第二季第 2 课：函子范畴 范畴论提供了逐级抽象问题的方法。最初用态射连接对象，之后用函子连接范畴，进一步还要关注函子和函子之间的连接，这就需要把函子作为对象构造函子范畴。自然变换就是函子范畴中的态射。我们给出一些例子说明静态概念如何通过动态箭头连接。在函子范畴中，为了连接两个函子，需要考虑如何连接函子在目标范畴上映射的像，也就是如何连接对象和箭头。自然变换构成范畴论后继学习的基本工具，需要学者熟练掌握。我们给出了高阶同伦的例子，说明从态射到函子到自然变换的意义。

通常，人们用方程刻画相等的关系，建立事物之间的联系。然而方程的条件太强。范畴论往往用等价来构造类似于方程，却比方程灵活的联系。这种等价是通过函子范畴来构造的。例如结合律和交换律，在代数中表示为满足某些方程的条件。我们引入多元函子，把运算用函子来表示，并通过自然变换的方式建立起更灵活的结合律和交换律。

高阶范畴 通常可以理解范畴中的对象体现了静态的概念，是一种实体，视为**名词 (noun)**. 范畴中的态射则是动态概念，它联系了实体，视为有主语的及物**动词 (verb)**.

例: 语言

- 陈述：*罗密欧爱朱丽叶 (Romeo loved Juliet). 罗密欧失去朱丽叶 (Romeo lost Juliet.).*
- 对象：罗密欧 (Romeo)、朱丽叶 (Juliet)
- 态射：爱 (loved)、失去 (lost)

英文中有动名词，动词 love 可以变成动名词 loving. 考虑从爱 (loving) 到失去 (lossing)，这样构造了动名词到动名词的转换.

- 陈述：*Loving evolved to lossing. 爱演变成失去.*
- 对象：爱 (loved)、失去 (lost)
- 态射：演变 (evolved)

在动态的态射上构造进一步的动态转换，这种思想发展为高阶同伦、自然变换乃至高阶范畴.

例: 关系

关系范畴 **Rel** 中的对象为集合，态射为关系 $R \subseteq X \times Y$. 若有两个关系 $R, S \in \mathrm{Hom}(X, Y)$，若关系 R 蕴含 S，即 $R \Longrightarrow S$，从集合上看则有 $X \times Y$ 中的子集包含关系：

$$R \subseteq S$$

这样构造了包含偏序，使得 $X \to Y$ 的关系全体构成偏序集范畴. 这样构造了 $R \to S$ 的 2-态射.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left=50, "R"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "S"'{name=D}] & Y \arrow[Rightarrow, from=U, to=D] \end{tikzcd}$$

例: 高阶同伦

拓扑空间 X 视为范畴，拓扑空间中的点构成对象，点到点的同伦等价类构成态射. 下图给出了两个态射，即由 $f, g \in \mathrm{Hom}(x, y)$ 这两条道路代表的等价类：

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, bend right=60, "g"'] & y \end{tikzcd}$$

进而考虑 f 和 g 这两条道路代表的等价类之间的关系，下图用双线箭头表示 $\varphi, \psi : f \to g$，以体现这是第 2 个层次的转换：

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] x \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, bend right=60, "g"'] \arrow[r, phantom, "\varphi\Downarrow \qquad \Downarrow\psi"] & y \end{tikzcd}$$

0-维的点到点 $x \to y$ 的态射由 1-维连续道路的同伦等价类构成，图中用单线箭头表示．双线箭头则表示了道路等价类到道路等价类的转换，图中中双线箭头表示，几何上相当于 2-维的面．再进一步可以考虑 φ 和 ψ 这两个 2-维面的等价类的关系，下图用三线箭头表示 $A, B : \varphi \to \psi$，以体现这是第 3 个层次的转换：

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] x \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, bend right=60, "g"'] \arrow[r, phantom, "\varphi\Downarrow \begin{smallmatrix} \overset{A}{\Rrightarrow} \\ \vdots \\ \underset{B}{\Rrightarrow} \end{smallmatrix} \Downarrow\psi"] & y \end{tikzcd}$$

这样可以一直下去，产生各阶同伦的概念.

