1. W poniższych zadaniach zakładamy, że kobiety i mężczyźni stanowią po 50 % społeczeństwa.

   a) Rodzina ma jedno dziecko. Jakie jest prawdopodobieństwo, że to córka?

   b) Rodzina ma dwoje dzieci. Wiadomo, że mają syna. Jakie jest prawdopodobieństwo, że mają córkę?

   c) Rodzina ma dwoje dzieci. Pytamy jednego z rodziców czy ma córkę o imieniu Eliza. Odpowiada, że tak. Jakie jest prawdopodobieństwo, że oboje dzieci to dziewczyny?

   d) Rodzina ma dwoje dzieci. Widzimy jedno z dzieci w przedpokoju - to dziewczyna. Jakie jest prawdopodobieństwo, że oboje dzieci to dziewczyny?

2. Rozważamy przedział $<4,9>$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana liczba z tego przedziału jest z zakresu $(5, 7>$?

3. Adam i Kasia codziennie spacerują w parku między godziną 12 a 13 (o losowych porach). Kiedy Adam przychodzi do parku, spędza tam 5 minut. Z kolei Kasia spędza 20 minut w parku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Adam spotka Kasię w parku?

4. Własności prawdopodobieństwa

   a) Niech A i B oznaczają zdarzenia losowe, przy czym $A \subset B$. Pokaż, że $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

   b) Niech A i B oznaczają zdarzenia losowe, przy czym $P(A') = \frac{1}{3}$, $P(B') = \frac{1}{4}$ oraz $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$. Oblicz $P(A' \cap B')$.

5. Niezależność zdarzeń i prawdopodobieństwo warunkowe

   a) Niech A i B oznaczają zdarzenia losowe, przy czym $P(B') = 0.6$, $P(A|B) = 0.5$. Oblicz $P(A \cap B)$.

   b) Niech A i B oznaczają zdarzenia losowe niezależne. Ile wynosi $P(A|B)$?

6. Schemat Bernoulliego

   a) Rzucamy 7 razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie trzech orłów?

   b) Rzucamy 8 razy symetryczną, standardową kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania co najwyżej sześciu trójek?

7. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym i twierdzenie Bayesa

   a) Dane są 3 worki zawierające kule. Pierwszy worek zawiera 75 czerwonych i 25 niebieskich, drugi worek zawiera 60 czerwonych i 40 niebieskich, trzeci worek zawiera 45 czerwonych i 55 niebieskich. Wybieramy worek sposób losowy, a następnie wybieramy z niego kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to kula czerwona?

   b) Rozważamy pewien test na obecność wirusa. Przy testowaniu osoby zakażonej test wskazuje na wynik pozytywny u 95 % przypadków, w przypadku osoby zdrowej test wypada negatywnie u 94 % przypadków. Powiedzmy, że w całej populacji 1 % osób jest zakażonych. Wykonujemy test u losowo wybranej osoby z populacji. Test okazał się pozytywny. Jakie jest prawdopodobieństwo, że taka osoba jest zakażona?

c) Gen ma dwa allele A i a. Zakładamy, że allele dziedziczą się niezależnie i są tak samo prawdopodobne. Wiadomo, że dana osoba ma fenotyp dominujący (genotyp AA lub Aa). Jakie jest prawdopodobieństwo, że każdy z rodziców ma genotyp AA?

8. Wektor losowy (X, Y) ma następujący rozkład łączny

$X \setminus Y$	2	4	5
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$

a) Ile wynosi $P(X \leq 2, Y \leq 4)$?

b) Wyznacz rozkład zmiennej losowej X oraz Y.

c) Wyznacz $P(Y = 2|X = 1)$.

d) Czy zmienne X oraz Y są niezależne?

9. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech zmienna losowa X opisuje iloczyn oczek z obu rzutów (pojedyncze rzuty opisują zmienne X_1 oraz X_2, tzn. $X = X_1 \cdot X_2$). Wyznacz rozkład zmiennej losowej X. Następnie wyznacz $P(X = 12|X_1 = 3)$ oraz $P(X = 12|X_1 > 2)$.

10. Pokaż, że poniższe funkcje są funkcjami gęstości prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej X przyjmującej wartości rzeczywiste. Dwie pierwsze funkcje dotyczą zmiennej losowej dyskretnej, dwie kolejne zmiennej losowej ciągłej.

a)
$$p_i = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{jeśli } i \in \{1,2,3,4,5,6\} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

b)
$$p_i = \begin{cases} \frac{1}{5}, & \text{jeśli } i \in \{1,2,3\} \\ \frac{2}{5}, & \text{jeśli } i \in \{6\} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

c)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & \text{jeśli } x \in <2,7> \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

d)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & \text{jeśli } x \in <0,3> \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Wyznacz $P(X = 2)$ oraz $P(X \in <2, 4))$ dla powyższych przykładów. Dodatkowo, wyznacz tzw. wartość oczekiwaną - dla rozkładów dyskretnych $EX = \sum_i p_i x_i$, dla rozkładów ciągłych $EX = \int_R x f(x) dx$.

