Движение симметричного экипажа с массивными роликами на омни-колесах

К.В. Герасимов, А.А. Зобова

Кафедра теоретической механики и мехатроники
Механико-математический факультет
МГУ им. М.В. Ломоносова

Научный семинар имени В.В.Румянцева, Октябрь 2017

План

Постановка задачи

Уравнения движения

- Кинетическая энергия и лагранжиан
- Структура уравнений - отличие от случая без роликов

Численное решение

- Переход между роликами
- Примеры.

Постановка задачи

Рисунки

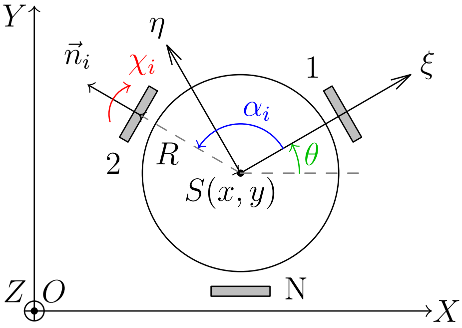


Рис.: Экипаж

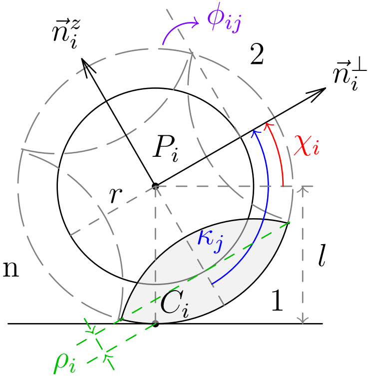


Рис.: Колесо

Постановка задачи

Тела, связи, степени свободы

- Экипаж состоит из платформы, N колес и n роликов, количество твердых тел:

$$1 + N(n+1)$$

- Оси и центры колес и роликов неподвижны относительно платформы и колес соответственно
- Скорость точек контакта равна нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, i = 1 \dots N$$

- Количество степеней свободы:

$$3 + N(n-1)$$

Постановка задачи

Координаты, псевдоскорости, связи

- Обобщенные координаты:
  $q = (x, y, \theta, \chi_i, \phi_k, \phi_s)$, где $i, k = 1 \dots N$, s – ролики вне контакта.
- Псевдоскорости:
  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \mathbf{v}_S = R\nu_1\mathbf{e}_\xi + R\nu_2\mathbf{e}_\eta, \nu_3 = \Lambda\dot{\theta}, \nu_s = \dot{\phi}_s$
- Связи:

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos\theta - R\nu_2 \sin\theta, \qquad \dot{y} = R\nu_1 \sin\theta + R\nu_2 \cos\theta,$$

$$\dot{\theta} = \frac{\nu_3}{\Lambda}, \qquad \dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin\alpha_i - \nu_2 \cos\alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}),$$

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{l\cos\chi_k - r}(\nu_1 \cos\alpha_k + \nu_2 \sin\alpha_k), \qquad \dot{\phi}_s = \nu_s$$

План

Кинетическая энергия и лагранжиан

- Присутствует аддитивный член, пропорциональный B – моменту инерции ролика относительно его оси собственного вращения:

$$2T = 2L = M\mathbf{v}_S^2 + I_S\dot{\theta}^2 + J\sum_i \dot{\chi}_i^2 +$$

$$+B\sum_{i,j}(\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta}\sin(\kappa_j + \chi_i)\dot{\phi}_{ij}),$$

$$M = \mathring{M} + Nnm$$

$$I_S = \mathring{I}_S + N\cdot n(\frac{A+B}{2} + mR^2 + \frac{mr^2}{2}),$$

$$J = \mathring{J} + n(A + mr^2)$$

Кинетическая энергия и лагранжиан

- С учетом связей:

$$2L^* = \mathring{\nu}^T \mathring{V}^T \mathring{M} \mathring{V} \mathring{\nu} +$$

$$+B \sum_i \left(\frac{(\nu_2 \sin\alpha_i + \nu_1 \cos\alpha_i)^2 R^2}{\rho_i^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2R\nu_3(\nu_2 \sin\alpha_i + \nu_1 \cos\alpha_i) \sin\chi_i}{\rho_i \Lambda} \right)$$

$$+B \sum_{i,j} \left(\frac{2\nu_3 \nu_{ni+j} \sin(\kappa_j + \chi_i)}{\Lambda} + \nu_{ni+j}^2 \right)$$

