1. Зависимость «ошибки кодирования» при обучении кодовой книги

Для вывода в аналитическом виде характера зависимости средней / максимальной нормы ошибки кодирования от размера кодовой книги, первым делом более внимательно посмотрим на формулы величин, рассчитываемых в процессе построения кодовой книги.

1) Начальный «центр» кодовой книги на первой итерации:

$$C^{*}=\frac{1}{M}\cdot\sum_{m=1}^{M}x_m \tag{1}$$

Данная формула представляет собой простое среднее всех векторов в обучающей выборке (своего рода «центр масс»)

2) Начальное значение squared error distortion measure (SEDM):

$$\begin{aligned}
&D^{*}=\frac{1}{Mk}\cdot\sum_{m=1}^{M}\left\|x_m-C^{*}\right\|^2=\\
&\frac{1}{k}\cdot\Big(\frac{1}{M}\cdot\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{k}[x_m^{(n)}-C^{*}{}_n]^2\Big)=\\
&\frac{1}{k}\cdot\Big(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{M}\cdot\sum_{m=1}^{M}[x_m^{(n)}-C^{*}{}_n]^2\Big)=\\
&\frac{1}{k}\cdot\sum_{n=1}^{k}\sigma_n^2
\end{aligned} \tag{2}$$

Где σ_n^2 — дисперсия обучающей выборки по n-й координате нашего k-мерного пространства. Таким образом рассчитывается нормированный к размерности пространства след[1] ковариационной матрицы для множества x_m – нашей обучающей выборки.

3) На каждом шаге увеличения размера кодовой книги, для завершения шага должно выполниться условие:

1 Сумма элементов главной диагонали (http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BB%D0%B5%D0%B4_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D1%8B)

$$\frac{(D_{i-1}-D_i)}{D_{i-1}} \leq \epsilon \quad \rightarrow$$

$$(1-\epsilon) D_{i-1} \leq D_i \quad \rightarrow \tag{3}$$

$$D_i \geq (1-\epsilon)^i \cdot D^*$$

Поскольку на каждом шаге кодовая книга растет в 2 раза, то рассматривая лишь кодовые книги с размером size = 2^L (L – натуральное число), можно сказать, что номер шага p тождественен L. Другими словами, можно сказать, что p = log2(size).

Тем не менее, остро встает вопрос с количеством итераций на каждом шаге. Необходимо из каких-то соображений определить чему будет равно i в конце текущего p-го шага. В общем случае вывести аналитическую формулу для предела i пока не вышло. Однако эмпирически было замечено, что при обучении кодовой книги при заданном ε, количество итераций на каждом шаге в среднем примерно одинаковое. Таким образом, некое среднее i видится целесообразным оценивать по результатам обучения кодовой книги. Обозначим далее эту величину как i*.

ВЫВОДЫ по п.1:

Получаем, что в процессе обучения кодовой книги «ошибка кодирования», измеряемая с помощью SEDM, подчиняется правилу (4) и таким образом возможно получить оценку для нижней границы SEDM:

$$D(size) \geq (1-\epsilon)^{(log2(size) \cdot i^*)} \cdot D^* \tag{4}$$

Где D*, в свою очередь, зависит от ковариационной матрицы обучающей выборки (см. (2)).

2. Ошибка кодирования входных данных

В качестве оценки ошибки кодирования входных данных предлагается применять норму разности y_m (элемент кодируемого множества) и соответствующего ему кода ($Q(y_m)$ в терминах предоставленного описания). Таким образом, норма m-ой ошибки выражается формулой:

$$norm_m = \sqrt{\sum_{n=1}^{k} [y_m^{(n)} - Q(y_m)]^2} \tag{5}$$

Соответственно средняя норма будет выражаться как:

$$norm^{*}=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} norm_{m} \qquad (6)$$

ВЫВОДЫ по п.2:

Для того, чтобы привести нашу «аналитическую» оценку для SEDM к размерности нормы ошибки, предлагается проделать следующие операции:

