

## ДВИЖЕНИЕ СИММЕТРИЧНОГО ЭКИПАЖА НА ОМНИ-КОЛЕСАХ С МАССИВНЫМИ РОЛИКАМИ

© 2018 г. К.В. Герасимов\*, А.А. Зобова\*\*

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва*

*\*e-mail: kiriger@gmail.com, \*\*e-mail: azobova@mech.math.msu.su*

Поступила в редакцию 14.11.2017 г.

Рассматривается динамика симметричного экипажа с роликонесущими колесами, движущегося по неподвижной горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости в следующих предположениях: масса каждого ролика ненулевая, контакт между роликами и плоскостью точечный, проскальзывания нет. Уравнения движения, составленные с помощью системы символьных вычислений Mathematica, содержат дополнительные члены, пропорциональные осевому моменту инерции ролика и зависящие от углов поворота колес. Масса роликов учитывается в тех фазах движения, когда не происходит смены роликов в контакте. При переходе колес с одного ролика на другой масса роликов считается пренебрежимо малой. Показано, что ряд движений, существующих в безынерционной модели (т.е. не учитывающей массу роликов), пропадает, так же как и линейный первый интеграл. Проведено сравнение основных типов движения симметричного трехколесного экипажа, полученных численным интегрированием уравнений движения с результатами, полученными на основании безынерционной модели.

*Ключевые слова:* омни-колесо, массивные ролики, неголономная связь, лаконичная форма уравнений движения Я.В. Татарина

**1. Введение.** Омни-колеса (в русской литературе также используется название роликонесущие колеса) – это колеса особой конструкции, позволяющей экипажу двигаться в произвольном направлении, вращая колеса вокруг их собственных осей и не поворачивая их вокруг вертикали. На ободе такого колеса располагаются ролики, которые могут свободно вращаться вокруг своих осей, жестко закрепленных в диске колеса. Существуют два варианта расположения осей роликов: первый (собственно омни-колеса) – оси роликов являются касательными к ободу колеса и, следовательно, лежат в его плоскости; второй (*mesanite wheels* [1]) – оси роликов развернуты вокруг нормали к ободу колеса на постоянный угол, обычно  $\pi/4$ .

Ранее была рассмотрена динамика омни-экипажей с использованием упрощенных моделей омни-колес без учета инерции и формы роликов [2–7], колеса (без роликов) моделируются как жесткие диски, которые могут скользить в одном направлении и катиться без проскальзывания в другом. Далее будем называть такую модель безынерционной, в том смысле, что инерция собственного вращения роликов в ней не учитывается. В другой части работ по динамике омни-экипажа [8–11] используются некоторые формализмы для построения численных моделей систем тел. При этом явный вид уравнений движения оказывается скрытым, что делает невозможным непосредственный анализ уравнений и затрудняет оценку влияния разных факторов на динамику системы.

Цель настоящей работы – получение в явном виде уравнений движения по инерции экипажа с омни-колесами с массивными роликами в неголономной постановке с помо-

пью подхода Я.В. Татаринова [12], исследование их свойств и сравнение поведения такой системы с поведением системы в безынерционном случае [13].

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим экипаж с омни-колесами, движущийся по инерции по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Экипаж состоит из платформы и  $N$  одинаковых омни-колес, плоскости которых относительно платформы неподвижны. Каждое колесо может свободно вращаться относительно платформы вокруг собственной оси, расположенной горизонтально, и на каждом из них установлено  $n$  массивных роликов, так что оси роликов параллельны касательным к контурам дисков колес (см. левую часть фиг. 1). Ролики расположены по контуру дисков колес и показаны в виде затемненных областей, либо областей, ограниченных штриховой линией. Они пронумерованы от 1 до  $n$ . Таким образом, система состоит из  $N(n + 1) + 1$  абсолютно твердых тел.

Фиг. 1

Введем неподвижную систему отсчета так, что ось  $OZ$  направлена вверх, а плоскость  $OXY$  совпадает с опорной плоскостью. Введем также подвижную систему отсчета  $S\xi\eta Z$ , жестко связанную с платформой экипажа так, что плоскость  $S\xi\eta$  горизонтальна и содержит центры всех колес  $P_i$ . Будем считать, что оси колес лежат на лучах, соединяющих центр масс  $S$  платформы и центры колес (см. правую часть фиг. 1), а расстояния от центров колес до  $S$  одинаковы и равны  $R$ . Геометрию установки колес на платформе зададим углами  $\alpha_i$  между осью  $S\xi$  и осями колес (см. левую часть фиг. 1). Будем считать, что центр масс всей системы совпадает с точкой  $S$  (отсюда следует, что  $\sum_k \cos \alpha_k = \sum_k \sin \alpha_k = 0$ ). Введем также три орта, жестко связанных с дисками колес: орт оси  $i$ -го колеса  $\mathbf{n}_i = \mathbf{SP}_i/|\mathbf{SP}_i|$  и орты  $\mathbf{n}_i^\perp$  и  $\mathbf{n}_i^z$ , лежащие в плоскости диска колеса, причем вектор  $\mathbf{n}_i^z$  вертикален при нулевом повороте колеса  $\chi_i$ . Положения центров роликов на колесе определим углами  $\kappa_j$  между ними и направлением, противоположным вектору  $\mathbf{n}_i^z$ .

Положение экипажа будем задавать следующими координатами:  $x, y$  — координаты точки  $S$  на плоскости  $OXY$ ,  $\theta$  — угол между осями  $OX$  и  $S\xi$  (угол курса),  $\chi_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) — углы поворота колес вокруг их осей, отсчитываемые против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $\mathbf{n}_i$ , и  $\phi_j$  — углы поворота роликов вокруг их собственных осей. Таким образом, вектор обобщенных координат имеет вид

$$\mathbf{q} = (x, y, \theta, \{\chi_i\}_{i=1}^N, \{\phi_k\}_{k=1}^N, \{\phi_s\}_{s=1}^{N(n-1)})^T \in \mathbb{R}^{N(n+1)+3}$$

где сначала указаны углы поворота  $\phi_k$  роликов, находящихся в данный момент в контакте с опорной плоскостью, а затем — остальных, “свободных”, роликов. Индекс  $s$  используется для сквозной нумерации свободных роликов и связан с номером колеса  $i$  и ролика на колесе  $j$  по формуле  $s = n(i - 1) + j$ .

