Trattamento delle immagini numeriche

La letteratura sul trattamento delle ***immagini numeriche*** è vasta e si è arricchita di contenuti nel tempo.

Senza pretesa di individuare categorie rigorose, possiamo elencare:

1. **analisi**: il suo scopo è l'estrazione di descrizioni quantitative degli oggetti rappresentati nell'immagine. Che oggetti contiene l'immagine? Dove sono?
2. **enhancement**: esaltazione del contrasto per facilitare la fruizione dell'immagine o successive procedure di elaborazione.
3. **ripristino di qualità**: il problema è la rimozione di degradazioni dell'immagine indotte da rumore e dal processo di formazione;

$$f(x,y) = g(x,y) * h(x,y) + \eta(x,y)$$

imm. data   imm. ideale   PSF(blurring)   rumore

4. **ricostruzione da proiezioni**: dato un insieme di misure integrali di un oggetto se ne vuole ricostruire una rappresentazione pittorica.
5. **compressione**: ha lo scopo di ridurre il numero di "voci" necessarie per rappresentare una immagine.

Classificazione delle Tecniche di trattamento

- Per ***modalità di interazione***:
  - metodi automatici;
  - metodi interattivi.
- Per ***tipo di operatore*** e estensione dell'area coinvolta:
  - puntuali;
  - locali;
  - globali.
- Per ***numero di immagini***:
  - unarie
  - duali.

Compressione

per Trasmissione e Archiviazione

- Immagine: grande mole di dati. E.g. 1024x1024 pixel → 1 Mpixel; 256 liv di grigio: 8 bit → 1 MByte.

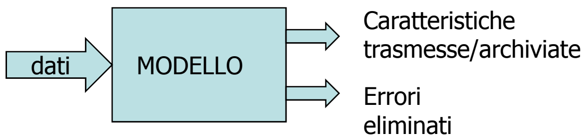
Compressione **senza perdita**

Basso fattore di compressione

Ricostruzione esatta

Unica accettata in ambito clinico

Compressione **con perdita**

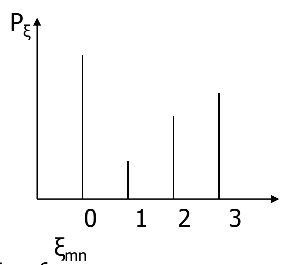


Esempio compressione senza perdita

Immagine f_{mn} → immagine differenziale (meno correlata)

$$\xi_{mn} = f_{mn} - f_{m,\, n-1}$$

Codifica di ξ_{mn} con codice di Huffman (si assegnano i valori di un codice binario)



0	0
3	1 0
2	1 1 0
1	1 1 1

P_ξ decrescente

Operazioni puntuali

Consideriamo per semplicità immagini numeriche così definite:

$$\mathbf{f}_{mn} \quad \text{con} \quad 0 \le m \le N-1 \ \text{ e } \ 0 \le n \le N-1$$

ai cui elementi (pixel) sono associati valori numerici appartenenti all' insieme finito

$$G = \{0, \ldots., 255\}$$

ovvero il valore di grigio v è rappresentato da un byte.

Corso di Elaborazione di Segnali e Immagini Biomedici – II parte

Operatori Puntuali

- Definiamo con $v=I(i,j)$ la funzione che restituisce il valore associato ad un particolare pixel.
- Una operazione puntuale genera una nuova immagine in cui il valore di ogni pixel dipende solo dal corrispondente valore dell'immagine di partenza:

$$u = O(i,j) = f[I(i,j)]$$

- Una operazione puntuale ha una complessità molto ridotta e può essere facilmente realizzata attraverso una tabella (LUT: Look Up Table) che associa ad ogni valore il risultato della funzione stessa.

ISTOGRAMMA di un'immagine

- L'istogramma è un vettore. L'i-esimo elemento dell'istogramma è il numero delle volte in cui l'i-esimo livello di grigio è presente nell'immagine (o se il vettore è normalizzato la sua frequenza).
- Da un punto di vista implementativo, data un'immagine $I(i,j)$ e il vettore istogramma $H(k)$ con $k=0,..,255$ è necessario:

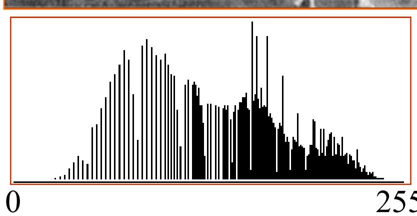
  - scandire l'immagine e per ogni pixel incrementare $H(I(i,j))$

  - normalizzare il vettore dividendolo per il prodotto righe per colonne
- Per immagini multispettrali (per esempio a colori RGB) si opera un istogramma per ogni componente.

