第二季第 9 课：幺半范畴　首先简短回顾了张量积概念的发展，包括在线性空间和模范畴上的直和和张量积。从幺半群的代数概念出发，引入幺半范畴。幺半群上有一个封闭的二元运算，代之以双函子的方式描述，最直接的例子就是张量积。用计算机科学中的表达式树，描述了三元运算的不同结合顺序，幺半群中的结合律，其范畴化的描述就是在两个三元函子上，通过自然同构建立等价，构成了条件更为宽松的结合律。

用函子化的方式改造幺半群的构造方式，引入了幺半范畴。幺半范畴的定义拆解开，主要部分就是如何用自然同构来描述结合律和左右幺元律，以及这些条件的组合，即所谓的一致性条件。

作为实例，我们在集合范畴上用直积构造了一个幺半范畴的例子。作为对比，还引入了 Hilbert 空间范畴，用线性空间的张量积构造了幺半范畴的另一个例子，这个例子是许多前沿的量子理论研究的基础。从某种角度看，集合范畴和 Hilbert 空间范畴在构造幺半范畴后的不同，形成了经典/量子理论的分野。

幺半群　放弃严格的**相等 (equality)**而改用灵活的**同构 (isomorphism)**，可以更好地描述诸多的实际问题. 回顾幺半群：

定义: 幺半群的代数式定义

集合 X 上赋予二元运算 $\circ$，即映射

$$\begin{aligned} \circ : X \times X &\to X \\ (a,b) &\mapsto a \circ b \end{aligned}$$

若它是封闭的，且满足：

- 结合律：对于 $\forall a,b,c \in X$ 满足 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- 幺元：若 $\exists 1_X \in X$ 使得对于 $\forall a \in X$ 满足 $a \circ 1_X = a = 1_X \circ a$，称 1_X 为幺元

则称 $(X, \circ, 1_X)$ 为**幺半群 (monoid)**.

这里用代数化的方式所描述的结合律和幺元，相当于用方程的**相等 (equality)**形式给出了一种静态的约束条件. 范畴论则倾向于更加动态的方式来描述概念，下面给出态射式的定义：

定义 0.0.1: 幺半群的态射式定义

幺半群 (monoid)是一个集合范畴的对象 $X \in \mathbf{Set}$, 并且有 $\mathbf{Set}$ 中的态射 $\mu : X \times X \to X$ 和 $\eta : 1 \to X$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} X \times X \times X \arrow[r, "1_X \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times 1_X"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\ X \times X \arrow[r, "\mu"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta \times 1_X"] \arrow[dr, "1_X"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] & X \arrow[l, "1_X \times \eta"'] \arrow[dl, "1_X"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

即对于 $\forall a, b, c, \in X$ 有：

$$\begin{tikzcd} (a,b,c) \arrow[r, mapsto, "1_X \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times 1_X"'] & (a, b \cdot c) \arrow[d, "\mu"] \\ (a \cdot b, c) \arrow[r, mapsto, "\mu"'] & (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, mapsto, "\eta \times 1_X"] \arrow[dr, "1_X"'] & (1,a) = (a,1) \arrow[d, "\mu"] & a \arrow[l, mapsto, "1_X \times \eta"'] \arrow[dl, "1_X"] \\ & 1 \cdot a = a = a \cdot 1 & \end{tikzcd}$$

这里的 $1 \in X$ 即是幺元.

以上左图描述的是结合律，右图描述的是幺元. 接下来，进一步发展这种借助交换图的、动态的描述方式，并把以上定义的态射方式进一步发展为自然同构的方式.

结合子 接用张量积的符号 $\otimes$ 描述封闭的二元运算. 如果有结合律 $X\otimes(Y\otimes Z)=(X\otimes Y)\otimes Z$，用二元运算 $\otimes$ 构造多元运算便不会产生运算顺序导致的歧义问题，可以直接用 $X\otimes Y\otimes Z$ 乃至 $V^{\otimes n}$ 这样的形式来表述.

