

**Corso di  
ELABORAZIONE DI SEGNALI BIOMEDICI**

**Prof. Sergio Cerutti**

# CARATTERISTICHE PRINCIPALI DEI SISTEMI BIOLOGICI :

- \* Molto complessi
- \* Dinamici
- \* Adattativi
- \* Caratterizzati da grande variabilità, inter- ed intra- individuale
- \* Predicibili (non in senso assoluto)
- \* Interazioni tra più sistemi (fisici, chimici, metabolici, etc.)
- \* Segnali corrotti da rumore: definizione di un modello di interazione segnale/rumore. Il più semplice è quello additivo (segnale + rumore)  $\Rightarrow y(t) = x(t) + v(t)$   
( $y$  = segnale rilevato     $x$  = segnale utile     $v$  = rumore sovrapp.

## **CONOSCENZE A PRIORI**

anatomo-fisiologiche, biologiche, fisiche, chimiche, etc.

esperienza medica (clinica, fisiopatologica, statistica,  
epidemiologica,...)

variabilità e disturbi

# VARIABILITÀ

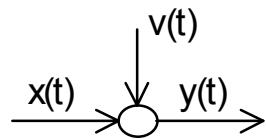
Non stazionarietà del processo in esame (variabilità intra-individuale): cambiano le condizioni del paziente o le influenze ambientali

Motivo: complessità del sistema biologico (capacità di adattamento ad una grande varietà di circostanze dovuta a meccanismi interni di regolazione, sia fisiologici che patologici)

differenze tra processi simili (variabilità inter-individuale)

Grande complessità del processo biologico con differenze inter-individuale di tipo statistico.

# DISTURBI



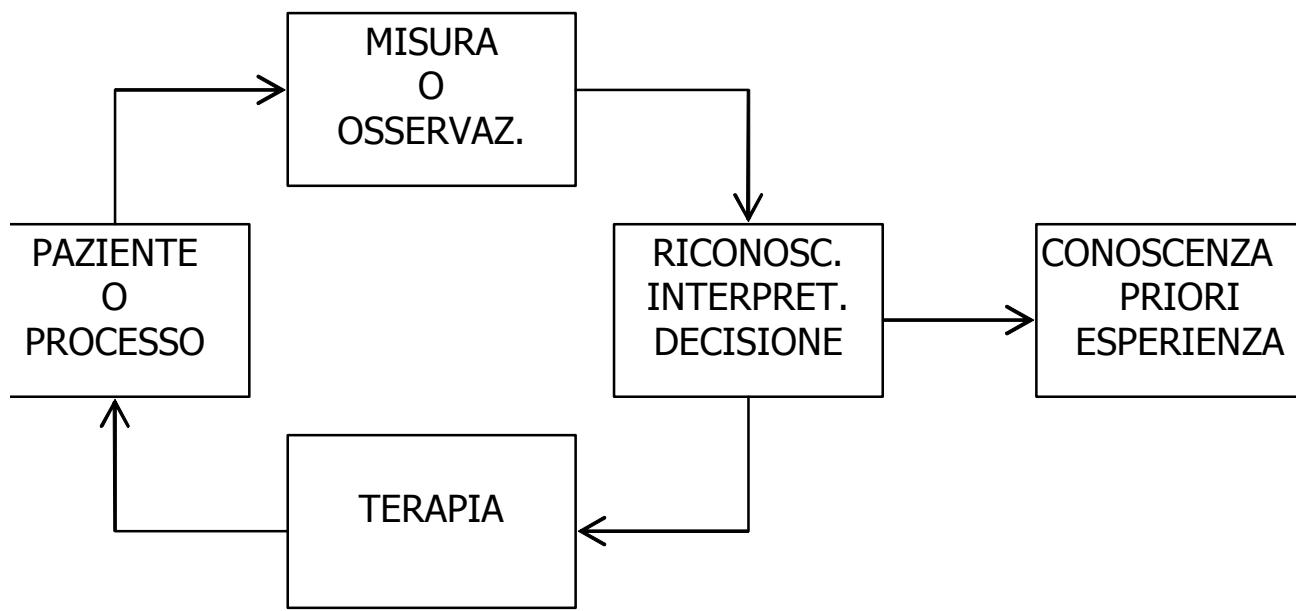
(modello di interazione segnale/rumore)

$$y(t) = x(t) + v(t)$$

Possono essere **ENDOGENI** o **ESOGENI**, a seconda che derivino da una causa interna o esterna all'organismo biologico studiato.

Spesso  $x(t)$  e  $v(t)$  sono SCORRELATI, ma non sempre (es. il rumore di quantizzazione, altri rumori casuali sono scorrelati con il segnale). In altri casi il rumore non è scorrelato dal segnale (es. artefatto respiratorio nell'ECG)

**Schema a blocchi del procedimento decisionale a partire dai segnali e dai dati del paziente (o del processo biologico in studio)**



- \* Misura o osservazione
- \* Trasformazione dell'informazione (riduzione dei dati e calcolo dei parametri)
- \* Riconoscimento, interpretazione e decisione
- \* Trattamento o azione

# ESTRAZIONE (STIMA) DI PARAMETRI



Modalità di approccio:

**Deterministico:** sono noti a priori i parametri di interesse, bisogna semplicemente misurarli.

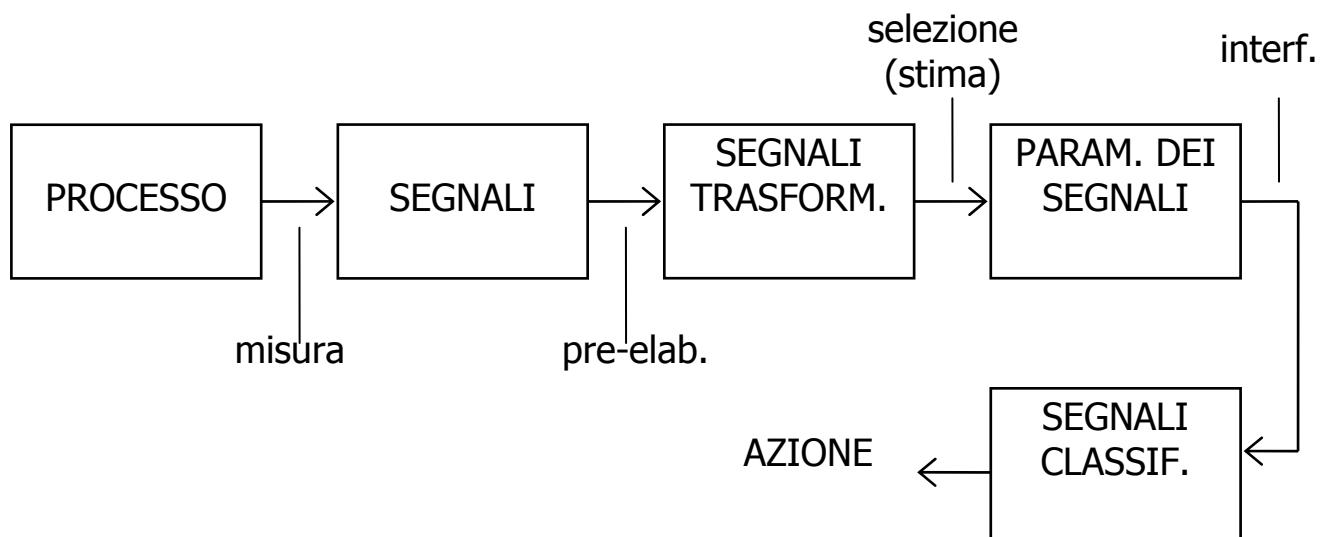
**Stocastico:** non sono noti a priori i parametri, bisogna usare metodi di tipo statistico

Un processo si intende deterministico quando sulla base del passato è possibile predire l'andamento del processo nel futuro.

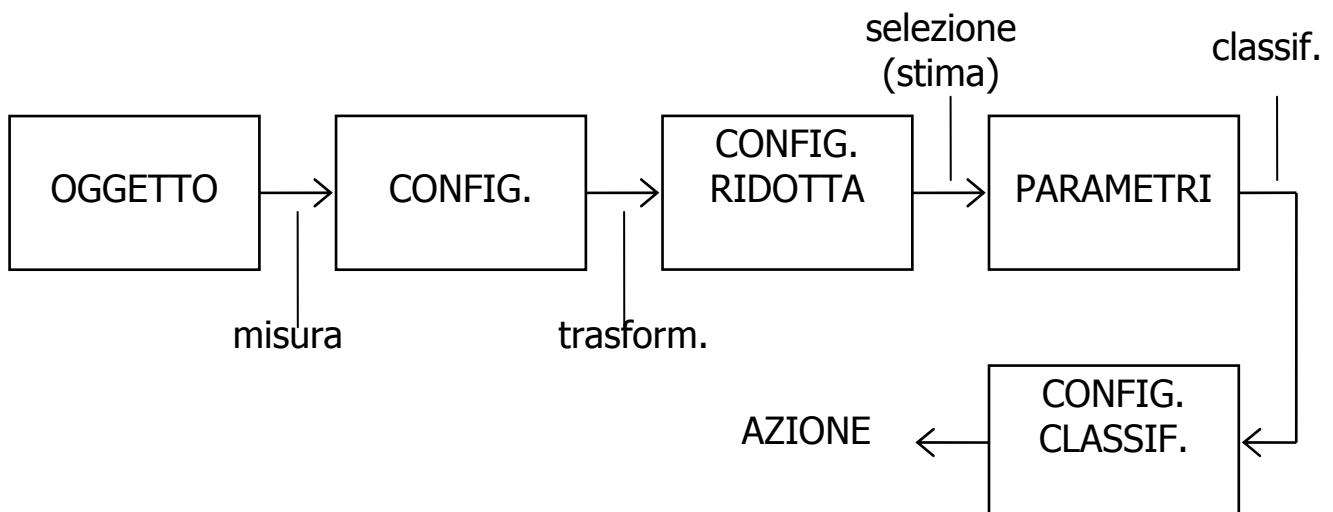
Si intende stocastico quando sulla base del passato non è possibile questa previsione.

Per quanto riguarda i sistemi biologici, è possibile verificare che non esistono sistemi *rigorosamente* deterministici o stocastici, ma *prevalentemente* deterministici o stocastici

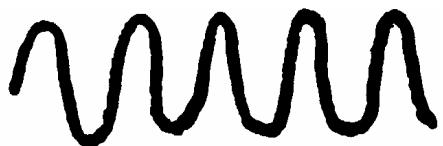
# SCHEMA A BLOCCHI GENERALE DEL PROCEDIMENTO DI ELABORAZIONE DEI SEGNALI



## RICONOSCIMENTO DI CONFIGURAZIONI (PATTERN RECOGNITION)

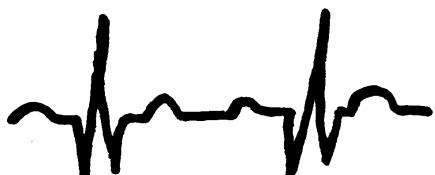


# TIPI DI SEGNALE BIOLOGICO



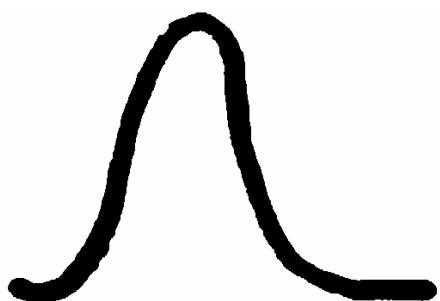
Sinusoide

Det. Periodico



ECG

Det. quasi-periodico



Potenziale d'azione

Det. transiente



EEG

Stocast. Stazionario

(su pochi secondi)



EMG

Stocast. non staz.

(anche su pochi  
sec.)

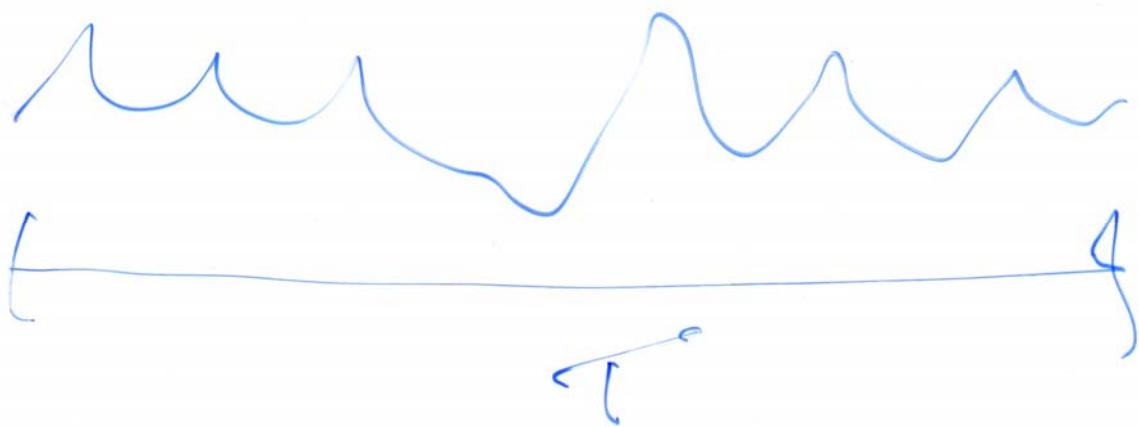


EP+EEG

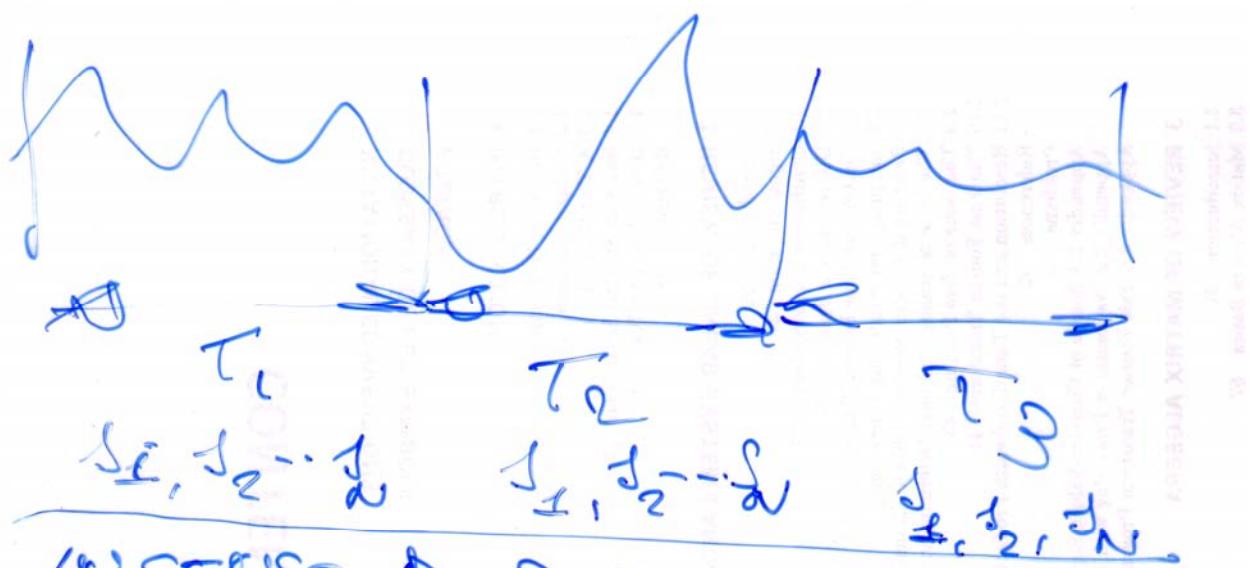
Det. trans. +

Stoc. staz.

