

ДВИЖЕНИЕ СИММЕТРИЧНОГО ЭКИПАЖА НА ОМНИ-КОЛЕСАХ С МАССИВНЫМИ РОЛИКАМИ

© 2018 г. К.В. Герасимов^{1,*}, А.А. Зобова^{1,**}

¹ *Кафедра теоретической механики и мехатроники*

механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

**E-mail: kiriger@gmail.com, **E-mail: azobova@mech.math.msu.su*

Рассматривается динамика симметричного экипажа с роликонесущими колесами, движущегося по неподвижной горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости в следующих предположениях: масса каждого ролика ненулевая, контакт между роликами и плоскостью точечный, проскальзывания нет. Уравнения движения составлены с помощью системы символьных вычислений Mathematica. В уравнениях движения получены дополнительные члены, пропорциональные осевому моменту инерции ролика и зависящие от углов поворота колес. Массивность роликов учитывается в тех фазах движения, когда не происходит смены роликов в контакте. При переходе колес с одного ролика на другой масса роликов считается пренебрежимо малой. Показано, что ряд движений, существующих в безынерционной модели (т.е. не учитывающей массу роликов), пропадает, так же как и линейный первый интеграл. Проведено сравнение основных типов движения симметричного трехколесного экипажа, полученных численным интегрированием уравнений движения с результатами, полученными на основании безынерционной модели.

1. Введение. Омниколеса (в русской литературе также используется название роликонесущие колеса) – это колеса особой конструкции, позволяющей экипажу двигаться в произвольном направлении, вращая колеса вокруг их собственных осей и не поворачивая их вокруг вертикали. На ободе такого колеса располагаются ролики, которые могут свободно вращаться вокруг своих осей, жестко закрепленных в диске колеса. Существуют два варианта расположения осей роликов: первый (собственно омниколеса) – оси роликов являются касательными к ободу колеса и, следовательно, лежат в его плоскости; второй (mesanum wheels [1]) – оси роликов развернуты вокруг нормали к ободу колеса на постоянный угол, обычно $\pi/4$.

Ранее была рассмотрена динамика омни-экипажей с использованием упрощенных моделей омни-колес, в которых не учитывается инерция и форма роликов [2–7], колеса моделируются как жесткие диски (без роликов), которые могут скользить в одном направлении и катиться без проскальзывания в другом. Далее будем называть такую модель безынерционной, в том смысле, что инерция собственного вращения роликов в ней не учитывается. В другой части работ по динамике омни-экипажа [8–11] используются некоторые формализмы для построения численных моделей систем тел. При этом явный вид уравнений движения оказывается скрытым, что делает невозможным непосредственный анализ уравнений и затрудняет оценку влияния разных факторов на динамику системы.

Цель настоящей работы – получение в явном виде уравнений движения по инерции экипажа с омни-колесами с массивными роликами в неголономной постановке с помощью подхода Я.В. Татаринова [12], исследование их свойств и сравнение поведения такой системы с поведением системы в безынерционном случае [13].

2. Постановка задачи. Рассмотрим экипаж с омни-колесами, движущийся по инерции по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Экипаж состоит

из платформы и N одинаковых омни-колес, плоскости которых относительно платформы неподвижны. Каждое колесо может свободно вращаться относительно платформы вокруг собственной оси, расположенной горизонтально. Будем считать, что на каждом колесе установлено n массивных роликов, так что оси роликов параллельны касательным к контурам дисков колес (см. фиг. 1). На рисунках ролики обозначены как закрашенные области, либо области с пунктирными границами, расположенные вдоль контуров дисков колес. На фиг. 1 ролики пронумерованы от 1 до n . Таким образом, система состоит из $N(n + 1) + 1$ абсолютно твердых тел.

Фиг. 1

Введем неподвижную систему отсчета так, что ось OZ направлена вертикально вверх, а плоскость OXY совпадает с опорной плоскостью. Введем также подвижную систему отсчета $S\xi\eta Z$, жестко связанную с платформой экипажа так, что плоскость $S\xi\eta$ горизонтальна и содержит центры всех колес P_i . Будем считать, что оси колес лежат на лучах,

Фиг. 2

соединяющих центр масс платформы S и центры колес (см. фиг. 2), а расстояния от центров колес до S одинаковы и равны R . Геометрию установки колес на платформе зададим углами α_i между осью $S\xi$ и осями колес (см. фиг. 1). Будем считать, что центр масс всей системы совпадает с точкой S (отсюда следует, что $\sum_k \cos \alpha_k = \sum_k \sin \alpha_k = 0$). Введем также три орта, жестко связанных с дисками колес: единичный орт оси i -го колеса $\mathbf{n}_i = \mathbf{SP}_i/|\mathbf{SP}_i|$ и орты \mathbf{n}_i^\perp и \mathbf{n}_i^z , лежащие в плоскости диска колеса, причем вектор \mathbf{n}_i^z вертикален при нулевом повороте колеса χ_i . Положения центров роликов на колесе определим углами κ_j между ними и направлением, противоположным вектору \mathbf{n}_i^z .

