集智学园范畴论讲义 v1.7.0811

第一季第 6 课：Hom 函子 本次课介绍范畴论最基础的 Hom 函子，它广泛地描述了诸多的数学问题，也是驱动范畴论自身发展的基本概念. 首先回顾过去初步探讨过的函子，它把对象映射为对象，态射映射为态射，恒等映射为恒等. 函子在保持结构方面类似于态射，如群同态和线性映射. 函子可以保持同构，因此在一个范畴中在同构的意义上相等的对象，通过函子可以保持到另一个范畴.

用一些例子理解函子. 首先介绍集合范畴上的函子. 集合的子集族构成幂集，从集合生成幂集的过程视为集合范畴上的函子. 本节课之后会进一步讨论这个函子的共变和反变性质，并讨论它和特征函数的关系. 有限集合上还可以构造其它的结构. 从正整数的构造可以发展出形式语言领域 Kleene 星的运算，它是自动机、程序设计等领域的基础模型，它描述了有限字符串的幺半群结构，也构成了有限生成的实例. 从函子、幺半群的角度理解，从字母表就可以生成全部的字符串，从二元集就可以生成全部的有限二进制信息.

接下来考虑双函子. 类比于笛卡尔积上的二元函数，容易理解乘积范畴上的双函子. 二元函数固定了变元可以产生一对一元函数，重要的双线性函数就是如此来定义的. 类似的双函子固定了变元也可以产生一对函子. 这样自然引入了 Hom 双函子，乃至一对 Hom 函子. 这对 Hom 函子分别称为共变 Hom 函子和反变 Hom 函子.

对于共变和反变的理解，在 Hom 函子上具有明确的意义. 我们介绍了两种 Hom 函子在构成态射复合交换图方面的联系和精细的区别，这种联系和区别正反映了范畴论重要的对偶的概念. 根据共变/反变 Hom 函子的态射方向的区别，交换图的构造、态射的复合方式是相反的. 深刻体会到这种区别，就可以理解为什么共变和反变在 Hom 函子上是必然的.

本节课的剩余部分用各种例子来说明函子的共变/反变，以及 Hom 函子的意义. 接着前面幂集函子，我们讨论了幂集函子的共变和反变的两种对应方式，构成了函数所诱导的正向像 (direct image) 即像 (iamge) 和反向像 (inverse image) 即原像 (pre-image)，在幂集函子的角度会有深刻的理解.

几何中常出现参数曲线的问题，我们把这个问题总结为共变 Hom 函子，它固定了一个单位区间，Hom 函子产生的态射集，可以产生几何体上的参数曲线的像. 共变 Hom 函子的共变性质，则体现在两个几何体之间的态射，共变地诱导出两个集合体的参数曲线之间的映射. 将这个单位区间替换为圆周，则可以用于研究拓扑学中的许多基本的问题.

反变 Hom 函子在范畴论和整个数学中具有更大的普遍性. 首先讨论了如何用反变 Hom 函数来描述集合上的函数全体，典型的应用之一就是线性空间上的对偶线性空间，以及相应的拉回 (pullback) 的概念. 反变 Hom 函子可以描述各种函数集，回顾一开始幂集函数的例子，我们介绍了特征函数，它是取值在二元集上的一种函数，它和子集一一对应，于是幂集和特征函数的集合同构. 进一步抽象地看，幂集函子和反变 Hom 函子本质上相同，这种内在的联系未来在范畴论中还会有进一步的讨论.

反范畴 将一个范畴中的态射全部反向，得到反范畴.

定义 0.0.1.

令 $\mathcal{C}$ 为范畴，$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 为 $\mathcal{C}$ 的 **反范畴 (opposite category)**，若：

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- 对于任意 $X, Y \in \mathcal{C}$：$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(X,Y) = \mathcal{C}(Y,X)$

共变函子与反变函子　$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 型的函子也称为**共变函子 (covariant functor)**. 与它相对的是**反变函子 (contravariant functor)**，即：

$$
\begin{aligned}
F:\mathcal{C}^{\mathrm{op}} &\to \mathcal{D}\\
X &\mapsto F(X)\\
Y &\mapsto F(Y)\\
F:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(X,Y) &\to \mathcal{D}(F(Y),F(X))\\
h &\mapsto F(h)\\
F(h):F(Y) &\to F(X)
\end{aligned}
$$

这里 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 是如上定义给出的 $\mathcal{C}$ 的反范畴. 也就是说，$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中的对象和态射和 $\mathcal{C}$ 一一对应，只是态射的方向相反.

