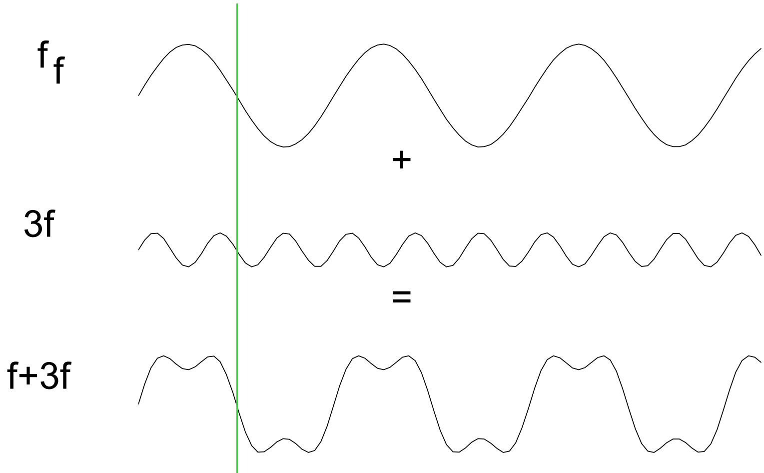
Analisi di Fourier 2D

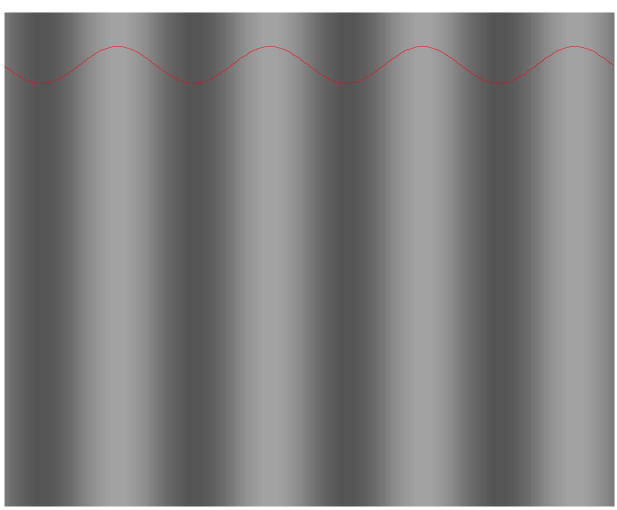
- Immagine → funzione scalare i(x,y) di 2 variabili
  - Rappresenta il valore del **tono di grigio**
- Decomposizione in somma di componenti armoniche
  - **Analisi di Fourier**
- Associa ad una i(x,y) una coppia di funzioni delle 2 variabili u e v che, per ogni valore di (u,v) specificano A e φ del corrispondente contributo armonico all'immagine i

- Risoluzione
- Filtraggio
- Ricostruzione Tomografica (Filtered Back Projection, FBP)
- MRI

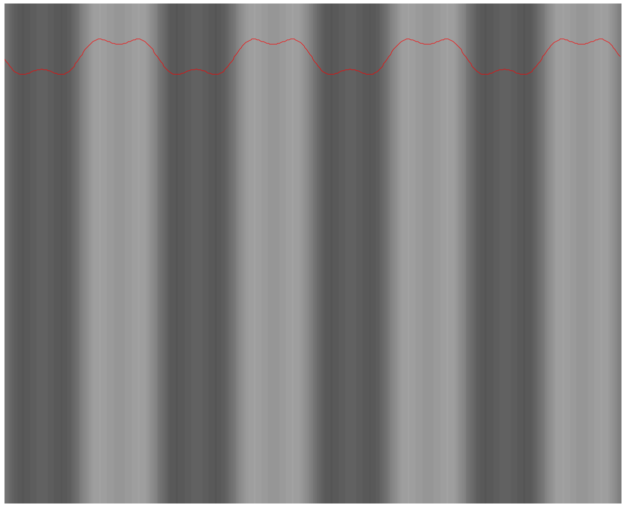
Analisi di Fourier



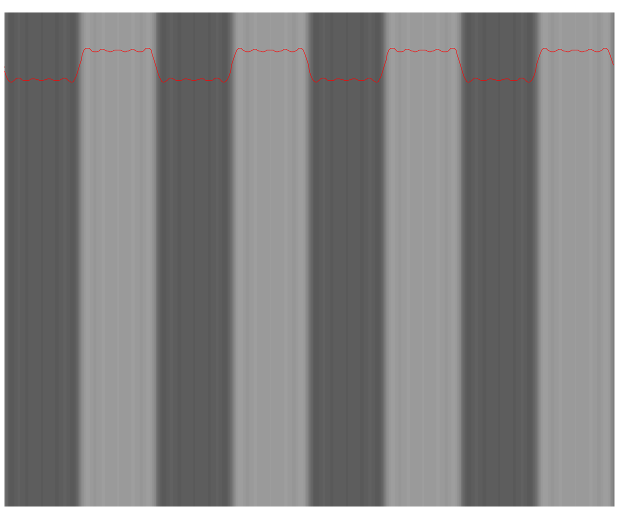
fondamentale (f)