SCAZZONARETTA



IN SESSO STRETTO



## Funzione di distribuzione di probabilità

$$F(x) = P[X \leq x]$$

dove  $F(x)$  rappresenta la probabilità che la variabile casuale X assume valori minori o uguali a  $x$

Se la variabile stocastica è continua:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad , \text{dove } f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \text{ è la } \underline{\text{funzione densità di probabilità}}$$

## Funzione di autocorrelazione:

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= E[x_{t1}x_{t2}] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot v \cdot f_{x_{t1}x_{t2}}(u, v) \cdot du \cdot dv \end{aligned}$$

dove  $f_{x_{t1}x_{t2}}(u, v)$  è funzione densità della probabilità congiunta delle due variabili  $x_{t1}$  and  $x_{t2}$ .

Se il segnale è discreto, ovvero abbiamo un processo  $x_n$ :

$$\begin{aligned} R_x[n_1, n_2] &= E[x_{n1}x_{n2}] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot v \cdot f_{x_{n1}x_{n2}}(u, v) \cdot du \cdot dv \end{aligned}$$

## Definizioni

- ⇒ Un processo stocastico è detto **stazionario in senso stretto** se tutti i momenti statistici sono costanti nel tempo
- ⇒ Un processo stocastico è detto **stazionario in senso debole** se il valor medio è costante nel tempo e la funzione di autocorrelazione dipende dal ritardo  $m=n_2-n_1$  e non dall'istante di tempo che si sta considerando.

$$\begin{aligned} R_x[n_1, n_2] &= E[x_{n_1}x_{n_2}] = \\ R_x[n_1, m] &= E[x_{n_1}x_{n_1+m}] \\ R_x[n, m] &= E[x_nx_{n+m}] = R_x[m] \end{aligned}$$

- ⇒ Un processo si definisce **ergodico** se tutte le proprietà statistiche possono essere stimate da una singola realizzazione. Allora a partire da una singola realizzazione possiamo stimare media e funzione di autocorrelazione usando i seguenti estimatori:

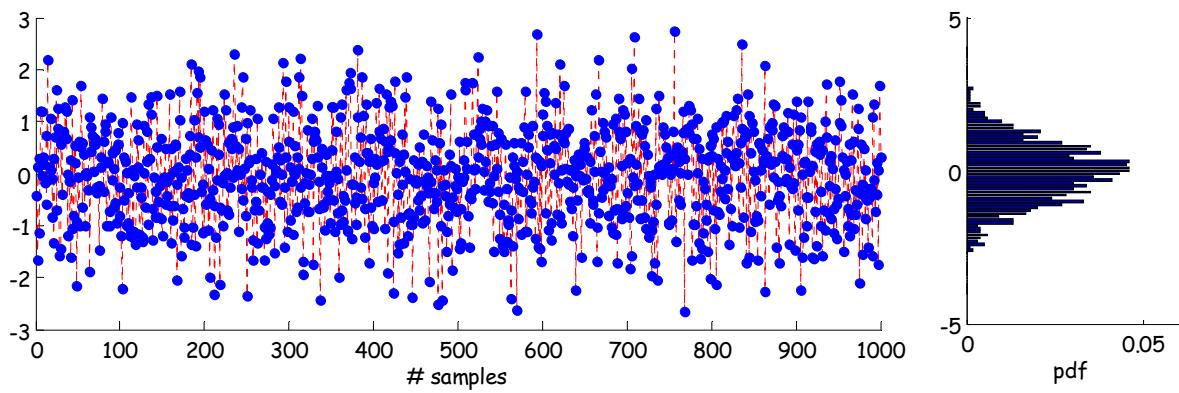
### Media campionaria

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

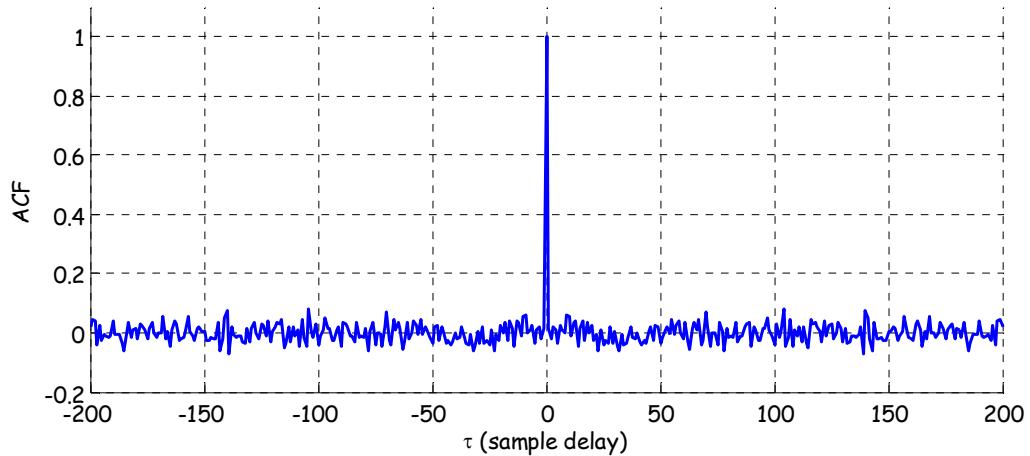
### Funzione di autocorrelazione

Unbiased:  $\hat{R}_x[m] = \frac{1}{N - |m|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n x_{n+m}$

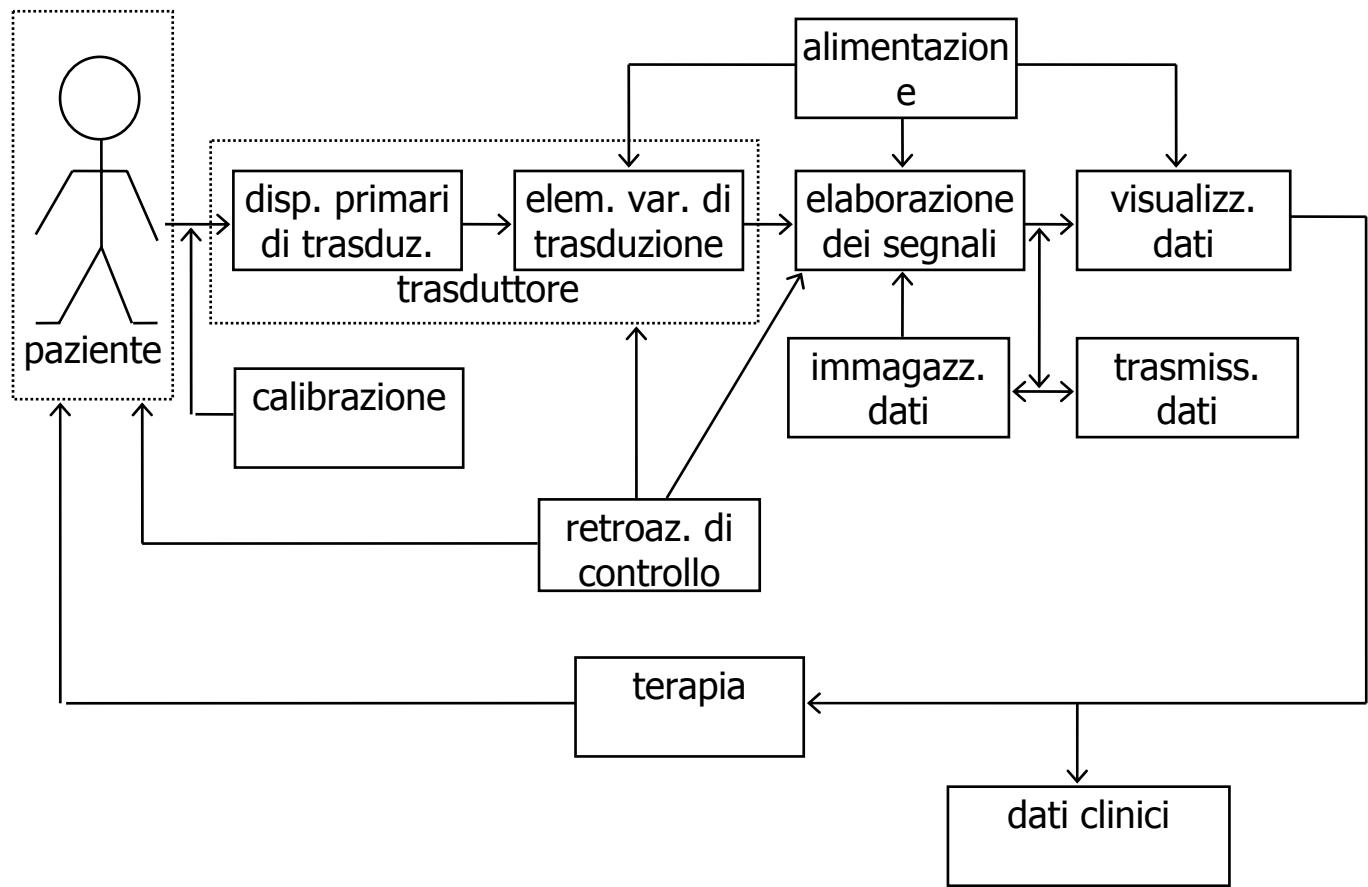
Biased:  $\hat{R}_x[m] = \frac{1}{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n x_{n+m}$



White noise (rumore bianco, rumore gaussiano a media nulla e varianza pari a 1) è un esempio di processo stocastico stazionario



# PROCEDURA COMPLETA DI ELABORAZIONE



SEGNALE	AMPIEZZA	FREQUENZA
ECG	0.5-4 mV	0.05-200 Hz
EEG	5-200 $\mu$ V	0.5-70 Hz
EMG	0.1-5 mV	DC-10000 Hz
Temperatura	32-41 °C	DC-0.1 Hz
Arteriosa Pressione	Diretta: 10-400 mmHg Indiretta: 25-400 mmHg	DC-50 Hz DC-60 Hz
Venosa	0-50 mmHg	DC-50 Hz

Torniamo allo schema a blocchi dell'elaborazione dei segnali.

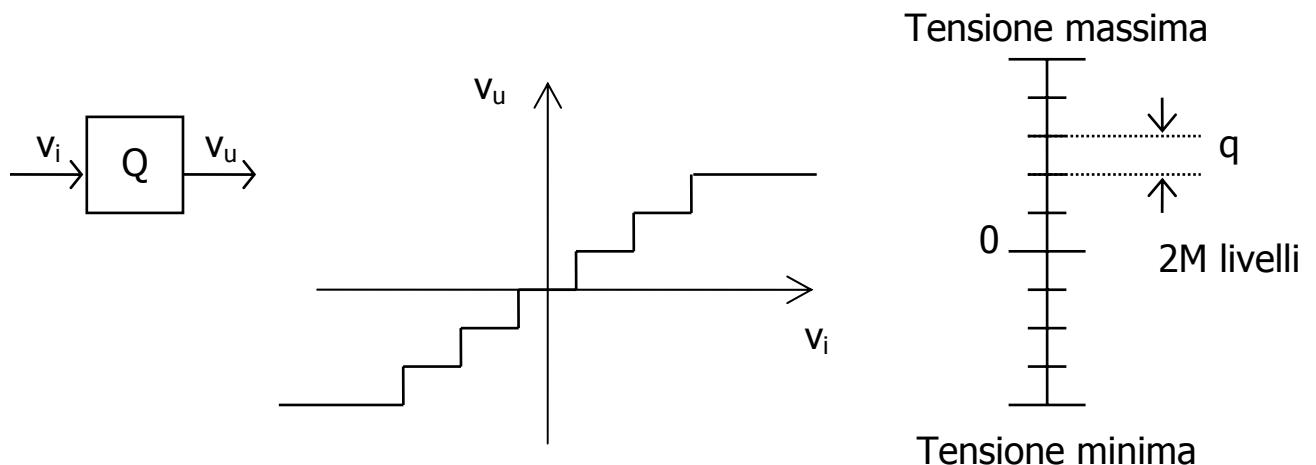
Nel dettaglio:



Nel blocco A/D sono compresi:

**campionamento**, che funziona bene se, come abbiamo visto, il segnale è a banda limitata e il campionamento soddisfa il teorema di Shannon

## quantizzazione



$$2M = 2^L \quad \text{dove } L \text{ rappresenta il numero di bit}$$

Ad esempio:  $L = 10$  bit, con un segnale di ampiezza  $(-1V, +1V)$

$$q = \frac{2}{2^{10}} = 1.952 \text{ mV}$$

## Errore di quantizzazione $z_q$

Facciamo l'ipotesi che

sia scorrelato dal segnale

la funzione di densità di probabilità sia uniformemente distribuita tra  $-q/2$  e  $q/2$  (arrotondamento)

Allora abbiamo:

$$\text{media} \quad E[z_q] = 0$$

$$\text{varianza} \quad \text{Var}[z_q] = \int_{-q/2}^{q/2} \frac{1}{q} z_q^2 dz = \frac{q^2}{12}$$

cioè:

$$C_{zz}(\tau) = \begin{cases} \frac{q^2}{12} & \tau = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

N.B. in caso di troncamento (densità di probabilità uniforme tra 0 e  $q$ ) la media è nulla solo se il segnale ha valore medio nullo e la varianza diventa  $q^2/3$

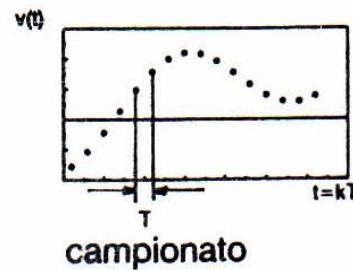
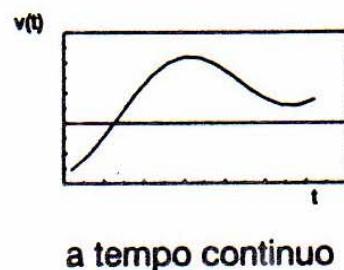
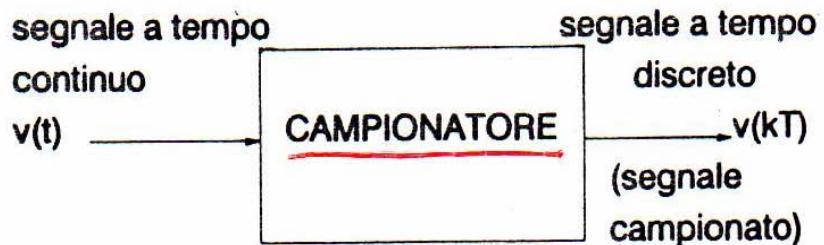


Figura 2.2: Schema a blocchi di un campionatore: il segnale in ingresso è a tempo continuo, quello in uscita è a tempo discreto.