现实中用相等来定义的结合律要求过于严格，故在范畴中结合律可以用自然同构实现. 结合律的表述需要三个变元，三元运算可以视为函子:

$$F=F(-,-,-)=((-\otimes-)\otimes-),\quad G=G(-,-,-)=(-\otimes(-\otimes-))$$

置于三函子范畴中:

$$F,G\in\mathbf{Fct}(\mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C},\mathcal{C})$$

这样可以讨论自然同构

$$\alpha=\alpha(-,-,-)\in\mathrm{Nat}(F,G)$$

使得下图的外框交换:

$$\begin{tikzcd}
(X_1\otimes Y_1)\otimes Z_1 \arrow[rrr, "Ff"] \arrow[dd, "\alpha(X_1,Y_1,Z_1)"'] & & & (X_2\otimes Y_2)\otimes Z_2 \arrow[dd, "\alpha(X_2,Y_2,Z_2)"] \\
& (X_1,Y_1,Z_1) \arrow[r, "f"] \arrow[ul, "F"'] \arrow[dl, "G"] & (X_2,Y_2,Z_2) \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \\
X_1\otimes(Y_1\otimes Z_1) \arrow[rrr, "Gf"'] & & & X_2\otimes(Y_2\otimes Z_2)
\end{tikzcd}$$

下图中，任意三元组 $\forall(X,Y,Z)\in\mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C}$，由自然同构 $\alpha(-,-,-)$ 产生了 $\mathcal{C}$ 中的同构 $\alpha(X,Y,Z)$:

$$\begin{tikzcd}
& (X,Y,Z) \arrow[dl, "F=((-\otimes-)\otimes-)"'] \arrow[dr, "G=(-\otimes(-\otimes-))"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\alpha(-,-,-)"] & \\
(X\otimes Y)\otimes Z \arrow[rr, "\alpha(X,Y,Z)"'] & {} & X\otimes(Y\otimes Z)
\end{tikzcd}$$

这就是**结合子 (associator)**. 用结合子 α 这种自然同构放松了代数中的结合律要求，在范畴论中不要求结合律的相等 $X\otimes(Y\otimes Z)=(X\otimes Y)\otimes Z$ 只要求自然同构 α 所构造的等价关系 $X\otimes(Y\otimes Z)\simeq(X\otimes Y)\otimes Z$ 并且用函子范畴中的自然同构来描述.

例 0.0.1: 集合范畴

令 $X,Y,Z\in\mathbf{Set}$ 为集合，对于 $x\in X,y\in Y,z\in Z$，$(x,(y,z))\neq((x,y),z)$ 且 $X\times(Y\times Z)\neq((X\times Y)\times Z)$，但有结合子产生同构 $X\times(Y\times Z)\simeq((X\times Y)\times Z)$.

例: 数的乘法

以自然数上的乘法 $(\mathbb{N},\cdot)$ 结构为例，若以自然数为对象构成离散范畴 $\mathbb{N}$，乘法构成双函子 $(-\cdot-):(\mathbb{N},\mathbb{N})\to\mathbb{N}$. 结合律的表述需要三个变元，三元运算可以视为函子: $F=F(-,-,-)=((-\cdot-)\cdot-)$, $\quad G=G(-,-,-)=(-\cdot(-\cdot-))$ 置于三函子范畴中: $F,G\in\mathbf{Fct}((\mathbb{N},\mathbb{N},\mathbb{N}),\mathcal{C})$ 这样可以讨论自然同构

$$\alpha=\alpha(-,-,-)\in\mathrm{Nat}(F,G)$$

下图用结合子来表述

$$
\begin{tikzcd}
 & (a,b,c) \arrow[dl, "F=((-\cdot-)\cdot-)"'] \arrow[dr, "G=(-\cdot(-\cdot-))"] \arrow[d, Rightarrow, "\alpha(-,-,-)"] & \\
(a\cdot b)\cdot c \arrow[rr, "\alpha(a,b,c)"'] & {} & a\cdot(b\cdot c)
\end{tikzcd}
$$

例 0.0.2: 张量空间

类似例0.0.1，对于 K-线性空间 $A,B,C\in\mathbf{Vct}_K$ 有如下同构：

$$A\otimes(B\otimes C)\xrightarrow[\simeq]{\alpha_{A,B,C}}(A\otimes B)\otimes C$$