- убрать нормировку к размерности пространства в (2):

$$D^{*}{}'=\sum_{n=1}^{k}\sigma_{n}^{2} \qquad (7)$$

- взять квадратный корень из получившейся в (7) величины[2]:

$$D^{**}=\sqrt{\left(D^{*}{}'\right)} \qquad (8)$$

- итоговое ожидание SEDM для некоторого размера size кодовой книги рассчитывать как:

$$D(size)\approx(1-\epsilon)^{(log2(size)\cdot i^{*})}\cdot D^{**} \qquad (9)$$

3. Итог

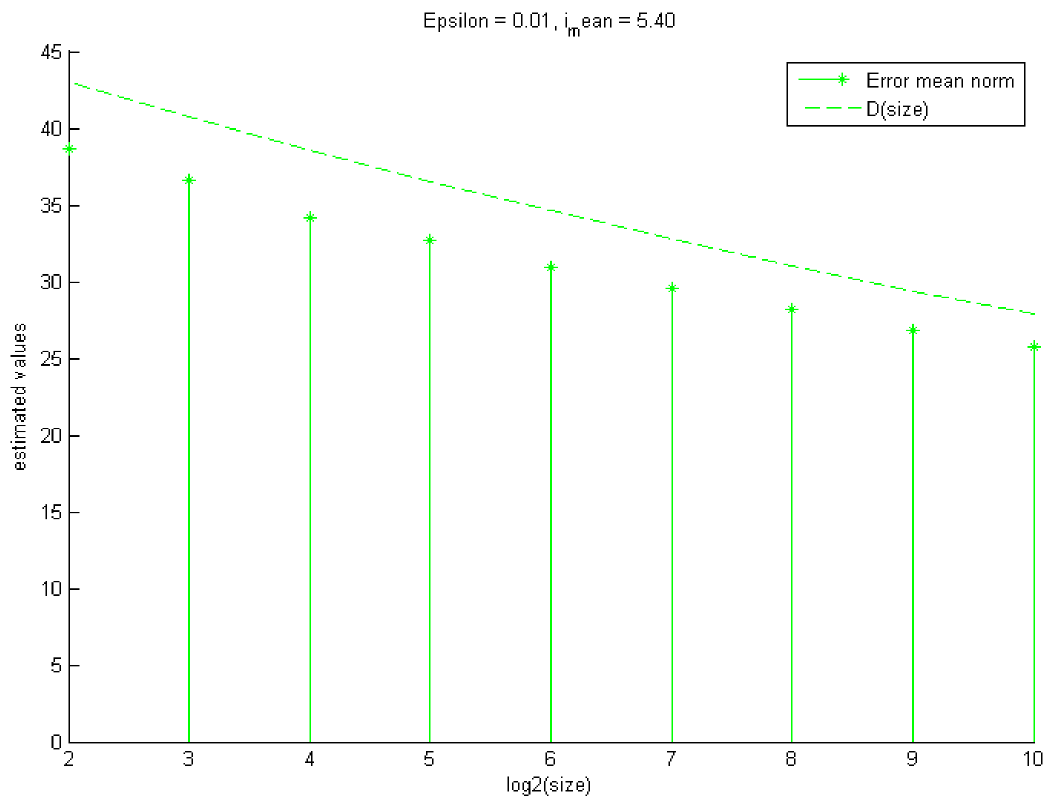
Проверим на практике наши предположения для значений ε = [0.01; 0.05; 0.1] и значений size = [4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512; 1024].

Значения i*= [5.4; 1.1; 1] для соответствующих ε были оценены в процессе обучения кодовых книг.

Графики средней нормы ошибки кодирования и соответствующих им оценок D(size) из формулы (9) представлены ниже.

