集智学园范畴论讲义 v1.7.0811

第一季第 11 课:自由函子 计算机理论中基础的形式语言建立在字符串的基础上。字母表是有限集合,通过有限生成的方式产生了字符串的集合,这是最基础的生成,它构成了从集合范畴到集合范畴上的函子。字符串集合上的串接和空字符串,构成了幺半群的结构。

引入群中逆的运算,有限生成下产生了更丰富的结构,字符串成为了字。一般地从集合生成群的过程构成了自由群,这种构造是一种函子化的构造。以整数为系数,有限整数次的作用构成了自由 Abel 群。作为类比,熟知的是在线性代数中,通过线性组合的方式,以域系数来张成线性空间,这也是自由生成的实例。

为了更好理解自由构造过程,说明如何用态射的方式来替代集合论。集合范畴中,在单点集上构造集合映射,可以替代给定集合中的元素,从而用态射的方式来定义集合中的元素。这是从集合论到范畴论的一个思维转换。

不仅在集合范畴中可以用态射来替代元素,在赋予了更多代数结构的范畴中往往也可以。进一步用于群, 建立了群同态和群元的同构关系,从而可以用群范畴的态射来定义群元。

从群中遗忘掉群的结构,只留下无结构的集合,构成了遗忘函子。它和自由构造的方式相反,在范畴论中构成了一对基本的伴随函子。

自由幺半群 在集合上构造有限序列,可以产生幺半群的结构:

例 0.0.1. 形式语言

令 Σ 为不区分大小写的罗马字母表,字符串的集合 Σ^* 称为 Kleene 星 (Kleene star). 形如 ALPHA、APPLE、CAT 这样的字符串 (string),视为有限生成的序列. 且有空字符串是 Σ^* 中的元. 两个字符串 ALPHA 和 BET 可以串接为 ALPHABET,这种串接运算是满足结合率的二元 封闭运算。

例 0.0.2. 正整数

正整数在加法下构成幺半群 (\mathbb{N}^+ , +, 0). 从另一个角度看,任意正整数 $n \in \mathbb{N}^+$ 都可以用串表示:

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ times}}$$

定义 0.0.1. 自由幺半群

集合 X 上的由 X 的有限序列构成集合:

$$X^* = \{x_0 x_1 \cdots x_{n-1} \mid x_i \in X, \ n \in \mathbb{N}^+\}$$

定义二元运算:

$$X^* \times X^* \to X^*$$

 $(x_0x_1\cdots x_{m-1},y_0y_1\cdots y_{n-1})\mapsto x_0x_1\cdots x_{m-1}y_0y_1\cdots y_{n-1}$

称为**串接** (concatenation). X^* 在串接和空串下构成幺半群, 称为 X 上的自由幺半群 (free monoid).

自由群 通过幺半群可以在字母表 $S \in \mathbf{Set}$ 上构造字符串,字母表中的元称为**生成元** (generator)。群比幺半群多出了逆的结构,令字母表 S 有对应的逆字母表集合 $S^{-1} \in \mathbf{Set}$,于是可以讨论字母的逆元,并且构造比字符串更广的**字** (word)。

例 0.0.3. 字

字符串的构造过程中只有串接,串接过程中 $|x_0x_1\cdots x_{m-1}y_0y_1\cdots y_{n-1}|=|x_0x_1\cdots x_{m-1}|+|y_0y_1\cdots y_{n-1}|$,字符串的长度相应求和。引入群的结构后有了逆, $x^{-n}x^n$ 、 x^nx^{-n} 和空串可以建立等价关系,从而考虑等价类的结构。

令 $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$,相应记 $S = \{\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1}\}$, $\alpha^2 \beta^{-1} = \alpha \alpha \beta^{-1}$, $\gamma \alpha^2 \beta^{-1} = \gamma \alpha \alpha \beta^{-1}$, $\alpha \beta^{-1} \beta \gamma \alpha^2 \beta^{-1} = \alpha \gamma \alpha \alpha \beta^{-1}$ 都是 S 中的字。

以上构造过程体现出由集合生成群的过程,且生成的群包含了集合,集合以单射的方式嵌入生成的群。给定群 $G=(G,\cdot,1_G)$,将群元 g 的整数 n 次幂定义为整系数对群元的左乘作用 ng,并体现从 $\forall g\in G$ 诱导出的群同态 $\varphi_g\in h^{\mathbb{Z}}G=\mathbf{Grp}(\mathbb{Z},G)$:

$$\mathbb{Z} \times G \to G \qquad \varphi_g : \mathbb{Z} \to G \\
(n,g) \mapsto ng = \begin{cases}
g^n = \underbrace{g \cdot g \cdots g}, & n > 0 \\
|n| & \Longrightarrow & 0 \mapsto \varphi_g(n) = ng \\
g^n = 1_G, & n = 0 \\
g^n = \underbrace{g^{-1} \cdot g^{-1} \cdots g^{-1}}, & n < 0
\end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \mapsto \varphi_g(1) = g \\
-1 \mapsto \varphi_g(-1) = g^{-1}$$

这样可以对一组群元 $S \subseteq G$ 做整系数组合:

$$\sum n_i g_i = g_1^{n_1} \cdot g_2^{n_2} \cdots, \qquad n_i \in \mathbb{Z}, \quad g_i \in S$$

