集智学园范畴论讲义 v1.7.0809

第一季第 10 课：从集合到拓扑空间 拓扑学是范畴论的主要推动力量之一。在点集拓扑、同伦、同调理论中，函子化的构造处处可见。学习拓扑有助于感受范畴论的方法论意义。在集合上构造拓扑结构是进入几何领域的第一步。本节课首先剥离几何结构中的其它属性，只保留拓扑性质，考察拓扑性质的本 原。许多分析中的不等式问题，本质上都可以从拓扑的角度来理解，并且描述为偏序的构造。

拓扑结构的定义中涉及到子集族，也就是幂集的子集。前面的课程通过反变的 Hom 函子构造了幂集函子，它是从集合范畴到集合范畴的函子。从函子角度看，拓扑结构的构造相当于是一种带有约束的函子，要求函子能够产生符合开集定义的，满足某些代数封闭性的子集族。

在函子的角度回顾数学分析中的连续性就十分自然：用拓扑方式定义的连续性，无非是让开集可以在幂集函子的原像下映射为开集，产生封闭性。

过去用特征函数探讨了子集的构成，特殊函数的全体相当于幂集，并且用反变 Hom 函子刻画了态射集和幂集的同构性质。在拓扑中，类似的构造是 Sierpiński 空间，它有一个开点和一个闭点，相当于特征函数取值的二元。Sierpiński 空间作为拓扑空间，用相似的函子映射方向，把拓扑空间连续性的构造纳入到求原像中，于是在拓扑空间范畴中，同样可以用反变 Hom 函子来刻画开集的集合。

同伦理论起源于拓扑学，它成为范畴论发展的一个主要推动力量．同伦上的问题往往可以转变为范畴中更加抽象的问题，反过来范畴论的发展又发展出了更多同伦的理论．我们简单地介绍了同伦的概念。结合过去讨论的集合范畴中的态射复合律，以及线性空间范畴中用矩阵乘法构造的态射复合律，可以类比同伦中用连通的道路来构造同伦的关系。

拓扑空间 拓扑学是几何学的基础．$\mathbb{R}$ 上的开区间的全体构成子集族 $\{(a_i,b_i) \mid a_i,b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i\}_{i\in I}$，按照子集的包含关系构成偏序：

$$(a_1,b_1) \leq (a_2,b_2) \;\Leftrightarrow\; a_2 \leq a_1 < b_1 \leq b_2$$

大体上许多用不等式描述的数学问题，都可以在这种意义下转为偏序的描述．这里就蕴含了 $\mathbb{R}$ 中的拓扑结构，只要开区间包含偏序的成立，不等式具体的放缩数字并不重要．$\mathbb{R}$ 上构造一个连续的单满自映射，例如 $x \mapsto f(x) = 2+3x$ 或者 $x \mapsto f(x) = 5+7x^3$，这样相当于在集合包含偏序意义下，有偏序集范畴到自身的函子：

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R},\leq) \arrow[rr, "T_f"] & & (\mathbb{R},\leq) \\
(a_1,b_1) \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, "\leq"] \arrow[drr, phantom, "\Longrightarrow"] & & T_f(a_1,b_1)=(f(a_1),f(b_1)) \arrow[d, "\leq"] \\
(a_2,b_2) \arrow[rr, mapsto] & & T_f(a_2,b_2)=(f(a_2),f(b_2))
\end{tikzcd}$$

它保持了偏序态射 $(a_1,b_1) \leq (a_2,b_2) \;\Rightarrow\; (f(a_1),f(b_1)) \leq (f(a_2),f(b_2))$．在以上变换下，开区间的端点都会相应变化．然而拓扑结构体现的包含偏序不变，这体现了拓扑是比度量更为基础的几何结构．接下来在集合范畴上构造拓扑结构．

拓扑结构 前面关于集族、偏序集、单纯形的讨论，涉及到在集合 X 的幂集 2^X 中选取子集族 $\xi \subset 2^X$ 的问题. 对子集族赋予一些条件，满足集合运算下的一些封闭性，就可以产生各种代数结构. 拓扑结构是其中一类重要的代数结构，其构造依赖于对开子集族的选取. 赋予了拓扑结构的集合构成拓扑空间，这是从集合到几何最重要的过渡.