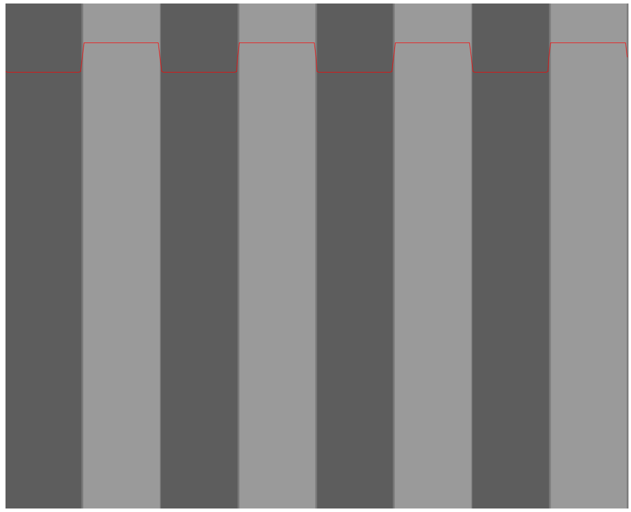
f+3f



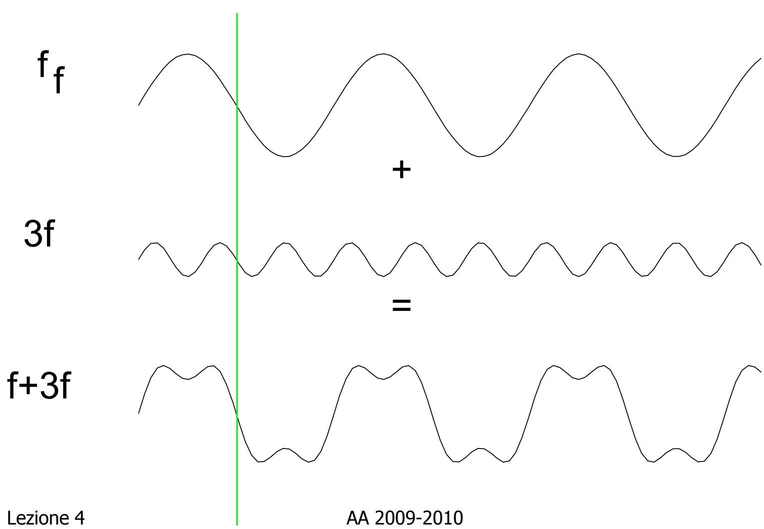
f+3f+5f+7f+9f



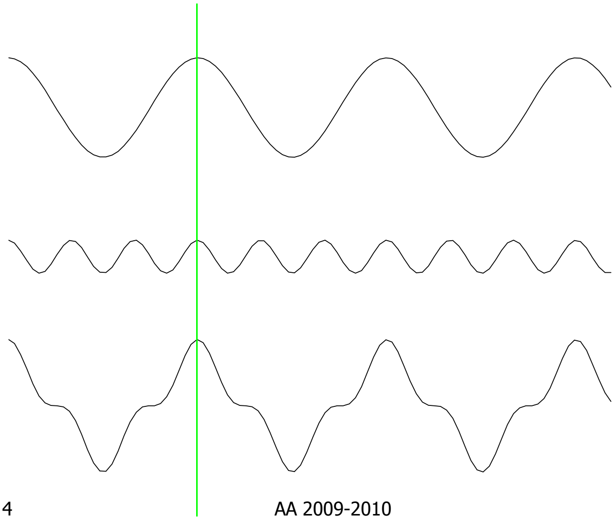
$$L = L_0 + \sum_{i=1}^{w/2} \sin(2\pi i \omega x) / i$$



