集智学园范畴论讲义 v1.7.0809

第一季第 12 课：从几何到代数——同调群的构造 作为前面课程的一个总结，本节课以极快的速度介绍了代数拓扑中的同调群。这节课在前面课程所介绍的知识基础上，强调几方面的思想：

1. 拓扑空间这样的几何对象，如何找到相应的代数范畴来描述，第 4、10 课相关
2. 正合这样的代数结构如何描述边界这样的几何问题，第 9 课相关
3. 同一个问题在集合范畴、Abel 群范畴、线性空间范畴的描述，第 4、5、11 课相关
4. 同样的拓扑性质，在不同的范畴中用不同的极限表述，第 8 课相关

首先介绍了如何用有限的点来表述简单的几何性质，通过单纯形和复形把拓扑空间代数化。边界这样的拓扑性质，在复形中可以用简单的定向边界的方式计算。边界没有边界，它反映为第 9 课的态射序列的结构，可以用正合的工具来研究复形的拓扑性质。

复形蕴含了拓扑信息，但研究复形并不方便。在集合范畴中表述的复形，虽然可以描述边界这样的拓扑概念，但单纯剖分的不确定性，很难得到稳定的拓扑不变量。由于函子可以把源范畴中的同构关系保持到目标范畴，在集合范畴研究的问题可以转到更好的范畴中。通过第 11 课介绍的自由函子，把集合范畴中的单形转为 Abel 群范畴中的链群。

对于边界性质的研究于是转到了 Abel 群范畴。正合的问题，在集合范畴中用差集描述，在 Abel 群范畴中则用商群描述，这就是同调群。在同构的意义下，同调群是拓扑不变性，它不随单纯剖分的不同而变化，因此我们通过代数化的方式得到了稳定的拓扑性质。

还讨论了集合范畴中的不交并和 Abel 群范畴中的直和。用第 8 课的极限的观点看，拓扑性质在这两个范畴中有着极限意义上的共性。

单纯形 用逐一列举元素的方式描述有限集，自然产生了序，并且有了几何结构，构成了丰富的研究对象——单纯形.

实域 $\mathbb{R}$ 上的 n 个线性无关的向量 $\{v_i\}$ 可以**张成 (span)**n-维线性空间：[1]

$$\mathrm{Span}\{v_i\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

类似地，可以讨论 $(n+1)$ 个线性无关向量张成的 n-维**线性流形 (linear manifold)**或者称**仿射空间 (affine space)**中的凸集：

$$\sigma^n = \left\{ x = \sum_i \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda^i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1 \right\} \tag{0.0.1}$$

称为 n-单纯形，简称 n-**单形 (simplex)**. 张成的向量也称为**顶点 (vertex)**.

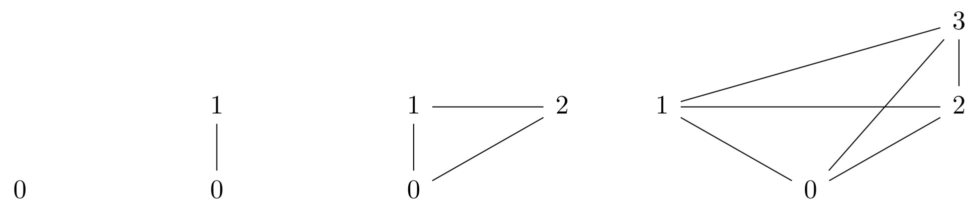
几何上点可以连成线，线可以围成面，面可以围成体. 用 $n+1$ 个点构成的 n 维几何体是具有明确几何直观的单纯形.

例 0.0.1.

低维的单纯形有明确的几何直观：

- 0-单形是点
- 1-单形是线段
- 2-单形是三角形
- 3-单形是四面体

[1] 张成线性空间体现了自由生成的构造



0-simplex　1-simplex　2-simplex　3-simplex

在 m-维实空间中，$n < m$ 个向量是从 1 到 n 个单位向量，也就是自然基中的前 n 个向量：

$$v_1 = (1, 0, 0, \cdots), \quad v_2 = (0, 1, 0, \cdots), \quad v_3 = (0, 0, 1, \cdots), \quad \cdots, v_n = (0, 0, \cdots, 1, \cdots)$$

由这样的单位向量对应的顶点张成的 n-单形称为 n-**标准单形 (standard simplex)**，记为 Δ^n. 在 n-单形中有若干 m-单形，其中 $0 \leq m \leq n$. 低维的 m-单形是 n-单形的子集. 不同维度的单纯形按照一定的规则组成**单纯复合形 (simplicial complex)**，简称复形. 通过这种方式把有限维实空间中的标准单形这种几何构造，和有限集的代数构造对应起来了.

定向　点列张成 n-单纯形的时候，自带一个排列. 通过单形的构造，拓扑空间的问题或者有限集的问题，最终转化为和这个排列有关的组合数学问题. 将单纯形简单记为顶点的集合：

$$\sigma^n = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$$

这个排列产生了偏序 $v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_n$，于是 σ^n 中的顶点构成偏序集. 排列所产生的偏序产生了单纯形的定向. n 元偏序指标集 $N = [1, \cdots, n]$ 可以描述 σ^n.

