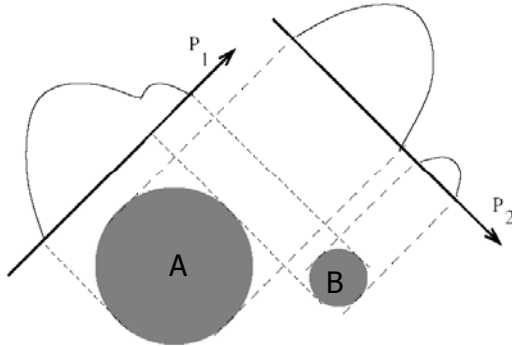
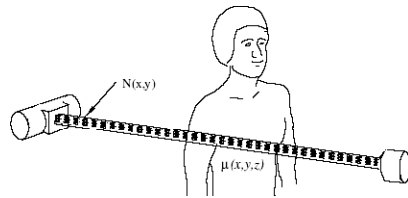




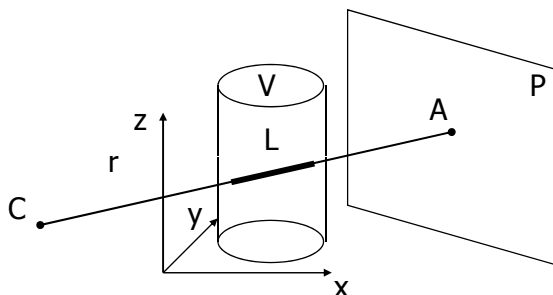
Ricostruzione da proiezioni

Problema: ricostruire A e B
a partire da un numero di
proiezioni p_1, p_2, \dots, p_n



Proiezioni RX

- le immagini radiografiche (RX) classiche rappresentano una proiezione su di un piano P (piano della lastra fotografica) a partire da un centro C (punto focale dell'anodo nel tubo a vuoto) delle strutture interne al volume del corpo V
- un generico punto di proiezione A dipende da tutte le strutture incontrate dalla retta di proiezione r sul segmento L (interno a V)





Proiezioni RX

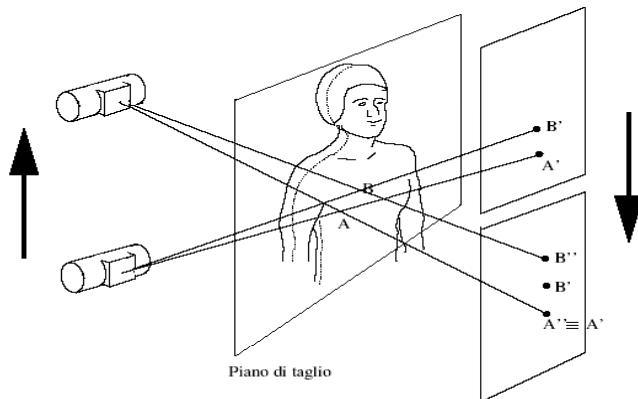
- il valore di intensità rappresentato in A , I_A , si può ricondurre all'integrale sulla linea L della **attenuazione lineare** $\mu(x, y, z)$ funzione delle coordinate tridimensionali in V
- infatti, la **legge di Lambert-Beer** indica la dipendenza della intensità finale I_A incidente sulla pellicola (od altro detettore) dal valore della attenuazione lineare lungo il percorso L data la intensità di emissione I_0 :

$$I_A(x, y) = I_0 \exp\left(-\int_L \mu(x, y, z) dL\right)$$

$$\int_L \mu(x, y, z) dL = -\ln\left(\frac{I_A}{I_0}\right)$$



Tomografia da movimento (stratigrafia)



Con il movimento sincronizzato di sorgente e rivelatore vengono focalizzate selettivamente le strutture interne in uno strato preselezionato con sfocatura degli elementi fuori dal piano.



Problema 3D computazionale

Si supponga che l'oggetto venga suddiviso in **elementi di volume** (voxel) in cui il coefficiente di attenuazione si può supporre costante (per semplicità l'oggetto è tutto contenuto in un cubo di N^3 voxel).

Si vuole stimare il coefficiente μ_{ijk} per tutti i voxel dato un insieme di misure. Sia h una direzione di proiezione, si ha:

$$I_h = I_0 \exp\left(-\sum_{ijk} \mu_{ijk} \Delta w_h\right)$$

con Δw diverso da 0 quando ci si trova sul raggio di direzione h .

Passando ai logaritmi
$$\sum_{ijk} \mu_{ijk} \Delta w_h = \ln \frac{I_0}{I_h} = p_h$$

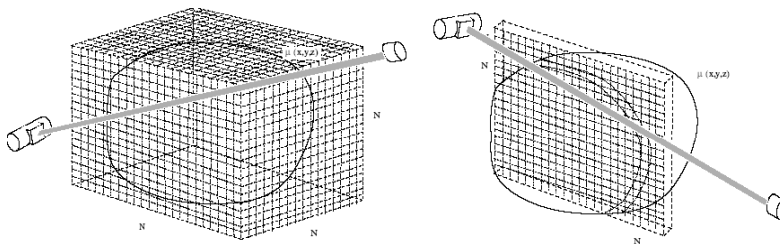
Si ottiene un sistema di N^3 equazioni in N^3 incognite



Ricostruzione del piano tomografico 2D

Motivazioni: la complessità computazionale 3D è intrattabile per matrici di dimensione elevata.