反变函子 $F:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{D}$ 的记号，就相当于共变函子中把态射的箭头反向.

集族　指标集 I 标记集合范畴 **Set** 中的对象得到集族 $\{X_i\}_{i\in I}$. 令 $X\in$ **Set** 为集合，则 X 中的子集构成的集族

$$\{X_i \mid X_i\subseteq X\}_{i\in I}$$

为 X 的子集族. 所有的子集构成的子集族称为**幂集 (power set)**，记为

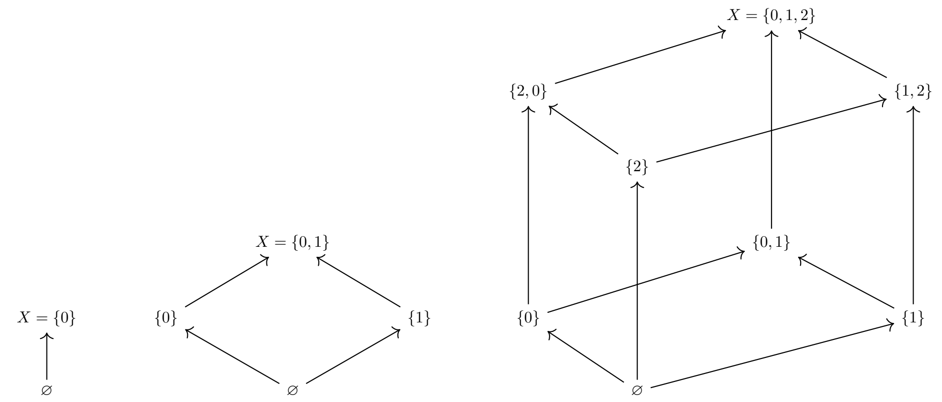
$$2^X=\{A\mid A\subseteq X\}$$

这里 2^X 中的 2 来源于二值集合 $\Omega=\{0,1\}$，利用它可以方便地讨论逻辑命题. 2 还体现在幂集 2^X 的势和集合 X 的势满足：

$$|2^X|=2^{|X|}$$

例 0.0.2.

集合 X 的元素个数为 $1,2,3$ 的幂集，元素个数分别为 $2^1,2^2,2^3$：



$X = \{0\}$ $X = \{0, 1\}$ $X = \{0, 1, 2\}$

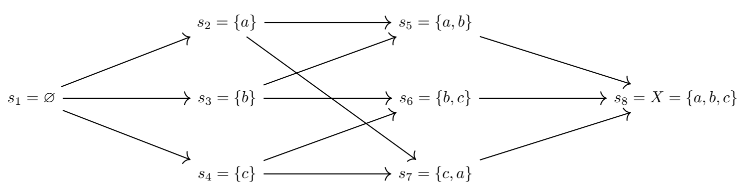
如上用有向的多维立方体表示幂集，称为 **Hasse 图 (Hasse diagram)**.

例 0.0.3.

令 $X = \{a, b, c\}$，幂集为:

$$2^X = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8\} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, X\}$$

按照子集的包含关系，可以通过复合构造的偏序省略:



偏序关系的逻辑矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

幂集函子 前文从集合 $X \in \mathbf{Set}$ 到幂集 $2^X \in \mathbf{Set}$ 的诱导过程，可以理解为集合范畴 $\mathbf{Set}$ 到自身的函子[1]，即幂集函子．函数 $f : X \to Y$ 是集合范畴中的态射 $f \in \mathbf{Set}(X, Y)$，它可以以共变 $f \mapsto f_*$ 和反变 $f \mapsto f^*$ 两种方式构成幂集之间的态射：

$$f_* : 2^X \to 2^Y \qquad f^* : 2^Y \to 2^X \tag{0.0.1}$$

共变的 f_* 称为**推出 (pushforward)**, 反变的 f^* 称为**拉回 (pullback)**, 在泛函分析和微分几何中有类似的概念。具体而言，函数 $f : X \to Y$ 作为态射实现集合中的元素 $x \mapsto f(x)$ 的映射，推出 f_* 则实现了子集的映射，产生了从子集 $A \in 2^X$ 到**像 (image)**或**正向像 (direct image)** $f_*A = f(A) \in 2^Y$：

