1. Wyznacz pochodne następujących funkcji

   a) $f(x) = 6x^2 + 7x + \sin(x^3) + e^{7x} + 12$,

   b) $f(x) = (7x + 1)^6$,

   c) $f(x) = x^5 \cos(5x + 6)$,

   d) $f(x) = \frac{x^7 - \ln x}{x^3 + 1}$.

2. Wyznacz równanie stycznej do funkcji $f(x) = x^4 + 5x$ w punkcie $(1, 6)$. Podaj jej interpretację.

3. Znajdź ekstrema funkcji $f(x) = 3x^5 - 20x^3$.

4. Oblicz pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ dla następujących funkcji:

   a) $f(x, y) = x^2y^2 - e^x y$,

   b) $f(x, y) = \sin(x^2y) - y^3x$.

5. Wyznacz płaszczyznę styczną do wykresu $f(x, y) = x^2 + 3xy$ w punkcie $(1, 2, 7)$.

6. Wyznacz pochodne dla następujących funkcji:

   a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + yz + z^3$,

   b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x^2 + y^3 + z^4, 2x^3 + 3yz^2)$,

   c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x^2y, x - xy, x^2 + 2y^2)$.

7. Wyznacz ekstrema następujących funkcji:

   a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x$,

   b) $f(x, y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$,

   c) $f(x, y) = x^3 - y^3$,

   d) $f(x, y) = x^4 + y^4$.

   e) $f(x, y) = |2x + y| + y^2$.

8. Wyznacz następujące całki nieoznaczone:

   a) $\int x^3 dx$,

   b) $\int (6x^2 + 8) dx$,

   c) $\int \frac{dx}{x+3}$,

d) $\int x^2 e^{-x} dx$,

e) $\int x^2 \sin x dx$,

f) $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$,

g) $\int \frac{x^2+5x}{x^2-x-2} dx$.

9. Oblicz następujące całki oznaczone:

a) $\int_1^3 x^2 \, dx$,

b) $\int_0^2 12x^3 \, dx$,

c) $\int_0^4 [\int_4^{12} xydx] dy$,

d) $\int_1^2 [\int_{-1}^3 (yx^2 - yx) dx] dy$,

e) $\int_{-1}^3 [\int_1^2 (yx^2 - yx) dy] dx$.

10. Dana jest funkcja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Narysuj zbiór $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 4\}$.

11. Dana jest funkcja $f(x,y) = x^2 - y^2$. Narysuj zbiór $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 4\}$.

12. Oblicz pochodną funkcji $f(x,y) = x^2 - x^2y + 2xy^2 + 1$ w punkcie $P(3,1)$ w kierunku wektora $v = [-6, 8]$.

13. Oblicz przybliżoną wartość wyrażenia $(2.01)^2 - 3 \cdot (2.97)^2$.

14. Oblicz przybliżoną wartość wyrażenia $\frac{6.01}{(6.01)^2 + (8.02)^2}$.

15. Wyznacz rozwinięcia w szereg Taylora następujących funkcji:

a) $y = e^x$,

b) $y = \cos x$,

c) $y = \frac{1}{1-x}$ dla $x \in (0,1)$.

d) $y = \frac{5}{1-2x}$ dla $x \in (-0.5, 0.5)$.

16. Uzasadnij zależność $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$, a następnie oblicz przybliżoną wartość $\ln(1.5)$.

17. Oblicz $\cos(0.1)$ z dokładnością do 0.00001.

18. Pokaż, że $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$.

19. Oblicz następujące całki:

a) $\iint\limits_T (5x^2 - 2xy) dxdy$, gdzie T jest trójkątem ograniczonym osiami OX, OY oraz prostą $x + 2y = 2$.

b) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, gdzie D jest górną połówką koła o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu 1.

c) $\iint\limits_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy$, gdzie D_R jest kołem o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu R.

d) $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy.$

e) $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx.$

f) $\iiint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdydz$, gdzie $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq z^2, R_1\leq z\leq R_2\}$, gdzie $R_2>R_1>0$.

20. Wyprowadź wzór na objętość kuli. Wskazówka: Policz odpowiednią całkę potrójną.

21. Policz wyznaczniki dla następujących macierzy:

(a) $M_1=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

(b) $M_2=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 6\\ 2 & 2 & 5\\ 1 & -11 & 10\end{bmatrix}$

(c) $M_3=\begin{bmatrix}0 & 4 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 3 & 0\\ 2 & 0 & -5 & 3\end{bmatrix}$

22. Wyznacz macierze odwrotne do następujących macierzy:

(a) $M_1=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

(b) $M_2=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$

(c) $M_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

a następnie sprawdź, że zachodzi $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ oraz $det(A^{-1})=(det(A))^{-1}$.

23. Rozwiąż równanie $XA=B+C$, gdzie $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ oraz $C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

24. Rozwiąż równanie $AXA=B$, gdzie $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ oraz $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$.

25. Rozwiąż równanie $XA+XB=18I$, gdzie $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ oraz $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, a I to macierz identycznościowa.

26. Wyznacz rząd macierzy $M=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1 & -1\\ 5 & -1 & 5 & 1\end{bmatrix}$.

27. Wyznacz wartości i wektory własne dla następujących macierzy.

a) $M_1=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

b) $M_2=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

28. Wyznacz wartości i wektory własne dla $M=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & -2 & -3\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

29. Wyznacz macierze Jordana dla następujących macierzy.

a) $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

d) $M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

30. Wyznacz M_1^{2000}, M_2^{2000} oraz M_4^{2000} dla macierzy z poprzedniego zadania.