

1. Sprawdź czy wektor $[3, 4, 5]$ jest kombinacją liniową wektorów $[1, 0, 2]$ oraz $[0, -1, 1]$.
2. Sprawdź czy wektory $[1, 4, 3]$, $[-1, 2, -1]$, $[0, 6, 4]$ są liniowo niezależne.
3. Dla jakich wartości parametru m wektory $[1, 1, 1]$, $[1, 2, 3]$ oraz $[m, 1, 1]$ są liniowo niezależne.
4. Czy wektory $[1, 2]$ oraz $[0, 3]$ tworzą bazę przestrzeni \mathbb{R}^2 ?
5. Czy wektory $[3, 0, 1]$, $[0, 1, 0]$ oraz $[0, 0, 5]$ tworzą bazę ortogonalną przestrzeni \mathbb{R}^3 ?
6. Wyznacz bazę podprzestrzeni \mathbb{R}^3 generowaną przez wektory $[1, 1, 0]$, $[2, 0, 3]$ oraz $[0, -2, 3]$. Podaj wymiar tej podprzestrzeni.
7. Zaproponuj wektor v tak aby wektory $[1, 2, 0]$, $[0, 1, 1]$ oraz v były liniowo zależne.
8. Zaproponuj wektor v tak aby wektory $[1, 2, 0]$, $[0, 1, 1]$ oraz v były liniowo niezależne.
9. Sprawdź czy poniższe zbiory są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni \mathbb{R}^4 .
 - (a) $V_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2 = 0\}$,
 - (b) $V_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2 = 3\}$,
 - (c) $V_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_3 = 0\}$,
 - (d) $V_4 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1x_3 = 0\}$.
10. Rozważamy przestrzeń wektorową wszystkich funkcji określonych na zbiorze $[0, 1]$ i przyjmujących wartości w zbiorze liczb rzeczywistych \mathbb{R} z działaniem dodawania funkcji i mnożeniem przez skalary (oznaczymy ją przez V). Czy poniższe zbiory są podprzestrzeniami liniowymi tej przestrzeni?
 - (a) $V_1 = \{f \in V : f(0) = 0\}$,
 - (b) $V_2 = \{f \in V : f(0.5) = 0.5\}$,
 - (c) $V_3 = \{f \in V : f(0) = f(1)\}$,
 - (d) $V_4 = \{f \in V : \forall x \in [0, 1] : f(x) > 0\}$.
11. Jak wyglądają wszystkie możliwe podprzestrzenie liniowe \mathbb{R}^2 oraz \mathbb{R}^3 ?
12. Sprawdź czy poniższe odwzorowania są liniowe:
 - (a) $T_1 : \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_2, 4x_3) \in \mathbb{R}^2$,
 - (b) $T_2 : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_1, 1) \in \mathbb{R}^2$,
 - (c) $T_3 : C^\infty(\mathbb{R}) \ni f \mapsto f' + 2f'' + 3f''' \in C^\infty(\mathbb{R})$, gdzie $C^\infty(\mathbb{R})$ - zbiór funkcji nieskończenie różniczkowalnych działających z \mathbb{R} w \mathbb{R} .
13. Zaproponuj bazę ortogonalną dla przestrzeni V rozpiętej na $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, tzn. $V = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$.
14. Poniższe odwzorowania są liniowe
 - (a) $T_1 : \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 - x_3, 4x_2 + 2x_3) \in \mathbb{R}^2$,

(b) $T_2 : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_2 - x_1, x_1 + x_2, -x_2) \in \mathbb{R}^3$.

Wyznacz bazę oraz wymiar jądra oraz bazę oraz wymiar obrazu tego przekształcenia.

15. Czy odwzorowania z poprzedniego zadania są monomorfizmami, epimorfizmami, izomorfizmami?
16. Mnożenie macierzy w ogólnym przypadku nie jest przemienne (tzn. $AB \neq BA$). By się o tym przekonać, wyznacz AB oraz BA dla $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.
17. Wyznacz macierze odwzorowań liniowych (w bazach standardowych) T_1 oraz T_2 z zadania 14. Dodatkowo wyznacz macierz przekształceń $T_1 \circ T_2$ oraz $T_2 \circ T_1$.

18. Policz wyznaczniki dla następujących macierzy:

(a) $M_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $M_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & -11 & 10 \end{bmatrix}$

(c) $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

19. Wyznacz macierze odwrotne do następujących macierzy:

(a) $M_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

a następnie sprawdź, że zachodzi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ oraz $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

20. Rozwiąż równanie $XA = B + C$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

21. Rozwiąż równanie $AXA = B$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

22. Rozwiąż równanie $XA + XB = 18I$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, a I to macierz identycznościowa.

23. Wyznacz rząd macierzy $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

24. Rozwiąż poniższe układy równań liniowych metodą eliminacji Gaussa oraz metodą Cramera.

a)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 6 \\ -4x_1 + 2x_3 = 0, \\ 2x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2. \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

25. W oparciu o twierdzenie Kroneckera-Capellego stwierdź czy poniższy układ równań ma rozwiązanie. Jeśli tak, rozwiąż go metodą eliminacji Gaussa.

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2. \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 = 5 \end{cases}$$

26. Wyznacz wartości i wektory własne dla następujących macierzy.

$$\text{a) } M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

27. Wyznacz wartości i wektory własne dla $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

28. Sprawdź, że spełnione jest twierdzenie Cayleya-Hamiltona dla $M = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. Na tej podstawie wyznacz M^{-1} .

29. Wyznacz macierze Jordana dla następujących macierzy.

$$\text{a) } M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d) } M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

30. Wyznacz M_1^{2000} , M_2^{2000} oraz M_4^{2000} dla macierzy z poprzedniego zadania.