集智学园范畴论讲义 v1.7.0811

第二季第 2 课: 函子范畴 范畴论提供了逐级抽象问题的方法。最初用态射连接对象,之后用函子连接范畴,进一步还要关注函子和函子之间的连接,这就需要把函子作为对象构造函子范畴。自然变换就是函子范畴中的态射。我们给出一些例子说明静态概念如何通过动态箭头连接。在函子范畴中,为了连接两个函子,需要考虑如何连接函子在目标范畴上映射的像,也就是如何连接对象和箭头。自然变换构成范畴论后继学习的基本工具,需要学者熟练掌握。我们给出了高阶同伦的例子,说明从态射到函子到自然变换的意义。

通常,人们用方程刻画相等的关系,建立事物之间的联系。然而方程的条件太强。范畴论往往用等价来构造类似于方程,却比方程灵活的联系。这种等价是通过函子范畴来构造的。例如结合律和交换律,在代数中表示为满足某些方程的条件。我们引入多元函子,把运算用函子来表示,并通过自然变换的方式建立起更灵活的结合律和交换律。

高阶范畴 通常可以理解范畴中的对象体现了静态的概念,是一种实体,视为**名词 (noun)**. 范畴中的态射则是动态概念,它联系了实体,视为有主语的及物**动词 (verb)**.

例: 语言

• 陈述: 罗密欧爱朱丽叶 (Romeo loved Juliet). 罗密欧失去朱丽叶 (Romeo lost Juliet.).

• 对象: 罗密欧 (Romeo)、朱丽叶 (Juliet)

• 态射: 爱 (loved)、失去 (lost)

英文中有动名词,动词 love 可以变成动名词 loving. 考虑从爱 (loving) 到失去 (lossing),这样构造了动名词到动名词的转换.

• 陈述: Loving evolved to lossing. 爱演变成失去.

• 对象: 爱 (loved)、失去 (lost)

• 态射: 演变 (evolved)

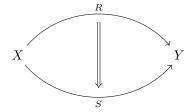
在动态的态射上构造进一步的动态转换,这种思想发展为高阶同伦、自然变换乃至高阶范畴.

例: 关系

关系范畴 **Rel** 中的对象为集合,态射为关系 $R \subseteq X \times Y$. 若有两个关系 $R, S \in \text{Hom}(X,Y)$,若关系 R 蕴含 S,即 $R \Longrightarrow S$,从集合上看则有 $X \times Y$ 中的子集包含关系:

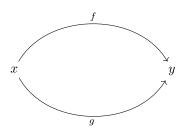
$$R \subseteq S$$

这样构造了包含偏序, 使得 $X \to Y$ 的关系全体构成偏序集范畴. 这样构造了 $R \to S$ 的 2-态射.

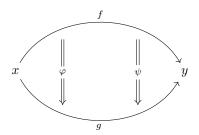


例: 高阶同伦

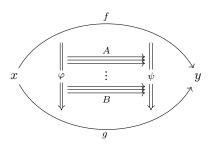
拓扑空间 X 视为范畴,拓扑空间中的点构成对象,点到点的同伦等价类构成态射.下图给出了两个态射,即由 $f,g\in \mathrm{Hom}(x,y)$ 这两条道路代表的等价类:



进而考虑 f 和 g 这两条道路代表的等价类之间的关系,下图用双线箭头表示 $\varphi,\psi:f\to g$,以体现这是第 2 个层次的转换:



0-维的点到点 $x \to y$ 的态射由 1-维连续道路的同伦等价类构成,图中用单线箭头表示. 双线箭头则表示了道路等价类到道路等价类的转换,图中中双线箭头表示,几何上相当于 2-维的面. 再进一步可以考虑 φ 和 ψ 这两个 2-维面的等价类的关系,下图用三线箭头表示 $A,B:\varphi\to\psi$,以体现这是第 3 个层次的转换:



这样可以一直下去,产生各阶同伦的概念.

