

Домашнее задание №3

Андрей Козлов

5 марта 2015 г.

1. (a) $\alpha \rightarrow \alpha$

Терм вида $\lambda xy. \dots$ всегда имеет тип вида $\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \dots$

- (b) $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$

- (c) $\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$ Это не наиболее общий тип

- (d) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$ Типы не сходятся

- (e) Терм не типизируется.

Рассмотрим предтерм $(xy)x$, пусть он является термом. Тогда $\exists \Gamma, \sigma: \Gamma \vdash (x(yx)): \sigma$.

Тогда по лемме об инверсии правый подтерм x имеет некий тип τ , а левый подтерм xy тип $\tau \rightarrow \sigma$, то есть $y: \alpha, x: \alpha \rightarrow \tau \rightarrow \sigma$. Таким образом, тип $\tau = \alpha \rightarrow \tau \rightarrow \sigma$ является подвыражением себя, что невозможно в силу конечности типа.

2.

3. Нужно использовать `rec`

- (a) `isZero :: Nat -> Bool`

`isZero 0 = true`

`isZero (suc n) = false`

`ge :: Nat -> Nat -> Bool`

`ge n m = if (isZero (minus m n))`

`then true`

`else false`

- (b) `fac :: Nat -> Nat`

`fac 0 = suc 0`

`fac (suc n) = mul (suc n) (fac n)`

(c) $f :: (\text{Nat} \rightarrow a) \rightarrow \text{Nat} \rightarrow a$
 $f\ g\ 0 = g\ (\text{succ}\ 0)$
 $f\ g\ (\text{succ}\ n) = g\ (f\ g\ n)$

$\text{ack} :: \text{Nat} \rightarrow \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$
 $\text{ack}\ 0 = \text{succ}$
 $\text{ack}\ (\text{succ}\ m) = f\ (\text{ack}\ m)$

4. (a)
 - $\text{Pair}_{\sigma,\tau}$
 - $\Gamma \vdash \text{pair}_{\sigma,\tau} : \sigma \rightarrow \tau \rightarrow \text{Pair}_{\sigma,\tau}$
 - $\Gamma \vdash \text{fst}_{\sigma} : \text{Pair}_{\sigma,\tau} \rightarrow \sigma$
 - $\Gamma \vdash \text{snd}_{\tau} : \text{Pair}_{\sigma,\tau} \rightarrow \tau$
 - $\Gamma \vdash \text{fst}\ (\text{pair}\ x\ y) \rightarrow x$
 - $\Gamma \vdash \text{snd}\ (\text{pair}\ x\ y) \rightarrow y$

(b) **У rec неправильный тип**

- List_{σ}
- $\Gamma \vdash \text{nil}_{\sigma} : \text{List}_{\sigma}$
- $\Gamma \vdash \text{cons}_{\sigma} : \sigma \rightarrow \text{List}_{\sigma} \rightarrow \text{List}_{\sigma}$
- $\Gamma \vdash \text{rec}_{\text{List}_{\sigma}} : \alpha \rightarrow (\sigma \rightarrow \text{List}_{\sigma} \rightarrow \alpha) \rightarrow \text{List}_{\sigma} \rightarrow \alpha$
- $\Gamma \vdash \text{rec}_{\text{List}_{\sigma}}\ n\ c\ \text{nil} \rightarrow n$
- $\Gamma \vdash \text{rec}_{\text{List}_{\sigma}}\ n\ c\ (\text{cons}\ x\ xs) \rightarrow c\ x\ xs\ (\text{rec}\ n\ c\ xs)$

5. **Нужно использовать rec**

insert $:: \text{Int} \rightarrow [\text{Int}] \rightarrow [\text{Int}]$
insert $x\ [] = [x]$
insert $x\ (y:ys) = \text{if } x \leq y$
 then $(x:y:ys)$
 else $y:(\text{insert}\ x\ ys)$

sort $:: [\text{Int}] \rightarrow [\text{Int}]$
sort $[] = []$
sort $(x:xs) = \text{insert}\ x\ (\text{sort}\ xs)$