

## ESERCITAZIONE 1 → RIPASSO FILTRI NUMERICI

L'operazione di filtraggio digitale consiste nel modificare le frequenze caratteristiche di un certo segnale. Gli obiettivi per i quali modifico le componenti in frequenza del segnale possono essere molteplici:

- eliminare o ridurre il rumore;
- amplificare una caratteristica del segnale o evidenziare una particolare morfologia;
- limitare il segnale in banda.

### Sistemi lineari tempo invarianti

Un sistema è definito da una funzione  $T$  che trasforma una sequenza in input  $x[n]$  in una sequenza di uscita  $y[n]$ ; tale sistema può essere definito lineare, se obbedisce al principio di sovrapposizione degli effetti: ad esempio, se la funzione è  $T = x^2$ , so già che il sistema NON sarà lineare.

Inoltre è possibile definire il sistema come tempo invariante se possiede proprietà che non variano nel tempo: in altre parole non importa l'istante in cui valuto il segnale, poiché se traslo l'ingresso nel tempo l'uscita non cambia.

Un sistema che soddisfi entrambe queste proprietà viene definito come sistema lineare tempo invariante o LTI.

Nei sistemi lineari tempo invarianti posso scrivere il segnale  $x[n]$  come somma di impulsi: questo è utile, poiché se è nota la risposta all'impulso del filtro, ed è noto l'ingresso  $x[n]$ , è possibile conoscere tutte le uscite del filtro in risposta a quel determinato ingresso eseguendo una somma di convoluzione tra l'ingresso e la risposta all'impulso del sistema. Possiamo quindi concludere che un sistema LTI può essere descritto semplicemente dalla sua risposta all'impulso  $h[n]$ .

Diverse sono le proprietà della somma di convoluzione:

- Se il segnale in ingresso  $x[n]$  possiede  $N$  campione, e la risposta all'impulso del sistema  $h[n]$  possiede  $M$  campioni, allora il risultato della somma di convoluzione è lungo  $N \cdot (M-1)$  campioni.
- Proprietà commutativa.
- Proprietà associativa.
- Proprietà distributiva.

### Stabilità

Un sistema è definito stabile se la risposta ad un ingresso limitato in ampiezza è a sua volta limitata in ampiezza. Condizione necessaria ma NON sufficiente affinché un sistema sia stabile è che la sommatoria delle risposte agli impulsi in modulo sia  $< \infty$ .

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

### Causalità

Un sistema causale è un sistema in cui l'uscita dipende solo dagli ingressi passati. Se questa condizione non viene verificata il sistema si dice anticausale

### Filtri FIR e filtri IIR

Se  $h[n]$  è una sequenza di durata infinita, il filtro corrispondente viene definito filtro IIR, ovvero filtro con risposta all'impulso infinita.

Se invece  $h[n]$  è una sequenza finita si parla di filtri FIR cioè filtri con risposta all'impulso finita.

Una forma molto generale di filtro digitale può essere ottenuta dal cosiddetto modello ARMA, così chiamato perché possiede una parte a media mobile (moving average) e una parte auto regressiva:

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a[k]y[n-k] + \sum_{k=0}^M b[k]x[n-k] \quad \rightarrow \text{Equazione modello ARMA}$$

$x[n]$  = input in ingresso al filtro  
 $y[n]$  = output del filtro

La funzione di trasferimento che corrisponde alla precedente equazione è la seguente funzione razionale:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b[k]z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a[k]z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Fatto riferimento sempre alla precedente equazione:

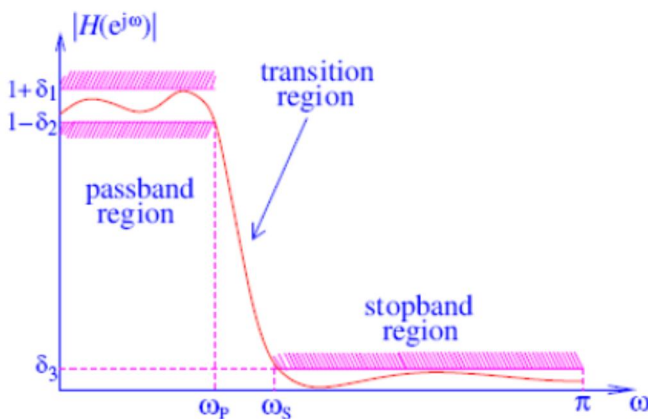
- Se  $N = 0$ , i coefficienti  $a$  sono pari a 0, e dunque il filtro sarà di tipo FIR (non ricorsivo).
- Se  $N > 0$ , il filtro è di tipo IIR.

L'equazione del modello ARMA è molto comoda, perché ci permette di progettare un filtro IIR utilizzando un numero finito di coefficienti del filtro.

Come sappiamo, esistono diversi tipi di filtri ideali:

- Passa basso
- Passa alto
- Passa banda
- Arresta banda

In realtà, i filtri reali si discostano da questi a causa di particolari caratteristiche:



La quantità  $\max \{\delta_1, \delta_2\}$  viene definita come ripple della banda passante mentre la quantità  $\delta_3$  viene definita attenuazione della banda arrestata.

Questi parametri sono quelli che definiscono, assieme alla banda di transizione, le caratteristiche di un filtro reale, e che permettono quindi il confronto tra diversi filtri reali.

La fase e la trasmissione senza distorsioni

In molte applicazioni che riguardano i filtri, molto importante è guardare il modulo, ma una certa importanza può essere data anche alla fase.

Se un segnale viene trasmesso attraverso un filtro, si dice che il filtro fornisce una trasmissione priva di distorsione se il segnale in uscita è una replica di quello in ingresso anche se traslato e scalato.

Sono due le condizioni per garantire una trasmissione priva di distorsione:

- Il sistema deve amplificare o attenuare ciascuna frequenza in maniera uniforme.
- Il sistema deve ritardare ogni componente in frequenza della stessa quantità discreta di tempo, cioè la fase deve essere lineare.

È importante sottolineare che filtri che posseggano una risposta all'impulso simmetrica hanno una fase lineare: nota che questa è una condizione sufficiente ma NON necessaria, cioè filtri con una risposta all'impulso asimmetrica possono comunque avere fase lineare.

#### Implementazione dei filtri FIR

I vantaggi principali dei filtri FIR consistono nel fatto che essi sono sempre stabili, e che possono essere facilmente realizzati a fase lineare (progettando i coefficienti simmetrici).

Il metodo per realizzare i filtri prevede diversi passaggi:

- Scelta di una classe di filtri ideali da cui partire (passa alto- passa basso ecc..)
- Scelta delle caratteristiche della fase del filtro
- Calcolare lo spettro del filtro
- Effettuare un troncamento della risposta all'impulso applicando una finestra di tipo rettangolare.

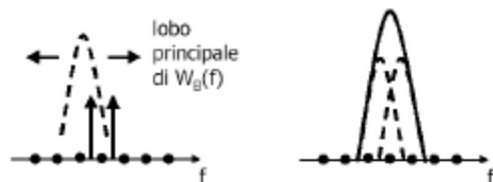
Quello che noto è che , all'aumentare del numero dei coefficienti del filtro, mi avvicino sempre di più alla risposta del filtro ideale; tuttavia, l'utilizzo di una finestra rettangolare implica la presenza di ripple che non si riescono ad eliminare.

Per questo è possibile utilizzare delle finestre di troncamento differenti, come quella triangolare detta finestra di Bartlett.

