集智学园范畴论讲义 v1.7.0809

第二季第 8 课：张量代数 首先回顾了直和和张量积的概念，用箭头的方式描述了矩阵张量积的 Kronecker 积构造。

接下来考虑结合律问题。从 Cartes 积的构造可见，三元 Cartes 积是集合范畴内的三元函子，且和结合顺序有关。Cartes 积作为三元函子并不满足结合律，但若以等价替代相等，则可以在不同的结合方式间建立集合范畴的同构，这里体现范畴论更大的格局。类似的，三元张量积也不满足结合律，同样可以以等价替代相等。构造范畴上的三元张量函子，两种结合方式则通过自然同构来连接，在同构的意义上便有了三阶张量。

两个张量做张量积，其阶数是各自阶数之和。有限阶的张量积还是有限阶的。在同构的意义上所满足的结合律，不要求结合的顺序，因此可以构造封闭的张量积运算，构成张量代数。我们的课程一直用线性代数为例讲范畴。从双线性映射角度看，矩阵乘法只是张量积上的线性映射的结果而已，可见张量积的泛性质的意义。

直和 两个数相互独立，如下图用平行箭头表示。这里使用了直和记号，n-维列空间可以视为 n 个 $\mathbb{R}$ 的直和 $\mathbb{R}_n = \underbrace{\mathbb{R}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}}_{n\ \text{times}}$。

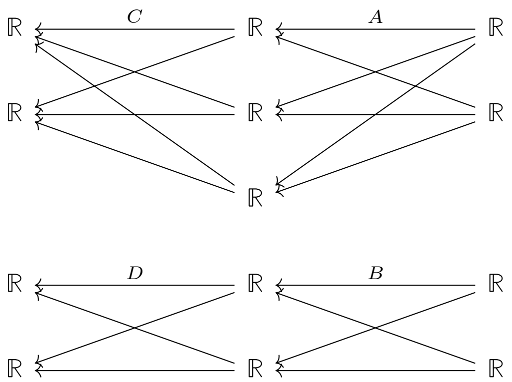
$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \xleftarrow[a_1]{} \mathbb{R} \\ \\ \\ \mathbb{R} \xleftarrow[a_2]{} \mathbb{R} \end{array} \quad = \quad \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} \xleftarrow[a_1\oplus a_2]{} \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$$

这里 $\bigoplus_{i=1}^n a_i \in \mathrm{End}(\mathbb{R}_n)$ 是 n-维的线性自态射。前面用实数所代表的线性映射，通过线性的组合构造了矩阵及其所代表的多元线性映射。类似的，这个构造过程还可以进一步推广到多元线性映射的组合构造，即**直和 (direct sum)**。进一步如果有两个完全不同的矩阵 $A \in \mathbb{R}_m^n$ 和 $B \in \mathbb{R}_p^q$，二者也可以并行化：

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}_m \xleftarrow{A} \mathbb{R}_n \\ \\ \\ \mathbb{R}_p \xleftarrow[B]{} \mathbb{R}_q \end{array} \quad = \quad \mathbb{R}_m\oplus\mathbb{R}_p \xleftarrow[A\oplus B]{} \mathbb{R}_n\oplus\mathbb{R}_q$$

这样可以更好理解分块矩阵的意义. 下图给出了更复杂的流水线：

$$\mathbb{R}_2\oplus\mathbb{R}_2 \xleftarrow{C\oplus D} \mathbb{R}_3\oplus\mathbb{R}_2 \xleftarrow{A\oplus B} \mathbb{R}_2\oplus\mathbb{R}_2$$



分块矩阵的乘法规则相似：

$$\begin{bmatrix} C & \\ & D \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \circ A & \\ & D \circ B \end{bmatrix}$$

这样易于理解直和的复合规律

$$(C \oplus D) \circ (A \oplus B) = (C \circ A) \oplus (D \circ B)$$

对于一般性的非分块对角矩阵的情况

$$\mathbb{R}_m \oplus \mathbb{R}_p \xleftarrow{M} \mathbb{R}_n \oplus \mathbb{R}_q$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_m & & \mathbb{R}_n \arrow[ll, bend right, "A"'] \arrow[dll, "C"] \\
\mathbb{R}_p & & \mathbb{R}_q \arrow[ull, "B"'] \arrow[ll, bend left, "D"]
\end{tikzcd}$$

