集智学园范畴论讲义 v1.7.0809

第一季第 2 课：关系范畴 关系是构造在集合上的最基础的代数结构，它可以用最灵活的方式把静态的结构进行动态的连接。本节课再次用矩阵的方式来表述关系，让学员了解到如何借助关系来构造关系范畴。这是对集合范畴的一个有力的推广，把集合范畴中的函数扩展到部分函数，并且保证逆的存在。

首先回顾集合上的交集、并集，对应逻辑上的与、或，以及代数中的乘法、加法。矩阵的运算依赖于加法和乘法，这样可以利用半环 (semiring) 构造逻辑矩阵，用于描述集合上的二元关系。我们先给出集合之间的二元关系的代数化定义。然后特别考虑有限集合之间的二元关系，在逻辑矩阵上用相应行列的矩阵元来表示。

集合范畴的态射是函数，我们通过逻辑矩阵表明，二元关系是比函数更广泛的概念。在函数的基础上介绍了部分函数的概念，在逻辑矩阵上，函数和部分函数都具有相应的性质。

正如上一讲，矩阵在线性代数中起到了态射的作用。这里逻辑矩阵也构成集合对象之间的态射，这样构成一个比函数更广泛的范畴，即关系范畴。就像考察方矩阵一样，我们进而考察集合到自身的关系，这样可以讨论关系所涉及的相等、自反、对称、传递的性质。有趣的是，关系的叠加相当于是关系矩阵的叠加，其中的加法是逻辑加法。我们讨论了逻辑矩阵的乘法，它体现了关系范畴中的态射复合规律。

借助逻辑矩阵可以讨论函数的逆的问题。我们注意到函数不一定有逆，而关系一定有逆。关系的逆是箭头的反向，这样体现了范畴论中的对偶的思想。关于逆的问题，进一步延展到线性代数中的线性对偶空间的概念，这也是矩阵转置本质的对偶性的体现。

最后用逻辑矩阵的方式回顾了熟知的等价关系，特别是自反、对称这两种性质在矩阵中的体现，以及这两种性质的合成。

逻辑矩阵 讨论关系乃至关系范畴时，涉及到许多逻辑命题。通常记 $\Omega = \{0,1\}$ 为二元集，对应逻辑上的真伪. 这个符号相当于以后将讨论的子对象分类器.

在二元集 Ω 上构造代数结构构造二元 **Bool 代数 (Boolean algebra)**：

$$
\begin{array}{lll}
\Omega\times\Omega\to\Omega & \Omega\times\Omega\to\Omega & \Omega\to\Omega \\
\quad (0,0)\mapsto 0+0=0 & \quad (0,0)\mapsto 0\cdot 0=0 & \quad 0\mapsto \bar{0}=1 \\
\quad (0,1)\mapsto 0+1=1, & \quad (0,1)\mapsto 0\cdot 1=0, & \quad 1\mapsto \bar{1}=0 \\
\quad (1,0)\mapsto 1+0=1 & \quad (1,0)\mapsto 1\cdot 0=0 & \\
\quad (1,1)\mapsto 1+1=1 & \quad (1,1)\mapsto 1\cdot 1=1 &
\end{array}
\tag{0.0.1}
$$

Ω 上的加法对应**逻辑或 (logical disjunction)**(OR)，乘法对应**逻辑与 (logical conjunction)**(AND)，以及单变元运算对应反 (NOT)。Bool 代数 Ω 中蕴含了一个半环的结构：

Bool 代数 Ω 在加法和乘法下构成交换半环，称为 **Bool 半环 (Boolean semiring)**。

线性代数主要讨论矩阵，矩阵的行和列构成了自然的对偶关系，它相当于箭头的两个方向，于是线性代数成为学习范畴论良好范例。现在用矩阵的方法来讨论集合。

前面讨论了取值于 $\mathbb{R}$ 的实矩阵，取值于整数 $\mathbb{Z}$、有理数 $\mathbb{Q}$、复数 $\mathbb{C}$ 可以有类似的矩阵概念，矩阵的加法和乘法运算、零矩阵、单位矩阵等概念也是类似的。以上 $\mathbb{R}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{C}$ 都在熟知的加法和乘法构成半环，并有乘法的幺元。给定任意半环 R，以 R 中的元作为元素，构造 $m\times n$ 维的 R-矩阵，并且可以用范畴化的方式讨论这样的 R-矩阵相关的数学结构。

取值于 Bool 半环 Ω 的 Ω-矩阵称为**逻辑矩阵 (logical matrix)**。这类 m-行 n-列 Ω-逻辑矩阵的全体记为

$$\Omega_m^n = \left\{[r_i^j \in \Omega]\right\}$$

类似有 Ω-逻辑向量的概念。n-行 Ω-逻辑向量空间是一行 n 列的 Ω-逻辑矩阵空间，简记为 $\Omega^n = \Omega_1^n$，m-列 Ω-逻辑向量空间是一列 m 行的 Ω-逻辑矩阵空间，简记为 $\Omega_m = \Omega_m^1$. Ω-逻辑矩阵的乘法类似：

$$\Omega_l^m \times \Omega_m^n \to \Omega_l^n$$

$$(a,b) \mapsto ab = [a_i^j] \circ [b_j^k] = [a_i^j b_j^k] = \left[\sum_{j=1}^m a_i^j b_j^k\right]$$