定义 0.0.1. 拓扑空间

令 $\xi \subseteq 2^X$ 为子集族，若满足以下公理:

1. $\varnothing \in \xi$ 且 $X \in \xi$
2. ξ 中子集的任意并属于 ξ
3. ξ 中子集的有限交属于 ξ

称 (X, ξ) 为**拓扑空间 (topological space)**，称 ξ 为**拓扑 (topology)**结构，称 ξ 中的成员为**开集 (open set)**.

集合 X 的幂集 2^X 中，按照偏序关系产生最小的空集 $\varnothing$ 和最大的全集 X，这样构成了 X 上的拓扑空间的两个极端:

定义 0.0.2. 平凡拓扑与离散拓扑

X 的子集族 $\xi_1 = \{\varnothing, X\}$ 构成拓扑空间，称为**平凡拓扑 (trivial topology)**.
X 的子集族 $\xi_2 = 2^X$ 构成拓扑空间，称为**离散拓扑 (discrete topology)**.
在同一个集合上构造拓扑结构，平凡拓扑相当于最粗粒度的拓扑结构，离散拓扑相当于最细粒度的拓扑结构. 实际选择拓扑结构则根据具体问题的需要，介于平凡拓扑 ξ_1 和离散拓扑 ξ_2 这两个极端之间.

例 0.0.1. 有限集的拓扑空间

令 $X = \{a, b, c\}$ 为有限集，幂集为:

$$2^X = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8\} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, X\}$$

按照子集的包含关系，这里省略了可以通过复合构造的偏序:

$$\begin{tikzcd}
& s_2 = \{a\} \arrow[r] \arrow[ddr] & s_5 = \{a,b\} \arrow[dr] & \\
s_1 = \varnothing \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & s_3 = \{b\} \arrow[ur] \arrow[r] & s_6 = \{b,c\} \arrow[r] & s_8 = X = \{a,b,c\} \\
& s_4 = \{c\} \arrow[ur] \arrow[r] & s_7 = \{c,a\} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

集合 X 的元素为 $|X| = 3$ 个，幂集 2^X 的元素为 $|2^X| = 2^3 = 8$ 个，幂集 2^X 的幂集 2^{2^X} 的元素为 $|2^{2^X}| = 2^8 = 256$ 个，其中满足拓扑空间定义要求的构成拓扑. 可见集合上可以构造的拓扑可能是很多的.

例 0.0.2. Euclide 拓扑

实数轴 $\mathbb{R} \in \mathbf{Set}$ 是集合，现在给它构造拓扑. 将实数轴上开区间的全体记为 $B = \{B_i = (a_i, b_i) \mid a_i < b_i\}_{i \in I}$. B 中成员的有限非空交集是开区间或者空集，于是 B 构成了一个拓扑基，关于拓扑基请参考拓扑学教程。赋予了 $\mathbb{R}$ 拓扑空间的结构，这是 $\mathbb{R}$ 上标准的 **Euclide 拓扑 (Euclidean topology)**.
上述的开区间 (a,b) 可以视为以 $(a+b)/2$ 为中心，以 $(b-a)/2$ 为半径的一维开球. 推广到 n-维 Euclide 空间，n-维开球的集合构成了 Euclide 拓扑基，以及相应的 Euclide 拓扑. 开球的构造依赖于 Euclide 空间的度量，因此这种拓扑是度量拓扑.

拓扑空间 $(X, \xi) \in \mathbf{Top}$ 的拓扑结构 $\xi \subseteq 2^X$ 可以进行范畴化研究，ξ 是开子集族，开子集之间的包含关系 $V \subseteq U$ 定义了一个偏序 $\rho_V^U : V \xrightarrow{\leq} U$，这样构成一个偏序集范畴 $(\xi, \leq)$，称为 X 上的**开集范畴 (category of open sets)**。

连续性 过去讨论了集合范畴 **Set** 上反变的幂集函子. $f \in \mathbf{Set}[X,Y]$ 作为集合上的映射，在幂集函子下转为用 $f^{-1}[2^Y, 2^X]$ 求原像. 如果赋予了集合拓扑结构，构成拓扑空间 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$，那么 $\mathcal{O}_X \subseteq 2^X$ 和 $\mathcal{O}_Y \subseteq 2^Y$ 是作为幂集的子集存在，限制在拓扑结构中讨论 $f^{-1}[\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X]$，此时 f^{-1} 不一定存在了.

