集智学园范畴论讲义 v1.7.0811

第一季第 11 课：自由函子 计算机理论中基础的形式语言建立在字符串的基础上。字母表是有限集合，通过有限生成的方式产生了字符串的集合，这是最基础的生成，它构成了从集合范畴到集合范畴上的函子。字符串集合上的串接和空字符串，构成了幺半群的结构。

引入群中逆的运算，有限生成下产生了更丰富的结构，字符串成为了字。一般地从集合生成群的过程构成了自由群，这种构造是一种函子化的构造。以整数为系数，有限整数次的作用构成了自由 Abel 群。作为类比，熟知的是在线性代数中，通过线性组合的方式，以域系数来张成线性空间，这也是自由生成的实例。

为了更好理解自由构造过程，说明如何用态射的方式来替代集合论。集合范畴中，在单点集上构造集合映射，可以替代给定集合中的元素，从而用态射的方式来定义集合中的元素。这是从集合论到范畴论的一个思维转换。

不仅在集合范畴中可以用态射来替代元素，在赋予了更多代数结构的范畴中往往也可以。进一步用于群，建立了群同态和群元的同构关系，从而可以用群范畴的态射来定义群元。

从群中遗忘掉群的结构，只留下无结构的集合，构成了遗忘函子。它和自由构造的方式相反，在范畴论中构成了一对基本的伴随函子。

自由幺半群 在集合上构造有限序列，可以产生幺半群的结构：

例 0.0.1. 形式语言

令 Σ 为不区分大小写的罗马字母表，字符串的集合 Σ^* 称为 **Kleene 星 (Kleene star)**.
形如 $ALPHA$、$APPLE$、CAT 这样的**字符串 (string)**，视为有限生成的序列. 且有空字符串是 Σ^* 中的元. 两个字符串 $ALPHA$ 和 BET 可以串接为 $ALPHABET$，这种串接运算是满足结合率的二元封闭运算。

例 0.0.2. 正整数

正整数在加法下构成幺半群 $(\mathbb{N}^+, +, 0)$. 从另一个角度看，任意正整数 $n \in \mathbb{N}^+$ 都可以用串表示：

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ times}}$$

定义 0.0.1. 自由幺半群

集合 X 上的由 X 的有限序列构成集合：

$$X^* = \{x_0 x_1 \cdots x_{n-1} \, | x_i \in X, \ n \in \mathbb{N}^+\}$$

定义二元运算：

$$X^* \times X^* \to X^*$$
$$(x_0 x_1 \cdots x_{m-1}, y_0 y_1 \cdots y_{n-1}) \mapsto x_0 x_1 \cdots x_{m-1} y_0 y_1 \cdots y_{n-1}$$

称为**串接 (concatenation)**. X^* 在串接和空串下构成幺半群, 称为 X 上的**自由幺半群 (free monoid)**.

自由群 通过幺半群可以在字母表 $S \in \mathbf{Set}$ 上构造字符串，字母表中的元称为**生成元 (generator)**。群比幺半群多出了逆的结构，令字母表 S 有对应的逆字母表集合 $S^{-1} \in \mathbf{Set}$，于是可以讨论字母的逆元，并且构造比字符串更广的**字 (word)**。

例 0.0.3. 字

字符串的构造过程中只有串接，串接过程中 $|x_0 x_1 \cdots x_{m-1} y_0 y_1 \cdots y_{n-1}| = |x_0 x_1 \cdots x_{m-1}| + |y_0 y_1 \cdots y_{n-1}|$，字符串的长度相应求和。引入群的结构后有了逆，$x^{-n}x^n$、$x^n x^{-n}$ 和空串可以建立等价关系，从而考虑等价类的结构。
令 $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, 相应记 $S = \{\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1}\}$, $\alpha^2\beta^{-1} = \alpha\alpha\beta^{-1}$, $\gamma\alpha^2\beta^{-1} = \gamma\alpha\alpha\beta^{-1}$, $\alpha\beta^{-1}\beta\gamma\alpha^2\beta^{-1} = \alpha\gamma\alpha\alpha\beta^{-1}$ 都是 S 中的字。

