1. Wyznacz pochodne następujących funkcji

   a) $f(x) = 6x^2 + 7x + \sin(x^3) + 12$,

   b) $f(x) = x^5 \cos(5x + 6)$,

   c) $f(x) = \frac{x^7 - \ln x}{x^3 + 1}$.

2. Wyznacz równanie stycznej do funkcji $f(x) = x^4 + 5x$ w punkcie $(1, 6)$. Podaj jej interpretację.

3. Znajdź ekstrema funkcji $f(x) = 3x^5 - 20x^3$.

4. Pokaż, że dla dowolnych $0 < a < b$ zachodzi $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$.

5. Wyznacz rozwinięcia w szereg Taylora następujących funkcji:

   a) $y = e^x$,

   b) $y = \cos x$,

   c) $y = \frac{1}{1-x}$ dla $x \in (0, 1)$.

6. Oblicz $\cos(0.1)$ z dokładnością do 0.00001.

7. Korzystając ze wzoru $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R$ oblicz $\ln(1.5)$ oraz oszacuj resztę.

8. Pokaż, że $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$.

9. Oblicz pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ dla następujących funkcji:

   a) $f(x, y) = x^2y^2 - e^xy$,

   b) $f(x, y) = \sin(x^2y) - y^3x$.

10. Wyznacz płaszczyznę styczną do wykresu $f(x, y) = x^2 + 3xy$ w punkcie $(1, 2, 7)$.

11. Wyznacz pochodne dla następujących funkcji:

    a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + yz + z^3$,

    b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x^2 + y^3 + z^4, 2x^3 + 3yz^2)$,

    c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x^2y, x - xy, x^2 + 2y^2)$.

12. Oblicz pochodną funkcji $f(x, y) = x^2 - x^2y + 2xy^2 + 1$ w punkcie $P(3, 1)$ w kierunku wektora $v = [-6, 8]$.

13. Oblicz przybliżoną wartość wyrażenia $(2.01)^2 - 3 \cdot (2.97)^2$.

14. Oblicz przybliżoną wartość wyrażenia $\frac{6.01}{(6.01)^2+(8.02)^2}$.

15. Wyznacz ekstrema następujących funkcji:

    a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x$,

    b) $f(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$,

    c) $f(x,y) = x^3 - y^3$,

    d) $f(x,y) = x^4 + y^4$.

16. Wyznacz następujące całki nieoznaczone:

    a) $\int x^3 dx$,

    b) $\int (6x^2 + 8)dx$,

    c) $\int \frac{dx}{x+3}$,

    d) $\int x^2 e^{-x} dx$,

    e) $\int x^2 \sin x dx$,

    f) $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$,

    g) $\int \frac{x^2+5x}{x^2-x-2} dx$.

17. Oblicz następujące całki oznaczone:

    a) $\int_1^3 x^2\, dx$,

    b) $\int_0^2 12x^3\, dx$,

    c) $\int_0^4 [\int_4^{12} xydx]dy$,

    d) $\int_1^2 [\int_{-1}^3 (yx^2 - yx)dx]dy$,

    e) $\int_{-1}^3 [\int_1^2 (yx^2 - yx)dy]dx$.

18. Oblicz następujące całki:

    a) $\iint\limits_T (5x^2 - 2xy)dxdy$, gdzie T jest trójkątem ograniczonym osiami OX, OY oraz prostą $x + 2y = 2$.

    b) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, gdzie D jest górną połówką koła o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu 1.

    c) $\iint\limits_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy$, gdzie D_R jest kołem o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu R.

    d) $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$.

    e) $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$.

    f) $\iiint\limits_D (x^2 + y^2)dxdydz$, gdzie $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, R_1 \leq z \leq R_2\}$, gdzie $R_2 > R_1 > 0$.

19. Wyprowadź wzór na objętość kuli. Wskazówka: Policz odpowiednią całkę potrójną.

20. Niech X będzie niepustym zbiorem, a $\mathbb{M}$ ustaloną σ-algebrą podzbiorów zbioru X. Ustalmy pewien element $x \in X$. Pokaż, że następująca funkcja

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

jest miarą, gdzie $A \in \mathbb{M}$.

21. Rozważamy miarę Lebesgue'a $L : \mathbb{B}^1 \to \overline{\mathbb{R}^+}$. Pokaż, że zachodzi:

a) $L(\{a\}) = 0$, dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$,

b) $L(\mathbb{N}) = 0$,

c) $L(\mathbb{Q}) = 0$,

d) $L([a,b)) = b - a$, dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

22. Oblicz następujące całki:

a) $\int\limits_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx)$, gdzie $\mu = \delta_{-1} + \delta_1$,

b) $\int\limits_{(0,10]} x^2 \mu(dx)$, gdzie $\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \delta_k$,

c) $\int\limits_{\mathbb{R}^+} e^x \mu(dx)$, gdzie $\mu = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \delta_k$,

d) $\int\limits_{[0,\frac{\pi}{2}]} \sin(x) \mu(dx)$, gdzie $\mu = L$.

23. Rozważmy funkcję $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Pokaż, że f nie jest całkowalna w sensie Riemanna. Oblicz $\int\limits_{[0,1]} f(x) L(dx)$.

Najważniejsze zagadnienia na kartkówkę:

1. Wyznaczanie pochodnych funkcji jednej zmiennej, np. dla $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{\cos x}$.

2. Wyznaczanie ekstremów funkcji jednej zmiennej, np. dla $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$.

3. Wyznaczanie szeregów Taylora dla funkcji jednej zmiennej, np. dla $f(x) = \frac{3}{2-4x}$, $f(x) = \sin(x^2)$.

4. Wyznaczanie pochodnych cząstkowych i ekstremów dla funkcji dwóch zmiennych, np. dla $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$.

5. Wyznaczanie całek nieoznaczonych metodą podstawienia i przez części, np. $\int x^2 \ln(x^3 + 2)$, $\int \ln(3x+1) dx$.

6. Wyznaczanie całek dla funkcji wymiernych, np. $\int \frac{x^3+1}{x^3+x^2} dx$.

7. Wyznaczanie prostych całek oznaczonych funkcji jednej zmiennej, np. $\int_0^3 4x^3 dx$, $\int_0^\infty xe^{-x} dx$.

8. Wyznaczanie prostych całek podwójnych, np. $\int_0^1 \int_0^2 8xy^2 dxdy$

9. Wyznaczanie całek podwójnych pod obszarem normalnym, np $\iint\limits_T xydxdy$, gdzie T jest obszarem pomiędzy funkcjami $y = x^2 + 2x$ oraz $y = x + 2$.

10. Wyznaczanie całek podwójnych z podstawieniem zmiennych biegunowych, np. zaznacz w układzie współrzędnych zbiór $A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2,\ y \leq 0\}$, a następnie policz $\iint\limits_A \ln(x^2 + y^2)dxdy$