集智学园范畴论讲义 v1.7.0809

第一季第 8 课：极限与余极限　对偶函子是反变 Hom 函子，它以域 K 为目标，构造了 K-线性空间的对偶空间。通常可以把各种线性空间中的原点理解为平凡线性空间，从线性同构的意义而言，所有的原点可以视为同一个平凡线性空间 0。反变 Hom 函子若以平凡线性空间为目标，则会产生新的结构，这样可以引出终对象、始对象、零对象的概念。Abel 群范畴的相关性质和线性空间范畴相似，而集合范畴、拓扑空间范畴却不同。

在线性空间范畴、Abel 群等范畴中，终对象和始对象有明确的对偶性，并通过零对象体现。作为对比，接下来讨论集合范畴中的终对象和始对象。单点集是终对象。然而，由于集合范畴的态射没有代数结构可以保持，单点集却无法构成始对象。这意味着集合范畴没有零对象。另外也讨论了偏序集范畴中的终对象和始对象，始终对象有助于描述偏序集中的界。在偏序集范畴中，终对象和始对象并不保证存在。

接着介绍指标范畴。偏序指标集作为偏序集范畴，可以以共变和反变的方式，用指标标记范畴中的对象，用偏序的态射来描述范畴中的偏序，这样得到目标范畴中带有偏序结构的子范畴，即正向系统和反向系统。偏序集指标集标记目标范畴的方式，推广到用任意范畴来标记目标范畴，这样构成了指标范畴。

然后可以引入极限和余极限。在范畴中固定特殊的对象，构造出锥的结构。用对偶的方式可以构造余锥。锥或余锥作为对象，可以构造锥范畴或余锥范畴。我们回顾了第 4 课 Abel 群范畴中讨论的中介态射。中介态射与范畴论中的泛性质密切相关。在锥或余锥之间建立中介态射，构成锥范畴或余锥范畴的态射，相关的泛性质就是终对象和始对象。锥范畴的终对象构成极限，余锥范畴的始对象构成余极限。

我们熟知的直积和直和，本质上是范畴中的概念。以线性空间的直积和直和为例，说明了二者的区别。范畴中的两个对象之间，通过投射可以产生锥，进而产生的极限就是直和。对偶地，通过内射则可以产生余锥，相应产生的余极限就是直积。

直积和直和是在范畴的两个对象上构造的概念。如果再加上第三个对象，产生了张成和余张成两种互相对偶的形态，则可以类似地构造锥和余锥，以及极限与余极限。这样的构造产生了范畴论以及数学中的纤维积和纤维余积，即拉回与推出。

始对象与终对象　对偶函子是映射到域 K 的反变 Hom 函子，在 K-线性空间范畴 $\mathbf{Vct}_K$ 上，得到对偶线性空间：$V \mapsto V^* = h_K V = \mathbf{Vct}_K[V, K]$。对偶空间 $V^* = h_K V$ 中的元素是 K-线性态射，也就是**对偶向量 (covector)**，不同的态射作用在 V 上的结果各不相同。进一步，线性空间 V 中的原点所构造的**单点集 (singleton)**可以视为线性子空间 $0 \in \mathbf{Vct}_K$，称为**平凡线性空间 (trivial linear space)**。用平凡线性空间 0 替代域 K：

- 用反变 Hom 函子 h_0 映射到平凡子空间 $V \mapsto h_0 V = \mathbf{Vct}_K[V, 0] = \{p : V \to 0\}$，这个态射集只包含唯一的一个线性满态射 $p : V \to 0$。
- 当然也可以用共变 Hom 函子 h^0 从平凡子空间射出 $V \mapsto h^0 V = \mathbf{Vct}_K[0, V] = \{i : 0 \to V\}$，这个态射集只包含唯一的一个线性单态射 $i : 0 \to V$，因为态射要求保持 K-线性，即 $i(0) = 0 \in V$。

原点是很多的，任何线性空间 $W \in \mathbf{Vct}$ 中都包含原点 0_W 作为线性子空间。从直观上任何原点都等价，严格的讲这种等价是通过两个原点之间的线性变换联系的。这种线性变换是存在唯一可逆的，即两个原点之间的线性态射为 $\mathbf{Vct}[0_V, 0_W] = \{\mathrm{id}\}$。在同构的意义下，线性空间范畴视为有唯一的一个原点线性空间 $0 \in \mathbf{Vct}$。

定义 0.0.1. 终对象、始对象、零对象

范畴中有对象 $P, Q \in \mathcal{C}$ 中：若任意对象 $\forall A \in \mathcal{C}$ 都存在唯一的态射 $A \to P$，称 P 为**终对象 (terminal object)**. 若任意对象 $\forall B \in \mathcal{C}$ 都存在唯一的态射 $Q \to B$，称 Q 为**始对象 (initial object)**.
同时为始对象和终对象则称为**零对象 (zero object)**.