这里的乘法和加法按照式 (0.0.1) 的规则。Ω-逻辑矩阵乘法的维度约束类似于上次课的讨论。

二元关系　在集合之间建立 $X \to Y$ 的**二元关系 (binary relation)**，即是建立 $R \subseteq X \times Y$ 的有序对集合，其中的有序对 $(x,y) \in R$ 就是 x 到 y 的关系，记为 xRy 或 $x \sim_R y$、$x \sim y$。集合 X 和 Y 上配备以关系，函数 $f : X \to Y$：

- $x \sim y \Longrightarrow f(x) \sim f(y)$ 称 f **保持 (preserve)**关系
- $f(x) \sim f(y) \Longrightarrow x \sim y$ 称 f **反映 (reflect)**关系

对于有限集，二元关系的讨论可以建立在线性代数的基础上。有限集 $X, Y \in \mathbf{FinSet}$ 的元素个数记为：

$$n = |X|, \quad m = |Y|$$

关系 $R \subseteq X \times Y$ 按照 X 和 Y 中元素的个数，构造 $m \times n$ 维 Ω-逻辑矩阵，它构成了关系 R 的表示：

$$R = [r_i^j] = \begin{bmatrix} r_1^1 & \cdots & r_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_m^1 & \cdots & r_m^n \end{bmatrix}$$

使得

$$r_i^j = 1 \ \Leftrightarrow \ x_j R y_i$$

从而用矩阵中的元素判断 $x_j R y_i$ 是否成立。

相同维度的逻辑矩阵可加，加法由 Bool 环 Ω 上的加法决定。两个逻辑矩阵相加相当于：

$$R = R_1 \cup R_2$$

例 0.0.1.

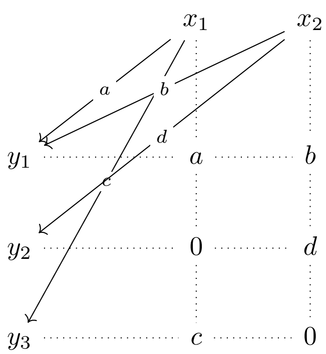
令 $X = \{x_1, x_2\}$，$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$。有关系：

$$R = \{a, b, c, d\} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_1, y_3), (x_2, y_2)\}$$

用矩阵表示，其中非 0 的部分都取值 1：

$$R = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵的图示如下：



$x_j \to y_i$ 的箭头表示有关系 $x_j R y_i$，箭头横向投影到 x_j，纵向投影到 y_i。

函数　利用关系 $R \subset X \times Y$ 可以定义函数或者映射 $f : X \to Y$. 将关系 R 中 X 有取值的元素记为子集

$$S = \{x \in X \mid \exists y : (x, y) \in R\}$$

定义 0.0.2.

关系 R 若满足：$\forall x \in S$，$\exists! f(x) \in Y$ 使得 $xR(f(x))$，则 R 称为 $X \to Y$ 的 **部分函数 (partial function)**。若 $S = X$ 则部分函数称为**函数 (function)**.

- 部分函数保证了求值的唯一，逻辑矩阵中部分函数的每一列只有最多一个 1；
- 函数则进一步保证了 X 中所有的元素都有求值，逻辑矩阵中函数不存在全 0 列。

用关系定义了函数后，反过来可以用函数定义关系。关系 R 视为集合 $X \times Y$ 上的二值函数，对于 $\forall (x, y) \in (X, Y)$ 的有序对给出关系存在与否的判定：

$$R : X \times Y \to \Omega$$

$$(x, y) \mapsto R(x, y)$$

使得

$$R(x,y)=1 \iff xRy$$

例 0.0.3.

在包含两个元素的域 X 上定义的函数:

$$R=\{(x_1,y_3),(x_2,y_1)\}$$

其逻辑矩阵为:

$$R=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$X=\{x_1,x_2\}$	$Y=\{y_1,y_2,y_3\}$	R
x_1	y_3	x_1Ry_3
x_2	y_1	x_2Ry_1

例 0.0.4.

讨论范畴中态射的结合律时，有图 (**??**) 即下图:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend left=50, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] \arrow[rrr, bend right=50, "h\circ(g\circ f)"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h\circ g"] & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

除首尾相接的态射外，其它态射并不能定义复合运算，因此态射的复合运算 $\circ:\mathrm{Mor}(\mathcal{C})\times\mathrm{Mor}(\mathcal{C})\to\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 是部分函数.

关系范畴　集合范畴上，通过 Cartes 积可以构造关系。进而用范畴化的方式讨论集合上的关系 [Heunen and Vicary, 2019]。

定义 0.0.5.

