集智学园范畴论讲义 v1.7.0809

第一季第 4 课：Abel 群范畴 Abel 群对于交换性的概括，构成环、域、模、线性空间乃至加性范畴、Abel 范畴的基础。我们的课程以线性代数贯穿范畴论学习的始终，本质上也是因为线性代数中向量加法的 Abel 群结构。本节课专门用范畴的语言来讨论代数中的 Abel 群，Abel 群范畴以 Abel 群作为对象，以 Abel 群之间的群同态为态射。

我们在回顾 Abel 群的概念时，以整数群为例说明。整数不仅可以作为整数集合中的元素，也可以在整数乘法的意义下，构成整数群到自身的群自同态。以整数群为例子，我们比较了集合范畴中的映射，以及 Abel 群范畴中群同态，这两种范畴中的态射之间的区别。在群范畴乃至 Abel 群范畴中，态射是群同态，这种态射可以保持群对象的结构，反映在整数群上就是乘法和加法的分配律。

进一步关注整数群和整数群的自态射之间的关系，提升这里出现了环的结构。我们揭示出描述整数群的自态射的正是整数的乘法。第一节课谈到，范畴中的对象上的自态射集具有幺半群的构造。整数群作为 Abel 群中的对象，其自态射集的幺半群运算，正好对应了整数的乘法，并且符合封闭性和结合律，而幺元就是整数 1。我们从小学习的整数乘法，只是范畴中自态射复合的简写。

对象的自态射按照复合率构成幺半群，这是范畴的定义中已经表明的性质。研究 Abel 群范畴的重要性在于，这个范畴中的态射还具有可加性。这种可加性构成了范畴论中一大类类似于 Abel 群或者线性空间的范畴，产生了丰富的研究成果。

态射是否可加不是显然的。我们将揭示一般的群上并没有可加性，只有 Abel 群能保证态射的加法。进一步 Abel 群范畴中的态射集，自身拥有了 Abel 群的结构，这是最基础的对偶性的体现。Abel 群范畴的这种良好的性质，可以扩展到以 Abel 群为基础的线性空间范畴中。

对于 Abel 群范畴的自态射集，它一方面按照复合率构成幺半群，另一方面按照加法又有可加性构成 Abel 群，这两种性质的结合就引入了环的概念。而环是后继讨论更多范畴，特别是模范畴的基础。

最后我们继续用整数群的例子，讲解如何像分解整数一样地去分解态射。态射的因子分解在将来讨论范畴的泛性质时是基本的定义方式。

整数 Abel 群 $\mathbb{Z}$ 整数在加法下构成 Abel 群 $\mathbb{Z}=(\mathbb{Z},+,0)\in\mathbf{Ab}$，固定的整数 $n\in\mathbb{Z}$ 以乘法的方式作用于 $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\varphi_n:\mathbb{Z}&\to\mathbb{Z}\\ z&\mapsto\varphi_n(z)=n\cdot z=z\cdot n\end{aligned}$$

对于 $\forall z_1,z_2\in\mathbb{Z}$:

$$\varphi_n(z_1+z_2)=n\cdot(z_1+z_2)=n\cdot z_1+n\cdot z_2=\varphi_n(z_1)+\varphi_n(z_2)$$

于是 φ_n 成为 $\mathbb{Z}$ 上的群自同态，即在 Abel 群范畴 $\mathbf{Ab}$ 中 $\varphi_n\in\mathrm{End}(\mathbb{Z})$. 乘法对加法的**分配率 (distributivity)**正是群同态对群运算保持的结果.