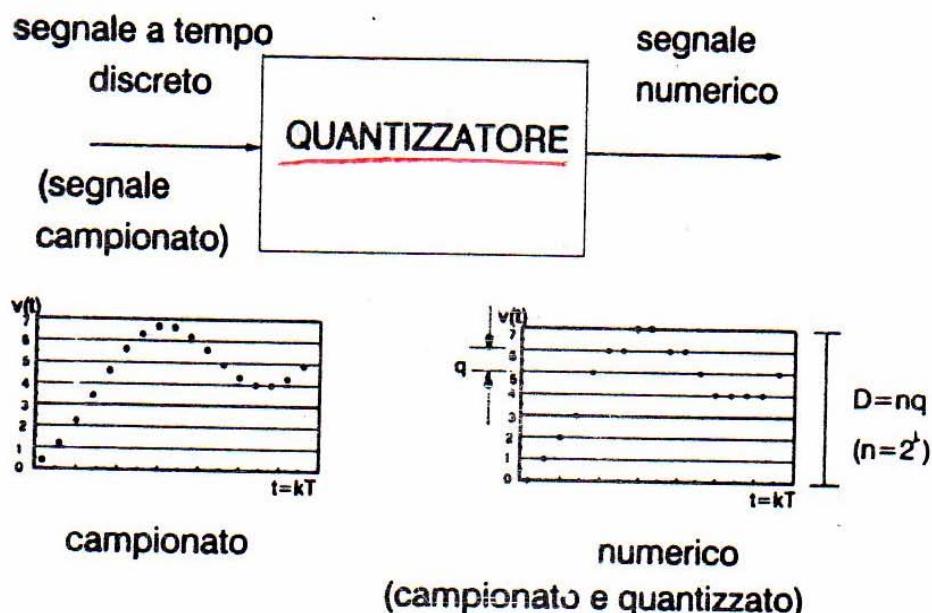
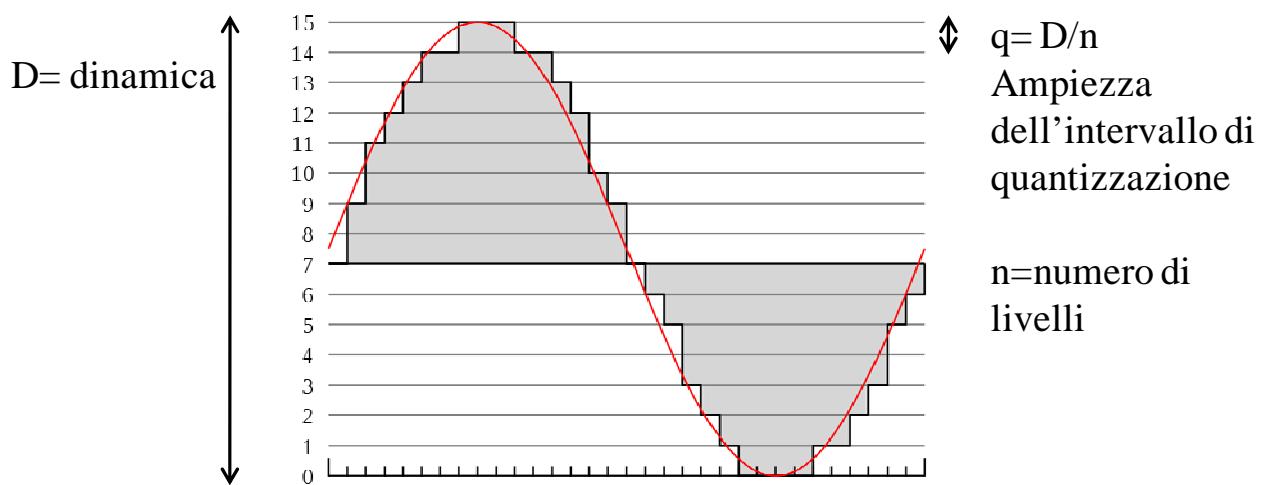


Figura 2.3: Schema a blocchi di un quantizzatore: il segnale campionato in ingresso viene trasformato in un segnale in uscita che può assumere valori uguali solo ai livelli di quantizzazione.

## Effetti della quantizzazione nel campionamento dei segnali analogici

- ⇒ I campioni del segnale devono essere quantizzati per adattarsi alla lunghezza finita dei registri che adottano la rappresentazione binaria (0 e 1) con un certo numero  $N$  di bit
- ⇒ Problema della saturazione ('overflow'), bisogna limitare il segnale in ingresso, ad es:  $x(n) \rightarrow A \cdot x(n)$  con  $0 < A < 1$ .

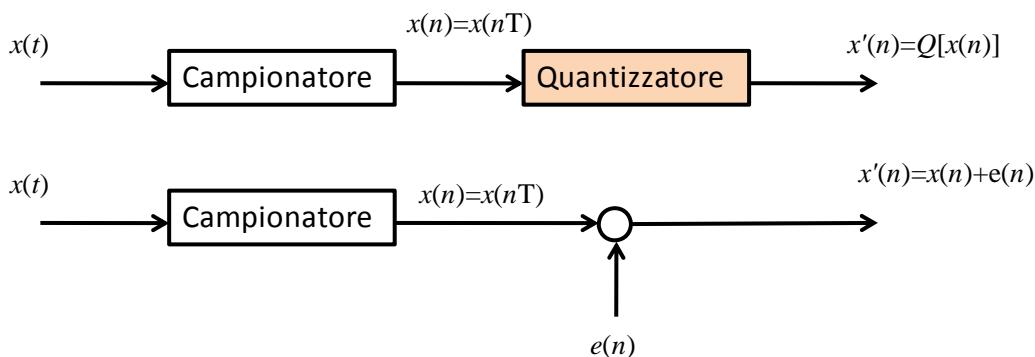


$n$  = numero di livelli di quantizzazione ed è pari a  $2^L$  ed  $L$  è il numero di bit a disposizione (in questo caso 4)

Se la dinamica  $D=1V$  allora  $n=2^4=16$  e  $q = 1/2^4 V = 2^{-4} V$

## Perché bisogna considerare gli effetti della quantizzazione?

- ⌚ Se si progetta un filtro e i suoi parametri vengono quantizzati, il filtro quantizzato può non soddisfare le specifiche richieste
- ⌚ quando si campiona si fa l'ipotesi che i campioni  $x(n) = x(nT)$  abbiano una precisione infinita (numero illimitato di bit) ma se il segnale digitale è un segnale numerico quantizzato perciò in realtà si ha:



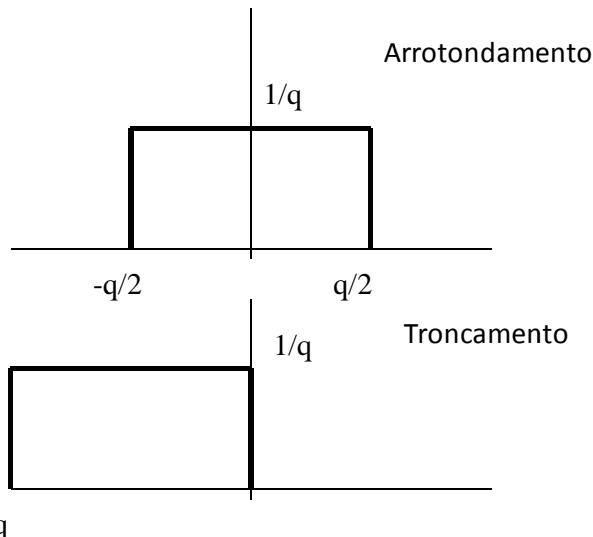
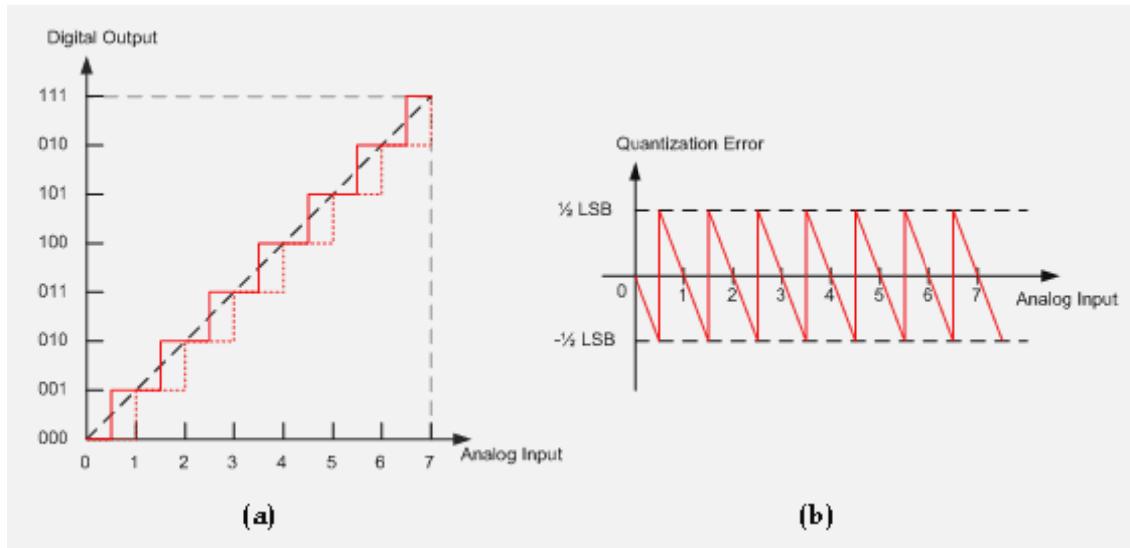
Perché l'equivalenza sia valida occorrerebbe conoscere perfettamente **il rumore  $e(n)$** , ma non essendo noto si usa un modello statistico

Si fanno comunemente le seguenti ipotesi:

1. La serie  $\{e(n)\}$  è un processo casuale stazionario e scorrelato cioè un rumore bianco
2. La serie  $\{e(n)\}$  è scorrelata dal segnale  $\{x(n)\}$
3. La densità di probabilità dell'errore di quantizzazione è uniforme

Quando sono soddisfatte queste ipotesi? Euristicalemente quando gli intervalli di quantizzazione sono sufficientemente piccoli in modo che i campioni del segnale abbiano una buona probabilità di attraversare diversi intervalli di quantizzazione.

➔ nell'elaborazione dei segnali quantizzati, in un sistema lineare tempo invariante, l'uscita può essere rappresentata come la somma della risposta del segnale e della risposta del rumore



Se consideriamo l'arrotondamento:

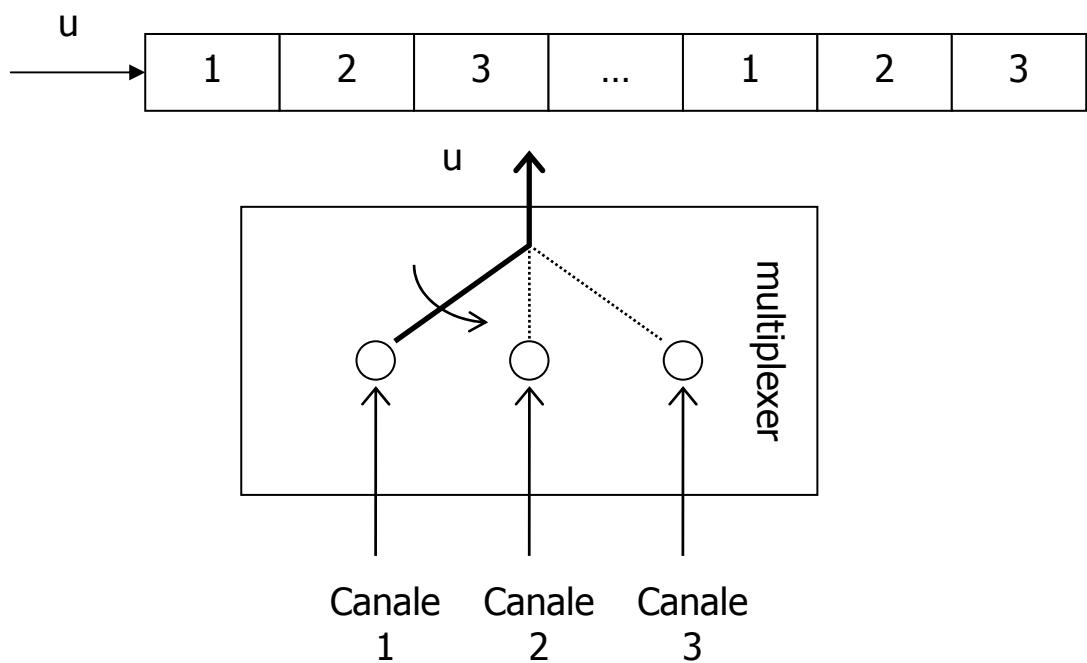
$$\text{media} \quad m = \int_{-q/2}^{q/2} \frac{1}{q} x dx = \frac{1}{q} \frac{x^2}{2} \Big|_{-q/2}^{q/2} = 0$$

$$\text{varianza} \quad \sigma^2 = \int_{-q/2}^{q/2} \frac{1}{q} x^2 dx = \frac{1}{q} \frac{x^3}{3} \Big|_{-q/2}^{q/2} = \frac{1}{3q} \left[ \frac{q^3}{8} + \frac{q^3}{8} \right] = \frac{q^2}{12}$$

$$\text{funzione di autocorrelazione} \quad R(\tau) = \begin{cases} \frac{q^2}{12} & \tau = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

# MULTIPLEXING

E' un dispositivo che permette di acquisire più canali (e quindi segnali) contemporaneamente. Effettua una commutazione da



un canale all'altro e permette di ottenere una stringa di dati in uscita contenente la sequenza dei campioni sui vari canali.