函子范畴 考虑两个具有相同起止的函子 $F,G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$,将它们纳入到范畴中讨论,形如 $\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 的函子的全体构成**函子范畴** (category of functors),区分共变/反变后记为:

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}), \quad \mathbf{Fct}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D})$$

函子范畴中的对象是固定两个范畴有序对的函子,而函子范畴中的态射则是自然变换. 范畴 \mathcal{C} 中的态射 $\forall f \in \operatorname{Hom}(X,Y)$,它被两个同的函子以不同方式映射到范畴 \mathcal{D} 中:

$$F: \operatorname{Hom}(X,Y) \to \operatorname{Hom}(FX,FY)$$

$$f \mapsto Ff$$

$$G: \operatorname{Hom}(X,Y) \to \operatorname{Hom}(GX,GY)$$

$$f \mapsto Gf$$

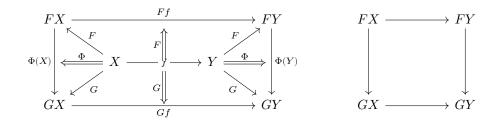
将函子视为函子范畴的对象,考虑函子范畴的态射:

$$\Phi:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$$

它建立了 $FX \to GX$ 和 $FY \to GY$ 的联系. 具体而言, Φ 从范畴 \mathcal{C} 中的对象诱导出范畴 \mathcal{D} 中的态射:

$$\begin{split} \Phi &: \mathcal{C} \to \operatorname{Mor}(\mathcal{D}) \\ X &\mapsto \Phi(X) \in \operatorname{Hom}(FX, GX) \\ Y &\mapsto \Phi(Y) \in \operatorname{Hom}(FY, GY) \end{split}$$

这样得到下图, 其中内部是 \mathcal{C} , 外框是范畴 \mathcal{D} :



如果上图右的范畴 \mathcal{D} 部分交换,则 $\Phi: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 称为**自然变换 (natural transformation)**,它就是函子 范畴 $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 中的态射. 自然变换又称为**函子态射 (functorial morphism)**,提示我们可以用范畴的观点 看待函子的集合. 通常把两个函子 $F, G \in \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 的自然变换的全体记为

$$\operatorname{Nat}(F,G) = \operatorname{Hom}(F,G) = \operatorname{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{D})(F,G)$$

函子态射 $\Phi: F \to G$ 对于 $\forall X \in \mathcal{C}$ 有 $\Phi(X): FX \to GX$,若所有 $\Phi(X)$ 是同构则称 Φ 是**自然同构** (natural isomorphism). 以下构成左右逆的一对函子,使得两个范畴同构:

$$ST=1_{\mathcal{C}}$$
 $\qquad \qquad T$ $\qquad \qquad T$ $\qquad TS=1_{\mathcal{D}}$

在第一季宣讲课提到《构建数学和物理基础的范畴论:用等价取代相等 | 众妙之门 - 返朴》,其中给出了一个高阶同伦的例子。拓扑空间 X 上有两个点,这两个点视为 0-维边界,为强调这个维度,记为 x^0,y^0 。将两个点之间的连续道路的集合记为 $\Gamma(x^0,y^0)$ 。 若这个集合非空,即存在连续道路连接 0-维边界,则称两点同伦等价 $x^0\sim y^0$ 。若有两条连续道路,沿用上面的记号,视为 1-维边界 $x^1,y^1\in\Gamma(x^0,y^0)$ 。将两条连续道路之间的连续面的集合记为 $\Gamma(x^1,y^1)$ 。 若这个集合非空,即存在连续面连接 1-维边界,则称两条连续道路同伦等价 $x^1\sim y^1$.继续向更高维度发展,考察两个 n-维度边界之间的 (n+1) 维连续几何体的连接。这样将建立一个等价关系的无穷结构,从所有维度去理解拓扑空间 X 及其上的点。同伦和范畴中的交换图很相似。一维同伦体现了有连续的道路连接点边界,而态射则体现了有箭头连接对象。更高维的同伦,则需要更高阶的范畴来对应.