若对于任意开集 $B \in \mathcal{O}_Y \subseteq 2^Y$，原像 $f^{-1}(B) \in \mathcal{O}_X \subseteq 2^X$ 都是开集，即原像处于拓扑结构 $\mathcal{O}_X$ 中，那么幂集函子的结构就可以完整在拓扑空间中得到继承.

定义 0.0.3. 连续性：拓扑式定义

令 $(X, \mathcal{O}_X)$ 和 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ 为拓扑空间，集合间的映射 $f : X \to Y$ 称为**连续 (continuous)**的，如果 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ 中的任意开集 $\forall V \in \mathcal{O}_Y$，其原像 $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ 是 $(X, \mathcal{O}_X)$ 中的开集.

分析学的基础是函数的连续性，而连续性本质上是拓扑概念. 以数学分析最基本的一元实函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为例：

定义 0.0.4. 连续性：序列式定义

若序列收敛则函数收敛：

$$\{x_n \in \mathbb{R}\} \longrightarrow x_0 \implies \{f(x_n) \in \mathbb{R}\} \longrightarrow f(x_0)$$

称 f 在 x_0 处连续.

定义 0.0.5. 连续性：$\varepsilon - \delta$ 语言

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得：

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

称 f 在 x_0 处连续.

以上两种定义都蕴含了 $\mathbb{R}$ 中内在的 Euclide 度量．前面讨论了 $\mathbb{R}$ 上构造一个连续的单满自映射，改变了度量却不会改变拓扑性质．连续性本质是拓扑性质，不需要度量这样的附加结构，因而用开集的原像来定义才是最本质的．下图体现出继承于幂集函子的反变性质：

$$
\begin{tikzcd}
U \subseteq (X, \mathcal{O}_X) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "f"] & U = f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X \subseteq 2^X \\
V = f(U) \subseteq (Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[r, Rightarrow] & V \in \mathcal{O}_Y \subseteq 2^Y \arrow[u, "f^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

易于验证，恒等映射是连续映射，两个首尾相连的连续映射的复合是连续映射，多个连续映射的复合满足结合率，于是连续映射满足范畴中对态射的要求．以拓扑空间为对象，以连续映射为态射，构成**拓扑空间范畴 (category of topological spaces)**，记为 **Top**.

在连续性的定义中，映射的方向与幂集函子中的原像相同，从拓扑空间得到其开集偏序范畴的过程，用开集函子表示为：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O} : \mathbf{Top}^{\mathrm{op}} &\to \mathbf{Poset} \\
(X, \xi) &\mapsto \mathcal{O}_X = (\xi, \leq) \\
(Y, \upsilon) &\mapsto \mathcal{O}_Y = (\upsilon, \leq) \\
\mathbf{Set}((X, \xi), (Y, \upsilon)) &\to \mathbf{Poset}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) \\
f &\mapsto \mathcal{O}_f \\
\mathcal{O}_f : \mathcal{O}_Y &\to \mathcal{O}_X \\
V &\mapsto f^*(V) = f^{-1}(V) = \mathrm{preim}_f(V)
\end{aligned}
\tag{0.0.1}
$$

定义 0.0.6. 同胚

拓扑空间 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y) \in \mathbf{Top}$ 之间有集合映射 $f \in \mathbf{Set}[X, Y]$，若 f 是连续双射且 f 及其逆 f^{-1} 都是连续的，称 f 是**同胚 (homeomorphism)**.

显然同胚构成了拓扑空间范畴中的等价，拓扑空间的一个基本问题是研究同胚等价类.

例 0.0.3.

平面直角坐标系上，x-轴和 y-轴在 Euclide 度量拓扑下同胚，同胚的函数例如：

$$y = f(x) = 3 + 5x^3$$

例 0.0.4.

