第二季第 9 课: **幺半范畴** 首先简短回顾了张量积概念的发展,包括在线性空间和模范畴上的直和和张量积。从幺半群的代数概念出发,引入幺半范畴。幺半群上有一个封闭的二元运算,代之以双函子的方式描述,最直接的例子就是张量积。用计算机科学中的表达式树,描述了三元运算的不同结合顺序,幺半群中的结合律,其范畴化的描述就是在两个三元函子上,通过自然同构建立等价,构成了条件更为宽松的结合律。

用函子化的方式改造幺半群的构造方式,引入了幺半范畴。幺半范畴的定义拆解开,主要部分就是如何用自然同构来描述结合律和左右幺元律,以及这些条件的组合,即所谓的一致性条件。

作为实例,我们在集合范畴上用直积构造了一个幺半范畴的例子。作为对比,还引入了 Hilbert 空间范畴,用线性空间的张量积构造了幺半范畴的另一个例子,这个例子是许多前沿的量子理论研究的基础。从某种角度看,集合范畴和 Hilbert 空间范畴在构造幺半范畴后的不同,形成了经典/量子理论的分野。

**幺半群** 放弃严格的**相等** (equality)而改用灵活的**同构** (isomorphism),可以更好地描述诸多的实际问题. 回顾幺半群:

## 定义: 幺半群的代数式定义

集合 X 上赋予二元运算。, 即映射

$$\circ: X \times X \to X$$
$$(a,b) \mapsto a \circ b$$

若它是封闭的,且满足:

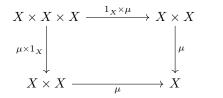
- 结合律: 对于  $\forall a, b, c \in X$  满足  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- 幺元: 若  $\exists 1_X \in X$  使得对于  $\forall a \in X$  满足  $a \circ 1_X = a = 1_X \circ a$ ,称  $1_X$  为幺元

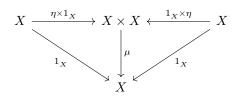
则称  $(X, \circ, 1_X)$  为**幺半群 (monoid)**.

这里用代数化的方式所描述的结合律和幺元,相当于用方程的相等 (equality)形式给出了一种静态的约束条件. 范畴论则倾向于更加动态的方式来描述概念,下面给出态射式的定义:

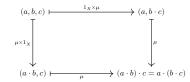
### 定义 0.0.1: 幺半群的态射式定义

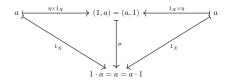
**幺半群 (monoid)**是一个集合范畴的对象  $X \in \mathbf{Set}$ , 并且有  $\mathbf{Set}$  中的态射  $\mu: X \times X \to X$  和  $\eta: 1 \to X$  使得下图交换:





即对于  $\forall a, b, c, \in X$  有:





这里的  $1 \in X$  即是幺元.

以上左图描述的是结合律,右图描述的是幺元.接下来,进一步发展这种借助交换图的、动态的描述方式, 并把以上定义的态射方式进一步发展为自然同构的方式. **结合子** 接用张量积的符号  $\otimes$  描述封闭的二元运算. 如果有结合律  $X\otimes (Y\otimes Z)=(X\otimes Y)\otimes Z$ ,用二元运算  $\otimes$  构造多元运算便不会产生运算顺序导致的歧义问题,可以直接用  $X\otimes Y\otimes Z$  乃至  $V^{\otimes n}$  这样的形式来表述. 现实中用相等来定义的结合律要求过于严格,故在范畴中结合律可以用自然同构实现. 结合律的表述需要三个变元,三元运算可以视为函子:

$$F = F(-, -, -) = ((- \otimes -) \otimes -), \quad G = G(-, -, -) = (- \otimes (- \otimes -))$$

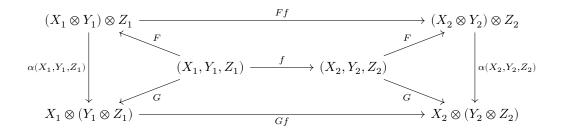
置于三函子范畴中:

$$F, G \in \mathbf{Fct}(\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}, \mathcal{C})$$