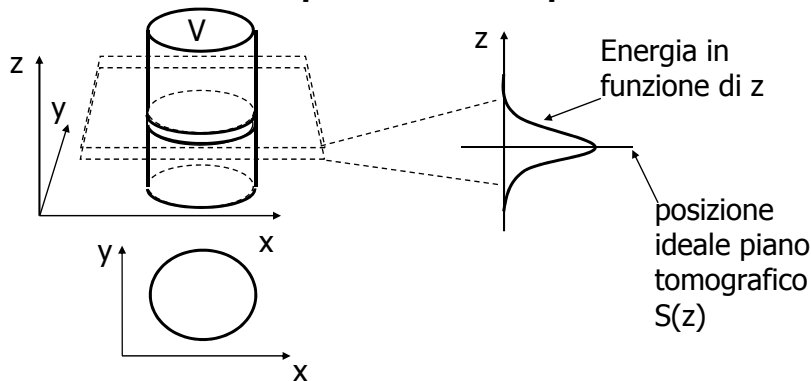
Una scansione di $200 \times 200 \times 200$ voxels comporta 8 milioni di equazioni in 8 milioni di incognite.





Il piano tomografico (2D)

- Si seleziona un piano detto piano tomografico. Su di esso viene rappresentata una grandezza fisica $f(x,y)$; in realtà questa grandezza integra secondo una distribuzione di energia a campana le strutture contenute in un volume il più possibile schiacciato. Si risolve un **problema di complessità N^2**



Lezione 10

AA 2010-11

7



Il piano tomografico - la risoluzione assiale

- abbiamo visto che tanto i RX che la scintigrafia raccolgono informazioni **integrali** lungo segmenti L di rette di proiezione
- il problema della rappresentazione tomografica richiede di costruire una sezione virtuale dalle informazioni integrali
- macchine CT raccolgono proiezioni relative a piani assiali per la ricostruzione di **sezioni trasversali**
- il piano di sezione $S(z)$ rappresenta una **astrazione ideale**; in realtà i RX coprono un volume schiacciato; l'energia lungo z si distribuisce su una campana molto stretta (ordine di 5 mm) la cui larghezza a metà ampiezza (FWHM, full width half maximum) rappresenta la **risoluzione assiale** fra sezioni tomografiche
- in scintigrafia la γ camera raccoglie contemporaneamente proiezioni relative a più piani assiali con una risoluzione assiale inferiore alla CT e legata al collimatore; una rotazione su 360° della γ camera raccoglie le proiezioni necessarie per ogni piano tomografico*

Lezione 10

AA 2010-11

8



Metodi analitici

- I metodi analitici consentono teoricamente di ricostruire la funzione incognita in ogni punto del suo dominio.
- Si considerano le ricostruzioni 2D di oggetti 3D usando proiezioni 1D **a raggi paralleli**
- L'oggetto da ricostruire è pertanto una funzione $f(x,y)$ definita in un dominio D sul piano.
- Si assume che la $f(x,y)$ abbia trasformata di Fourier bidimensionale.

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

Condizione affinché $F(u,v)$ esista è che $f(x,y)$ sia a energia finita, ovvero

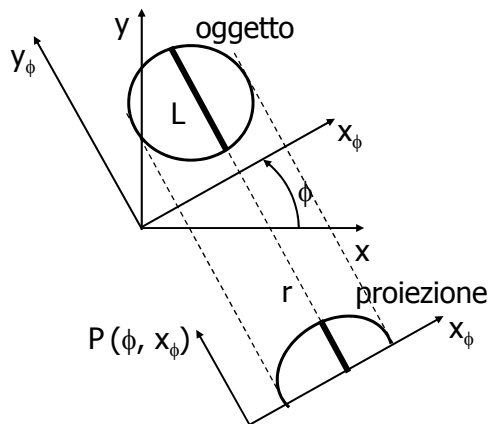
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)|^2 dx dy < \infty$$



Ricostruzioni Tomografiche da proiezioni

- fissato z , la ricostruzione del piano tomografico $S(z)$ richiede come dato di partenza le proiezioni dell'oggetto su più angolazioni ϕ (e.g. su 180 direzioni con 1° di diff.)
- fissato ϕ , traslando la retta di proiezione r si ottiene il profilo della proiezione in funzione di x_ϕ , $P(\phi, x_\phi)$, pari all'integrale lungo il segmento $L(\phi, x_\phi)$

$$P(\phi, x_\phi) = \int_{L(\phi, x_\phi)} f(x, y) dL$$

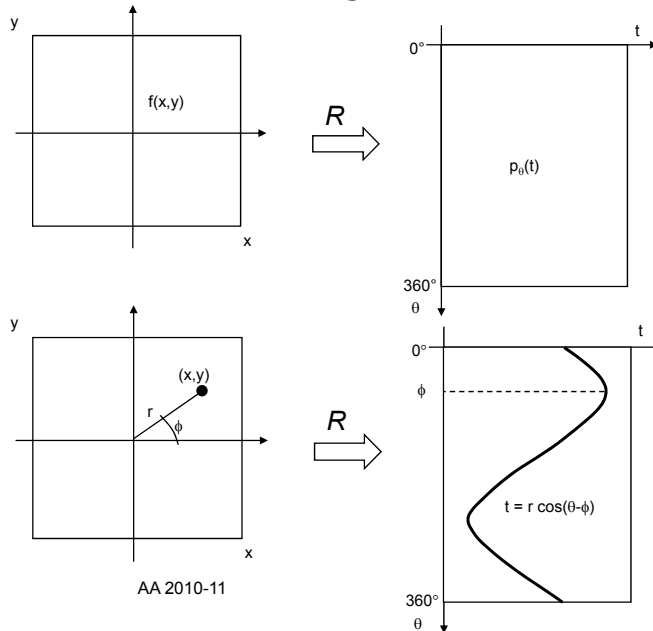




Trasformata di Radon e Sinogramma

I **dati di proiezione** raccolti sono la **trasformata di Radon** (dal matematico polacco Radon che la studiò nel 1917) della tomografia da ricostruire;