Введем псевдоскорости

Греч.
$\mathbf{v}, \nu_{1,2,3,s}$
Лат. $\mathbf{v}_S$

$$\mathbf{v} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \quad \mathbf{v}_S = R\nu_1\mathbf{e}_\xi + R\nu_2\mathbf{e}_\eta, \quad \nu_3 = \Lambda\dot{\theta}, \quad \nu_s = \dot{\phi}_s, \quad s = 1, \dots, N(n-1)$$

Их механический смысл таков:  $\nu_1, \nu_2$  — проекции скорости точки  $S$  на оси системы  $S\xi\eta$ , связанные с платформой,  $\nu_3$  — с точностью до множителя угловая скорость платформы,  $\nu_s$  — угловые скорости свободных роликов. Число независимых псевдоскоростей системы  $K = N(n-1) + 3$ . Таким образом, имеем

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos \theta - R\nu_2 \sin \theta, \quad \dot{y} = R\nu_1 \sin \theta + R\nu_2 \cos \theta$$

Будем считать, что проскальзывания между опорной плоскостью и роликами в контакте не происходит, т.е. скорости точек  $C_i$  контакта равны нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

Выражая скорость точек контакта через введенные псевдоскорости и проектируя на

оси системы  $S\xi\eta$ , получим:

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{\rho_k}(\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k); \quad \rho_k = l \cos \chi_k - r \quad (2.1)$$

$$\dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}) \quad (2.2)$$

Заметим, что знаменатель  $\rho_k$  в формуле (2.1) – расстояние от оси ролика до точки контакта, обращающееся в нуль на стыке роликов (см. левую часть фиг. 1). Это обстоятельство приводит к разрывам второго рода функций в правых частях уравнений движения и будет рассмотрено отдельно ниже. Уравнение (2.2) совпадает с уравнением связи в случае безынерционной модели роликов.

Таким образом, выражение обобщенных скоростей через псевдоскорости, учитывающее связи, наложенные на систему, можно записать в матричном виде (явные выражения компонент матрицы  $V$  приведены в приложении):

$$\dot{\mathbf{q}} = V\mathbf{v}, \quad V = V(\theta, \chi_i) \quad (2.3)$$

**3. Уравнения движения.** Воспользуемся лаконичным методом получения уравнений движения для систем с дифференциальными связями, предложенным Я.В. Татариновым [12]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \sum_{\mu=1}^K \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}, \quad \alpha = 1, \dots, K \quad (3.1)$$

Здесь  $L$  – лагранжиан,  $L^*$  – он же с учетом связей,  $P_\alpha$  – линейные комбинации формальных канонических импульсов  $p_i$ , определяемые из соотношения

$$\sum_{\mu=1}^K \nu_\mu P_\mu \equiv \sum_{i=1}^{N(n+1)+3} \dot{q}_i p_i$$

в котором  $\dot{q}_i$  выражены через псевдоскорости  $\nu_\mu$  в соответствии с формулами (2.3);  $\{\cdot, \cdot\}$  – скобка Пуассона по  $p_i, q_i$ , после ее вычисления выполняется подстановка

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

(Подробности см. в работах [12, 13].)

Так как потенциальная энергия системы во время движения не меняется, лагранжиан равен кинетической энергии:

$$2L = 2T = M\mathbf{v}_S^2 + I_S\dot{\theta}^2 + J \sum_i \dot{\chi}_i^2 + B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2)$$

Здесь  $M$ ,  $I_S$ ,  $J$  — массово-инерционные характеристики экипажа (см. Приложение),  $B$  — момент инерции ролика относительно его оси вращения. Лагранжиан при учете связей определяется соотношением:

$$2L^* = \mathbf{v}^T V^T \mathcal{M} V \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathcal{M}^*(\chi_i) \mathbf{v}$$

Структура симметрической матрицы  $\mathcal{M}^*$  следующая:

$$\mathcal{M}^* = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{M}}_{11}^* & \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^* \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^{*T} & \widetilde{\mathcal{M}}_{22}^* \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{11}^* = (m_{ij}^*)_{3 \times 3}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{22}^* = B E_{N(n-1) \times N(n-1)}$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{12}^* = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ B\Lambda^{-1} \sin \chi_{12} & \dots & B\Lambda^{-1} \sin \chi_{nN} \end{bmatrix}_{3 \times N(n-1)}$$

где  $E_{N(n-1) \times N(n-1)}$  — единичная матрица.

Явные формулы для элементов матрицы  $\widetilde{\mathcal{M}}_{11}^*$  выписаны в Приложении; отметим, что они зависят только от координат  $\chi_i$ , которые входят в отношения  $B/\rho_i^2$  и  $B \sin \chi_i/\rho_i$ , имеющие разрывы второго рода при смене роликов, т.е. при переходе с одного ролика на другой (см. равенство (2.1)). Эта матрица соответствует псевдоскоростям  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$ . Остальные

элементы матрицы  $\mathcal{M}^*$  соответствуют псевдоскоростям свободных роликов  $\nu_s$ , для которых  $\chi_{kl} = \chi_k + \kappa_l$  — угол между вертикалью и осью ролика. Индекс  $k = 1, \dots, N$  означает номер колеса, индекс  $l = 2, \dots, n$  — номер свободного ролика на колесе ( $l = 1$  — ролик, находящийся в контакте).