从线性空间范畴 $\mathbf{Vct}_K$ 的讨论引出了零对象的概念，显然对于 Abel 群范畴 **Ab**、模范畴 **Mod** 等也有类似的零对象作为平凡的对象。

例 0.0.2. 集合范畴 Set

- 终对象：平凡线性空间遗忘掉线性空间的结构，就是原点构成的单点集 $1 = \{\bullet\}$。上述反变 Hom 函子 h_1 显然可以构造唯一的满态射，即任意单点集 1 都是 **Set** 的终对象。
- 始对象：和 $\mathbf{Vct}_K$ 范畴不同。以上用共变 Hom 函子作用于线性空间范畴 $V \mapsto h^0 V = \mathbf{Vct}_K[0, V] = \{i : 0 \to V\}$，因为态射要求保持 K-线性，有 $i(0) = 0 \in V$，保持了线性空间的结构。这样的性质在集合范畴不复存在。单点集可以以不同的态射映射到不同的点，无法保证唯一性。在 **Set** 终始对象是空集 $\varnothing \in \mathbf{Set}$。
- 零对象：空集是唯一的始对象，故集合范畴没有零对象

例 0.0.3. 偏序集范畴

令 $(P, \leq)$ 为偏序集范畴。$a \in P$ 是始对象，当且仅当 $\forall x \in P : a \leq x$。$b \in P$ 是终对象，当且仅当 $\forall x \in P : x \leq b$。
并非所有偏序集范畴都有始对象或终对象，例如 $(\mathbb{R}, \leq)$ 作为偏序集范畴就没有始对象或终对象。

指标范畴　带有偏序结构的抽象指标集 $(I, \leq)$ 视为偏序集范畴，其对象为指标，用它来标记范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象，产生了对象族 $X_\bullet = \{X_i\}_{i \in I}$. 写成共变函子或反变函子形式：

$$F : (I, \leq) \to \mathcal{C}, \quad G : (I, \leq)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C} : \quad i \mapsto X_i, \quad j \mapsto X_j, \quad k \mapsto X_k \tag{0.0.1}$$

令 $(I, \leq)$ 中有偏序 $i \leq j \leq k$，即 $I(i, j) = \{\rho_i^j\}$ 及 $I(j, k) = \{\rho_j^k\}$. 且 $i \leq k$ 即 $I(i, k) = \{\rho_i^k = \rho_j^k \circ \rho_i^j\}$. 函子把抽象指标集的偏序结构映射到对象族 $X_\bullet = \Sigma(I, \leq)$ 中. 区分共变和反变. 共变函子 $F : (I, \leq) \to \mathcal{C}$ 把 $\rho_i^j : i \to j$ 映射为 $\psi_i^j : X_i \to X_j$, 满足 $\psi_i^k = \psi_j^k \circ \psi_i^j$. 反变函子 $G : (I, \leq)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ 把 $\rho_i^j : i \to j$ 映射为 $\varphi_i^j : X_j \to X_i$，满足 $\varphi_i^k = \varphi_i^j \circ \varphi_j^k$.

这样把偏序集的结构赋予了范畴 $\mathcal{C}$ 中被考察的对象和态射. 函子的像构成了 $\mathcal{C}$ 中的子范畴. 偏序集里的任意态射图都交换，故这个子范畴中的任意态射图也都交换.