以集合 $X,Y,\cdots\in\mathbf{Set}$ 为对象，以关系 $R\subseteq X\times Y$ 为态射，态射的复合方式为:

$$\begin{aligned}(X\times Y)\times(Y\times Z)&\to(X\times Z)\\(R,S)&\mapsto S\circ R\end{aligned}$$

使得

$$x(S\circ R)z \iff \exists y\in Y: xRy, ySz$$

即

$$(x,z)\in S\circ R \iff \exists y\in Y:(x,y)\in R,(y,z)\in S$$

这样构成的范畴称为**关系范畴 (category of relations)**，记为 $\mathbf{Rel}$。

注意到：

1. $X \to Y$ 态射的全体构成幂集 $\mathrm{Hom}(X,Y) = 2^{X\times Y}$；

2. 以上定义的关系复合方式相当于**传递性 (transitivity)**：$(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$；

3. 范畴的定义要求自态射的幺元，对于 $\forall A \in \mathbf{Rel}$ 存在 $1_A = \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X$，这相当于约定了 $\mathbf{Rel}$ 范畴的自态射集中，需要包含具有**自反性 (reflexivity)**：xRx 的关系。

集合范畴是关系范畴的子范畴。关系范畴的对象建立于集合范畴，而态射的构造方式不限于函数，比集合范畴更灵活。前述的函数和部分函数都可以用关系范畴构造。

逆关系　关系视为箭头，箭头的反向则构成了逆关系：

定义 0.0.6.

令 $X, Y \in \mathbf{Set}$，$R \subseteq X \times Y$ 为关系。若关系 $R^\dagger \subseteq Y \times X$ 满足：

$$xRy \iff yR^\dagger x$$

称 $R^\dagger$ 为 R 的**逆关系 (converse relation)**。

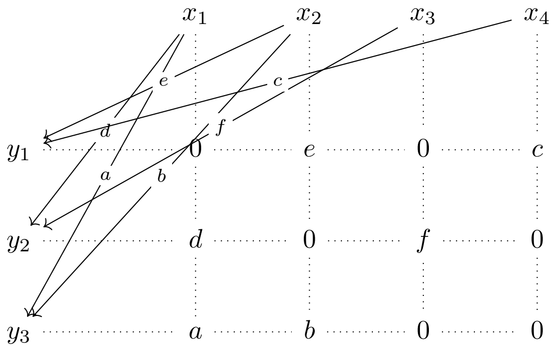
逆关系的定义类似于函数的逆，函数不一定可逆，而关系一定可逆。关系的逆是比函数的逆更广泛的概念。

例 0.0.7.

$x, y \in X$ 中若有关系 $x \to y$ 表示 x 是 y 的前男友，则有关系 $x \leftarrow y$ 表示 y 是 x 的前女友。前男友关系 $\to$ 和前女友关系 $\leftarrow$ 都允许多对多，无法通过一对可逆函数描述（不可描述），而用逆关系则可以描述。

例 0.0.8.

对于下面的关系，将箭头反向得到逆关系：



对应逻辑矩阵的转置:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & e & 0 & c \\ d & 0 & f & 0 \\ a & b & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R^T = \begin{bmatrix} 0 & d^{-1} & a^{-1} \\ e^{-1} & 0 & b^{-1} \\ 0 & f^{-1} & 0 \\ c^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

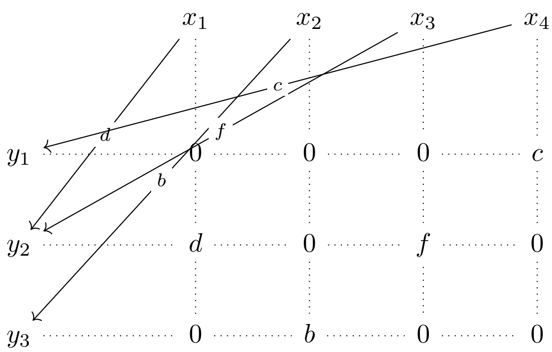
关系的逆是最基础的**一元运算 (unary operation)**之一，它的重要特点是周期为 2，即两次逆等于自身。这体现为关系范畴 **Rel** 是**自对偶 (self-dual)**的。在复数、矩阵、算子、Abel 群等领域都出现了自对偶现象。

自对偶构成了**对合 (involution)**的基础。在不同的领域，对合会以**转置 (transpose)**、**伴随 (adjoint)**等形式出现。由于物理上通常用剑标 † 表示伴随，以上定义中就采用了剑标 † 记号，并在后面发展为剑标范畴。

关系有逆，函数不一定有逆，关系 R 构成函数，满足逻辑矩阵每列只有一个非零元，没有空列。经过转置，关系 R^T 的逻辑矩阵每行只有一个非零元，没有空行。逆关系 R^T 的转置矩阵的条件由列的条件变成了行的条件，不再保证函数的性质。

例 0.0.9.

下面的关系构成函数，将箭头反向得到逆关系:



对应逻辑矩阵的转置：

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c \\ d & 0 & f & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R^T = \begin{bmatrix} 0 & d^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & b^{-1} \\ 0 & f^{-1} & 0 \\ c^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d^{-1} 和 f^{-1} 使得 y_2 发出的关系失去了唯一性，说明关系 R 作为函数不是可逆函数。

进一步发展出函数的左逆与右逆的对偶概念。

定义 0.0.10.