Istogramma – operatori puntuali

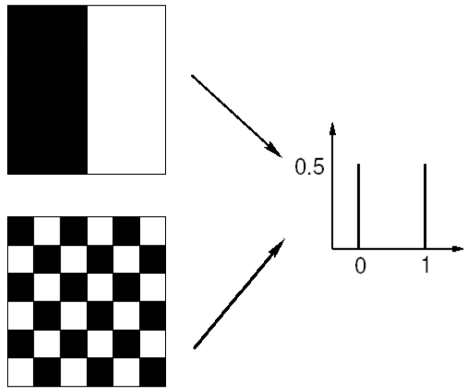
- Immagine originale

- Istogramma



Istogramma

- Ad ogni immagine corrisponde un solo istogramma, ma non è valido il viceversa.



- Le operazioni puntuali modificano in generale l’istogramma.

Operatori puntuali

Gli operatori puntuali occupano il livello più basso della scala della complessità.

Sono così chiamati perchè il loro risultato dipende solo dal valore di grigio del punto d'immagine originale, ma non dai valori di grigio di altri punti vicini.

Il valore di grigio ottenuto dopo l'applicazione dell'operatore puntuale sostituisce quello originario.

Gli operatori puntuali rappresentano trasformazioni della scala dei livelli di grigio nel domino compreso tra il nero e il bianco secondo una funzione.

Trasformazioni dei valori di grigio

Le funzioni che permettono di passare dal livello di grigio originale a quello trasformato, possono assumere forma analitica compatta, ad esempio:

- *Caratteristica lineare*: nessuna trasformazione

$$y=x$$

- *Caratteristica del tipo a radice quadrata*: la dinamica dei livelli di grigio viene compressa nella parte superiore (elementi chiari) ed espansa nella parte inferiore (elementi scuri)

$$y=\sqrt{255x}$$

- *Caratteristica quadratica*: la dinamica dei livelli di grigio viene espansa nella parte superiore e compressa in quella inferiore

$$y=\frac{x^2}{255}$$

Il concetto di Look Up Table

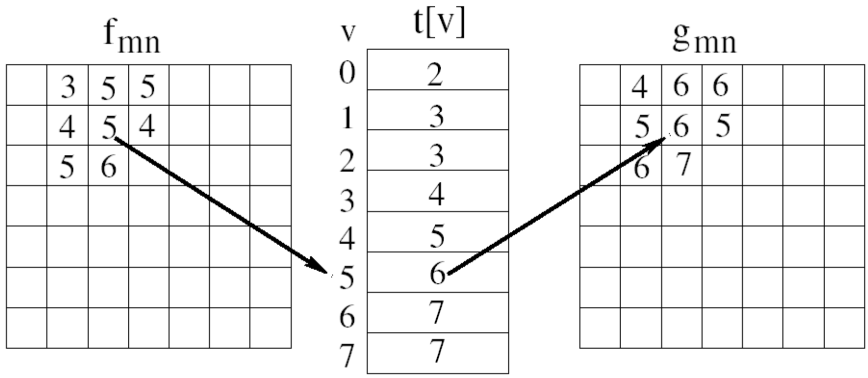


Immagine originale LUT **Immagine ottenuta** ***$g_{mn}=t(f_{mn})$***

- LUT -> funzione discreta a valori discreti (mappatura)

Operatori puntuali

Relazione **lineare**:

$$u = av+b$$

a : variazione di contrasto → allarga/restringe l'istogramma

b :variazione di luminosità → trasla l'istogramma

Relazione **potenza** $u = v^{\gamma}$

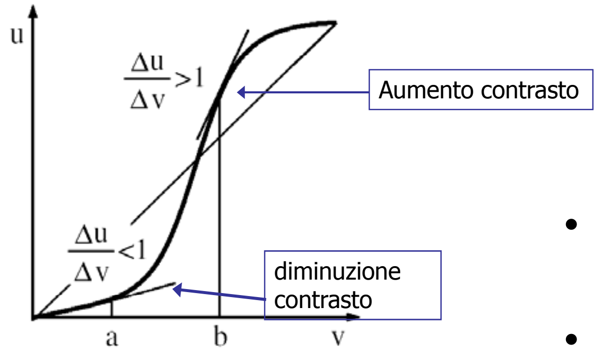
γ>1 amplifica i livelli chiari

γ<1 amplifica i livelli scuri

Operatori puntuali

Livello di grigio ottenuto

$u=t(v)$



Livello di grigio originale

- Relazione lineare:

  $u = av+b$

- Relazione potenza

  $u = v^c$

Operazione puntuale – Calcolo della **Densità ottica D**

Data un'immagine di trasmittanza

$T= \Phi_T/ \Phi_I$ (Flusso fotonico trasmesso/ FF incidente)

teoria: $0<D<\infty$

$$D= - \log T$$

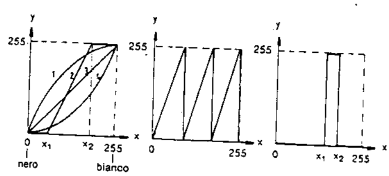
R_X: $0<D<4$

$$D = \frac{255}{\log(256)} * \log\left(\frac{256}{v+1}\right)$$

Trasformazione dei livelli di grigio

In figura è mostrato un esempio di espansione della dinamica, in cui l'intervallo tra x_1 e x_2 viene espanso sulla gamma completa:

$$
y = \begin{cases} 0 & \text{per } x < x_1 \\ \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} 255 & \text{per } x_1 \le x \le x_2 \\ 255 & \text{per } x > x_2 \end{cases}
$$



Questa operazione si rivela molto utile ai fini del miglioramento della qualità di immagini a debole contrasto, perchè essa consente di sfruttare l'intera gamma dei valori di grigio.

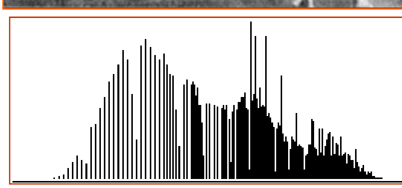
Normalmente, infatti, non viene sfruttata l'intera gamma dei livelli di grigio a causa dell'illuminazione della scena e alla regolazione dell'apparecchiatura di acquisizione.

Utilizzando una funzione come quella rappresentata in figura 2.1c, si parte dalla assunzione che tutti i punti con valore di grigio compreso tra vengono considerati come punti dell'oggetto, mentre i rimanenti punti come sfondo.

Istogramma – operatori puntuali

- Immagine originale

- Istogramma



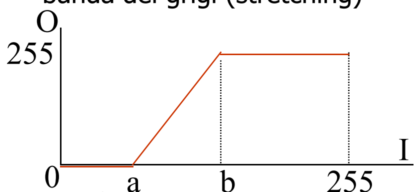
0 255

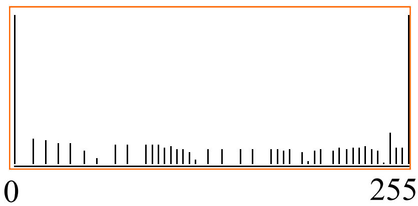
Istogramma – operatori puntuali

- Applicando l'intera dinamica [0, 255] nell'intervallo [a, b]:
  - per $I(i, j)<a \quad O(i, j)=0$
  - per $I(i, j)>b \quad O(i, j)=255$
  - per $a \le I(i, j) \le b$:

$$O(i,j) = 255 \, \frac{I(i,j) - a}{b-a}$$

si evidenzia con il massimo di contrasto una frazione della banda dei grigi (stretching)

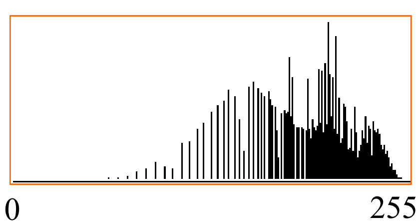




Istogramma – operatori puntuali

- Caratteristiche non lineari:

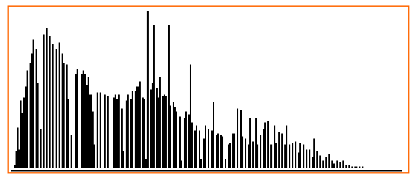
$$O(i,j) = \sqrt{255 \;\; I(i,j)}$$



Istogramma – operatori puntuali

- Caratteristiche non lineari:

$$O(i,j) = \frac{I(i,j)^2}{255}$$

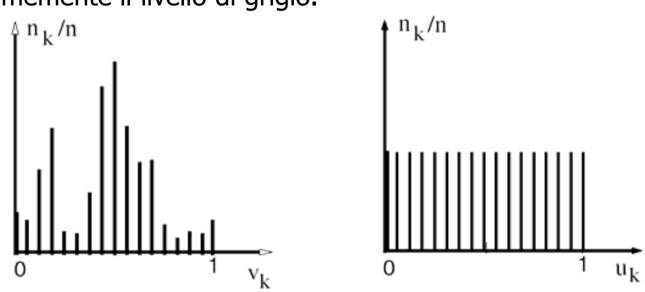


0 255

Corso di Elaborazione di Segnali e Immagini Biomedici – II parte

Equalizzazione dell'istogramma

- Consideriamo i livelli di grigio come variabili casuali nell'intervallo normalizzato [0,1], in un dominio continuo, a cui è associata una densità di probabilità.
- Quando effettuiamo un trasformazione u=t(v) avremo rispettivamente $p_v(v)$ e $p_u(u)$.
- Vogliamo realizzare una trasformazione che distribuisca uniformemente il livello di grigio.



a) b)

Equalizzazione dell'istogramma

Mentre l'operazione di espansione si limita a "stirare" la funzione de densità di distribuzione dei livelli di grigio (*istogramma*), senza mutarne la forma, l'equalizzazione ha lo scopo di mutarla in modo tale, da ottenere una distribuzione a densità costante, cioè un istogramma piatto.

Anche in questo caso lo scopo è quello di migliorare la qualità delle immagini a basso contrasto.

(ATTENZ: non sempre l'equalizzazione migliora la qualità dell'immagine. Ad esempio in un'immagine con un oggetto chiaro su sfondo scuro - istogramma bimodale - esalta i livelli intermedi di grigio creando dei falsi contorni)

Per determinare la caratteristica della funzione di trasformazione

$$y(x)$$

necessaria per ottenere l'equalizzazione, si consideri l'istogramma dei livelli di grigio dell'immagine originaria

$$h(x)$$

Quello che si vuole ottenere è un istogramma finale costante

$$g(y)=C$$

Imponendo la condizione che aree elementari dell'istogramma originario si trasformino in aree corrispondenti dell'istogramma risultante, si ottiene:

$$h(x)dx=g(y)dy=Cdy$$

Da questa si ricava che la funzione di trasformazione è

$$y(x) = \frac{1}{C}\int_0^x h(x)dx$$

Equalizzazione dell'istogramma

- Si consideri la trasformazione puntuale:

$$u = t(v) = \int_0^v p_v(w)dw;\ \ 0 \le \mathrm{v} \le 1;\ \ 0 \le \mathrm{u} \le 1$$

- Densità di probabilità dei livelli in uscita:

$$\boxed{p_u(u)} = p_v(v)\left|\frac{dv}{du}\right| = p_v(v)\left|\frac{1}{p_v(v)}\right| \boxed{=1;} \qquad \text{con } \mathrm{v}=\mathrm{t}^{-1}(u)$$

- Nel caso discreto $p_v(v) = n_k/n$ con $k = 0, \ldots.. , L\text{-}1.$

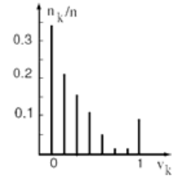
  La trasformazione che genera un istogramma uniforme sarà quindi:

$$u_k = t(v_k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{n_i}{n} = \sum_{i=0}^{k} p_{v_i} \quad \text{con } k = 0 \ldots. L-1$$

Equalizzazione dell'istogramma: esempio numerico

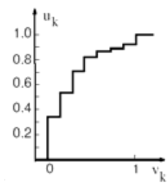
- Si consideri un'immagine 64x64 (n=4096) a 8 livelli di grigio:

v_k	0/7= 0	1/7= 0.14	2/7= 0.29	3/7= 0.43	4/7= 0.57	5/7= 0.71	6/7= 0.86	7/7= 1
n_k	1400	850	650	450	200	100	80	366
n_k/n	0.34	0.21	0.16	0.11	0.05	0.02	0.02	0.09



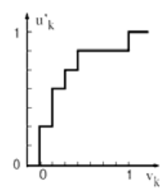
- Livelli in uscita:funzione di distribuzione istogramma:

u_0=0.34
u_1=0.34+0.21=0.55
u_2=0.55+0.16=0.71
u_3=0.71+0.11=0.82
u_4=…=0.87
u_5=…=0.89
u_6=…=0.91
u_7=…=1

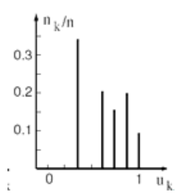


Equalizzazione dell'istogramma: esempio numerico

- Assegnazione dei livelli trasformati ai più vicini livelli possibili:



- Risultato:

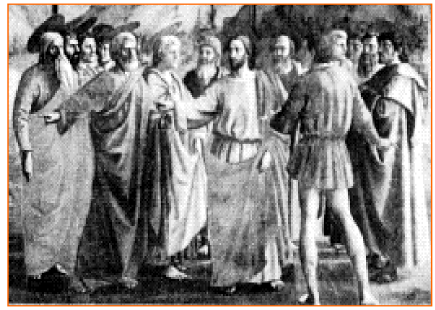


u_k	2/7	4/7	5/7	6/7	7/7
n_k	1400	850	650	450+200+ 100+80	366
n_k/n	0.34	0.21	0.16	0.20	0.09

Esempio:

- nel processo di equalizzazione si concentrano i livelli in funzione della frequenza relativa:

$$O(i,j) = 255 \frac{\sum_{s=0}^{I(i,j)} h(s)}{\sum_{s=0}^{255} h(s)}$$



0 255

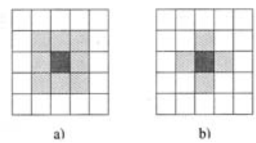
Esempio:

a)

b)

Operazioni locali

- Le operazioni locali trasformano un'immagine $\boldsymbol{f}_{mn}$ in una $\boldsymbol{g}_{mn}$ in modo che il valore di ogni pixel *m,n* di $\boldsymbol{g}_{mn}$ sia determinato da un intorno $\boldsymbol{I}(m,n)$ del corrispondente pixel di $\boldsymbol{f}_{mn}$.
- Per definire un intorno si deve far riferimento al concetto di ***vicinanza.***



Intorni 3 × 3 in connessione a) 4 e b) 8

Dipendenza dai pixel connessi

Automi cellulari – game of life

- Operazioni locali tipiche sono le operazioni di **media mobile**, operazioni morfologiche, operazioni differenziali, etc..

Convoluzione

- la convoluzione è un **operatore lineare**;
- si applica una convoluzione quando all'immagine *f* (*f(x,y)* nel continuo e *f(i,j)* nel discreto) si applica un filtro rappresentato da una maschera *W*:

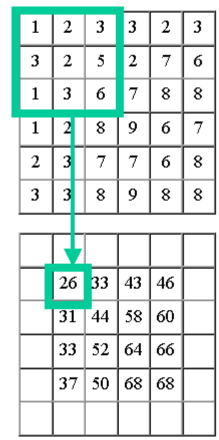
$$g(x_0,y_0) = \iint W(x_0-x,\, y_0-y)\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$g(m,n) = \Sigma\Sigma\, W(m-i,\, n-j)\, f(i,j)$$

- Concettualmente un operatore locale è equivalente ad un filtro FIR per un segnale numerico monodimensionale.

Convoluzione

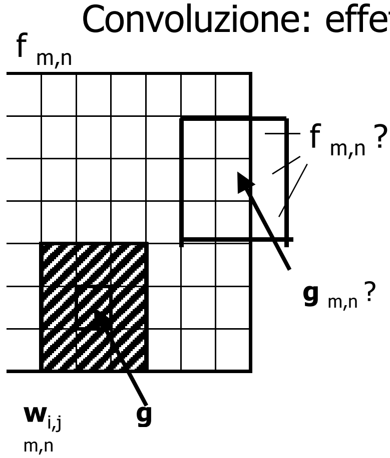
- La convoluzione nel discreto avviene su un supporto limitato nello spazio (template o maschera)
- Può essere considerata una finestra (nel caso illustrato 3x3) che si muove sull'immagine



$$\mathbf{g}_{m,n} = \sum_{i=-\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} \sum_{j=-\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} \mathbf{f}_{m+i,n+j}\, \mathbf{w}_{i+\frac{k-1}{2},\, j+\frac{k-1}{2}}$$

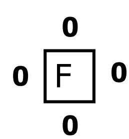
maschera k x k

Convoluzione: effetti di bordo immagine

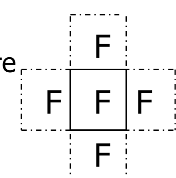


Che valori imporre fuori dai bordi?

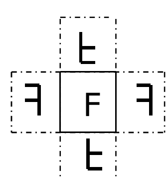
1. Zero padding



2. Convoluzione circolare (equivale a moltiplicare le DFT_2 (FFT_2))



3. Estensione simmetrica al bordo (empirico)



Convoluzione (scomposizione)

- La convoluzione è una operazione pesante dal punto di vista computazionale, ad esempio con la maschera:

1	4	6	4	1
4	16	24	16	4
6	24	36	24	6
4	16	24	16	4
1	4	6	4	1

per eseguire una convoluzione occorrono 25 moltiplicazioni per ogni pixel; spesso maschere complesse possono essere scomposte in più maschere semplici.

