1. Sprawdź czy wektor $[3, 4, 5]$ jest kombinacją liniową wektorów $[1, 0, 2]$ oraz $[0, -1, 1]$.

2. Sprawdź czy wektory $[1, 4, 3]$, $[-1, 2, -1]$, $[0, 6, 4]$ są liniowo niezależne.

3. Dla jakich wartości parametru m wektory $[1, 1, 1]$, $[1, 2, 3]$ oraz $[m, 1, 1]$ są liniowo niezależne.

4. Czy wektory $[1, 2]$ oraz $[0, 3]$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^2$?

5. Czy wektory $[3, 0, 1]$, $[0, 1, 0]$ oraz $[0, 0, 5]$ tworzą bazę ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}^3$?

6. Wyznacz bazę podprzestrzeni $\mathbb{R}^3$ generowaną przez wektory $[1, 1, 0]$, $[2, 0, 3]$ oraz $[0, -2, 3]$. Podaj wymiar tej podprzestrzeni.

7. Zaproponuj wektor v tak aby wektory $[1, 2, 0]$, $[0, 1, 1]$ oraz v były liniowo zależne.

8. Zaproponuj wektor v tak aby wektory $[1, 2, 0]$, $[0, 1, 1]$ oraz v były liniowo niezależne.

9. Sprawdź czy poniższe zbiory są popdrzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

   (a) $V_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2 = 0\}$,
   (b) $V_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2 = 3\}$,
   (c) $V_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_3 = 0\}$,
   (d) $V_4 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 x_3 = 0\}$.

10. Rozważamy przestrzeń wektorową wszystkich funkcji określonych na zbiorze $[0, 1]$ i przyjmujących wartości w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z działaniem dodawania funkcji i mnożeniem przez skalary (oznaczmy ją przez V). Czy poniższe zbiory są popdprzestrzeniami liniowymi tej przestrzeni?

    (a) $V_1 = \{f \in V : f(0) = 0\}$,
    (b) $V_2 = \{f \in V : f(0.5) = 0.5\}$,
    (c) $V_3 = \{f \in V : f(0) = f(1)\}$,
    (d) $V_4 = \{f \in V : \forall x \in [0, 1] : f(x) > 0\}$.

11. Jak wygladają wszystkie możliwe podprzestrzenie liniowe $\mathbb{R}^2$ oraz $\mathbb{R}^3$?

12. Sprawdź czy poniższe odwzorowania są liniowe:

    (a) $T_1 : \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_2, 4x_3) \in \mathbb{R}^2$,

    (b) $T_2 : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_1, 1) \in \mathbb{R}^2$,

    (c) $T_3 : C^\infty(\mathbb{R}) \ni f \mapsto f' + 2f'' + 3f''' \in C^\infty(\mathbb{R})$, gdzie $C^\infty(\mathbb{R})$ - zbiór funkcji nieskończenie różniczkowalnych działających z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$.

13. Zaproponuj bazę ortogonalną dla przestrzeni V rozpiętej na $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, tzn. $V = span\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\}$.

14. Poniższe odwzorowania są liniowe

    (a) $T_1 : \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 - x_3, 4x_2 + 2x_3) \in \mathbb{R}^2$,

(b) $T_2 : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_2 - x_1, x_1 + x_2, -x_2) \in \mathbb{R}^3$.

Wyznacz bazę oraz wymiar jądra oraz bazę oraz wymiar obrazu tego przekształcenia.

15. Czy odwzorowania z poprzedniego zadanią są monomorfizmami, epimorfizmami, izomorfizmami?

16. Możenie macierzy w ogólnym przypadku nie jest przemienne (tzn. $AB \neq BA$). By się o tym przekonać, wyznacz AB oraz BA dla $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

17. Wyznacz macierze odwozorowań liniowych (w bazach standardowych) T_1 oraz T_2 z zadania 14. Dodatkowo wyznacz macierz przekształceń $T_1 \circ T_2$ oraz $T_2 \circ T_1$.

18. Policz wyznaczniki dla następujących macierzy:
    (a) $M_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
    (b) $M_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & -11 & 10 \end{bmatrix}$
    (c) $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

19. Wyznacz macierze odwrotne do następujących macierzy:
    (a) $M_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
    (b) $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$
    (c) $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

    a następnie sprawdź, że zachodzi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ oraz $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$.

20. Rozwiąż równanie $XA = B + C$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

21. Rozwiąż równanie $AXA = B$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

22. Rozwiąż równanie $XA + XB = 18I$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, a I to macierz identycznościowa.

23. Wyznacz rząd macierzy $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

24. Rozwiąż poniższe układy równań liniowych metodą eliminacji Gaussa oraz metodą Cramera.

    a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 6 \\ -4x_1 \qquad\quad + 2x_3 = 0 \\ \qquad\quad 2x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - \ x_3 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$.

25. W oparciu o twierdzenie Kroneckera-Capellego stwierdź czy poniższy układ równań ma rozwiązanie. Jeśli tak, rozwiąż go metodą eliminacji Gaussa.

a) $\begin{cases} x_1 - \ 2x_2 + \ \ x_3 - \ 4x_4 = 1 \\ x_1 + \ 3x_2 + \ 7x_3 + \ 2x_4 = 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 = 5 \end{cases}$.

26. Wyznacz wartości i wektory własne dla następujących macierzy.

a) $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

27. Wyznacz wartości i wektory własne dla $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

28. Sprawdź, że spełnione jest twierdzenie Cayleya-Hamiltona dla $M = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. Na tej podstawie wyznacz M^{-1}.

29. Wyznacz macierze Jordana dla następujących macierzy.

a) $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

d) $M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

30. Wyznacz M_1^{2000}, M_2^{2000} oraz M_4^{2000} dla macierzy z poprzedniego zadania.