函子范畴　考虑两个具有相同起止的函子 $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，将它们纳入到范畴中讨论，形如 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 的函子的全体构成**函子范畴 (category of functors)**，区分共变/反变后记为：

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}), \quad \mathbf{Fct}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D})$$

函子范畴中的对象是固定两个范畴有序对的函子，而函子范畴中的态射则是自然变换.

范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射 $\forall f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$，它被两个同的函子以不同方式映射到范畴 $\mathcal{D}$ 中：

$$F : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(FX, FY)$$

$$f \mapsto Ff$$

$$G : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(GX, GY)$$

$$f \mapsto Gf$$

将函子视为函子范畴的对象，考虑函子范畴的态射：

$$\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

它建立了 $FX \to GX$ 和 $FY \to GY$ 的联系．具体而言，Φ 从范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象诱导出范畴 $\mathcal{D}$ 中的态射：

$$
\begin{aligned}
\Phi : \mathcal{C} &\to \mathrm{Mor}(\mathcal{D}) \\
X &\mapsto \Phi(X) \in \mathrm{Hom}(FX, GX) \\
Y &\mapsto \Phi(Y) \in \mathrm{Hom}(FY, GY)
\end{aligned}
$$

这样得到下图，其中内部是 $\mathcal{C}$，外框是范畴 $\mathcal{D}$：

$$
\begin{tikzcd}
FX \arrow[rrrr, "Ff"] \arrow[dd, "\Phi(X)"'] & & & & FY \arrow[dd, "\Phi(Y)"] \\
{} & X \arrow[ul, "F"'] \arrow[dl, "G"] \arrow[l, Rightarrow, "\Phi"'] \arrow[r, dash] & f \arrow[u, Rightarrow, "F"'] \arrow[d, Rightarrow, "G"] \arrow[r] & Y \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "G"'] \arrow[r, Rightarrow, "\Phi"] & {} \\
GX \arrow[rrrr, "Gf"'] & & & & GY
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r] \arrow[d] & FY \arrow[d] \\
GX \arrow[r] & GY
\end{tikzcd}
$$

如果上图右的范畴 $\mathcal{D}$ 部分交换，则 $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 称为**自然变换 (natural transformation)**，它就是函子范畴 $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 中的态射．自然变换又称为**函子态射 (functorial morphism)**，提示我们可以用范畴的观点看待函子的集合．通常把两个函子 $F, G \in \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 的自然变换的全体记为

$$
\mathrm{Nat}(F, G) = \mathrm{Hom}(F, G) = \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})(F, G)
$$

函子态射 $\Phi : F \to G$ 对于 $\forall X \in \mathcal{C}$ 有 $\Phi(X) : FX \to GX$，若所有 $\Phi(X)$ 是同构则称 Φ 是**自然同构 (natural isomorphism)**．以下构成左右逆的一对函子，使得两个范畴同构：

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, shift left, "T"] \arrow[loop left, "ST=1_{\mathcal{C}}"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "S"] \arrow[loop right, "TS=1_{\mathcal{D}}"]
\end{tikzcd}
$$

在第一季宣讲课提到《构建数学和物理基础的范畴论：用等价取代相等 | 众妙之门 - 返朴》，其中给出了一个高阶同伦的例子．拓扑空间 X 上有两个点，这两个点视为 0-维边界，为强调这个维度，记为 x^0, y^0．将两个点之间的连续道路的集合记为 $\Gamma(x^0, y^0)$．若这个集合非空，即存在连续道路连接 0-维边界，则称两点同伦等价 $x^0 \sim y^0$。若有两条连续道路，沿用上面的记号，视为 1-维边界 $x^1, y^1 \in \Gamma(x^0, y^0)$．将两条连续道路之间的连续面的集合记为 $\Gamma(x^1, y^1)$．若这个集合非空，即存在连续面连接 1-维边界，则称两条连续道路同伦等价 $x^1 \sim y^1$．继续向更高维度发展，考察两个 n-维度边界之间的 $(n+1)$ 维连续几何体的连接．这样将建立一个等价关系的无穷结构，从所有维度去理解拓扑空间 X 及其上的点．同伦和范畴中的交换图很相似．一维同伦体现了有连续的道路连接点边界，而态射则体现了有箭头连接对象．更高维的同伦，则需要更高阶的范畴来对应．