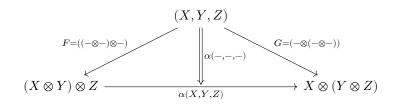
这样可以讨论自然同构

$$\alpha = \alpha(-, -, -) \in \operatorname{Nat}(F, G)$$

使得下图的外框交换:



下图中, 任意三元组  $\forall (X,Y,Z) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ , 由自然同构  $\alpha(-,-,-)$  产生了  $\mathcal{C}$  中的同构  $\alpha(X,Y,Z)$ :



这就是**结合子 (associator)**. 用结合子  $\alpha$  这种自然同构放松了代数中的结合律要求,在范畴论中不要求结合律的相等  $X \otimes (Y \otimes Z) = (X \otimes Y) \otimes Z$  只要求自然同构  $\alpha$  所构造的等价关系  $X \otimes (Y \otimes Z) \simeq (X \otimes Y) \otimes Z$  并且用函子范畴中的自然同构来描述.

## 例 0.0.1: 集合范畴

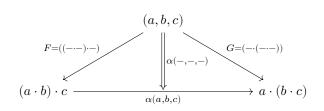
令  $X,Y,Z\in\mathbf{Set}$  为集合,对于  $x\in X,y\in Y,z\in Z,\;(x,(y,z))\neq((x,y),z)$  且  $X\times(Y\times Z)\neq((X\times Y)\times Z),\;$ 但有结合子产生同构  $X\times(Y\times Z)\simeq((X\times Y)\times Z).$ 

#### 例: 数的乘法

以自然数上的乘法  $(\mathbb{N},\cdot)$  结构为例,若以自然数为对象构成离散范畴  $\mathbb{N}$ ,乘法构成双函子  $(-\cdot-):$   $(\mathbb{N},\mathbb{N})\to\mathbb{N}.$  结合律的表述需要三个变元,三元运算可以视为函子:  $F=F(-,-,-)=((-\cdot-)\cdot-), \quad G=G(-,-,-)=(-\cdot(-\cdot-))$  置于三函子范畴中:  $F,G\in\mathbf{Fct}((\mathbb{N},\mathbb{N},\mathbb{N}),\mathcal{C})$  这样可以讨论自然同构

$$\alpha = \alpha(-, -, -) \in \operatorname{Nat}(F, G)$$

下图用结合子来表述



# 例 0.0.2: 张量空间

类似例0.0.1,对于 K-线性空间  $A, B, C \in \mathbf{Vct}_K$  有如下同构:

$$A\otimes (B\otimes C) \xrightarrow{\quad \alpha_{A,B,C} \quad } (A\otimes B)\otimes C$$

 $\alpha_{A,B,C}$  称为**结合子 (associator)**,它是  $V \in \mathbf{Vct}_K$  上的自然同构. 记  $T^0V = K$ , $T^1V = V$ , $T^2V = V \otimes V$ . 在同构的意义下可以把 K-线性空间  $V \in \mathbf{Vct}_K$  的 3 阶张量记为:

$$T^3V = (V \otimes V) \otimes V \simeq V \otimes (V \otimes V)$$

类似可以定义更高阶的张量空间

$$T^nV=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{n\text{ times}}$$

**交换子** 范畴上的交换律,方法和以上对结合律的讨论类似. 从函子范畴的角度来讨论范畴上的代数运算,二元运算视为双函子, 进而置于函子范畴构成函子对象:

$$(-\otimes -) \in \mathbf{Fct}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}, \mathcal{C})$$