Первое слагаемое в левой части равенства (3.1) получается дифференцированием лагранжиана и подстановкой связей:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} = \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi) \mathbf{v}_\alpha) = \mathcal{M}^*(\chi_i) \dot{\mathbf{v}}_\alpha + \left( \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi)) \mathbf{v} \right)_\alpha = \mathcal{M}^*(\chi_i) \dot{\mathbf{v}}_\alpha + \left( \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i^* (V \mathbf{v})_{3+i} \mathbf{v} \right)_\alpha \quad (3.3)$$

где  $\mathcal{M}_i^* = \frac{\partial \mathcal{M}^*}{\partial \chi_i}$ . Обратим внимание, что слагаемые из второй группы, соответствующие свободным роликам —  $\left( \mathcal{M}_i^* (V \mathbf{v})_{3+i} \mathbf{v} \right)_\alpha$ ,  $\alpha = 4, \dots, K$ , — имеют вид

$$\nu_3 \frac{B}{\Lambda} \left( -\frac{\nu_3 R}{l \Lambda} - \frac{\nu_2 R}{l} \cos \alpha_i + \frac{\nu_1 R}{l} \sin \alpha_i \right) \cos \chi_{ij} = \nu_3 \frac{B}{\Lambda} (\dot{\chi}_i)^* \cos \chi_{ij}, \quad (3.4)$$

где индексы  $i, j$  соответствуют  $\alpha$  по формуле сквозной нумерации.

Выпишем выражения для  $P_\alpha$ :

$$\begin{aligned} P_1 &= R \left( p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_i \left( \frac{p_{\chi_i}}{l} \sin \alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \cos \alpha_i \right) \right) \\ P_2 &= R \left( -p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_i \left( -\frac{p_{\chi_i}}{l} \cos \alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \sin \alpha_i \right) \right) \\ P_3 &= \frac{1}{\Lambda} \left( p_\theta - \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i} \right) \\ P_s &= p_{\phi_s} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Поскольку коэффициенты лагранжиана  $L^*$  зависят только от координаты  $\chi_i$ , его скобки Пуассона с  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  — квадратичные формы псевдоскоростей, пропорциональные моменту инерции ролика  $B$  с коэффициентами, зависящими от  $\chi_i$ :

$$\{P_1, L^*\} = -\frac{\partial P_1}{\partial p_{\chi_i}} \frac{\partial L^*}{\partial \chi_i} = -\frac{R}{2l} \mathbf{v}^T \mathcal{M}_i^* \mathbf{v} \sin \alpha_i,$$

$$\{P_2, L^*\} = \frac{R}{2l} \mathbf{v}^T \mathcal{M}_i^* \mathbf{v} \cos \alpha_i, \quad \{P_3, L^*\} = \frac{R}{2l\Lambda} \mathbf{v}^T \mathcal{M}_i^* \mathbf{v}, \quad \{P_s, L^*\} = 0, s > 3$$

Остается рассмотреть правую часть (3.1): суммы  $\{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}$  отличны от нуля лишь в уравнениях для  $\alpha = 1, 2, 3$  (см. Приложение).

Собирая вместе выражения для слагаемых (3.1) и пользуясь обозначениями из Приложения, окончательно получим следующую структуру уравнений:

$$\mathcal{M}^* \dot{\mathbf{v}} = MR^2 \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} \nu_2 \nu_3 \\ -\nu_1 \nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{v}^T \begin{pmatrix} \frac{R}{2l} \begin{pmatrix} -\mathcal{M}_i^* \sin \alpha_i \\ \mathcal{M}_i^* \cos \alpha_i \\ \mathcal{M}_i^* \Lambda^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - BR^2 \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \mathbf{v} - B \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_1^* \cos \chi_{12} \\ \vdots \\ \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_N^* \cos \chi_{Nn} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Символ  $\star$  в последнем слагаемом правой части уравнений для  $\alpha = 1, 2, 3$  заменяет выражения из второго слагаемого (3.3). Матрицы  $\mathcal{P}_\alpha$  размера  $K \times K$  составлены из строк  $\mathbf{p}_{\alpha\beta}$ , определенных явно в Приложении и зависящих от геометрии экипажа и углов поворота колес  $\chi_i$ :

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{p}_{13} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{13} \\ -\mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Поскольку матрицы  $\mathcal{M}_i^*$  и  $\mathcal{P}_\alpha$  зависят от углов поворота колес  $\chi_i$ , для замыкания системы к этим уравнениям надо добавить уравнения (2.2).



Структура уравнений позволяет выявить следующие свойства:

1. Система допускает интеграл энергии  $\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathcal{M}^*(\chi_i)\mathbf{v} = h = \text{const}$  в силу общей теоремы об изменении полной механической энергии: так как система стеснена автономными идеальными связями, а силы консервативны, то полная энергия (в нашем случае она равна кинетической энергии) сохраняется.

2. В случае, если платформа экипажа неподвижна, т.е.  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$ , свободные ролики сохраняют свою начальную угловую скорость:  $\nu_s = \text{const}$ , чего и следовало ожидать.

3. При  $B = 0$  все слагаемые в правой части равенства (3.6), кроме первого, обращаются в нуль, как и все члены, соответствующие свободным роликам, в левой части (см. Приложение, равенства (7.1)). В этом случае существенными остаются первые три уравнения системы на  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ . Эти уравнения описывают динамику безынерционной модели экипажа [5].

4. Существовавший в безынерционной модели линейный первый интеграл разрушается для модели с массивными роликами. При  $B = 0$  он имеет вид  $m_{33}^*\nu_3 = \text{const}$  (причем  $m_{33} = \text{const}$ ) и следует непосредственно из третьего уравнения системы. При  $B \neq 0$  скорость изменения  $\nu_3$  пропорциональна моменту инерции ролика  $B$ .

5. Поскольку скобки Пуассона в уравнениях для свободных роликов равны нулю, система допускает первые интегралы:

$$\nu_s + \frac{1}{\Lambda} \sin \chi_{ij} \nu_3 = \text{const} \quad (3.7)$$

Скорость вращения платформы  $\nu_3$  связана со скоростями собственного вращения свободных роликов. В частности, вращение экипажа вокруг вертикальной оси, проходящей через

его центр ( $\nu_1(0) = 0, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) \neq 0$ ), неравномерно, в отличие от выводов, основанных на безынерционной модели.

