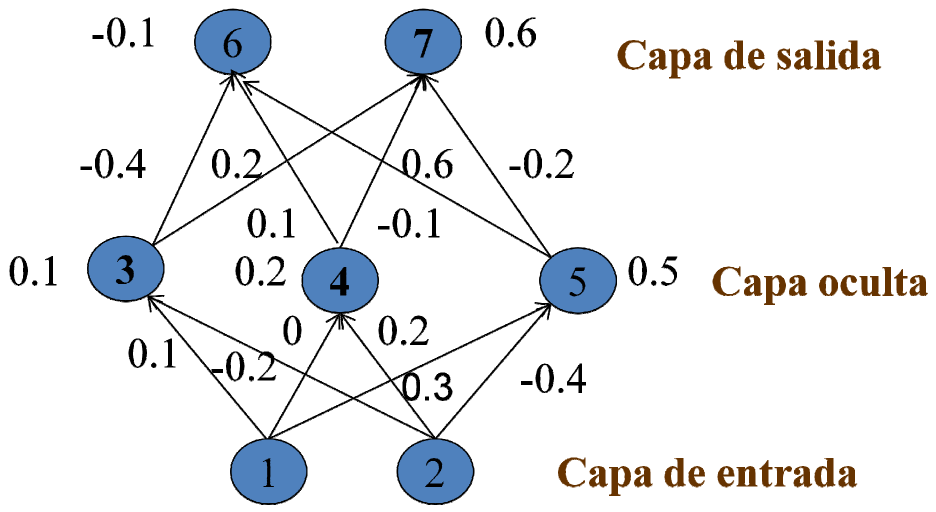
Ejercicio 1.- Explique brevemente los métodos de aprendizaje para redes neuronales de tipo MLP y de tipo función de base radial, RBF en clasificación.

Solución.- Las redes MLP entrenan, por lo general, tanto los pesos de la capa de entrada a la oculta como la oculta a la de salida, mediante un algoritmo de retropropagación del error, utilizando un método de gradiente descendente donde la función a optimizar es, o la entropía cruzada, o el RMSE de las probabilidades a posteriori. Las redes RBF se entrenan habitualmente en dos pasos, en el primero, asociado a los pesos de capa de entrada a oculta, se utiliza un método de k-medias para encontrar el número de nodos en capa oculta así como los radios y los centros de la neuronas de la capa oculta. En un segundo paso, asociado al entrenamiento de los pesos de capa oculta a capa de entrada, se utiliza un modelo lineal usando en su caso la matriz de Moore-Penrose.

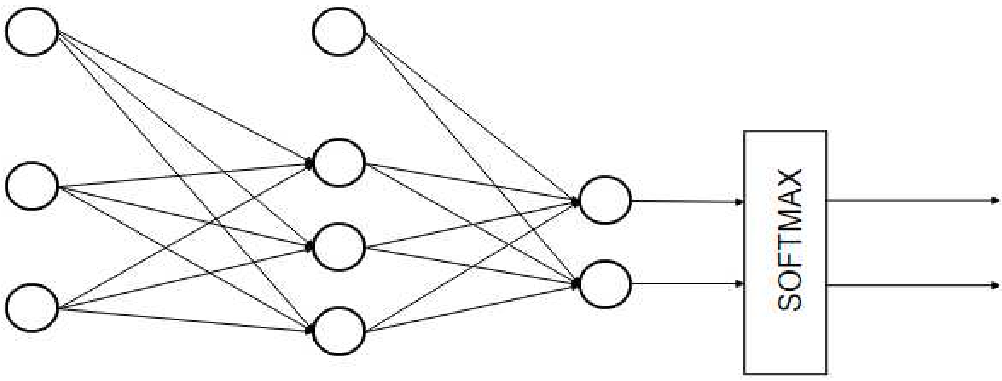
Ejercicio 2.- Supongamos que queremos clasificar a los posibles clientes bancarios como buenos acreedores o malos acreedores para las solicitudes de préstamos. Tenemos un conjunto de datos que describe a antiguos clientes utilizando los siguientes atributos:
Estado civil {casado, soltero, divorciado}, Género {hombre, mujer},
Edad {[18..30), [30..50), [50..65), [65+]},
Ingresos Anuales {[10K,25K), [25K,50K), [50K,65K), [65K,100K), [>100K)}. K=1000 ∈
Diseñe una red neuronal que pueda ser entrenada para predecir la calificación crediticia de un solicitante.