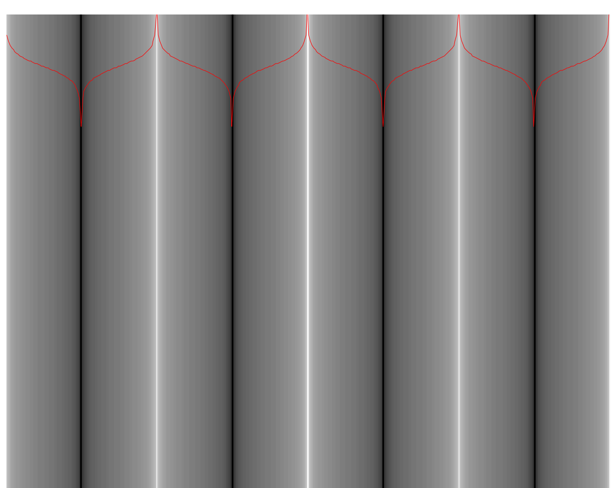
Effetto della fase: 90°



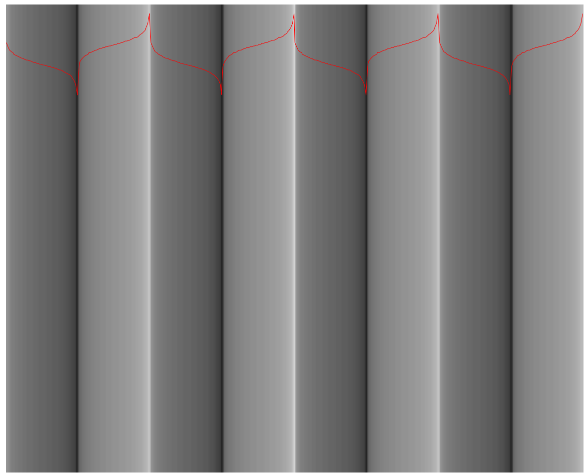
Effetto della fase 0°



$$L = L_0 + \sum_{i=1}^{w/2} \cos(2\pi i \omega x) / i$$

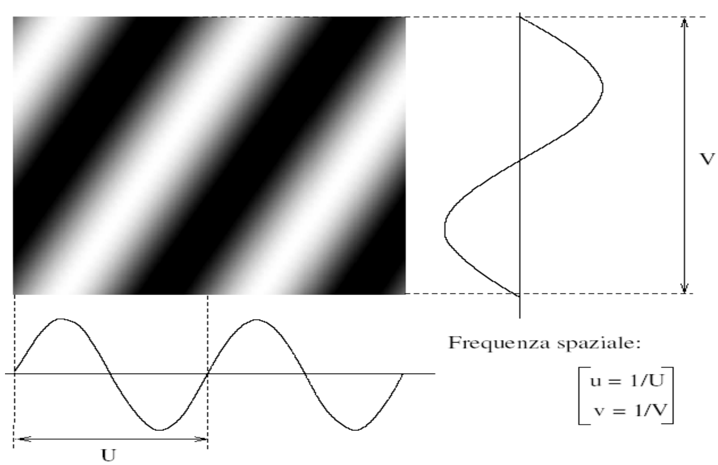


$$L = L_0 + \sum_{i=1}^{w/2} \cos(2\pi i \omega x + \pi / 4) / i$$

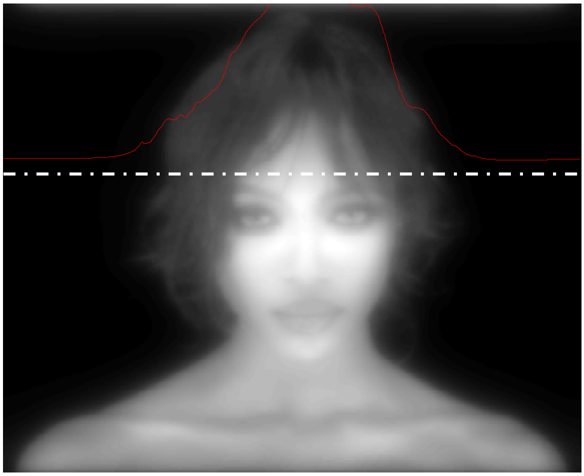


Concetto di frequenza spaziale

Generalizzazione della trasformata di Fourier al caso 2D. Il vettore (u,v) rappresenta le frequenze spaziali in genere espresse come cicli/mm

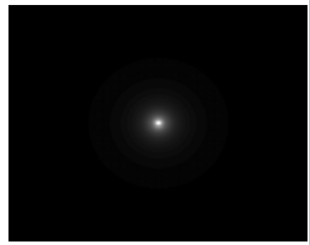


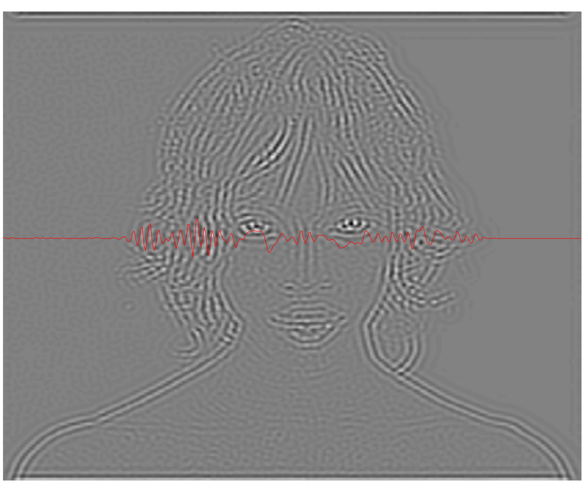
$$z = i(x, y) = A \sin(2\pi(ux + vy) + \varphi)$$



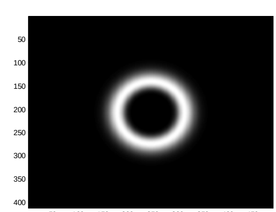
Low pass

Trasf Fourier

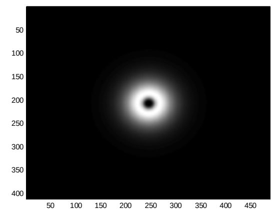


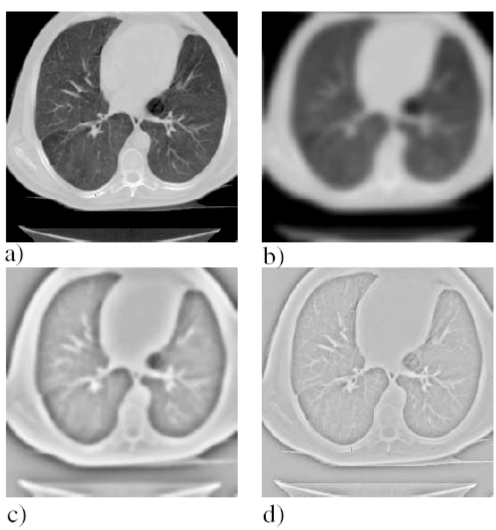


High pass



Band pass



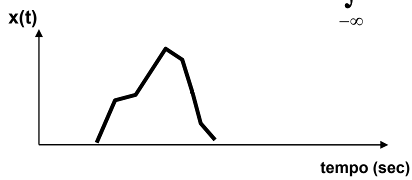


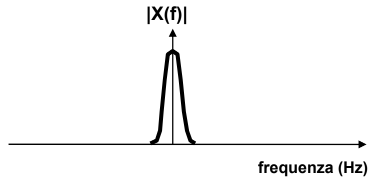
a) Immagine TAC del torace; b) Basse frequenze; c) Medie frequenze; d) Alte frequenze