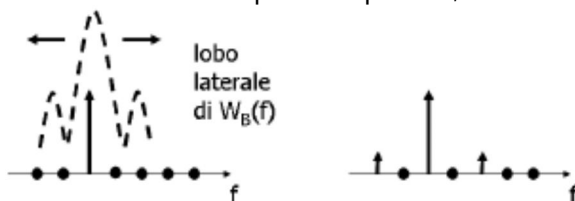
#### Quali sono i problemi che possono nascere da una scelta sbagliata del filtro?

Sono due i principali problemi che possiamo mettere in evidenza:

1. Spectral Leakage → due distinte componenti spettrali possono essere fuse in un unico picco, cioè la risoluzione spettrale peggiora; questo problema è causato da una lobo principale della finestra scelta troppo largo.



2. Presenza di false componenti spettrali, causata dalla presenza di lobi laterali nella finestra scelta.



Scegliendo un'appropriata finestra è possibile ridurre questi effetti: una finestra ideale dovrebbe possedere un lobo principale stretto e, allo stesso tempo, lobi laterali di ampiezza limitata.

Tuttavia queste due richieste sono in contrapposizione tra loro: infatti, se privilegio uno dei due aspetti pago in termini dell'altro.

## Reti neurali

Il loro sviluppo è iniziato per implementare un'architettura in grado di rappresentare ciò che succede nel cervello umano. Dato che la risposta di un circuito elettronico è di diversi ordini di grandezza più veloce ( $10^{-9}$ s nei circuiti,  $10^{-3}$ s nell'uomo), nasce spontaneo chiedersi come mai il cervello umano sia più efficiente: questo è possibile poiché le connessioni dei neuroni nell'uomo variano a seconda dell'esperienza (è in grado di apprendere).

Inoltre, i collegamenti tra neuroni del cervello sono quasi tutti in parallelo.

### Single-Input Neuron

Il modello di neurone più semplice che si può considerare è un neurone single input – single output (SISO):

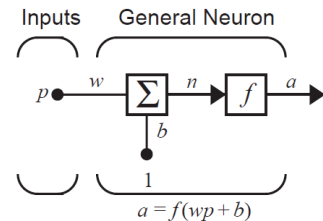
Dove:  $w$  = forza della sinapsi

$b$  = bias

$a$  = segnale sull'assone

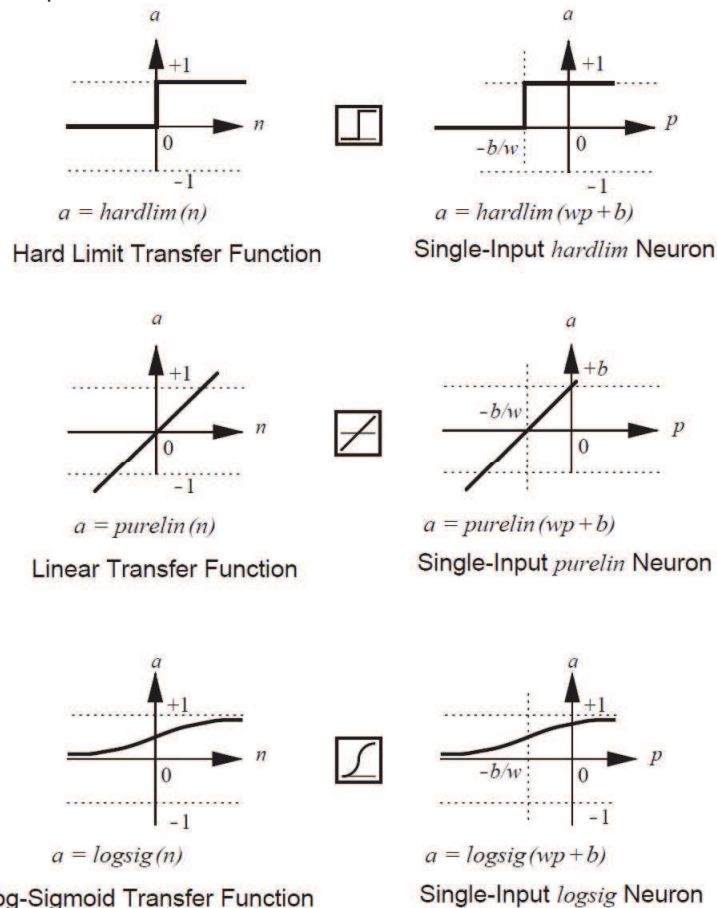
$f$  = funzione di trasferimento (è ciò che fa variare il segnale sull'assone)

$\Sigma + f$  = corpo cellulare



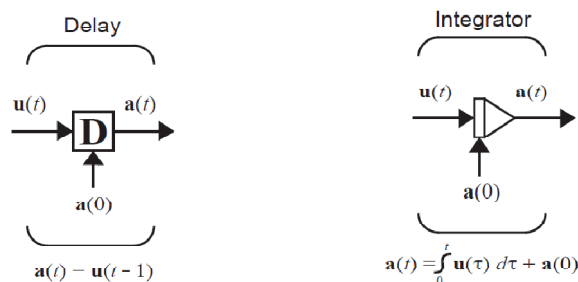
### Funzioni di trasferimento

È quindi possibile classificare le possibili funzioni di trasferimento in:



### Ritardatori ed integratori

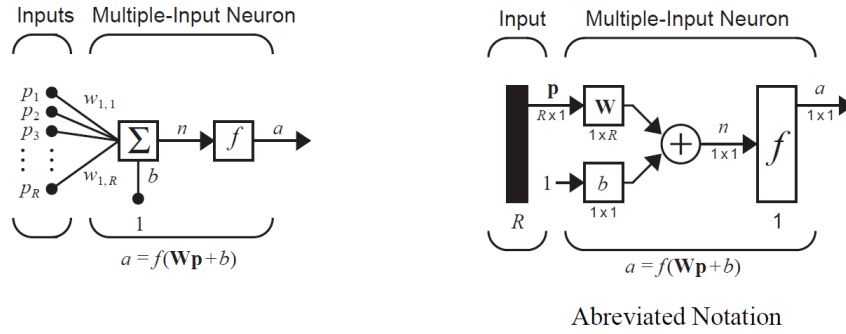
Sono possibili altri due operatori:



Il ritardatore posticipa di uno step il valore in ingresso (aggiornato a step discreti).

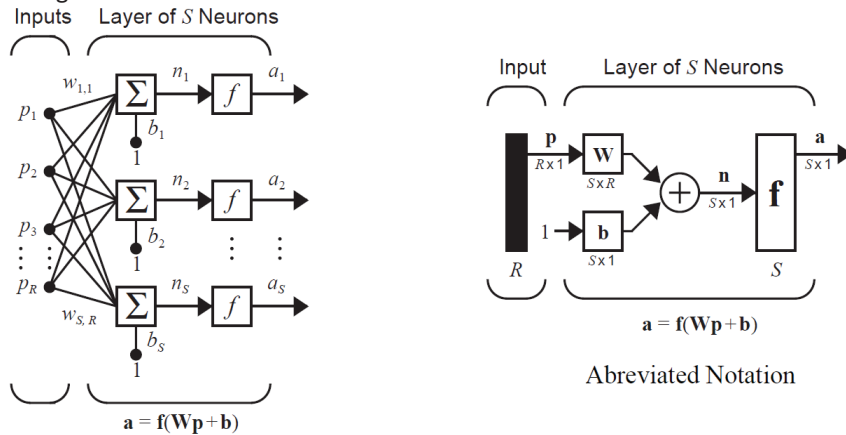
## Multiple-Input Neuron

Sono possibili anche neuroni ad ingressi multipli, rappresentabili come:



## Layer of Neurons

Nel caso di più neuroni a più ingressi è possibile una rappresentazione matriciale ( $W_{ij}$ ) per i pesi, dove  $i$  identifica il neurone e  $j$  identifica l'ingresso.

