Indice della lezione

Immagini numeriche

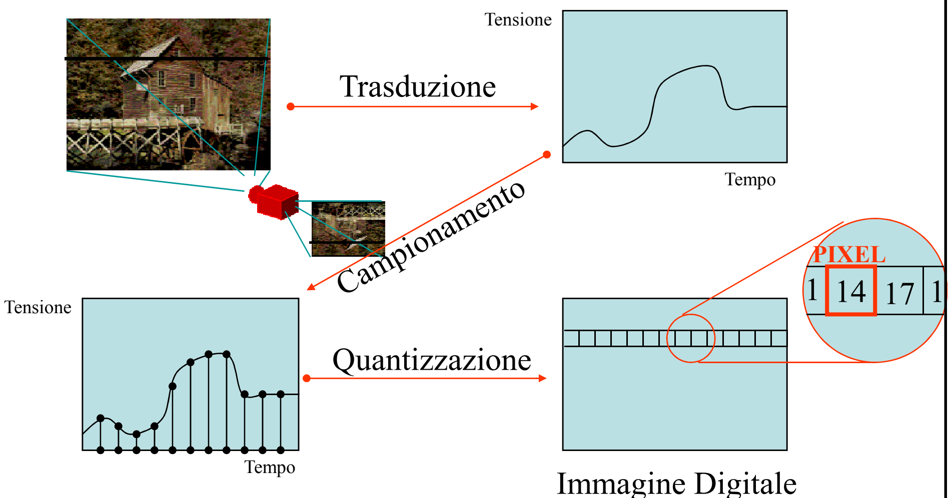
Campionamento (problema dell'Aliasing)
Quantizzazione

Discrete Fourier Transform DFT_2

Immagini digitali

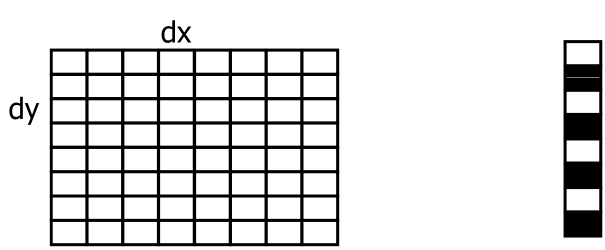
- L'immagine è una rappresentazione spaziale **2-dimensionale i(x,y)**: è quindi possibile **discretizzarla**.
- Dal punto di vista dell'ingegnere un'immagine diventa una **matrice bidimensionale** di valori omogenei (di numeri).
- Nell'ambito di elaborazione delle immagini, per immagine si intende generalmente la rappresentazione dopo il processo di **digitalizzazione**.

dal Segnale Analogico alla Matrice



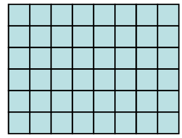
Campionamento

- il campionamento in 2D corrisponde ad una suddivisione dell'immagine in una griglia di **pixel**
- la griglia deve essere tanto più fitta quanto maggiore è la risoluzione spaziale (banda passante)
- vale il **th. del campionamento** per cui vi devono essere almeno due pixel per la massima frequenza spaziale rappresentata,
  - e.g. in basso a destra è rappresentata una freq. spaziale (alternanza bianco/nero) pari a 1/(2 dy) cicli/mm