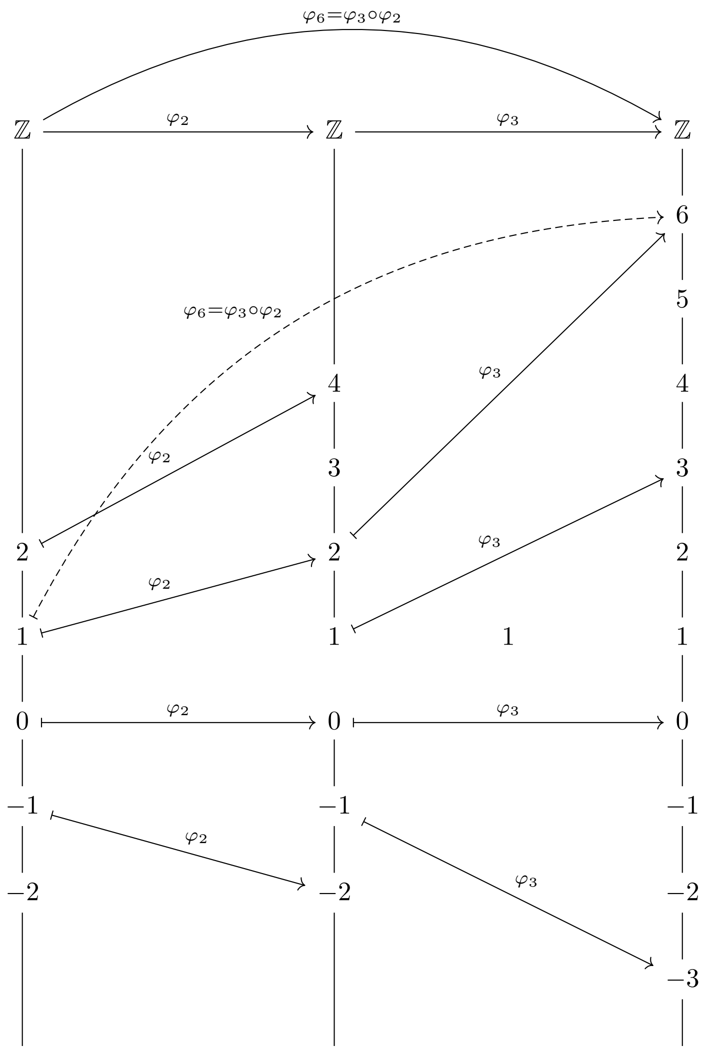
进一步取两个整数 $n_1,n_2\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\varphi_{n_1+n_2}:\mathbb{Z}&\to\mathbb{Z}\\ z&\mapsto\varphi_{n_1+n_2}(z)=(n_1+n_2)\cdot z=n_1\cdot z+n_2\cdot z=\varphi_{n_1}(z)+\varphi_{n_2}(z)\end{aligned}$$

显然 $\varphi_{n_1+n_2} \in \mathrm{End}(\mathbb{Z})$ 也是群同态，即 **Ab** 中的态射．进而考虑态射的复合：

$$
\begin{aligned}
\varphi_{mn} : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}_n \\
z &\mapsto \varphi_{mn}(z) = (mn) \cdot z = m(n \cdot z) \\
&= \varphi_m(\varphi_n(z)) = (\varphi_m \varphi_n)(z)
\end{aligned}
$$

注意到整数的乘法对应了群同态的复合，且当 $m = 1$ 时，φ_m 正是恒等自同态。当 $m = 0$ 时，φ_m 正是退化到零的自同态。当 $n = 1$ 时类似。下图描述了 $\mathbb{Z}$ 的自态射的复合规律，虚线的 $\varphi_6 = \varphi_3 \circ \varphi_2$ 相当于 $6 = 3 \times 2$：



态射的可加性 注意到整数的加法 n_1+n_2 对应了群自同态的加法 $\varphi_{n_1}+\varphi_{n_2}$，启发我们讨论 Abel 群同态的集合中蕴含的类似于 Abel 群的结构.