实数轴上的有限开区间之间显然同胚，正切函数：

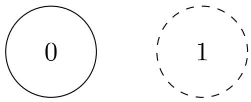
$$f(x) = \tan x$$

构成了 $f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ 的同胚.

Sierpiński 空间　在两点集 $S = \{0,1\}$ 上，除了平凡拓扑和离散拓扑外，只有两种拓扑

$$\tau_0 = \{\varnothing, \{0\}, S\}, \quad \tau_1 = \{\varnothing, \{1\}, S\}$$

二者同构，取拓扑空间 $(S, \mathcal{O}_S) = (S, \tau_1)$ 称为 **Sierpiński 空间 (Sierpiński space)**. 对应开集，S 的所有闭集为 $\{\varnothing, \{0\}, S\}$. 因而 S 包含的单点集 $\{1\}$ 和 $\{0\}$ 分别为开集和闭集.



拓扑 τ_1 按照开集包含偏序构成全序集：

$$s_1 = \varnothing \longrightarrow s_2 = \{1\} \longrightarrow s_3 = X = \{0,1\}$$

拓扑中的子集标记为：

$$\tau_1 = \{s_1, s_2, s_3\} = \{\varnothing, \{1\}, S\}$$

前面用二值集合 $\Omega = \{0,1\}$ 讨论了子集和**特征函数 (characteristic function)**的对应关系，从而用反变 Hom 函子 h_Ω 构造了幂集函子.

拓扑结构是幂集的子集，前面我们用幂集函子的研究方式讨论了连续性，现在继续用幂集函子的研究方式讨论类似于特征函数的连续函数. 在拓扑空间范畴 **Top** 中，对应着二值集 Ω 的就是两点 Sierpiński 空间 S. 令 $(X, \mathcal{O}_X) \in$ **Top** 为拓扑空间，讨论拓扑空间范畴中的态射集 $\mathbf{Top}(X, S)$，它的形式类似于特征函数，但要求是连续函数：

$$\chi_U : X \to S$$

$$x \mapsto \chi_U(x) = \begin{cases} \{1\} & x \in U \\ \{0\} & x \notin U \end{cases}$$

在 Sierpiński 拓扑中 $\{1\}$ 不仅作为点存在，还是唯一的单点开集. 若 χ_U 为连续函数，则开集 $\{1\}$ 在 χ_U 下的原像 $U = \chi_U^{-1}(\{1\}) \in \xi$ 是开集. 类似于特征函数，这里建立了开集 U 和连续函数 $\chi_U \in \mathbf{Top}[(X, \mathcal{O}_X), S]$ 的一一对应：

$$h_S(X, S) = \mathbf{Top}((X, \mathcal{O}_X), S) \simeq \mathcal{O}_X$$

在同构的意义下二者相等：

$$\begin{aligned}
h_S : \mathbf{Top}^{\mathrm{op}} &\to \mathbf{Set} \\
(X, \mathcal{O}_X) &\mapsto h_S X = \mathbf{Top}((X, \mathcal{O}_X), S) = \mathcal{O}_X \\
(Y, \mathcal{O}_Y) &\mapsto h_S Y = \mathbf{Top}((Y, \mathcal{O}_Y), S) = \mathcal{O}_Y \\
\mathbf{Top}(X, Y) &\to \mathbf{Set}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) \\
f &\mapsto f^* \\
f^* : \mathcal{O}_Y &\to \mathcal{O}_X \\
V &\mapsto f^*(V) = \mathrm{preim}_f(V)
\end{aligned} \tag{0.0.2}$$

道路　同伦理论起源于拓扑学，它成为范畴论发展的一个主要推动力量. 同伦上的问题往往可以转变为范畴中更加抽象的问题，反过来范畴论的发展又发展出了更多同伦的理论.