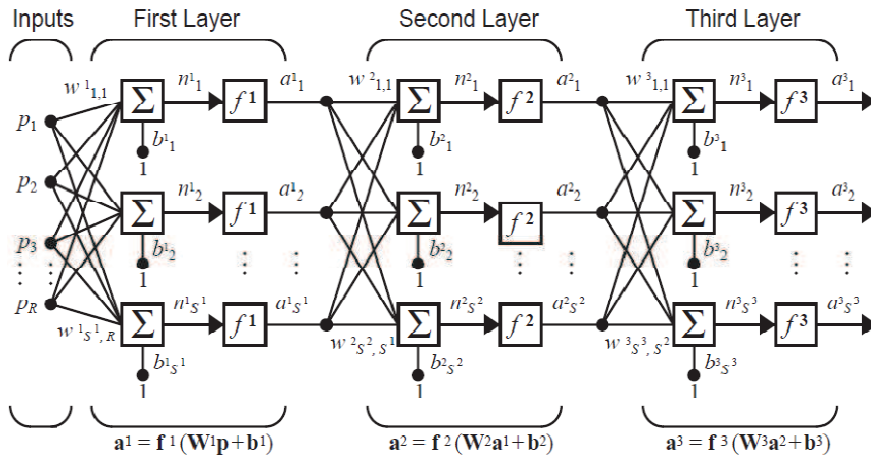


Nel disegno i neuroni sono rappresentati tutti con la stessa funzione di trasferimento, ma questa, ovviamente potrebbe anche variare. Dove:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \dots & w_{1,R} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \dots & w_{2,R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{S,1} & w_{S,2} & \dots & w_{S,R} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_R \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_S \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_S \end{bmatrix}$$

## Multilayer Network

Nel caso di una rete multilivello:

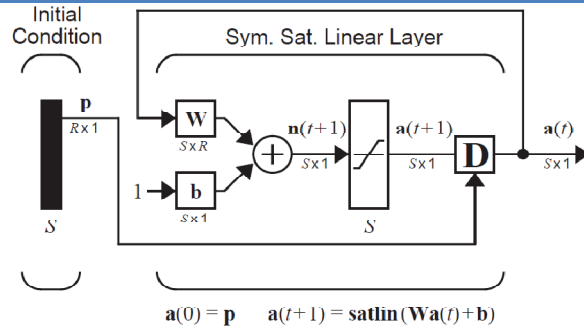


Conoscendo quindi  $a^1$  ed  $a^2$  è possibile calcolare  $a^3$  come:

Se venissero espressi in notazione abbreviata il primo ed il secondo livello sarebbero chiamati **Hidden Layers** (livelli nascosti), mentre il terzo (più esterno) sarebbe detto **Output Layer**.

$$\begin{cases} \mathbf{a}^1 = f^1(\mathbf{W}^1 \mathbf{p} + \mathbf{b}^1) \\ \mathbf{a}^2 = f^2(\mathbf{W}^2 [\mathbf{f}^1(\mathbf{W}^1 \mathbf{p} + \mathbf{b}^1)] + \mathbf{b}^2) \\ \mathbf{a}^3 = f^3(\mathbf{W}^3 \{ \mathbf{f}^2(\mathbf{W}^2 [\mathbf{f}^1(\mathbf{W}^1 \mathbf{p} + \mathbf{b}^1)] + \mathbf{b}^2) \} + \mathbf{b}^3) \end{cases}$$

## Recurrent Network



La caratteristica fondamentale delle reti ricorrenti è che sono caratterizzate dalla presenza di un feedback.

## Apple/Banana Sorter

Questo è un primo esempio di **pattern recognition**, di fatti presenta un sensore in grado di riconoscere tre caratteristiche fondamentali: forma / peso / consistenza. A seconda di queste caratteristiche trarrà delle condizioni sul tipo di frutto analizzato.

In questo caso  $p$  è il vettore di misura (**prototipo**) e può essere scritto nella forma:

$$p = \begin{bmatrix} \text{Shape: } \{1 : \text{round} ; -1 : \text{elliptical}\} \\ \text{Texture: } \{1 : \text{smooth} ; -1 : \text{rough}\} \\ \text{Weight: } \{1 : > 1 \text{ lb.} ; -1 : < 1 \text{ lb.}\} \end{bmatrix}$$

Prototype Banana

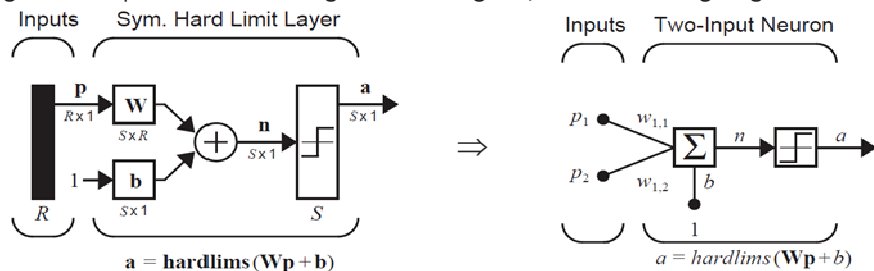
$$p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Prototype Apple

$$p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

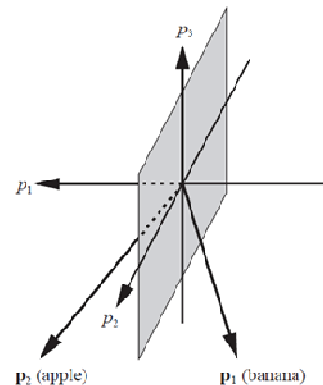
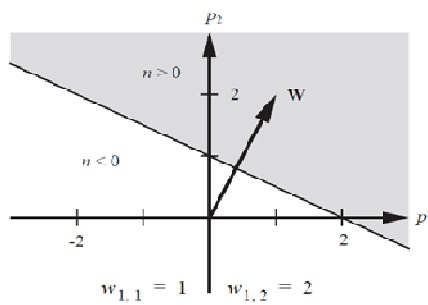
## Perceptron

Il percettone è in grado di separare i valori in ingresso in categorie; nel caso in cui gli ingressi siano due:



In questo caso il confine di decisione (**Decision Boundary** – fig. sx) viene definito come:

$$Wp + b = 0 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} p + (-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \text{hardlims}(n) = \text{hardlims}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} p + (-2)\right)$$



Il limite di decisione, la cui posizione è determinata dal bias, deve permettere di separare i due vettori prototipi in ingresso; inoltre il vettore peso deve essere perpendicolare a tale limite e deve puntare nella direzione che produrrà uscita pari a 1. Nel caso dell'esempio Apple/Banana (fig. dx):

$$a = \text{hardlims}\left(\begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & w_{1,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} + b\right) \quad p_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} + 0 = 0$$

La rete può essere testata inserendo alcuni valori:

Banana:

$$a = \text{hardlims}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0\right) = 1(\text{banana})$$

Apple:

$$a = \text{hardlims}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0\right) = -1(\text{apple})$$

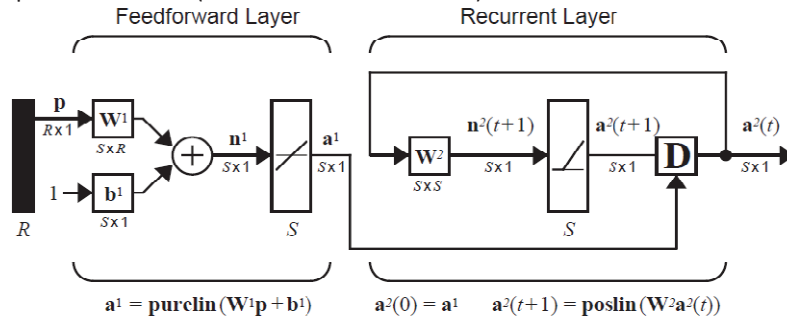
“Rough” Banana:

$$a = \text{hardlims}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0\right) = 1(\text{banana})$$

### Hamming Network

La rete di Hamming prevede un numero di neuroni nel 1° livello ( $\#N^1$ ) pari al numero di neuroni nel 2° livello ( $\#N^2$ ).