先从不具有代数运算的集合范畴 **Set** 开始，取任意映射 $\forall f_1, f_2 \in \mathbf{Set}(X,Y)$ 可以定义映射的加法

$$\begin{aligned}(f_1+f_2): X &\to Y \\ x &\mapsto (f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x)\end{aligned}$$

对于任意 $\forall x_1, x_2 \in X$ 有:

$$(f_1+f_2)(x_1+x_2) = f_1(x_1+x_2)+f_2(x_1+x_2)$$

限制在群范畴 **Grp** 中，令 $f_1, f_2 \in \mathbf{Set}(X,Y)$ 为群同态:

$$(f_1+f_2)(x_1+x_2) = f_1(x_1+x_2)+f_2(x_1+x_2) = f_1(x_1)+f_1(x_2)+f_2(x_1)+f_2(x_2)$$

自然希望 f_1+f_2 也是群同态，即满足:

$$\begin{aligned}(f_1+f_2)(x_1+x_2) &= f_1(x_1+x_2)+f_2(x_1+x_2) \\ &= f_1(x_1)+f_1(x_2)+f_2(x_1)+f_2(x_2) \\ &= f_1(x_1)+f_2(x_1)+f_1(x_2)+f_2(x_2) \\ &= (f_1+f_2)(x_1)+(f_1+f_2)(x_2)\end{aligned}$$

上式的第二和第三行之间的相等关系要求加法的可交换性，这要求限制在 Abel 群范畴 **Ab** 中讨论.

以上证明了在 **Ab** 中 $f_1+f_2 \in \mathbf{Ab}(X,Y)$.

进而定义零映射 $\varphi_0: X \to Y$ 的作用为把 X 中的任意元映射到 Y 中的幺元:

$$\varphi_0(x) = 0$$

显然对于任意 $x, y \in X$ 有

$$\varphi_0(x+y) = 0 = \varphi_0(x)+\varphi_0(y)$$

故零映射 $0_X \in \mathbf{Ab}(X,Y)$ 是一个 Abel 群同态. 于是，我们证明了 Abel 群的自态射集也是 Abel 群:

$$\mathbf{Ab}(X,Y) \in \mathbf{Ab}$$

定义 0.0.1. 闭范畴

一个范畴 $\mathcal{C}$ 中的任意态射集 $\mathrm{Hom}(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y) \in \mathcal{C}$ 也构成这个范畴的对象，这样的范畴称为**闭范畴 (closed category)**，闭范畴中的态射集也称为**内态射对象 (internal hom-object)**，记为 $\mathcal{C}[X, Y] = \mathrm{Hom}(X, Y) \in \mathcal{C}$。[a]

[a]方括号体现了闭的特点

Abel 群范畴是典型的闭范畴，类似的有线性空间范畴等。

自态射环 考虑一般的 Abel 群 $X \in \mathbf{Ab}$，它的自态射集构成一个 Abel 群：

$$\mathrm{End}(X) = (\mathrm{End}(X), +, \varphi_0) = \mathbf{Ab}(X, X) \in \mathbf{Ab}$$

在前面的例子中，整数集 $\mathbb{Z}$ 上的乘法反应了群同态的复合。根据范畴的定义，$\mathrm{End}(X) = (\mathrm{End}(X), \circ, 1_X)$ 在自同态的复合运算下，以恒同映射为幺元，构成了一个幺半群.

Abel 群和幺半群的复合结构使得 $\mathrm{End}(X) = (\mathrm{End}(X), +, \varphi_0, \circ, 1_X)$ 它构成一个环，称为**自态射环 (endomorphism ring)**。

例 0.0.2. 矩阵环

$\mathbb{R}$-列空间在列向量加法下构成 Abel 群，$\mathbb{R}$-列空间范畴 $\mathbf{Col}_{\mathbb{R}}$ 是 $\mathbf{Ab}$ 的子范畴。$\mathbf{Col}_{\mathbb{R}}$ 中的自态射是方矩阵的集合：

$$\mathrm{End}(\mathbb{R}_n) = \mathbf{Col}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_n, \mathbb{R}_n) = \mathbb{R}_n^n \tag{0.0.1}$$

这样的自态射环称为 R-**矩阵环 matrix ring**。后面常会讨论这个环上的模的性质，为了强调环的属性，常用德文花体字记 $\mathfrak{n} = \mathbb{R}_n^n$.