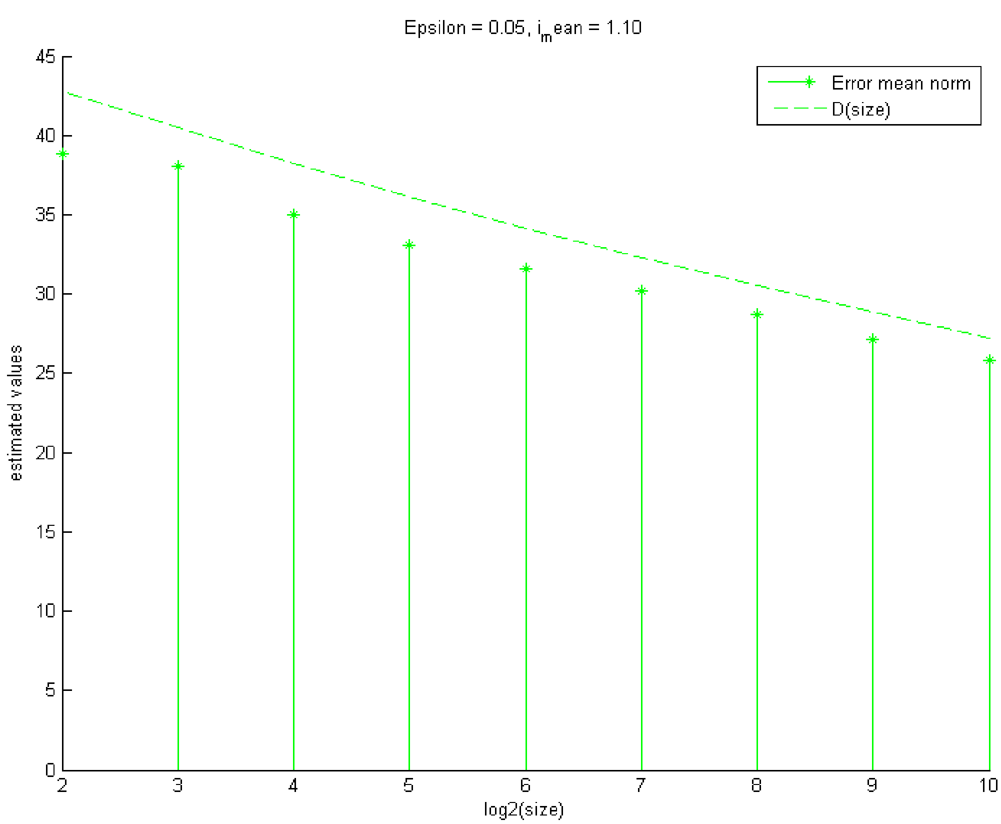
ε = 0.01 :

2 Наиболее спорная операция во всем изложенном подходе. Однако, как будет далее сказано в замечаниях — на мой взгляд весьма спорно применение нормы вектора, в качестве показателя производительности некоторого вероятностного алгоритма



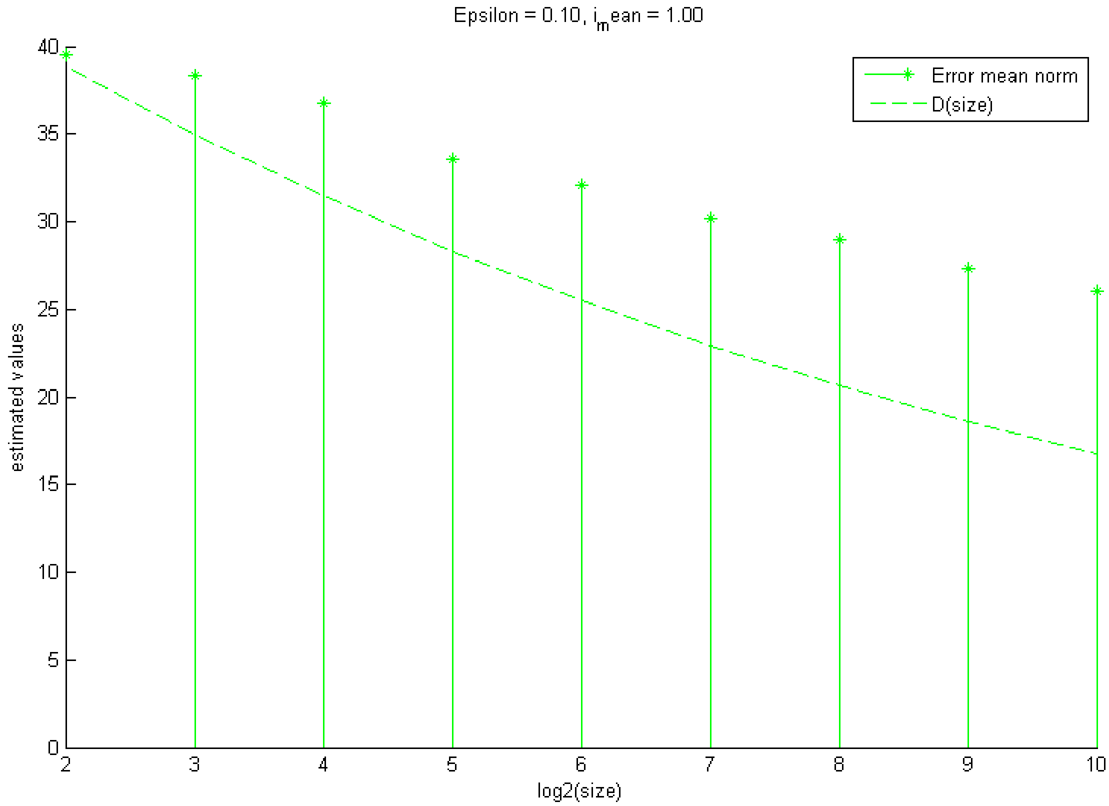
Epsilon = 0.01 , i_mean = 5.40
Error mean norm
D(size)
estimated values
log2(size)
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
2
3
4
5
6
7
8
9
10