11. Wyznacz parametr a dla którego poniższe funkcje są funkcjami gęstości prawdopodobieństwa.

a)
$$f(x) = \begin{cases} ax^4, & \text{jeśli } x \in <0,1> \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

b)
$$f(x) = \begin{cases} ae^{-5x}, & \text{jeśli } x > 0 \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

12. Sprawdź czy poniższe funkcje są dystrybuantami. Jeżeli tak, to wyznacz na jej podstawie funkcję gęstości prawdopodobieństwa.

    a) $F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$

    b) $F(x) = \frac{x}{x+1}$, $x \in \mathbb{R}$

    c)

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-7x}, & \text{jeśli } x \in <0, \infty) \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

13. Książka zawierająca 300 stron zawiera 450 błędów ortograficznych. Jaka jest średnia liczba błędów na stronę? Zakładając rozkład Poissona, opisując występowanie błędów na kolejnych stronach, znajdź prawdopodobieństwo, że losowo wybrana strona:

    a) nie zawiera błędów,

    b) zawiera dokładnie 3 błędy,

    c) zawiera więcej niż 2 błędy.

14. Zmienna losowa X opisuje czas pomiędzy kolejnymi telefonami w Call Center. Jej rozkład prawdopodobieństwa opisany jest za pomocą

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{jeśli } x \in <0, \infty) \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

przy czym $\lambda = \frac{1}{60}$. Wyznacz wartość oczekiwaną tej zmiennej losowej a także prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania wyniesie ponad 70.

15. Rozkład dóbr w społeczeństwie może być opisany za pomocą następującego rozkładu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}, & \text{jeśli } x \in <x_m, \infty) \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

przy czym x_m oznacza minimalne wynagrodzenie, a $\alpha = \log_4 5 \approx 1.16$, Uzasadnij, że 20% społeczeństwa posiada 80% wszystkich dóbr.

16. Firma przeprowadza test jakościowy swoich produktów. Każdy produkt jest obarczony 5 % szansą na bycie wadliwym. W jednym dniu sprawdzono 500 produktów. Znajdź:

    a) oczekiwaną (średnią) liczbę wadliwych produktów,

    b) prawdopodobieństwo, że liczba wadliwych produktów będzie w przedziale [20,30].

17. Niech X i Y oznaczają zmienne losowe określone na tem samej przestrzeni probabilistycznej Ω. Wiadomo, że $EX = 10$, $EY = 7$, $D^2X = 4$, $D^2Y = 1$. Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe:

    a) $E(2X) = 20$,

    b) $E(X + Y) = 17$,

    c) $E(X + 5) = 15$,

d) $E(XY) = 70$,

e) $DX = 2$,

f) $D^2(2X) = 8$,

g) $D(2X) = 4$,

h) $D^2(X+Y) = 5$,

i) $D(X+Y) = 3$,

j) $D^2(X+5) = 9$,

k) $D^2(XY) = 4$.

18. Wyznacz wartość oczekiwaną, wariancję, skośność oraz kurtozę dla zmiennej losowej, której rozkład przedstawia następująca funkcja gęstości prawdopodobieństwa:

a)
$$p_i = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{jeśli } i \in \{1,2,3,4,5,6\} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

b)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & \text{jeśli } x \in <1,6> \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

c)
$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & \text{jeśli } x \in <0,1> \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

d)
$$f(x) = \begin{cases} 12x(1-x)^2, & \text{jeśli } x \in <0,1> \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Zadania uzupełniające

19. Wyznacz pochodne następujących funkcji

a) $f(x) = 6x^2 + 7x + \sin(x^3) + e^{7x} + 12$,

b) $f(x) = (7x+1)^6$,

c) $f(x) = x^5 \cos(5x+6)$,

d) $f(x) = \frac{x^7 - \ln x}{x^3+1}$.

20. Wyznacz następujące całki nieoznaczone:

a) $\int x^3 dx$,

b) $\int (6x^2+8) dx$,

c) $\int \frac{dx}{x+3}$,

d) $\int x \sin x dx$,

e) $\int x^2 \sin x dx$,

f) $\int x^2 e^{-x} dx$,

g) $\int \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)}$,

h) $\int \frac{x^2+5x}{x^2-x-2} dx$.

21. Oblicz następujące całki oznaczone:

a) $\int_1^3 x^2 \, dx$,

b) $\int_0^2 12x^3 \, dx$,

c) $\int_0^\infty e^{-3x} dx$,