$\alpha_{A,B,C}$ 称为**结合子 (associator)**，它是 $V\in\mathbf{Vct}_K$ 上的自然同构.
记 $T^0V=K$，$T^1V=V$，$T^2V=V\otimes V$. 在同构的意义下可以把 K-线性空间 $V\in\mathbf{Vct}_K$ 的 3 阶张量记为：

$$T^3V=(V\otimes V)\otimes V\simeq V\otimes(V\otimes V)$$

类似可以定义更高阶的张量空间

$$T^nV=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{n\text{ times}}$$

交换子　范畴上的交换律，方法和以上对结合律的讨论类似. 从函子范畴的角度来讨论范畴上的代数运算，二元运算视为双函子，进而置于函子范畴构成函子对象：

$$(-\otimes-)\in\mathbf{Fct}(\mathcal{C}\times\mathcal{C},\mathcal{C})$$

按照运算的顺序有函子：

$$F(X,Y)=X\otimes Y,\quad G(X,Y)=Y\otimes X$$

同样置于函子范畴中：

$$F(-,-),G(-,-)\in\mathbf{Fct}(\mathcal{C}\times\mathcal{C},\mathcal{C})$$

这样可以讨论自然同构

$$\gamma(-,-)\in\mathrm{Nat}(F(-,-),G(-,-))$$

使得下图的外框交换：

$$
\begin{tikzcd}
X_1\otimes Y_1 \arrow[rrr, "Ff"] \arrow[dd, "\gamma(X_1,Y_1)"'] & & & X_2\otimes Y_2 \arrow[dd, "\gamma(X_2,Y_2)"] \\
 & (X_1,Y_1) \arrow[ul, "F"'] \arrow[dl, "G"] \arrow[r, "f"] & (X_2,Y_2) \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \\
Y_1\otimes X_1 \arrow[rrr, "Gf"'] & & & Y_2\otimes X_2
\end{tikzcd}
$$

下图中，任意二元组 $\forall(X,Y)\in\mathcal{C}\times\mathcal{C}$，由自然同构 $\gamma(-,-)$ 产生了 $\mathcal{C}$ 中的同构 $\gamma(X,Y)$：

$$
\begin{tikzcd}
 & (X,Y) \arrow[dl, "F"'] \arrow[dr, "G"] \arrow[d, Rightarrow, "\gamma(-,-)"] & \\
X\otimes Y \arrow[rr, "\gamma(X,Y)"'] & {} & Y\otimes X
\end{tikzcd}
$$

用函子范畴的自然同构放松了代数中的交换律要求，在范畴论中不要求结合律的相等 $X \otimes Y = Y \otimes X$ 只要求同构所构造的等价关系 $X \otimes Y \simeq Y \otimes X$ 并且用函子范畴中的自然同构来描述.

单位子　K-列范畴 $\mathbf{Col}_K$ 中的态射是矩阵，两个矩阵的**直和 (direct sum)**：

$$f \oplus g : K_n \oplus K_{n'} \to K_m \oplus K_{m'}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f & \\ & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fx \\ gy \end{bmatrix}$$

直和是一种并行化，通过 $f \oplus g$ 同时完成了两个独立的线性映射，也就是将直和 $f \oplus g$ 视为二元函数. 由于过去阐述过的双线性的需要，往往用张量积来替代直和进行并行化，构造双线的结构：

$$X \oplus Y \xrightarrow{f \oplus g} X \oplus Y \qquad X \otimes Y \xrightarrow{f \otimes g} X \otimes Y$$

在范畴上也可以用自然同构的方式构造幺元. 并行的方式可以讲两个态射合并，其中 $f \in \mathrm{End}(X)$ 是任意自态射，$1_I \in \mathrm{End}(I)$ 是幺元：

$$X \otimes I \xrightarrow{f \otimes 1_I} X \otimes I \qquad I \otimes X \xrightarrow{1_I \otimes f} I \otimes X$$

现在把代数中 $1 \cdot X = X = X \cdot 1$ 这种构造方式，去掉相等的条件，用自然同构来实现. 二元运算视为双函子，进而置于函子范畴构成函子对象：

$$(- \otimes -) \in \mathbf{Fct}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}, \mathcal{C})$$