RIPASSO ANALISI DI FOURIER 1D

1) TRASFORMATA DI FOURIER DI UN SEGNALE CONTINUO

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$





SIGNIFICATO DELL'ANALISI DI FOURIER:

X(f) è una funzione complessa che ad ogni frequenza spaziale f associa l'ampiezza e la fase della sinusoide di frequenza f contenuta in x(t)

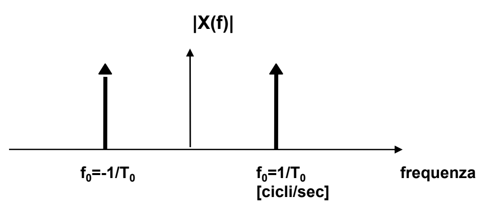
Corso di Elaborazione di Segnali e Immagini Biomedici – II parte

RIPASSO ANALISI DI FOURIER 1D

2) TRASFORMATA DI FOURIER DI UN SEGNALE CONTINUO E PERIODICO DI PERIODO T_0

Esempio

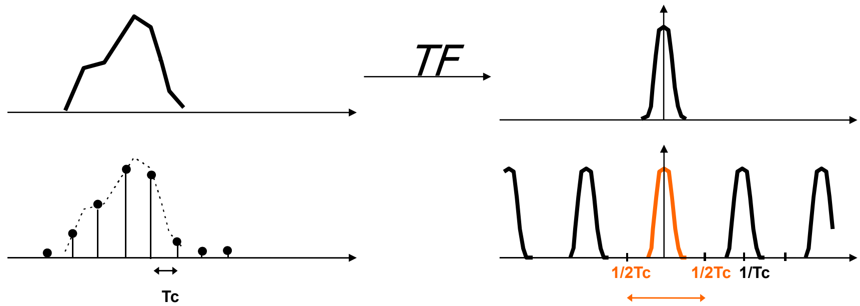
$$x(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$$



La Trasformata di Fourier di x(t) è una funzione costituita da impulsi

RIPASSO ANALISI DI FOURIER 1D

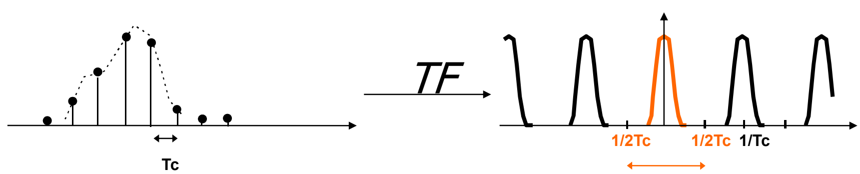
3) TRASFORMATA DI FOURIER DI UN SEGNALE DISCRETO



La Trasformata di Fourier di un segnale campionato con passo di campionamento Tc è periodica di periodo 1/Tc

RIPASSO ANALISI DI FOURIER 1D

3) TRASFORMATA DI FOURIER DI UN SEGNALE DISCRETO

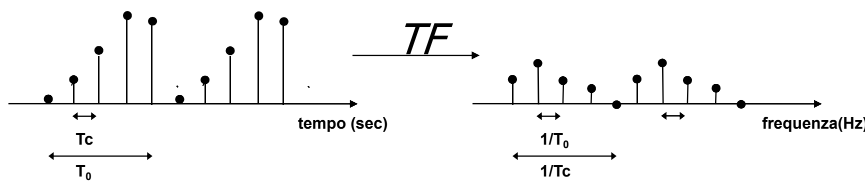


OSSERVAZIONI:

- è sufficiente considerare un solo periodo della Trasformata nell’intervallo [-1/2Tc 1/2Tc]
- teorema di Shannon: 1/2Tc > frequenza massima segnale

RIPASSO ANALISI DI FOURIER 1D

4) TRASFORMATA DI FOURIER DI UN SEGNALE DISCRETO E PERIODICO DI PERIODO T0



RIPASSO ANALISI DI FOURIER 1D

5) TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA (DFT)

La Trasformata di Fourier discreta di un segnale costituito da N campioni viene calcolata come:

$$\widetilde{X}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \widetilde{x}_n e^{-j2\pi nk/N}$$

• il segnale in ingresso viene considerato come periodo di una sequenza periodica

• si calcola la Trasformata di Fourier della sequenza periodica

• il segnale in uscita corrisponde ad un periodo di N campioni della trasformata ottenuta

RIPASSO ANALISI DI FOURIER 1D

5) TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA (DFT)

SIGNIFICATO degli N coefficienti della DFT: valori complessi che contengono informazioni relative al modulo e alla fase delle N sinusoidi in cui può essere scomposto il segnale

OSSERVAZIONI:

• risoluzione in frequenza 2pi/N

• se il segnale discreto deriva dal campionamento di un segnale continuo e periodico x(t), la DFT coincide con la Trasformata del segnale continuo solo se negli N campioni è contenuto un numero intero di periodi di x(t)

ANALISI DI FOURIER 2D

IMMAGINE
= funzione discreta f(x,y) di 2 variabili.
Ciascun valore dell'immagine rappresenta il valore del tono di grigio del corrispondente pixel.

