集智学园范畴论讲义 v1.7.0809

第二季第 6 课：伴随函子　伴随函子是范畴论中最重要的概念之一。两个集合之间可以讨论互逆的映射问题，而互逆是非常强的条件，在范畴论中可以将它极大地推广和抽象。在线性代数中，线性映射有伴随映射的概念，即伴随矩阵和伴随算子，最常见的形式就是实转置矩阵和复共轭转置矩阵。借助线性空间上定义的内积，可以构造算子之间的伴随关系。

为了引入伴随函子，我们先介绍了偏序集之间可以保持偏序结构的映射。相向的一对函子，若能保持偏序，构成了 Galois 连接。在 Galois 理论中，域的子域构成偏序集范畴，对应的 Galois 群的子群也构成偏序集范畴，Galois 理论可以用 Galois 连接的方式阐述，这也是 Galois 连接的得名。Galois 连接本身则是伴随函子在偏序集范畴上的一个特例。

接下来给出伴随函子的定义和论述。两个范畴之间用相向的一对函子连接，约束二者连接的条件则是两个范畴中形成的同构的态射集合。这意味着一对伴随函子可以建立起两个范畴中态射集在同构意义下的相等，使得两个范畴中的行为互相影响对方。这种构造是对可逆函数的巨大抽象。

接下来讲解了 currying 方法，在多阶函数和多元函数之间相互转换，它反应了集合范畴中 Cartes 集和态射集指数对象的转换。将其至于伴随函子的框架下，在线性空间范畴中可以得到 Hom-Tensor 伴随关系，也是同调代数中最重要的伴随关系之一。

伴随函子　看**等价 (equivalence)**问题，集合可以视为 0-范畴，等价就是**相等 (equality)**；普通范畴是 1-范畴，等价是对象的同构；2-范畴中的 2-态射是函子，等价是范畴的同构，对于同构的范畴 $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$，存在一对函子 $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ 使得 $GF = 1_{\mathcal{C}}$ 及 $FG = 1_{\mathcal{D}}$. Kan 在研究同调代数时引入了伴随函子，这是范畴论中更加宽松，它不要求 F 和 G 的互逆，从而有了更为广泛的应用.

两个方向相反的函子，产生下图中纵向的两个态射集：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, shift left, "R"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "L"] \\
LB \arrow[d, "\mathcal{C}(LB,A)"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\rho^B_A}{\Longrightarrow}"] & B \arrow[l, "L"'] \arrow[d, "\mathcal{D}(B,RA)"] \\
A \arrow[r, "R"'] & RA
\end{tikzcd}$$

若对于 $\forall A \in \mathcal{C}$ 和 $\forall B \in \mathcal{D}$ 有同构：

$$\rho^B_A : \mathcal{C}(LB, A) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{D}(B, RA) \tag{0.0.1}$$

则称函子 R 和 L 是一对**伴随函子 (adjoint functors)**. 称 L 是 R 的**左伴随函子 (left adjoint functor)**，记 $L \dashv R$. 称 R 是 L 的**右伴随函子 (right adjoint functor)**，记 $R \vdash L$.

Galois 连接　Galois 连接的名字来自 Galois 理论中呈现出的一种偏序关系。根据数论的基本知识，域扩张 L/K 的 Galois 群记 $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Aut}_K(L)$. 域扩大则 Galois 群缩小，子域按照子对象偏序构成偏序集范畴，这样建立了子群和子域的反向偏序的对应，使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\mathrm{Gal}"] \arrow[d, "\leq"'] & \mathrm{Gal}(E) \\
\mathrm{Fix}(G) & G \arrow[l, "\mathrm{Fix}"] \arrow[u, "\leq"']
\end{tikzcd}$$

例: $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ 扩域

在 $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ 的扩张中，令 σ_1 为恒等，σ_2 为复共轭，它们都是 $\mathbb{C}$ 上的域自同构。注意到 $\sigma_2^2 = \sigma_1$ 故 $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ 在自同构的复合运算下构成群，此外 $\{\sigma_1\}$ 本身也构成平凡群。复域 $\mathbb{C}$ 在 $\{\sigma_1\}$ 群的作用下不变，而实数域 $\mathbb{C}$ 在复共轭 σ_2 的作用下也是不变的，故实数域 $\mathbb{C}$ 对应的 Galois 群更大。子域和不变子群的对应为：

$$(E = \mathbb{C}, G = \{\sigma_1\}), \quad (E = \mathbb{R}, G = \{\sigma_1, \sigma_2\})$$

其偏序关系为：

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\mathrm{Gal}"] \arrow[d, "\leq"'] & \mathrm{Gal}(\mathbb{R}) \\
\mathrm{Fix}(\{\sigma_1, \sigma_2\}) & \{\sigma_1, \sigma_2\} \arrow[l, "\mathrm{Fix}"] \arrow[u, "\leq"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "\mathrm{Gal}"] \arrow[d, "\leq"'] & \mathrm{Gal}(\mathbb{C}) \\
\mathrm{Fix}(\{\sigma_1\}) & \{\sigma_1\} \arrow[l, "\mathrm{Fix}"] \arrow[u, "\leq"']
\end{tikzcd}$$

