集智学园范畴论讲义 v1.7.0809

第一季第 3 课：偏序集范畴 本节课继续讨论集合上构造出的范畴。承接上次课讲过的关系范畴，本节课特别讲一类常见的关系，即偏序关系。

我们用自然数等数系阐述了通常用不等号描述的偏序关系。除此之外还讨论了整数上通过整除关系构造的偏序关系，这是讨论数论问题的一个起点，偏序的构造将在数论的高级主题中发挥作用。

进一步我们发现，任何偏序的结构都可以转为范畴，即偏序集范畴。过去在代数中讨论的偏序问题，现在可以置于范畴论的框架下，讨论更宏观的偏序，比如线性子空间的包含、拓扑空间中开集的包含这样的结构。这类范畴的特点是两个对象之间只有最多一个态射。反过来，两个对象之间只有一个态射的范畴就是偏序集范畴。

理解了偏序集范畴后，再回顾集合范畴中的子集包含偏序，对于子集族就自然可以构造一个偏序集范畴。我们给出了有限集的子集族的构造方式，以及幂集的概念，幂集的结构在未来将发展出可表函子的概念。我们简要地介绍了在子集族上构造拓扑空间的方法，特别是平凡拓扑和离散拓扑。从集合构造拓扑，把集合范畴转到了拓扑空间范畴，从而从代数过渡到了几何。

偏序集以及偏序集范畴的结构较为简单，有利于理解范畴论的一些基本概念。接下来介绍函子的概念。我们给出了函子的例子，从带有偏序的自然数范畴到线性空间范畴的函子，阐述了这个函子是如何保持偏序结构的。函子把源范畴所需的结构信息保持到了目标范畴，使得跨领域的研究成为可能。

函子在保持结构方面分为共变函子和反变函子，我们介绍了反范畴的概念，可以用范畴和反范畴来描述共变和反变函子。数学中常见的用指标标记对象的方式，得到了函子方式的理解，即把抽象指标集视为范畴，通过函子映射到具体的对象族。这样得到了正向系统与反向系统的概念，这是后面学习范畴论中重要的正向极限与反向极限的基础。

偏序集范畴 范畴 $\mathcal{C}$ 的任何态射集 $\mathrm{Hom}(X,Y)$ 若至多包含一个态射，则称为**偏序集范畴 (posetal category)**. 这个名字显然和偏序集 $(X,\leq)$ 相关. 以偏序集 $(X,\leq)$ 中的元素为对象，定义态射集为:

$$\mathrm{Hom}(x,y)=\begin{cases}\{\rho_x^y\} & x\leq y\\ \varnothing & \text{otherwise}\end{cases} \tag{0.0.1}$$

按照偏序的性质:

- 自反性: $x\leq x$ 使得 $\mathrm{End}(x)=\{\rho_x^x\}$
- 反对称性: $(x\leq y\wedge y\leq x)\Rightarrow x=y$，不同对象之间只有一个方向的态射
- 传递性: $(x\leq y\wedge y\leq z)\Rightarrow x\leq z$，态射的复合律

这样得到了一个偏序集范畴. 反过来，一个偏序集范畴中，态射集最多包含单个态射，并且需要满足态射的复合规律，借助偏序集范畴中的态射，使得范畴的对象集合构成了偏序集.

偏序集里全部的图表都交换.

例 0.0.1. 离散动力系统

集合范畴的对象 $X \in \mathbf{Set}$，有初始点 x_0 及自态射 $f : X \to X$，这样构成**离散动力系统 (discrete dynamic system)**：

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

这样构造了函子：

$$\begin{aligned} F : \mathcal{N} &\to \mathbf{Set} \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

自然数 $(\mathbb{N}, \leq)$ 带有偏序，函子 F 则保持这个偏序构成序列 $\{x_n\}_{n\in\mathcal{N}}$。

例 0.0.2. 关系

关系范畴 **Rel** 中的对象为集合，态射为关系 $R \subseteq X \times Y$。若有两个关系 $R, S \in \mathrm{Hom}(X, Y)$，若关系 R 蕴含 S，即 $R \Longrightarrow S$，从集合上看则有 $X \times Y$ 中的子集包含关系：

$$R \subseteq S$$

这样构造了包含偏序，使得 $X \to Y$ 的关系全体构成偏序集范畴。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, bend left=50, "R"] \arrow[rr, bend right=50, "S"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow"] & & Y \end{tikzcd}$$