Nel caso in cui il sistema converga solamente una delle due uscite sarà nulla. L'uscita non nulla indicherà a quale vettore prototipo corrisponderà l'uscita (effettua la classificazione).



Questa rete decide quale vettore prototipo è più simile al vettore di ingresso. Considerando l'esempio Apple/Banana:

Feedforward Layer

$$S = 2 \quad W^1 = \begin{bmatrix} p_1^T \\ p_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad b^1 = \begin{bmatrix} R \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = W^1 p + b^1 = \begin{bmatrix} p_1^T \\ p_2^T \end{bmatrix} p + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1^T p + 3 \\ p_2^T p + 3 \end{bmatrix}$$

Recurrent Layer

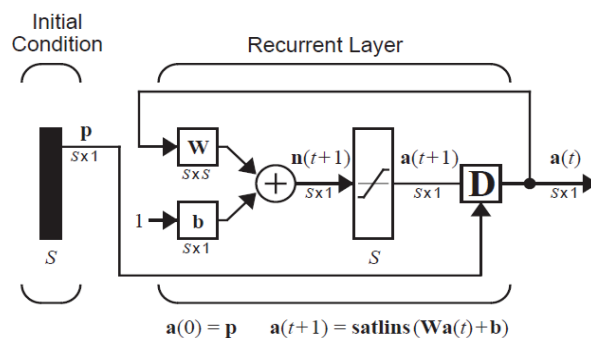
$$W^2 = \begin{bmatrix} 1 & -\epsilon \\ -\epsilon & 1 \end{bmatrix} \quad \epsilon < \frac{1}{S-1}$$

$$a^2(t+1) = \text{poslin} \left( \begin{bmatrix} 1 & -\epsilon \\ -\epsilon & 1 \end{bmatrix} a^2(t) \right) = \text{poslin} \left( \begin{bmatrix} a_1^2(t) - \epsilon a_2^2(t) \\ a_2^2(t) - \epsilon a_1^2(t) \end{bmatrix} \right)$$

Il Feedforward layer correla i vettori peso e prototipo.

### Hopfield Network

Questa rete fornisce in uscita il vettore prototipo ed itera fino a che l'output non converge (può essere effettuata una classificazione).



## Perceptron Learning Rule

Sono possibili tre metodi diversi di apprendimento:

- 1) **Apprendimento supervisionato:** viene fornito un IN alla rete e quello che deve essere l'OUT corrispondente. La rete eseguirà autonomamente una serie di operazioni per far sì che l'uscita corrisponda all'OUT desiderato.
- 2) **Apprendimento rinforzato:** è una tecnica di apprendimento simile alla precedente solamente che non viene fornito l'OUT ma un grado di punteggio di performance.
- 3) **Apprendimento non supervisionato:** viene fornita alla rete il solo IN e poi, tramite una serie di operazioni di clustering riesce autonomamente ad effettuare le suddivisioni.

Nel caso di reti, anche complesse, ogni neurone ha il suo limite di decisione e le classificazioni possibili saranno:

- *Neurone singolo:* classifica il vettore di input in **2** categorie
- *Multi neuroni:* classificano il vettore di input in **2<sup>S</sup>** categorie

L'algoritmo che definisce le regole di apprendimento è quindi:

```

If (t=1) and (a=0)      then  ${}_1w^{new} = {}_1w^{old} + p$ 
If (t=0) and (a=1)      then  ${}_1w^{new} = {}_1w^{old} - p$ 
If (t=a)                then  ${}_1w^{new} = {}_1w^{old}$ 

```

Esprimendo poi l'errore della rete (e) come  $e = t - a$  è possibile riscrivere le regole di apprendimento come:

```

If (e=1)                then  ${}_1w^{new} = {}_1w^{old} + p$ 
If (e=-1)               then  ${}_1w^{new} = {}_1w^{old} - p$ 
If (e=0)                then  ${}_1w^{new} = {}_1w^{old}$ 

```

$${}_1w^{new} = {}_1w^{old} + ep = {}_1w^{old} + (t-a)p$$

$$b^{new} = b^{old} + e$$

Da qui si deduce che il bias è il peso quando l'input è 1. Questa scrittura è valida anche nel caso si perceptron a più neuroni, solo che W è una matrice e b ed e sono vettori. Questa regola:

*Converge al peso necessario ad effettuare la classificazione, ammesso che questo esista.*

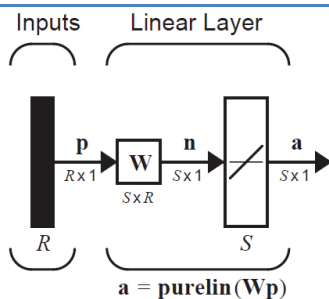
Nel caso invece di problemi non separabili linearmente non è possibile utilizzare una linea di confine, ma bisogna utilizzare una curva.

## Supervised Hebbian Learning

Il **postulato di Hebb** afferma che:

*Quando un assone della cellula A (la cellula presinaptica) prende parte ripetitivamente nel processo di eccitamento della cellula B (la cellula postsinaptica), qualche cambiamento strutturale o metabolico subentra in una o entrambe le cellule in modo che l'efficienza di A, come cellula eccitatrice di B, aumenti.*

## Linear Associator



$$a = Wp \quad a_i = \sum_{j=1}^R w_{ij} p_j$$

Training Set:  
 $\{p_1, t_1\}, \{p_2, t_2\}, \dots, \{p_Q, t_Q\}$

$$w_{ij}^{new} = w_{ij}^{old} + \alpha f_i(a_{iq}) g_j(p_{jq})$$

$\uparrow$  Presynaptic Signal  
 $\uparrow$  Postsynaptic Signal



## ESERCITAZIONE EEG

In questa esercitazione il segnale principale che viene preso in considerazione è quello dell'EEG. Tramite l'utilizzo di strumenti di analisi avanzata su questo segnale, è possibile fornire supporto alla diagnosi. Se infatti si è in grado di misurare in maniera affidabile alcuni indici ben precisi, è possibile vedere se, a distanza di tempo, una terapia farmacologica per la cura di una patologia ha avuto successo. Un primo esempio di applicazione è quello in cui si studia con modelli matematici l'attività dell'EEG con particolare attenzione all'epilessia.

Una crisi epilettica è un'attività elettrica anomala che avviene all'interno di un gruppo di neuroni; questa attività sincrona si manifesta a seconda dell'area colpita: se l'area è quella che controlla le braccia, il paziente potrà manifestare movimento incontrollato delle braccia etc.