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[r, "\rho_i^j"'] \arrow[d, "F"] \arrow[rr, bend left, "\rho_i^k=\rho_j^k\circ\rho_i^j"] & j \arrow[r, "\rho_j^k"'] \arrow[d, "F"] & k \arrow[d, "F"] \\
F(i)=X_i \arrow[r, "\psi_i^j"] \arrow[rr, bend right, "\psi_i^k=\psi_j^k\circ\psi_i^j"'] & F(j)=X_j \arrow[r, "\psi_j^k"] & F(k)=X_k
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
i \arrow[r, "\rho_i^j"'] \arrow[d, "F"] \arrow[rr, bend left, "\rho_i^k=\rho_j^k\circ\rho_i^j"] & j \arrow[r, "\rho_j^k"'] \arrow[d, "F"] & k \arrow[d, "F"] \\
G(i)=X_i & G(j)=X_j \arrow[l, "\varphi_i^j"'] & G(k)=X_k \arrow[l, "\varphi_j^k"'] \arrow[ll, bend left, "\varphi_i^k=\varphi_i^j\circ\varphi_j^k"]
\end{tikzcd}$$

在共变函子下 $FI=(X_\bullet,\{\psi_i^j\})$ 称为**正向系统 (direct system)**或**归纳系统 (inductive system)**，在反变函子下 $GI=(X_\bullet,\{\varphi_i^j\})$ 称为**反向系统 (inverse system)**或**投射系统 (projective system)**.

例 0.0.4. 数列

单调递增有理数列 $x_\bullet=\{x_n\}=\{0.3,0.33,0.333,\cdots\}$ 的构造方式，相当于用自然数偏序指标集 $I=(\mathbb{N},\leq)$ 在有理数偏序集范畴 $\mathbb{Q}=(\mathbb{Q},\leq)$ 中构造共变 Σ 图表：

$$\begin{array}{ccccccccc}
(\mathbb{N},\leq) & & 1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
(x_\bullet,\leq) & & 0.3 & \longrightarrow & 0.33 & \longrightarrow & 0.333 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

更抽象地说，不限于抽象指标集，用一个范畴 J 也可以标记范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象和态射：

$$T:J\to\mathcal{C} \tag{0.0.2}$$

函子 T 称为**形状 (shape)** J 在 $\mathcal{C}$ 中的 J-形**图 (diagram)**。形状 J 也称为图 T 的**指标范畴 (index category)**或**模式 (schema)**。指标范畴 J 若是小的或有限的，则图 T 称为小的或有限的。

定义 0.0.5. 离散范畴

如果范畴中的态射只包含恒等态射，则称为**离散范畴 (discrete category)**。

用离散范畴 J 按照 (0.0.2) 式标记 $\mathcal{C}$ 中的对象和态射，J-形图 T 是离散的。

例 0.0.6. 偏序集范畴

当指标范畴 J 是偏序集范畴时，相应的 J-形图是正向系统或反向系统。

极限与余极限　现在考虑范畴中特定对象 $\forall N \in \mathcal{C}$ 如何与正向系统或反向系统相互作用。从 N 射出正向系统或反向系统得到一组态射:

$$\bigcup_{k\in I} h^N X_k$$

在这个态射集合中，满足如下正向系统或反向系统交换图的子集称为 N 到 F 或 N 到 G 的**锥 (cone)**:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ F(i)=X_i \arrow[rr, "F(\rho_i^j)=\psi_i^j"'] & & F(j)=X_j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "g_i"'] \arrow[dr, "g_j"] & \\ G(i)=X_i & & G(j)=X_j \arrow[ll, "G(\rho_i^j)=\varphi_i^j"] \end{tikzcd}$$

箭头反向，类似可以定义 F 到 N 或 G 到 N 的**余锥 (co-cone)**:

$$\begin{tikzcd} F(i)=X_i \arrow[rr, "F(\rho_i^j)=\psi_i^j"'] \arrow[dr, "f_i"'] & & F(j)=X_j \arrow[dl, "f_j"] \\ & N & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(i)=X_i \arrow[dr, "g_i"'] & & G(j)=X_j \arrow[ll, "G(\rho_i^j)=\varphi_i^j"] \arrow[dl, "g_j"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

按 (0.0.2) 式给出范畴 $\mathcal{C}$ 中的 J-形图 T，即函子 $T : J \to \mathcal{C}$。从 $\forall N \in \mathcal{C}$ 射向 TI 得到一组态射 $\bigcup_{k\in I} h^N X_k$，这个态射集合中满足下图左边交换图的子集称为 N 到 T 的**锥 (cone)**。对偶地，箭头反向可以考虑 TI 到 $\forall M \in \mathcal{C}$ 的态射集 $\bigcup_{k\in I} h_M X_k$ 中，满足见下图右边交换性的从 T 到 M 的**余锥 (co-cone)**:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ T(i)=X_i \arrow[rr] & & T(j)=X_j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T(i)=X_i \arrow[rr] \arrow[dr, "g_i"'] & & T(j)=X_j \arrow[dl, "g_j"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