Ejercicio 3.- Dada la siguiente red neuronal con pesos inicializados como se muestra en la imagen, explique la arquitectura de red sabiendo que estamos tratando de distinguir entre clavos y tornillos y un ejemplo de tuplas de entrenamiento es el siguiente: T_1 {0.6, 0.1, clavo}, T_2 {0.2 , 0.3, tornillo}.



Dada una tasa de aprendizaje ŋ igual a 0,1 y siendo los pesos como se indica en la figura anterior, hacer la propagación hacia adelante de las señales en la red utilizando T_1 como entrada, a continuación, realizar la propagación posterior del error. Muestre los cambios de los pesos.

Solución.- La función de activación de las neuronas de capa oculta es de Unidad Sigmoide, mientras que en la capa de salida es lineal. Se le aplica una función softmax para poder obtener un resultado de probabilidad entre 0 y 1 a la salida.



Capa de entrada

$$\text{Sesgo} \rightarrow \mathrm{w}_{10} = 0.1\,; \mathrm{w}_{20} = 0.2\,; \mathrm{w}_{30} = 0.5$$

$$\text{x1} \rightarrow \mathrm{w}_{11} = 0.1\,; \mathrm{w}_{21} = 0.0\,; \mathrm{w}_{31} = 0.3$$

$$\text{x2} \rightarrow \mathrm{w}_{12} = -0.2\,; \mathrm{w}_{22} = 0.2\,; \mathrm{w}_{32} = -0.4$$

Capa oculta

$$\text{Sesgo} \rightarrow \mathrm{v}_{10} = -0.1\,; \mathrm{v}_{20} = 0.6$$

$$\text{S1} \rightarrow \mathrm{v}_{11} = -0.4\,; \mathrm{v}_{21} = 0.2$$

$$\text{S2} \rightarrow \mathrm{v}_{12} = 0.1\,; \mathrm{v}_{22} = -0.1$$

$$\text{S3} \rightarrow \mathrm{v}_{13} = 0.6\,; \mathrm{v}_{23} = -0.2$$

Propagación hacia delante

$$\sigma(\mathrm{out}_1^1) = \sigma(0.1 + 0.1 * 0.6 - 0.2 * 0.1) = \sigma(0.14) = 0.534 = \mathrm{f}(\mathrm{H}_1)$$

$$\sigma(\mathrm{out}_2^1) = \sigma(0.2 + 0.0 * 0.6 + 0.2 * 0.1) = \sigma(0.22) = 0.554 = \mathrm{f}(\mathrm{H}_2)$$

$$\sigma(\mathrm{out}_3^1) = \sigma(0.5 + 0.3 * 0.6 - 0.4 * 0.1) = \sigma(0.64) = 0.654 = \mathrm{f}(\mathrm{H}_3)$$

$$\mathrm{out}_1^2 = -0.1 - 0.4 * 0.534 + 0.1 * 0.554 + 0.6 * 0.654 = 0.1342$$

$$\mathrm{out}_2^2 = 0.6 + 0.2 * 0.534 - 0.1 * 0.554 - 0.2 * 0.654 = 0.5206$$

Aplicamos la función softmax:

$$\sigma(\text{out}_1^2) = \frac{e^{0.1342}}{e^{0.1345} + e^{0.5206}} = 0.4047 = f(O_1) = O_1$$

$$\sigma(\text{out}_2^2) = \frac{e^{0.5206}}{e^{0.1345} + e^{0.5206}} = 0.5952 = f(O_2) = O_2$$