sono detti anche **SINOGRAMMA** perché un punto di (x,y) con coordinate polari (r,ϕ) risulta in un arco di senoide $t = r \cos(\theta - \phi)$



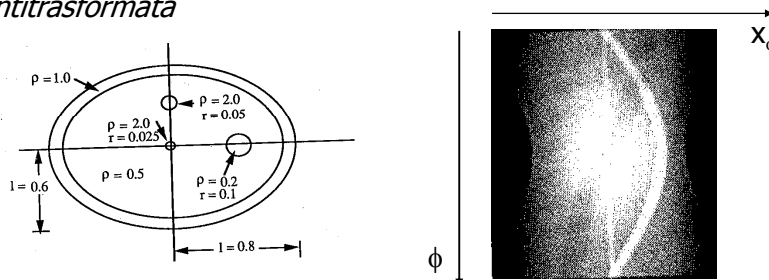
Lezione 10

AA 2010-11



Il sinogramma e la trasformata di Radon

- i profili delle proiezioni per ogni ϕ , $P(\phi, x_\phi)$, vengono memorizzati riga per riga in un file detto **sinogramma**
- come risulta dalla figura il nome è dovuto al fatto che un punto percorre un arco di senoide al variare di ϕ
- la funzione 2D $P(\phi, x_\phi)$ rappresenta la **trasformata di Radon** della funzione $f(x,y)$: $P(\phi, x_\phi) = R\{f(x,y)\}$
la ricostruzione tomografica può essere vista come il *calcolo della antitrasformata*



Lezione 10

AA 2010-11

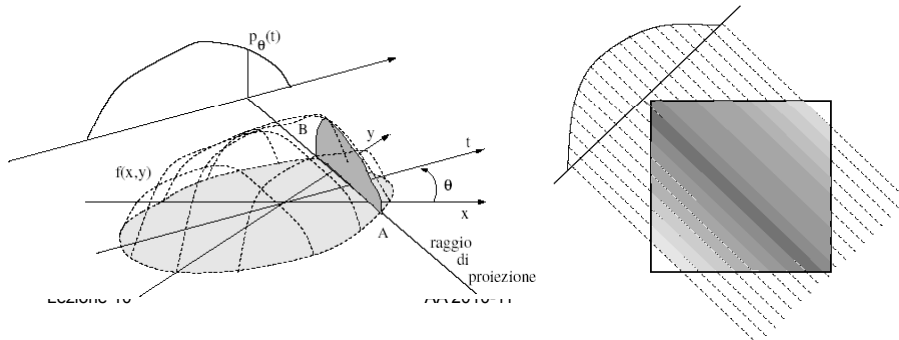
12



Proprietà della trasformata di Radon

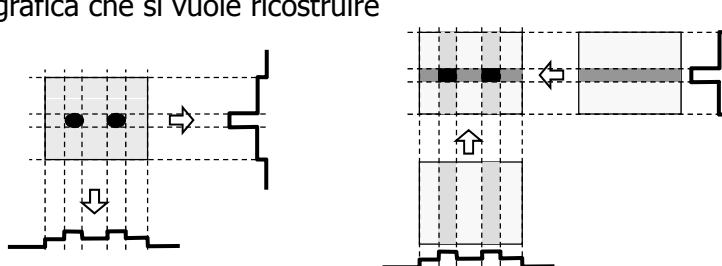
La trasformata R è periodica con periodo 2π . Inoltre è simmetrica rispetto allo zero per cui ci si può limitare allo studio nell'intervallo $[0, \pi]$.

Un operatore importante associato alla TR è la cosiddetta retroproiezione. Data una generica proiezione lungo la retta $t = x \cos \phi + y \sin \phi$, la retroproiezione consiste nell'attribuire a tutti i punti del piano immagine sulla retta t , il valore $P(\phi, t)$



La retroproiezione

- consideriamo inizialmente una semplice retroproiezione che intuitivamente permette una ricostruzione tomografica; vedremo di seguito come questa ricostruzione sia affetta da un errore sistematico sotto forma di PSF che offusca la tomografia vera
- la retroproiezione consiste nel **riportare il valore di proiezione** su tutto il segmento di integrazione L
- la **somma di retroproiezioni da numerosi angoli ϕ** tende a rinforzare i punti con $f(x,y)$ elevato approssimando la mappa tomografica che si vuole ricostruire





Retroproiezione e conseguente sfocamento (1)

