集智学园范畴论讲义 v1.7.0809

**第一季第 5 课：线性空间的范畴化构造**　本系列课程将持续以线性代数为例介绍范畴论的思想。本节课首先回顾熟知的线性空间定义中的 8 条公理。说明前 4 条描述的其实是按照向量加法形成的 Abel 群。后面 4 条涉及到更多的代数构造。

以线性空间为对象、线性映射为态射，形成了线性空间范畴。以信号采样为例，用矩阵的方式描述信号的差分。通过对采样点的无穷大极限，得到了求导算子。通过从差分过渡到微分，体会到在线性空间范畴中，线性代数和泛函分析这两门学课的统一性。

自态射在数学上有根本的重要性，无论是量子力学上的线性算子、群的表示、动力系统、自动机、随机过程... ... 对自态射最基本的研究方法是作用。最常见的是群作用，这构成了表示论的一个基本起点。

给出一个有限自动机，介绍可逆状态转移所构成的群的概念。将有限自动机的有限状态集换为线性空间。

**线性空间蕴含的 Abel 群**　本节关于线性空间，以及其基础的代数结构，包括群、环、域、模、结合代数等，相关概念请参考 [李文威, 2018][黎景辉 et al., 2014][Aluffi, 2009]。

**定义 0.0.1. 线性空间**

给定域 $K$ 上的集合 $V$ 是一个**线性空间 (linear space)**，集合中的元素 $v \in V$ 称为**向量 (vector)**，若其上定义了两个**二元运算 (binary operation)**：
向量加法 $+$：

$$
\begin{aligned}
+ : V \times V &\to V \\
(v_1, v_2) &\mapsto v_1 + v_2
\end{aligned}
$$

标量乘法：

$$
\begin{aligned}
K \times V &\to V \\
(a, v) &\mapsto av
\end{aligned}
$$

并满足以下公理：

1. 加法的结合律：$u + (v + w) = (u + v) + w$
2. 加法的交换律：$u + v = v + u$
3. 加法存在幺元 $0 \in V$ 使得 $u + 0 = u$
4. 对任意向量 $v$ 存在唯一的逆元 $-v$ 使得 $v + (-v) = 0$
5. 标量乘法与域乘法相容 $a(bv) = (ab)v$
6. 标量乘法存在幺元 1 使得 $1v = v$
7. 标量乘法对向量加法有分配律 $a(u + v) = au + av$
8. 标量乘法对域加法有分配律 $(a + b)v = av + bv$

假设读者具有基本的线性代数基础，在此我们不过多地讲解以上的定义．总体而言，对于初学者，这样的定义是缺乏数学动机．即使已经修完线性代数，如果缺乏代数的抽象，以

上的定义仍显冗长.

实际上，前四条公理确定了 $V$ 是 Abel 群，后面的公理赋予了模和线性空间的结构. 这些概念总体上都属于特定的代数结构，因而我们的方法也是范畴化的.

线性空间又称为**向量空间 (vector space)**. 本课程系列大量讨论线性空间范畴 **Vct**，其中的对象是线性空间，态射是线性映射. 因此我们更多用线性空间的叫法.

**线性空间范畴看有限维和无限维** 前面介绍了取值于实数域的 $\mathbb{R}$-列空间范畴 $\mathbf{Col}_{\mathbb{R}}$。将其推广到复数域和无穷维的线性空间，就构成了线性代数和线性算子理论的主要基础。

**例 0.0.2. 差分与微分**

考察单位闭区间 $I=[0,1]$ 上的函数

$$\begin{aligned} x : I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto x(t) \end{aligned}$$

等分为 $n$ 个采样点，构成 $n$-维列向量 $x$，对其做差分:

$$\begin{bmatrix} \Delta x(t_1) \\ \Delta x(t_2) \\ \Delta x(t_3) \\ \vdots \\ \Delta x(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x(t_2)-x(t_1) \\ x(t_3)-x(t_2) \\ \vdots \\ x(t_n)-x(t_{n-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ x(t_3) \\ \vdots \\ x(t_n) \end{bmatrix}$$

差分问题成为用如下矩阵描述的线性映射

$$D = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**差分 (difference)**$\Delta x$ 对差分 $\Delta t$ 的比值构成变化率:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = nDx$$

当采样点 $\lim n \to \infty$ 时，矩阵 $D$ 成为无穷维方矩阵，函数在可微的情况下成为:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{n\to\infty} nDx$$

这样就得到了求导算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，它是差分变化率求极限后，对应的**微分 (differential)**$\mathrm{d}x$ 对微分 $\mathrm{d}t$ 的比值，是一个无穷维的线性算子。
对差分再做差分得到二阶差分，它也是线性算子，其矩阵表示就是 $D$ 的两次乘积

$$
\begin{aligned}
D^2 &= \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ -1 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 & 0 \\ & & & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

对应到无穷维的情况就是二阶求导算子 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$。

以上例子从范畴的角度统一了线性代数和泛函分析中的现象：

| 领域 | 线性代数 | 泛函分析 |
|---|---|---|
| 对象 | 有限维线性空间 | 可以无穷维的线性空间 |
| 向量 | 有限维向量 | 可以无穷维的向量，如函数 |
| 线性映射 | 矩阵 | 线性算子 |
| 线性自映射 | 方矩阵 | 线性算子 |

差分问题中，采样点构成有限维线性空间中的向量，差分作为有限维的线性映射是矩阵。微分问题中，函数 $x(t)$ 构成无限维线性空间中的向量，微分作为无限维的线性映射是线性算子。二者在线性空间范畴中均以对象和态射来看待。

# Bibliography

[Aluffi, 2009] Aluffi, P. (2009). *Algebra: Chapter 0*, volume 104. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

[李文威, 2018] 李文威 (2018). 代数学方法, volume 第一卷. 高等教育出版社.

[黎景辉 et al., 2014] 黎景辉, 白正简, and 周国晖 (2014). 高等线性代数学. 高等教育出版社.