以上构造过程体现出由集合生成群的过程，且生成的群包含了集合，集合以单射的方式嵌入生成的群。给定群 $G=(G,\cdot,1_G)$，将群元 g 的整数 n 次幂定义为整系数对群元的左乘作用 ng，并体现从 $\forall g\in G$ 诱导出的群同态 $\varphi_g\in h^{\mathbb{Z}}G=\mathbf{Grp}(\mathbb{Z},G)$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{Z}\times G\to G\\
&(n,g)\mapsto ng=\begin{cases} g^n=\underbrace{g\cdot g\cdots\cdot g}_{|n|}, & n>0\\ g^n=1_G, & n=0\\ g^n=\underbrace{g^{-1}\cdot g^{-1}\cdot\cdots\cdot g^{-1}}_{|n|}, & n<0\end{cases}
\end{aligned}
\implies
\begin{aligned}
&\varphi_g:\mathbb{Z}\to G\\
&n\mapsto\varphi_g(n)=ng\\
&0\mapsto\varphi_g(0)=1_G\\
&1\mapsto\varphi_g(1)=g\\
&-1\mapsto\varphi_g(-1)=g^{-1}
\end{aligned}
\tag{0.0.1}
$$

这样可以对一组群元 $S\subseteq G$ 做整系数组合：

$$\sum n_ig_i=g_1^{n_1}\cdot g_2^{n_2}\cdots,\qquad n_i\in\mathbb{Z},\quad g_i\in S$$

定义 0.0.2. 生成集

令群 G 有子集 S，S 中的有限个元素及其逆的组合构成 G 的子群，称为 S 有限生成的群，记为 $\langle S\rangle$。若 $G=\langle S\rangle$ 则称 S 为群 G 的**生成集 (generating set)**。

一个元素构成的生成集所生成的子群称为循环子群，若群由一个元素生成则称为**循环群 (cyclic group)**。

例 0.0.4. 实数加群

$(\mathbb{R},+,0)$ 的阶是不可数无穷大，任何不可数阶的群都不能被有限生成。

考虑给定了集合 $S\in\mathbf{Set}$ 后，自由生成群即自由群 FS 和任意群 $G\in\mathbf{Grp}$ 的关系：

定义 0.0.3. 自由群

令 $\iota\in\mathbf{Set}(S,FS)$ 是集合范畴中从集合 S 到群 FS 的单的嵌入。对于任何集合范畴的态射 $\forall f\in\mathbf{Set}(S,G)$，存在唯一的群范畴的态射 $\exists!h\in\mathbf{Grp}(FS,G)$，构成因子化 $f=h\circ\iota$，即使下图交换：

$$
\begin{tikzcd}
 & FS \arrow[d, dashed, "h"] \\
S \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "f=h\circ\iota"'] & G
\end{tikzcd}
$$

称 FS 是集合 S 生成的**自由群 (free group)**。

单点集 一个元素 $\bullet$ 构成的集合 $\{\bullet\}$ 称为**单点集 (singleton set)**，集合范畴中所有单点集在同构的意义下相等，记为 $1=\{\bullet\}$. 集合的元素 $x\in X$ 和集合范畴的态射 $\varphi_x\in h^1X$ 在 $\varphi_x(\bullet)=x$ 的约束下有一一对应：

$$x\longleftrightarrow\varphi_x$$

在同构的意义下 $X=h^1X$，这是反变 Hom 函子的意义所在，而共变 Hom 函子则只存在唯一的态射，如下图：

$$
\begin{tikzcd}
 & x_1 \\
1=\{\bullet\} \arrow[ur, mapsto, "\varphi_{x_1}"] \arrow[r, mapsto, "\varphi_{x_1}"] \arrow[dr, mapsto, "\varphi_{x_3}"'] & x_2 \\
 & x_3
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[dr, mapsto, "\psi_{x_1}"] & \\
x_2 \arrow[r, mapsto, "\psi_{x_2}"] & 1=\{\bullet\} \\
x_3 \arrow[ur, mapsto, "\psi_{x_3}"'] &
\end{tikzcd}
$$