Hom 函子　以共变 Hom 函子例说明自然变换的原理．在范畴中取两个对象 $X, Y \in \mathcal{C}$，有两个共变 Hom 函子，置于函子范畴：

$$
h^X, h^Y \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C} = \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})}
$$

这样可以讨论自然变换：

$$
\Phi \in \mathrm{Nat}(h^X, h^Y)
$$

使得对于 $\forall A, B \in \mathcal{C}$ 下图外框交换：

$$
\begin{tikzcd}
h^X A \arrow[rrr, "h^X f = f\circ"] \arrow[dd, "\Phi(A)"'] & & & h^X B \arrow[dd, "\Phi(B)"] \\
{} & A \arrow[ul, "h^X"'] \arrow[dl, "h^Y"] \arrow[l, Rightarrow, "\Phi"'] \arrow[r, "f"] & B \arrow[ur, "h^X"] \arrow[dr, "h^Y"'] \arrow[r, Rightarrow, "\Phi"] & {} \\
h^Y A \arrow[rrr, "h^Y f = f\circ"'] & & & h^Y B
\end{tikzcd}
$$

上图走两条路径满足:

$$f \circ \Phi(A) = \Phi(B) \circ f$$

例: R-列范畴 Col_R

Nat-Hom

R-列范畴 $\mathbf{Col}_R$ 上取两个对象 $X = R_x, Y = R_y \in \mathbf{Col}_R$，自然变换:

$$\Phi \in \mathrm{Nat}(h^X, h^Y)$$

要求对于 $\forall A = R_a, B = R_b \in \mathbf{Col}_R$ 下图外框交换:

$$
\begin{tikzcd}
h^X A = R_a^x \arrow[rrr, "(h^X f = f\circ) \in \mathrm{Hom}(R_a^x, R_b^x)"] \arrow[dd, "\Phi(A) \in \mathrm{Hom}(R_a^x, R_a^y)"'] & & & h^X B = R_b^x \arrow[dd, "\Phi(B) \in \mathrm{Hom}(R_b^x, R_b^y)"] \\
{} & A = R_a \arrow[ul, "h^X"'] \arrow[dl, "h^Y"] \arrow[l, Rightarrow, "\Phi"'] \arrow[r, "f \in R_b^a"] & B = R_b \arrow[ur, "h^X"] \arrow[dr, "h^Y"'] \arrow[r, Rightarrow, "\Phi"] & {} \\
h^Y A = R_a^y \arrow[rrr, "(h^Y f = f\circ) \in \mathrm{Hom}(R_a^y, R_b^y)"'] & & & h^Y B = R_b^y
\end{tikzcd}
$$

列范畴的态射是矩阵，态射的复合也表示为矩阵的乘法. 自然变换的交换图要求:

$$f \circ \Phi(A) = \Phi(B) \circ f$$

上图说明了 $h^X A \to h^Y B$ 的两条复合路径，即按照不同的先后顺序转换行列的维度，最终完成了维度转换:

$$R_a^x \to R_b^y$$

其中 $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ 是行数 $a \to b$ 的转换:

$$f : R_a \to R_b$$

自然变换 $\Phi \in \mathrm{Nat}(h^X, h^Y)$ 是列数 $x \to y$ 的转换:

$$\Phi : \mathrm{Hom}(R_x, -) \to \mathrm{Hom}(R_y, -)$$

《构建数学和物理基础的范畴论：用等价取代相等 | 众妙之门 - 返朴》[?] 谈到了范畴论中同构更加灵活的意义. 放弃严格的**相等 (equality)**而改用灵活的**同构 (isomorphism)**，可以更好地描述诸多的实际问题.