6. Одновременное изменение начальных значений всех псевдоскоростей  $\mathbf{v} \rightarrow \lambda \mathbf{v}, \lambda \neq 0$  умножением на число, отличное от нуля, эквивалентно замене времени  $t \rightarrow \lambda t$ .

**4. Смена роликов.** Уравнения (3.6) описывают динамику системы на промежутках времени, в течение которых не происходит смены роликов. При смене роликов любого колеса коэффициенты уравнений терпят разрыв второго рода из-за выражений  $\rho_i = l \cos \chi_i - r$  в знаменателе.

Заметим, что на практике ситуация  $\rho_i = 0$  никогда не реализуется, так как концы роликов усекаются (в частности, потому что оси роликов в реальных системах имеют ненулевую толщину и должны быть закреплены в колесах). Для того чтобы в каждый момент в контакте между колесом и плоскостью был ролик, ролики располагают в два или больше рядов.

**Фиг. 2** Для исследования движений, на которых происходят смены роликов, примем следующие предположения. Усечем ролики (см. левую часть фиг. 2), но оставим их оси в одной плоскости, пренебрегая пересечением тел роликов в пространстве. Смена роликов одного колеса будет происходить при значении угла  $\chi_i = \frac{2\pi}{n}$ . Колесо с усеченными роликами определим, располагая ось ролика на расстоянии  $r = l \cos \frac{\pi}{n-1}$  от центра колеса, а его поверхность задавая как фигуру вращения дуги окружности радиуса  $l$  с углом раствора  $\frac{2\pi}{n}$  вокруг этой оси, замкнутую соответствующими дисками.

Кроме этого, при смене контакта происходит мгновенное наложение связи на вновь вошедший в контакт ролик и снятие ее с освободившегося, после чего последний может свободно вращаться вокруг своей оси. В этот момент в реальной системе происходят вза-

имедействия типа ударных, в том числе проскальзывание роликов относительно плоскости, при котором происходит уменьшение полной энергии системы. Однако моделирование этих эффектов здесь не рассматривается. Будем считать, что скорости  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  при смене роликов не изменяются, как и в безынерционной модели в отсутствии роликов ( $B = 0$ ). Таким образом, масса роликов влияет на динамику системы только на гладких участках движения и не учитывается при смене роликов. Из уравнений (2.1) и (2.2) получим, что ролик, входящий в контакт, мгновенно приобретает ту же угловую скорость, что и освобождающийся ролик.

Таким образом, при смене роликов ( $\chi_i = \chi_i^+$ ) сохраним значения  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ , заменим  $\chi_i = \chi_i^+$  на  $\chi_i = \chi_i^-$  (см. правую часть фиг. 2), и выполним с псевдоскоростями  $\nu_s$  следующее преобразование. Пусть  $\mathbf{v}_i^s = (\nu_{i2}, \dots, \nu_{in})$  – псевдоскорости свободных роликов на колесе  $i$ . Тогда, если при смене контакта  $\dot{\chi}_i > 0$  (т.е. колесо поворачивается против часовой стрелки, см. фиг. 1), то отбросим  $\nu_{in}$ , остальные компоненты вектора  $\mathbf{v}_i^s$  перенумеруем, сдвигая их вперед:  $\nu_{ij} \rightarrow \nu_{ij+1}$ , а компоненту  $\nu_{i2}$  положим равной значению правой части в уравнении связи (2.1). При вращении колеса в другую сторону, выполним аналогичные преобразования, номера роликов при этом сдвигаются назад.

**5. Примеры движений** Численные решения получим для симметричного трехколесного экипажа ( $\alpha_i = \frac{2\pi}{N}(i-1), N=3$ ), с  $n=5$  роликами на колесе и следующих движений:

Фиг. 3

1. Вращение вокруг своей оси ( $\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ ) (фиг. 3);

Фиг. 4

2. Движение по прямой в направлении оси первого колеса ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = \nu_3(0) = 0$ ) (фиг. 4);

Фиг. 5

3. Движение с ненулевой скоростью центра масс и, одновременно, с ненулевой угловой скоростью платформы ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ ) (фиг. 5).

Расчеты выполнены в безразмерных величинах, так что радиус платформы и колеса  $R = 0.15$  и  $r = 0.05$ , массы платформы, колеса и ролика 1, 0.15 и 0.05. При этом момент инерции ролика  $B \approx 1.6 \cdot 10^{-5}$ . Для безынерционной модели массово-инерционные характеристики колес положим соответствующими экипажу с пятью заблокированными роликами.

Во всех трех случаях наблюдаются различия между двумя постановками: свободные ролики приходят в движение, из-за чего меняется угловая скорость платформы экипажа и скорость центра масс экипажа. Кроме этого, становится заметно влияние введенных предположений о смене контакта: график кинетической энергии приобретает ступенчатый вид в силу изменений, зависящих от  $\chi_i$  и  $\dot{\phi}_{i,j}$ , в слагаемых (3.2):

$$B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}) \quad (5.1)$$

при мгновенном наложении связей. В промежутки времени между сменами роликов энергия остается постоянной.

В случаях 1 и 2 траектории центра экипажа  $S$  на плоскости  $OXY$  и характер вращения вокруг вертикальной оси  $SZ$  ( $\theta(t)$ ) согласно модели с роликами и безынерционной модели различаются несущественно, однако заметны переходные режимы вращения роликов в начале движения.

При вращении вокруг вертикали (движение 1) угловая скорость платформы  $\nu_3$  меняется немонотонно, но в среднем медленно убывает: за первые  $10^3$ с угловая скорость уменьшается на 2%. Скорость центра масс остается равной нулю. Кинетическая энергия системы также медленно убывает. На фиг. 3 представлены угловые скорости роликов на первом колесе  $\dot{\phi}_{1j}$ . Номер кривой совпадает с номером ролика на колесе, поведение роликов на других двух колесах полностью аналогично. Заметим, что при нулевой скорости

Фиг. 3

Фиг. 4

центра экипажа опорный ролик не вращается (см. формулу (2.2)): угловая скорость первого ролика в течение первой секунды движения нулевая. После выхода из контакта ролик начинает раскручиваться в соответствии с первым интегралом (3.7). Раскрученный ролик при входе в контакт с опорной плоскостью мгновенно теряет угловую скорость (на графике угловой скорости первого ролика это происходит при  $t = 9.6\text{с}$ ), что приводит к убыванию кинетической энергии.