ε = 0.05 :



Epsilon = 0.05, i_mean = 1.10
Error mean norm
D(size)
estimated values
log2(size)
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
2
3
4
5
6
7
8
9
10

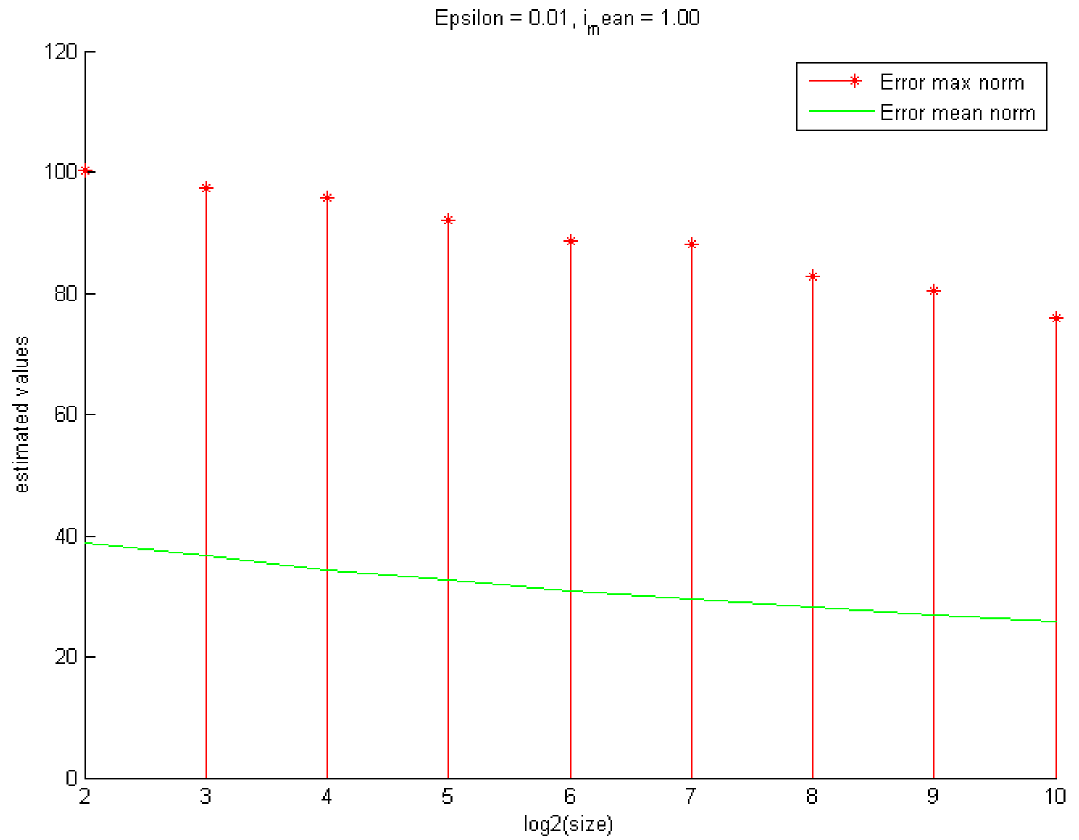
ε = 0.1 :