幺半群 回顾过去定义的幺半群:

定义: 幺半群的代数式定义

集合 X 上赋予二元运算 $\circ$，即映射

$$\begin{aligned} \circ : X \times X &\to X \\ (a, b) &\mapsto a \circ b \end{aligned}$$

若它是封闭的，且满足：

- 结合律：对于 $\forall a, b, c \in X$ 满足 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- 幺元：若 $\exists 1_X \in X$ 使得对于 $\forall a \in X$ 满足 $a \circ 1_X = a = 1_X \circ a$，称 1_X 为幺元

则称 $(X, \circ, 1_X)$ 为**幺半群 (monoid)**.

这里用代数化的方式所描述的结合律和幺元，相当于用方程的**相等 (equality)**形式给出了一种静态的约束条件. 范畴论则倾向于更加动态的方式来描述概念，下面给出态射式的定义：

定义: 幺半群的态射式定义

幺半群 (monoid)是一个集合范畴的对象 $X \in \mathbf{Set}$，并且有 $\mathbf{Set}$ 中的态射 $\mu : X \times X \to X$ 和 $\eta : 1 \to X$ 使得下图交换：

$$
\begin{tikzcd}
X \times X \times X \arrow[r, "1_X \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times 1_X"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\
X \times X \arrow[r, "\mu"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta \times 1_X"] \arrow[dr, "1_X"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] & X \arrow[l, "1_X \times \eta"'] \arrow[dl, "1_X"] \\
& X &
\end{tikzcd}
$$

即对于 $\forall a, b, c, \in X$ 有：

$$
\begin{tikzcd}
(a, b, c) \arrow[r, mapsto, "1_X \times \mu"] \arrow[d, mapsto, "\mu \times 1_X"'] & (a, b \cdot c) \arrow[d, mapsto, "\mu"] \\
(a \cdot b, c) \arrow[r, mapsto, "\mu"'] & (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto, "\eta \times 1_X"] \arrow[dr, mapsto, "1_X"'] & (1, a) = (a, 1) \arrow[d, mapsto, "\mu"] & a \arrow[l, mapsto, "1_X \times \eta"'] \arrow[dl, mapsto, "1_X"] \\
& 1 \cdot a = a = a \cdot 1 &
\end{tikzcd}
$$

这里的 $1 \in X$ 即是幺元.

以上左图描述的是结合律，右图描述的是幺元. 接下来，进一步发展这种借助交换图的、动态的描述方式，并把以上定义的态射方式进一步发展为自然同构的方式.

结合律 接用张量积的符号 $\otimes$ 描述封闭的二元运算. 如果有结合律 $X \otimes (Y \otimes Z) = (X \otimes Y) \otimes Z$，用二元运算 $\otimes$ 构造多元运算便不会产生运算顺序导致的歧义问题，可以直接用 $X \otimes Y \otimes Z$ 乃至 $V^{\otimes n}$ 这样的形式来表述.

现实中用相等来定义的结合律要求过于严格，故在范畴中结合律可以用自然同构实现 [**?**]. 结合律的表述需要三个变元，三元运算可以视为函子：

$$F = F(-, -, -) = ((- \otimes -) \otimes -), \quad G = G(-, -, -) = (- \otimes (- \otimes -))$$

置于三函子范畴中：

$$F, G \in \mathbf{Fct}(\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}, \mathcal{C})$$

这样可以讨论自然同构

$$\alpha = \alpha(-, -, -) \in \mathrm{Nat}(F, G)$$

使得下图的外框交换：

$$
\begin{tikzcd}
(X_1 \otimes Y_1) \otimes Z_1 \arrow[rrr, "Ff"] \arrow[dd, "\alpha(X_1, Y_1, Z_1)"'] & & & (X_2 \otimes Y_2) \otimes Z_2 \arrow[dd, "\alpha(X_2, Y_2, Z_2)"] \\
& (X_1, Y_1, Z_1) \arrow[r, "f"] \arrow[ul, "F"'] \arrow[dl, "G"] & (X_2, Y_2, Z_2) \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \\
X_1 \otimes (Y_1 \otimes Z_1) \arrow[rrr, "Gf"'] & & & X_2 \otimes (Y_2 \otimes Z_2)
\end{tikzcd}
$$