令 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to X$ 为方向相反的映射：

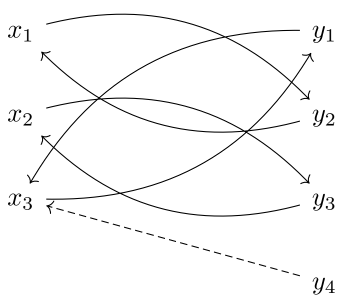
1. 若 $g \circ f = 1_X \in \mathrm{End}(X)$ 为 X 上的恒等映射 则称 g 为 f 的**左逆 (left inverse)**，
2. 若 $f \circ g = 1_Y \in \mathrm{End}(Y)$ 为 Y 上的恒等映射 则称 f 为 g 的**右逆 (right inverse)**。

注意到左逆和右逆是有独立性的条件：

例 0.0.11.

以下 g 为 f 的左逆，而 f 不是 g 的右逆：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop left, "g\circ f"] \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[loop right, "f\circ g"] \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$



以 g 为 f 的左逆为例，f 的像是 Y 的子集：

$$\mathrm{Im}\ f = \{f(x_1) = y_2, f(x_2) = y_3, f(x_3) = y_1\} \subseteq Y$$

而 g 限制在 $\mathrm{Im}\ f$ 内，使得 $\forall x \in X : g(f(x)) = x$，至于 $Y - \mathrm{Im}\ f$ 中 g 的性质，不影响 $g \circ f = 1_X$。倘若 $Y - \mathrm{Im}\ f \neq \varnothing$ 非空，对于

$$y_4 \in Y - \mathrm{Im}\ f$$

$g(y_4) = x_3 \in X$ 在 f 下有像 $f(g(y)) = y_1 \in \operatorname{Im} f$，于是 $f(g(y_4)) \neq y_4$，f 不构成 g 的右逆。
f 和 g 的逻辑矩阵为：

$$R_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

反范畴是对象不变，态射反向构成的范畴，考虑关系范畴 $\mathbf{Rel}$ 的反范畴：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[loop left, "1_X"] \arrow[r, "R"] \arrow[dr, "S\circ R"'] & Y \arrow[loop right, "1_Y"] \arrow[d, "S"] \\
& Z \arrow[loop below, "1_Z"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[loop left, "1_X"] & Y \arrow[loop right, "1_Y"] \arrow[l, "R^{-1}"'] \\
& X \arrow[loop below, "1_Z"] \arrow[u, "S^{-1}"'] \arrow[ul, "R^{-1}\circ S^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

如前述，逆关系以矩阵而言相当于转置矩阵，字面上说相当于酉矩阵或正交矩阵，即转置的操作相当于逆。逆矩阵的运算规则：

$$(S \circ R)^T = R^T \circ S^T$$

态射复合　前面讨论了环 Ω 上的逻辑矩阵对关系 R 的表示，现在考虑逻辑矩阵对逻辑向量的作用，这是一种线性的作用。X 和 Y 中元素的个数确定了两个维度的 Ω-逻辑列向量：

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \Omega_n, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in \Omega_m$$

关系 R 的逻辑矩阵，通过矩阵乘法连接二者：

$$\begin{aligned} &R : \Omega_n \to \Omega_m \\ &x \mapsto Rx = \begin{bmatrix} r_1^1 & \cdots & r_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_m^1 & \cdots & r_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_k r_1^k x_k \\ \vdots \\ \sum_k r_m^k x_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

从以上讨论可以发现：

1. 关系 $R \subseteq X \times Y$ 的全部信息反应在 Ω-逻辑矩阵中，Ω-逻辑列向量的取值并不影响关系 R；

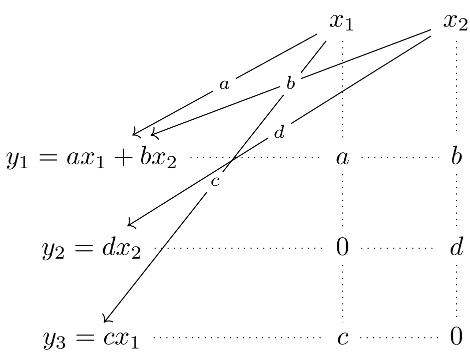
2. 相同元素个数的有限集，在双射的意义下同构。

给定有限集，以集合元素的个数构造相应维度的 Ω-逻辑列向量，向量元素可以取二值，它蕴含着比集合更多的信息。用逻辑矩阵表示 R，以矩阵左乘的方式作用于逻辑列向量 x 得到 Rx：

1. Rx 中的元是按 Bool 半环运算的线性组合；
2. 线性组合中的非零系数项表示有来自 x 的关系，若线性组合为零则没有来自 x 的关系；

例 0.0.12.