Se i canali sono  $N$ , evidentemente la frequenza di campionamento, supposta uniforme su tutti i canali, risulta  $f_c / N$  per ogni canale, mentre  $f_c$  è la frequenza di campionamento del multiplexer.

# **PROBLEMI GENERALI DI FILTRAGGIO**

Che cos'è un filtro → si parte dai filtri meccanici (analogia con i cercatori d'oro del Klondyke)

Obiettivi:

pre-elaborazione (analogica o numerica)

estrazione di parametri o riconoscimento configurazioni  
(analogico o numerico)

## Filtraggio analogico

Chiamato così perché utilizza componenti elettrici elementari che danno una rappresentazione per “analogia” di fenomeni fisici della realtà (resistori, induttori, condensatori, etc.)

### Vantaggi

Basso costo

Componenti standard ( R, L, C ed  
Amp. Op. come filtri attivi)

Metodologie di progetto standard  
(famiglie di filtri)

Applicazioni in tempo reale

### Svantaggi

Prestazioni che risentono di fattori  
ambientali (temp., umidità,  
pressione, etc.)

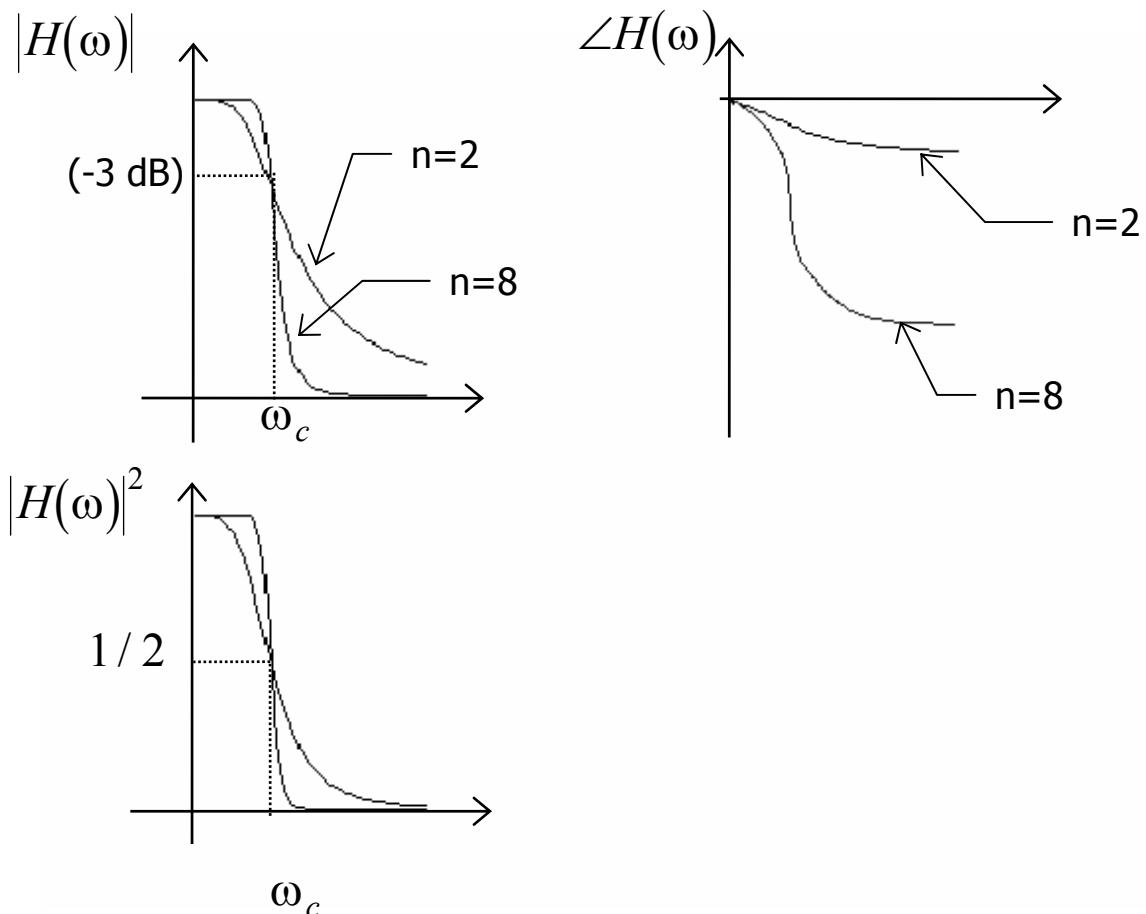
Problemi di taratura

Prestazioni relativamente ridotte  
come potenzialità (va bene per filtri  
standard, difficoltà a realizzare filtri  
più complessi, come derivatori,  
trasformazioni in frequenza, etc.)

# FAMIGLIE DI FILTRI

## I) Butterworth

$$|H(j\omega)| = \frac{G}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



## II) Chebycheff

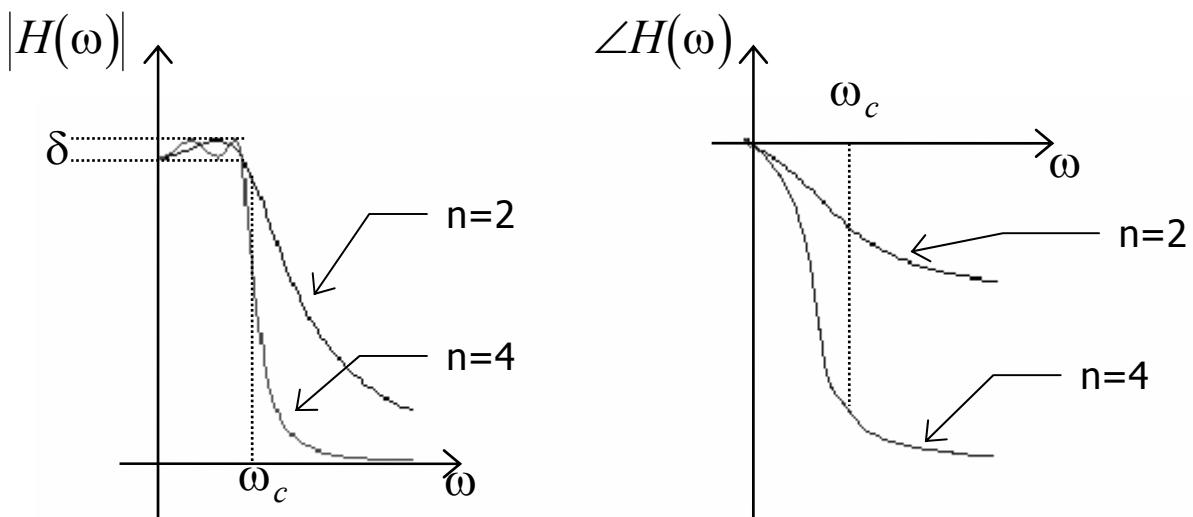
$$|H(j\omega)| = \frac{A}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos \left[ n \cdot \cosh^{-1} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \right]}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$A, \varepsilon = \text{cost.}$

dove

$$\cos \left[ n \cdot \cosh^{-1} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \right]$$

è il polinomio di Chebysheff di grado n.

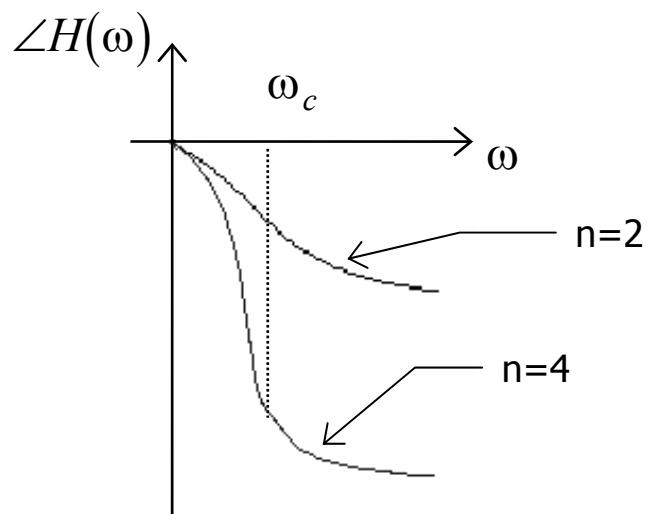
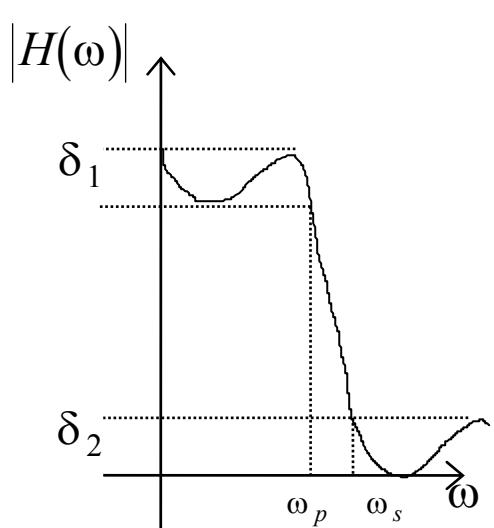


In questo caso  $\delta = 0.5 \text{ dB}$

### III) Ellittici (o di Cauer)

$$|H(j\omega)| = \frac{A}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 U_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}}$$

$U_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$  = funzione ellittica o di Jacobi



PROBLEMA: i filtri analogici delle famiglie Butterworth, Chebysheff, Cauer presentano il problema della non linearità di fase.

SOLUZIONE: si utilizzano filtri di Bessel che presentano una fase lineare o si considerano i filtri di cui sopra soltanto in determinati segmenti della loro caratteristica (linearizzazione a tratti), ovvero si considerano due filtri identici in serie con i coefficienti invertiti, in modo che la non linearità del primo sia compensata dal secondo, ottenendo complessivamente un filtro a fase zero.

N.B. E' possibile trasformare un filtro passa basso analogico in qualsiasi altro tipo di filtro analogico con formule valide a livello generale

## IV) Bessel

$$G(j\omega) = \frac{K_0}{Be_n\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)}$$

$K_0$  è scelto in modo tale che il guadagno in continua sia 1  
 $\omega_0$  è scelto in modo da ottenere la frequenza di taglio desiderata  
 $Be_n$  è il polinomio di Bessel generato come segue:

$$Be_0(j\omega) = 1$$

$$Be_1(j\omega) = 1 + j\omega$$

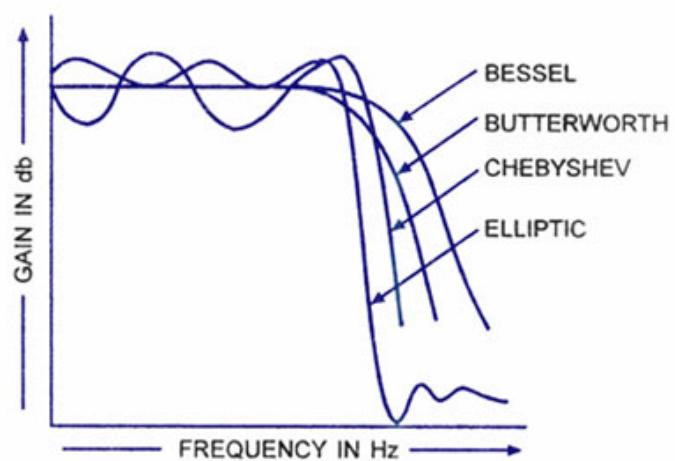
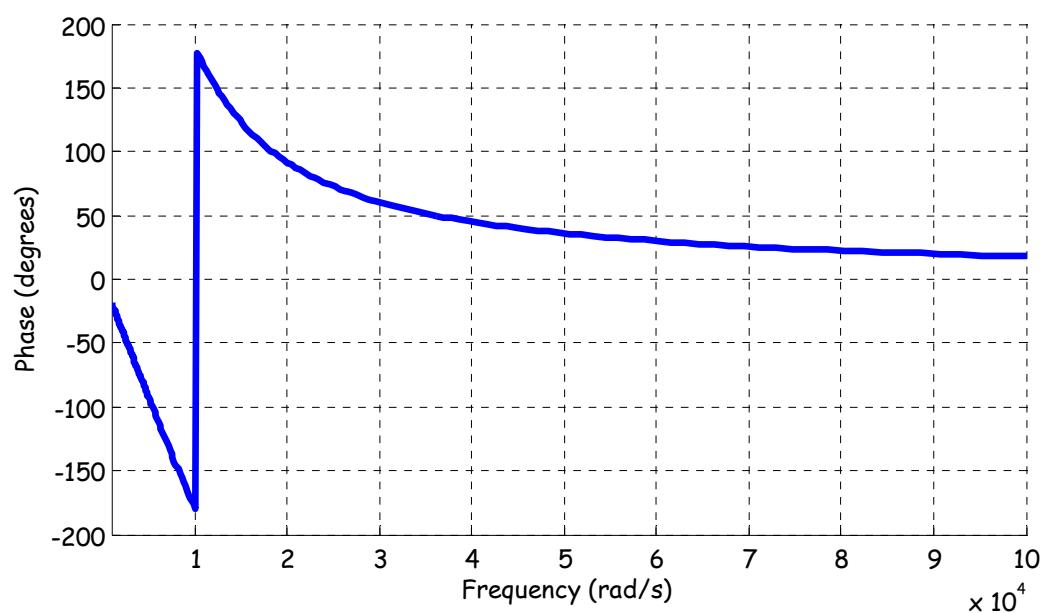
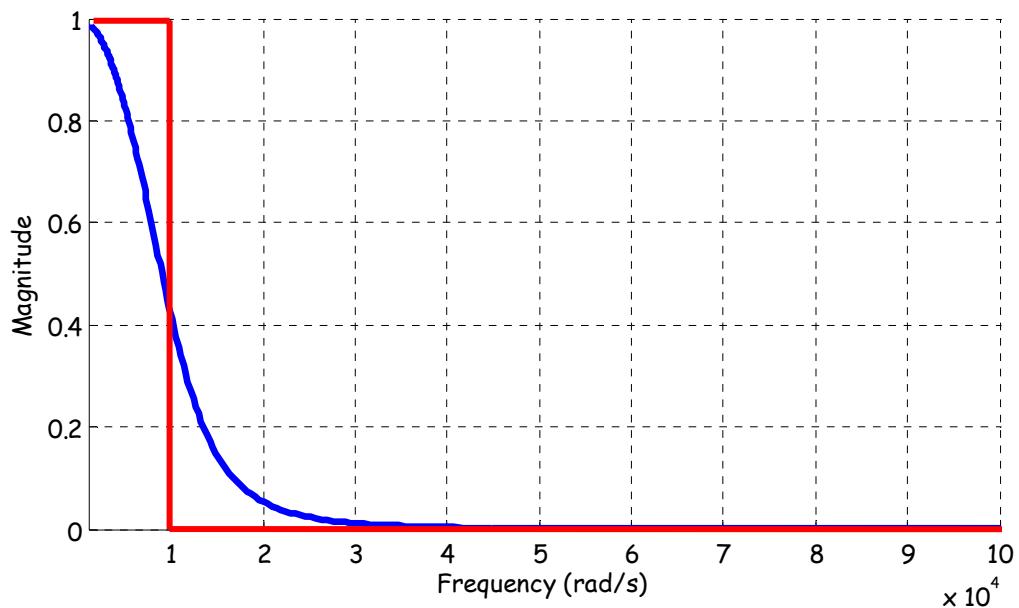
...