Propagación hacia atrás

$$t_1 = 0\,; t_2 = 1$$

$$f'(O_1) = f(O_1) * \left(1 - f(O_1)\right) = 0.4047 * (1 - 0.4047) = 0.2409$$

$$d(O_1) = f'(O_1) * (t_1 - O_1) = 0.2409 * (0 - 0.4047) = -0.0974$$

$$f'(O_2) = f(O_2) * \left(1 - f(O_2)\right) = 0.5952 * (1 - 0.5952) = 0.2409$$

$$d(O_2) = f'(O_2) * (t_2 - O_2) = 0.2409 * (1 - 0.5952) = 0.0975$$

$$f'(H1) = f(H1) * (1 - f(H1)) = 0.248844$$

$$d(H1) = f'(H1) * (-0.4 * (-0.0974) + 0.2 * 0.0975) = 0.01454$$

$$f'(H2) = f(H2) * (1 - f(H2)) = 0.247084$$

$$d(H2) = 0.247084 * (0.1 * (-0.0974) - 0.1 * 0.0975) = -4.81 * 10^{-3}$$

$$f'(H3) = f(H3) * (1 - f(H3)) = 0.226284$$

$$d(H3) = 0.226284 * (0.6 * (-0.0974) - 0.2 * 0.0975) = -0.017636$$

Actualizamos los pesos:

$$v_{ij} = v_{ij} + \eta * f\left(H_j\right) * d(O_i)$$

$$v_{10} = -0.1 + 0.1 * (1.0) * (-0.0974) = -0.10974$$

$$v_{20} = 0.6 + 0.1 * (1.0) * (0.0975) = 0.60975$$

$$v_{11} = -0.4 + 0.1 * 0.534 * (-0.0974) = -0.405201$$

$$v_{21} = 0.2 + 0.1 * 0.534 * 0.0975 = 0.205206$$

$$v_{12} = 0.1 + 0.1 * 0.554 * (-0.0974) = 0.094604$$

$$v_{22} = -0.1 + 0.1 * 0.554 * 0.0975 = -0.094598$$

$$v_{13} = 0.6 + 0.1 * 0.654 * (-0.0974) = 0.593630$$

$$v_{23} = -0.2 + 0.1 * 0.654 * 0.0975 = -0.193623$$

$$w_{10} = 0.1 + 0.1 * 1.0 * 0.01454 = 0.101454$$

$$w_{20} = 0.2 + 0.1 * 1.0 * -4.81 * 10^{-3} = 0.199519$$

$$w_{30} = 0.5 + 0.1 * 1.0 * (-0.017636) = 0.4982364$$

$$w_{11} = 0.1 + 0.1 * 0.6 * 0.01454 = 0.1008724$$

$$w_{21} = 0.0 + 0.1 * 0.6 * -4.81 * 10^{-3} = -2.886 * 10^{-4}$$

$$w_{31} = 0.3 + 0.1 * 0.6 * (-0.017636) = 0.298941$$

$$w_{21} = -0.2 + 0.1 * 0.1 * 0.01454 = -0.19985$$

$$w_{22} = 0.2 + 0.1 * 0.1 * -4.81 * 10^{-3} = 0.199951$$

$$w_{32} = -0.4 + 0.1 * 0.1 * (-0.017636) = 0.40017636$$

Ejercicio 4.- Analizar como la siguiente red de Hopfield actualiza su estado.
Siendo la matriz de pesos de la forma

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El estado inicial es (1,-1,1).
Solución.- A continuación, activamos la red en la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Si elegimos una metodología síncrona en la primera iteración, la entrada total a la neurona 1 es -3, y por lo tanto su salida es -1. La entrada total a la neurona 2 es 2, y por lo tanto su salida es 1. la entrada total a la neurona 3 es -3, y por lo tanto su salida es -1. De esta forma pasamos del estado (1,-1,1) al estado (-1,1,-1).