TRASFORMATA DI FOURIER 2D DELL' IMMAGINE
= funzione discreta e complessa $F(\omega_x, \omega_y)$ di 2 variabili.
L'analisi di Fourier decompone l'immagine in somma di componenti armoniche.

ANALISI DI FOURIER 2D

1) TRASFORMATA DI FOURIER DI UN'IMMAGINE CONTINUA f(x,y) (funzione bidimensionale reale)

$$F(\omega_x,\omega_y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-j(\omega_x x+\omega_y y)}dxdy$$

SIGNIFICATO DELL'ANALISI DI FOURIER:

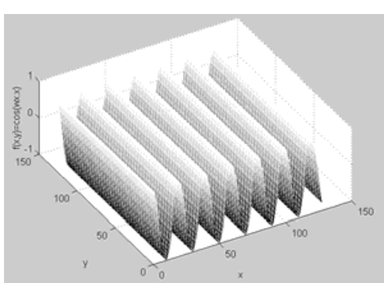
$F(\omega_x, \omega_y)$ è una funzione complessa che ad ogni coppia di frequenze spaziali (ω_x, ω_y) associa l'ampiezza e la fase della componente armonica (ω_x, ω_y) (sinusoide spaziale) contenuta in f(x,y)

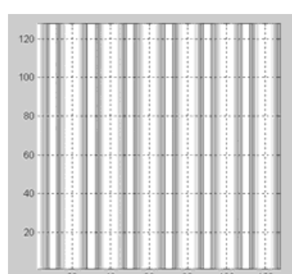
ANALISI DI FOURIER 2D

Cosa sono le componenti armoniche (ω_x, ω_y)?

<u>ESEMPIO 1:</u> $f(x,y)= f(x)= \cos(\bar{\omega}_x x)$

Funzione invariante lungo l'asse y e periodica lungo l'asse x



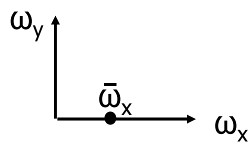


ANALISI DI FOURIER 2D

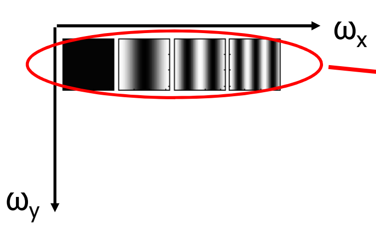
$$F(\omega_x,\omega_y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\overline{\omega}_x x)e^{-j\omega_x x}dx\right]e^{-j\omega_y y}dy=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{se } \omega_y\neq 0\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\overline{\omega}_x x)e^{-j\omega_x x}dx & \text{se } \omega_y=0\end{cases}$$

Trasformata 1D di funzione periodica: due impulsi in $\omega_x=\pm\,\bar{\omega}_x$



ANALISI DI FOURIER 2D



$\boxed{\omega_x\neq 0;\ \omega_y=0}$

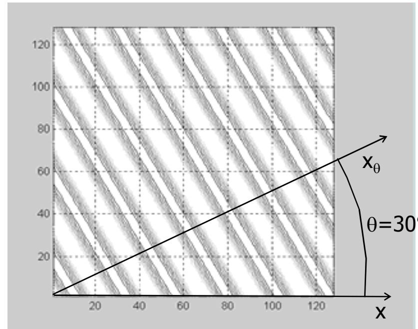
Una generica funzione f(x,y)=f(x), invariante lungo l'asse y, è scomponibile in una somma di funzioni del tipo $\cos(\omega_x x)$ e $\text{sen}(\omega_x x)$.

Una scomposizione in esponenziali immaginari $\exp(j\omega_x x)$ è del tutto equivalente e rappresenta nei suoi coefficienti le sinusoidi in modulo e fase

I soli coefficienti non nulli della Trasformata di Fourier saranno quindi quelli caratterizzati da $\omega_x\neq 0;\ \omega_y=0$

ANALISI DI FOURIER 2D

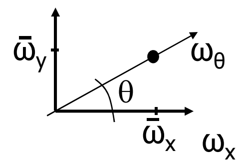
<u>ESEMPIO 2:</u> $f(x,y)= \cos(\omega_\theta x_\theta)$



Le formule di rotazione degli assi cartesiani forniscono
$x_\theta = x\cos\theta + y\sin\theta$

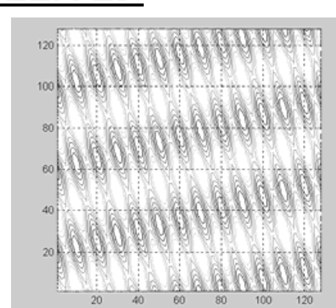
Sostituendo si ha

$f(x,y) = \cos(\omega_\theta \cdot x_\theta) =$
$= \cos(\omega_\theta \cdot [x\cos\theta + y\sin\theta \cdot]) =$
$= \cos(\bar{\omega}_x \cdot x + \bar{\omega}_y \cdot y)$
con
$\bar{\omega}_x = \cos\theta \cdot \omega_\theta$; $\bar{\omega}_y = \sin\theta \cdot \omega_\theta$