集合没有附加代数结构，势相同的集合在集合范畴中同构：

$$X \simeq Y \Leftrightarrow |X| = |Y| \Leftrightarrow |h^1X| = |h^1Y|$$

范畴论关注态射 φ_x 超过关注元素 x，复合映射 $f \circ \varphi_x \in \mathbf{Set}(1, Y)$ 相当于求值：

$$(f \circ \varphi_x)(\bullet) = f(x)$$

见下图

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \in 1 \arrow[r, mapsto, "\varphi_x"'] \arrow[rr, mapsto, bend left, "f\circ\varphi_x"] & \varphi_x(\bullet) = x \in X \arrow[r, mapsto, "f"'] & (f \circ \varphi_x)(\bullet) = f(x) \in Y
\end{tikzcd}
$$

综合以上讨论，有如下同构：

$$h^1X = X, \quad \mathbf{Set}(h^1X, h^1Y) = \mathbf{Set}(X, Y) \tag{0.0.2}$$

可以直接把传统意义上集合中的元素定义为[1]：

定义 0.0.4. 集合中的元素

集合 $X \in \mathbf{Set}$ 中的元素是集合范畴中，单点集 $1 \in \mathbf{Set}$ 上的态射：

$$1 \to X$$

自由函子 从集合范畴的对象 S 生成群范畴的对象 FS 的过程视为**自由函子 (free functor)** F，它的方向与**遗忘函子 (forgetful functor)**正好相反，

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[loop left, "UF"] \arrow[r, bend left, "F"] & \mathbf{Grp} \arrow[loop right, "FU"] \arrow[l, bend left, "U"] \\
S \arrow[r, "F"] \arrow[d] & FS \arrow[d] \\
UG & G \arrow[l, "G"]
\end{tikzcd}
\tag{0.0.3}
$$

上图构成了对偶结构[2]，由于 $\iota : S \to FS$ 是唯一的单的嵌入，群范畴中的态射 $h \in \mathbf{Grp}(FS, G)$ 和集合范畴中的态射 $f \in \mathbf{Set}(S, UG)$ 是一一对应的。

[1]这是可表函子的体现

[2]伴随函子

例 0.0.5. 整数加群

整数加群 $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, 0) \in \mathbf{Grp}$ 是 1 生成的循环群，即 $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$。根据 (0.0.1) 式，群元 $g \in G$ 和群范畴的态射 $\varphi_g \in h^{\mathbb{Z}}G$ 在 $\varphi_g(1) = g$ 的约束下有一一对应：

$$g \longleftrightarrow \varphi_g$$

在同构的意义下 $G = h^{\mathbb{Z}}G$。

$\mathbb{Z}$ 在群范畴中的作用类似于单点集在集合范畴中的作用。范畴论关注群同态 φ_g 超过关注群元 g，复合映射 $f \circ \varphi_g \in \mathbf{Grp}(1, H)$ 相当于求值：

$$(f \circ \varphi_g)(1) = f(g)$$

见下图

$$\begin{tikzcd}
1 \in \mathbb{Z} \arrow[r, mapsto, "\varphi_g"] \arrow[rr, mapsto, bend left, "f \circ \varphi_g"] & \varphi_g(1) = g \in G \arrow[r, mapsto, "f"] & (f \circ \varphi_g)(1) = f(g) \in H
\end{tikzcd}$$

综合以上讨论，有如下同构：

$$h^{\mathbb{Z}}G = G, \quad \mathbf{Set}(h^{\mathbb{Z}}G, h^{\mathbb{Z}}H) = \mathbf{Grp}(G, H) \tag{0.0.4}$$

把传统意义上群中的元素定义为：

定义 0.0.5. 群元

群 $G \in \mathbf{Grp}$ 中的元是群范畴中，$\mathbb{Z} \in \mathbf{Grp}$ 上的态射：

$$\mathbb{Z} \to G$$