En la segunda iteración activamos la red de nuevo en la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ahora, la entrada total a la neurona 1 es 3, y por lo tanto su salida es 1. La entrada total a la neurona 2 es -2, y por lo tanto su salida es -1. la entrada total a la neurona 3 es 3, y por lo tanto su salida es 1. De esta forma pasamos del estado (-1,1,-1) al estado (1,-1,1). De esta forma tenemos un bucle entre ambos estados, ninguno de ellos estable.

Ejercicio 5.- Analice porque la simetría de la matriz de pesos es importante para la convergencia. a) Considere una red de Hopfield de 2 neuronas con la matriz de pesos

$$W=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Examine si la red converge o no si el estado inicial es v = (1, -1)^T

b) Establezca ahora como matriz de pesos

$$W=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hacer todos los pasos anteriores de nuevo. ¿La red alcanza un estado estable?

Solución.-

a) Activamos la red en la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De esta forma pasamos del estado v = (1, -1)^T al estado v´ = (-1, -1)^T. Si seguimos activando la red tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

por lo que no hay ningún estado estable

b) Activamos la red en la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma pasamos del estado v = (1, -1)^T al estado v´ = (-1, 1)^T. Si seguimos activando la red tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

por lo que tenemos un bucle entre ambos estados, pero ninguno de los dos es estable.

En cambio si suponemos que el estado inicial es **v** = (1, 1)^T

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces este estado si es un estado estable y de la misma forma como $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, también el estado v = (-1,- 1)^T es estable

Ejercicio 6.- Estados estables de una red de Hopfield

Demuestre que los estados estables de una red de Hopfield son exactamente los mínimos locales de la función de energía. Recuerde que

$$E(t)=-\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij} s_i s_j + \sum_i s_i \Theta_i$$

Solución.- s_i es inicialmente –1 (inactivo) en el instante t y $\sum_j w_{ij} s_j < \Theta_i$ o igual a 0 entonces s_i sigue siendo -1 en el instante t+1.

Si consideramos que tenemos sólo dos estados. Si los dos estados son inactivos entonces tenemos un estado estable pues no cambia, de esta forma tanto s_1 como s_2 tendrán valores de -1 y la función de energía será

$$E(t) = -\frac{1}{2} w_{12} s_1 s_2 - \frac{1}{2} w_{21} s_2 s_1 + s_1 \Theta_1 + s_2 \Theta_2; \text{ para } s_1 = -1 \text{ y } s_2 = -1, \text{ tenemos}$$

$$E(t) = -\frac{1}{2} w_{12} - \frac{1}{2} w_{21} - \Theta_1 - \Theta_2 = -w_{12} - \Theta_1 - \Theta_2$$

Si s_1 es inicialmente inactivo y se verifica que $w_{12} s_2 \leq \Theta_1$ entonces s_1 seguirá siendo inactivo, pero s_2 es activo por lo que su valor será 1 y deberá seguir siendo activo para que el estado sea estable, entonces la función de energía en el instante t será

$$E(t) = -\frac{1}{2} w_{12} s_1 s_2 - \frac{1}{2} w_{21} s_2 s_1 + s_1 \Theta_1 + s_2 \Theta_2; \text{ para } s_1 = -1 \text{ y } s_2 = 1 \text{ tenemos}$$

$$E(t) = w_{12} - \Theta_1 + \Theta_2, \text{ siendo } w_{12} \leq \Theta_1$$

y en el instante t+1, para s_1(t+1)=-1, y s_2(t+1)= 1, tenemos

$$E(t+1) = \frac{1}{2} w_{12} + \frac{1}{2} w_{21} - \Theta_1 + \Theta_2 = w_{12} - \Theta_1 + \Theta_2, \text{ siendo } w_{12} \leq \Theta_1 \text{ , } w_{12} - \Theta_1 \leq 0$$