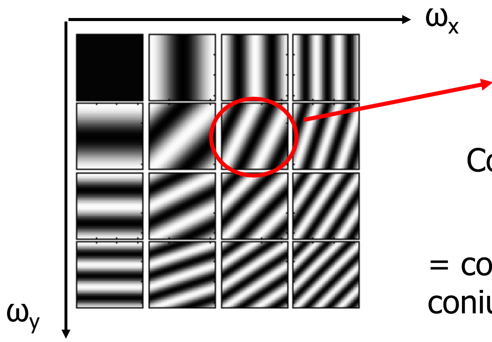
ANALISI DI FOURIER 2D

Tettoie di inclinazione θ diversa sono fra loro ortogonali. Infatti sfasandosi nel piano (x,y) interferiscono ora positivamente ora negativamente con media nulla



Vale il principio di **scomposizione in somma di componenti ortogonali**.
Il passaggio ad esponenziali immaginari si ottiene applicando le formule di Eulero su $\cos(\omega_\theta \cdot x_\theta)$ e $\sin(\omega_\theta \cdot x_\theta)$ e quindi le formule di rotazione degli assi; → si ottengono così sempre le coordinate del piano (ω_x, ω_y). La posizione angolare di (ω_x, ω_y) è pari a θ , quella radiale rappresenta ω_θ.

ANALISI DI FOURIER 2D



$\omega_x \neq 0;\ \omega_y \neq 0$

Componente armonica

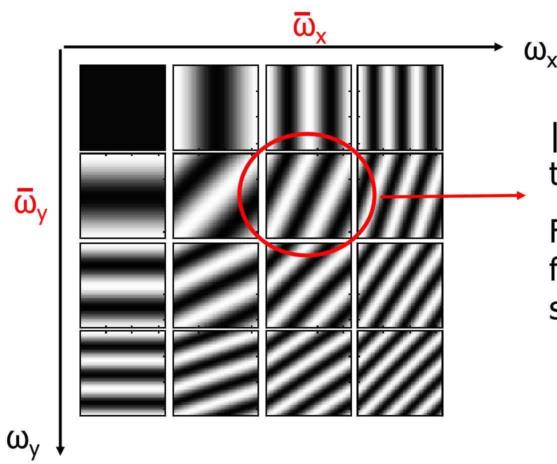
$$\cos(\omega_x x + \omega_y y)$$

= coppia di impulsi simmetrici e coniugati in (ω_x,ω_y).

Dualmente: ad una componente periodica in (ω_x,ω_y) corrispondono due impulsi opportunamente traslati in (x,y).

ANALISI DI FOURIER 2D

Significato del coefficiente $F(\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y)$ della Trasformata



$|F(\omega_x, \omega_y)|$=ampiezza tettoia sinusoidale

FASE $[F(\omega_x, \omega_y)]$= fase della tettoia sinusoidale

ANALISI DI FOURIER 2D

Espressione dell'antitrasformata di Fourier 2D

$$f(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega_x,\omega_y)\cdot\exp[j(\omega_x x+\omega_y y)]\cdot d\omega_x\cdot d\omega_y$$

ANALISI DI FOURIER 2D

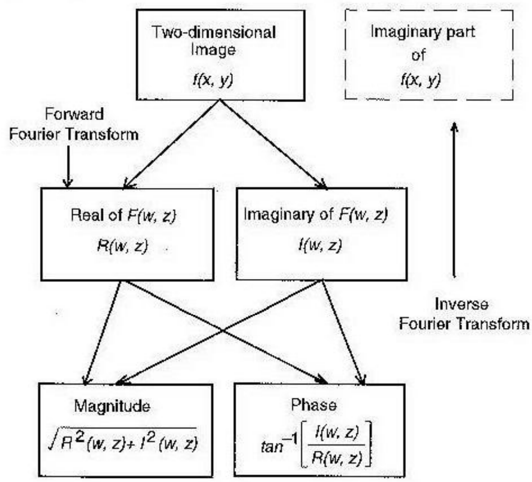
2) DFT DI UN'IMMAGINE DISCRETA

Le immagini biomediche sono digitali, quindi campionate. L'analisi di Fourier viene quindi svolta mediante DFT 2D.

• la DFT di un'immagine NxN è un'immagine NxN con risoluzione in frequenza 2pi/N

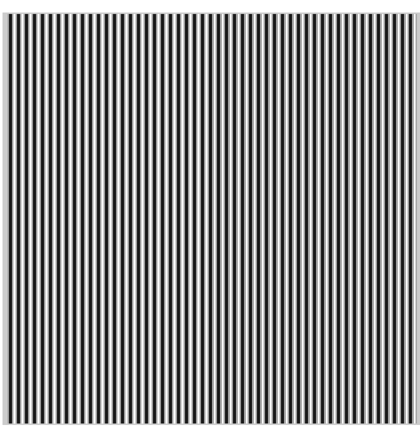
• nella DFT dell'immagine è contenuto un periodo dello spettro (frequenze positive e negative uguali perché immagini reali)