在前面的例子基础上，考虑线性映射的作用：



在逻辑矩阵的作用下：

$$R : \Omega_2 \to \Omega_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ dx_2 \\ cx_1 \end{bmatrix}$$

逻辑向量 x 各分量的取值，影响到 Rx 各分量的取值。

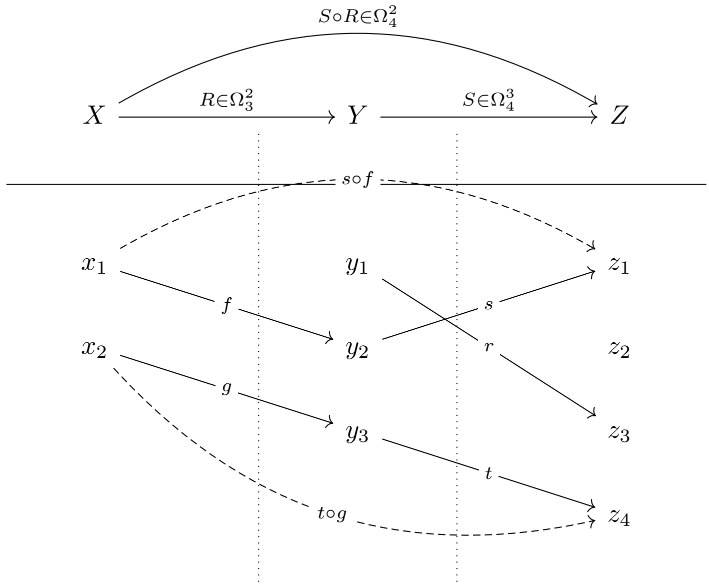
Rx 中的元的具体取值，取决于 x 中是否有一个来自 x 的关系，且这个关系在 x 相应的元上的取值为 1。逻辑列向量取值的本质意义，要在关系范畴的态射复合角度来理解。逻辑列向量的取值体现了前面态射的结果，并将结果传递给后继的态射。

关系范畴中的要点在逻辑矩阵上体现为：

1. $m \times n$ 维的逻辑矩阵共有 mn 个元素，对应 2^{mn} 种可能性，和幂集 $\mathrm{Hom}(X, Y) = 2^{X \times Y}$ 对应；
2. 关系的复合方式体现在矩阵乘法中，矩阵的维度满足复合的要求；
3. 范畴的定义要求自态射的幺元，对于 $\forall X \in \mathbf{Rel}$ 存在 $1_X = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X$，这相当于约定了关系具有自反性，若 $n = |X|$ 为 X 的元素个数，则 Ω_n^n 中包含 $n \times n$ 单位矩阵。

   集合 X 到自身的关系 $R \subseteq X \times X$ 有特别的研究意义。在有限情况下，R 的逻辑矩阵是方矩阵。如果方矩阵的对角元都取 1，则体现了关系的**自反性 (reflexivity)**：$x \sim x$

例 0.0.13.



这是函数的复合，逻辑矩阵都满足没有空列，且每列只有一个非零元。

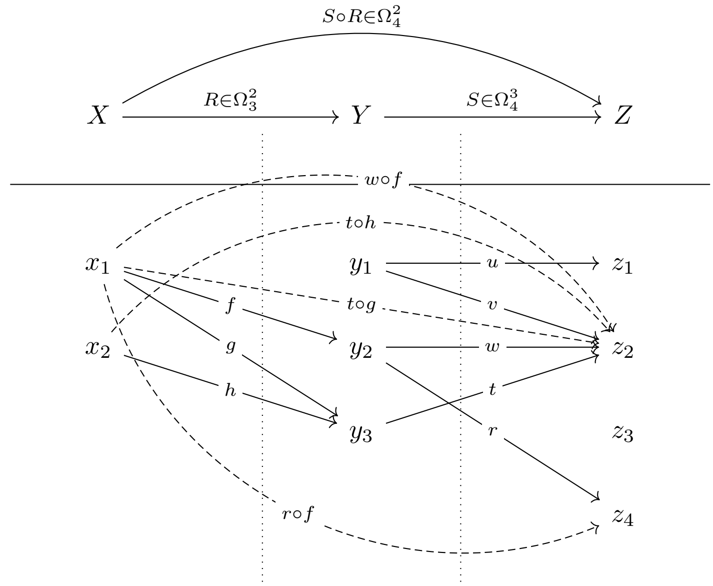
$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

函数的复合还是函数：

$$S \circ R = \begin{bmatrix} 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \circ f & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & t \circ g \end{bmatrix}$$

逻辑矩阵 $S \circ R$ 没有空列，且每列只有一个非零元。

例 0.0.14.



有如下逻辑矩阵运算：

$$
\begin{aligned}
\Omega_3^2 \times \Omega_4^3 &\to \Omega_4^2 \\
(R, S) &\mapsto S \circ R
\end{aligned}
$$

矩阵中非 0 的部分均取值 1：

$$
\begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ v & w & t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \\ g & h \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ w\circ f + t\circ g & t\circ h \\ 0 & 0 \\ r\circ f & 0 \end{bmatrix}
$$

这里 $w\circ f + t\circ g = 1$ 体现了多条可能的路径，相当于存在 $y_2, y_3 \in Y$，产生了两条连接 x_1 和 z_2 的关系。

类似于前面对列范畴的讨论，一个逻辑矩阵相当于：

$$R \in \Omega_m^n = \mathrm{Hom}(\Omega_n, \Omega_m)$$

这里把 $m\times n$ 维逻辑矩阵空间和态射集等同起来。在有限关系范畴 **FinRel** 中，对象是有限集，而具有相同元素个数 m 的有限集在双射的意义下相等，于是 m 和列逻辑向量空间 Ω_m 对应，$m\times n$ 维逻辑矩阵空间 Ω_m^n 就是有限集对象的态射集，它容纳了对象之间所有可能的关系。