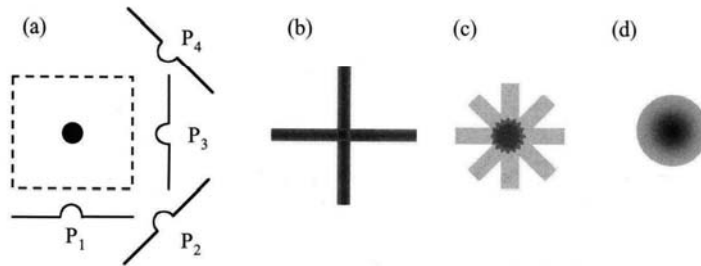
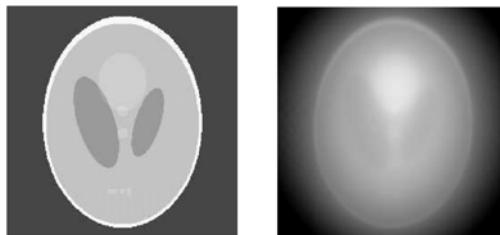


FIGURE B.2. (a) A series of projections P_1 – P_4 acquired for a simple circular object. The dashed lines represent the FOV of the image. (b) A simple backprojection reconstruction using only projections P_1 and P_3 . (c) The “star artifact” produced by the reconstruction of a moderate number of projections. (d) The radial blurring produced using simple backprojection of an infinite number of projections.



Integrando i contributi della retroproiezione per tutti gli angoli ottengo

$$\int_0^{\pi} p(\phi, x \cos \phi + y \sin \phi) d\phi = f(x, y) \otimes \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



Ovvero la funzione di partenza sfocata dal filtro avente risposta impulsiva $1/(x^2+y^2)^{1/2} = 1/\rho$, con ρ distanza dal centro



La retroproiezione

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 e^{-(\mu_1 + \mu_2)x} \\ I_2 &= I_0 e^{-(\mu_3 + \mu_4)x} \\ I_3 &= I_0 e^{-(\mu_1 + \mu_3)x} \\ I_4 &= I_0 e^{-(\mu_2 + \mu_4)x} \end{aligned} \quad (1.21)$$

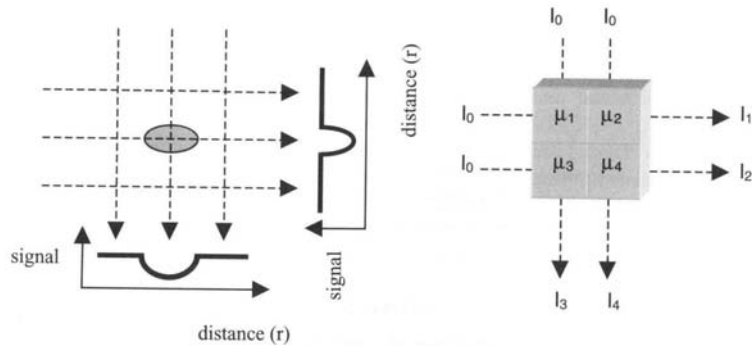
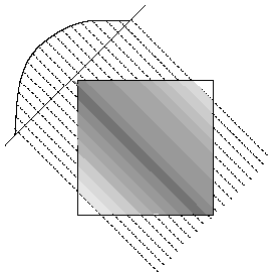


FIGURE 1.27. (Left) Two projections acquired from an elliptical test object. (Right) Two projections acquired from an object consisting of a simple 2×2 matrix of tissue attenuation coefficients.



Retroproiezione e conseguente sfocamento (2)

Retroproiezione(x, y) = $p_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta)$

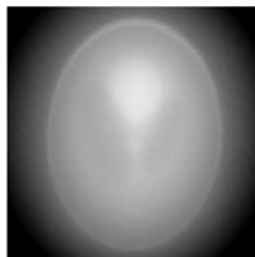


$$\sum_{\theta} p_{\theta}(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \quad \Delta\theta \rightarrow 0^\circ$$

$$\int p_{\theta}(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta = f(x, y) * \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

BACKPROJECTION and FILTER

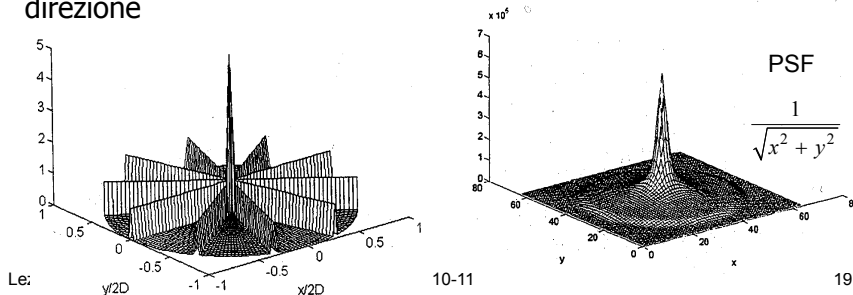
$$\left[f(x, y) * \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] * (\text{filtro inverso PASSA ALTO})$$