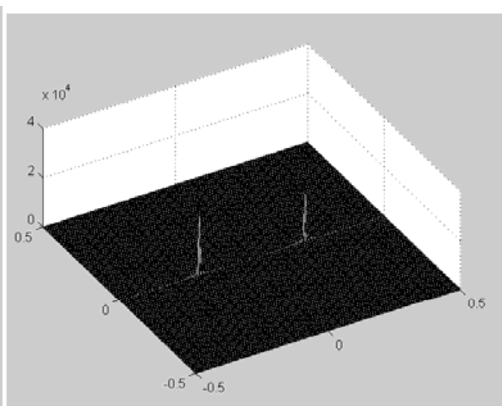
ANALISI DI FOURIER 2D



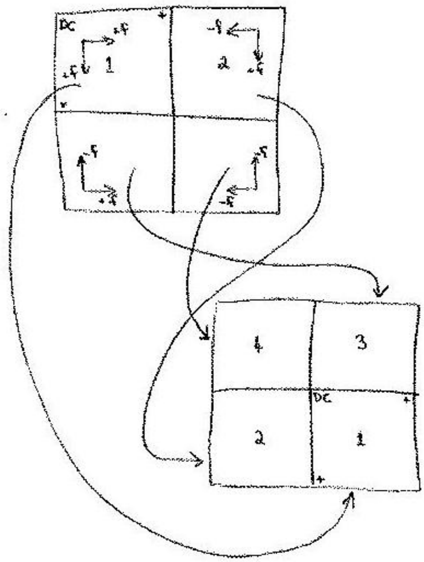
ESEMPI:

$\theta = 0$; $f_\theta = \omega_\theta / 2\pi = 0.2$.



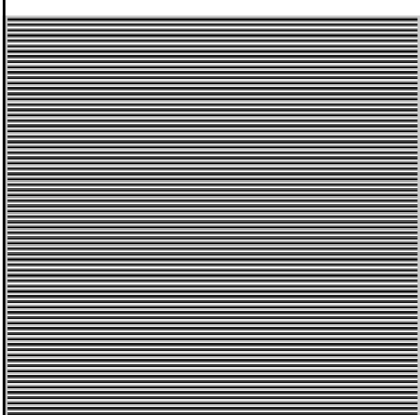


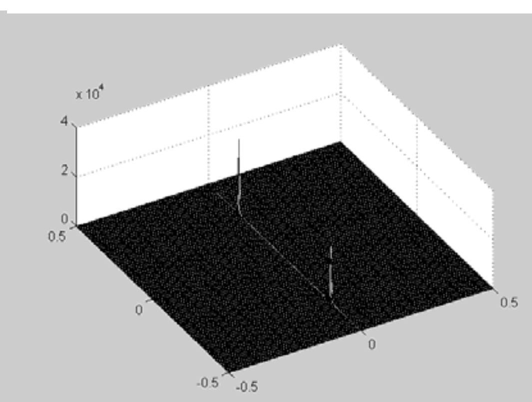
Schema Fourier 2D



ESEMPI:

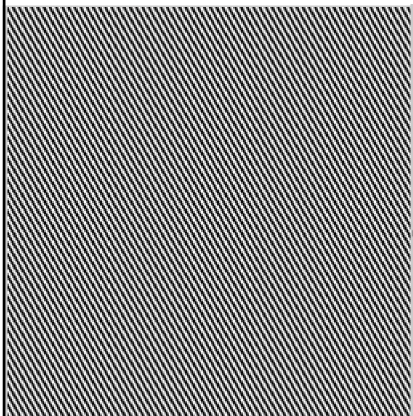
$\theta = 90° \; ; \; f_\theta = \omega_\theta / 2\pi = 0.3$

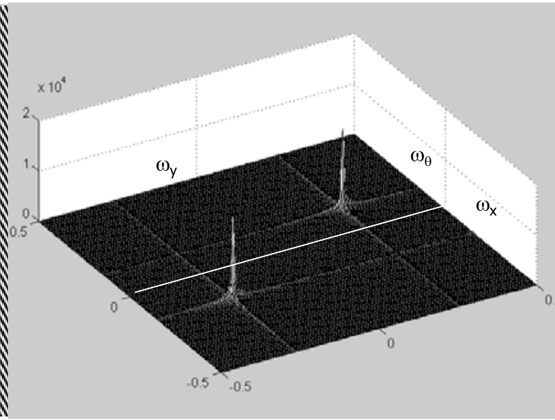




ESEMPI:

$\theta = 30° \; ; \; f_\theta = \omega_\theta / 2\pi = 0.3$





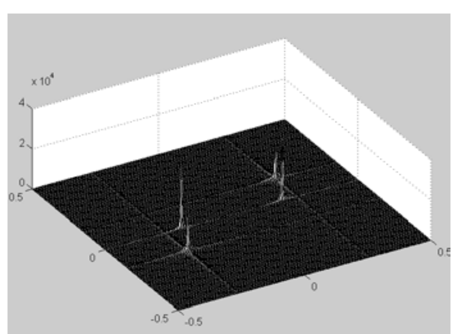
PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA DI FOURIER 2D

1) SEPARABILITA':

se $f(x,y)=f_x(x)\cdot f_y(y)$, allora $F(\omega_x, \omega_y)=F_{\omega x}(\omega_x)\cdot F_{\omega y}(\omega_y)$

2) LINEARITA': a combinazioni lineari nel dominio (x,y) corrispondono combinazioni lineari nel dominio (ω_x, ω_y).

esempio: trasformata della somma di una cosinusoide con frequenza 0.2 lungo l'asse x e di una con frequenza 0.3 ed inclinazione θ=30°.



PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA DI FOURIER 2D

3) SIMMETRIA COMPLESSA CONIUGATA:

- Se f(x,y) è una funzione complessa:

  $$F_2\{f^*(x , y)\} = F^*(-\omega_x , -\omega_y)$$

  la trasformata della sua coniugata f*(x,y) è la funzione simmetrica e coniugata rispetto all'origine della trasformata di f(x,y).