Perché si parli di epilessia occorre che le crisi non siano occasionali, bensì che si ripetano nel tempo.

L'epilessia è generalmente dovuta ad uno sbilancio tra meccanismi inibitori ed eccitatori delle cellule neurali: in particolare si può avere assenza di inibizione o eccesso di eccitazione; tale squilibrio può derivare da fattori genetici o da malformazioni strutturali dei neuroni.

Bisogna comunque ricordare che non basta un numero limitato di neuroni affinché si manifesti la patologia, ma è necessaria l'attivazione anomala di un intero circuito di neuroni.

Lo studio delle oscillazioni costituisce oggi materia di grande interesse: negli ultimi dieci anni in particolare ci si è chiesto quali sono i meccanismi con i quali il cervello sia in grado di integrare vari stimoli esterni.

Si è cominciato a pensare che le oscillazioni osservabili sul segnale EEG siano l'elemento chiave che consenta di coordinare le varie aree del cervello, cioè siano responsabili per la connettività.

Uno studio di connettività prevede di valutare quali aree del cervello sono coordinate tra loro per svolgere un determinato compito.

Esistono almeno tre tipi di connettività:

- Anatomica: insieme delle connessioni strutturali
- Funzionale
- Effettiva: relativa a relazioni di causa effetto.

Come detto, si pensa che le oscillazioni abbiano un ruolo dinamico di binding, che consiste nel coordinare l'attività di più neuroni. Alcune malattie possono essere spiegabili come l'alterazione di questo meccanismo di sincronizzazione.

In particolare, l'epilessia sarebbe dovuta ad una eccessiva sincronizzazione, mentre la schizofrenia, ad esempio, ad una sincronizzazione scarsa tra le diverse aree del cervello che in questo modo risultano slegate e funzionano "per loro conto".

In generale si può affermare che due segnali sono sincroni se i loro ritmi coincidono, ma dal punto di vista delle neuroscienze il sincronismo è presente anche se i segnali sono sfasati nel tempo.

Come si valuta la sincronizzazione in un segnale EEG?

Non c'è ad oggi una risposta definitiva poichè, a causa del tipo di segnale, estrarre il coefficiente di sincronizzazione è molto complicato. Si citano ora alcuni esempi di applicazioni in cui, in base all'individuazione di ritmi sincroni sul segnale EEG, è possibile fornire un supporto alla diagnosi di alcune patologie.

Un primo studio è volto a verificare la presenza di oscillazioni tra muscolo e cervello, in modo da distinguere patologie particolari con tecniche differenti da quelle usuali.

In particolare ci si riferisce alle mioclono epilessie progressive, che causano nel paziente movimenti involontari degli arti.

Il mioclono dal punto di vista elettrico sull'EEG si fa notare con attività molto rapide seguite da momento di silenzio.

Con questo studio si vuole cercare di valutare se l'attività muscolare oscillatoria è correlata all'attività oscillatoria della corteccia o se esse sono attività cose separate. Importante è anche stabilire quale delle due attività è precedente all'altra, in modo da distinguere il particolare tipo di mioclono e capire quindi quale terapia applicare.

Lo studio viene fatto con modelli auto regressivi: tramite questo modello è possibile calcolare gli autospettri di EMG ed EEG. Il vantaggio nell'utilizzo di un modello AR è dato dalla migliore risoluzione in frequenza, e dall'ottenimento di uno spettro molto più liscio senza rumore.

Lo svantaggio principale riguarda invece l'ordine del modello: infatti la scelta di quanti campioni passati considerare è arbitraria.

Essendo interessati all'attività elettrica di muscoli e cervello, si sceglie un modello bivariato: i due segnali acquisiti vengono passati al modello, il quale calcola gli spettri.

La misura che ci permette di studiare la relazione tra due canali è la coerenza, una funzione lineare con un valore compreso tra 0 e 1, che permette di valutare se esiste una relazione statistica tra due segnali.

Dai dati raccolti su pazienti affetti da mioclono è stato possibile valutare la presenza di coerenza tra le oscillazioni. Per capire quale delle oscillazioni è precedente viene studiata la fase: i risultati ottenuti mostrano che le oscillazioni della corteccia precedono di circa 15 ms quelle del muscolo. Questo tempo è compatibile con quello necessario per la propagazione di uno stimolo dal cervello al muscolo e quindi il mioclono è di probabile origine corticale: con questa informazione è possibile dare un'informazione utile per diagnosi e terapia.

Un altro studio riguarda la stimolazione luminosa intermittente: in questo esame, il paziente viene stimolato con del flash per valutare la sua fotosensibilità. Lo scopo dello studio è quello di capire cosa sta alla base del fenomeno dell'epilessia fotosensibile: a differenza di prima, quindi, l'obiettivo non è quello di fornire supporto alla diagnostica.

Le frequenze che più inducono crisi nei soggetti di fotosensibili riguardano l'intervallo 13-25 Hz, per questo, nell'esecuzione dei test si utilizzano flash con frequenze a 14 Hz.

Nei soggetti (normali) di controllo, è possibile osservare che, durante la stimolazione luminosa, l'EEG conserva traccia dell'attività normale sebbene vi sia qualche tendenza delle oscillazioni a sincronizzarsi con i 14Hz. Nei soggetti patologici, invece, è possibile osservare che l'evento della stimolazione luminosa riesce a spostare la frequenza del ritmo di fondo verso i 14 Hz.

L'attenzione viene in questo caso rivolta alla banda di frequenza  $\gamma$ , poichè studi precedenti mostrano alterazioni in banda  $\gamma$  nei pazienti fotosensibili.

È interessante osservare che l'utilizzo di lenti blu permette di diminuire il rischio di crisi nei soggetti fotosensibili, per cui vengono eseguiti dei test con e senza lenti blu: ciò che colpisce è che con le lenti blu riemerge l'attività di fondo anche in presenza di stimolazione luminosa, e non si nota sincronizzazione sul ritmo di stimolazione. Quando il soggetto ha queste lenti anche la coerenza tende a tornare ai valori di riposo, il che ci permette di concludere che le lenti blu tendono a mitigare l'effetto di sincronizzazione con la stimolazione luminosa.

### Spasmi

Gli spasmi sono un tipo di disordine che compare nel bambino sotto l'anno di età: la patologia provoca contrazioni che portano il bambino a sbilanciarsi in avanti. Gli aspetti critici di questa patologia riguardano il fatto che è molto difficile da curare e che rischia di degenerare in una epilessia grave.

Anche in questo caso, l'analisi che viene fatta riguarda sempre il campo del multivariato, ma si rivolge in questo caso al tempo variante.

Anche per questa patologia si studia la coerenza degli spettri ma non a blocchi bensì tramite un modello tempo variante. Si fa quindi uno spettro campione per campione che mi dà il vantaggio di vedere quali componenti delle oscillazioni vengono prima.

Studio della coerenza parziale direzionata nei pazienti affetti da displasia corticale focale di Taylor

Questa patologia è una malformazione della corteccia, scelta perché è facilmente identificabile con la risonanza e anche l'EEG.

Nello sviluppo della corteccia normale, la corteccia risulta caratterizzata da 6 strati con tipi di cellule diverse; se c'è qualche problema durante la fase di sviluppo, l'organizzazione a strati può essere persa e ciò comporta, come conseguenza più frequente, l'insorgere di crisi epilettiche.