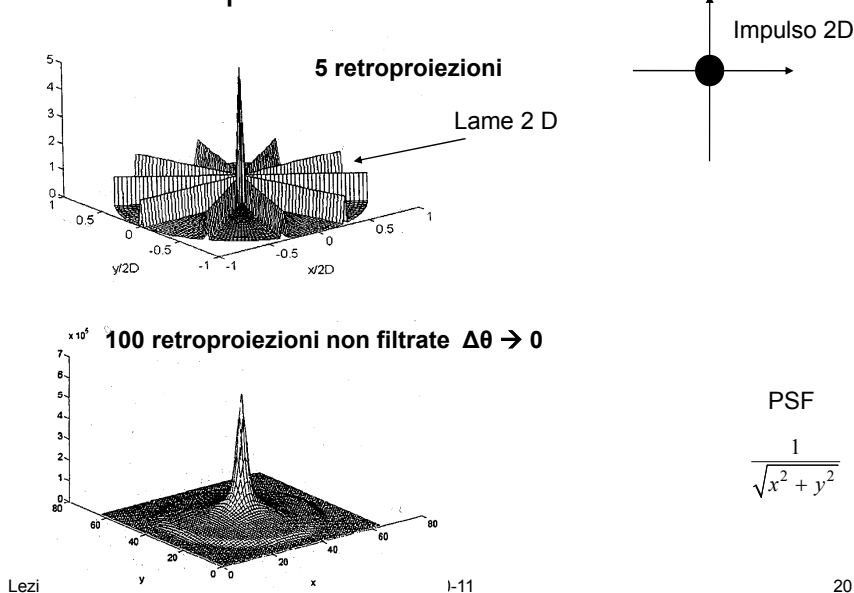


PSF della retroproiezione

- 5 retroproiezioni delle proiezioni di un impulso: si nota un forte artefatto a stella (da F.Rocca, 1998)
- 100 retroproiezioni: per un grande numero di retroproiezioni si ottiene la **PSF** prodotta dalla retroproiezione che ha andamento $1/\rho$, con ρ distanza dall'impulso; la PSF offusca l'immagine con un effetto di **filtro passa basso** diminuendo la risoluzione spaziale
- si può dimostrare che la **MTF** (trasformata di Fourier della PSF) ha andamento $1/|\Omega|$, con $|\Omega|$ frequenza spaziale in una generica direzione

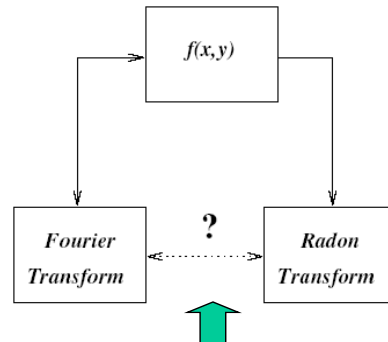


Retroproiezione – artefatto a stella





Una volta nota la trasformata di Fourier esistono metodi per risalire alla funzione stessa. Pertanto se si conosce il legame tra T di Radon e TdF si può teoricamente risalire alla funzione $f(x,y)$.

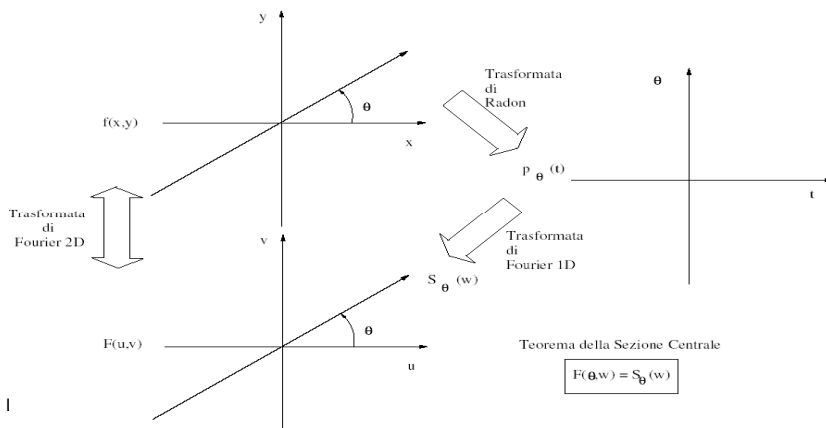


Teorema della Sezione Centrale



Teorema della sezione centrale

La trasformata di Fourier di una **proiezione** ottenuta ad un angolo θ rispetto all'asse x , coincide con la trasformata di Fourier 2D $F(u,v)$ della $f(x,y)$ calcolata lungo **la retta** nel piano (u,v) che forma un angolo θ con l'asse u .



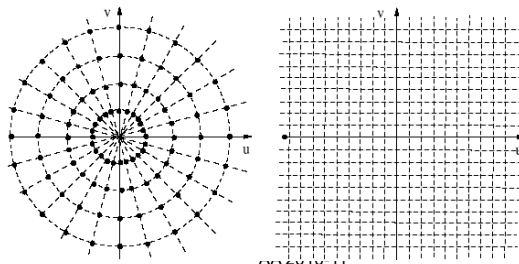


Se $F(u,v)$ è la TdF di $f(x,y)$ e $S_\theta(\omega)$ è la TdF delle proiezioni lungo la generica retta t , $P(\theta,t)$, allora

$$F(\omega, \theta) = S_\theta(\omega)$$

Con $u = \omega \cos \theta$, $v = \omega \sin \theta$

In teoria si può utilizzare questa relazione per ricavare la $f(x,y)$, ma sorge il problema di dover operare con dati discreti.