按照运算的顺序有函子:

$$F(X,Y) = X \otimes Y, \quad G(X,Y) = Y \otimes X$$

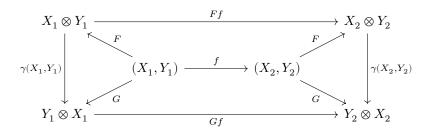
同样置于函子范畴中:

$$F(-,-),G(-,-)\in\mathbf{Fct}(\mathcal{C}\times\mathcal{C},\mathcal{C})$$

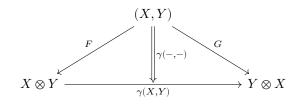
这样可以讨论自然同构

$$\gamma(-,-) \in \text{Nat}(F(-,-),G(-,-))$$

使得下图的外框交换:



下图中,任意二元组  $\forall (X,Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ ,由自然同构  $\gamma(-,-)$  产生了  $\mathcal{C}$  中的同构  $\gamma(X,Y)$ :



用函子范畴的自然同构放松了代数中的交换律要求,在范畴论中不要求结合律的相等  $X \otimes Y = Y \otimes X$  只要求同构所构造的等价关系  $X \otimes Y \simeq Y \otimes X$  并且用函子范畴中的自然同构来描述.

## 单位子 K-列范畴 $Col_K$ 中的态射是矩阵,两个矩阵的**直和 (direct sum)**:

$$\begin{split} f \oplus g : K_n \oplus K_{n'} \to K_m \oplus K_{m'} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fx \\ gy \end{bmatrix} \end{split}$$

直和是一种并行化,通过  $f \oplus g$  同时完成了两个独立的线性映射,也就是将直和  $f \oplus g$  视为二元函数. 由于过去阐述过的双线性的需要,往往用张量积来替代直和进行并行化,构造双线的结构:

$$X \oplus Y \xrightarrow{\quad f \oplus g \quad} X \oplus Y \qquad \qquad X \otimes Y \xrightarrow{\quad f \otimes g \quad} X \otimes Y$$

在范畴上也可以用自然同构的方式构造幺元. 并行的方式可以讲两个态射合并,其中  $f\in \mathrm{End}(X)$  是任意自态射, $1_I\in \mathrm{End}(I)$  是幺元:

$$X \otimes I \xrightarrow{\quad f \otimes 1_I \quad} X \otimes I \qquad \quad I \otimes X \xrightarrow{\quad 1_I \otimes f \quad} I \otimes X$$

现在把代数中  $1 \cdot X = X = X \cdot 1$  这种构造方式,去掉相等的条件,用自然同构来实现. 二元运算视为双函子,进而置于函子范畴构成函子对象:

$$(-\otimes -) \in \mathbf{Fct}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}, \mathcal{C})$$

在固定的 I 下构成函子:

$$F(-) = I \otimes -, \quad G(-) = - \otimes I$$

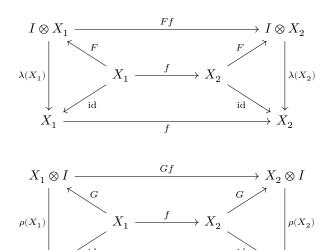
同样置于函子范畴中:

$$F(-),G(-)\in\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{C})$$

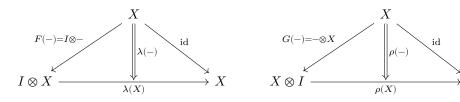
这样可以讨论自然同构

$$\lambda(-) \in \operatorname{Nat}(F(-), \operatorname{id}), \quad \rho(-) \in \operatorname{Nat}(G(-), \operatorname{id})$$

使得以下两图外框交换:

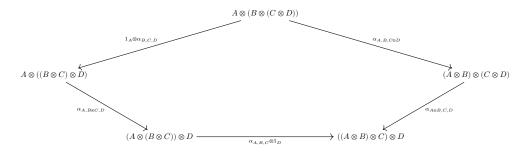


下图中,任意二元组  $\forall X \in \mathcal{C}$ ,由自然同构  $\lambda(-)$  和  $\rho(-)$  产生了  $\mathcal{C}$  中的同构:

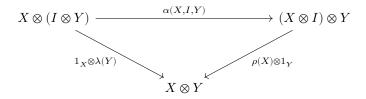


用函子范畴的自然同构放松了代数中的交换律要求,在范畴论中不要求幺元的相等  $I \otimes X = X = X \otimes I$  只要求同构所构造的等价关系  $I \otimes X \simeq X \simeq X \otimes I$  这就是左右**单位子 (unitor)**.