定义 0.0.2. 生成集

令群 G 有子集 S, S 中的有限个元素及其逆的组合构成 G 的子群, 称为 S 有限生成的群, 记为 $\langle S \rangle$ 。 若 $G = \langle S \rangle$ 则称 S 为群 G 的**生成集** (generating set)。

一个元素构成的生成集所生成的子群称为循环子群,若群由一个元素生成则称为**循环群 (cyclic group)**。

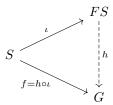
例 0.0.4. 实数加群

 $(\mathbb{R},+,0)$ 的阶是不可数无穷大,任何不可数阶的群都不能被有限生成。

考虑给定了集合 $S \in \mathbf{Set}$ 后,自由生成群即自由群 FS 和任意群 $G \in \mathbf{Grp}$ 的关系:

定义 0.0.3. 自由群

令 $\iota \in \mathbf{Set}(S, FS)$ 是集合范畴中从集合 S 到群 FS 的单的嵌入。对于任何集合范畴的态射 $\forall f \in \mathbf{Set}(S, G)$,存在唯一的群范畴的态射 $\exists ! h \in \mathbf{Grp}(FS, G)$,构成因子化 $f = h \circ \iota$,即使下图交换:



称 FS 是集合 S 生成的**自由群** (free group)。

单点集 一个元素 • 构成的集合 {•} 称为**单点集** (singleton set),集合范畴中所有单点集在同构的意义下相等,记为 $1 = \{\bullet\}$.集合的元素 $x \in X$ 和集合范畴的态射 $\varphi_x \in h^1X$ 在 $\varphi_x(\bullet) = x$ 的约束下有一一对应:

$$x \longleftrightarrow \varphi_x$$

在同构的意义下 $X=h^1X$,这是反变 Hom 函子的意义所在,而共变 Hom 函子则只存在唯一的态射,如下图:



集合没有附加代数结构,势相同的集合在集合范畴中同构:

$$X \simeq Y \Leftrightarrow |X| = |Y| \Leftrightarrow |h^1 X| = |h^1 Y|$$

范畴论关注态射 φ_x 超过关注元素 x, 复合映射 $f \circ \varphi_x \in \mathbf{Set}(1,Y)$ 相当于求值:

$$(f \circ \varphi_x)(\bullet) = f(x)$$

见下图

$$\bullet \in 1 \xrightarrow{\varphi_x} \varphi_x(\bullet) = x \in X \xrightarrow{f} (f \circ \varphi_x)(\bullet) = f(x) \in Y$$

综合以上讨论,有如下同构:

$$h^{1}X = X, \quad \mathbf{Set}(h^{1}X, h^{1}Y) = \mathbf{Set}(X, Y)$$
 (0.0.2)

可以直接把传统意义上集合中的元素定义为1:

定义 0.0.4. 集合中的元素

集合 $X \in \mathbf{Set}$ 中的元素是集合范畴中,单点集 $1 \in \mathbf{Set}$ 上的态射:

$$1 \to X$$

自由函子 从集合范畴的对象 S 生成群范畴的对象 FS 的过程视为自由函子 (free functor) F,它的方向与遗忘函子 (forgetful functor)正好相反,

上图构成了对偶结构²,由于 $\iota:S\to FS$ 是唯一的单的嵌入,群范畴中的态射 $h\in \mathbf{Grp}(FS,G)$ 和集合范畴中的态射 $f\in \mathbf{Set}(S,UG)$ 是一一对应的。

¹这是可表函子的体现

²伴随函子

例 0.0.5. 整数加群

整数加群 $\mathbb{Z}=(\mathbb{Z},+,0)\in\mathbf{Grp}$ 是 1 生成的循环群,即 $\mathbb{Z}=\langle 1\rangle$ 。根据 (0.0.1) 式,群元 $g\in G$ 和群范畴的态射 $\varphi_g\in h^{\mathbb{Z}}G$ 在 $\varphi_g(1)=g$ 的约束下有——对应:

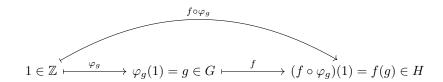
$$g \longleftrightarrow \varphi_g$$

在同构的意义下 $G = h^{\mathbb{Z}}G$ 。

 $\mathbb Z$ 在群范畴中的作用类似于单点集在集合范畴中的作用。范畴论关注群同态 φ_g 超过关注群元 g,复合映射 $f\circ\varphi_g\in\mathbf{Grp}(1,H)$ 相当于求值:

$$(f \circ \varphi_g)(1) = f(g)$$

见下图



综合以上讨论,有如下同构:

$$h^{\mathbb{Z}}G = G, \quad \mathbf{Set}(h^{\mathbb{Z}}G, h^{\mathbb{Z}}H) = \mathbf{Grp}(G, H)$$
 (0.0.4)

把传统意义上群中的元素定义为:

定义 0.0.5. 群元

群 $G \in \mathbf{Grp}$ 中的元是群范畴中, $\mathbb{Z} \in \mathbf{Grp}$ 上的态射:

$$\mathbb{Z} \to G$$