Lezione 10



Th della Sezione Centrale o delle Proiezioni (1)

$$F(u,v) = \mathcal{F}_2 \{ f(x,y) \} \quad \text{Trasf. di Fourier 2D}$$

$$(F(u,v) \Rightarrow \text{se } \iint f(x,y)^2 dx dy < \infty) \quad \text{energia finita}$$

$$F(u,v) = \iint f(x,y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

proprietà di separazione rispetto agli assi

$$F(u,v) = \int \left[\int f(x,y) e^{-j2\pi vy} dy \right] e^{-j2\pi ux} dx$$

F_1 colonne

$$F_{col}(x,v) \xrightarrow{\text{Trasf. 1D}} F(u,v)$$



Th della Sezione Centrale o delle Proiezioni

Calcoliamo $F(u, v)|_{v=0}$ sezione centrale $\theta=0$
Orizzontale

$$S_{\theta=0}(u) = F(u, 0) = \int \underbrace{f(x, y) dy}_{P_{\theta=0}(x)} e^{-jux} dx$$

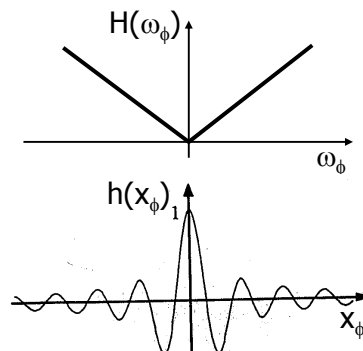
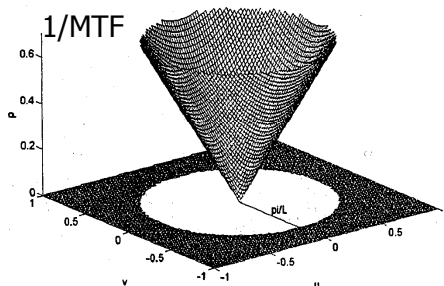
Ruotando gli assi
si dimostra che
questo vale per $\forall \theta$
 $S_{\theta}(\omega) = P_{\theta}(\omega)$

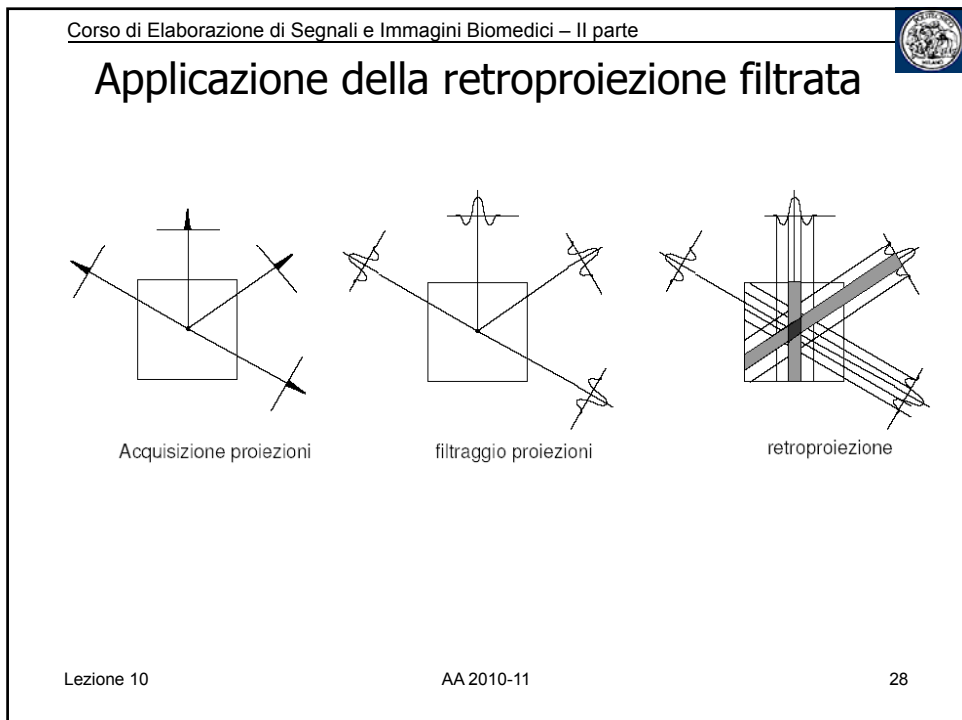
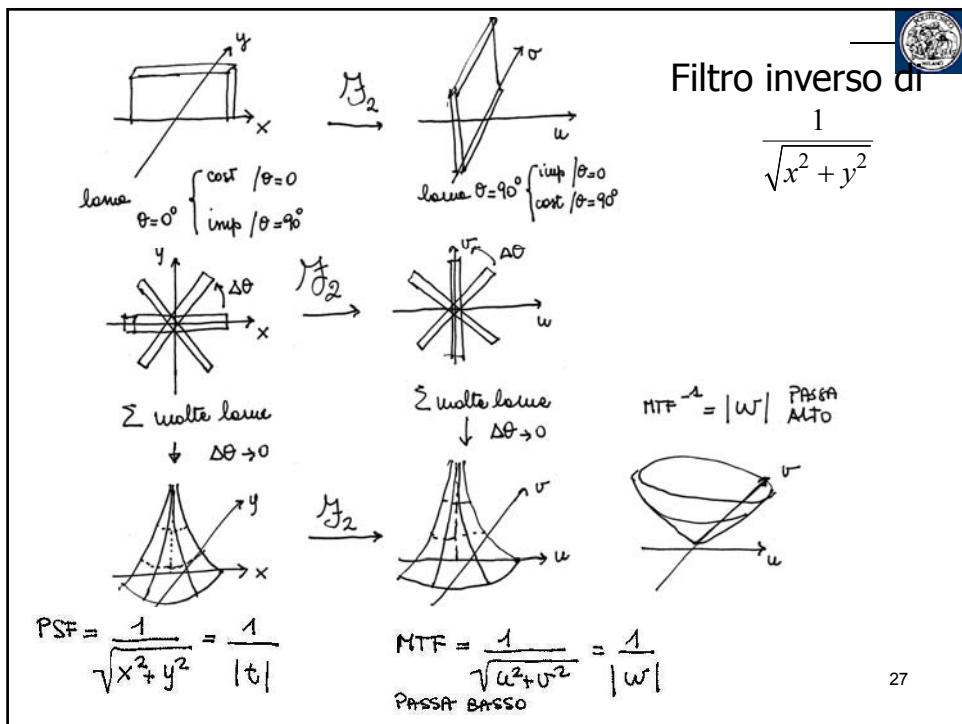
$$\mathcal{F}_1\{P_{\theta=0}(x)\} = P_{\theta=0}(u)$$