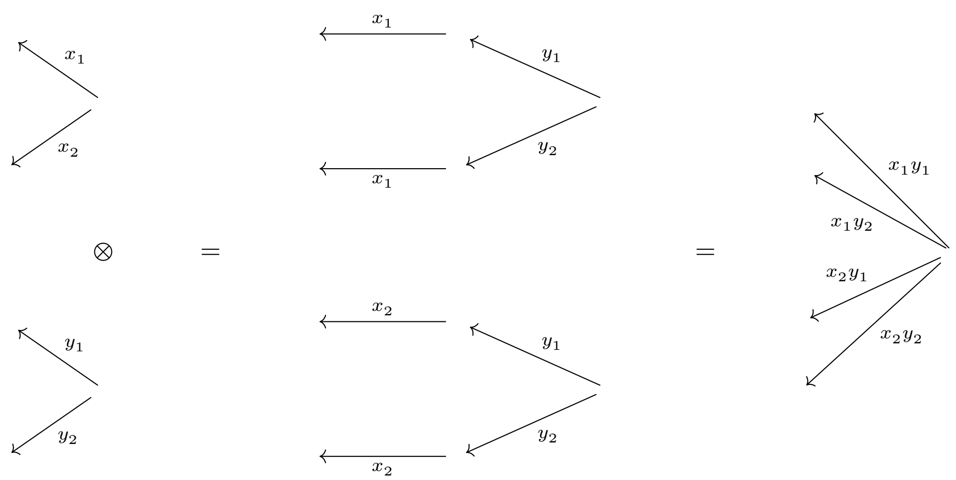
对应的分块矩阵是:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

张量积　若范畴中可构造张量空间，其中元素 $x \otimes y \in X \otimes Y$ 的构造方式为 Kronecker 积，例如

$$x \otimes y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_1 \\ x_2 y_2 \end{bmatrix}$$

箭头表示为:



有态射

$$A : X \to X' \qquad\qquad B : Y \to Y'$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

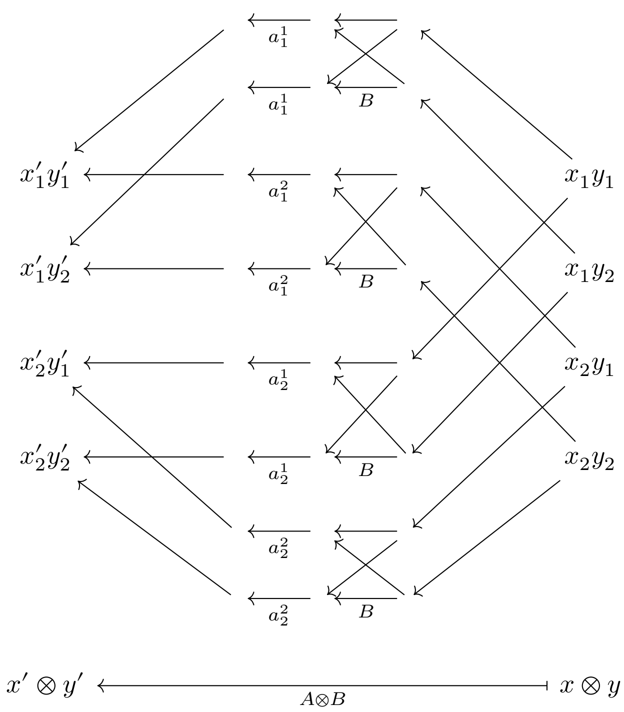
用张量积合并两个态射:

$$\begin{tikzcd} X' & X \arrow[l, "A"'] \\ \otimes & \\ Y' & Y \arrow[l, "B"'] \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} X' \otimes Y' & X \otimes Y \arrow[l, "A\otimes B"'] \end{tikzcd}$$

其矩阵表示对应:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 B & a_1^2 B \\ a_2^1 B & a_2^2 B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 b_1^1 & a_1^1 b_1^2 & a_1^2 b_1^1 & a_1^2 b_1^2 \\ a_1^1 b_2^1 & a_1^1 b_2^2 & a_1^2 b_2^1 & a_1^2 b_2^2 \\ a_2^1 b_1^1 & a_2^1 b_1^2 & a_2^2 b_1^1 & a_2^2 b_1^2 \\ a_2^1 b_2^1 & a_2^1 b_2^2 & a_2^2 b_2^1 & a_2^2 b_2^2 \end{bmatrix}$$

箭头表示为:



从相等到同构 集合范畴中的 Cartes 集是二元运算,而三元的 Cartes 集实际上是有歧义的:

例 0.0.1: 集合范畴

令 $X, Y, Z \in \mathbf{Set}$ 为集合,对于 $x \in X, y \in Y, z \in Z$, $(x,(y,z)) \neq ((x,y),z)$ 且 $X \times (Y \times Z) \neq (X \times Y) \times Z$,但有同构 $X \times (Y \times Z) \simeq (X \times Y) \times Z$.