I pazienti affetti da patologia sono farmaco resistenti e quindi possono manifestare crisi nonostante l'assunzione di medicine. Una ridotta quota di pazienti può essere candidata a intervento chirurgico volto all'eliminazione di quell'area del cervello ritenuta responsabile per le crisi: naturalmente ciò può essere fatto solo se la rimozione chirurgica dell'area di cervello non comporta conseguenze per il paziente.

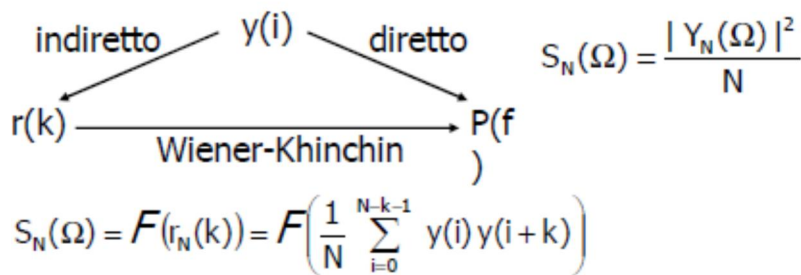
L'obiettivo su cui si sta lavorando a livello di ricerca è quello di trovare un metodo automatico per il riconoscimento dell'area del cervello da cui partono le crisi sulla base dell'acquisizione di segnali EEG dal paziente.

L'attività elettrica viene spesso valutata tramite l'inserimento di elettrodi nel cranio, e, successivamente, un medico osserva le registrazioni (che sono molto lunghe) per cercare di evidenziare le crisi e capire quali zone del cervello possano esserne responsabili. L'obiettivo della ricerca è proprio quello di automatizzare questo processo, senza l'intervento del medico.

Anche in questo caso ci si basa su un modello multivariato: ogni canale che viene acquisito non dipende solo dal suo passato ma anche dal passato dei canali precedenti. I canali vengono quindi raccolti in una matrice.

## ESERCITAZIONE SITMA PARAMETRICA

Esistono due principali metodi per la stima spettrale, uno non parametrico ed uno parametrico.



In questa figura viene rappresentato il metodo non parametrico: in questo caso, a partire da un segnale  $y(i)$  si arriva alla definizione della densità spettrale di potenza in due modi: uno, quello diretto, prevede di calcolare il modulo quadrato della trasformata di Fourier del segnale e dividerla per  $N$ .

Il metodo indiretto, invece, calcola la funzione di autocorrelazione del segnale e definisce la densità spettrale di potenza come la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione del segnale.

I metodi parametrici, hanno invece un approccio completamente diverso: partono dalla scelta di una famiglia di modelli matematici, cioè ipotizzano che il segnale sia generato da una formula matematica. In questo approccio è dunque necessario scegliere il modello, i cui coefficienti, però, non sono noti e vanno stimati in modo tale che l'uscita del modello corrisponda al segnale misurato. Una volta ottenuti i parametri, questi vengono inseriti in una formula opportuna, da cui si ricava lo spettro.

Partiamo da un modello lineare ed ipotizziamo un ingresso  $x(i)$  e un'uscita  $y(i)$  con un blocco caratterizzato da funzione di trasferimento  $H$ .

Se consideriamo il dominio della trasformata  $Z$  si potrà scrivere:

$$Y(Z) = H(Z)X(Z)$$

È poi possibile fare la seguente sostituzione

$$z = j\omega$$

Ed elevare al quadrato il risultato; in questo si ottiene una particolare formula, in cui si ha che la densità spettrale di potenza del segnale in uscita è data dalla densità spettrale di potenza del segnale in ingresso moltiplicata al quadrato di  $H$ .

Per riassumere, i punti principali relativi ai metodi di stima parametrica sono:

- Si considera il segnale come prodotto di un particolare modello matematico o meccanismo di generazione dei dati.
- In generale un modello è descritto da relazioni matematiche che comprendono parametri di valore non pre-fissato.
- La scelta di un tipo di relazione matematica fissa una famiglia di modelli, e solo l'attribuzione di un preciso valore a ciascun parametro permette di fissare uno specifico modello con cui eseguire dei calcoli.

Esistono diversi tipi di modelli parametrici lineari:

Modello ARMA → Vede l'uscita come una combinazione lineare di un certo numero di ingressi a istanti precedenti e di un certo numero di uscite ad istanti precedenti. In questo caso è presente sia una parte auto regressiva (AR) sia una parte a media mobile (MA). Questo è il caso più generale possibile.

Esistono poi dei casi particolari:

Modello AR → coefficienti relativi alla parte a media mobile sono pari a zero. Si ha quindi un modello regressivo in cui l'uscita è una combinazione lineare delle uscite precedenti.

Modello MA → in questo modello non è presente ricorsione sull'uscita, e l'uscita è una combinazione lineare degli ingressi a istanti precedenti.

Date queste tre possibilità si hanno a disposizione infiniti modelli: è possibile infatti scegliere l'ordine della media mobile e della parte regressiva, determinando quanti campioni precedenti considerare. Una volta fissato l'ordine, inoltre, i coefficienti a e b possono assumere valori differenti.

#### Scelta del modello

Si capisce quindi che un passo importante sta nel decidere quale modello utilizzare.

Nulla ci può dire a priori se un certo processo è meglio descritto da un modello piuttosto che un altro, tuttavia esiste il teorema di WALD, secondo cui a partire da un processo ARMA (p,q) è sempre possibile trovare un modello AR di ordine sufficientemente elevato che sia equivalente al modello ARMA considerato e lo stesso vale per un modello MA.

Dunque non ci sono vincoli sul modello ed è possibile sceglierne uno dei tre presentati a piacere, purché si scelga in modo opportuno l'ordine del modello.

Solitamente si opta per un modello AR perché il calcolo dei parametri può essere fatto risolvendo un sistema lineare di equazioni, il che risulta più comodo.

L'identificazione del modello viene fatta calcolando l'errore di predizione del modello e minimizzandolo, in modo che l'uscita del modello sia più vicina possibile al segnale reale che è stato misurato.

Operativamente, si definisce l'errore di predizione, si calcola la varianza e la si minimizza per calcolare i coefficienti del modello.

In questo modo il modello è definito da un numero limitato di parametri che sono rappresentativi di tutti i campioni del mio segnale: perché questo sia vero è necessario che il segnale mantenga inalterate le proprie caratteristiche statistiche (media e varianza) nella finestra temporale considerata.

#### Scelta dell'ordine

Altro aspetto importante nell'identificazione di un modello (ci stiamo già riferendo ad un modello AR) è la scelta dell'ordine. In questo caso si è interessati a capire quante uscite (k) passate considerare perché il modello rappresenti correttamente i dati raccolti.

Il primo aspetto importante è che l'errore di predizione commesso non deve contenere informazione residua, cioè deve essere una sequenza scorrelata di campioni, ovvero un rumore bianco.

Scelto l'ordine bisogna quindi verificare che l'errore di predizione abbia una funzione di autocorrelazione pari a 0 dovunque tranne che in 0.

Solitamente, se si utilizzano degli ordini bassi non si riesce ad ottenere rumore bianco come errore di predizione, ma aumentando l'ordine, da un certo punto in avanti l'errore di predizione risulterà essere bianco.

Qual è dunque l'ordine più adatto tra quelli che soddisfano questa condizione?

Una scelta potrebbe essere quella di usare il primo ordine che dà un errore di predizione bianco, tuttavia, aumentando l'ordine, si ottiene sempre un'aderenza sempre maggiore ai dati.