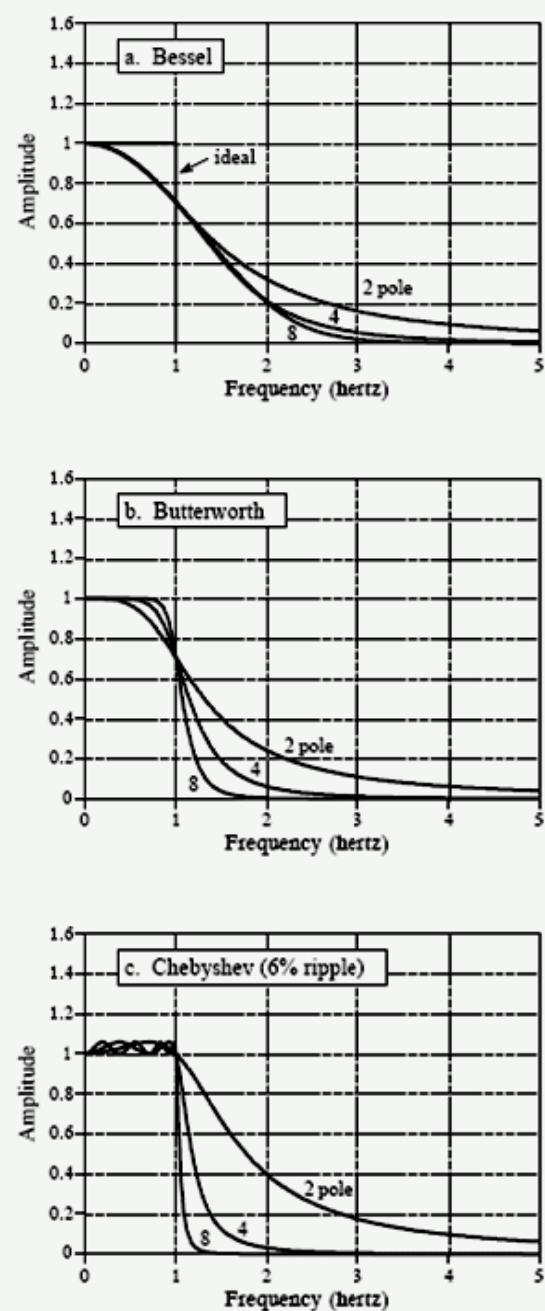
$$Be_n(j\omega) = 2n - 1 \ Be_{n-1}(j\omega) + j\omega 2Be_{n-2}(j\omega)$$

$n$	$Be_n(s)$	$K_0$
1	$1 + s$	1
2	$3 + 3s + s^2$	3
3	$15 + 15s + 6s^2 + s^3$	15
4	$105 + 105s + 45s^2 + 10s^3 + s^4$	105

$$s = j\omega$$

- È un tipo di **filtro che ha fase lineare** su tutta la banda. Ciò significa che tutte le componenti nella banda passante del segnale di ingresso sono ritardate all'incirca dello stesso tempo. Questa caratteristica lo rende particolarmente indicato nelle applicazioni in cui è richiesta la minima distorsione su tutta la banda dei segnali da filtrare.
- Pendenza della banda in transizione bassa in confronto agli altri filtri.
- Idonei per ritardare segnali.





**FIGURE 3-12**  
Frequency response of the three filters on a linear scale. The Butterworth filter provides the flattest passband.

# FILTRI NUMERICI

Definizione generale: un filtro numerico è un qualunque dispositivo che permette di ottenere una serie discreta  $y(k)$  in



uscita a partire da una serie discreta  $u(k)$  in ingresso

Partiamo dall'equazione generale alle differenze, valida per tutti i sistemi lineari discreti :

$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_M u(k-M) - a_1 y(k-1) - \dots - a_N y(k-N)$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot z^{-m}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n \cdot z^{-n}} = \frac{z^{N-M} \left( \sum_{m=0}^M b_m \cdot z^{M-m} \right)}{z^N + \sum_{n=1}^N a_n \cdot z^{N-n}}$$

La  $H(z)$  è perciò caratterizzata a livello generale da N poli ed N zeri (di cui  $N-M$  nell'origine)

Distinguiamo i filtri numerici in 1)filtri ricorsivi e non ricorsivi  
2)filtri FIR ed IIR

## Filtri NON ricorsivi

$$H(z) = \sum_{m=0}^M b_m \cdot z^{-m}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^M b_m \cdot e^{-j\omega m}$$

Dunque si ricava:  $b_m$  = coefficienti della risposta impulsiva

I filtri RICORSIVI hanno invece almeno un coefficiente  $a_n \neq 0$

2) I filtri numerici di tipo FIR (Finite Impulse Response) hanno una risposta all'impulso finita mentre quelli di tipo IIR (Infinite Impulse Response) hanno una risposta all'impulso infinita.

Generalmente è più facile realizzare filtri NON ricorsivi con tecniche FIR e ricorsivi con tecniche IIR:

FIR  $\Leftrightarrow$  non ricorsivi

IIR  $\Leftrightarrow$  ricorsivi

## Es.1: filtro ricorsivo

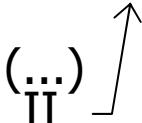
$$y(k) = x(k) - a_1 y(k-1)$$

ingresso impulsivo  $x(0) = 1 \quad h(0) = y(0) = 1$

$$x(1) = 0 \quad h(1) = y(1) = -a_1$$

$$(\dots) \quad (\dots)$$

$$x(m) = 0 \quad h(m) = y(m) = (-a_1)^m$$

(...)   
II

## Es. 2 filtro non ricorsivo

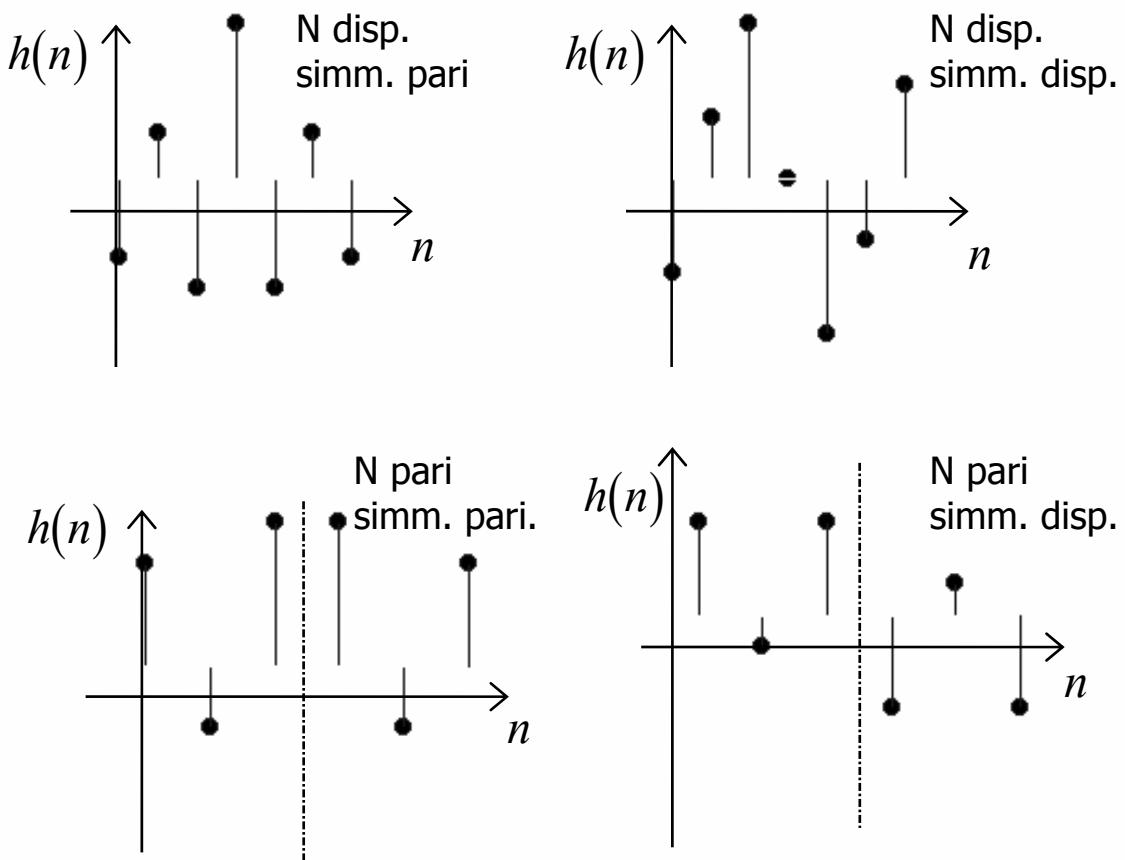
$$y(k) = x(k) + b_1 x(k-1)$$

$$h(0) = 1 \quad h(1) = b_1 \quad h(2) = 0 \quad h(3) = 0 \quad \text{etc.}$$

D'altra parte si possono realizzare anche filtri non ricorsivi con tecniche IIR e filtri ricorsivi con tecniche FIR, ma queste applicazioni sono meno comuni.

## Proprietà importante dei filtri FIR

condizione necessaria e sufficiente affinché un filtro numerico causale abbia fase lineare è che  $h(n) = \pm h(N-1-n)$  per N dispari e per simmetria pari (+) o dispari (-) e che  $h(n) = \pm h(N-n)$  per N pari e per simmetria pari (+) o dispari (-)



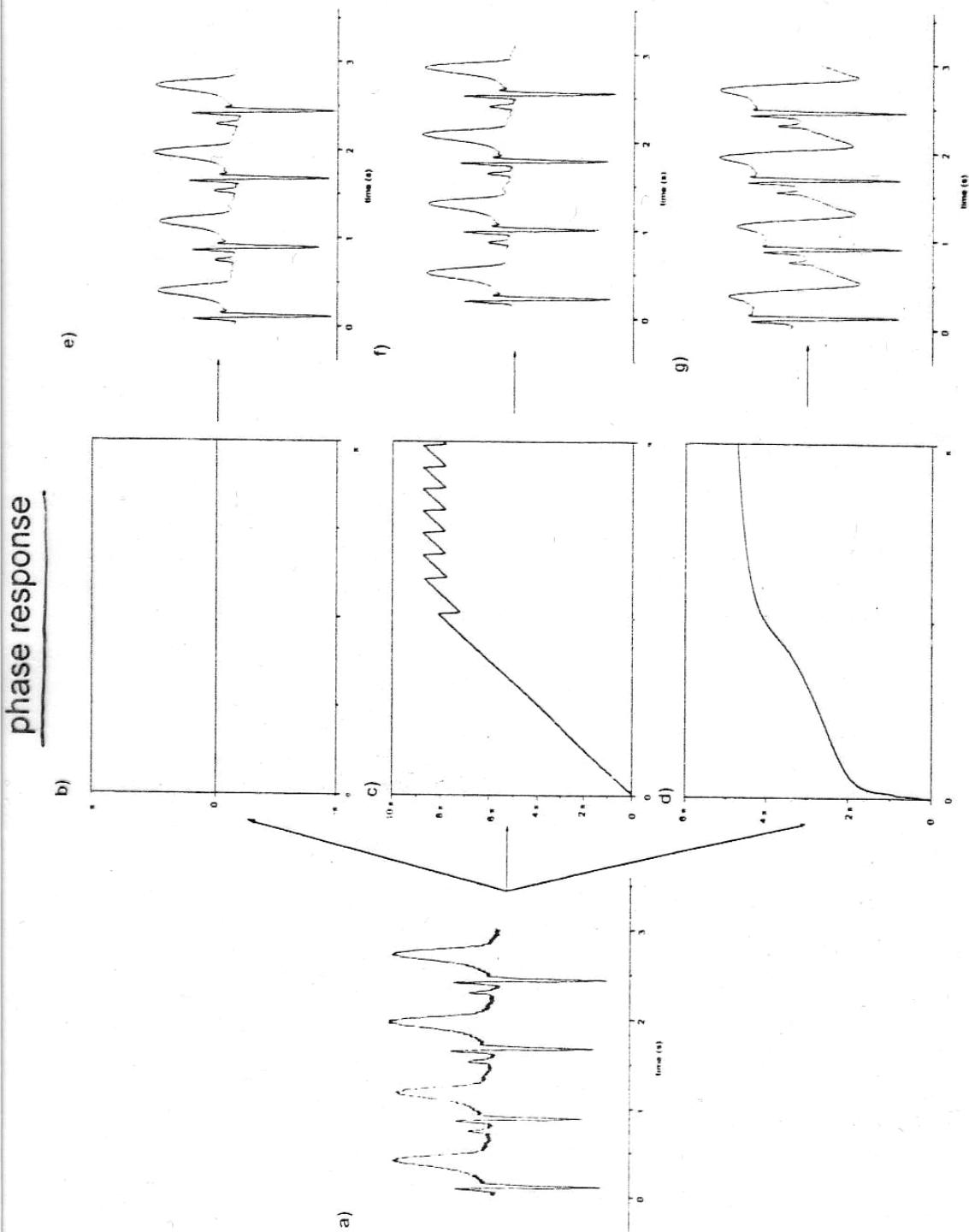
Si può dimostrare che la fase è lineare:

$$\Phi(\omega) = -\left(\frac{N-1}{2}\right) \cdot \omega T \Rightarrow \text{ritardo costante di } \frac{N-1}{2} \text{ camp.}$$