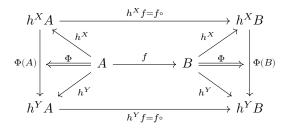
Hom 函子 以共变 Hom 函子例说明自然变换的原理. 在范畴中取两个对象 $X,Y \in \mathcal{C}$,有两个共变 Hom 函子,置于函子范畴:

$$h^X, h^Y \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C} = \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})}$$

这样可以讨论自然变换:

$$\Phi \in \mathrm{Nat}(h^X,h^Y)$$

使得对于 $\forall A, B \in \mathcal{C}$ 下图外框交换:



上图走两条路径满足:

$$f \circ \Phi(A) = \Phi(B) \circ f$$

例: R-列范畴 Col_R

Nat-Hom

R-列范畴 \mathbf{Col}_R 上取两个对象 $X = R_x, Y = R_y \in \mathbf{Col}_R$, 自然变换:

$$\Phi \in \operatorname{Nat}(h^X, h^Y)$$

要求对于 $\forall A = R_a, B = R_b \in \mathbf{Col}_R$ 下图外框交换:

$$h^XA = R_a^x \xrightarrow{(h^Xf = f \circ) \in \operatorname{Hom}(R_a^x, R_b^x)} h^XB = R_b^x$$

$$\Phi(A) \in \operatorname{Hom}(R_a^x, R_a^y) \downarrow \xrightarrow{h^X} A = R_a \xrightarrow{f \in R_b^a} B = R_b \xrightarrow{\Phi} \Phi(B) \in \operatorname{Hom}(R_b^x, R_b^y)$$

$$h^YA = R_a^y \xrightarrow{(h^Yf = f \circ) \in \operatorname{Hom}(R_a^y, R_b^y)} h^YB = R_b^y$$

列范畴的态射是矩阵,态射的复合也表示为矩阵的乘法. 自然变换的交换图要求:

$$f \circ \Phi(A) = \Phi(B) \circ f$$

上图说明了 $h^XA \to h^YB$ 的两条复合路径,即按照不同的先后顺序转换行列的维度,最终完成了维度转换:

$$R_a^x \to R_b^y$$

其中 $f \in \text{Hom}(A, B)$ 是行数 $a \to b$ 的转换:

$$f: R_a \to R_b$$

自然变换 $\Phi \in \text{Nat}(h^X, h^Y)$ 是列数 $x \to y$ 的转换:

$$\Phi: \operatorname{Hom}(R_x,-) \to \operatorname{Hom}(R_y,-)$$

《构建数学和物理基础的范畴论:用等价取代相等 | 众妙之门 - 返朴》[?] 谈到了范畴论中同构更加灵活的意义.放弃严格的相等 (equality)而改用灵活的同构 (isomorphism),可以更好地描述诸多的实际问题.

幺半群 回顾过去定义的幺半群:

定义: 幺半群的代数式定义

集合 X 上赋予二元运算。, 即映射

$$\circ: X \times X \to X$$
$$(a,b) \mapsto a \circ b$$

若它是封闭的,且满足:

• 结合律: 对于 $\forall a, b, c \in X$ 满足 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

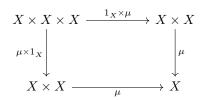
• 幺元: 若 $\exists 1_X \in X$ 使得对于 $\forall a \in X$ 满足 $a \circ 1_X = a = 1_X \circ a$,称 1_X 为幺元

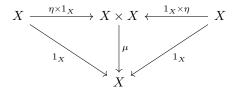
则称 $(X, \circ, 1_X)$ 为**幺半群 (monoid)**.

这里用代数化的方式所描述的结合律和幺元,相当于用方程的相等 (equality)形式给出了一种静态的约束条件. 范畴论则倾向于更加动态的方式来描述概念,下面给出态射式的定义:

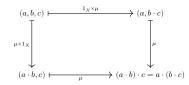
定义: 幺半群的态射式定义

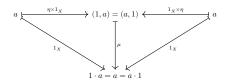
幺半群 (monoid)是一个集合范畴的对象 $X \in \mathbf{Set}$, 并且有 \mathbf{Set} 中的态射 $\mu: X \times X \to X$ 和 $\eta: 1 \to X$ 使得下图交换:





即对于 $\forall a, b, c, \in X$ 有:





这里的 $1 \in X$ 即是幺元.