例 0.0.7. 数列的上下界

数列上的锥和余锥例如:

$$
\begin{tikzcd}
\forall x \leq 0 \arrow[d] \arrow[drr] \arrow[drrr] \arrow[drrrr] \\
\forall x_n \in X \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0.01 \arrow[r] & 0.1 \arrow[r] & 1.0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0.3 \arrow[r] \arrow[drrrr] & 0.33 \arrow[r] \arrow[drrr] & 0.333 \arrow[r] \arrow[drr] & \cdots \arrow[r] & \forall x_n \in X \arrow[d] \\
& & & & \forall x \geq \frac{1}{3}
\end{tikzcd}
$$

$\forall x \leq 0$ 满足左图，$\forall x \geq \frac{1}{3}$ 满足右图。

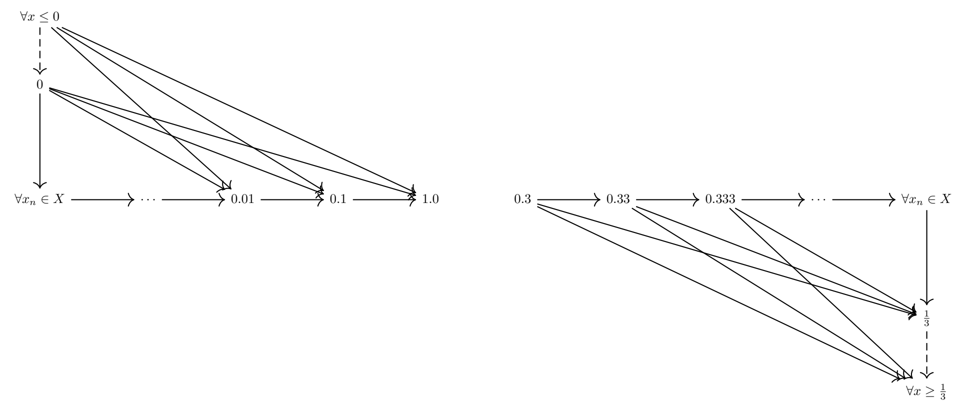
上例反映了偏序集范畴中的下界和上界，自然会考虑下确界和上确界的情况。现在可以通过**中介态射 (mediating morphism)**来讨论确界这种**泛性质 (universal property)**.

令有 N 和 N' 到 T 的两个锥. 若存在中介态射 $\exists! h : N' \to N$，使得下图左交换，则中介态射 h 构成了锥 $N' \to N$ 的态射。以 T 上的锥为对象，以锥的态射为态射，构成了 T 上的**锥范畴 (category of cones)**，记为 $(\Delta \downarrow T)$. 对偶地，从 T 发出的两个余锥 M 和 M'. 若存在中介态射 $\exists! h : M \to M'$，使得下图右交换，则中介态射 h 构成了余锥 $M \to M'$ 的态射。以 T 上的锥为对象，以锥的态射为态射，构成了 T 上的**余锥范畴 (category of co-cones)**，记为 $(T \downarrow \Delta)$.

$$
\begin{tikzcd}
& N' \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
& N \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X_i \arrow[rr] & & X_j
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & X_j \arrow[dl] \arrow[ddl] \\
& M \arrow[d, dashed, "h"] & \\
& M' &
\end{tikzcd}
$$

例 0.0.8. 数列的上下确界

数列上的锥态射和余锥态射例如：



收敛单调数列的确界相当于极限，在范畴中抽象为极限与余极限。

定义 0.0.9. 极限与余极限

锥范畴中的终对象称为**极限 (limit)**，余锥范畴中的始对象称为**余极限 (colimit)**。

例 0.0.10. 正向极限与反向极限

正向系统中的余极限称为**正向极限 (direct limit)** 或**归纳极限 (inductive limit)**.
反向系统中的极限称为**反向极限 (inverse limit)** 或**投射极限 (projective limit)**.

例 0.0.11. 始终对象

始对象 (initial object)是余极限，**终对象 (terminal object)**是极限.