中介态射 从整数的因子分解角度可以方便理解态射的分解问题。整数环及其自同态环同构：

$$\mathbb{Z} \simeq \mathrm{End}(\mathbb{Z})$$

整数的乘法视为自同态的复合。以以下两个因子分解为例：

$$12 = mp = 4 \times 3, \quad 21 = mp = 7 \times 3$$

它们有共同的因子 $m = 3$，因子分解具有 $n = hm$ 的形式。整数视为自同态时则记为：

$$f_{12} = f_4 \circ f_3, \quad f_{21} = f_7 \circ f_3$$

它们有共同的因子 $f_m = f_3$，因子分解具有 $f_n = f_h \circ f_m$ 的形式。

$$\begin{tikzcd}
60\mathbb{Z} & 15\mathbb{Z} \arrow[l, dashed, "\exists! f_4"'] \arrow[r, dashed, "\exists! f_7"] & 105\mathbb{Z} \\
& 5\mathbb{Z} \arrow[ul, "f_{12}=f_{4\times 3}=f_3\circ f_4"] \arrow[u, "f_3"'] \arrow[ur, "f_{21}=f_{7\times 3}=f_3\circ f_7"'] &
\end{tikzcd}$$

上图以整数 5 生成的理想 $5\mathbb{Z} = \{5x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ 为例，它是可被 5 整除的整数的集合。对于 $\forall 5x \in 5\mathbb{Z}$,

$$
\begin{aligned}
f_{12} : 5\mathbb{Z} &\to 60\mathbb{Z} & \qquad f_{12} : 5\mathbb{Z} &\to 105\mathbb{Z} \\
5x &\mapsto f_{12}(5x) = 60x & \qquad 5x &\mapsto f_{21}(5x) = 105x
\end{aligned}
$$

这两个态射均包含 $f_3 : 5\mathbb{Z} \to 15\mathbb{Z}$，相应的 $\exists! f_4 : 15\mathbb{Z} \to 60\mathbb{Z}$ 和 $\exists! f_7 : 15\mathbb{Z} \to 105\mathbb{Z}$ 构成复合的因子。

因子分解问题也可以反过来讨论，若有整除关系 $m|n$，则 $\exists h$ 使得 $n = hm$。可以构造满态射:

$$
\begin{gathered}
f_h : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/hm\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\
[x]_n = [x]_{hm} \mapsto [x]_m
\end{gathered}
$$

例如 $m = 3, n = 12, h = 4$ 时，$12 = 4 \times 3$，有:

$$
\begin{gathered}
f_4 : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\
[x]_{12} = [x]_{4\times 3} \mapsto [x]_3
\end{gathered}
$$

以固定整数为因子可以讨论整数分解问题，仍以以上因子分解为例:

$$12 = mp = 4 \times 3, \quad 21 = mp = 7 \times 3$$

它们有共同的因子 $m = 3$，因子分解具有 $n = hm$ 的形式。

下图给出了态射的复合方式:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \arrow[r, dashed, "\exists! f_4"] \arrow[dr, "f_{12}=f_{4\times 3}=f_3\circ f_4"'] & \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \arrow[d, "f_3"] & \mathbb{Z}/105\mathbb{Z} \arrow[l, dashed, "\exists! f_7"'] \arrow[dl, "f_{21}=f_{7\times 3}=f_3\circ f_7"] \\
& \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} &
\end{tikzcd}
$$

如上把整数的分解转化为了态射的分解。固定的 $p = 3$ 对应了固定的态射 f_3，有态射 $f_{12} : \mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ 和 $f_{21} : \mathbb{Z}/105\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$，则要求存在唯一的态射 $f_4 : \mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ 和 $f_7 : \mathbb{Z}/105\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$。按照范畴论的惯例，存在唯一的态射用虚线标记。

范畴论中经常要求存在唯一的态射，连接某种特定的对象，这种对象往往是一个**泛性质 (universal property)**。这种存在唯一的态射也称为**中介态射 (mediating morphism)**。

数论中关注整数的分解，以及不可分解的素数问题。在范畴中对态射的可分解的研究，也体现了类似于素数的“不可分解的”基本性质。