$$\begin{aligned} f_* : 2^X &\to 2^Y \\ A &\mapsto f_*A = f(A) \end{aligned}$$

幂集函子在推出 f_* 下构成了共变函子。类似地，拉回 f^* 产生了从子集 $B \in 2^Y$ 到**原像 (preimage)**或**逆向像 (inverse image)** $f^*B = f^{-1}(B) \in 2^X$：

$$\begin{aligned} f^* : 2^Y &\to 2^X \\ B &\mapsto f^*B = f^{-1}(B) \end{aligned}$$

幂集函子在拉回 f^* 下构成了反变函子。注意到无论 $f \in \mathbf{Set}(X, Y)$ 作为集合的映射是否可逆，$f^* : 2^Y \to 2^X$ 作为幂集的态射都可逆：

1. 若 f 不是单射，$\exists x_1, x_2 \in X$ 使得有共同的值 $y = f(x_1) = f(x_2) \in Y$，则 $f : X \to Y$ 作为集合的态射不可逆．不过 $f_* : 2^X \to 2^Y$ 作为幂集的态射可逆，包含 y 的集合 $B \in 2^Y$，其原像 $f^*B = f^{-1}(B) \in 2^X$ 包含 x_1, x_2.

2. 若 f 不是满射，则 $Y - \mathrm{Im}\, f \neq \varnothing$ 非空，$Y - \mathrm{Im}$ 仍有原像 $f^*(Y - \mathrm{Im}\, f) = f^{-1}(Y - \mathrm{Im}\, f) = \varnothing \in 2^X$.

共变和反变幂集函子整理如下：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "2^{(-)}"] \arrow[d, "f"'] & 2^X \arrow[d, "f_*"] \\ Y \arrow[r, "2^{(-)}"'] & 2^Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "2^{(-)}"] \arrow[d, "f"'] & 2^X \\ Y \arrow[r, "2^{(-)}"'] & 2^Y \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

[1]即自函子，在后面章节将详细讨论

利用反变幂集函子 $f \to f^*$ 求原像的性质，可以讨论数学上常用**特征函数 (characteristic function)**. 即通过子集 $A \in 2^X$ 诱导出取值在二元集 $\Omega = \{0,1\}$ 上的函数：

$$
\begin{aligned}
&\chi_A : X \to \Omega \\
&x \mapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}
\end{aligned}
\tag{0.0.2}
$$

注意到 $\mathbf{Set}(X,\Omega)$ 中所有的态射都是特征函数, 单点集 $\{1\}$ 在特征函数下的**原像 (preimage)**正是子集 A 本身，即 $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$，于是集合 X 中的子集 A 和特征函数 χ_A 一一对应，范畴中关注集合 X 上特征函数的全体，即态射集：

$$h_\Omega X = \mathbf{Set}(X,\Omega) \simeq 2^X$$

于是反变 Hom 函子 h_Ω 相当于幂集函子 $2^{(-)}$. 从反变 Hom 函子的角度容易理解下图中的态射复合规则：

$$
\begin{tikzcd}
\Omega = \{0,1\} & & X \arrow[ll, "(h_\Omega f)(\chi_B)=\chi_B\circ f\in h_\Omega X"'] \arrow[dd, "f\in\mathbf{Set}(X,Y)"] \\
& & \\
& & Y \arrow[uull, "\chi_B\in h_\Omega Y"] \arrow[uu, phantom, "h_\Omega f \Uparrow \quad \overset{h_\Omega}{\Longleftarrow}"', shift right=6ex]
\end{tikzcd}
$$

在 Y 中取子集 $B \in 2^Y$，记 Y 中的子集 $A = f^*B = f^{-1}(B)$ 为原像. 子集 B 对应特征函数 $\chi_B \in h_\Omega Y$. 反变 Hom 函子 h_Ω 产生的函数集是特征函数的集合，特征函数 χ_B 按照反变 Hom 函子的复合律产生 X 上的特征函数：

$$(h_\Omega f)(\chi_B) = \chi_B \circ f \in h_\Omega X$$

它对应了子集 $A = f^*B = f^{-1}(B) \subseteq X$.