用范畴化的方式考察 Galois 理论中的子群和子域的关系，可以发展出偏序集 (范畴) 之间的对应关系，即 Galois 连接. 两个偏序集 $(A, \leq)$ 和 $(B, \leq)$ 的**单调 Galois 连接 (monotone Galois connection)**包含两个单调函数 $f : A \to B$ 和 $g : B \to A$，使得对于 $\forall a \in A$ 和 $\forall b \in B$ 有：

$$f(a) \leq b \iff a \leq g(b)$$

f 称为 g 的**下伴随 (lower adjoint)**，g 称为 f 的**上伴随 (upper adjoint)**.

例: 取整

构造有序整数 $(\mathbb{Z}, \leq)$ 和有序实数 $(\mathbb{R}, \leq)$ 的双向映射. 首先考虑取整函数，用 $\lfloor x \rfloor$ 表示**下取整/取底 (floor)**，用 $\lceil x \rceil$ 表示**上取整/取顶 (ceil)**. 例如 $\lfloor \pi \rfloor = 3$ 以及 $\lceil \pi \rceil = 4$. 固定任意自然数 $n \in \mathbb{N}$ 定义函数：

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto f(x) = \lceil x/n \rceil \end{aligned}$$

其次定义函数：

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto g(y) = ny \end{aligned}$$

显然

$$f(x) = \lceil x/n \rceil \leq y \iff x \leq g(y) = ny$$

将实数偏序集和整数偏序集 $(\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{R}, \leq) \in$ **Poset** 视为偏序集范畴. 根据 (**??**) 的例子，固定任意自然数 $n \in \mathbb{N}$，定义：

$$f(x) = \lceil x/n \rceil, \quad g(y) = ny$$

考虑二者的 Galois 连接，下图视为函子：

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}, \leq) \arrow[r, shift left, "g"] & (\mathbb{R}, \leq) \arrow[l, shift left, "f"]
\end{tikzcd}$$

有

$$f(x) = \lceil x/n \rceil \leq y \iff x \leq g(y) = ny$$

在偏序集范畴中偏序视为态射 (**??**)：

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[d, "\leq"'] & x \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "\leq"] \\ y \arrow[r, "g"'] & g(y) \end{tikzcd}$$

于是 Galois 连接的条件相当于如下态射集的同构:

$$\rho_y^x : \mathrm{Hom}_{(\mathbb{Z},\leq)}(f(x), y) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{(\mathbb{R},\leq)}(x, g(y))$$

Currying 多元函数可以通过 **currying**的方式分解为一系列一元函数. Currying 的思想最早来自哲学家 Frege，在计算理论中有重要的应用. 不仅如此，currying 也成为范畴论的指数对象，以及 Hom-Tensor 伴随函子理论的基础.

定义: 高阶函数

函数 $f : X \to Y$ 的输入 X 或输出 Y 中包含函数类型，则函数 f 称为**高阶函数 (higher-order function)**.

高阶函数是**函数式编程 (functional programming)**的重要概念. 在编程实践中，可以以函数为输入或输出的类型，构造高阶函数，简化描述方式.

例: 高阶函数

令 f 为定义在 X 上的 1-元 2-阶函数，其输出为 $Y \to W$ 型的 1-元 1-阶函数:

$$\begin{aligned} f : X &\to W^Y = \mathbf{Set}(Y, W) \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

则 f 在输入 $\forall x \in X$ 得到的输出为 $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) : y &\to W \\ y &\mapsto f(x)(y) = (f(x))(y) \end{aligned}$$

系统性地研究 n-元函数和 n-阶函数之间的转换，是通过 currying 和反 currying 的方式实现的:

例: 三元函数的 currying

3-元 1-阶函数 $f(x,y,z)$ 写为集合范畴中的如下态射:

$$\begin{aligned} f : (X, Y, Z) &\to W \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) \end{aligned}$$

第一步的 currying 把 3-元 1-阶 $f \in W^{(X,Y,Z)}$ 型的映射，转化为 2-元 2-阶 $g \in \left(W^Z\right)^{(X,Y)}$ 型的映射，减少了一个变元相应增加了一阶:

$$\begin{aligned} g : (X, Y) &\to W^Z \\ (x, y) &\mapsto g(x, y) \end{aligned} \qquad \text{s.t.} \qquad \begin{aligned} g(x, y) : Z &\to W \\ z &\mapsto g(x, y)(z) = f(x, y, z) \end{aligned}$$