luego no varía el valor de la energía y estamos ante un mínimo local

De forma similar si s_2 es inicialmente inactivo y se verifica que $w_{12} s_1 \leq \Theta_2$ entonces s_2 seguirá siendo inactivo, pero s_1 es activo por lo que su valor será 1 y deberá seguir siendo activo para que el estado sea estable

$$E(t) = E(t+1) = w_{12} + \Theta_1 - \Theta_2, \text{ siendo } w_{12} \leq \Theta_2, \text{ esto es } w_{12} - \Theta_2 \leq 0$$

Habría que probar que la función de energía de estados no estables es mayor que la de los estados estables.

Si s_1 es inicialmente inactivo y se verifica que $w_{12} s_2 > \Theta_1$ entonces s_1 pasará a ser activo, pero s_2 es activo por lo que su valor será 1 y si sigue siendo activo, entonces la función de energía en el instante t será

$$E(t) = -\frac{1}{2} w_{12} s_1 s_2 - \frac{1}{2} w_{21} s_2 s_1 + s_1 \Theta_1 + s_2 \Theta_2; \text{ para } s_1 = -1 \text{ y } s_2 = 1 \text{ tenemos}$$

$$E(t) = w_{12} - \Theta_1 + \Theta_2, \text{ siendo } w_{12} > \Theta_1$$

Mientras que en el instante t+1, para s_1(t+1)=1, y s_2(t+1)=1

$$E(t+1) = -\frac{1}{2} w_{12} - \frac{1}{2} w_{21} + \Theta_1 + \Theta_2 = -w_{12} + \Theta_1 + \Theta_2, \text{ siendo } w_{12} > \Theta_1 \text{ , } -w_{12} + \Theta_1 < 0$$

Si s_1 esta activo y se verifica $w_{12}s_2 \leq \Theta_1$ entonces s_1 pasará a ser inactivo, siendo s_2 activo, luego

$$E(t+1) = \frac{1}{2}w_{12} + \frac{1}{2}w_{21} - \Theta_1 + \Theta_2 = \mathrm{w}_{12} - \Theta_1 + \Theta_2,\ \text{siendo } \mathrm{w}_{12} < \Theta_1\ ,\ \mathrm{w}_{12} - \Theta_1 < 0$$

Ejercicio 7.-

a) Calcule la matriz de pesos para una red de Hopfield con los dos vectores $\mathbf{x_1}$=(1, -1, 1, -1, 1, 1)^T y $\mathbf{x_2}$=(1, 1, 1, -1, -1, -1)^T almacenados en ella.

b) Confirme que ambos vectores son estados estables de la red.

Solución.- Los pesos de la red se calculan como $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{x_i x_i^T} - N\mathbf{I}$**,** de esta forma

$$\mathbf{x_1 x_1^T} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & -1, & 1, & -1, & 1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x_2 x_2^T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & -1, & -1, & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x_1 x_1^T} + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Y por tanto

$$\mathbf{W}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para confirmar que son estados estables activamos la red en la forma

$$\mathbf{W}.\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

, como podemos ver se mantiene el signo por lo que no cambia de estado de esta forma es estable, de la misma forma

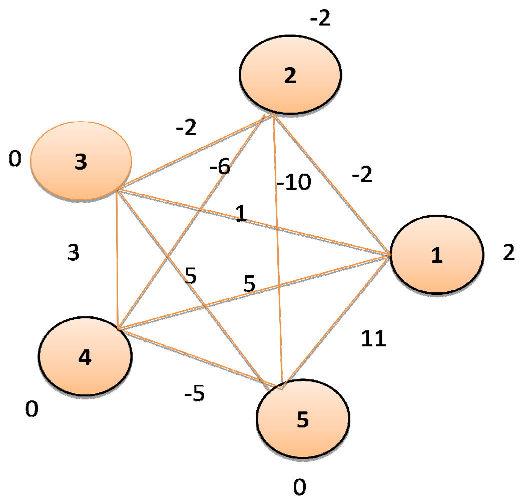
$$\mathbf{W}.\mathbf{x}_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

mantiene también el signo por lo que también es un estado estable.