Σ 图 带有偏序结构的抽象指标集 $(I, \leq)$ 视为偏序集范畴，其对象为指标，用它来标记范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象，产生了对象族 $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i\in I}$. 写成函子形式：

$$\begin{aligned} (I, \leq) &\to \mathcal{C} \\ i &\mapsto X_i \\ j &\mapsto X_j \\ k &\mapsto X_k \end{aligned} \tag{0.0.2}$$

函子把抽象指标集的偏序结构映射到对象族中. 令 $i \leq j \leq k$，$\mathrm{Hom}(i, j) = \{\rho_i^j\}$ 及 $\mathrm{Hom}(j, k) = \{\rho_j^k\}$. 且 $i \leq k$ 即 $\mathrm{Hom}(i, k) = \{\rho_i^k = \rho_j^k \circ \rho_i^j\}$.

共变函子把 $\rho_i^j : i \to j$ 映射为 $\psi_i^j : X_i \to X_j$，满足：

$$\psi_i^k = \psi_j^k \circ \psi_i^j$$

反变函子把 $\rho_i^j : i \to j$ 映射为 $\varphi_i^j : X_j \to X_i$，满足：

$$\varphi_i^k = \varphi_i^j \circ \varphi_j^k$$

这样把偏序集的结构赋予了范畴 $\mathcal{C}$ 中被考察的对象和态射．函子的像构成了 $\mathcal{C}$ 中的子范畴．偏序集里全部的图表都交换，故这个子范畴中的图表也都交换．子范畴称为 Σ 图表 [?].

反范畴　将一个范畴中的态射全部反向，得到反范畴.

定义 0.0.3.

令 $\mathcal{C}$ 为范畴，$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 为 $\mathcal{C}$ 的 **反范畴 (opposite category)**，若：

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- 对于任意 $X, Y \in \mathcal{C}$：$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(X,Y) = \mathcal{C}(Y,X)$

共变函子与反变函子　上述 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 型的函子也称为**共变函子 (covariant functor)**．与它相对的是**反变函子 (contravariant functor)**，即：

$$\begin{aligned}
F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} &\to \mathcal{D} \\
X &\mapsto F(X) \\
Y &\mapsto F(Y) \\
F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(X,Y) &\to \mathcal{D}(F(Y), F(X)) \\
h &\mapsto F(h) \\
F(h) : F(Y) &\to F(X)
\end{aligned}$$

这里 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 是如上定义的 $\mathcal{C}$ 的反范畴．也就是说，$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中的对象和态射和 $\mathcal{C}$ 一一对应，只是态射的方向相反.

反变函子 $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ 的记号，就相当于共变函子中把态射的箭头反向.

正向系统与反向系统　带偏序的抽象指标集 $(I, \leq)$ 视为偏序集范畴．按照 (0.0.2) 的方式构造 Σ 图表，通过共变或反变的函子 $\Sigma : (I, \leq) \to \mathcal{C}$ 标记 Σ 图表中的对象，赋予偏序的性质。其 Σ 图表在共变时称为**正向系统 (direct system)**或**归纳系统 (inductive system)**，在反变时 Σ 图表 $\mathrm{Im}\,\Sigma = \{X_i \in \mathcal{C}\}_{i \in I}$ 称为**反向系统 (inverse system)**或**投射系统 (projective system)**。

$$
\begin{tikzcd}
 & X_i \arrow[dl] \arrow[dd, "\psi_i^j"] \\
C & \\
 & X_j \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & X_i \\
L \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & X_j \arrow[uu, "\varphi_i^j"']
\end{tikzcd}
$$

上图给出了一类满足交换性的对象 $C, L \in \mathcal{C}$。图左的正向系统中，$C \in \mathcal{C}$ 使得 Σ 图表中每个对象都存在射向 C 的态射，且使得附加了 C 的 Σ 图交换. 图右的反向系统中，$L \in \mathcal{C}$ 使得 Σ 图表中每个对象都存在接受 C 的态射，且使得附加了 L 的 Σ 图交换.