比**连通 (connected)**更强的条件是**道路连通 (path connected)**. 拓扑学通常用单位闭区间 $I = [0, 1]$ 上的连续参数曲线构造包含端点的**道路 (path)**：

$$\begin{aligned}
\gamma : I = [0, 1] &\to X \\
t &\mapsto \gamma(t)
\end{aligned} \tag{0.0.3}$$

这里单位闭区间作为拓扑空间 $I \in \mathbf{Top}$，它的连续性依据实的度量拓扑. 区分以下两个概念：

1. 连续参数曲线：拓扑空间范畴中的态射 $\gamma \in \mathbf{Top}[I, X]$

2. 道路：拓扑空间 $I \in \mathbf{Top}$ 在连续参数曲线下的像 $\gamma(I) \subseteq X$ [1].

许多文献要求道路不相交，我们不作要求，因可以用道路 $\gamma(I)$ 中的不交并 $\sqcup_t(t, \gamma(t))$ 避免交点的问题，在这样的意义下，单位闭区间 I 和道路 $\gamma(I)$ 是同胚的.

给定两条参数曲线 $\alpha, \beta : I \to X$，若满足 $\alpha(1) = \beta(0)$ 则道路 $\alpha(I)$ 和 $\beta(I)$ 首尾相接生成一条 $\alpha(0) \to \beta(1)$ 的道路，可以用如下参数曲线产生：

$$\begin{aligned}
\gamma : I &\to X \\
t &\mapsto \gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \le t \le 1/2 \\ \beta(2t-1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{0.0.4}$$

[1] 更方便的方式是把道路定义为连续参数曲线的等价类

如果拓扑空间 X 中任意两端点 $x_0, x_1 \in X$ 间存在道路 $\gamma(I)$ 使得 $\gamma(0) = x_0$，$\gamma(1) = x_1$，则称 X 为**道路连通 (path connected)**的. 进而可以讨论拓扑空间的划分之间的道路连通问题，把拓扑空间构造为道路连通的等价类 $X/\sim$，即道路连通分支的集合.

当然也可以考虑给定两点间是否具有道路连通的关系，这是一个等价关系：

1. 自反性：对 $\forall x \in X, \exists 1_x : I \to X$ 使得 $\forall t \in I : 1_x(t) = x$.

2. 对称性：参数曲线 $\forall\gamma$ 若满足 $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$ 则构成 $x_0 \to x_1$ 的道路 $\gamma(I)$，则 $\gamma(1-t)$ 构成 $x_1 \to x_0$ 的道路 $\gamma(I)$.

3. 传递性：按照 (0.0.4) 式可以连接道路.

用连续参数曲线 $\gamma \in \mathbf{Top}[I, X]$ 生成 X 中的道路 $\gamma(I)$，便建立了道路端点 $x_0 = \gamma(0)$ 和 $x_1 = \gamma(1)$ 之间的道路连通等价关系. 连接 $x_0 \to x_1$ 的连续参数曲线的集合记为

$$\Gamma(x_0, x_1) = \{\gamma \in \mathbf{Top}[I, X] \mid \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\} \tag{0.0.5}$$

单位闭区间 $I = [0, 1]$ 在这些连续参数曲线下的像构成 X 上 $x_0 \to x_1$ 的道路集合，或者说当连续参数曲线具有相同的像则视为等价，道路集合就构成连续参数曲线的等价类：

$$\mathrm{Path}(x_0, x_1) = \{\gamma(I) \mid \gamma \in \Gamma(x_0, x_1)\} = \Gamma(x_0, x_1)/\sim \tag{0.0.6}$$

拓扑空间点范畴 道路连通问题可以进一步用范畴的方法讨论. 以拓扑空间的点 $x \in X$ 为对象，以 $x_0 \to x_1$ 的道路为态射构造范畴 $\mathbf{Top}(X)$，即 $\mathbf{Top}(X)(x_0, x_1) = \mathrm{Path}(x_0, x_1)$. 道路作为一个等价关系使得这种构造方法满足范畴定义的要求，两条首尾相接的道路按照 (0.0.4) 式合成，构成态射的复合运算.