将来会了解到，反变幂集函子是二元集 $\Omega = \{0,1\}$ 表示的反变可表函子，这就是为什么把 X 的幂集记为 2^X. 并且常常记 $X \to Y$ 的函数集合为 $Y^X = h_Y X = \mathbf{Set}(X,Y)$.

乘积范畴　对关系的讨论基于 Cartes 积，积的概念进而推广到范畴. 范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 的**乘积范畴 (product category)**记为 $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$. 其对象为 $X \in \mathcal{C}$ 和 $Y \in \mathcal{D}$ 中对象的积 (X,Y). 范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f \in \mathrm{Hom}(X_1,X_2)$ 和范畴 $\mathcal{D}$ 中的对象 $g \in \mathrm{Hom}(Y_1,Y_2)$ 合成为：

$$(f,g) \in \mathrm{Hom}((X_1,Y_1),(X_2,Y_2))$$

双函子 通常习惯于用 $M \times N$ 表示 Cartes 积，用 (m,n) 表示 $M \times N$ 中的元素，把二元函数写为：

$$\begin{aligned} \varphi : M \times N &\to Z \\ (m,n) &\mapsto \varphi(m,n) \end{aligned} \tag{0.0.3}$$

把 Cartes 积的概念推广到范畴：

定义 0.0.4. 乘积范畴

范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 中依次取一个对象 $\forall A \in \mathcal{C}$ 和 $\forall B \in \mathcal{D}$ 构成二元组 (A,B)，并且考虑另一个二元组 (A',B'). 以这种二元组为对象，以态射 $f \in \mathcal{C}(A,A')$ 和 $g \in \mathcal{D}(B,B')$ 构成组合态射 $(f,g):(A,B) \to (A',B')$，构成的范畴称为 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 的**乘积范畴 (product category)**.

在乘积范畴 $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 中，作为乘积的对象是作为对象集 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$ 的元素存在，故用 $(M,N) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 表示. (0.0.3) 式二元函数的概念可以推广到乘积范畴上的**双函子 (bifunctor)**：

$$\begin{aligned} F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} &\to \mathcal{E} \\ (A,B) &\mapsto F(A,B) \end{aligned}$$

在集合范畴 **Set** 中看，(0.0.3) 式中的 Cartes 集 $M \times N$，视为乘积范畴的元素 $(M,N) \in \mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$. 集合范畴中映射 $f \in \mathbf{Set}(M,M')$ 和 $g \in \mathbf{Set}(N,N')$ 可以互不干扰地并行实现，即有 $(f,g) \in \mathbf{Set}((M,N),(M',N'))$：

$$\begin{aligned} (f,g) : (M,N) &\to (M',N') \\ (m,n) &\mapsto (f(m),g(n)) \end{aligned}$$

考虑二元映射：

$$\begin{aligned} \varphi : (M,N) &\to Z \\ (m,n) &\mapsto \varphi(m,n) \end{aligned}$$

固定变元可以诱导出一元映射：

$$\varphi_n = \varphi(\cdot,n) : M \to Z, \quad \varphi_m = \varphi(m,\cdot) : N \to Z$$

类似的，双函子可以诱导出函子，最常见的就是 Hom 函子：

Hom 函子　在范畴 $\mathcal{C}$ 中，获得两个对象之间的态射集，可以写为双函子：

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(-,-):\mathcal{C}\times\mathcal{C}&\to\mathbf{Set}\\ (M,N)&\mapsto\mathrm{Hom}(M,N)\end{aligned}$$

固定一个对象 $X\in\mathcal{C}$. 对于 $\forall A\in\mathcal{C}$ 可以诱导出两个态射集，记为：

$$h^XA=\mathcal{C}(X,A)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,A),\quad h_XA=\mathcal{C}(A,X)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X)$$

态射集属于集合范畴 **Set**. 这样可以把以上的诱导过程视为 $\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$ 类型的函子 $h^X=\mathcal{C}(X,-)$ 和 $h_X=\mathcal{C}(-,X)$：

$$\begin{aligned} h^X:\mathcal{C}&\to\mathbf{Set} & h_X:\mathcal{C}&\to\mathbf{Set}\\ A&\mapsto h^XA=\mathcal{C}(X,A) & A&\mapsto h_XA=\mathcal{C}(A,X)\end{aligned}$$