直族　数学上常见直积和直和的概念，用范畴的方法可阐述其本质。用抽象指标集 I 标记范畴中的对象，构成对象族。数学上常见的是环 $R \in \mathbf{Ring}$ 的模范畴 $\mathcal{C} = \mathbf{Mod}(R)$ 中的对象所构成的模族，这是同调代数方法的基本设定。令 $X_\bullet = \{X_k \in \mathcal{C}\}_{k \in I}$ 为对象族，令 $X \in \mathcal{C}$ 为对象：

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[loop above, "i_k\circ p_k"] \arrow[ddl, bend right, "p_\alpha"'] \arrow[ddr, bend left, "p_\beta"] & \\
 & & \\
X_\alpha \arrow[uur, "i_\alpha"] \arrow[rr, "p_\beta\circ i_\alpha=0"] \arrow[loop below, "p_\alpha\circ i_\alpha=1"] & & X_\beta \arrow[uul, "i_\beta"'] \arrow[ll, bend left, "p_\alpha\circ i_\beta=0"] \arrow[loop below, "p_\alpha\circ i_\alpha=1"]
\end{tikzcd}$$

其中的 $i_k \in \mathcal{C}(X_k, X)$ 表示**内射 (injection)**，$p_k \in \mathcal{C}(X, X_k)$ 表示**投射 (projection)**。借用微分几何常用的 **Kronecker 记号 (Kronecker delta)**δ_α^β，经过 X 的复合同态满足

$$p_\beta i_\alpha = \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1, & (\alpha = \beta) \\ 0, & (\alpha \neq \beta) \end{cases}$$

这样的态射族 $\{i_\alpha, p_\beta\}$ 成为 **同态直族 (direct family of homomorphisms)** . 内射 i_α 和投射 p_β 是对偶关系. 如果 $\forall x \in X$ 都可以表示为有限直和

$$x = \bigoplus_\alpha i_\alpha x_\alpha, \quad x_\alpha \in X_\alpha$$

则 $X \simeq \bigoplus_\alpha X_\alpha$，称直族 $\{i_\alpha, p_\beta\}$ 产生了 X 的**直和 (direct sum)**表示. 如果 $\forall\{x_\beta \in X_\beta\}$ 都存在唯一的 $x \in X$ 使得

$$p_\beta x = x_\beta$$

则 $X \simeq \prod_\beta X_\beta$，称直族 $\{i_\alpha, p_\beta\}$ 产生了 X 的**直积 (direct product)**表示. 当对象族 $\{X_k\}$ 有限时，直和与直积的表示是同构的.

在对象族中取 $\forall X_\alpha, X_\beta \in X_\bullet$，用极限和余极限也可以讨论直族，下图左是直积，下图右是直和：

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "f\times g"] \arrow[dr, "g"] & \\
X_\alpha & X_\alpha \times X_\beta \arrow[l, "p_\alpha"] \arrow[r, "p_\beta"'] & X_\beta
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X & \\
X_\alpha \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_\alpha"'] & X_\alpha + X_\beta \arrow[u, dashed, "f+g"] & X_\beta \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "i_\beta"]
\end{tikzcd}$$

拉回与推出 下图中，指标范畴 J 有两个方向，相应的 J-形图也有两种，右边称为**张成 (span)**，左边称为**余张成 (cospan)**。

$$
\begin{tikzcd}
-1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & +1 \arrow[l] \arrow[d] \\
X \arrow[r] & Z & Y \arrow[l]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
-1 \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & +1 \arrow[d] \\
X & Z \arrow[l] \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}
$$

左边的余张成的极限称为**拉回 (pullback)**，右边的张成的余极限称为**推出 (pushout)**：

$$
\begin{tikzcd}
 & N' \arrow[ddl] \arrow[ddr] \arrow[d, dashed] & \\
 & N \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
X \arrow[r] & Z & Y \arrow[l]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr] \arrow[ddr] & Z \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[dl] \arrow[ddl] \\
 & M \arrow[d, dashed] & \\
 & M' &
\end{tikzcd}
$$

拉回也称为**纤维积 (fiber product)**，记为 $X \times_Z Y$。推出也称为**纤维余积 (fiber coproduct)**，记为 $X \coprod_Z Y$。往往用下图简化表示拉回和推出：

$$
\begin{tikzcd}
X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
X \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner", very near end] & X +_Z Y
\end{tikzcd}
$$