定义 0.0.1. 置换群

集合 $X \in \mathbf{Set}$ 上的作用 g 使得 $\exists x_1, x_2 \in X$：

$$g(x_1) = x_2, \quad g(x_2) = x_1$$

且对于 $\forall x \in X - \{x_1, x_2\}$ 有

$$g(x) = x$$

由 g 这样的双射称为对换. 当 $x_1 = x_2$ 时 $g = 1_X$。有限个对换的复合构成**置换 (permutation)**. 这样的作用 g 的全体，在复合作用和 1_X 下构成一个群 G，称为 X 的**置换群 (permutation group)**. n-元有限集合的置换群记为 S_n.

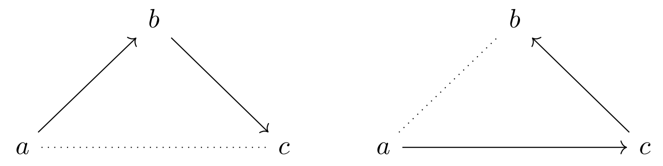
σ^n 上的置换相当于指标集 $N = [1, \cdots, n]$ 到自身的双射. 置换自然引出了定向的概念. 定向只有两个方向，它相当于用整数幂 $(-1)^n$ 所描述的奇偶性，即奇置换改变定向，偶置换不变.

例 0.0.2.

有向三角形是 2-单形：

$$[a, b, c] = [c, a, b], \quad [a, b, c] = -[a, c, b]$$

以偏序 $a \to b \to c$ 和 $a \to c \to b$ 可确定两种不同的定向如下：



$[a, b, c]$ $\qquad$ $[a, c, b]$

例 0.0.3. 链群

令 K 为单纯复合形，见 () 节。K 中定向的 r-单形的集合记为 $S_r(K) = \{(\sigma_r)_i\}_{i \in I_r}$，其整系数有限线性和为

$$\sum_{i \in I_r} n_i(\sigma_r)_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

$S_r(K)$ 生成的自由 Abel 群称为 r-**链群 (chain group)**，记为 $C_r = FS_r(K)$，C_r 中的群元称为 r-**链 (chain)**。
对链群的研究是代数同调理论的基础。

同调群 链群的构造，对拓扑空间 $X \in \mathbf{Top}$ 做三角剖分得到单纯复合形 K，K 中的 r-单纯形集合 $S_r(K)$ 这种几何构造，到链群 C_r 这种自由 Abel 群的代数构造转化，相当于自由函子的作用：

$$F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Ab}$$

$$S_r(K) \mapsto C_r = FS_r(K) = \left\{ \sum_{i \in I_r} n_i(\sigma_r)_i \right\}, \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

范畴论中有如下基本的定理：

定理 0.0.1. 函子保持同构

令 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为函子。若 $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 为同构，则 $Ff \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ 为同构。

也就是说，若 Ff 在范畴 $\mathcal{D}$ 中不同构，则 f 在范畴 $\mathcal{C}$ 中必然不同构。把拓扑问题通过函子转为其它范畴的问题，在新的范畴中按照同构对对象进行分类，就实现了对拓扑问题的某种分类，这就是代数拓扑的基本思想。

链群族 $C_\bullet = \{C_r\}$ 的结构可以用于描述拓扑空间 X。

定义 0.0.2. 同调群

复形 K 的 r-单形几何生成的 r-链群 C_r。由于边界没有边界，即

$$\partial^2 = \partial_r \circ \partial_{r+1} = 0 \;\Leftrightarrow\; B_r = \mathrm{Im}\ \partial_{r+1} \subseteq Z_r = \mathrm{Ker}\partial_r$$

如下图：

$$\begin{tikzcd} C_{r+1} \arrow[r, "\partial_{r+1}"] \arrow[rr, bend left, "\partial^2=\partial_r\circ\partial_{r+1}=0"] & C_r \arrow[r, "\partial_r"] & C_{r-1} \\ & Z_r = \mathrm{Ker}\ \partial_r \arrow[u, "\subseteq"] & \\ & B_r = \mathrm{Im}\ \partial_{r+1} \arrow[u, "\subseteq"] & \end{tikzcd}$$

这里的 $B_r = \mathrm{Im}\ \partial_{r+1}$ 称为 r-**边界链群 (boundary group)**，它体现了作为边界的性质；$Z_r = \mathrm{Ker}\ \partial_r$ 称为 r-**闭链群 (cycle group)**，它体现了没有边界的性质。B_r 和 Z_r 都是链群 C_r 的子群，其商群构成 r-**同调群 (homology group)**：

$$H_r = Z_r/B_r = \mathrm{Ker}\ \partial_r/\mathrm{Im}\ \partial_{r+1}$$

根据拓扑学的研究成果，同一个拓扑空间的不同剖分下，得到的同调群相互同构。因此同调群成为同构意义下的稳定的拓扑不变量。

进一步不加证明地介绍一个基本的拓扑学定理

定理 0.0.2.

如果复形是多个不相交成员的并：

$$K = K_1 \cup \cdots \cup K_n$$

则同调群是相应的直和：

$$H_r(K) = H_r(K_1) \oplus \cdots \oplus H_r(K_n)$$

从难以捉摸的集合范畴中的单形集合，通过自由函子的构造到了 Abel 群范畴，并通过同构意义下相等的同调群来描述拓扑信息，这种构造方式体现了范畴思想在拓扑学中的重要意义。站在现在我们所掌握的范畴知识看，$K \in \mathbf{Set}$ 是集合范畴的对象，不交并是集合范畴中的余积。$H_r(K) \in \mathbf{Ab}$ 是 Abel 群范畴的对象，直和是 Abel 群范畴中的余积。从这个简单的联系可见范畴论在诸多数学领域中的内在联系。