- La convoluzione precedente può essere scomposta in due convoluzioni successive con le due maschere:

1	4	6	4	1

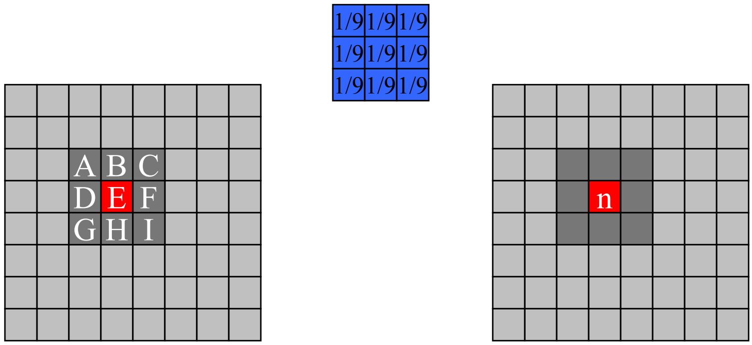
1
4
6
4
1

- in questo caso sono sufficienti 10 (5+5) moltiplicazioni per pixel

Operazioni locali mediante convoluzione (medie mobili)

- Si riconducono a filtraggi spaziali
  - **Smoothing** (filtro passa-basso)
    - L'effetto e' di ridurre il rumore ma di sfuocare l'immagine
  - **Sharpening** (filtro passa-alto)
    - Ottenuto attraverso **operatori differenziali** di vario ordine
- Utilizzano maschere diverse

Esempio di filtro di smoothing: il filtro medio



n = 1/9*A+1/9*B+ ...+1/9*I

Filtri di sharpening

- sharpen=affilare, ossia rendere piu' evidenti eventuali picchi.
- Lo scopo di un filtro di sharpen e' quello di evidenziare le alte frequenze ossia i dettagli

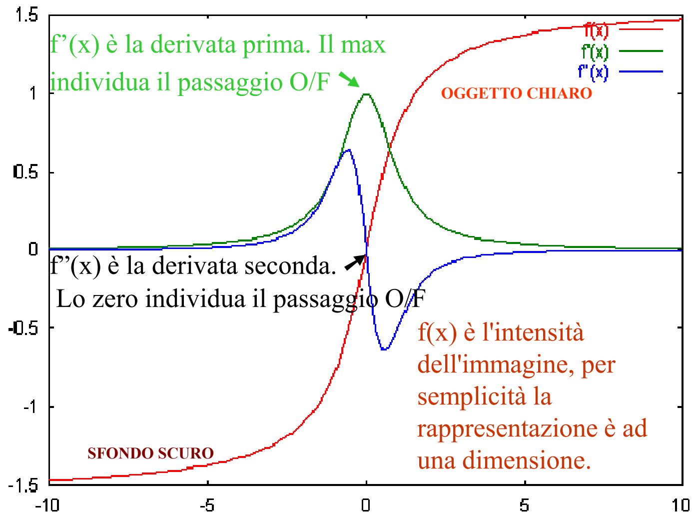
0	-1	0
-1	5	-1
0	-1	0

esempio di maschera di sharpen

Operatori Differenziali

- La ricerca di discontinuità (cambiamenti bruschi di valore) può essere eseguita sia direttamente sui livelli di grigio che su descrittori di trama, cromatici, di moto, di distanza, ecc
- Il problema viene affrontato tramite l'analisi della derivata
- Nel continuo una regione di transizione è evidenziata dall'andamento della derivata prima.
- Dovendo scegliere un punto preciso si può prendere il massimo (minimo) della derivata prima o lo zero (punto di attraversamento dell'asse x) della derivata seconda.

Operatori Differenziali



Operatori Differenziali

- La derivata può essere approssimata tramite una differenza:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

- Lo stesso approccio vale per la derivata seconda:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

- In uno spazio bidimensionale:
  - operatore differenziale del primo ordine: ***gradiente*** $\nabla f(x,y)$
  - operatore differenziale del secondo ordine: ***Laplaciano*** $\nabla^2 f(x,y)$

Approssimazioni del Gradiente

- Il gradiente è un vettore (ha due componenti).

$$\nabla \mathbf{f(x,y)} = \begin{pmatrix} \delta f / \delta x \\ \delta f / \delta y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \Delta x f \\ \Delta y f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f_{ij} - f_{i-1,j} \\ f_{ij} - f_{i,j-1} \end{bmatrix}$$

- Vettore diretto secondo il max accrescimento livelli grigio

$$\boxed{|\nabla f| = \sqrt{\left((\Delta_x f)^2 + (\Delta_y f)^2\right)} \approx |\Delta_x f| + |\Delta_y f|}$$

- **Grande** in corrispondenza di variazioni brusche del grigio (CONTORNI e RUMORE)
- Realizzato con maschere a somma nulla; l'applicazione a una regione uniforme deve dare risultato zero (non c'è variazione).
- Gli operatori proposti hanno una maschera di dimensioni limitate a 2x2 e 3x3, per ognuna delle due componenti.