La retroproiezione filtrata

- Indichiamo con (ρ, Ω) le coordinate polari della MTF
- l'inverso della MTF (2D) ha andamento $|\Omega|$ ed applicata all'immagine è in grado di correggere l'offuscamento
- lo stesso risultato si ha filtrando **ogni riga del sinogramma** con un **filtro a rampa** (1D) con amplificazione $|H(\omega_{\phi})|$ lineare in ω_{ϕ} e sfasamento nullo; da questa si ricava la risposta all'impulso $h(x_{\phi})$







Retroproiezione Filtrata - Filtered Back Projection FBP

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ F(u, v) \right\} = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{j2\pi(xu+yv)} du dv$$

Si passa a coordinate polari ω, θ

$$u = \omega \cos \theta$$

$$v = \omega \sin \theta$$

$$du dv = |J| d\omega d\theta$$

Jacobiano

$$|J| = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \omega} & \frac{\partial v}{\partial \omega} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} & \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\omega \sin \theta & \omega \cos \theta \end{vmatrix} = \omega$$

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \omega F(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega d\theta$$

Lezione 10

29



Retroproiezione Filtrata - Filtered Back Projection FBP

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \omega F(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| S_{\theta}(\omega) e^{j2\pi\omega t} d\omega d\theta$$

\uparrow sez. Centrale
 $= P_{\theta}(\omega) = \mathcal{F}_1 \{ p_{\theta}(t) \}$
 modulo

$$= \int_0^{\pi} \mathcal{F}_1^{-1} \{ |\omega| \cdot P_{\theta}(\omega) \} d\theta = \int_0^{\pi} q_{\theta}(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta$$

RETROPROIEZIONE

$$q_{\theta}(t) = h_{\text{RAMPA}}(t) * p_{\theta}(t)$$

PROIEZIONE FILTRATA

$$h_{\text{RAMPA}}(t) = \mathcal{F}_1^{-1} \{ |\omega| \}$$

FILTRO A RAMPA

SIMMETRICA (FASE = 0)

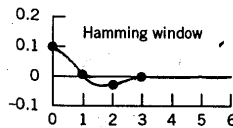
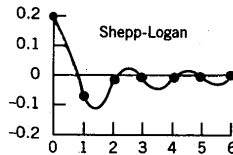
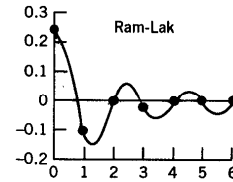
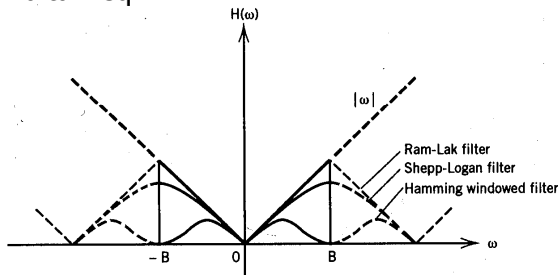
Lezion

30



Il filtro a rampa

- il filtro a rampa ideale prende il nome di Ram-Lak (dai due ideatori indiani)
- l'incremento a rampa è comunque limitato alla freq. di Nyquist
- altre versioni impongono, in aggiunta, uno smussamento per limitare l'amplificazione del rumore in alta freq.



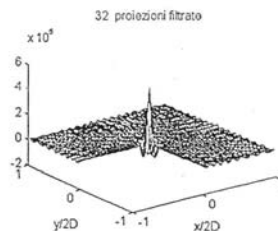
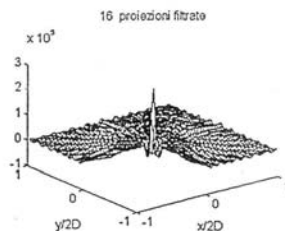
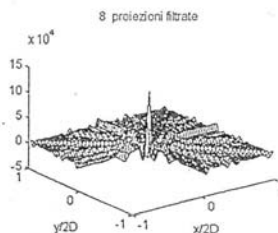
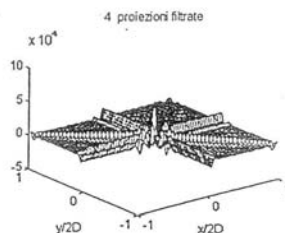
Lezione 10