以上左图描述的是结合律,右图描述的是幺元.接下来,进一步发展这种借助交换图的、动态的描述方式, 并把以上定义的态射方式进一步发展为自然同构的方式.

结合律 接用张量积的符号 \otimes 描述封闭的二元运算. 如果有结合律 $X \otimes (Y \otimes Z) = (X \otimes Y) \otimes Z$,用二元运算 \otimes 构造多元运算便不会产生运算顺序导致的歧义问题,可以直接用 $X \otimes Y \otimes Z$ 乃至 $V^{\otimes n}$ 这样的形式来表述. 现实中用相等来定义的结合律要求过于严格,故在范畴中结合律可以用自然同构实现 [?]. 结合律的表述需要三个变元,三元运算可以视为函子:

$$F = F(-, -, -) = ((- \otimes -) \otimes -), \quad G = G(-, -, -) = (- \otimes (- \otimes -))$$

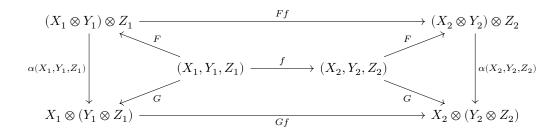
置于三函子范畴中:

$$F, G \in \mathbf{Fct}(\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}, \mathcal{C})$$

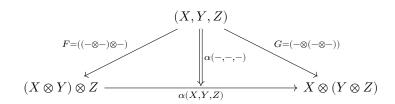
这样可以讨论自然同构

$$\alpha = \alpha(-, -, -) \in \operatorname{Nat}(F, G)$$

使得下图的外框交换:



下图中, 任意三元组 $\forall (X,Y,Z) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, 由自然同构 $\alpha(-,-,-)$ 产生了 \mathcal{C} 中的同构 $\alpha(X,Y,Z)$:



这就是**结合子 (associator)**. 用结合子 α 这种自然同构放松了代数中的结合律要求,在范畴论中不要求结合律的相等 $X\otimes (Y\otimes Z)=(X\otimes Y)\otimes Z$ 只要求自然同构 α 所构造的等价关系 $X\otimes (Y\otimes Z)\simeq (X\otimes Y)\otimes Z$ 并且用函子范畴中的自然同构来描述.

例: 集合范畴

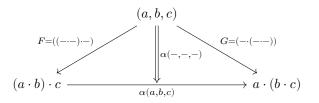
令 $X,Y,Z \in$ **Set** 为集合,对于 $x \in X,y \in Y,z \in Z, \ (x,(y,z)) \neq ((x,y),z)$ 且 $X \times (Y \times Z) \neq ((X \times Y) \times Z)$,但有结合子产生同构 $X \times (Y \times Z) \simeq ((X \times Y) \times Z)$ 。

例: 数的乘法

以自然数上的乘法 (\mathbb{N},\cdot) 结构为例,若以自然数为对象构成离散范畴 \mathbb{N} ,乘法构成双函子 $(-\cdot-):$ $(\mathbb{N},\mathbb{N})\to\mathbb{N}$ 。结合律的表述需要三个变元,三元运算可以视为函子: $F=F(-,-,-)=((-\cdot-)\cdot-)$, $G=G(-,-,-)=(-\cdot(-\cdot-))$ 置于三函子范畴中: $F,G\in\mathbf{Fct}((\mathbb{N},\mathbb{N},\mathbb{N}),\mathcal{C})$ 这样可以讨论自然同构

$$\alpha = \alpha(-, -, -) \in \operatorname{Nat}(F, G)$$

下图用结合子来表述



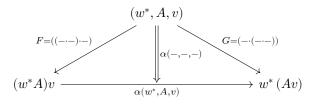
在整数上结合子无非是对相等的一种抽象表示,矩阵乘法上则更有意义:

例: 矩阵乘法

考虑矩阵乘法的结合

$$\begin{pmatrix} w^*Av = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} = 341 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (w^*A)v = \begin{bmatrix} 19 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^*(Av) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 \\ 68 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

用自然同构描述:



交换律 范畴上的交换律,方法和以上对结合律的讨论类似. 从函子范畴的角度来讨论范畴上的代数运算,二元运算视为双函子,进而置于函子范畴构成函子对象:

$$(-\otimes -) \in \mathbf{Fct}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}, \mathcal{C})$$

按照运算的顺序有函子:

$$F(X,Y) = X \otimes Y, \quad G(X,Y) = Y \otimes X$$

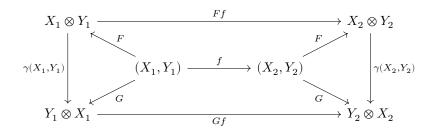
同样置于函子范畴中:

$$F(-,-),G(-,-)\in\mathbf{Fct}(\mathcal{C}\times\mathcal{C},\mathcal{C})$$

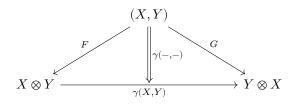
这样可以讨论自然同构

$$\gamma(-,-)\in \operatorname{Nat}(F(-,-),G(-,-))$$

使得下图的外框交换:



下图中,任意二元组 $\forall (X,Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$,由自然同构 $\gamma(-,-)$ 产生了 \mathcal{C} 中的同构 $\gamma(X,Y)$:



用函子范畴的自然同构放松了代数中的交换律要求,在范畴论中不要求结合律的相等 $X \otimes Y = Y \otimes X$ 只要求同构所构造的等价关系 $X \otimes Y \simeq Y \otimes X$ 并且用函子范畴中的自然同构来描述.

单位子 在范畴上也可以用自然同构的方式构造幺元. 并行的方式可以讲两个态射合并,其中 $f \in \text{End}(X)$ 是任意自态射, $1_I \in \text{End}(I)$ 是恒等态射:

$$X \otimes I \xrightarrow{\quad f \otimes 1_I \quad} X \otimes I \qquad \quad I \otimes X \xrightarrow{\quad 1_I \otimes f \quad} I \otimes X$$

现在把代数中 $1 \cdot X = X = X \cdot 1$ 这种构造方式,去掉相等的条件,用自然同构来实现. 二元运算视为双函子,进而置于函子范畴构成函子对象:

$$(-\otimes -) \in \mathbf{Fct}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}, \mathcal{C})$$

在固定的 I 下构成函子:

$$F(-) = I \otimes -, \quad G(-) = - \otimes I$$

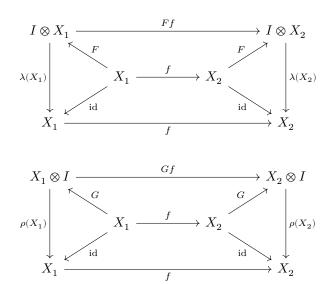
同样置于函子范畴中:

$$F(-),G(-)\in\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{C})$$

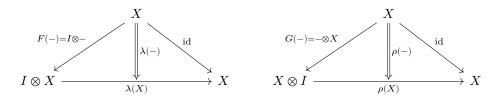
这样可以讨论自然同构

$$\lambda(-) \in \operatorname{Nat}(F(-), \operatorname{id}), \quad \rho(-) \in \operatorname{Nat}(G(-), \operatorname{id})$$

使得以下两图外框交换:



下图中,任意二元组 $\forall X \in \mathcal{C}$,由自然同构 $\lambda(-)$ 和 $\rho(-)$ 产生了 \mathcal{C} 中的同构:



用函子范畴的自然同构放松了代数中的交换律要求,在范畴论中不要求幺元的相等 $I\otimes X=X=X\otimes I$ 只要求同构所构造的等价关系 $I\otimes X\simeq X\simeq X\otimes I$ 这就是左右**单位子 (unitor)**.