Ejercicio 8.-

a) ¿Se puede almacenar el vector (1, 0, -1, 0, 1) en una red de Hopfield de 5 neuronas? Si es así, ¿cuáles son los pesos para una red con ese vector almacenado en ella? Si no es así, ¿por qué no?

b) Considere la red de Hopfield dada a continuación. Calcule los pesos correspondientes de la matriz, de forma tal que el peso w_{ij} esté en la columna i y en la fila j. Anote el vector de umbrales $\boldsymbol{\theta}$, de forma tal que el elemento θ_i sea el sesgo de la neurona i.



c) Encuentre al menos un estado estable de la red dada.

d) Considere la matriz de pesos **W** y el vector de umbral **θ**. Comenzando con el estado inicial **v**, calcule el flujo de estados de la red de Hopfield hacia el estado estable mediante actualizaciones asíncronas.

$$\mathbf{W}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -4 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & -7 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & -7 & 0 & -4 & 3 \\ -4 & 4 & -6 & -4 & 0 & -6 \\ -2 & -4 & -2 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\theta}=\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(e) Comenzando en el mismo estado **v**, calcular el flujo de estados usando actualizaciones síncronas.

Solución.- a) No es posible porque la codificación es con valores de la matriz de pesos es de la forma -1 y 1

b)

$$\mathbf{W}'=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 5 & 11 \\ -2 & -2 & -2 & -6 & 10 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 5 & -6 & 3 & 0 & -5 \\ 11 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \text{ el vector de sesgos es } \boldsymbol{\theta}=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de forma tal que

$$\mathbf{W}=\mathbf{W}'+\boldsymbol{\theta}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 5 & 11 \\ -2 & 0 & -2 & -6 & 10 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 5 & -6 & 3 & 0 & -5 \\ 11 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}.\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 5 & 11 \\ -2 & 0 & -2 & -6 & 10 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 5 & -6 & 3 & 0 & -5 \\ 11 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 1 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{x_1}$=(1,1,1,-1,1)T es un estado estable porque no cambia de signo en la activación síncrona de la red y mantiene su estado.

c) En este caso asíncrono activamos una neurona al azar en un vector de estados, por ejemplo, en la forma

$$\mathbf{W}.\mathbf{v} + \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -4 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & -7 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & -7 & 0 & -4 & 3 \\ -4 & 4 & -6 & -4 & 0 & -6 \\ -2 & -4 & -2 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pero ahora, si cambiamos la primera componente del vector de estados (1,1,1,1,1,1) tenemos

$$(0,1,0,0,-4,-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-5) = -5 + (-5) = -10$$ y cambia a -1 por lo que pasamos a (-1,1,1,1,1,1)

e) Cálculo de los valores de los campos inducidos por el vector v para una activación síncrona

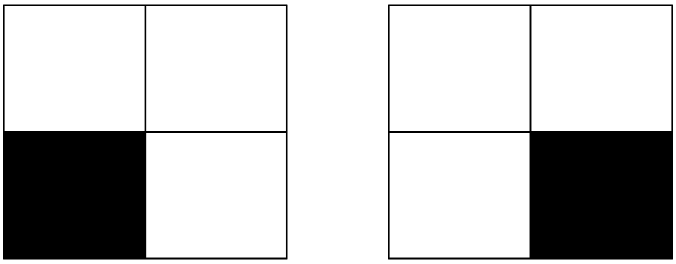
$$\mathbf{W}.\mathbf{v} + \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -4 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & -7 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & -7 & 0 & -4 & 3 \\ -4 & 4 & -6 & -4 & 0 & -6 \\ -2 & -4 & -2 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