AA 2010-11

31



Proiezioni filtrate – artefatto a stella



Lezione 10

AA 2010-11

32



migliora al crescere del numero di proiezioni

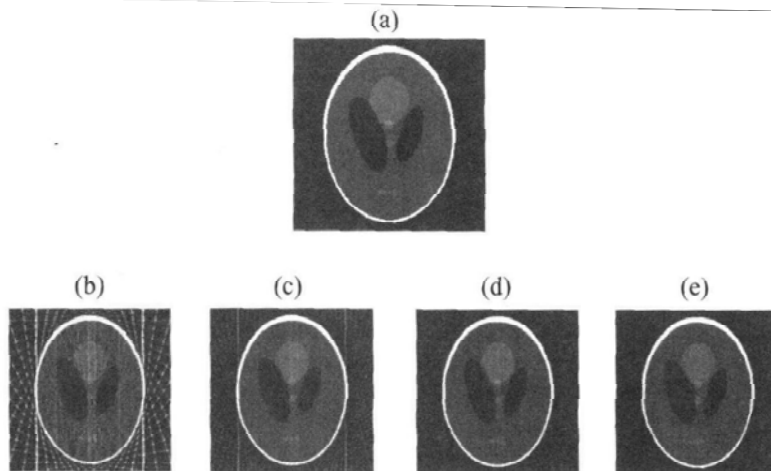
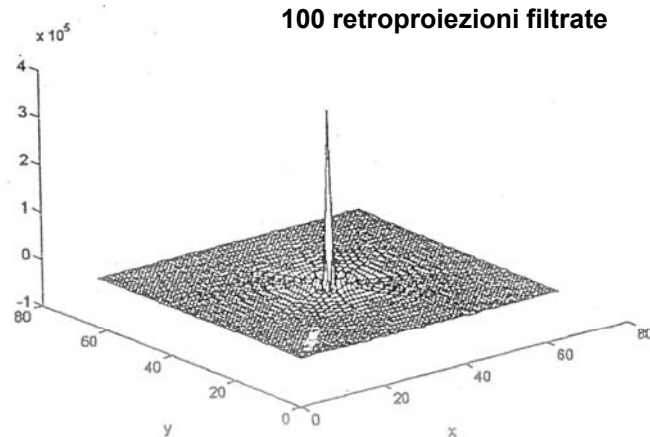
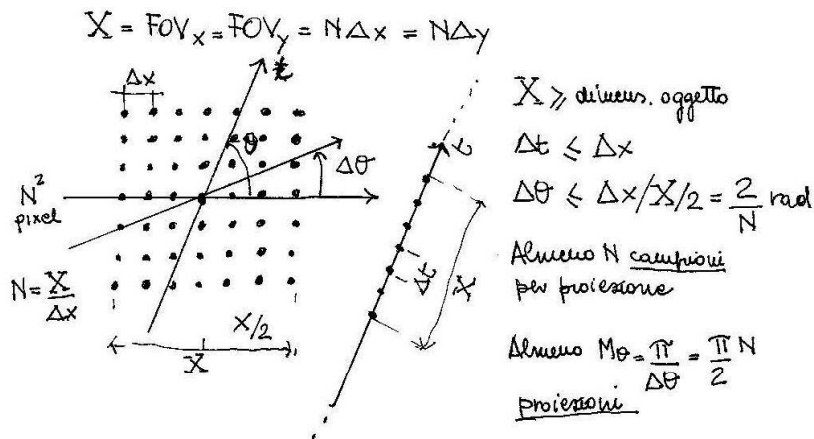


FIGURE B.7. The effect of the number of projections on the final image using filtered back-projection with a Shepp-Logan filter. (a) The original Shepp-Logan phantom. (b–e) The effect of increasing the number of projections for reconstruction: (b) 20 projections, (c) 45 projections, (d) 90 projections, and (e) 180 projections.



Campionamento del Sinogramma



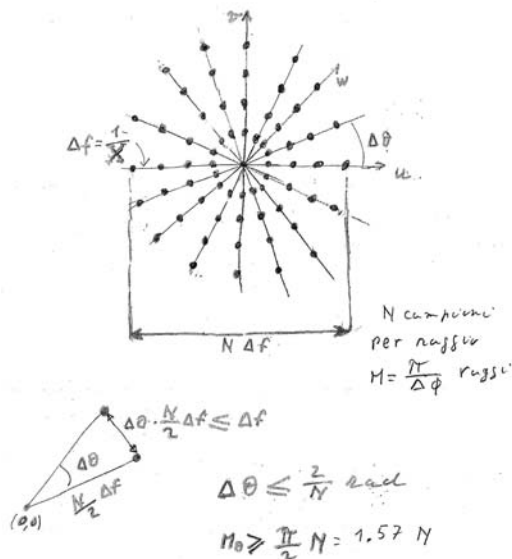
Campioni sinogramma $\geq N \cdot M_\theta = \frac{\pi}{2} N^2 = 1.57 N^2$

Il sinogramma ha una ridondanza del 57%.

o più rispetto all'immagine



Campionamento del Sinogramma visto nel dominio F_2





Problemi fisici della ricostruzione

In pratica vi sono tre fonti di errore:

1. Fenomeni di aliasing nel campionamento delle proiezioni
2. Effetti delle non linearità del processo di imaging
3. Fluttuazioni statistiche dei dati legate ai fenomeni aleatori.

Il campionamento introduce errori da tre diverse sorgenti:

- Angolo di vista
- Proiezioni
- Uso di matrice quadrata $M \times M$

Le non linearità sono dovute sia ai sensori, sia ai tessuti (per il diverso assorbimento)

Il rumore non è normalmente un processo stazionario a media nulla.