在固定的 I 下构成函子：

$$F(-) = I \otimes -, \quad G(-) = - \otimes I$$

同样置于函子范畴中：

$$F(-), G(-) \in \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$$

这样可以讨论自然同构

$$\lambda(-) \in \mathrm{Nat}(F(-), \mathrm{id}), \quad \rho(-) \in \mathrm{Nat}(G(-), \mathrm{id})$$

使得以下两图外框交换：

$$\begin{tikzcd}
I \otimes X_1 \arrow[rrr, "Ff"] \arrow[dd, "\lambda(X_1)"'] & & & I \otimes X_2 \arrow[dd, "\lambda(X_2)"] \\
& X_1 \arrow[ul, "F"'] \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] & X_2 \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \\
X_1 \arrow[rrr, "f"'] & & & X_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X_1 \otimes I \arrow[rrr, "Gf"] \arrow[dd, "\rho(X_1)"'] & & & X_2 \otimes I \arrow[dd, "\rho(X_2)"] \\
& X_1 \arrow[ul, "G"'] \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] & X_2 \arrow[ur, "G"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \\
X_1 \arrow[rrr, "f"'] & & & X_2
\end{tikzcd}$$

下图中，任意二元组 $\forall X \in \mathcal{C}$，由自然同构 $\lambda(-)$ 和 $\rho(-)$ 产生了 $\mathcal{C}$ 中的同构：

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "F(-)=I\otimes -"'] \arrow[d, Rightarrow, "\lambda(-)"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
I\otimes X \arrow[rr, "\lambda(X)"'] & {} & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "G(-)=-\otimes X"'] \arrow[d, Rightarrow, "\rho(-)"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
X\otimes I \arrow[rr, "\rho(X)"'] & {} & X
\end{tikzcd}
$$

用函子范畴的自然同构放松了代数中的交换律要求，在范畴论中不要求幺元的相等 $I\otimes X = X = X\otimes I$ 只要求同构所构造的等价关系 $I\otimes X \simeq X \simeq X\otimes I$ 这就是左右**单位子 (unitor)**.

一致性条件 结合子是函子范畴 $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}\times\mathcal{C},\mathcal{C})$ 上的自然变换，产生如下四元结合律：

$$X\otimes(Y\otimes(Z\otimes W)) \xrightarrow[\simeq]{\alpha(X,Y,Z\otimes W)} (X\otimes Y)\otimes(Z\otimes W)$$

$$(X\otimes Y)\otimes(Z\otimes w) \xrightarrow[\simeq]{\alpha(X\otimes Y,Z,W)} ((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes W$$

$$X\otimes((Y\otimes Z)\otimes w) \xrightarrow[\simeq]{\alpha(X,Y\otimes Z,W)} (X\otimes(Y\otimes Z))\otimes W$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & A\otimes(B\otimes(C\otimes D)) \arrow[dll, "1_A\otimes\alpha_{B,C,D}"'] \arrow[drr, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"] & & \\
A\otimes((B\otimes C)\otimes D) \arrow[dr, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"'] & & & & (A\otimes B)\otimes(C\otimes D) \arrow[dl, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"] \\
 & (A\otimes(B\otimes C))\otimes D \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C}\otimes 1_D"'] & & ((A\otimes B)\otimes C)\otimes D &
\end{tikzcd}
$$

对于幺元，

$$
\begin{tikzcd}
X\otimes(I\otimes Y) \arrow[rr, "\alpha(X,I,Y)"] \arrow[dr, "1_X\otimes\lambda(Y)"'] & & (X\otimes I)\otimes Y \arrow[dl, "\rho(X)\otimes 1_Y"] \\
 & X\otimes Y &
\end{tikzcd}
$$

以上用自然同构方式构造结合律和幺元，交换图称为**一致性条件 (coherence conditions)**.