Rilevamento di contorni

- **GRADIENTE :** $$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

- **approssimazioni:**
  - $G_x \approx I[i,j+1]-I[i,j]$
  - $G_y \approx I[i+1,j]-I[i,j]$

- stima del gradiente tramite maschere:
  - Algoritmo di Sobel

$$S_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Approssimazioni del Laplaciano

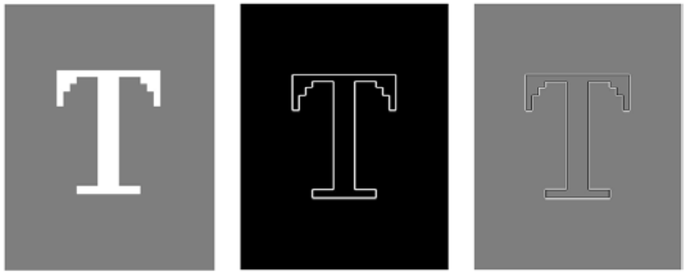
- Operatore differenziale approssimabile mediante differenze finite:

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx$$
$$\approx (f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}) + (f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}) =$$
$$= f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j}$$

$$w_{i,j} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

- immagine – Laplaciano → effetto passa alto

Operatori differenziali: esaltazione dei contorni



$\mathbf{f}_{m,n}$ gradiente $|\nabla \mathbf{f}_{m,n}|$ Laplaciano $\nabla^2\mathbf{f}_{m,n}$

Immagini degradate: disturbo uniforme

Immagini degradate: disturbo salt & pepper

Rimozione del rumore: filtro del valor medio

- Si assegna ad ogni pixel il valor medio calcolato sull'intorno 3x3 del punto stesso.
- ESEMPIO: dato l'intorno

3	6	8
3	4	2
5	8	3

al pixel centrale sarà assegnato il nuovo valore (3+6+8+3+4+2+5+8+3)/9 = **4.67** che verrà poi troncato all'intero inferiore.

Filtro del valor medio: disturbo uniforme



Immagine rumorosa Immagine filtrata Seconda iterazione

Corso di Elaborazione di Segnali e Immagini Biomedici – II parte

Filtro del valor medio: disturbo uniforme



Immagine rumorosa Immagine filtrata Seconda iterazione

Filtro del valor medio: salt & pepper

Immagine rumorosa

Immagine filtrata

Seconda iterazione

Filtro del valor medio: salt & pepper

Immagine rumorosa

Immagine filtrata

Seconda iterazione

Rimozione del rumore: filtro mediano

- Il filtro mediano estrae i valori dei pixel in un intorno (di solito 3x3) del pixel in esame, li ordina in un vettore e assegna al pixel il valore mediano di tale vettore
- è un caso particolare dei rank filters in cui si assegna la media su un certo numero di valori centrali.
- ESEMPIO: dato l'intorno

3	6	8
3	4	2
5	8	3

si ottiene un vettore di valori così composto

2 3 3 3 4 5 6 8 8

Estraendone solo il valore mediano il pixel avrà ancora valore pari a 4; calcolando una media su 3 valori centrali si ottiene ancora 4; mediando su 5 valori si ottiene 4,2.