自关系　建立在两个不同集合上的二元关系 $R\subseteq X\times Y$ 也称为**异质关系 (heterogenous relation)**。若考虑 X 到自身的关系 $R\subseteq X\times X$，则称为**同质关系 (homogenous relation)**，或**自关系 (endorelation)**。

自关系在有限的情况下可以用方矩阵空间描述：

$$\Omega_n^n = \mathrm{End}(X) = \mathrm{Hom}(X, X)$$

其中 $n = |X|$ 为有限集 X 的元素个数。

例 0.0.15. 状态机

计算科学的基础概念之一是状态机，特别是**有限状态机 (finite state machine)**。由 n-元有限集 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \in \mathbf{FinSet}$ 构成状态集合，系统处于特定的状态 $s_0 \in X$，并在以自映射的方式进行状态转移：

$$\begin{aligned} T : X &\to X \\ s_t &\mapsto T(s_t) = s_{t+1} \end{aligned}$$

描述状态转移的矩阵既是一种逻辑矩阵。

例 0.0.16. Markov 链

为描述无后效性，即未来只依赖当前状态，不依赖过去的随机现象，常用 **Markov 链 (Markov chain)**。有限状态集 X 上的状态转移概率构成**随机矩阵 (stochastic matrix)**，其矩阵元为转移概率。逻辑矩阵相当于概率只取值于 $\Omega = \{0, 1\}$ 的随机矩阵。

例 0.0.17.

对于 $n = 3$ 元的集合 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$，其自关系矩阵的行列都取 X 的指标：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & x_1 & & x_2 & & x_3 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_1 & \cdots & x_1^1 & \cdots & x_1^2 & \cdots & x_1^3 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_2 & \cdots & x_2^1 & \cdots & x_2^2 & \cdots & x_2^3 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_3 & \cdots & x_3^1 & \cdots & x_3^2 & \cdots & x_3^3
\end{array}$$

相等 (equality)关系用单位矩阵描述，它满足**自反性 (reflexivity)**：

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对称矩阵则表示了**对称性 (symmetriy)**：$x_i R x_j \Rightarrow x_j R x_i$：

$$R=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

X 上的自关系 R 是**传递的 (transitive)**，则

$$R^2\subseteq R$$

对称矩阵的乘积不一定是对称矩阵，因此两个对称关系的复合也不一定对称。
下面的例子给出了只有传递性，没有自反性的关系。

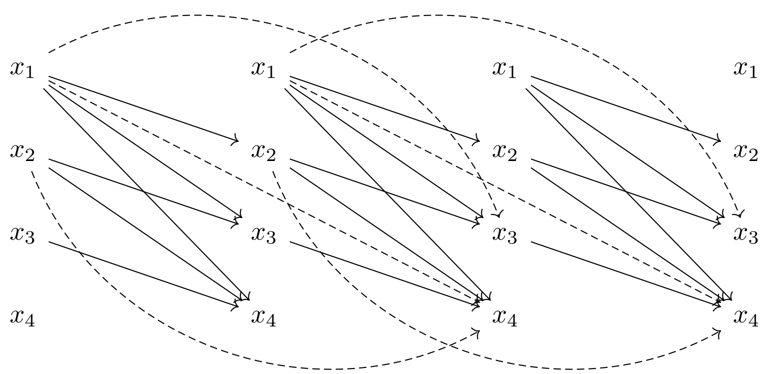
例 0.0.18.

令 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}\subset\mathbb{N}$ 为自然数的集合，按照小于关系

$$x_1<x_2,\quad x_1<x_3,\quad x_1<x_4,\quad x_2<x_3,\quad x_2<x_4,\quad x_3<x_4$$

如下图:

$$X\xrightarrow{\quad R\quad}X\xrightarrow{\quad R\quad}X\xrightarrow{\quad R\quad}X$$



$$R^2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$R^3=R^2\circ R=R\circ R^2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

下面的例子给出了只有对称性的关系。

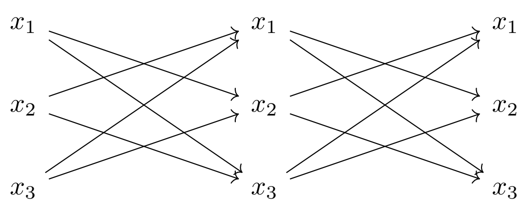
例 0.0.19.

令 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}\subset\mathbb{N}$ 为自然数的集合，按照小于关系

$$x_1\neq x_2,\quad x_1\neq x_3,\quad x_2\neq x_1,\quad x_2\neq x_3,\quad x_3\neq x_1,\quad x_3\neq x_2$$

如下图:

$$X \xrightarrow{R} X \xrightarrow{R} X$$



$$R^2=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$x_1\neq x_2$ 且 $x_2\neq x_1$，然而 $x_1\neq x_2$ 不成立，说明不等号没有传递性。然而矩阵乘法的结果却有了传递性。这种传递性来源于关系范畴 **Rel** 中对态射复合的要求，即关系范畴中的态射是蕴含了传递性的关系。

置换　交换集合 $X\in\mathbf{Set}$ 中的两个元素，保持其它元素不变，构成的双射称为**对换 (transposition)**。若干对换的复合构成的双射称为**置换 (permutation)**。恒等和对换都是置换，置换构成了集合范畴中的可逆自态射。