幺半范畴 在幺半群的定义出现了两处等号，分别是结合律 $(a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)$ 和幺元 $a\circ 1_X = a = 1_X\circ a$ 条件. 按照上节的思想，在范畴中用自然同构来替代相等，将幺半群的定义中的结合律和幺元用一致性条件替代，构造范畴上类似于幺半群的幺半范畴：

定义

范畴 $\mathcal{C}$ 上赋予双函子：

$$
\begin{aligned}
(-\otimes-):\mathcal{C}\times\mathcal{C}&\to\mathcal{C}\\
(X,Y)&\mapsto X\otimes Y
\end{aligned}
$$

称为**幺半积 (monoidal product)**，若存在**幺对象 (identity object)** $I\in\mathcal{C}$，以及自然同构 $\alpha(-,-,-),\lambda(-),\rho(-)$ 使得一致性条件成立，则称 $\mathcal{V}=(\mathcal{C},\otimes,I,\alpha,\lambda,\rho)$ 为**幺半范畴 (monoidal cate-**

gory).
如果幺半范畴 $(\mathcal{C},\otimes,I,\alpha,\lambda,\rho)$ 中的自然同构 α,λ,ρ 都是恒等，则称为**严格幺半范畴 (strict monoidal category)**.

幺半范畴是幺半群的抽象，幺半群自然是个幺半范畴. 幺半范畴则适用于更广泛的场合:

例 0.0.3: 集合范畴

集合范畴 **Set**，以集合对象的 Cartes 积为幺半积，以单点集为幺对象，构成幺半范畴.

类似的，具有有限积的范畴都可以以终对象为幺对象，构造幺半范畴，称为 **Cartesian 幺半范畴 (Cartesian monoidal category)**.

例

范畴 $\mathcal{C}$ 上的自函子范畴 $\mathbf{End}^{\mathcal{C}}$，以函子的复合为幺半积，以恒等函子为幺对象，构成严格幺半范畴.

例

幺半积的原型是张量函子. 交换环 $R \in \mathbf{CRing}$ 可以通过张量积 $-\otimes_R-$ 进行 R-模的运算，使得 R-模范畴 $\mathbf{Mod}(R)$ 在张量积 $\otimes_R$ 和幺对象 $R \in \mathbf{Mod}(R)$ 下构成幺半范畴.
作为特例，K-线性空间范畴构成幺半范畴 $(\mathbf{Vct}_K,\otimes_K,K)$，Abel 群范畴构成幺半范畴 $(\mathbf{Ab},\otimes_{\mathbb{Z}},\mathbb{Z})$.

例 0.0.4

交换环 $R \in \mathbf{CRing}$ 上的代数范畴 $\mathbf{Alg}_R$ 在代数的张量积和幺对象 $R \in \mathbf{Alg}_A$ 下构成幺半范畴. 类似于上述幺半群的范畴化定义，下图描述了 R-代数范畴 $\mathbf{Alg}_R$ 中的结合律和幺元:

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes_R A\otimes_R A \arrow[r, "1_A\otimes_R\mu"] \arrow[d, "\mu\otimes_R 1_A"'] & A\otimes_R A \arrow[d, "\mu"] \\
A\otimes_R A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta\otimes_R 1_A"] \arrow[dr, "1_A"'] & A\otimes_R A \arrow[d, "\mu"] & A \arrow[l, "1_A\otimes_R\eta"'] \arrow[dl, "1_A"] \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

左图描述的是结合律，右图描述的是幺元，对具体元素的映射关系如下:

$$
\begin{tikzcd}
(a,b,c) \arrow[r, mapsto, "1_A\otimes_R\mu"] \arrow[d, mapsto, "\mu\otimes_R 1_A"'] & (a,b\otimes_R c) \arrow[d, mapsto, "\mu"] \\
(a\otimes_R b,c) \arrow[r, mapsto, "\mu"'] & (a\otimes_R b)\otimes_R c\simeq a\otimes_R(b\otimes_R c)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto, "\eta\times 1_A"] \arrow[dr, mapsto, "1_A"'] & (1,a)\simeq(a,1) \arrow[d, mapsto, "\mu"] & a \arrow[l, mapsto, "1_A\times\eta"'] \arrow[dl, mapsto, "1_A"] \\
& 1\otimes_R a\simeq a\simeq a\otimes_R 1 &
\end{tikzcd}
$$