При движении по прямой (движение 2) угловая скорость остается нулевой. На фиг. 4 слева показаны графики относительного изменения скорости центра масс  $\nu_1(t)/\nu_1(0) - 1$  (кривая 1) и кинетической энергии  $T(t)/T(0) - 1$  (кривая 2). Видно, что на начальном этапе движения при смене контакта кинетическая энергия возрастает, что обусловлено принятой моделью наложения связи, но при этом возрастание энергии остается в пределах 4%. Скорость центра масс (кривая 2, слева) в среднем убывает. Скорость вращения переднего колеса равна нулю, колесо катится, опираясь на один и тот же ролик, остальные ролики не раскручиваются. Угловые скорости роликов на одном из задних колес показаны на фиг. 4 справа. Свободные ролики двигаются с постоянной угловой скоростью, ролик в контакте изменяет свою скорость за счет скорости центра масс. После того как все ролики побывают в контакте, их движение становится квазипериодичным, а энергия убывает с каждой сменой контакта.

**Фиг. 5** При движении 3, сочетающем поступательное и вращательное движение, угловая скорость экипажа  $\nu_3$  растет и выходит на постоянное значение (кривая 1 на фиг. 5 слева вверх), скорость центра экипажа  $v = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$  уменьшается до нуля (кривая 2 там же), а кинетическая энергия (кривая 3) после короткого начального участка, где происходят маленькие по величине скачки вверх аналогично движению 2, убывает. Угловые скорости роликов представляют собой квазипериодические функции времени (характерный уча-

сток представлен на фиг. 5 внизу, обозначения те же что и на фиг. 3). Центр платформы описывает спираль (правая верхняя часть фиг. 5). Заметим, что если не учитывать массу роликов на колесе, то при принятых начальных условиях скорость центра масс и угловая скорость платформы сохраняются, а центр платформы описывает окружность. Таким образом, даже малая масса роликов приводит к качественным изменениям в движении экипажа.

## 6. Выводы.

1. Получены уравнения движения экипажа с полным набором роликов в неголономной постановке.
2. Показано, что при учете массы роликов возникают дополнительные члены, пропорциональные моменту инерции ролика относительно его оси.
3. Предложена модель перехода с ролика на ролик.
4. Получены численные решения с учетом движения свободных роликов для симметричного экипажа и обнаружены качественные отличия от безынерционной модели.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 16-01-00338).

## 7. Приложение. Матрица кинетической энергии:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{M}}_{11} & \widetilde{\mathcal{M}}_{12} & \widetilde{\mathcal{M}}_{13} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^T & \widetilde{\mathcal{M}}_{22} & \widetilde{\mathcal{M}}_{23} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{13}^T & \widetilde{\mathcal{M}}_{23}^T & \widetilde{\mathcal{M}}_{33} \end{bmatrix}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{11} = \text{diag}(M, M, I_S), \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{22} = JE_{N \times N}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{33} = BE_{Nn \times Nn}$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ B \sin \chi_{11} & \cdots & B \sin \chi_{Nn} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{12} = O_{3 \times N}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{23} = O_{N \times Nn}$$

Здесь  $O_*$  и  $E_*$  — нулевые и единичные матрицы указанных размерностей.

В третьей строке  $\widetilde{\mathcal{M}}_{13}$  сначала указаны элементы, соответствующие роликам, находящимся в контакте, а затем соответствующие “свободным” роликам; элементы упорядочены по возрастанию индексов, так что ролики одного колеса соседствуют.

Матрица связей:

$$V = \begin{bmatrix} \widetilde{V} & O_1 \\ O_2 & E \end{bmatrix}; \quad \widetilde{V} = \begin{bmatrix} R \cos \theta & -R \sin \theta & 0 \\ R \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} \\ \frac{R}{l} \sin \alpha_i & -\frac{R}{l} \cos \alpha_i & -\frac{R}{\Lambda l} \\ \frac{R}{\rho_k} \cos \alpha_k & \frac{R}{\rho_k} \sin \alpha_k & 0 \end{bmatrix}$$

Здесь  $O_1$  и  $O_2$  — нулевые  $(3 + 2n \times N(n-1))$ - и  $(N(n-1) \times 3)$ -матрицы,  $E$  — единичная матрица размерности  $N(n-1)$ .

Элементы матрицы кинетической энергии при учете связей:

$$\begin{aligned} m_{11}^* &= MR^2 + \sum_i \left( J \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \alpha_i + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \cos^2 \alpha_i \right) \quad (11 \leftrightarrow 22, \sin \alpha_i \leftrightarrow \cos \alpha_i) \\ m_{33}^* &= \frac{1}{\Lambda} \left( I_S + \sum_i J \frac{R^2}{l^2} \right), \quad m_{12}^* = \sum_i \left( -J \frac{R^2}{l^2} + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \right) \sin \alpha_i \cos \alpha_i \\ m_{13}^* &= \frac{1}{\Lambda} \sum_i B \frac{R}{\rho_i} \sin \chi_i \cos \alpha_i, \quad m_{23}^* = \frac{1}{\Lambda} \sum_i B \frac{R}{\rho_i} \sin \chi_i \sin \alpha_i \end{aligned} \quad (7.1)$$