por lo que el nuevo estado es (-1,-1,1,1,1,-1)T, y de nuevo

$$\mathbf{W}.\mathbf{v} + \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -4 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & -7 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & -7 & 0 & -4 & 3 \\ -4 & 4 & -6 & -4 & 0 & -6 \\ -2 & -4 & -2 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -7 \\ -17 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -5 \\ -16 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

por lo que el nuevo estado es (-1,1,-1,-1,-1,1)T y así sucesivamente

Ejercicio 9.- Considere los siguientes patrones



a)¿Cómo se codifican para que puedan ser almacenados en una red de Hopfiel?
b) Regla de Hebb. Calcule la correspondiente matriz de pesos de la red de Hopfield usando la regla de Hebb y muestre como el vector con todos los nodos activos transita de forma síncrona por los estados de la red.
c)¿Calcule la función de energía de un punto estable de la red?
Solución.- a) Codificando por filas con 1, para los estados activos (blancos) y -1 para los estados inactivos (negros), tenemos una red de Hopfield con los dos vectores $\mathbf{x_1}=(1, 1, -1, 1)^T$ y $\mathbf{x_2}=(1, 1, 1, -1)^T$ almacenados en ella.

b) los pesos de la red se calculan como $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{x_i x_i^T} - N\mathbf{I}$**,** de esta forma

$$\mathbf{x_1 x_1^T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1,\ 1,\ -1,\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1,\ 1,\ 1,\ -1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^{\mathbf{T}} + \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2^{\mathbf{T}} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{W}\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Se mantiene el signo, luego $\mathbf{x_1}$ es un estado estable, de forma análoga $\mathbf{x_2}$ también es un estado estable

$$\mathbf{W}\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{W}\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

por otra parte el vector $\mathbf{x_3}$ con todos los nodos activos no es estable y transita al vector $\mathbf{x_4}$=(1, 1, -1, -1)^T y a su vez este transita de nuevo al vector x_3, luego x_3 y x_4 forman un bucle

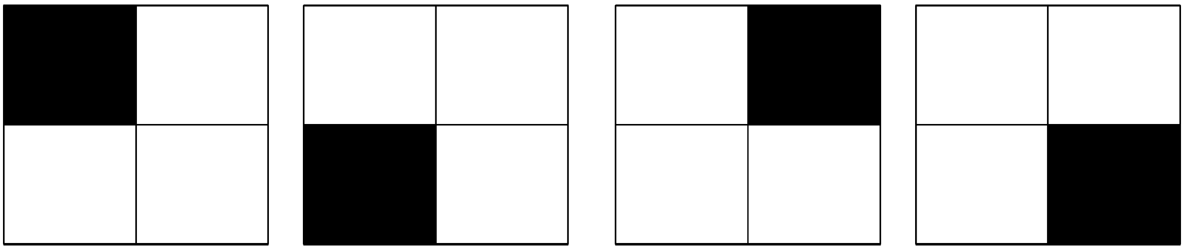
$$\mathbf{W}\mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Por ejemplo para x_1. El vector x1 está caracterizado por tres blancos y uno negro, esto es, tres unidades están activadas, s_1=1, s_2=1, y s_4=1 y una no, s_3= -1. Así, s_i es +1 para tres neuronas y es -1 para una. Si suponemos que ϴ= 0, entonces

$$E(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij}s_i s_j = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} w_{ij}s_i s_j = -\frac{1}{2}(w_{11}s_1^2 + ... + w_{44}\, s_4^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}(2s_1s_2 + 2s_2s_1 - 2s_3s_4 - 2s_4s_3) = -\frac{1}{2}(2+2+2+2) = -4$$

Ejercicio 10.- Considere los siguientes patrones, donde blanco es activo



a) ¿Cómo se codifican para que puedan ser almacenados en una red de Hopfield?
b) Regla de Hebb. Calcule la correspondiente matriz de pesos de la red de Hopfield usando la regla de Hebb y muestre como el vector con todos los nodos activos, todos blancos, transita de forma síncrona por los estados de la red.
c)¿Calcule la función de energía de un punto estable de la red?