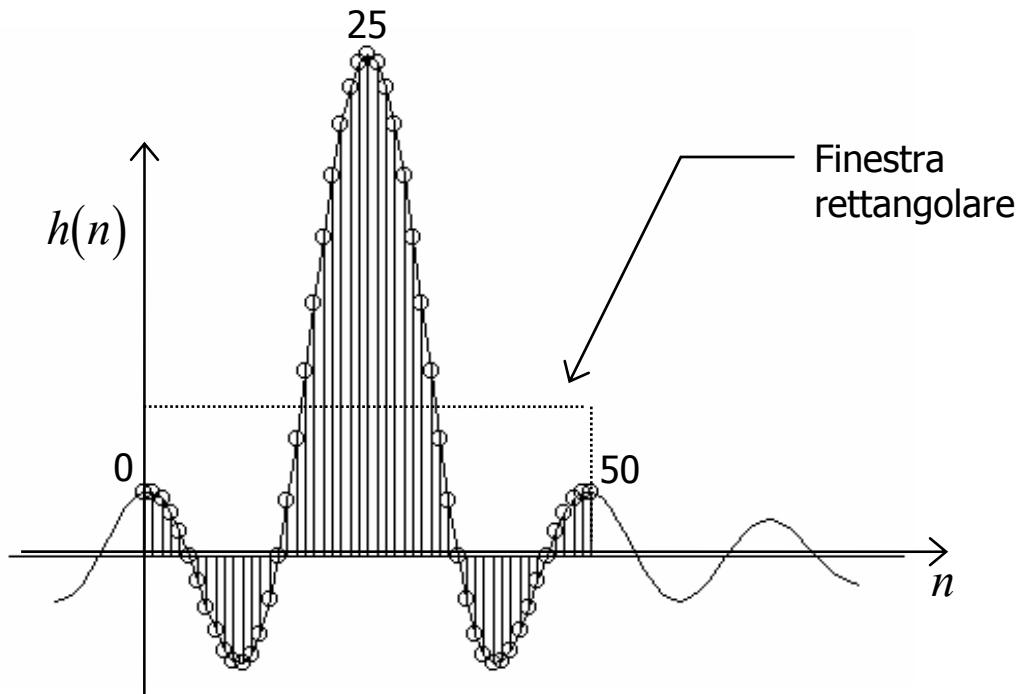
Per N dispari  $\Rightarrow$  il ritardo è pari ad un numero finito di campioni

Per N pari  $\Rightarrow$  c'è anche 1/2 campione.

FIG. 7



Esercizio: trovare  $h(n)$  di un filtro FIR P.B. con  $N=51$  (notare che un filtro ideale P.B. avrebbe bisogno di  $\infty$  coefficienti)



### 1° Metodo di progetto di un filtro FIR:

#### metodo della finestratura

Operazione a due livelli,

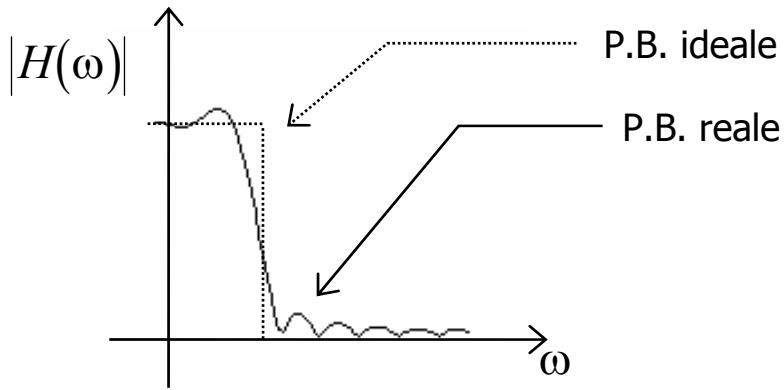
- 1) trovare gli  $h(n)$ , partendo dal filtro ideale e finestrando (considerando cioè un numero limitato di campioni)

- 2) eseguire il filtraggio

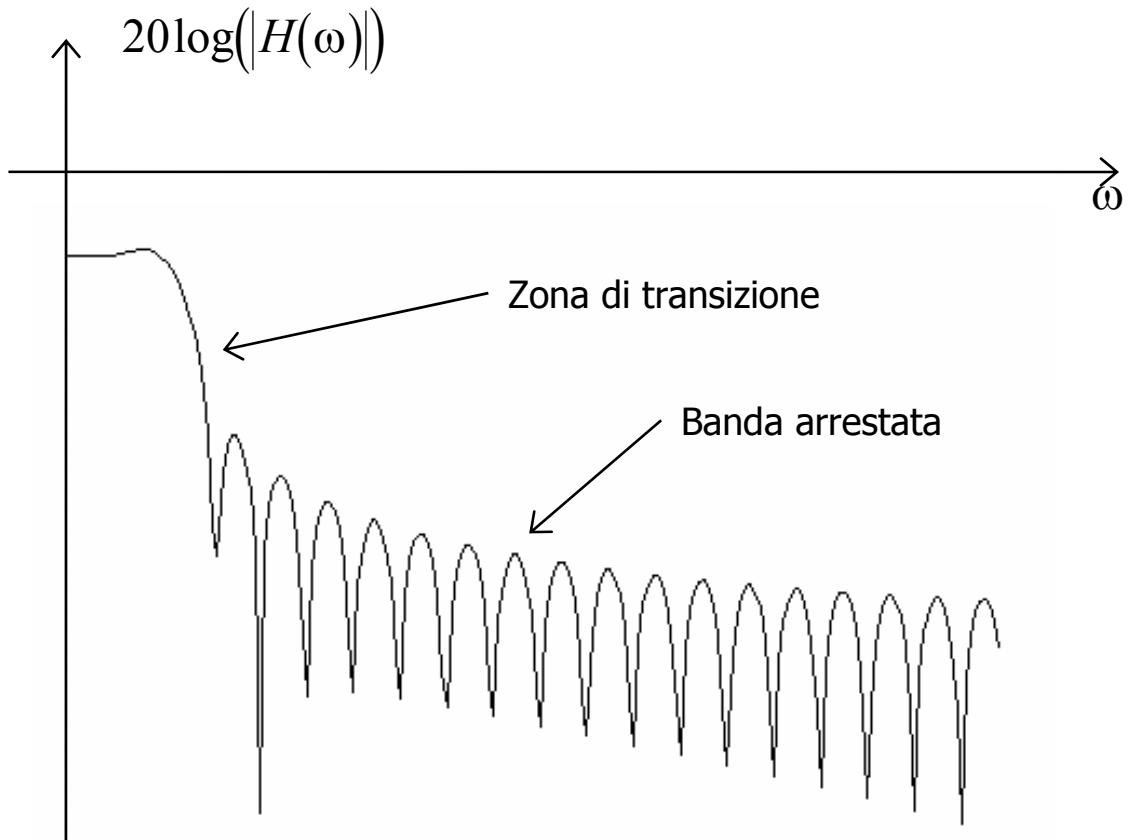
$$h(n) = h^*(n) \cdot w(n) \quad \rightarrow \quad H(\omega) = H^*(\omega) * W(\omega)$$

P.B. ideale      finestra

quindi  $H$  è una versione "sporca" di  $H^*$



Si noti la presenza di  
 1) zona di transizione  
 tra banda passante e  
 banda arrestata  
 2) ripple nelle due  
 bande

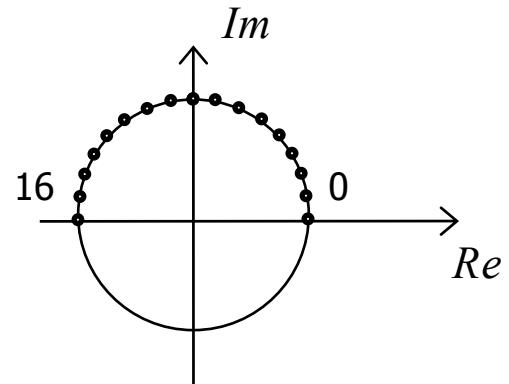
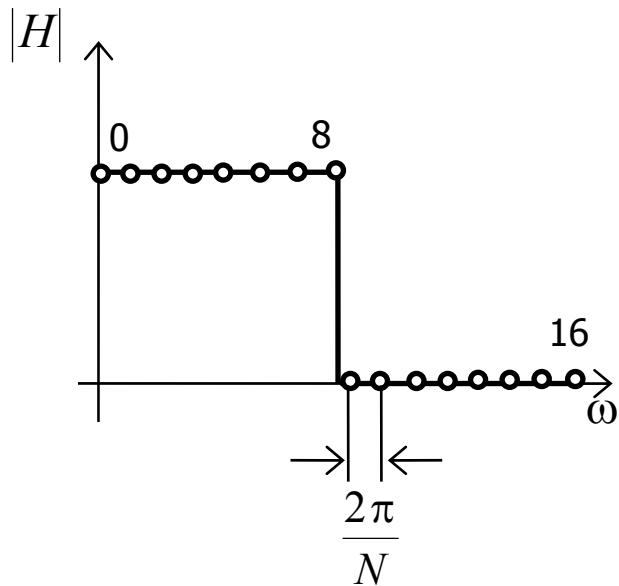


La scelta della finestra influenza la ZONA DI TRANSIZIONE e il  
 RIPPLE.

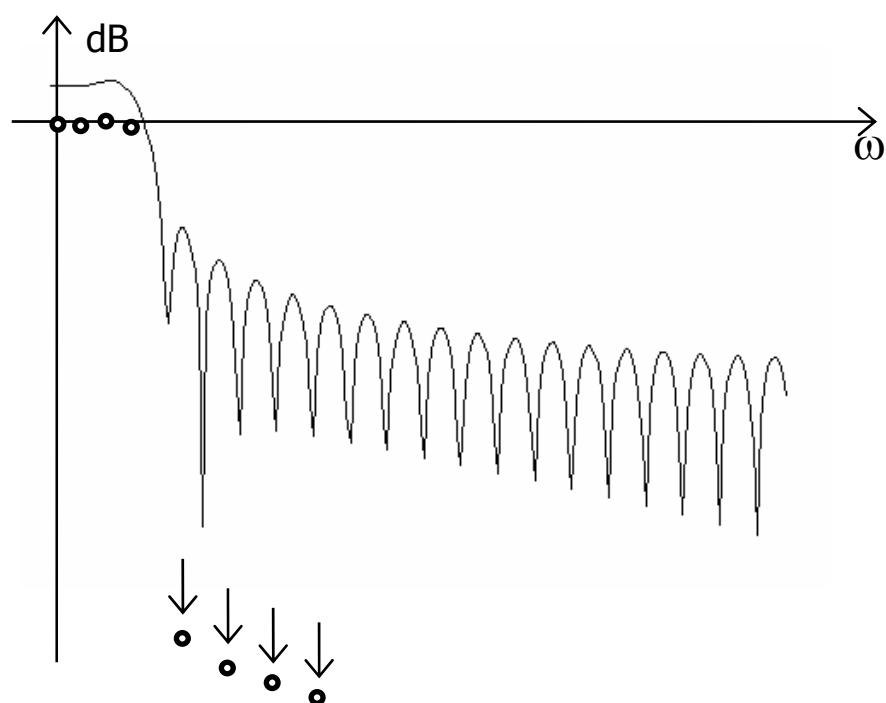
Per i filtri si usano finestre diverse da quelle per l'analisi  
 spettrale

⇒ WEBER, KAISER, LANCZOS, CAPPELLINI e modif.

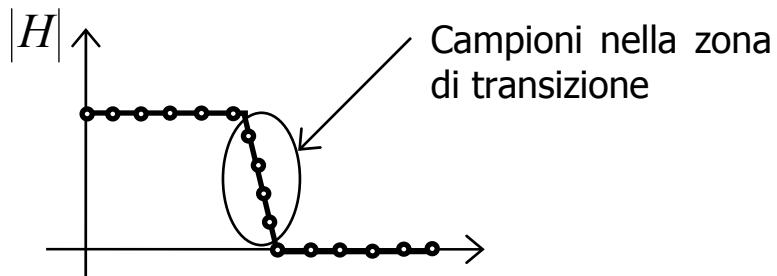
## 2° Metodo di progetto di un filtro FIR: camp. in frequenza



Si campiona la risposta in frequenza di un filtro passa-basso ideale con  $N$  campioni.



Per migliorare l'attenuazione in banda si possono allocare o aggiungere alcuni campioni nella zona di transizione.