Обозначая  $\xi_{\pm}(\alpha) = \nu_1 \cos \alpha \pm \nu_2 \sin \alpha$ ,  $\eta_{\pm}(\alpha) = \nu_1 \sin \alpha \pm \nu_2 \cos \alpha$ , для формальных импульсов  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$  получим:

$$\begin{aligned} p_x &= MR\xi_{-}(\theta), \quad p_y = MR\eta_{+}(\theta), \quad p_{\theta} = BR \sum_i \frac{\sin \chi_i}{\rho_i} \xi_{+}(\alpha_i) + \frac{I_S}{\Lambda} \nu_3 + B \sum_s \sin \chi_s \nu_s \\ p_{\chi_i} &= J \frac{R}{l} (\eta_{-}(\alpha_i) - \frac{1}{\Lambda} \nu_3), \quad p_{\phi_{k1}} = \frac{BR}{\rho_k} \xi_{+}(\alpha_k) + \frac{B}{\Lambda} \sin \chi_k, \quad p_{\phi_s} = \frac{B}{\Lambda} \nu_3 \sin \chi_s + B \nu_s \end{aligned} \quad (7.2)$$

Импульсы  $P_1, P_2, P_3$  имеют вид:

$$\begin{aligned} P_1 &= R \left( p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_i \left( \frac{p_{\chi_i}}{l} \sin \alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \cos \alpha_i \right) \right) \\ P_2 &= R \left( -p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_i \left( -\frac{p_{\chi_i}}{l} \cos \alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \sin \alpha_i \right) \right) \\ P_3 &= \frac{1}{\Lambda} \left( p_{\theta} + \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i} \right), \quad P_s = p_{\phi_s} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Для упрощения записи правой части уравнений введем обозначение для операции дискретной свертки произвольной функции  $f$ :

$$\sigma[f(\alpha, \chi)] = \sum_{k=1}^N f(\alpha_k, \chi_k) \frac{\sin \chi_k}{\rho_k^3}$$

Тогда скобки Пуассона в правой части (3.1) имеют вид (звездочкой обозначена подстанов-



ка канонических формальных импульсов  $p_i$ ):

$$\begin{aligned}
(\{P_1, P_2\})^* &= \left( -\sum_{k=1}^N R^2 \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = -BR^2(R\nu_1\sigma[\cos \alpha] + R\nu_2\sigma[\sin \alpha] + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho \sin \chi]) = \\
&= -BR^2 \mathbf{p}_{12} \mathbf{v}, \mathbf{p}_{12} = (\sigma[\cos \alpha], R\sigma[\sin \alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho \sin \chi], 0, \dots, 0) \\
(\{P_1, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left( -\sin \theta p_x + \cos \theta p_y - \sum_{k=1}^N R \cos \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = MR^2\Lambda^{-1}\nu_2 - \\
&- BR^2\Lambda^{-1}(R\nu_1\sigma[\cos^2 \alpha] + R\nu_2\sigma[\sin \alpha \cos \alpha] + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi]) = \\
&= MR^2\Lambda^{-1}\nu_2 - BR^2 \mathbf{p}_{13} \mathbf{v}; \\
\mathbf{p}_{13} &= \Lambda^{-1}(R\sigma[\cos^2 \alpha], R\sigma[\sin \alpha \cos \alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0) \\
(\{P_2, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left( -\cos \theta p_x - \sin \theta p_y - \sum_{k=1}^N R \sin \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = -MR^2\Lambda^{-1}\nu_1 - \\
&- BR^2\Lambda^{-1}(R\nu_1\sigma[\sin \alpha \cos \alpha] + R\nu_2\sigma[\sin^2 \alpha] + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho \sin \alpha \sin \chi]) = \\
&= -MR^2\Lambda^{-1}\nu_1 - BR^2 \mathbf{p}_{23} \mathbf{v}; \\
\mathbf{p}_{23} &= \Lambda^{-1}(R\sigma[\sin \alpha \cos \alpha], R\sigma[\sin^2 \alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho \sin \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0),
\end{aligned}$$

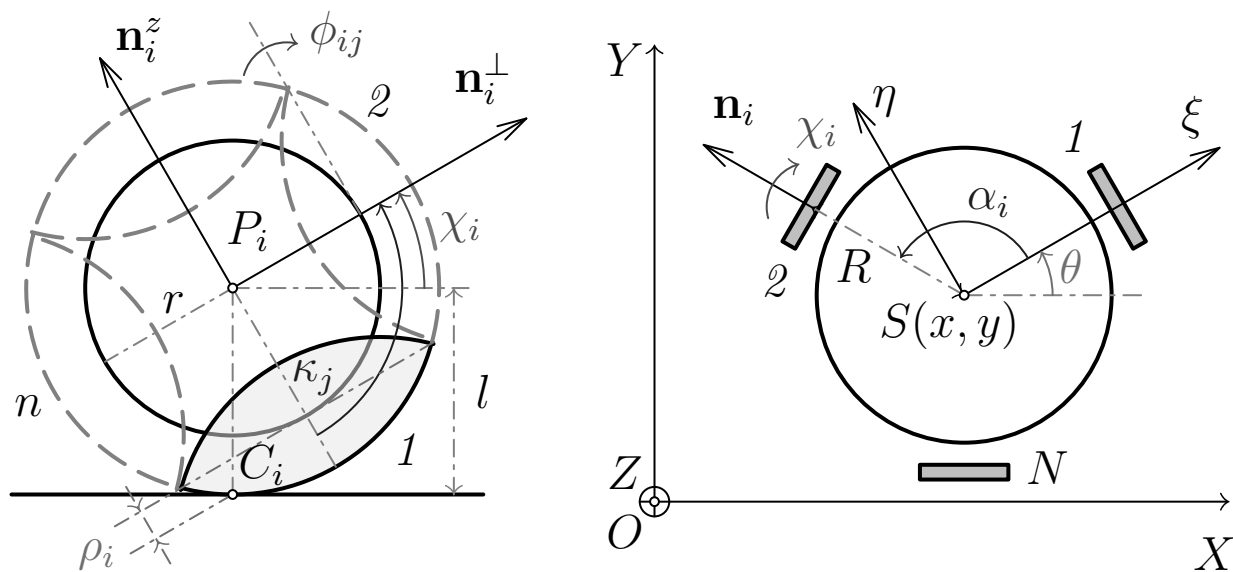
## Литература

1. Gferrer A. Geometry and kinematics of the Mecanum wheel // Computer Aided Geom. Design. 2008. Т. 25. С. 784–791.
2. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Математические аспекты динамики движения экипажа с тремя окольцованными колесами // Мобильные роботы и мехатронные системы. М.: Изд-во МГУ, 2006. С. 61–67.
3. Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. О движении мобильного робота с роликоне-сущими колесами // Изв. РАН. Теория сист. управл. 2007. № 6. С. 142–149.