这对函子称为 **Hom 函子 (Hom functor)**. 以上的诱导过程没有体现出这对 Hom 函子的共变或反变性质，共变或反变需要考察 Hom 函子对态射的作用. 对于范畴 $\mathcal{C}$ 中的任意态射 $f\in\mathcal{C}(A,B)$，规定 Hom 函子的作用是通过态射 f 构造复合态射. 具体而言：

1. 对于函子 $h^X=\mathcal{C}(X,-)$，由于 $h^XA=\mathcal{C}(X,A)$,　$h^XB=\mathcal{C}(X,B)$，态射 $f\in\mathcal{C}(A,B)$ 只能按照 $X\longrightarrow A\longrightarrow B$ 的顺序构造 $X\to B$ 的复合态射.

2. 对于函子 $h_X=\mathcal{C}(-,X)$，由于 $h_XA=\mathcal{C}(A,X)$,　$h_XB=\mathcal{C}(B,X)$，态射 $f\in\mathcal{C}(A,B)$ 只能按照 $A\longrightarrow B\longrightarrow X$ 的顺序构造 $A\to X$ 的复合态射.

用交换图描述：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "a\in h^XA"] \arrow[dr, "(h^Xf)(a)=f\circ a\in h^XB"'] & A \arrow[d, "f\in(A,B)"] \arrow[dl, phantom, "\overset{h^X}{\Longleftarrow}\quad h^Xf\Downarrow"] \\
& B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X & A \arrow[l, "(h_Xf)(b)=b\circ f\in h_XA"'] \arrow[d, "f\in(A,B)"] \arrow[dl, phantom, "\overset{h_X}{\Longleftarrow}\quad h_Xf\Uparrow"] \\
& B \arrow[ul, "b\in h_XB"]
\end{tikzcd}$$

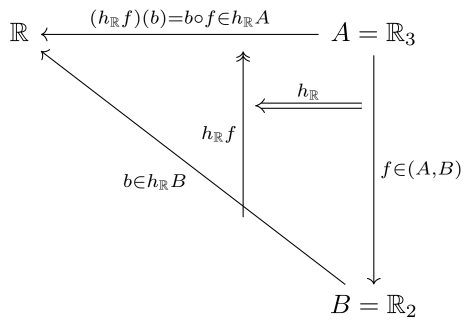
于是产生了共变和反变的一对 Hom 函子：

$$
\begin{aligned}
h^X &: \mathcal{C} \to \mathbf{Set} & h_X &: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set} \\
A &\mapsto h^X A = \mathcal{C}(X, A) & A &\mapsto h_X A = \mathcal{C}(A, X) \\
B &\mapsto h^X B = \mathcal{C}(X, B) & B &\mapsto h_X B = \mathcal{C}(B, X) \\
h^X &: \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{C}(h^X A, h^X B) & h_X &: \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{C}(h_X B, h_X A) \\
f &\mapsto h^X f & f &\mapsto h_X f \\
h^X f &: h^X A \to h^X B & h_X f &: h_X B \to h_X A \\
a &\mapsto (h^X f)(a) = f \circ a & b &\mapsto (h_X f)(b) = b \circ f
\end{aligned}
\tag{0.0.4}
$$

Hom 函子在数学的许多领域都会出现．后面我们会谈到，在范畴论中类似于 Hom 函子的性质将用可表函子表述.

例 0.0.5. 函数集

集合范畴 **Set** 中 $X \to Y$ 形式的映射的全体可以用反变 Hom 函子表示为 $h_Y X = \mathbf{Set}(X, Y)$．$X$ 上的实值函数集合为 $h_{\mathbb{R}} X$，复值函数集合为 $h_{\mathbb{C}} X$，整数函数集合为 $h_{\mathbb{Z}} X$．以实值函数集合为例：



三维空间 $A = \mathbb{R}_3$ 上的实值函数集为 $h_{\mathbb{R}} A$，二维空间 $B = \mathbb{R}_2$ 上的实值函数集为 $h_{\mathbb{R}} B$，有函数 $f \in (A, B)$ 把三维空间的点映射到二维．B 上的函数 $b \in h_{\mathbb{R}} B$ 通过和函数 f 复合，构造了 A 上的函数 $b \circ f \in h_{\mathbb{R}} A$，这就是反变 Hom 函子的作用：

$$(h_{\mathbb{R}} f)(b) = b \circ f$$

Bibliography