第二步的 currying 把 2-元 2-阶 $g \in \left(W^Z\right)^{(X,Y)}$ 型的映射，转化为 1-元 3-阶 $h \in \left(\left(W^Z\right)^Y\right)^X$ 型的映射，减少了一个变元相应增加了一阶:

$$\begin{aligned} h : X &\to \left(W^Z\right)^Y \\ x &\mapsto h(x) \end{aligned} \qquad \text{s.t.} \qquad \begin{aligned} h(x) : Y &\to W^Z \\ y &\mapsto h(x)(y) = g(x, y) \end{aligned}$$

经过两步 currying，3-元 1-阶函数成为 1-元 3-阶函数，使得 $f(x,y,z)=g(x,y)(z)=h(x)(y)(z)$，下图展示了变量逐一转移的过程：

$$f \in W^{(X,Y,Z)} \Longrightarrow g \in \left(W^Z\right)^{(X,Y)} \Longrightarrow h \in \left(\left(W^Z\right)^Y\right)^X$$

$$\begin{tikzcd}
(X,Y,Z) \arrow[d, "f"] \arrow[r, phantom, "\Longrightarrow"] & (X,Y) \arrow[d, "g"] \arrow[r, phantom, "\Longrightarrow"] & X \arrow[d, "h"] \\
W & W^Z & \left(W^Z\right)^Y
\end{tikzcd}$$

Currying 的原理可以用集合范畴来解释．集合范畴中取对象 $\forall X,Y,W \in \mathbf{Set}$，构造 $\varphi : \mathbf{Set}(X \times Y, W) \to \mathbf{Set}(X, W^Y)$ 的映射，使得 $f \mapsto \varphi(f)$ 如下：

$$f \in W^{(X,Y)} \xRightarrow{\varphi} \varphi(f) \in \left(W^Y\right)^X$$

$$\begin{tikzcd}
(X,Y) \arrow[d, "f"] \arrow[r, phantom, "\overset{\varphi}{\Longrightarrow}"] & X \arrow[d, "\varphi(f)"] \\
W & W^Y
\end{tikzcd}$$

$\varphi(f)$ 满足：

$$\begin{aligned} \varphi(f) : X &\to W^Y \\ x &\mapsto \varphi(f)(x) \end{aligned} \qquad \text{s.t.} \qquad \begin{aligned} \varphi(f)(x) : Y &\to W \\ y &\mapsto \varphi(f)(x)(y) = f(x,y) \end{aligned}$$

即下图交换：

$$\begin{tikzcd}
 & & \varphi(f)(x)(y) = f(x,y) \in W \\
(x,y) \in X \times Y \arrow[r, mapsto] \arrow[urr, mapsto, "f"] \arrow[drr, mapsto] & x \in X \arrow[r, mapsto, "\varphi(f)"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\varphi"] & {} \\
 & & y \in Y \arrow[uu, mapsto, "\varphi(f)(x)"']
\end{tikzcd}$$

反过来构造 $\psi : \mathbf{Set}(X, W^Y) \to \mathbf{Set}(X \times Y, W)$ 的映射，使得 $g \mapsto \psi(g)$ 如下：

$$\begin{aligned} \psi(g) : X \times Y &\to W \\ (x,y) &\mapsto \psi(g)(x,y) = g(x)(y) \end{aligned}$$

即下图交换：

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \psi(g)(x,y)=g(x)(y)=g(x,y)\in W \\
(x,y)\in X\times Y \arrow[urrr, mapsto, "\psi(g)"] \arrow[r, mapsto] \arrow[drrr, mapsto] & x\in X \arrow[r, phantom, "\Uparrow\psi"] \arrow[rr, mapsto, "g"'] & & {} \\
 & & & y\in Y \arrow[uu, "g(x)"']
\end{tikzcd}
$$

综上可见 $f=\psi\circ\varphi(f),\quad g=\varphi\circ\psi(g)$，即有

$$
\begin{tikzcd}
W^{(X,Y)} \arrow[loop left, "\psi\circ\varphi"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & & \left(W^Y\right)^X \arrow[loop right, "\varphi\circ\psi"] \arrow[ll, bend left, "\psi"]
\end{tikzcd}
$$

于是得到同构 $\mathbf{Set}(X\times Y,W)\simeq\mathbf{Set}(X,W^Y)$，或用态射集符号表示为：

$$\mathrm{Hom}(X\times Y,W)\simeq\mathrm{Hom}(X,\mathrm{Hom}(Y,W)),\quad W^{X\times Y}\simeq\left(W^Y\right)^X \tag{0.0.2}$$

这就是 currying 的范畴化描述.
Currying 在多元和多阶之间转化的思想，在许多范畴中构成了重要的 Tensor-Hom 左右伴随对：

$$\mathrm{Hom}(A\times B,C)\simeq\mathrm{Hom}(A,\mathrm{Hom}(B,C))$$

Tensor 函子构成了左伴随函子，Hom 函子构成了右伴随函子。