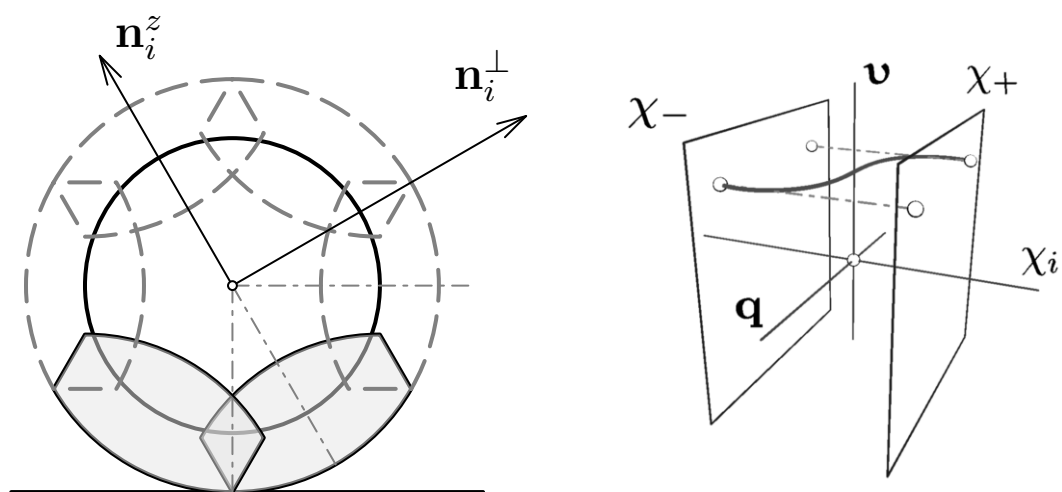
4. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Свободные и управляемые движения некоторой модели экипажа с роликонесущими колесами // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. 2008. № 6. С. 62–65.
5. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Динамика экипажа с роликонесущими колесами // ПММ. 2009. Т. 73. № 1. С. 13–22.
6. Мартыненко Ю. Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // ПММ. 2010. Т. 74. № 4. С. 610–619.
7. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Тележка с омниколесами на плоскости и сфере // Нелин. дин. 2011. Т. 7. № 4 (Мобильные роботы). С. 785–801.
8. Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots / R.L. Williams, B.E. Carter, P. Gallina [и др.] // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2002. Т. 18. № 3. С. 285–293.
9. Ashmore M., Barnes N. Omni-drive robot motion on curved paths: the fastest path between two points is not a straight-line // Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2002. С. 225–236.
10. Tobolar J., Herrmann F., Bunte T. Object-oriented modelling and control of vehicles with omni-directional wheels // Computational Mechanics. 2009. Hrad Nectiny, Czech Republic: 2009.
11. Косенко И. И., Герасимов К. В. Физически-ориентированное моделирование динамики омнитележки // Нелин. дин. 2016. Т. 12. № 2. С. 251–262.

12. Татаринов Я. В. Уравнения классической механики в новой форме // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. 2003. № 3. С. 67–76.
13. Зобова А. А. Применение лаконичных форм уравнений движения в динамике негономных мобильных роботов // Нелин. дин. 2011. Т. 7. № 4. Р. 771–783.

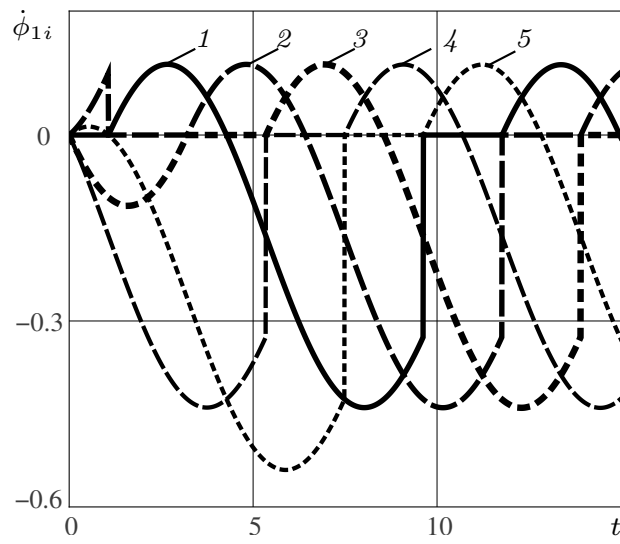
Фигуры.