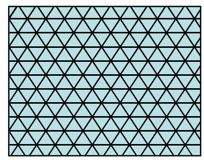


Tassellazione del piano

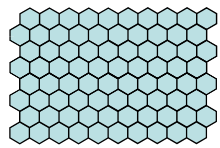
- Quadrata



- Triangolare



- Esagonale



Corso di Elaborazione di Segnali e Immagini Biomedici – II parte

Campionamento dell’immagine

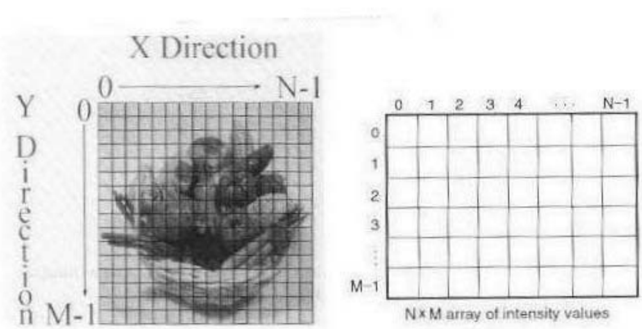
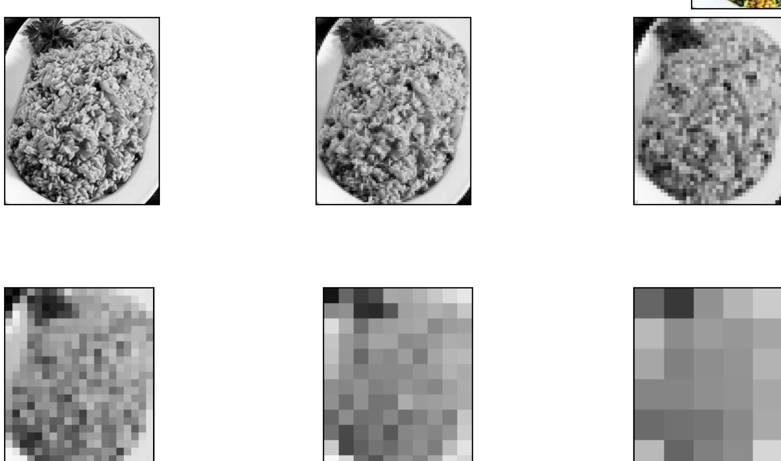


Figure 1.15: A spatially sampled image containing $N \times M$ picture elements.

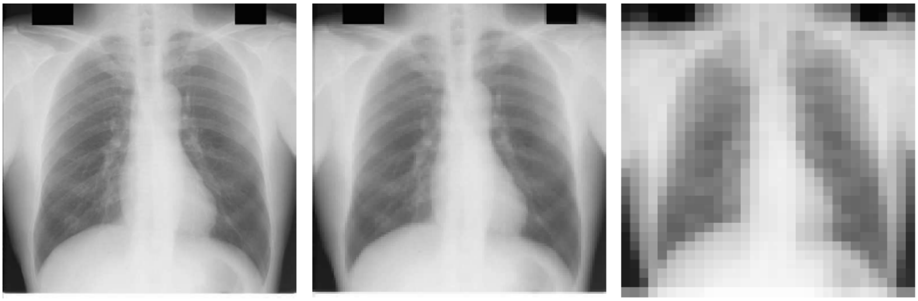
Risoluzione Spaziale e Campionamento

- La risoluzione spaziale è la più piccola dimensione dell’oggetto che può essere discriminata.
- La cella di risoluzione è la più piccola area elementare associata ad un valore in una immagine digitale.
- Generalmente la cella elementare è un quadrato ma si possono avere anche celle elementari rettangolari o esagonali.
- **PIXEL** (contrazione di **picture element**) è descritto dalla posizione spaziale di una cella elementare (riga, colonna) e dal valore ad essa associato.
- Dimensioni comuni per immagini digitali sono da 256x256 a 2048x2048

Risoluzione Spaziale e Campionamento



Risoluzione spaziale e Campionamento



Immagini radiografiche del torace

campionate a 512x512, 128x128 e 32x32

appunto:Trasformata di Fourier 2-D

Componenti armoniche ed impulsi

- E' importante ricordare che ad una componente armonica in (x,y) corrisponde una coppia di impulsi simmetrici e coniugati in (ω_x,ω_y).
- Viceversa ad una componente periodica in (ω_x,ω_y) corrispondono due impulsi opportunamente traslati in (x,y).
- Moltiplicare una funzione per una componente armonica (modulandola in ampiezza) significa → convolvere lo spettro per i relativi impulsi nel dominio (ω_x,ω_y). → Quindi, spettro replicato e traslato intorno a detti impulsi. Analogo il discorso invertendo i due domini.

Da questo "trucco" derivano numerose proprietà applicate in varie occasioni, tra le quali:

- Separabilità moltiplicativa: $F_2\{fx(x) \cdot fy(y)\} = Fx(\omega_x) \cdot Fy(\omega_y)$
- Campionamento, trattando immagini digitali.

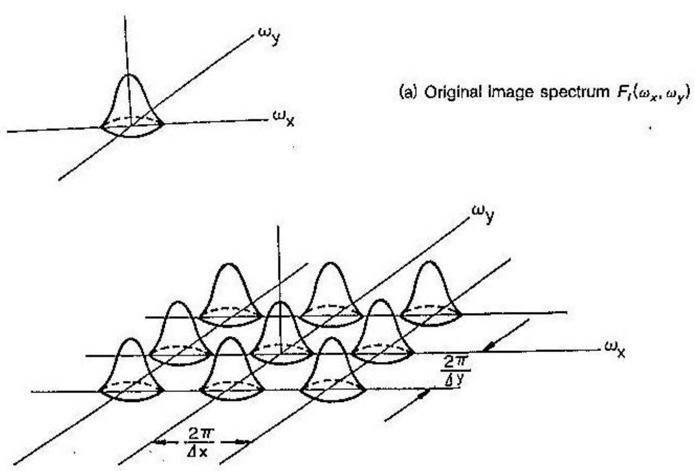
Campionamento dell'immagine

Prodotto di $f_I(x,y)$ per un pettine bidimensionale di impulsi δ di Dirac spaziati Δx e Δy nelle due direzioni.

- $f_s(x,y)= f_I(x,y)\ s(x,y)$ è l'immagine campionata
- La TdF di $f_s(x,y)$ può essere vista come la convoluzione della TdF della $f_I(x,y)$ e della $s(x,y)$

  $F_s(\omega_x, \omega_y)=1/4\pi^2\{F_I(\omega_x, \omega_y) * S(\omega_x, \omega_y)\}$

Il campionamento delle componenti spettrali di un'immagine, produce un'immagine campionata che è anch'essa periodica

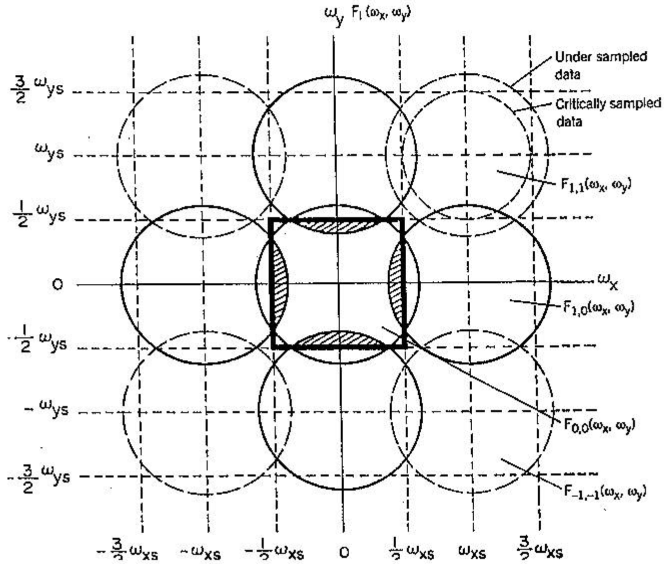


(b) 2-Dimensional display of the sampled image spectra $F_S(\omega_x, \omega_y)$ in Fourier domain.

Aliasing 2D

Dal sotto-campionamento risulta l'overlap degli spettri.

Le regioni tratteggiate sono quelle in cui si ha **aliasing**



Richiami campionamento 1D

per comprendere l'effetto del campionamento sul contenuto in frequenza ci si basa su questi concetti:

1) campionare equivale a **modulare** l'ampiezza di una **serie di impulsi** spaziati di T_C moltiplicando y(t) per un pettine di Dirac

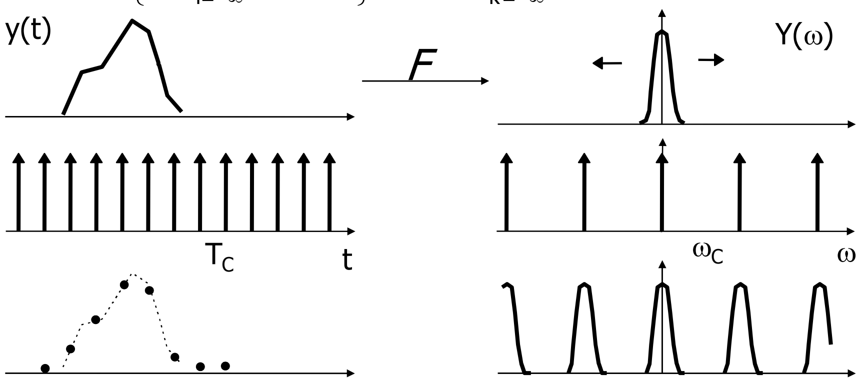
2) un **pettine di Dirac** è un particolare segnale periodico che contiene **tutte le armoniche** con uguale ampiezza: quindi, la trasformata di un pettine di Dirac è ancora un pettine di Dirac con impulsi nel dominio delle frequenze spaziati di un valore pari alla fondamentale $f_C=1/T_C$

3) alla moltiplicazione nel dominio del t. corrisponde una **convoluzione nel dominio delle frequenze**

Analisi in frequenza - segnale campionato 1D

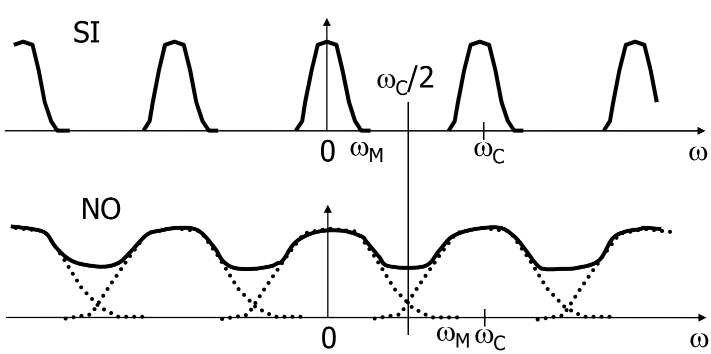
- il risultato del campionamento è così quello di replicare $Y(\omega)$ attorno ai multipli di $\omega_C=2\pi f_C$ sommandoli

$$\mathcal{F}\left\{y(t)\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(t-iT_C)\right\}=\cos t.\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}Y(\omega-k\omega_C)$$



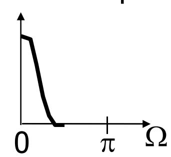
Analisi in frequenza - segnale campionato 1D

- da queste considerazioni discende l'enunciato del **Th. del campionamento** o di **Shannon:** "la frequenza di campionamento deve essere almeno doppia rispetto alla massima frequenza presente nella banda occupata dal segnale", ovvero $\omega_C > 2\omega_M$



Analisi in frequenza - segnale campionato 1D

- in altri termini, fissata la frequenza di campionamento, la massima frequenza presente, $f_M=\omega_M/2\pi$, deve essere minore della metà della frequenza di campionamento $f_N=f_C/2=\omega_C/4\pi$
- in un segnale campionato, dunque, la metà della frequenza di campionamento, f_N, ha il significato di massima frequenza rappresentabile e prende il nome di **frequenza di Nyquist**
- data la simmetria rispetto a 0 e la periodicità rispetto ad f_C, si rappresenta il contenuto in frequenza di un segnale campionato da 0 ad f_N,
  ovvero, in termini di frequenza normalizzata f/f_C, da 0 a 0.5,
  ovvero, in termini di pulsazione normalizzata Ω, da 0 a π

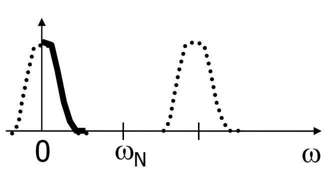


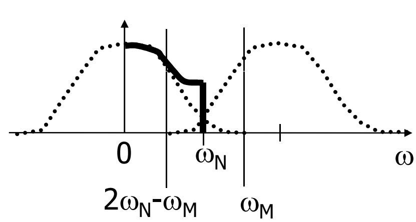
$$\Omega = 2\pi\ \omega/\omega_C = 2\pi\ f/f_C$$

Corso di Elaborazione di Segnali e Immagini Biomedici – II parte

Equivocazione delle frequenze – aliasing 1D

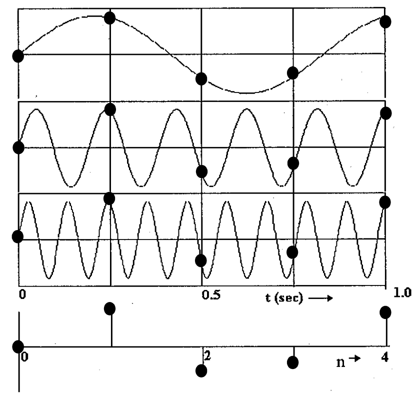
- nel primo esempio della fig. precedente la condizione di Shannon è rispettata mentre nel secondo no
- i due spettri sono riportati qui sotto evidenziando lo spettro del segnale campionato da 0 alla freq. di Nyquist
- nel secondo caso, le frequenze da ω_N ad ω_M non solo non sono rappresentate fedelmente ma sono equivocate e ribaltate nel tratto da $2\omega_N$-ω_M a ω_N.





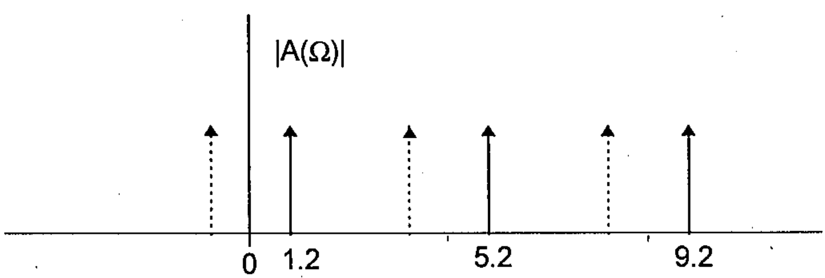
Aliasing: sinusoidi nel tempo/spazio 1D

- consideriamo 3 sinusoidi a 1.2, 5.2 e 9.2 Hz tutte campionate a 4 Hz: tutte danno luogo allo stesso campionamento che viene ricostruito a 1.2 Hz



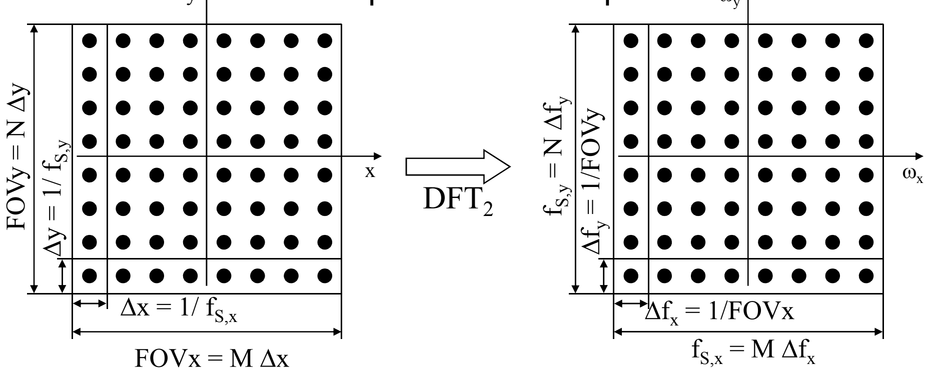
Aliasing: sinusoidi nelle frequenze 1D

- infatti, la Trasf. di Fourier della sinusoide a 1.2 Hz presenta due impulsi a +1.2 e a -1.2Hz che replicato attorno a 4 Hz per il campionamento dà luogo ad impulsi a 4k-1.2 e 4k+1.2 Hz
- 5.2 Hz = 4+1.2 Hz --> 4(k-1)-1.2 e 4(k+1)+1.2 Hz
- 9.2 Hz = 2x4+1.2 Hz --> 4(k-2)-1.2 e 4(k+2)+1.2 Hz
- considerando **tutti i k** troviamo gli **stessi impulsi in freq.**



Trasformata di Fourier Discreta

NM campioni ↔ NM campioni



$$\text{DFT}_2) \; F_{kl} = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f_{mn} \exp\left(-j2\pi\left(\frac{mk}{M}+\frac{nl}{N}\right)\right)$$

$$\text{IDFT}_2) \; F_{mn} = \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} F_{kl} \exp\left(j2\pi\left(\frac{mk}{M}+\frac{nl}{N}\right)\right)$$

Calcolo della Discrete Fourier Transform 2-D

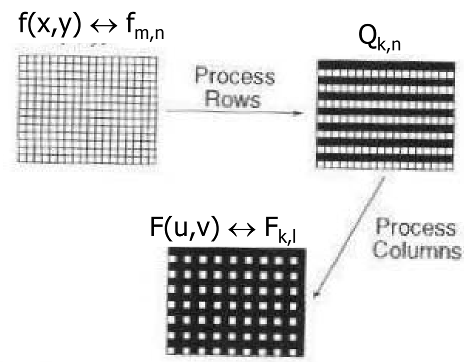
$$\text{DFT}_2) \; F_{kl} = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f_{mn} \exp\left(-j2\pi\left(\frac{mk}{M}+\frac{nl}{N}\right)\right)$$

$$\text{IDFT}_2) \; f_{mn} = \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} F_{kl} \exp\left(j2\pi\left(\frac{mk}{M}+\frac{nl}{N}\right)\right)$$

- DFT 1D per ogni riga
- DFT 1D per ogni colonna
- Spesso $M=N=2^{\text{intero}}$ DFT → FFT (Fast Fourier Transform)

Discrete Fourier Transform 2-D

- Calcolo di N trasformate 1-D lungo x, da n=0 a n=N-1.
- Si ripete per ciascuna colonna delle DFT precedenti, Q(k,n) da k=0 a k=N-1.
- Si calcolano 2N DFTs 1-D di lunghezza N
- Ovvero 2N FFT ciascuna con $N \cdot \log_2(N)$ operazioni



Graphical sketch showing the computation
two-dimensional DFT.

Discrete Fourier Transform 2-D

L'utilizzo dell'algoritmo FFT per il calcolo della DFT riduce le operazioni da N^2 a $N\log_2 N$.

e.g. per una immagine 512x512 il t di calcolo si riduce di un fattore 57. 2048x2048 miglioramento t di calcolo 186 a 1 circa

Occorre che il numero totale dei campioni della funzione in ingresso sia potenza di 2. Valori comuni per le immagini: da 256x256 a 4096x4096.

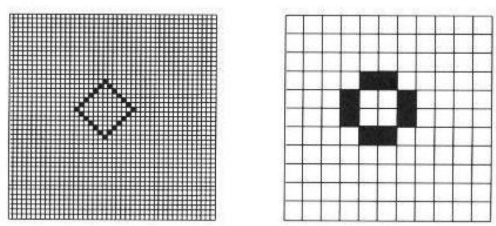
Si espande l'immagine a potenza di 2 con un **processo di PADDING** che aggiunge nuovi pixel con un livello di grigio costante (spesso graylevel=0).

Problema: discontinuità a scalino introduce artefatti nelle componenti dello spettro di Fourier

Soluzione: riempire i nuovi pixel con il livello di grigio del contorno dell'immagine per ridurre gli artefatti

Sottocampionamento

- Esempio di immagine sottocampionata con aliasing

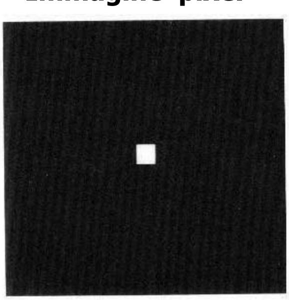


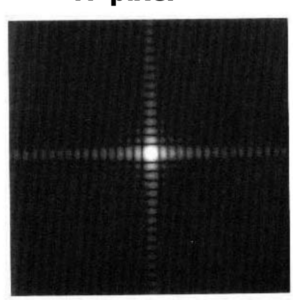
(a) (b)

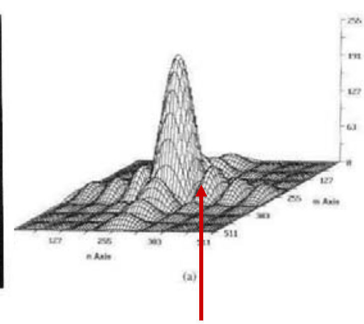
Figure 2.9: An example image of a diamond (a) properly sampled, and (b) improperly sampled below the Nyquist rate.

Campionamento – Effetto P.Basso antialiasing integrando l'intera area del pixel

Immagine pixel **TF pixel** **TF vista in 3-D**





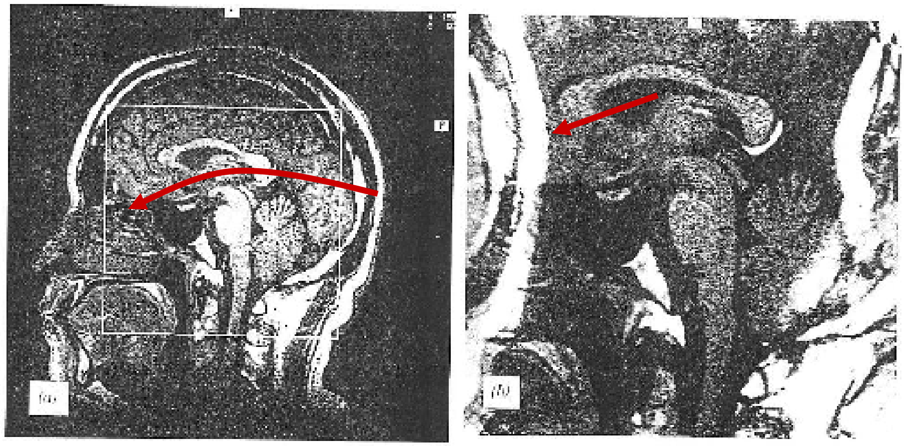


F Nyquist

aliasing

Da sotto-campionamento spaziale risulta **aliasing in frequenza**

Da sotto-camp. in frequenza risulta **aliasing spaziale** tipico in MRI (v. fig.)



Il processo di digitalizzazione

- Il segnale acquisito da un sistema analogico (e.g. televisivo) è tipicamente un segnale continuo che descrive l'intensità del segnale luminoso secondo una scansione per linee.
- La digitalizzazione trasforma un segnale continuo discretizzandolo sia nella dimensione spaziale, sia in quella dei livelli di grigio (**convertitore analogico/digitale**).
- Il segnale convertito è memorizzato in una memoria immagine che funge da interfaccia tra l'elaboratore, il monitor e l'elemento di acquisizione.
- Tra memoria immagine e monitor vi è un convertitore **digitale/analogico**.

Digitalizzazione dell'immagine

L'immagine deve essere campionata (scelta del numero di pixel).

Occorre poi digitalizzarla, cioé convertire i valori analogici di intensità in numeri che rappresentano l'intensità dell'immagine.

Graylevels o grayscales:

solo valori positivi (intensità)

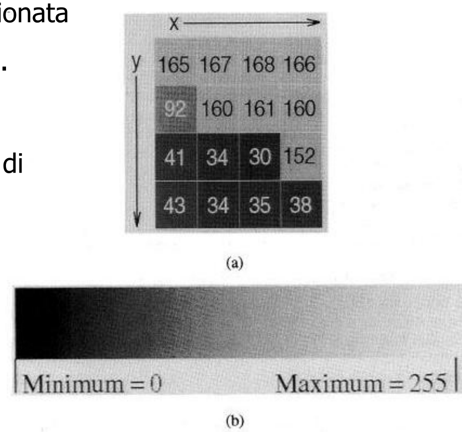
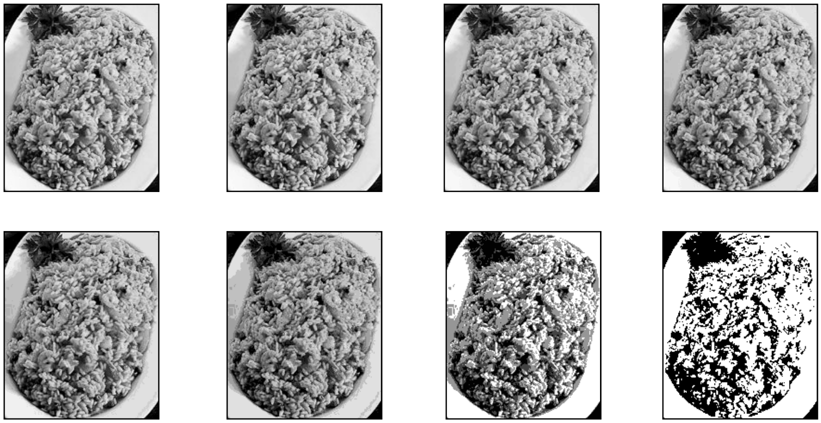


Figure 1.19: An example of (a) a sampled and digitized 4 × 4 sub-image and (b) its corresponding grayscale.

Risoluzione nella Scala dei Grigi

- Un'immagine binaria è una immagine in cui ogni pixel può assumere solo due valori: (0/1), (vero/falso), (oggetto/sfondo). Un'immagine binaria usa un solo bit/pixel.
- Un'immagine a toni di grigio è un'immagine in cui ogni pixel assume valori in un intervallo più ampio.
- Valori tipici sono [0, 63], [0, 255], [0, 1024] che corrispondono a 6, 8, 10 bit/pixel.
- Un osservatore umano percepisce una scala continua di grigi osservando immagini memorizzate con 8 bit.

Risoluzione nella Scala dei Grigi



Risoluzione sulla scala dei grigi

Quantizzazione con 256, 64 e 16 livelli di grigio

N bit	Nlivelli=$2^{N\ bit}$	SNR ~ 6N dB	
1	2	6	Immagine B/N
2	4	12	
3	8	18	
4	16	24	
5	32	30	
6	64	36	
7	128	42	Buona intellegibilità
8	256	48	Buona immagine TV
9	512	54	
10	1024	60	Immagini RX
11	2048	66	
12	4096	72	


256


8


4

pseudocontorni

Compromesso risoluzione-quantizzazione

Risoluzione più alta

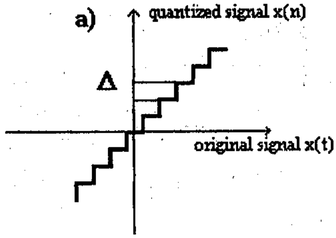
Più livelli di grigio

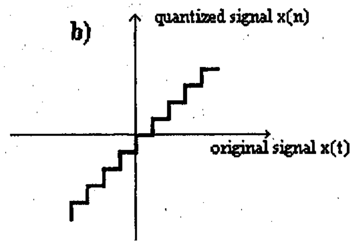
Corso di Elaborazione di Segnali e Immagini Biomedici – II parte

Rumore di quantizzazione

- la quantizzazione dei valori (discretizzazione, digitalizzazione) conseguente alla conversione A/D dà luogo ad un errore di approssimazione, visto come un rumore additivo $y\hat{}=y+n_Q$
- le caratteristiche di processo stocastico del rumore di quantizzazione sono facilmente ricavabili:
  1) la distribuzione di probabilità è uniforme fra -Q/2 e Q/2 (l'errore può cadere con uguale probabilità in qualsiasi punto dell'intervallo di quantizzazione ampio Q)
  2) quindi $m_Q=0$, $\sigma_Q^2=Q^2/12$
  3) si tratta di un rumore bianco (l'approssimazione su un campione è indipendente da quella fatta sul c. precedente)
  4) il rumore è indipendente e quindi scorrelato dal segnale
  5) la varianza è aumentata del rumore di quantizzazione $\sigma_{y\wedge}^2 = \sigma_y^2 + Q^2/12$
  6) gli altri campioni della ACF non sono variati: $r_{y\wedge,k}= r_{y,k}$, $k\neq0$

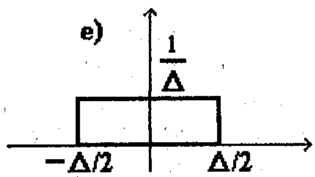
Rumore di quantizzazione

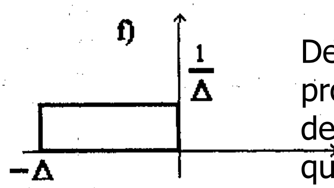




Arrotondamento

Troncamento





Densità di probabilità dell'errore di quantizzazione

$m_Q=0$, $\sigma_Q^2=Q^2/12$ $m_Q=-Q/2$