Solución.- a) Codificando por filas con 1, para los estados activos (blancos) y -1 para los estados inactivos (negros), tenemos una red de Hopfield con los cuatro vectores $\mathbf{x_1}$=(-1, 1, 1, 1)^T y $\mathbf{x_2}$=(1, 1, -1, 1)^T $\mathbf{x_3}$=(1, -1, 1, 1)^T y $\mathbf{x_4}$=(1, 1, 1, -1)^T almacenados en ella. b) los pesos de la red se calculan como $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{M}\mathbf{x_i}\mathbf{x_i^T} - N\mathbf{I}$**,** de esta forma

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\left(-1,\ 1,\ 1,\ 1\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\left(1,\ -1,\ 1,\ 1\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,\ 1,\ \text{-}1,\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_4\mathbf{x}_4^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}(1,\ 1,\ 1,\ \text{-}1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^{\mathbf{T}} + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^{\mathbf{T}} + \mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^{\mathbf{T}} + \mathbf{x}_4\mathbf{x}_4^{\mathbf{T}} - 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{W}\mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego es un estado estable como todos los de la red

c) Cualquier vector es estable. Si suponemos que Ɵ= 0, entonces

$$E(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij}s_i s_j = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} w_{ij}s_i s_j = -\frac{1}{2}(w_{11}s_1^2 + \ldots + w_{44}\,s_4^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}(0s_1s_2 + 0s_1s_3 + 0s_2s_1 + 0s_2s_4 + 0s_3s_1 + 0s_3s_4 + 0s_4s_2 + 0s_4s_3) = 0$$

Ejercicio 11.- Considere la siguiente matriz de pesos **W**:

$$\begin{pmatrix} 0.0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}$$

a)¿Qué tipo de red implementa? Muestre el grafo de esta red.

b) Comenzando en el estado [-1, 1, 1, 1, -1], calcule el flujo desde este estado al estado estable usando actualizaciones asincrónicas.

c) Comenzando en el (mismo) estado [-1, 1, 1, 1, -1], calcule el siguiente estado usando actualizaciones síncronas.

d)¿Cómo se calcula su función de energía?

Solución.-b) De forma asíncrona

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}, \text{ luego se pasa al}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Actualizamos la 5ªcomponente

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1\\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.2 & 0.2 & -0.4 & 0.2 & 0.2\end{pmatrix},$$

luego se pasa al $\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Actualizamos la 3ªcomponente

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1\\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.4 & 0.4 & -0.4 & 0.4 & 0.4\end{pmatrix},$$

luego se pasa al $\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y hemos llegado a un estado estable

c) De forma síncrona tenemos

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1\\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -0.2 & 0 & 0.2\end{pmatrix},$$

luego se pasa al $\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

y de este estado se transita a si mismo, luego es este un estado estable

d) Al no cambiar de signo las componentes del vector

$$E(t)=-\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij}s_i s_j+\sum_i s_i\Theta_i$$

El vector x está caracterizado por todos blancos, esto es todas las unidades están activadas. Así, s_i es +1 para todo i y siempre será en este caso $\sum_j w_{\mathrm{ij}}s_j>\Theta_i$ entonces s_i sigue siendo +1, para todo i. Si suponemos que Θ=0, entonces

$$E(t)=-\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij}s_i s_j=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} w_{ij}=-\frac{1}{2}(w_{11}+...+w_{55})=$$

$$=-\frac{1}{2}(-0.4+0.4-0.4+0.4+0.4)=-0.2$$