由于如上同构的存在,通常人们不区分三元 Cartes 集的结合顺序。线性空间的直和和张量积也是二元运算,在超过二元的情况同样有类似的问题。

用张量积的符号 $\otimes$ 描述封闭的二元运算. 如果有结合律 $X \otimes (Y \otimes Z) = (X \otimes Y) \otimes Z$,用二元运算 $\otimes$ 构造多元运算便不会产生运算顺序导致的歧义问题,可以直接用 $X \otimes Y \otimes Z$ 乃至 $V^{\otimes n}$ 这样的形式来表述.

现实中用相等来定义的结合律要求过于严格，故在范畴中结合律可以用自然同构实现．结合律的表述需要三个变元，三元运算可以视为函子：

$$F = F(-,-,-) = ((- \otimes -) \otimes -), \quad G = G(-,-,-) = (- \otimes (- \otimes -))$$

置于三函子范畴中：

$$F, G \in \mathbf{Fct}(\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}, \mathcal{C})$$

这样可以讨论自然同构

$$\alpha = \alpha(-,-,-) \in \mathrm{Nat}(F, G)$$

使得下图的外框交换：

$$\begin{tikzcd}
(X_1 \otimes Y_1) \otimes Z_1 \arrow[rrr, "Ff"] \arrow[d, "\alpha(X_1,Y_1,Z_1)"'] & & & (X_2 \otimes Y_2) \otimes Z_2 \arrow[d, "\alpha(X_2,Y_2,Z_2)"] \\
& (X_1, Y_1, Z_1) \arrow[r, "f"] \arrow[ul, "F"'] \arrow[dl, "G"] & (X_2, Y_2, Z_2) \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \\
X_1 \otimes (Y_1 \otimes Z_1) \arrow[rrr, "Gf"'] & & & X_2 \otimes (Y_2 \otimes Z_2)
\end{tikzcd}$$

下图中，任意三元组 $\forall (X, Y, Z) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$，由自然同构 $\alpha(-,-,-)$ 产生了 $\mathcal{C}$ 中的同构 $\alpha(X, Y, Z)$：

$$\begin{tikzcd}
& (X, Y, Z) \arrow[dl, "F=((-\otimes-)\otimes-)"'] \arrow[dr, "G=(-\otimes(-\otimes-))"] \arrow[d, Rightarrow, "\alpha(-,-,-)"] & \\
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[rr, "\alpha(X,Y,Z)"'] & {} & X \otimes (Y \otimes Z)
\end{tikzcd}$$

这就是**结合子 (associator)**．用结合子 α 这种自然同构放松了代数中的结合律要求，在范畴论中不要求结合律的相等 $X \otimes (Y \otimes Z) = (X \otimes Y) \otimes Z$ 只要求自然同构 α 所构造的等价关系 $X \otimes (Y \otimes Z) \simeq (X \otimes Y) \otimes Z$ 并且用函子范畴中的自然同构来描述．

张量代数　对于 K-线性空间 $A, B, C \in \mathbf{Vct}_K$ 有如下同构：

$$A \otimes (B \otimes C) \xrightarrow[\simeq]{\alpha_{A,B,C}} (A \otimes B) \otimes C$$

$\alpha_{A,B,C}$ 是结合子，它是 $V \in \mathbf{Vct}_K$ 上的自然同构．

记 $T^0 V = K$，$T^1 V = V$，$T^2 V = V \otimes V$．在同构的意义下可以把 K-线性空间 $V \in \mathbf{Vct}_K$ 的 3 阶张量记为：

$$T^3 V = (V \otimes V) \otimes V \simeq V \otimes (V \otimes V)$$

类似可以定义更高阶的张量空间

$$T^n V = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n \text{ times}}$$

这样得到的张量空间依旧是 K-线性空间，这样可以用张量积来构造：

$$\otimes : T^m V \times T^n V \to T^{m+n} V$$

$$(\underbrace{v_1 \otimes \cdots \otimes v_m}_{m}, \underbrace{w_1 \otimes \cdots \otimes w_n}_{n}) \mapsto \underbrace{v_1 \otimes \cdots \otimes v_m \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_n}_{m+n}$$

这样得到的 $T^{m+n}V$ 也是 K-线性空间。将所有阶的张量空间做直和

$$TV = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^p V$$

各阶的张量空间都嵌入在这个直和空间中，于是前面的构造可以写为：

$$\otimes : TV \times TV \to TV$$
$$(\underbrace{v_1 \otimes \cdots \otimes v_m}_{m}, \underbrace{w_1 \otimes \cdots \otimes w_n}_{n}) \mapsto \underbrace{v_1 \otimes \cdots \otimes v_m \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_n}_{m+n}$$

在这种设定下，张量积 $\otimes$ 构成了直和空间 TV 上的封闭二元双线性运算。具备这样的运算构成了一个结合代数，即用 V 构造的张量代数。