下图中，任意三元组 $\forall(X,Y,Z)\in\mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C}$，由自然同构 $\alpha(-,-,-)$ 产生了 $\mathcal{C}$ 中的同构 $\alpha(X,Y,Z)$:

$$\begin{tikzcd}
 & (X,Y,Z) \arrow[dl, "F=((-\otimes-)\otimes-)"'] \arrow[dr, "G=(-\otimes(-\otimes-))"] \arrow[d, Rightarrow, "\alpha(-,-,-)"] & \\
(X\otimes Y)\otimes Z \arrow[r, "\alpha(X,Y,Z)"'] & {} \arrow[r] & X\otimes(Y\otimes Z)
\end{tikzcd}$$

这就是**结合子 (associator)**. 用结合子 α 这种自然同构放松了代数中的结合律要求，在范畴论中不要求结合律的相等 $X\otimes(Y\otimes Z)=(X\otimes Y)\otimes Z$ 只要求自然同构 α 所构造的等价关系 $X\otimes(Y\otimes Z)\simeq(X\otimes Y)\otimes Z$ 并且用函子范畴中的自然同构来描述.

例: 集合范畴

令 $X,Y,Z\in\mathbf{Set}$ 为集合，对于 $x\in X, y\in Y, z\in Z$，$(x,(y,z))\neq((x,y),z)$ 且 $X\times(Y\times Z)\neq((X\times Y)\times Z)$，但有结合子产生同构 $X\times(Y\times Z)\simeq((X\times Y)\times Z)$。

例: 数的乘法

以自然数上的乘法 $(\mathbb{N},\cdot)$ 结构为例，若以自然数为对象构成离散范畴 $\mathbb{N}$，乘法构成双函子 $(-\cdot-):(\mathbb{N},\mathbb{N})\to\mathbb{N}$。结合律的表述需要三个变元,三元运算可以视为函子: $F=F(-,-,-)=((-\cdot-)\cdot-)$, $G=G(-,-,-)=(-\cdot(-\cdot-))$ 置于三函子范畴中: $F,G\in\mathbf{Fct}((\mathbb{N},\mathbb{N},\mathbb{N}),\mathcal{C})$ 这样可以讨论自然同构

$$\alpha=\alpha(-,-,-)\in\mathrm{Nat}(F,G)$$

下图用结合子来表述

$$\begin{tikzcd}
 & (a,b,c) \arrow[dl, "F=((-\cdot-)\cdot-)"'] \arrow[dr, "G=(-\cdot(-\cdot-))"] \arrow[d, Rightarrow, "\alpha(-,-,-)"] & \\
(a\cdot b)\cdot c \arrow[r, "\alpha(a,b,c)"'] & {} \arrow[r] & a\cdot(b\cdot c)
\end{tikzcd}$$

在整数上结合子无非是对相等的一种抽象表示，矩阵乘法上则更有意义:

例: 矩阵乘法

考虑矩阵乘法的结合

$$\left(w^*Av=\begin{bmatrix}3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix}=341\right)=\left((w^*A)v=\begin{bmatrix}19&26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix}\right)=\left(w^*(Av)=\begin{bmatrix}3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}23\\68\end{bmatrix}\right)$$

用自然同构描述:

$$\begin{tikzcd}
 & (w^*,A,v) \arrow[dl, "F=((-\cdot-)\cdot-)"'] \arrow[dr, "G=(-\cdot(-\cdot-))"] \arrow[d, Rightarrow, "\alpha(-,-,-)"] & \\
(w^*A)v \arrow[r, "\alpha(w^*,A,v)"'] & {} \arrow[r] & w^*(Av)
\end{tikzcd}$$

交换律　范畴上的交换律，方法和以上对结合律的讨论类似. 从函子范畴的角度来讨论范畴上的代数运算，二元运算视为双函子，进而置于函子范畴构成函子对象:

$$(-\otimes-)\in\mathbf{Fct}(\mathcal{C}\times\mathcal{C},\mathcal{C})$$

按照运算的顺序有函子:

$$F(X,Y) = X \otimes Y, \quad G(X,Y) = Y \otimes X$$

同样置于函子范畴中:

$$F(-,-), G(-,-) \in \mathbf{Fct}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}, \mathcal{C})$$