Il problema è di ottimizzazione: trovare la posizione degli N punti che massimizzi l'attenuazione minima in banda arrestata (o minimizzi l'errore massimo)

### **Vantaggi e svantaggi dei due metodi**

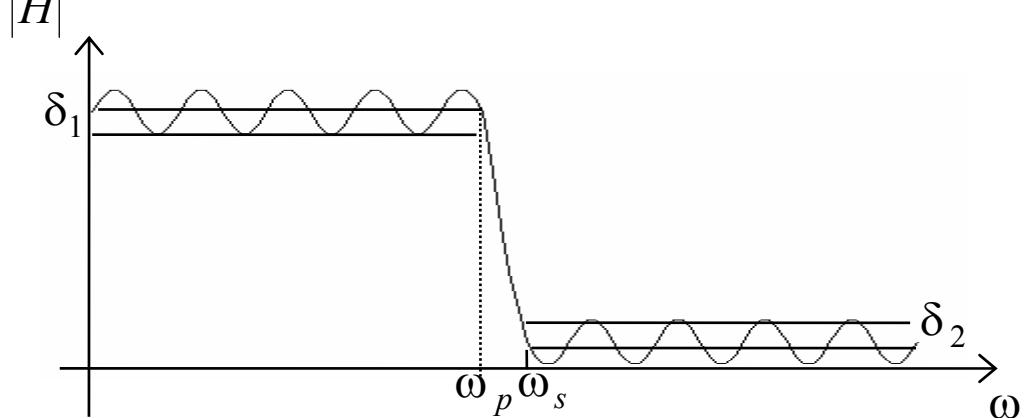
#### **PROBLEMI:**

- non si può predire con sicurezza il valore della frequenza di taglio
- l'errore è max. attorno alla zona di transizione, mentre è min. agli estremi della banda.

⇒ Si introducono filtri più potenti che distribuiscono l'errore in modo più uniforme su tutta la banda: migliorano le prestazioni a parità di N

### 3° Metodo di progetto di un filtro FIR:

**filtri “equiripple” (o ad oscillazione uniforme)**



$$N = 2M + 1$$

Variabili:  $M, \delta_1, \delta_2, \omega_p, \omega_s$

Si assegnano 3 variabili e si fanno variare le altre due fino ad ottimizzare una cifra di merito. Ci sono diversi metodi:

Metodo Parks-Mc Clellan: dati  $M, \omega_p, \omega_s$  si ricavano  $\delta_1, \delta_2$

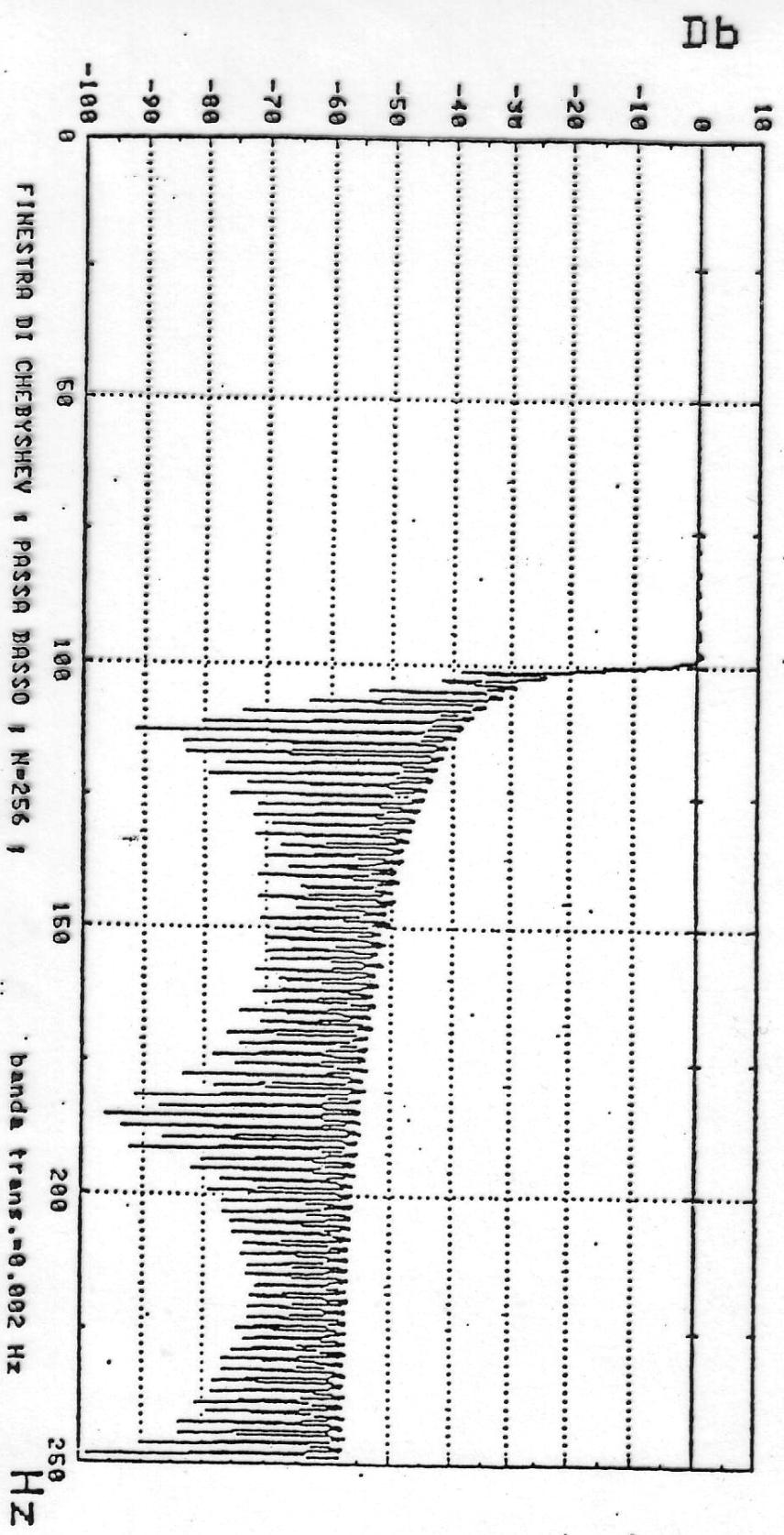
Metodo Hofstetter-Oppenheim: dati  $M, \delta_1, \delta_2$  si ricavano  $\omega_p, \omega_s$

Nota bene: poiché le equazioni utilizzate da questi metodi sono in genere non lineari, si applicano tecniche iterative, la cui complessità cresce al crescere di M

Ci sono però tecniche che richiedono l'individuazione di un polinomio (pol. di Chebysheff) che passi per dei punti prefissati e che minimizzi una cifra di merito (algoritmo tipico della ricerca operativa).

L'algoritmo può NON convergere ed allora si devono richiedere specifiche meno stringenti (minore ripple comporta una zona di trans. più ampia e viceversa).

I filtri equiripple (chiamati impropriamente anche "filtri ottimi") permettono di controllare meglio le prescrizioni e di ottenere filtri migliori (a parità di numero di coefficienti) per le varie applicazioni.



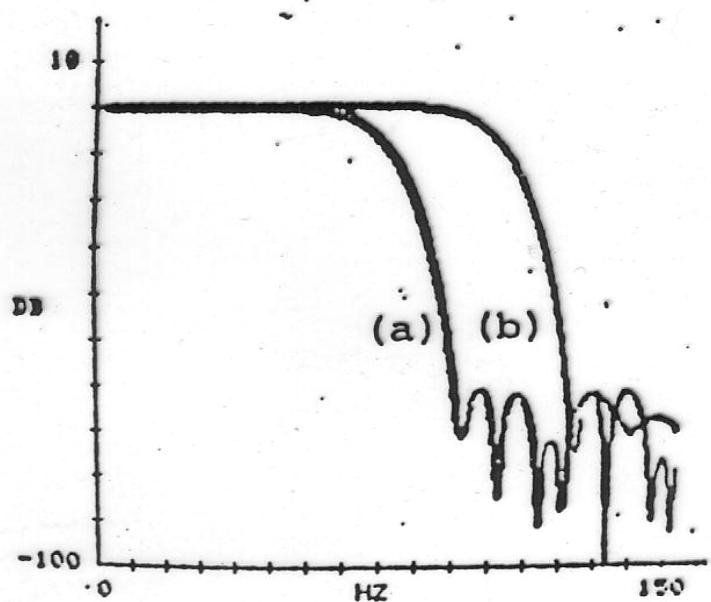
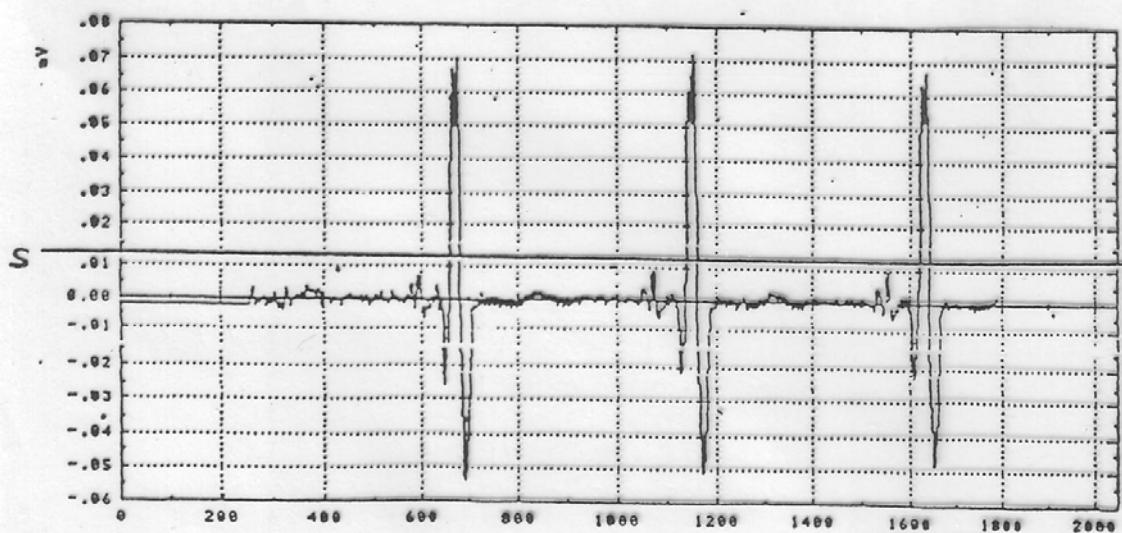
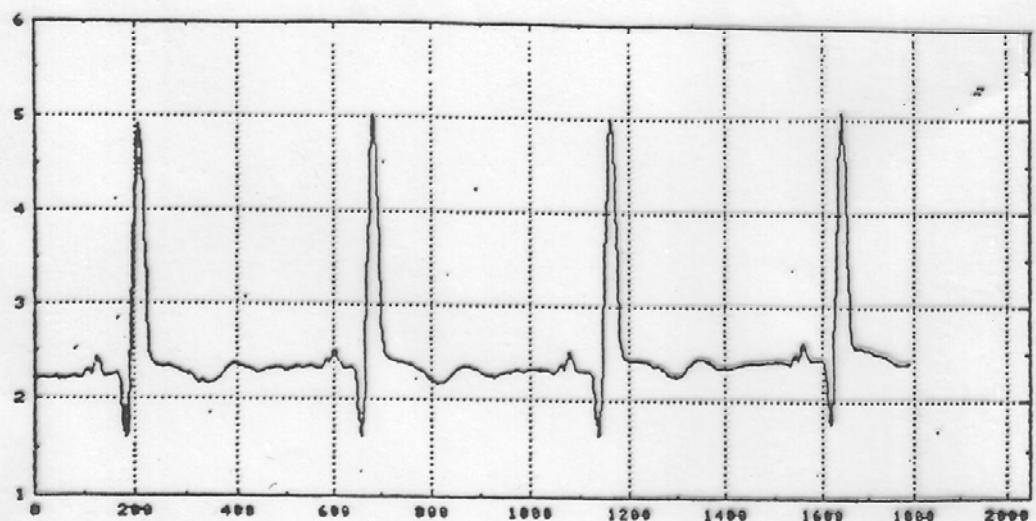
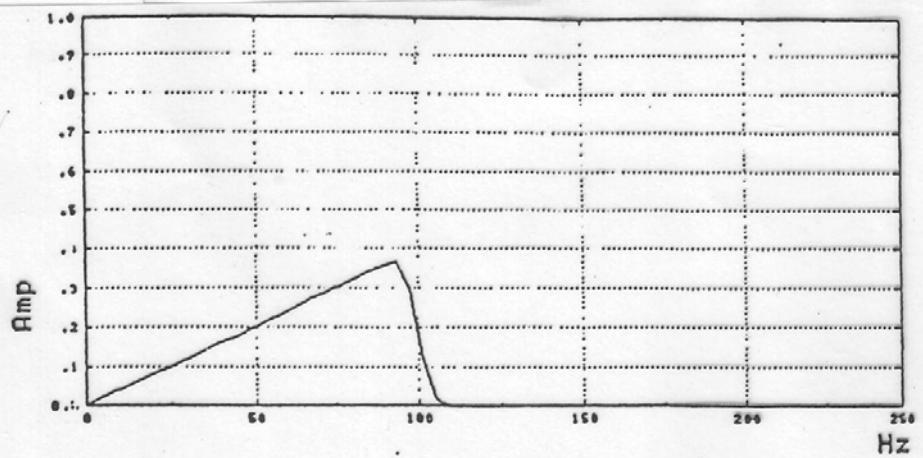
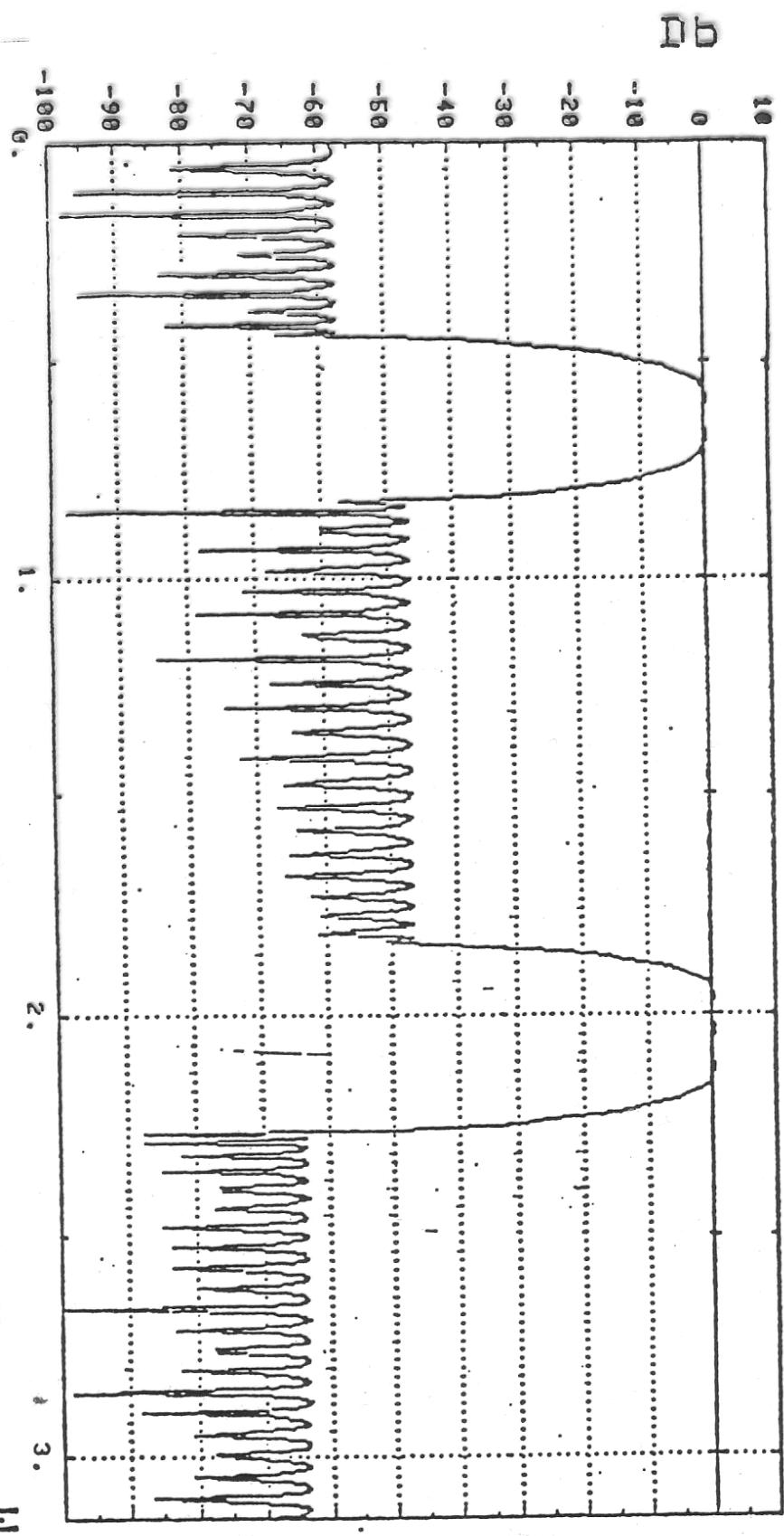