例 0.0.20. 复共轭

复数的共轭运算构成复数集合 $\mathbb{C}\in\mathbf{Set}$ 上的自双射，是一个置换。复共轭一般用上划线表示，也常见用 $*$ 表示体现其伴随的性质，这里用见剑标 $\dagger$ 表示体现其自对偶的性质:

$$\begin{aligned}\dagger:\mathbb{C}&\to\mathbb{C}\\(x+iy)&\mapsto\dagger(x+iy)=\overline{x+iy}=x-iy\end{aligned}$$

也可以用反对称矩阵表示为

$$\begin{aligned}\dagger:\mathbb{C}&\to\mathbb{C}\\\begin{bmatrix}x&-y\\y&x\end{bmatrix}&\mapsto\begin{bmatrix}x&-y\\y&x\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}x&y\\-y&x\end{bmatrix}\end{aligned}$$

复共轭 † 是周期为 2 的反自同构：

$$\dagger^2 = 1_{\mathbb{C}}$$

并且保持实数，也就是虚部为 0 的复数恒等。这种自同构在线性空间范畴上成立，构成了 Galois 理论的基础。后面的章节将会详细阐述。

置换更多的研究是在有限群上。() 节谈到函数需要满足：

- 部分函数保证了求值的唯一，逻辑矩阵中部分函数的每一列只有最多一个 1；
- 函数则进一步保证了 X 中所有的元素都有求值，逻辑矩阵中函数不存在全 0 列。

若函数可逆，则要求每一行只有最多一个 1。综合这些条件，X 上的自映射保证行列数相等，若每行每列都有且只有唯一一个 1，则构成双射，即置换。

置换是对换的合成，从置换对应的逻辑矩阵的构造看，对换相当于矩阵中的初等行 (或列) 变换，即把单位矩阵交换其中两行 (或列)。单位矩阵经过一次初等行 (或列) 变换得到的矩阵称为**初等矩阵 (elementary matrix)**。对换是双射的基本构造单元，相应的初等矩阵也是置换矩阵的基本构造单元。

下面构造两个对换的复合：对于 $n = 3$ 元的集合 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$，以及两个对换

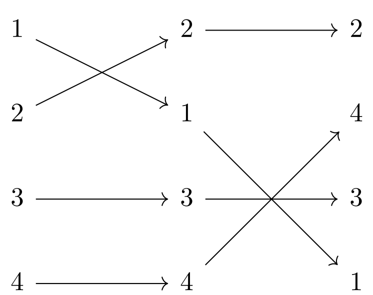
$$\sigma_1 = (1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = (2, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

构造置换

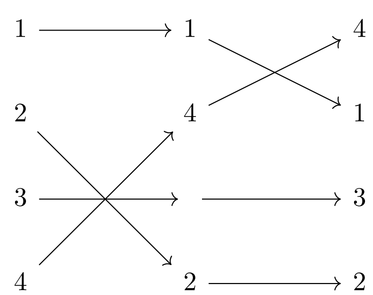
$$\sigma_{12} = \sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{21} = \sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

图示为：



$\sigma_{12} = \sigma_2 \circ \sigma_1$



$\sigma_{21} = \sigma_1 \circ \sigma_2$

注意到对换的复合不满足交换律。有限集的置换问题用逻辑矩阵易于阐述，非交换的性质从矩阵中容易理解：

用自关系的逻辑矩阵表示，行列都取 X 的指标。对换相当于交换两行或者交换两列，交换后仍保持逻辑矩阵每行每列都只有一个 1：

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

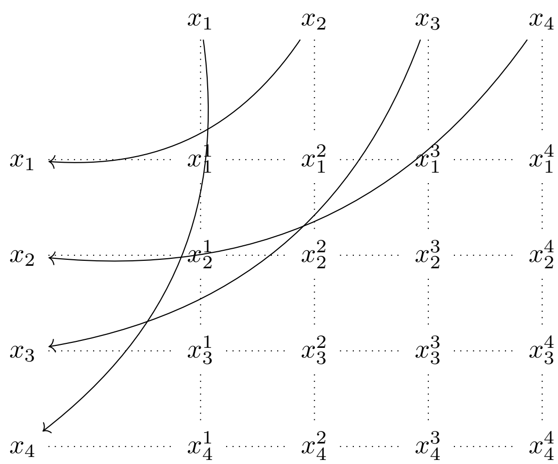
对换合成为置换：

$$\sigma_{12} = \sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

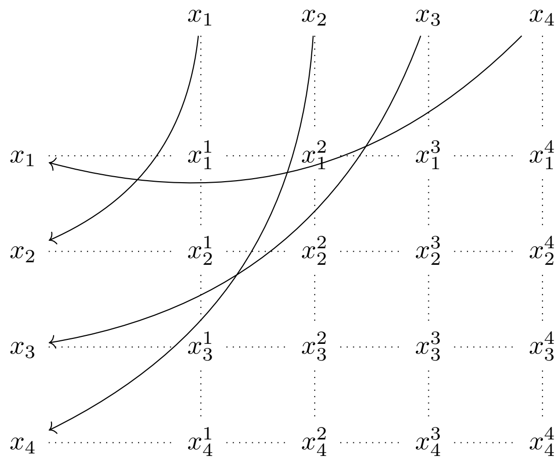
$$\sigma_{21} = \sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