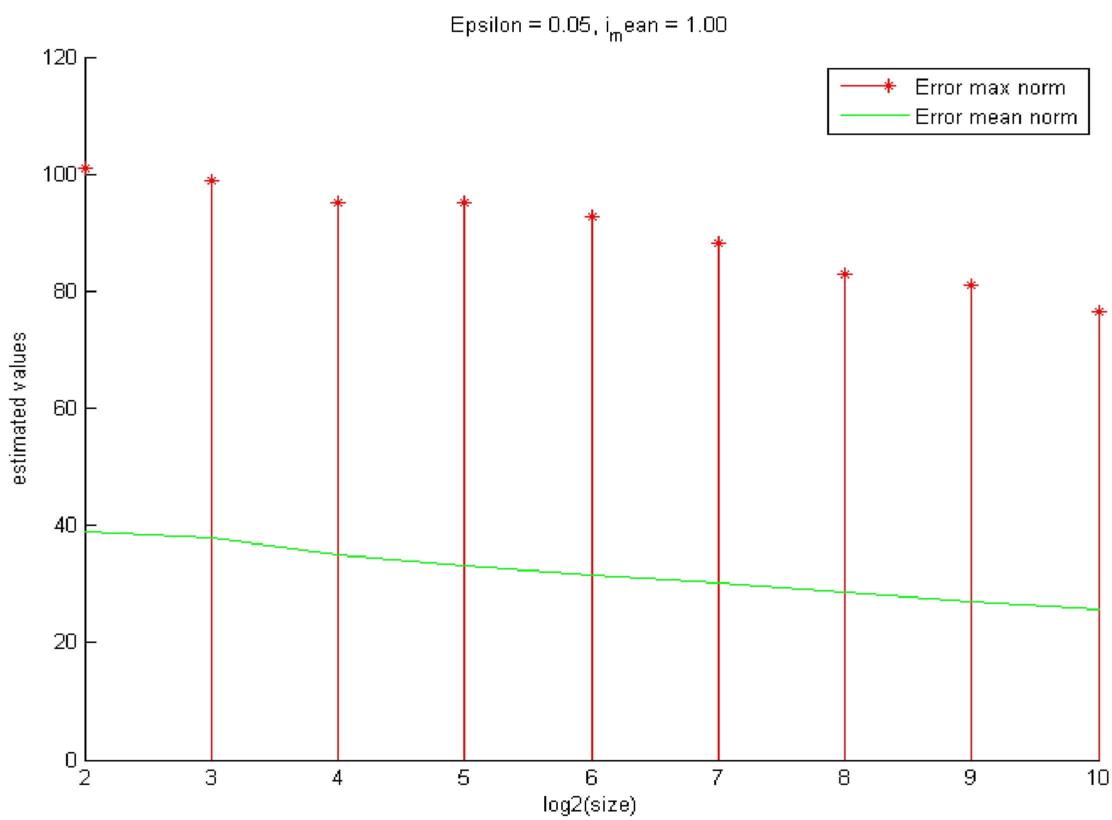
Для последнего графика видно, что значение ε было выбрано слишком большим, т. к. условие оптимизации SEDM всегда выполнялось с 1-го раза. Однако меньше одной итерации на шаге сделать не представляется возможным.

Графики максимальных норм ошибок кодирования представлены ниже. Указанное автором задания замечание, что максимальная норма ошибки как правило получается примерно в 3 раза больше, нежели соответствующая ей средняя норма, может быть условно объяснено «правилом 3-х сигм». Хотя в данном случае стоит уточнить, что сигма для каждой ошибки у нас k-мерная (как и пространство кодируемых значений) и взятие квадратного корня от суммы дисперсий по каждой координате — несколько необычная операция. Хотя возможно тут есть простое объяснение, для которого нужны более глубокие знания теории вероятности.