где $\frac{1}{2}\mathring{\nu}^T \mathring{V}^T \mathring{M} \mathring{V} \mathring{\nu}$ – лагранжиан системы без роликов,
$\rho_i = l \cos\chi_i - r$

Кинетическая энергия и лагранжиан

Матрицы кинетической энергии и связей для системы без роликов

$$\mathring{M} = diag(M, M, I_S, J...J),$$

$$\mathring{V} = \begin{bmatrix} R\cos\theta & -R\sin\theta & 0 \\ R\sin\theta & R\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} \\ \frac{R}{l}\sin\alpha_i & -\frac{R}{l}\cos\alpha_i & -\frac{R}{l\Lambda} \end{bmatrix}$$

План

Структура уравнений

Отличие от случая без роликов

- Уравнения Я.В. Татаринова:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}, \tag{1}$$

$$\nu_\mu P_\mu = \dot{q}_i p_i, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

- Лагранжиан и "импульсы" отличаются аддитивными членами:

$$L^* = \mathring{L}^* + BL^*_\Delta(\nu, \chi)$$

$$P_\alpha = \mathring{P}_\alpha(\theta, p_x, p_y, p_\chi) + P_\Delta(p_{\phi_i}, \chi)$$

Структура уравнений

Матрица лагранжиана

Лагранжиан с учетом связей имеет вид:

$$2L^* = \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} V^{\mathrm{T}} \mathcal{M} V \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} \mathcal{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu}$$

Структура симметричной матрицы $\mathcal{M}^*$ следующая:

$$\mathcal{M}^* = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & m^*_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}_{3\times 3} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ B\Lambda^{-1}\sin\chi_{12} & \dots & B\Lambda^{-1}\sin\chi_{nN} \end{pmatrix} \\ & B \\ * & \ddots \\ & \qquad B \end{bmatrix}$$

Первое слагаемое (1) получается дифференцированием лагранжиана и подстановкой связей (ниже $\mathcal{M}_i^* = \dfrac{\partial \mathcal{M}^*}{\partial \chi_i}$):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} = \frac{d}{dt}(\mathcal{M}^*(\chi)\boldsymbol{\nu}_\alpha) = \mathcal{M}^*(\chi_i)\dot{\boldsymbol{\nu}}_\alpha + \left(\sum_{i=1}^{N} \mathcal{M}_i^*(V\nu)_{3+i}\boldsymbol{\nu}\right)_\alpha,$$

Слагаемые, соответствующие свободным роликам:

$$\frac{\cos\chi_{ij}\nu_3 B\left(-\dfrac{\nu_3 R}{l\Lambda} - \dfrac{\cos\alpha_i\nu_2 R}{l} + \dfrac{\sin\alpha_i\nu_1 R}{l}\right)}{\Lambda} = \frac{B}{\Lambda}\cos\chi_{ij}(\dot{\chi}_i)^*\nu_3.$$

Структура уравнений
Детали

Формальные импульсы P_α и скобки Пуассона L^* с ними:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= R\left(p_x\cos\theta + p_y\sin\theta + \sum_i\left(\frac{\sin\alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\cos\alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i}\right)\right),\\
P_2 &= R\left(-p_x\sin\theta + p_y\cos\theta + \sum_i\left(-\frac{\cos\alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\sin\alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i}\right)\right),\\
P_3 &= \frac{1}{\Lambda}\left(p_\theta - \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i}\right), \quad P_s p_{\phi_s},
\end{aligned}
$$

$$
\{P_1, L^*\} = -\frac{\partial P_1}{\partial p_{\chi_i}}\frac{\partial L^*}{\partial \chi_i} = -\frac{R}{2l}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\sin\alpha_i \mathcal{M}_i^*\boldsymbol{\nu},
$$

$$
\{P_2, L^*\} = \frac{R}{2l}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\cos\alpha_i\mathcal{M}_i^*\boldsymbol{\nu},\ \{P_3, L^*\} = \frac{R}{2l\Lambda}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathcal{M}_i^*\boldsymbol{\nu}, \quad \{P_s, L^*\} = 0,
$$