过去讨论了集合范畴 $\mathbf{Set}$ 的态射复合结合律问题，复合态射要求对象首尾相连：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend left=50, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] \arrow[rrr, bend right=50, "h\circ(g\circ f)"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h\circ g"] & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

在列范畴 $\mathbf{Col}_{\mathbb{R}}$ 中给出了相似的结构，列范畴中态射复合的首尾相接，体现为矩阵乘法维度的约束：

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
A=\mathbb{R}_a \arrow[r, "f\in\mathbf{Col}_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}_a,\mathbb{R}_b]=\mathbb{R}_b^a"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f\in\mathbf{Col}_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}_a,\mathbb{R}_c]=\mathbb{R}_c^a"'] \arrow[rrr, bend left=50, "(h\circ g)\circ f\in\mathbf{Col}_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}_a,\mathbb{R}_d]=\mathbb{R}_d^a"] \arrow[rrr, bend right=50, "h\circ(g\circ f)\in\mathbf{Col}_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}_a,\mathbb{R}_d]=\mathbb{R}_d^a"'] & B=\mathbb{R}_b \arrow[r, "g\in\mathbf{Col}_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}_b,\mathbb{R}_c]=\mathbb{R}_c^b"] \arrow[rr, bend left, "h\circ g\in\mathbf{Col}_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}_b,\mathbb{R}_d]=\mathbb{R}_d^b"] & C=\mathbb{R}_c \arrow[r, "h\in\mathbf{Col}_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}_c,\mathbb{R}_d]=\mathbb{R}_d^c"] & D=\mathbb{R}_d
\end{tikzcd}
$$

现在可以在 $\mathbf{Top}(X)$ 范畴上，用类似于以上两例的方式讨论态射复合问题，态射的复合就是道路的复合：

$$
\begin{tikzcd}
x_0 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] \arrow[rrr, bend left=50, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[rrr, bend right=50, "h\circ(g\circ f)"'] & x_1 \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h\circ g"] & x_2 \arrow[r, "h"] & x_3
\end{tikzcd}
$$

集合范畴、列空间范畴、拓扑空间这三种相差甚远的数学结构中共有的复合律，在范畴论中得到了统一．相比于集合范畴 $\mathbf{Set}$、列空间范畴 $\mathbf{Col}_{\mathbb{R}}$ 等，$\mathbf{Top}(X)$ 范畴的特点是所有态射都是等价关系，于是这里构成了群胚的结构．

接下来讲讨论 $\mathbf{Top}(X)$ 范畴中各阶同伦的概念，由于范畴论的抽象能力，$\mathbf{Top}(X)$ 范畴中同伦的概念可以自然推广到一般的范畴上，得到拓扑学以外的广泛的应用．

同伦　按照 $\mathbf{Top}(X)$ 范畴的设定，$\mathbf{Top}(X)(x_0,x_1)=\mathrm{Path}(x_0,x_1)$，根据 (0.0.5) 和 (0.0.6)，两点的道路连通等价关系表述为

$$\Gamma(x_0,x_1)\neq\varnothing \iff \mathrm{Path}(x_0,x_1)\neq\varnothing \iff x_0\sim x_1$$

同伦理论的强大之处在于可以无限提升这种等价关系的阶数．点 $x_0,x_1\in X$ 视为 0-维边界，把道路视为 0-维的边界的连续形变，这是 0-同伦，它由连续参数曲线构造．若 0-同伦

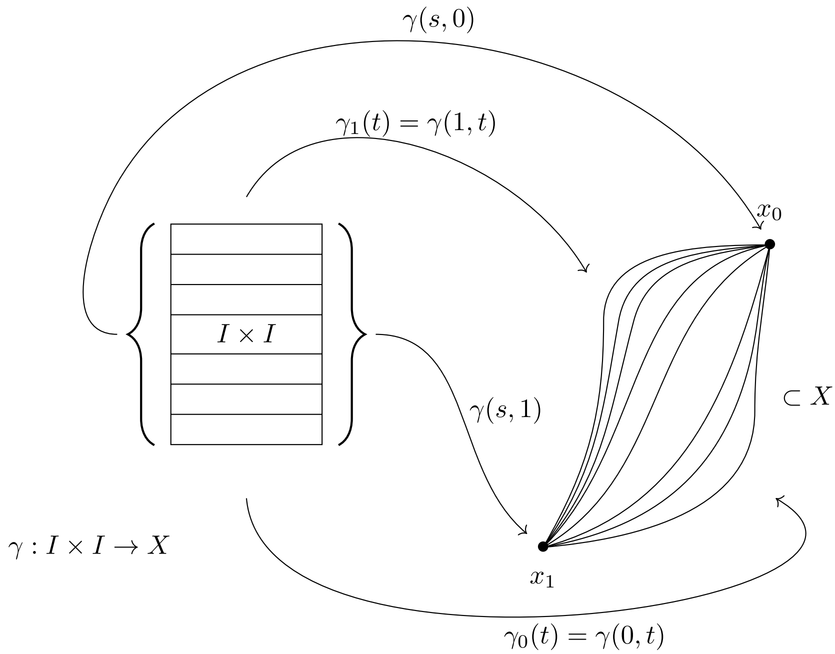
成立，进而可以考虑两条道路之间的连续形变．取任意两个连续参数曲线 $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma(x_0, x_1)$，不仅考虑曲线运动的参数 $t \in I$，也考虑两个曲线之间的形变参数 $s \in I$，若存在两变量的连续映射:

$$\begin{aligned} \gamma : I \times I &\to X \\ (s,t) &\mapsto \gamma(s,t) = \gamma(s)(t) \end{aligned} \tag{0.0.7}$$

这样构成一个 2 参数的连续曲面，且以连续参数曲线作为 1-维边界:

$$\gamma(0,t) = \gamma(0)(t) = \gamma_0(t), \quad \gamma(1,t) = \gamma(1)(t) = \gamma_1(t)$$

称为 1-同伦，也就是通常意义下的**同伦 (homotopy)**.



正如道路连通和 0-同伦是通过 0-维点 $x_0 \to x_1$ 的连续参数曲线的存在性来定义的，1-同伦也是通过如上连续映射 γ 的存在性定义．对于 $\forall \gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma(x_0, x_1)$，易于证明同伦 $\gamma_0 \sim \gamma_1$ 是等价关系，称等价类 $\Gamma(x_0, x_1)/\sim$ 为 $x_0 \to x_1$ 的 1-**同伦类 (homotopic class)**:

$$\gamma_0 \sim \gamma_1 \iff [\gamma_0] = [\gamma_1] \in \Gamma(x_0, x_1)/\sim$$

在同伦等价类中，形变参数 $s \in I$ 的作用被商掉了，任何一个形变 s 下的参数曲线 $\gamma_s(t) = \gamma(s,t)$ 都是同伦等价类的代表.

下面的例子说明，1-同伦类可以区分同样连通，但具有不同拓扑性质的拓扑空间.

例 0.0.5. 去原点的平面

将实平面去掉原点得到拓扑空间 $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$，令 $x_0 = (1,0), x_1 = (-1,0)$，显然两点是道路连通的，$X$ 也是连通的．从道路连通角度，X 和实平面 $\mathbb{R}^2$ 的拓扑性质相同．进而考虑连接两点的连续参数曲线集合：

$$\Gamma(x_0, x_1) = \{\gamma \in \mathbf{Top}[I, X] \mid \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\}$$

其中 $x_0 \to x_1$ 的连续参数曲线，按照在 X 上形成的道路可分为若干类：

- 从 x_0 向左，从上方绕过原点，继续向左到 x_1
- 从 x_0 向左，从下方绕过原点，继续向左到 x_1
- 从 x_0 逆时针绕原点 1 周，再向左，从上方绕过原点，继续向左到 x_1
- 从 x_0 顺时针绕原点 1 周，再向左，从下方绕过原点，继续向左到 x_1
- 从 x_0 逆时针绕原点 2 周，再向左，从上方绕过原点，继续向左到 x_1
- 从 x_0 顺时针绕原点 2 周，再向左，从下方绕过原点，继续向左到 x_1
- ... ...

同类的参数曲线形成的道路之间可以连续形变，不同类的参数曲线形成的道路之间不能连续形变．作为对比，实平面 $\mathbb{R}^2$ 上任意两点间都只有唯一一类连续参数曲线．

类似于 $\mathbf{Top}(X)$ 范畴，以拓扑空间 X 中的点为对象，而态射为道路的同伦等价类，这样构成的范畴为同伦范畴，记为 $\mathbf{Htpy}(X)$．