Bisogna però ricordare che non si può aumentare eccessivamente l'ordine, poiché il modello risultante non è statisticamente robusto. Notiamo quindi la presenza di esigenze in contrapposizione.

Per cercare la giusta via di mezzo tra questi opposti sono stati proposti indicatori che pesano in modo differente vantaggi e svantaggi di ordini bassi e alti, cercando di definire ordine adatto per il modello. I principali vengono riportati di seguito:

$$FPE = \lambda^2 \frac{1 + \frac{p}{N}}{1 - \frac{p}{N}}; \quad AIC = \log \lambda^2 + \frac{2p}{N}; \quad RIS = \log \lambda^2 + \frac{p}{N} \log N$$

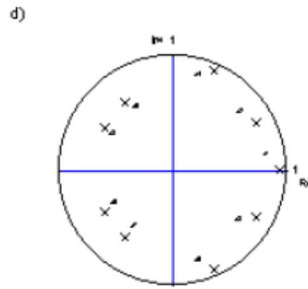
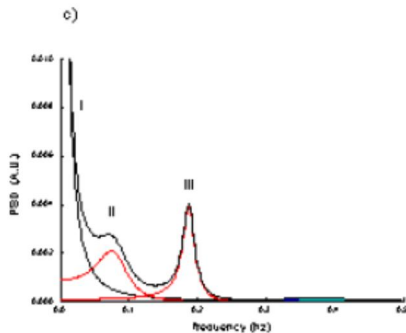
P = ordine modello;    N = numero campioni;

Immaginiamo ora di considerare un segnale  $y(t)$  generato da un modello autoregressivo.

Dopo aver minimizzato l'errore di predizione e determinato i coefficienti  $a_k$  del modello, si ha a disposizione la sua funzione di trasferimento. Questa sarà caratterizzata da un certo numero di poli, che possono essere reali o complessi coniugati.

Poiché i modelli AR sono sistemi lineari sempre stabili, i poli sono sempre situati all'interno del cerchio di raggio unitario.

Se consideriamo lo spettro del segnale (figura seguente), ad ogni polo reale corrisponde un picco sulla continua, mentre gli altri picchi sono in corrispondenza delle coppie dei poli complessi coniugati. Un'altra corrispondenza si ha tra la forma dei picchi e la posizione dei poli: se i poli sono vicini al cerchio, si avranno dei picchi elevati e stretti nello spettro.



Le componenti spettrali sono le altre linee in rosso nello spettro ognuna, delle quali è associata ad un polo della funzione di trasferimento.

È quindi possibile suddividere lo spettro nella somma di tanti contributi, ciascuno relativo ad una radice del polinomio al denominatore

della funzione di trasferimento, cioè ad un polo: in pratica ogni polo mi definisce una componente spettrale, e la somma di tutte queste componenti costituisce lo spettro totale.

Il calcolo di queste componenti può essere fatto ricordando che la funzione di autocorrelazione del segnale è la sua antitrasformata di Fourier (ACF = funzione di autocorrelazione =  $r(k)$ ).

Se si considera  $r(0)$  = varianza del segnale = area sottesa dallo spettro.

Si è messa quindi in evidenza una relazione molto importante: l'area sottesa allo spettro deve essere uguale alla varianza del segnale: questa è una semplice verifica che si può fare per valutare la bontà del modello scelto.

## ESEMPI DI APPLICAZIONI

I metodi di stima spettrale sono molto usati nell'elaborazione dei segnali, ma in particolare nel campo della variabilità cardiaca.

Questo segnale può essere rappresentato sfruttando i tacogrammi: per ogni battito del cuore rilevato dall'ECG viene rappresentata la durata dell'intervallo RR relativo.

Questo segnale che ha una forte componente di tipo stocastico ed è quindi descritto mediante le sue caratteristiche statistiche, ovvero valore medio, varianza e densità di potenza spettrale.

Se misuriamo questo segnale per un paziente in condizione di riposo oppure quando è in piedi, non notiamo grandi variazioni di frequenza, ma osserviamo variazioni riguardanti le oscillazioni: per ottenere ulteriori informazioni consideriamo allora lo spettro del segnale. Noteremo allora che tra i due spettri vi sono differenze significative nella disposizione dei picchi, che sono legate al differente comportamento del corpo (principalmente componenti simpatica e parasimpatica del sistema nervoso autonomo) nelle due situazioni.

Se si crea un modello AR per la variabilità cardiaca, i coefficienti  $a_k$  stimati non hanno nessun significato fisiologico. Questo è infatti il tipico esempio di modello a scatola nera, in cui non c'è alcun legame tra parametri  $a_k$  del modello e parametri fisiologici.

Se però si calcola lo spettro e si considerano i poli, a cui corrispondono le componenti spettrali, si è visto come sia presente un legame tra posizione dei poli e parametri di tipo fisiologico (i picchi del tacogramma che corrispondono all'attività simpatica e parasimpatica).

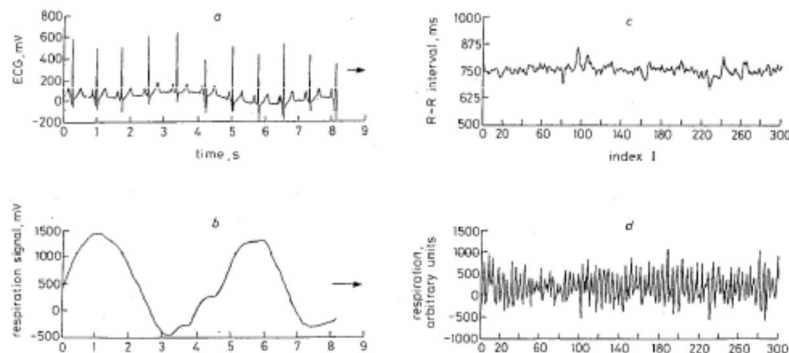
## Modelli multivariati

I modelli parametrici possono essere estesi anche al campo del multivariato: è infatti possibile scrivere le equazioni tipiche del modello AR per più segnali. Questi modelli permettono di definire le mutue influenze di un segnale sull'altro e possono essere estesi ad un numero qualsiasi di segnali.

È quindi possibile esaminare anche casi in cui ci siano relazioni di anello chiuso tra diversi segnali.

## Analisi spettrale della variabilità cardiaca e della respirazione nei soggetti diabetici

In questo studio si sono confrontati gli spettri dei segnali di variabilità cardiaca e respirazione in soggetti diabetici, i quali sono soggetti a sviluppo di neuropatia.

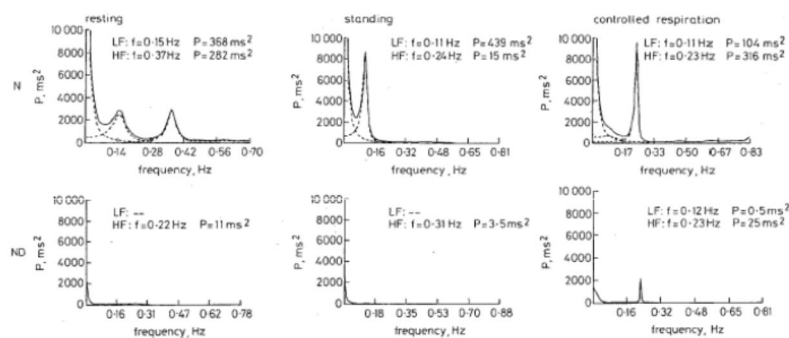


Nella figura sono rappresentati a sinistra i segnali acquisiti (ECG e respiro), e a destra tacogramma e respirogramma.

