "F"'] & \\
& \mathcal{D} \arrow[ul, "G"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] & & \mathcal{D} \arrow[ll, "1_{\mathcal{D}}"] \arrow[ul, "G"'] \arrow[ul, phantom, "\Downarrow\varepsilon"]
\end{tikzcd}
$$

令 $T = GF \in \mathbf{End}^{\mathcal{C}}$, 依据上图构造自然变换 $\mu : (T^2 = GFGF) \Rightarrow (T = GF)$:

$$
\begin{tikzcd}
& & \mathcal{C} \arrow[dl, "F"'] & & \\
\mathcal{C} & \mathcal{D} \arrow[l, "G"] & & \mathcal{D} \arrow[ll, "FG"'] \arrow[ul, "G"'] \arrow[ll, phantom, shift right=4, "\Downarrow\varepsilon"] & \mathcal{C} \arrow[l, "F"] \arrow[llll, bend left=30, "T=GF=G1_{\mathcal{D}}F"]
\end{tikzcd}
$$

使得下图交换

$$
\begin{tikzcd}
T^3 = GFGFGF \arrow[r, Rightarrow, "T\mu=GFG\varepsilon F"] \arrow[d, Rightarrow, "\mu T=G\varepsilon FGF"'] & T^2 = GFGF \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\
T^2 = GFGF \arrow[r, Rightarrow, "\mu"'] & T = GF
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T = GF \arrow[r, Rightarrow, "\eta T=\eta(GF)"] \arrow[dr, Rightarrow, "1_T"'] & T^2 = GFGF \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] & T = GF \arrow[l, Rightarrow, "T\eta=(GF)\eta"'] \arrow[dl, Rightarrow, "1_T"] \\
& T = GF &
\end{tikzcd}
$$

于是 $(T = GF, \eta, \mu)$ 构成 $\mathbf{End}^{\mathcal{C}}$ 上的单子. 这样实现了在伴随对上构造单位、余单位和单子的标准过程.