置换的效果如下图：

$\sigma_{12} = \sigma_2 \circ \sigma_1$



$\sigma_{21} = \sigma_1 \circ \sigma_2$



等价　线性代数中关注实对称矩阵和复 Hermite 矩阵，它们都是有限维的自伴算子，作为线性自映射，即线性空间范畴的自态射，以对称的方式作用于线性空间及其对偶空间。注意到逆关系 $R^\dagger$ 的逻辑矩阵对应矩阵的转置。同样可以关注**自伴 (adjoint)**的逻辑矩阵，即对称的二值矩阵：

$$R^\dagger = R^T = R$$

自伴逻辑矩阵反应了关系的**对称性 (symmetriy)**：$x \sim y \Rightarrow y \sim x$。

定义 0.0.21. 等价关系

集合 X 上的二元关系 $\sim$ 称为**等价 (equivalence)**关系，若对于 $\forall x, y, z \in X$ 满足：

1. **自反性 (reflexivity)**：$x \sim x$
2. **对称性 (symmetriy)**：$x \sim y \Rightarrow y \sim x$
3. **传递性 (transitivity)**：$(x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow x \sim z$

关系	自反	对称	传递
$=$	是	是	是
$\neq$	否	是	否
$<$	否	否	是
$\leq$	是	否	是

最常见的等价关系是**相等 (equality)**．然而相等的条件太强．数学中为了灵活性的考虑，往往避免相等这样过强的条件，而用等价的概念来替代．

例 0.0.22.

令集 $X \subset \mathbb{Z}$ 为整数集的子集，其中的元素按照除 2 的余数构造关系：

$$x \sim y \iff (x-y) \mod 2 = 0$$

则同余构成等价关系：

	$x_1 = 6$	$x_2 = 1$	$x_3 = 5$	$x_4 = 4$
$x_1 = 6$	1	0	0	1
$x_2 = 1$	0	1	1	0
$x_3 = 5$	0	1	1	0
$x_4 = 4$	1	0	0	1

例 0.0.23.

一些常见的等价关系

领域	等价关系
集合论	相等
集合论	双射（单满映射）
逻辑	当且仅当
组合数学	置换
矩阵	相似变换
代数	同构
拓扑	同胚
拓扑	同伦
拓扑	同调
微分几何	微分同胚
代数几何	双有理
物理	对称

序　等价关系是对称的关系，不对称的关系有偏序和全序.

定义 0.0.24.

集合 X 上的二元关系 $\leq$ 称为**偏序 (partial order)**关系，若对于 $\forall x, y, z \in X$ 满足：

1. **自反性 (reflexivity)**：$x \leq x$
2. **反对称性 (anti-symmetriy)**：$(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$
3. **传递性 (transitivity)**：$(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

赋予了偏序的集合 $(X, \leq)$ 称为**偏序集 (poset, partially ordered set)**.
如果偏序集 $(X, \leq)$ 中任何一对元素 $\forall x, y \in X$ 可以相互比较，即：$x \leq y$ 或 $y \leq x$ 必有一个成立，则 $(X, \leq)$ 称为 **全序集 (total order set)**.

势为 $n+1$ 的有限集在双射的意义下相当于：

$$[n] = \{0, 1, \cdots, n\}$$

它自带全序，本书常用这样的记号讨论有限全序集。

例 0.0.25.

自然数集 $\mathbb{N}$，整数集 $\mathbb{Z}$，有理数集 $\mathbb{Q}$，实数集 $\mathbb{R}$ 在数的比较 $\leq$ 和 $\geq$ 下都构成偏序集和全序集.

有限偏序关系的逻辑矩阵是下三角矩阵。全序集的逻辑矩阵下三角的每个元都是 1，而偏序集的逻辑矩阵则从其中将某些 1 清零。

例 0.0.26.

[Harder, 2011] 6 可以被 3 整除，记为 $3|6$. 自然数集 $\mathbb{N} \in \mathbf{Set}$ 中，根据可整除的性质定义一个关系：

$$n \leq m \iff n|m$$

$(\mathbb{N}, \leq)$ 构成偏序集. 然而素数之间不能比较，例如 3 和 5 之间没有整除关系，因而它不是全序集.
自然数取 $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$，按照小于等于定义的是全序集，$(X, \leq)$ 的逻辑矩阵为：

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

若把偏序定义为整除，则 $(X, \leq)$ 的逻辑矩阵为：

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这里抽掉了没有整除关系的部分。

例 0.0.27.

集合的包含 $A \subseteq B$ 是偏序关系．给定集族 $\{X\}$，按照包含偏序关系，构成偏序集 $(\{X\}, \subseteq)$．它不是全序集.

Bibliography

[Harder, 2011] Harder, G. (2011). *Lectures on Algebraic Geometry I*, volume 35. Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden.

[Heunen and Vicary, 2019] Heunen, C. and Vicary, J. (2019). *Categories for Quantum Theory: An Introduction.* Oxford University Press.