这样可以讨论自然同构

$$\gamma(-,-) \in \mathrm{Nat}(F(-,-), G(-,-))$$

使得下图的外框交换:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \otimes Y_1 \arrow[rrr, "Ff"] \arrow[dd, "\gamma(X_1,Y_1)"'] & & & X_2 \otimes Y_2 \arrow[dd, "\gamma(X_2,Y_2)"] \\
& (X_1,Y_1) \arrow[r, "f"] \arrow[ul, "F"'] \arrow[dl, "G"] & (X_2,Y_2) \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \\
Y_1 \otimes X_1 \arrow[rrr, "Gf"'] & & & Y_2 \otimes X_2
\end{tikzcd}$$

下图中，任意二元组 $\forall (X,Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$，由自然同构 $\gamma(-,-)$ 产生了 $\mathcal{C}$ 中的同构 $\gamma(X,Y)$:

$$\begin{tikzcd}
& (X,Y) \arrow[dl, "F"'] \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \gamma(-,-)"] & \\
X \otimes Y \arrow[rr, "\gamma(X,Y)"'] & {} & Y \otimes X
\end{tikzcd}$$

用函子范畴的自然同构放松了代数中的交换律要求，在范畴论中不要求结合律的相等 $X \otimes Y = Y \otimes X$ 只要求同构所构造的等价关系 $X \otimes Y \simeq Y \otimes X$ 并且用函子范畴中的自然同构来描述.

单位子 在范畴上也可以用自然同构的方式构造幺元. 并行的方式可以讲两个态射合并，其中 $f \in \mathrm{End}(X)$ 是任意自态射，$1_I \in \mathrm{End}(I)$ 是恒等态射:

$$X \otimes I \xrightarrow{f \otimes 1_I} X \otimes I \qquad I \otimes X \xrightarrow{1_I \otimes f} I \otimes X$$

现在把代数中 $1 \cdot X = X = X \cdot 1$ 这种构造方式，去掉相等的条件，用自然同构来实现. 二元运算视为双函子，进而置于函子范畴构成函子对象:

$$(- \otimes -) \in \mathbf{Fct}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}, \mathcal{C})$$

在固定的 I 下构成函子:

$$F(-) = I \otimes -, \quad G(-) = - \otimes I$$

同样置于函子范畴中:

$$F(-), G(-) \in \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$$

这样可以讨论自然同构

$$\lambda(-) \in \mathrm{Nat}(F(-), \mathrm{id}), \quad \rho(-) \in \mathrm{Nat}(G(-), \mathrm{id})$$

使得以下两图外框交换:

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes X_1 \arrow[rrr, "Ff"] \arrow[dd, "\lambda(X_1)"'] & & & I \otimes X_2 \arrow[dd, "\lambda(X_2)"] \\
& X_1 \arrow[ul, "F"'] \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] & X_2 \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \\
X_1 \arrow[rrr, "f"'] & & & X_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \otimes I \arrow[rrr, "Gf"] \arrow[dd, "\rho(X_1)"'] & & & X_2 \otimes I \arrow[dd, "\rho(X_2)"] \\
& X_1 \arrow[ul, "G"'] \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] & X_2 \arrow[ur, "G"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \\
X_1 \arrow[rrr, "f"'] & & & X_2
\end{tikzcd}
$$

下图中，任意二元组 $\forall X \in \mathcal{C}$，由自然同构 $\lambda(-)$ 和 $\rho(-)$ 产生了 $\mathcal{C}$ 中的同构：

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "F(-)=I\otimes-"'] \arrow[d, Rightarrow, "\lambda(-)"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
I \otimes X \arrow[rr, "\lambda(X)"'] & {} & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "G(-)=-\otimes X"'] \arrow[d, Rightarrow, "\rho(-)"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
X \otimes I \arrow[rr, "\rho(X)"'] & {} & X
\end{tikzcd}
$$

用函子范畴的自然同构放松了代数中的交换律要求，在范畴论中不要求幺元的相等 $I \otimes X = X = X \otimes I$ 只要求同构所构造的等价关系 $I \otimes X \simeq X \simeq X \otimes I$ 这就是左右**单位子 (unitor)**.