- Se f(x,y) è reale vale la simmetria coniugata della trasformata

  $$F(-\omega_x , -\omega_y) = F^*(\omega_x , \omega_y)$$

  come già mostrato nel caso mono-dimensionale.

PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA DI FOURIER 2D

4) SCALING:

Scaling lineare delle variabili spaziali → scaling inverso nel dominio di Fourier

$$F2\{f(a \cdot x , b \cdot y)\} = (1/ab) \cdot F(\omega_x/a , \omega_y/b).$$

Dilatare le scale nello spazio significa avere frequenze più basse.

PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA DI FOURIER 2D

5) TRASLAZIONE:

Shift di posizione → shift di fase nel dominio di Fourier

F2$\{f(x-a\ ,\ y-b)\} = F(\omega_x\ ,\omega_y)\ \exp[-j\ (\omega_x\ a+\ \omega_y\ b)]$

6) TEOREMA DI CONVOLUZIONE:

F2$\{f(x,\ y)*h(x,\ y)\} = F(\omega_x\ ,\ \omega_y)\cdot H(\omega_x\ ,\ \omega_y)$

F2$\{f(x,\ y)\cdot h(x,\ y)\} = (1/4\pi^2)\cdot[F(\omega_x\ ,\ \omega_y)*H(\omega_x\ ,\ \omega_y)]$

L'operazione di convoluzione nel campo (x,y) equivale ad una moltiplicazione frequenza per frequenza nel campo delle trasformate e viceversa.

PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA DI FOURIER 2D

CONVOLUZIONE:

$$f(x,y)*h(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot h(\xi-x,\eta-y)\cdot d\xi\cdot d\eta$$

Tre fasi per ogni (x,y):

1) trasla una maschera m simmetrica rispetto ad h, $m(\xi,\eta)=h(-\xi,-\eta)$ intorno ad (x,y);
2) moltiplica punto a punto f ed m traslata;
3) somma.

PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA DI FOURIER 2D

TEOREMA DI CONVOLUZIONE:

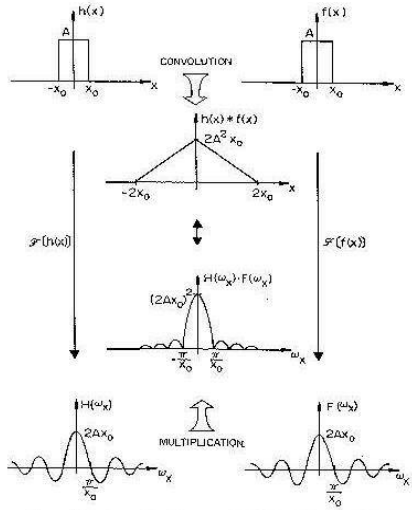
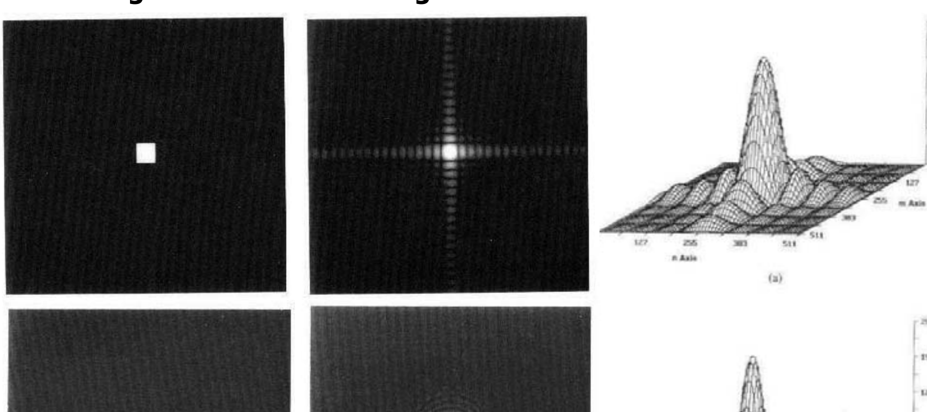
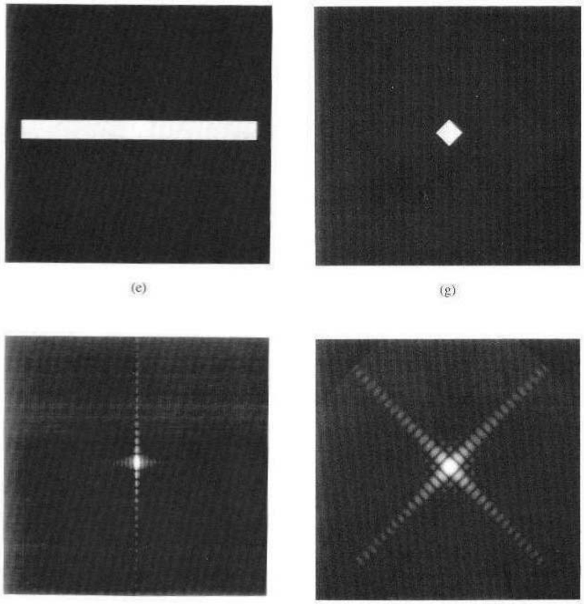


Immagine **Immagine TF** **TF vista in 3-D**





(e) (g)

(f) (h)

Esempi di Trasformata di Fourier 2-D

Immagine

Corrispondente spettro di ampiezza