一致性条件 结合子是函子范畴  $\mathbf{Fct}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}, \mathcal{C})$  上的自然变换,产生如下四元结合律:



对于幺元,



以上用自然同构方式构造结合律和幺元,交换图称为一致性条件 (coherence conditions).

**幺半范畴** 在幺半群的定义出现了两处等号,分别是结合律  $(a\circ b)\circ c=a\circ (b\circ c)$  和幺元  $a\circ 1_X=a=1_X\circ a$  条件.按照上节的思想,在范畴中用自然同构来替代相等,将幺半群的定义中的结合律和幺元用一致性条件替代,构造范畴上类似于幺半群的幺半范畴:

# 定义

范畴 € 上赋予双函子:

$$(-\otimes -): \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$
 
$$(X,Y) \mapsto X \otimes Y$$

称为**幺半积 (monoidal product)**,若存在**幺对象 (identity object)**  $I \in \mathcal{C}$ ,以及自然同构  $\alpha(-,-,-),\lambda(-),\rho(-)$  使得一致性条件成立,则称  $\mathcal{V} = (\mathcal{C},\otimes,I,\alpha,\lambda,\rho)$  为**幺半范畴 (monoidal cate-**

### gory).

如果幺半范畴  $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$  中的自然同构  $\alpha, \lambda, \rho$  都是恒等,则称为**严格幺半范畴 (strict monoidal category)**.

幺半范畴是幺半群的抽象,幺半群自然是个幺半范畴.幺半范畴则适用于更广泛的场合:

### 例 0.0.3: 集合范畴

集合范畴 Set, 以集合对象的 Cartes 积为幺半积, 以单点集为幺对象, 构成幺半范畴.

类似的,具有有限积的范畴都可以以终对象为幺对象,构造幺半范畴,称为 Cartesian **幺半范畴** (Cartesian monoidal category).

### 例

范畴  $\mathcal{C}$  上的自函子范畴  $\mathbf{End}^{\mathcal{C}}$ ,以函子的复合为幺半积,以恒等函子为幺对象,构成严格幺半范畴.

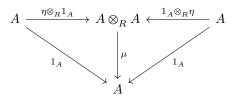
#### 例

幺半积的原型是张量函子. 交换环  $R \in \mathbf{CRing}$  可以通过张量积  $-\otimes_R -$  进行 R-模的运算,使得 R-模 范畴  $\mathbf{Mod}(R)$  在张量积  $\otimes_R$  和幺对象  $R \in \mathbf{Mod}(R)$  下构成幺半范畴. 作为特例,K-线性空间范畴构成幺半范畴 ( $\mathbf{Vct}_K, \otimes_K, K$ ),Abel 群范畴构成幺半范畴 ( $\mathbf{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}$ ).

### 例 0.0.4

交换环  $R \in \mathbf{CRing}$  上的代数范畴  $\mathbf{Alg}_R$  在代数的张量积和幺对象  $R \in \mathbf{Alg}_A$  下构成幺半范畴. 类似于上述幺半群的范畴化定义,下图描述了 R-代数范畴  $\mathbf{Alg}_R$  中的结合律和幺元:

$$\begin{array}{c|c} A \otimes_R A \otimes_R A & \xrightarrow{\quad 1_A \otimes_R \mu} \quad A \otimes_R \\ & \downarrow^{\mu \otimes_R 1_A} & & \downarrow^{\mu} \\ & A \otimes_R A & \xrightarrow{\quad \mu} \quad A \end{array}$$



左图描述的是结合律,右图描述的是幺元,对具体元素的映射关系如下:

