

CORSO DI:

ELABORAZIONE DI SEGNALI BIOMEDICI

(LUCIDI DELLE LEZIONI VII)

PROF. SERGIO CERUTTI

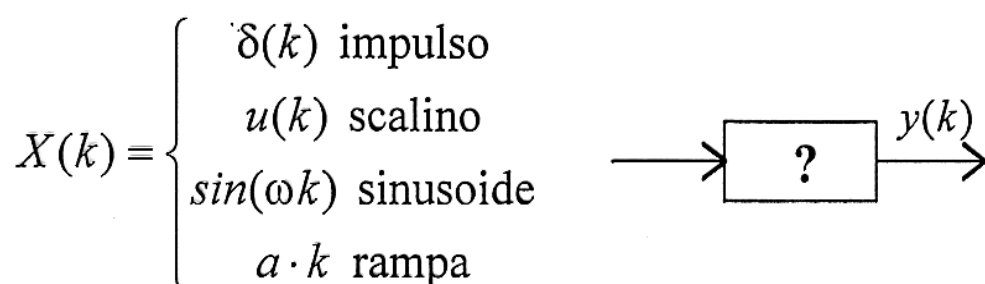
Dipartimento di Bioingegneria

Politecnico di Milano

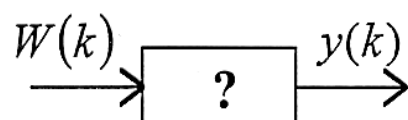
OTTOBRE 2004

METODI DI IDENTIFICAZIONE

1) Deterministici



2) Stocastici



$\{y(k)\}$ processo casuale discreto, stazionario in senso debole

(teorema di fattorizzazione spettrale di Astrom:

stazionarietà \Rightarrow stabilità asintotica)

$\{w(k)\}$ $WN[0, \lambda^2]$ cioè $E[W(k)] = 0$
 $E[W(k) \cdot W(l)] = \lambda^2 \cdot \delta_{kl}(\cdot)$

N.B. Vari sono i modelli di identificazione stocastica e varie sono le famiglie di modelli

1. Famiglia di modelli

2. Metodi di identificazione

1. modello ARMA (Auto Regressive Moving Average)

$$y(k) = a_1 y(k-1) + \dots + a_p y(k-p) + w(k) + c_1 w(k-1) + \dots + c_q w(k-q)$$

$$w(k) \sim WN[0, \lambda^2]$$

il vettore di parametri

$$\mathfrak{g} = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_p \quad c_1 \quad \dots \quad c_q]^T$$

e λ^2 definiscono univocamente il modello

ARMA (p,q)

AR(p)

MA(q)

Teorema di Wold:

$$ARMA(p,q) \equiv AR(\infty) \equiv MA(\infty)$$

2. Metodi di identificazione a minimizzazione dell'errore di predizione basati sulla nozione di "predittore"

PREDITTORE: regola deterministica che, attraverso l'elaborazione di dati relativi al passato di un certo processo, fornisce una previsione circa la dinamica futura del processo stesso.

Predittore ad 1 passo $\hat{y}(k|k-1) = \hat{y}(k) = f(y(k-1), y(k-2), \dots, k)$

errore di predizione $\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k|k-1)$

$$J(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k) \quad \text{con } N = \text{numerosità serie temporale}$$

Metodi a minimizzazione dell'errore di predizione:

- minimi quadrati (BLS, RLS)
- minimi quadrati generalizzati
- massima verosimiglianza (MLM, MRLM)

VERIFICHE DEL MODELLO AR

- Test di bianchezza dell'errore di predizione (test di Anderson, test di Portmanteau, periodogramma cumulato)
- Tests di ottimalità

Criterio FPE, AIC o RIS

Akaike:

$$\left\{ \begin{array}{l} FPE = \lambda^2 \cdot \frac{1 + \frac{p}{N}}{1 - \frac{p}{N}} \\ AIC = \log \lambda^2 + \frac{2p}{N} \end{array} \right.$$

Rissanen

$$RIS = \log \lambda^2 + \frac{p}{N} \log N$$

STIMA SPETTRALE PARAMETRICA

1. Scegliere il modello di generazione della serie temporale
2. stimare i parametri dai dati disponibili o della funzione di autocorrelazione
3. determinare la stima dello spettro sulla base dei parametri stimati

Stima dello spettro \Leftrightarrow Periodogramma

Sia $x(k \cdot \Delta T)$ il segnale campionato.

Si può dimostrare che:

$$x(k \cdot \Delta t) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m \cdot e^{(j2\pi f_m k \Delta t)}$$

cioè il segnale è modellizzabile con N sinusoidi complesse (una per ogni punto). Si determinano gli a_m con i minimi quadrati.

Si ha:

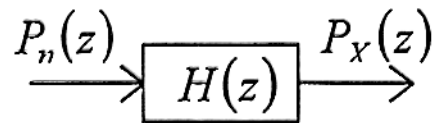
$$|a_m|^2 = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{\left(-2j\pi m \frac{n}{N}\right)} \right|^2$$

che coincide con il periodogramma già in precedenza introdotto

$$P_m = | |^2 = \frac{|X_m|^2}{(N\Delta t)^2}$$

Stima ai minimi quadrati \equiv periodogramma

Stima dello spettro (metodo parametrico)



$$P_X(z) = H(z) \cdot H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) P_n(z)$$

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$P_X(z) = \frac{B(z) \cdot B^*\left(\frac{1}{z^*}\right)}{A(z) \cdot A^*\left(\frac{1}{z^*}\right)} P_n(z)$$

$$P_{ARMA} = \sigma^2 \Delta t \cdot \left[\frac{\beta(f)}{\alpha(f)} \right]^2$$

$$\alpha(f) = A\left(e^{j2\pi f \Delta t}\right)$$

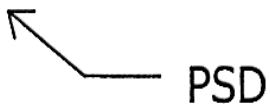
$$\beta(f) = B\left(e^{j2\pi f \Delta t}\right)$$

Caso particolare AR:

$$P_{AR} = \frac{\sigma^2 \Delta t}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_k \cdot e^{-j2\pi f_m k \Delta t} \right|^2}$$

Spettro a Massima Entropia (MEM)

Entropia $H = \int_{-f_N}^{f_N} \ln P_X(f) df$



PSD

$x \rightarrow$ processo stocastico gaussiano

si massimizza H con il vincolo

$$\int_{-f_N}^{f_N} P_X(f) e^{-j2\pi f \cdot n \cdot \Delta T} df = R_{XX}(n)$$

per $n = 0, 1, \dots, p$

cioè i $(p+1)$ lags noti devono soddisfare il teorema di Wiener-Khinchin.

Risolvendo con i moltiplicatori di Lagrange:

$$P_X(f) = \frac{\sigma^2 \Delta t}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_k \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot k \cdot \Delta t} \right|^2}$$

dove $\{a_k\}$ sono i parametri del predittore con varianza σ^2

Per processi AR (e gaussiani) si ha che:

$$P_{AR} \equiv P_{MEM}$$

per cui

$$P_{AR}(f) = \frac{\sigma^2 \Delta t}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_k \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot k \cdot \Delta t} \right|^2}$$

è anche uno spettro ME

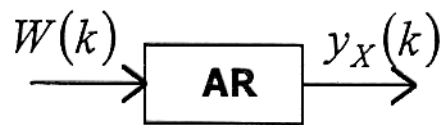
Questa condizione, sotto ipotesi generali, può anche essere estesa a spettri ARMA.

Pertanto lo spettro di un segnale (prodotto da un modello AR) può essere ricavato direttamente quando si conoscono i parametri a_k , σ^2 , etc.

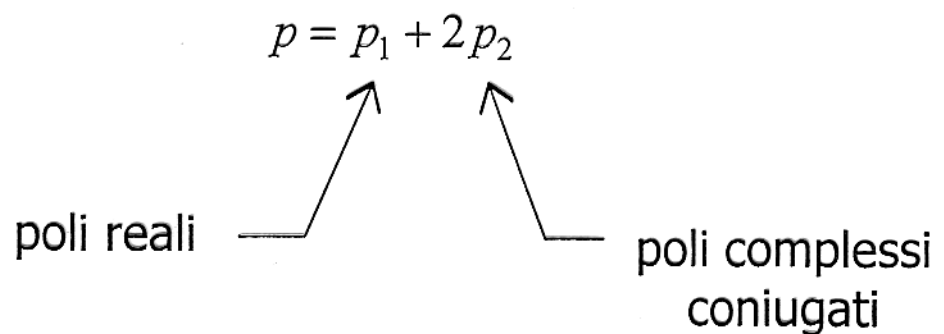
Altri metodi di stima spettrale parametrica sono : Pisarenko, Prony, Bayes, ML, etc. (si veda articolo Kay e Marple, 1981)

DECOMPOSIZIONE SPETTRALE

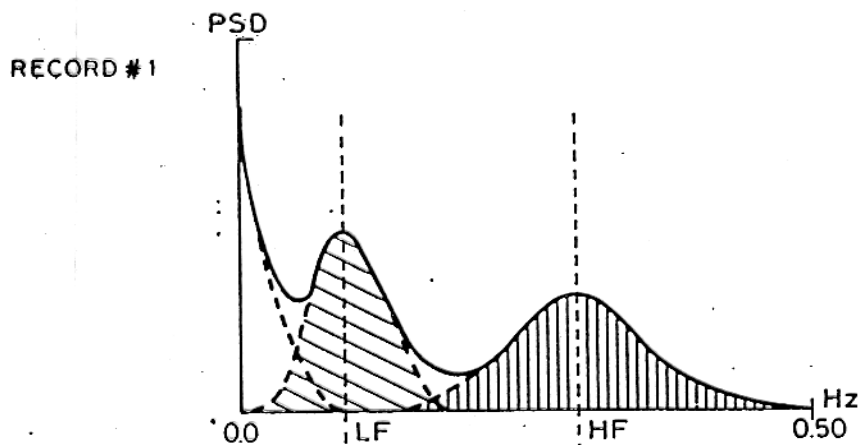
Per processi autoregressivi si ha:



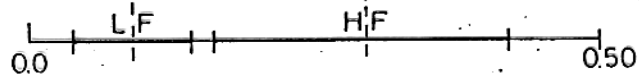
$$R_{YY} = \sum_{i=1}^{p_1} F_i \cdot e^{-\alpha_i |\tau|} + \sum_{i=1}^{p_2} e^{-\beta_i |\tau|} \cdot (G_i \cos(\omega_i \tau) - H_i \sin(\omega_i \tau))$$

$$p = p_1 + 2p_2$$


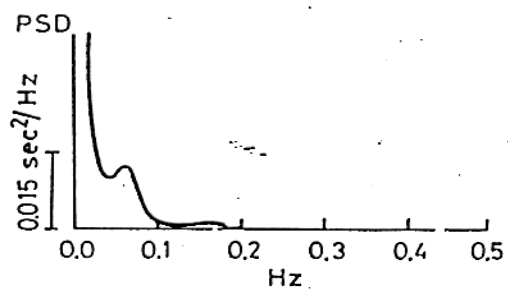
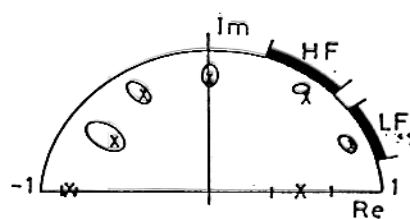
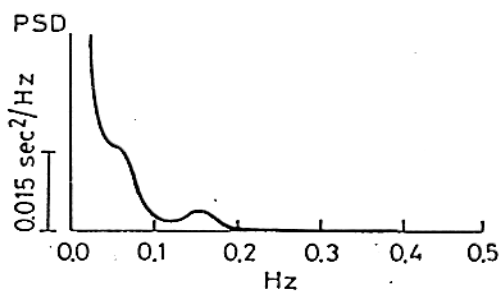
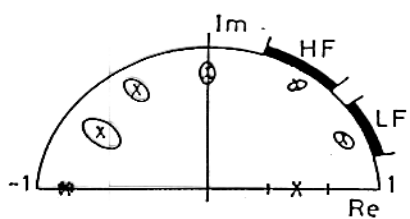
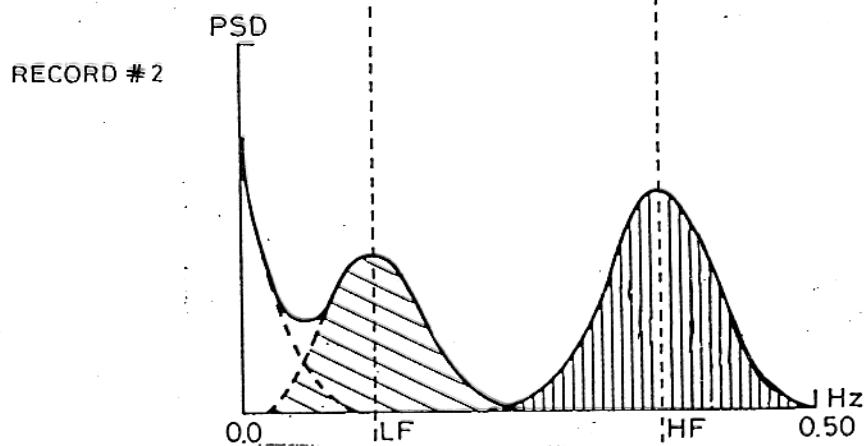
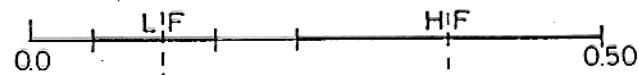
A diagram illustrating the relationship between the total order p and the number of real and complex conjugate poles. The equation $p = p_1 + 2p_2$ is shown at the top. Below it, the text "poli reali" is on the left and "poli complessi coniugati" is on the right. Two arrows point from these labels towards the equation: one from "poli reali" to p_1 and one from "poli complessi coniugati" to $2p_2$.



Ranges for
LF and HF
in record #1



Rangers for
LF and HF
in record #2



RIASSUNTO STIMA SPETTRALE

	VANTAGGI	SVANTAGGI
Metodi non parametrici	<ul style="list-style-type: none"> • non si richiede il modello di generazione del segnale • algoritmi di calcolo efficienti e veloci 	<ul style="list-style-type: none"> • risoluzione $\Rightarrow 1/T$ • $\downarrow\downarrow$ performances per $T\downarrow\downarrow$ • Dispersione potenza • richiede finestrazione
Metodi parametrici	<ul style="list-style-type: none"> • buona risoluzione anche per $T\downarrow$ • non c'è finestrazione • sotto certe ipotesi si ha uno spettro ME • è possibile una decomposizione spettrale fatta in modo automatico 	<ul style="list-style-type: none"> • si richiede che sia verificato in pratica il modello di generazione del segnale • bisogna determinare l'ordine p (cioè l'ordine ottimo) • algoritmi di calcolo pesanti (specialmente per i modelli ARMA)

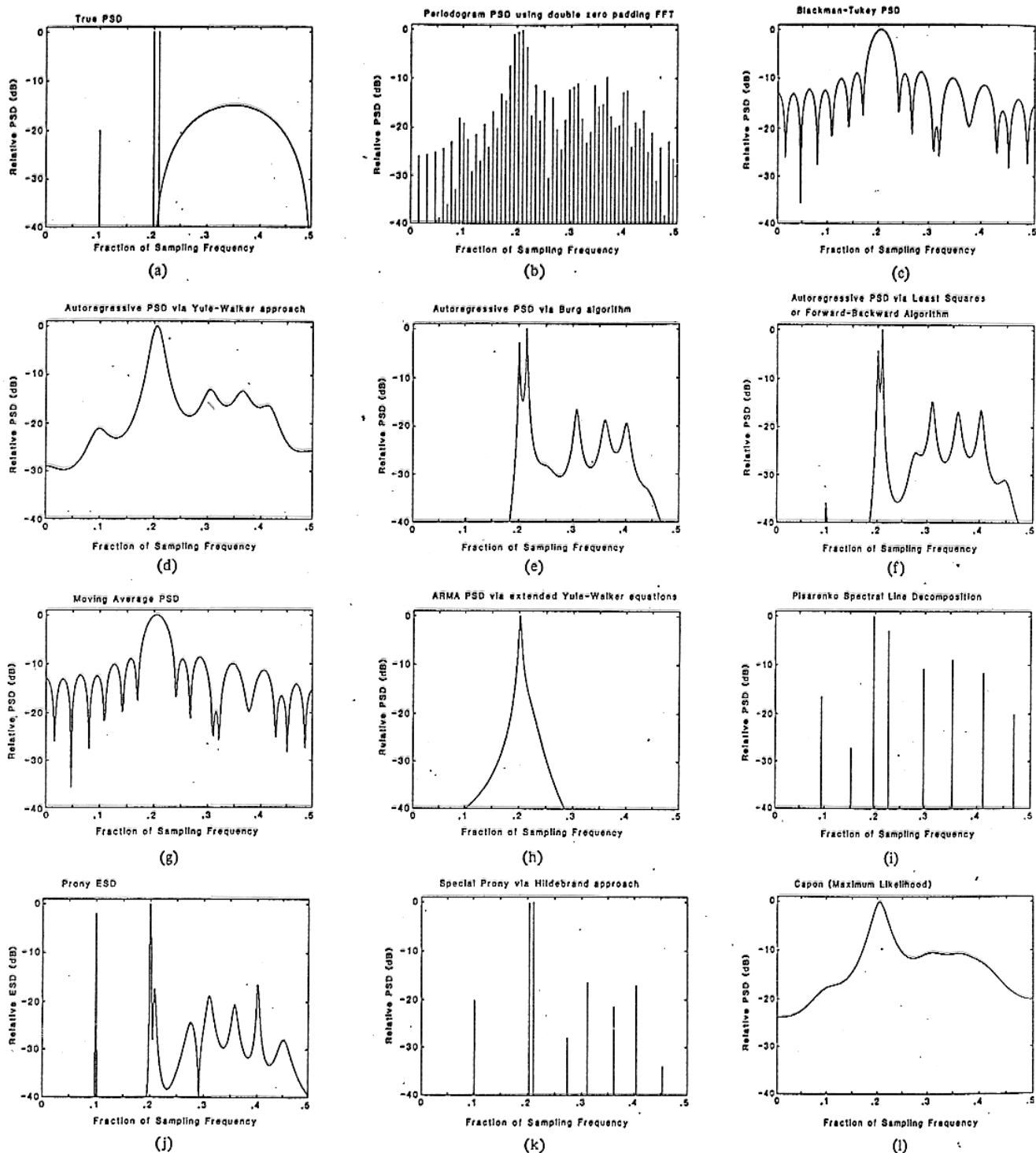


Fig. 16. Illustration of various spectra for the same 64-point sample sequence.