Суммы $\{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\} \neq 0$ лишь для первых трех уравнений.

Структура уравнений

Новые слагаемые ($\mathcal{P}_\alpha$ и $\mathcal{M}_i^*$ зависят от χ)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^* \dot{\boldsymbol{\nu}} \quad = \quad & \frac{MR^2}{\Lambda} \begin{pmatrix} \nu_2\nu_3 \\ -\nu_1\nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} -\sin\alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \cos\alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \Lambda^{-1}\mathcal{M}_i^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu} \\
- \quad & BR^2 \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu} \quad - \quad B \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \cos\chi_{12} \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_1^* \\ \vdots \\ \cos\chi_{Nn} \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_N^* \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Структура уравнений

Свойства

1. Интеграл энергии $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathcal{M}^{*}(\chi_i)\boldsymbol{\nu} = h = \mathrm{const}$
   (связи автономны, идеальны, силы консервативны)
2. $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu_s = \mathrm{const}$
3. $B = 0 \quad \Longrightarrow$ уравнения как в безынерционной модели.
4. Интеграл $m^{*}_{33}\nu_3 = \mathrm{const}$ разрушается при $B \neq 0$. $\dot{\nu}_3 \sim B$.
5. Первые интегралы:

$$\nu_s + \frac{1}{\Lambda}\sin\chi_{ij}\nu_3 = const.$$

   Вращение $\nu_1(0) = 0, \nu_2(0) = 0, \nu 3(0) \neq 0$ неравномерно.
6. Замена псевдоскоростей $\boldsymbol{\nu} \to \lambda\boldsymbol{\nu}, \lambda \neq 0$ эквивалентна замене времени $t \to \lambda t$.

План

Переход между роликами

Сложности и допущения

(1) Уравнения вырождаются на стыках роликов:
квадратичные формы $\boldsymbol{F}_i$ *терпят разрыв 2ого рода из-за выражений* $(l\cos\chi_i - r)$ *в знаменателе.*
Пусть переход на следующий ролик будет раньше стыка.

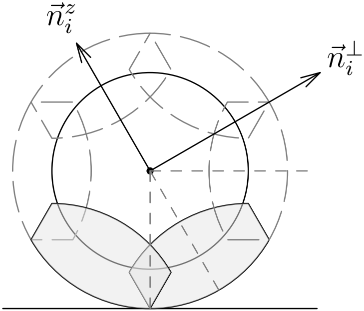
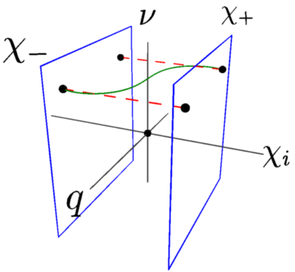


Рис.: Ролики перекрываются

Переход между роликами

Сложности и допущения

(2) Ролики входят и выходят из состояния контакта.
Происходит мгновенное наложение и снятие связи.
При переходе сохраним значения ν_1, ν_2, ν_3,
из связей – $\dot{\chi}_i$ колеса и $\dot{\phi}_j$ освободившегося ролика,
остальные ролики циклически перенумеруем.



План

Значения параметров

- радиус колеса $r = 0.05$,
- масса колеса $M_{\text{к}} = 0.15$,
- масса ролика $m_{\text{рол}} = 0.05$,
- радиус платформы $R = 0.15$,
- масса платформы $M_{\text{пл}} = 1$.