Fig.8 - Low-pass filter characteristics:  
-3dB points  $\rightarrow$  70Hz (a), 100Hz (b),  
Weber-Cappellini window.



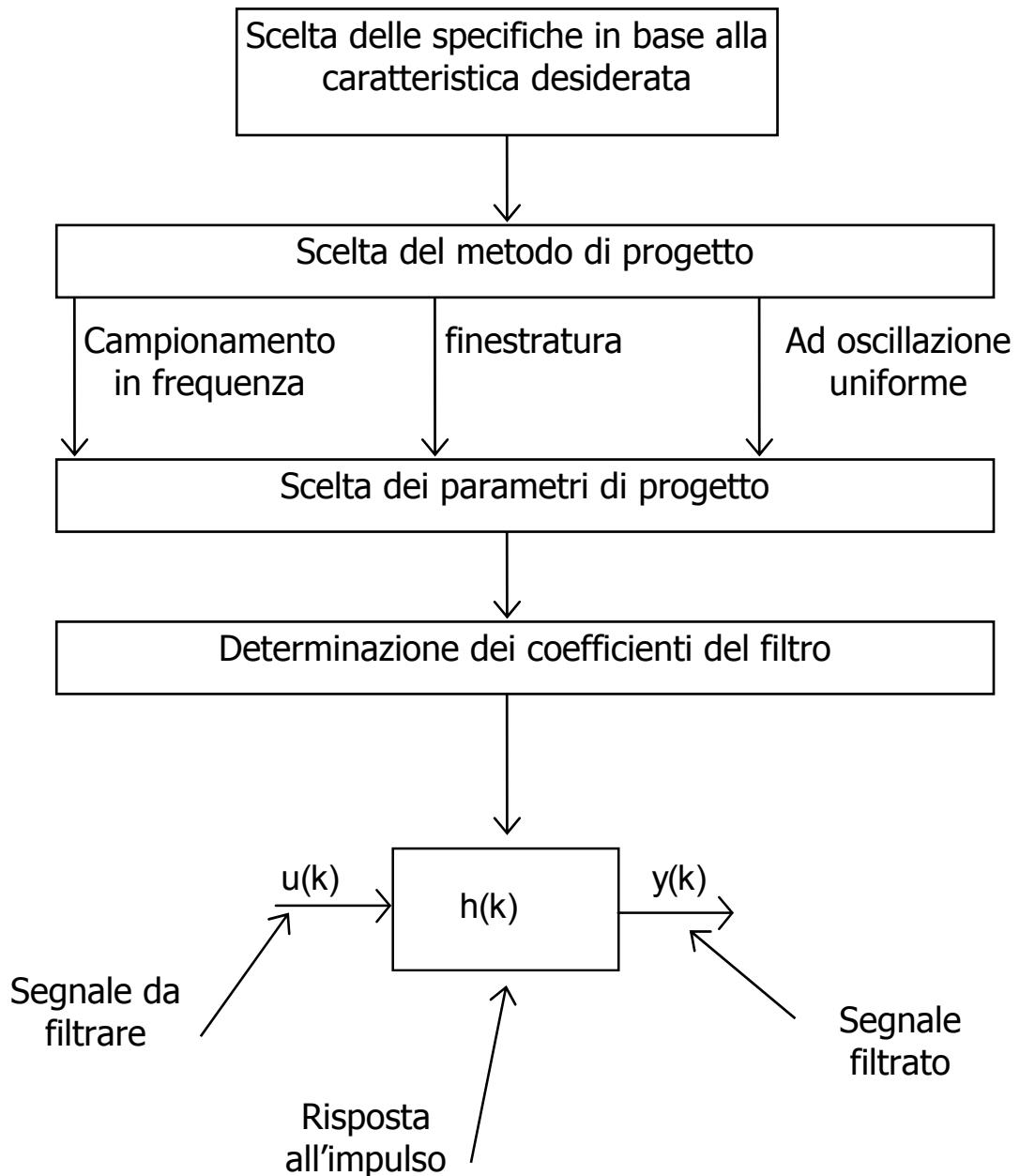


FILTRO DI PARKS MCCLELLAN | NC=128 | multi banda 8-12 Hz, 30-36 Hz | FC=100

W

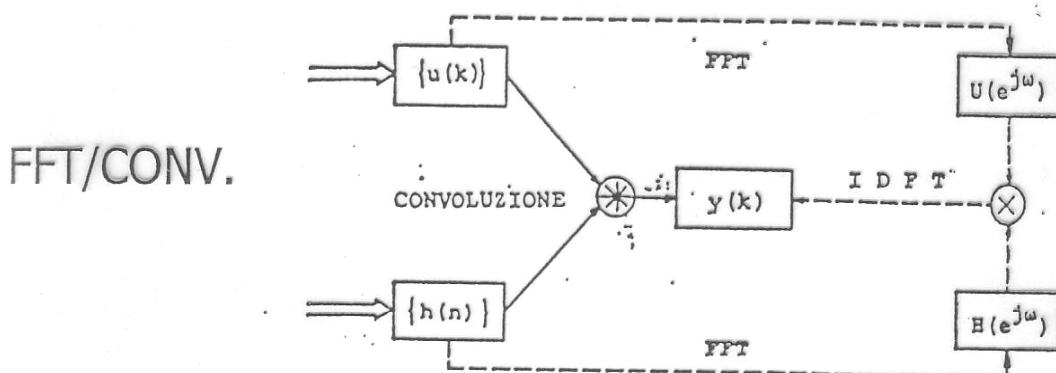
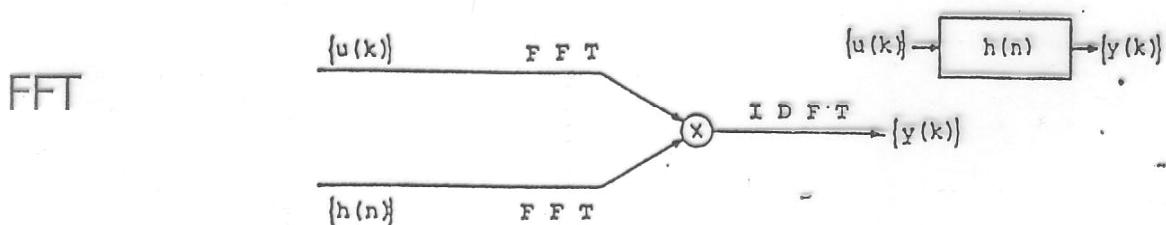
# ESECUZIONE DEL FILTRAGGIO NUMERICO

## schema a blocchi generale

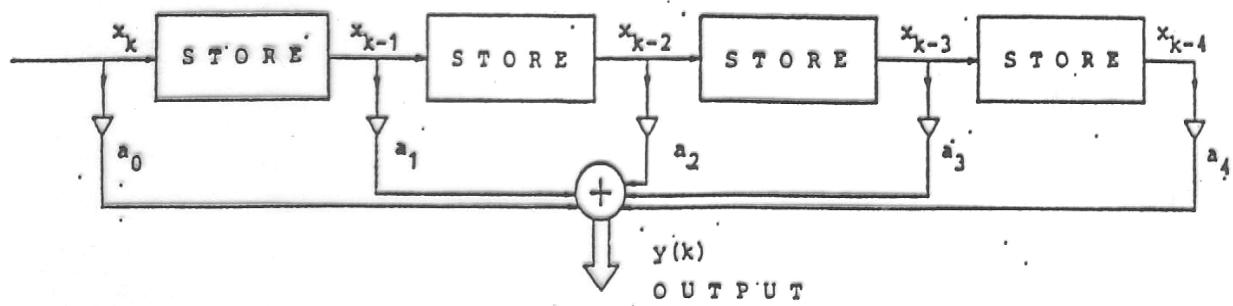


# METODI DI ESECUZIONE DEL FILTRAGGIO

- Dominio della frequenza (FFT)
- Dominio del tempo (convoluzione)



## Convoluzione (implementazione hardware)



$$y(k) = a_0 x_k + a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-2} + a_3 x_{k-3} + a_4 x_{k-4}$$

Fattori da considerare:

1)  $\frac{N-1}{2}$  campioni di ritardo

2) i primi  $N-1$  campioni non sono significativi

Attualmente per eseguire l'operazione di filtraggio si usano le tecniche nel dominio della frequenza (FFT) che sono più veloci computazionalmente

# FILTRI IIR

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot z^{-m}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n \cdot z^{-n}}$$

con  $a_n, b_m$  coefficienti del filtro

## Metodiche di progetto

1) invarianza risposta impulsiva

2) trasformata-z diretta

3) trasformata-z bilineare

In tutti e tre i casi si ottiene la  $H(z)$  di un filtro numerico partendo dall'espressione del corrispondente filtro analogico. I passaggi quindi sono:

- progettare un filtro analogico
- ottenere  $H(z)$  (oppure  $h(n)$ ) tramite una delle tre metodiche 1), 2) o 3)

## 1) INVARIANZA DELLA RISPOSTA IMPULSIVA

Risp. Imp. Filtro numerico

Risp. Imp. Filtro analogico

$$h(n) = h_a(nT) \quad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a\left(\frac{j\omega}{T}\right) \quad \text{per } |\omega| \leq \pi$$

rispettando il teorema di Shannon

$$\omega_C = \Omega_a \cdot T$$

Solitamente  $\Omega_a$  è prefissato, e quindi lo è anche T.

Problemi:

- aliasing (diminuisce al diminuire di T)
- guadagno = 1/T (diverge per T → 0)
- se il filtro analogico  $h_a$  è stabile, non è detto che lo sia  $h(n)$
- se il filtro  $h_a$  è a fase lineare, non è detto che lo sia  $h(n)$

## 2) TRASFORMATA z DIRETTA

Poli e zeri si trasformano secondo:

$$(s + a_i) \leftrightarrow (1 - z^{-1} \cdot e^{-a_i T})$$

evita i problemi di aliasing

### 3) TRASFORMATA z BILINEARE

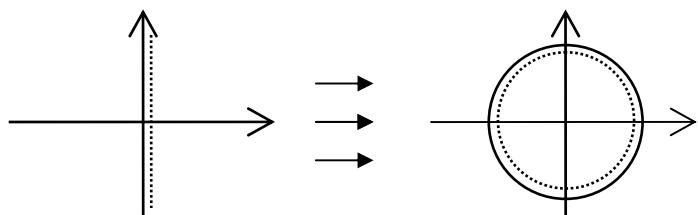
$$s \leftrightarrow k \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

dove  $k = \text{costante} \Rightarrow \Omega_a = k \tan\left(\frac{\omega_c T}{2}\right)$

Noti  $\Omega_a$  ed  $\omega_c$  si ricava k e si esegue la trasformazione.

Caratteristiche:

- filtri (n) stabili da (a) stabili



- non c'è aliasing

Rimangono sempre distorsioni in frequenza rispetto ad (a), ed anche le linearità di fase in (a) non viene mantenuta in (n).

# VANTAGGI E SVANTAGGI FIR - IIR

## **VANTAGGI IIR:**

- famiglie classiche di filtri (B, C, E)
- ↓↓ difficoltà computazionali (calcolatore tascabile)
- ↑↑ prestazioni (pochi coeff. → filtri  $\approx$  ideali)
- poli posti in qualunque posto all'interno del cerchio unitario

## **SVANTAGGI IIR:**

- ↓↓ flessibili e versatili come prestazioni (solo filtri tradizionali)
- fase non lineare
- possono essere BIBO instabili

---

## **VANTAGGI FIR:**

- ↑↑ flessibilità
- $|H(z)|$  meno distorcente e fase lineare se i campioni sono simmetrici
- sempre stabili
- uso di algoritmi veloci (tipo FFT) per ↓↓ complessità e velocità di calcolo

## **SVANTAGGI FIR:**

- ↑↑ complessità di calcolo (5-10 volte meno veloci degli IIR)
- prestazioni ↑↑ solo per N ↑↑
- poli solo nell'origine
- non esiste una famiglia standard di filtri
- imprecisione nella scelta di  $\omega_C$