Il respirogramma è ottenuto campionando il segnale del respiro per ogni picco R: in questo caso il campionamento è quindi irregolare perché i picchi R sono caratterizzati da una certa variabilità e non si

ripetono ad intervalli fissi.

Nella seguente figura vengono invece confrontati gli spettri di un paziente sano e di uno diabetico in tre diverse condizioni: da sinistra a destra si ha soggetto a riposo, soggetto in piedi, soggetto in regime di respirazione controllata (condizione che stimola l'attività vagale).



Come si può notare, il soggetto diabetico mostra uno spettro piatto e dunque assenza di variabilità cardiaca. Egli dunque ha un cuore che batte in maniera perfettamente regolare e questo è un problema perché significa che il cuore non è in grado di adattare la frequenza con cui batte alle diverse possibili situazioni come gli sforzi fisici.

Nel grafico relativo al respiro controllato si può notare la presenza di un picco ridotto, che però è dovuto più che altro ad un fatto meccanico: è il cuore che risente della pressione. La neuropatia dunque danneggia le innervazioni del cuore, e, di conseguenza, non permette ai sistemi simpatico e parasimpatico di regolare la frequenza cardiaca in funzione delle condizioni del soggetto.

## MODELLO REGRESSIVO MULTIVARIATO

Questi sono modelli che considerano fino a M segnali (con M grande a piacere): l'unico limite dipende dalla potenza di calcolo che si ha a disposizione.

In questo caso si viene fatta una rappresentazione matriciale, ed è nuovamente possibile calcolare gli spettri, ottenendo matrici di spettri.

Come interpretare i dati che otteniamo?

Immaginiamo che la coerenza tra due segnali B e C sia pari a 0: in questo caso possiamo concludere che i due segnali non comunicano tra loro.

Se invece la coerenza è circa pari a 1, tra i due segnali possono esistere diversi tipi di relazione: per esempio i due segnali possono essere in condizioni di anello chiuso, oppure è possibile che vi sia un terzo segnale A

che agisce su B e C determinando la loro coerenza. In altre parole la coerenza tra due segnali può essere dovuta a cause differenti che però non sono note a priori.

Utilizzando però dei modelli multivariati è possibile comprendere la natura delle relazioni tra segnali diversi, perché, a partire dalla matrice di partenza, si possono ricavare delle sottomatrici che indicano le relazioni reciproche tra coppie di segnali escludendo tutti gli effetti dovuti all'influenza i altri segnali.

In altre parole possiamo ricavare la coerenza parziale.

Un'altra possibilità che si ha è quella di vedere se si hanno relazioni di causa effetto tra segnali, cosa che la coerenza non mi può dire; esistono dei parametri appositi, calcolabili a partire dalla matrice del modello multivariato, che tengono conto della direzionalità della relazione tra i segnali permettendo di dire quale segnale è causa dell'altro. In questo caso si parla di coerenza parziale direzionale.

Questo metodo di analisi è stato applicato allo studio dell'EEG tramite elettrodi impiantati nell'encefalo: questo esame, estremamente invasivo, viene condotto per cercare di trovare il focus dell'attività epilettica in pazienti affetti da epilessia farmaco resistente. Questi pazienti sono spesso affetti da una particolare patologia, la displasia di Taylor, che causa una malformazione del tessuto della corteccia cerebrale: le zone di displasia sono quelle in cui la corteccia risulta malformata, e sono spesso quelle in cui è localizzato il focus epilettico.

Dalle immagini di risonanza magnetica non è facile definire i contorni della zona di displasia e quindi il chirurgo non è in grado di valutare precisamente i contorni della zona da asportare per eliminare il focus epilettico.

Applicando i modelli multivariati per l'analisi dell'EEG, è stato invece possibile calcolare degli indici specifici (coerenza parziale direzionata e funzione di trasferimento direzionale diretta) dai quali è stato possibile stabilire che è la zona malformata e l'area immediatamente circostante sono le responsabili per la generazione dell'attività epilettica: è stato così possibile definire con precisione i contorni dell'area di corteccia da asportare, supportando il lavoro del chirurgo.



## STATISTICA DESCRITTIVA

L'obiettivo della statistica descrittiva è quello di riuscire a ricavare informazioni da insiemi di dati molto estesi. Nella maggior parte dei casi, infatti, ci si trova a lavorare con tabelle contenenti numerosissimi dati.

L'analisi delle componenti principali è un'operazione estremamente importante in quest'ambito, e serve per proiettare una nuvola di punti su una dimensione minima, che può essere tridimensionale o bidimensionale, in modo da poterli vedere.

In generale viene preferita la proiezione a due dimensioni, più facile da rappresentare, dopodiché è necessario osservare e discutere la forma che si ottiene dalla proiezione.

In particolare l'obiettivo è quello di trovare delle relazioni lineari (inizialmente non visibili nella nuvola di punti di partenza) contenute nei dati: grazie all'analisi delle componenti principali sarà possibile individuare delle rette che indicano le direzioni principali in cui la nuvola di punti, ridotta a due dimensioni, si allunga.

Tale retta, detta retta di regressione, dovrà passare per l'origine e minimizzare i quadrati delle distanze tra dai punti: la richiesta di minimizzazione ai minimi quadrati è equivalente a richiedere la massimizzazione delle proiezioni, cosa che è più semplice da realizzare, poiché basta massimizzare il prodotto della matrice dei punti trasposta per se stessa.

Se  $X$  è la matrice dei punti dovremo massimizzare il prodotto  $X' \cdot X$ .

Per massimizzare questo prodotto è necessario calcolare gli autovalori e gli autovettori della matrice  $X' \cdot X$ . Questa operazione può essere ripetuta anche per altre direzioni perpendicolari a questa (nel caso 2D avremo solo un'altra direzione oltre alla prima).

Poiché tale matrice è simmetrica, gli autovettori  $u$  sono tra loro perpendicolari, e ciò significa che ogni asse catturerà una informazione indipendente da quella degli altri assi.

Bisogna ricordare che, se consideriamo un piano costituito da punti, e moltiplichiamo questi punti per una determinata matrice, otteniamo uno spostamento di questi punti: in particolare, gli autovettori della matrice conterranno l'informazione relativa alla direzione massima di stiramento (NON al verso), mentre gli autovalori associati conterranno informazioni sul valore di questo spostamento.

Il problema principale in quanto detto fino ad ora è che le rette individuate passano per l'origine: questo è un vincolo che ostacola perché può portare ad ottenere delle direzioni principali non corrette. Per questo motivo è necessario svincolarsi da questa richiesta arrivando così ad ottenere il metodo delle componenti principali vero e proprio.

Quello che si può fare è considerare la media dei punti della matrice e massimizzare le proiezioni rispetto ad una retta passante per il baricentro, ottenendo la direzione principale. Noto il baricentro, possiamo farvi coincidere l'origine, eseguendo in questo modo la centratura dei dati.

Inoltre, per rendere la distanza fra i punti indipendente dalle unità di misura e dalle loro scale riduco i dati; l'insieme delle operazioni di centratura e riduzione prende il nome di standardizzazione.

Vediamo infine quali sono i principali utilizzi dell'analisi delle componenti principali:

- Analisi delle correlazioni lineari → le correlazioni sono intese sia tra variabili sia tra individui e variabili.
- L'analisi delle componenti principali è inoltre adatta per la riduzione delle variabili in un sottoinsieme più significativo rispetto a quello di partenza.
- Il metodo NON è invece adatto per separare dei mix di variabili.