

Домашнее задание №3

Андрей Козлов

8 марта 2015 г.

1. (a) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$
(b) $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$
(c) $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \beta$
(d) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$
(e) Терм не типизируется.
Рассмотрим предтерм $(xy)x$, пусть он является термом. Тогда $\exists \Gamma, \sigma: \Gamma \vdash (x(yx)): \sigma$.
Тогда по лемме об инверсии правый подтерм x имеет некий тип τ , а левый подтерм xy тип $\tau \rightarrow \sigma$, то есть $y: \alpha, x: \alpha \rightarrow \tau \rightarrow \sigma$. Таким образом, тип $\tau = \alpha \rightarrow \tau \rightarrow \sigma$ является подвыражением себя, что невозможно в силу конечности типа.
2. (a) $\lambda f g. f(\lambda a. ga), \lambda f g. f(g(f(\lambda a. ga))), \lambda f g. f(g(f(g(f(\lambda a. ga))))))$
(b) $\lambda f g. g(f(\lambda a. ga))(f(\lambda a. ga))$
(c) $\lambda f g. fg$
(d) $\lambda f. f(\lambda g. g(\lambda i. i))$
3. (a)

```
false  :: Nat -> Bool -> Bool
false n _ = False

isZero  :: Nat -> Bool -> Bool
isZero n _ = rec True false n

ge      :: Nat -> Nat -> Bool
ge n m = rec True isZero (minus m n)
```


(b)

```
multSucc :: Nat -> (Nat -> Nat)
multSucc n = mul (succ n)
```

$\text{fac} :: \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$
 $\text{fac} = \text{rec } 1 \text{ multSucc}$

(c)

4. (a) • $\text{Pair}_{\sigma,\tau}$
 • $\Gamma \vdash \text{pair}_{\sigma,\tau} : \sigma \rightarrow \tau \rightarrow \text{Pair}_{\sigma,\tau}$
 • $\Gamma \vdash \text{fst}_{\sigma} : \text{Pair}_{\sigma,\tau} \rightarrow \sigma$
 • $\Gamma \vdash \text{snd}_{\tau} : \text{Pair}_{\sigma,\tau} \rightarrow \tau$
 • $\Gamma \vdash \text{fst} (\text{pair } x \ y) \rightarrow x$
 • $\Gamma \vdash \text{snd} (\text{pair } x \ y) \rightarrow y$
- (b) • List_{σ}
 • $\Gamma \vdash \text{nil}_{\sigma} : \text{List}_{\sigma}$
 • $\Gamma \vdash \text{cons}_{\sigma} : \sigma \rightarrow \text{List}_{\sigma} \rightarrow \text{List}_{\sigma}$
 • $\Gamma \vdash \text{rec}_{\text{List}_{\sigma}} : \alpha \rightarrow (\sigma \rightarrow \text{List}_{\sigma} \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \text{List}_{\sigma} \rightarrow \alpha$
 • $\Gamma \vdash \text{rec }_{\text{List}_{\sigma}} \text{ n c nil} \rightarrow \text{n}$
 • $\Gamma \vdash \text{rec }_{\text{List}_{\sigma}} \text{ n c (cons x xs)} \rightarrow \text{c x xs (rec n c xs)}$

5. $\text{recList} :: a \rightarrow (b \rightarrow [b] \rightarrow a \rightarrow a) \rightarrow [b] \rightarrow a$
 $\text{recList } n \ c \ [] = n$
 $\text{recList } n \ c \ (x:xs) = c \ x \ xs \ \$ \ \text{recList } n \ c \ xs$

$\text{insert} :: \text{Ord } a \Rightarrow a \rightarrow [a] \rightarrow [a] \rightarrow [a]$
 $\text{insert } x \ _ \ [] = [x]$
 $\text{insert } x \ _ \ (y:ys) \mid x \leq y = (x:y:ys)$
 $\mid \text{otherwise} = y:(\text{insert } x \ [] \ ys)$

$\text{sort} :: \text{Ord } a \Rightarrow [a] \rightarrow [a]$
 $\text{sort} = \text{recList } [] \ \text{insert}$