Filtro mediano: disturbo uniforme

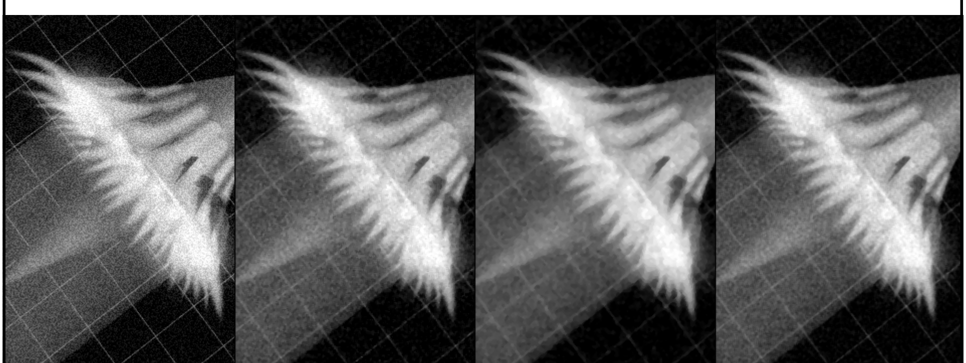


Immagine rumorosa Filtrata 2 iterazioni Media sui 3 centrali

Filtro mediano: disturbo uniforme

Immagine rumorosa Filtrata 2 iterazioni Media sui 3 centrali

Filtro mediano: salt & pepper

Immagine rumorosa Filtrata 2 iterazioni Media sui 3 centrali

Filtro mediano: salt & pepper

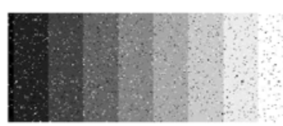



Immagine rumorosa | Filtrata | 2 iterazioni | Media sui 3 centrali

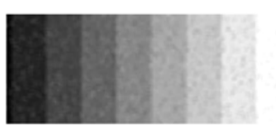
Corso di Elaborazione di Segnali e Immagini Biomedici – II parte

Filtro a media mobile e filtro mediano

a) **immagine**



b) **Immagine + salt & pepper noise**



c) **Filtro Media mobile P.basso**

d) **Filtro Mediano Non Lineare**

Operazioni geometriche

- Trasformazioni del dominio di definizione dell'immagine

  g(x,y) = f(x',y') = f(a(x,y), b(x,y))

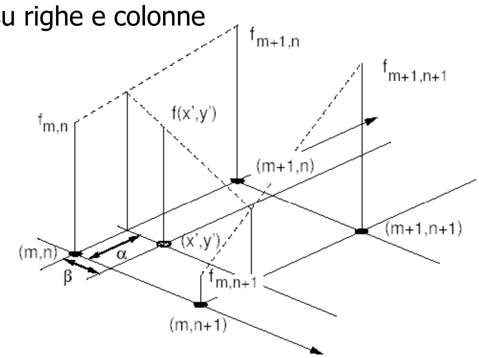
  nuova imm. vecchia imm.

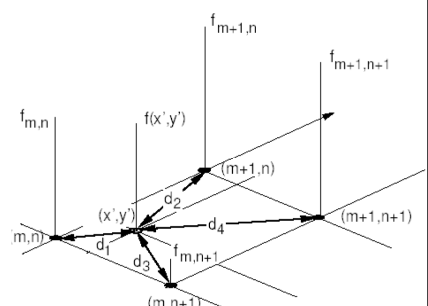
- Utilizzate per rototraslazioni, riduzioni, ingrandimento (zoom)
- Fondamentali per la co-registrazione di due immagini
- I valori dell'immagine (oggetto discreto!) devono essere calcolati in posizioni diverse dal quelle del reticolo di campionamento -> INTERPOLAZIONE

Interpolazione

a) ordine zero = nearest neighbour

c) bilineare = lineare su righe e colonne





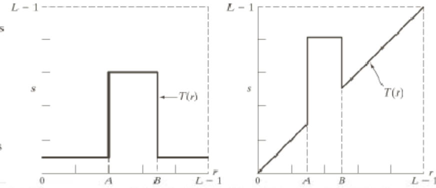
b) lineare = media pesata 1/d

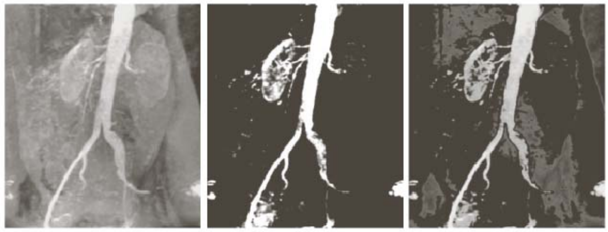
d) utilizzo di splines

Esempio immagine angiografica

a b

FIGURE 3.11 (a) This transformation highlights intensity range [A, B] and reduces all other intensities to a lower level. (b) This transformation highlights range [A, B] and preserves all other intensity levels.





a b c

FIGURE 3.12 (a) Aortic angiogram. (b) Result of using a slicing transformation of the type illustrated in Fig. 3.11(a), with the range of intensities of interest selected in the upper end of the gray scale. (c) Result of using the transformation in Fig. 3.11(b), with the selected area set to black, so that grays in the area of the blood vessels and kidneys were preserved. (Original image courtesy of Dr. Thomas R. Gest, University of Michigan Medical School.)