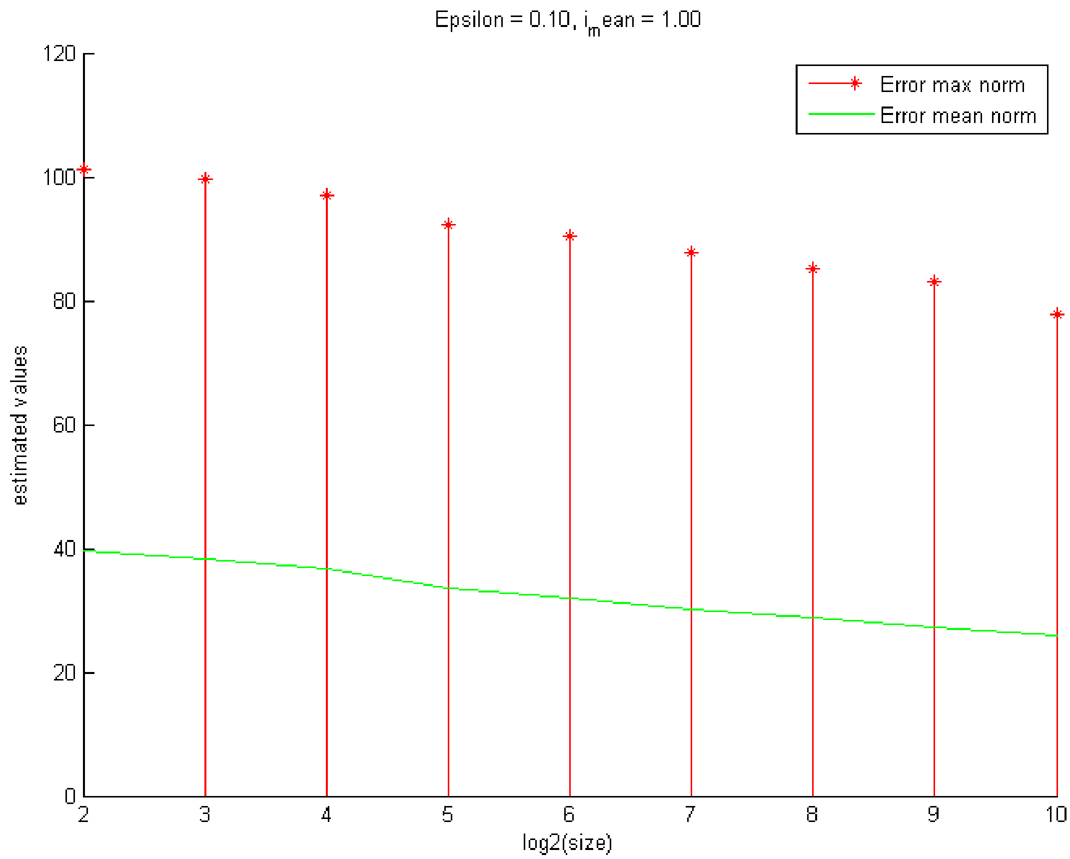
ε = 0.01 :


Epsilon = 0.01, i_mean = 1.00
Error max norm
Error mean norm
estimated values
log2(size)
120
100
80
60
40
20
0
2
3
4
5
6
7
8
9
10

ε = 0.05 :


Epsilon = 0.05, i_mean = 1.00
Error max norm
Error mean norm
estimated values
log2(size)
120
100
80
60
40
20
0
2
3
4
5
6
7
8
9
10

ε = 0.1 :



Замечания:

1) Самым главным условием применимости всего вышесказанного является репрезентативность обучающей выборки. Без выполнения данного условия что-либо гарантировать вообще тяжело.

2) Возможно применять не только i*, оцененную по результатам обучения кодовой книги, но и просто логировать (что нам мешает?) фактические значения i на каждом шаге. Оценка получится в итоге более точной.

3) В итоге происходит сравнение несколько разных по своей природе величин — квадратного корня следа ковариационной матрицы (суть «квадратный корень от большого суммы») и средней нормы ошибки кодирования (суть «большая сумма квадратных корней»). Когда речь идет о стохастических процессах — данная операция может быть в некотором роде «оправдана», результаты

будут близки друг к другу. Однако сразу в оценку будет нами же вносится некоторое искусственно-созданное системное смещение.

4) Не вполне понятным видится выбор авторами задания именно нормы вектора в качестве оценки «производительности» алгоритма кодирования. Насколько позволяет судить мой опыт, когда имеют дело с разного рода адаптивными механизмами и оценкой параметров, чаще всего применяют средне-квадратическую ошибку (MSE) и для этого есть четкое обоснование — легко показать её взаимосвязь с дисперсией. Чего я не знаю и почему можно применять среднюю норму? :)

5) Наверняка есть и более простой способ объяснить исследуемую зависимость. Был бы рад его услышать.