Вращение вокруг своей оси $(\nu_{1,2}(0) = 0, \nu_3 = 1)$.

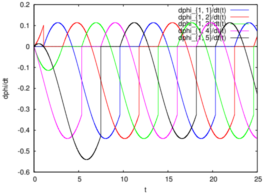


Рис.: Скорости роликов $\dot{\phi}_{ij}(t)$ на любом колесе

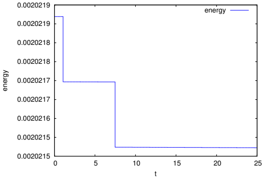


Рис.: Кинетическая энергия

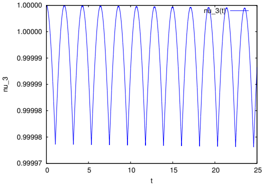
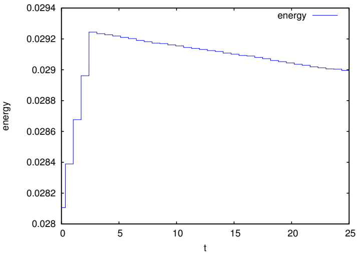
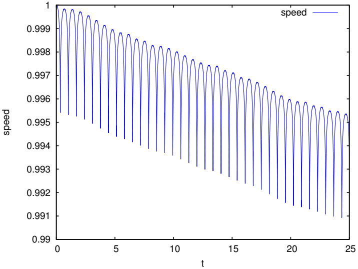


Рис.: Угловая скорость собственного вращения $\nu_3(t)$

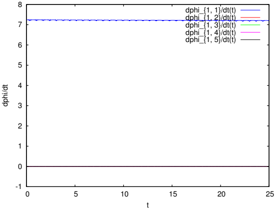
Движение по прямой ($\nu_1(0) = 1, \nu_{2,3} = 0$).



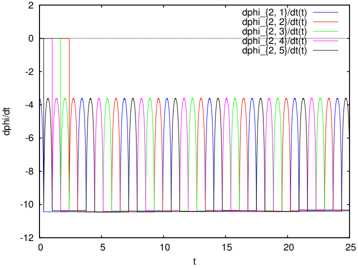
Кинетическая энергия



Скорость центра масс

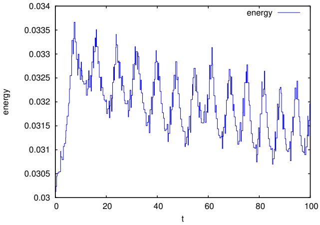


$\dot{\phi}_{ij}(t)$ на переднем колесе

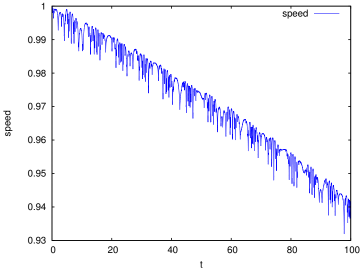


$\dot{\phi}_{ij}(t)$ на правом заднем

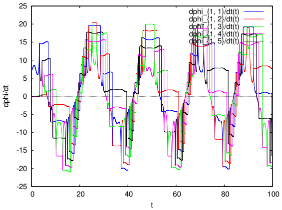
Движение с закруткой $(\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1)$.



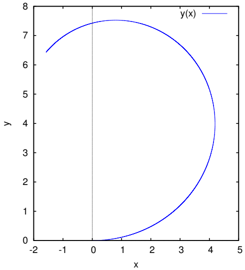
Кинетическая энергия



Скорость центра масс



Скорости роликов $\dot{\phi}_{ij}(t)$ на колесе №1



Траектория центра масс

Результаты

- Получены уравнения движения экипажа с полным набором роликов в неголономной постановке.
- Показано, что разница с уравнениями для системы без роликов пропорциональна моменту инерции ролика.
- Выявлены свойства движения и первые интегралы.
- Учтено движение свободных роликов и обнаружено его существенное влияние.
- Получены численные решения для симметричной конфигурации.

Спасибо за внимание!