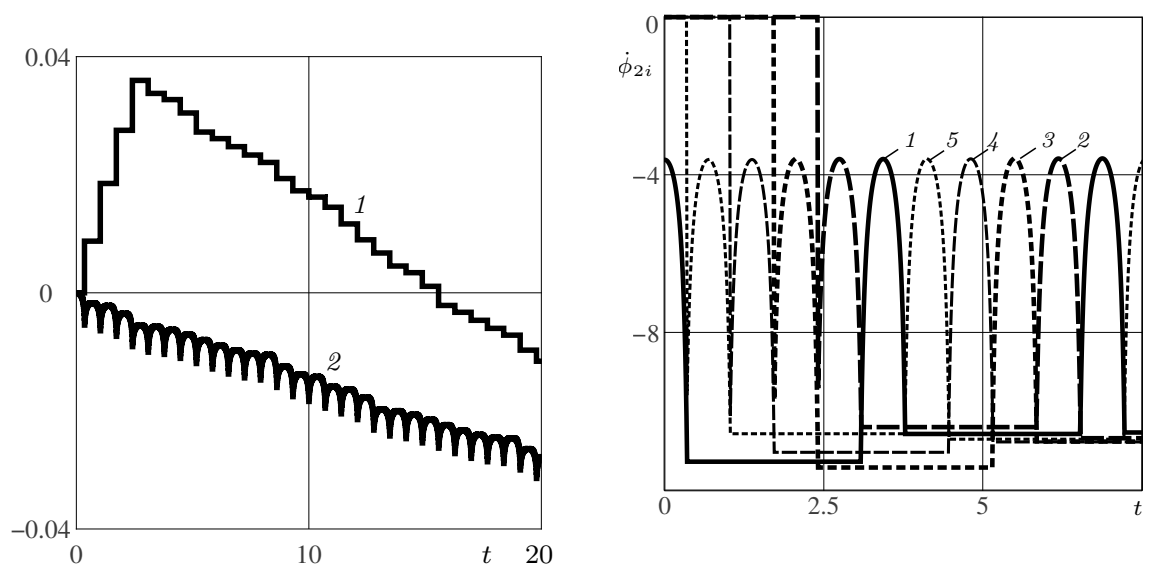
Фиг. 1.



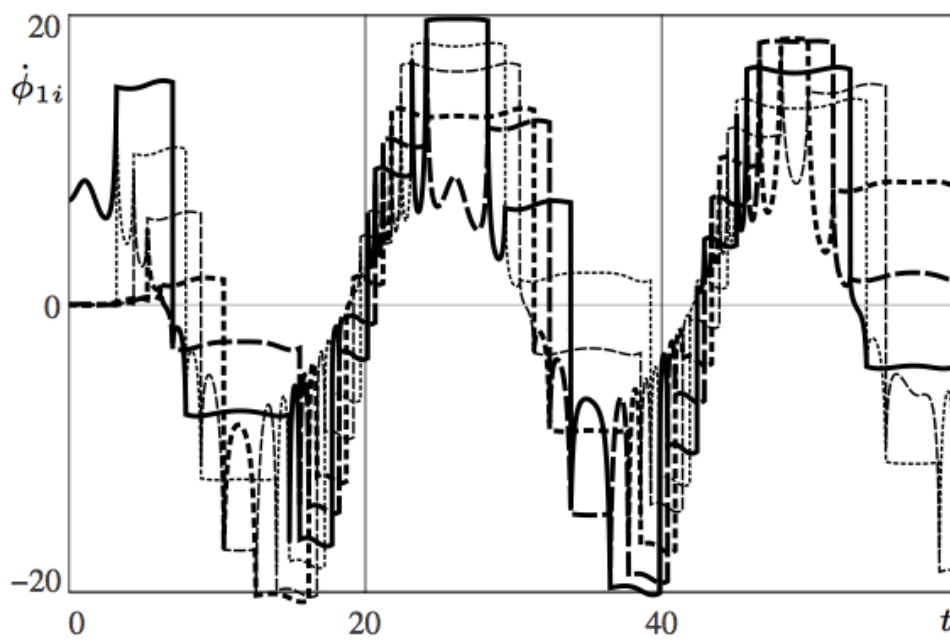
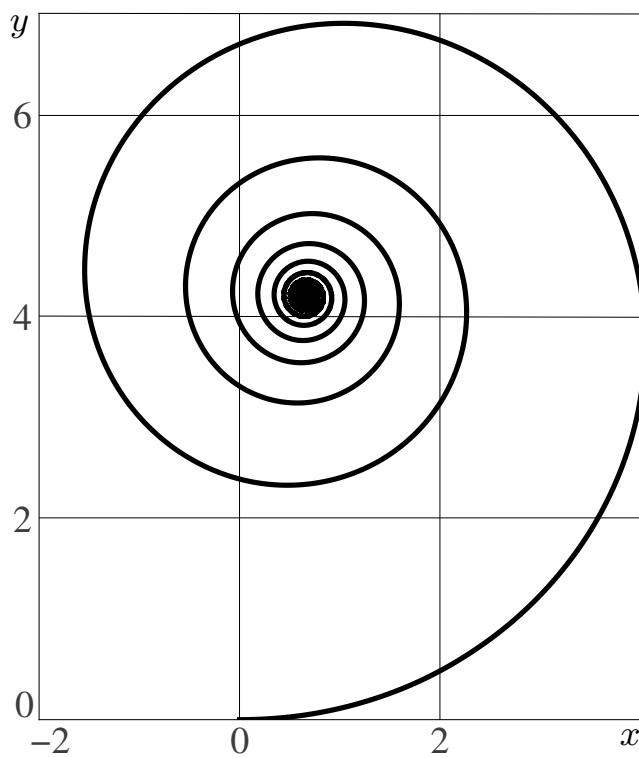
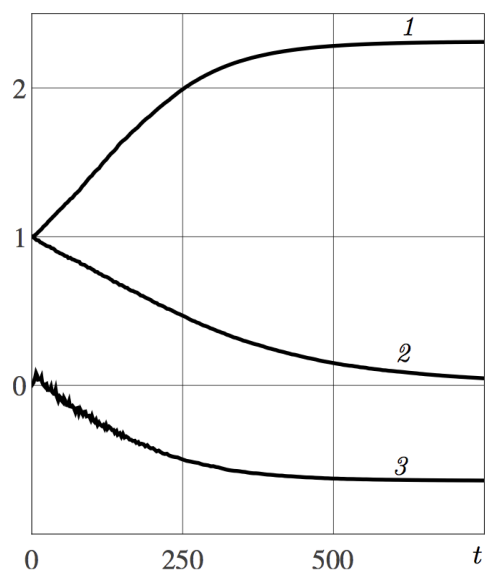
Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

ON THE MOTION OF A SYMMETRICAL VEHICLE WITH  
OMNIWHEELS WITH MASSIVE ROLLERS

© 2018 г. K. Gerasimov\*, A. Zobova\*\*

*Lomonosov Moscow State University*

\*e-mail: kiriger@gmail.com, \*\*e-mail: azobova@mech.math.msu.su