Положение экипажа будем задавать следующими координатами: x, y — координаты точки S на плоскости OXY , θ — угол между осями OX и $S\xi$ (угол курса), χ_i ($i = 1, \dots, N$) — углы поворота колес вокруг их осей, отсчитываемые против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \mathbf{n}_i , и ϕ_j — углы поворота роликов вокруг их собственных осей. Таким

образом, вектор обобщенных координат имеет вид

$$\mathbf{q} = (x, y, \theta, \{\chi_i\}_{i=1}^N, \{\phi_k\}_{k=1}^N, \{\phi_s\}_{s=1}^{N(n-1)})^T \in \mathbb{R}^{N(n+1)+3}$$

где сначала указаны углы поворота ϕ_k роликов, находящихся в данный момент в контакте с опорной плоскостью, а затем – остальных, “свободных”, роликов.

Введем псевдоскорости

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \quad \mathbf{v}_S = R\nu_1 \mathbf{e}_\xi + R\nu_2 \mathbf{e}_\eta, \quad \nu_3 = \Lambda \dot{\theta}, \quad \nu_s = \dot{\phi}_s$$

Их механический смысл таков: ν_1, ν_2 — проекции скорости точки S на оси $S\xi\eta$, связанные с платформой, ν_3 — с точностью до множителя угловая скорость платформы, ν_s — угловые скорости свободных роликов. Число независимых псевдоскоростей системы $K = N(n - 1) + 3$. Таким образом, имеем

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos \theta - R\nu_2 \sin \theta, \quad \dot{y} = R\nu_1 \sin \theta + R\nu_2 \cos \theta$$

Будем считать, что проскальзывания между опорной плоскостью и роликами в контакте не происходит, т.е. скорости точек C_i контакта равны нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

Выражая скорость точек контакта через введенные псевдоскорости и проектируя на векторы \mathbf{e}_ξ и \mathbf{e}_η соответственно, получим:

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{\rho_k}(\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k); \quad \rho_k = l \cos \chi_k - r \quad (2.1)$$

$$\dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}) \quad (2.2)$$

Заметим, что знаменатель ρ_k в формуле (2.1) — расстояние от оси ролика до точки контакта, обращающееся в нуль на стыке роликов (см. фиг. 1). Это обстоятельство приводит к

разрываю второго рода функций в правых частях уравнений движения и будет рассмотрено отдельно ниже. Уравнение (2.2) совпадает с уравнением связи в случае безынерционной модели роликов.

Таким образом, выражение обобщенных скоростей через псевдоскорости, учитывающее связи, наложенные на систему, можно записать в матричном виде (явные выражения компонент матрицы V приведены в приложении):

$$\dot{\mathbf{q}} = V\boldsymbol{\nu}, \quad V = V(\theta, \chi_i) \quad (2.3)$$

3. Уравнения движения. Воспользуемся лаконичным методом получения уравнений движения для систем с дифференциальными связями, предложенным Я.В. Татаринным [12]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \sum_{\mu=1}^L \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}, \quad \alpha = 1, \dots, K \quad (3.1)$$

Здесь L – лагранжиан, L^* – он же с учетом связей, P_α – линейные комбинации формальных канонических импульсов p_i , определяемые из соотношения

$$\sum_{\mu} \nu_\mu P_\mu \equiv \sum_i \dot{q}_i p_i$$

в котором \dot{q}_i выражены через псевдоскорости ν_μ в соответствии с формулами (2.3). Фигурными скобками $\{\cdot, \cdot\}$ обозначена скобка Пуассона по p_i, q_i . После ее вычисления выполняется подстановка

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

(Подробности см. в работах [12, 13].)

Так как потенциальная энергия системы во время движения не меняется, лагранжиан равен кинетической энергии:

$$2L = 2T = M\mathbf{v}_S^2 + I_S\dot{\theta}^2 + J \sum_i \dot{\chi}_i^2 + B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2)$$

Здесь M , I_S , J — массово-инерционные характеристики экипажа (см. Приложение), B — момент инерции ролика относительно его оси вращения. Лагранжиан при учете связей определяется соотношением:

$$2L^* = \boldsymbol{\nu}^T V^T \mathcal{M} V \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu}$$

Структура симметрической матрицы \mathcal{M}^* следующая:

$$\mathcal{M}^* = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} m_{ij}^* \end{pmatrix}_{3 \times 3} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ B\Lambda^{-1} \sin \chi_{12} & \dots & B\Lambda^{-1} \sin \chi_{nN} \end{pmatrix} \\ \star & \begin{pmatrix} B & 0 \\ & \ddots \\ 0 & B \end{pmatrix} \end{bmatrix},$$

Явные формулы для коэффициентов m_{ij}^* главного минора 3×3 выписаны в приложении; отметим, что они зависят только от координат χ_i , которые входят в дроби вида B/ρ_i^2 и $B \sin \chi_i / \rho_i$, имеющие разрывы второго рода при смене роликов (см. равенство (2.1)). Этот минор соответствует псевдоскоростям ν_1 , ν_2 , ν_3 . Остальные элементы матрицы \mathcal{M}^* соответствуют скоростям свободных роликов ν_s , для которых $\chi_{kl} = \chi_k + \kappa_l$ — угол между вертикалью и осью ролика. Индекс $k = 1, \dots, N$ означает номер колеса, индекс $l = 2, \dots, n$ — номер свободного ролика на колесе ($l = 1$ — ролик, находящийся в контакте). Звездой \star обозначен минор $N(n-1) \times 3$, равный транспонированному минору $3 \times N(n-1)$ над главной диагональю.

Первое слагаемое в левой части равенства (3.1) получается дифференцированием лагран-

жиана и подстановкой связей:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} = \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi) \boldsymbol{\nu}_\alpha) = \mathcal{M}^*(\chi_i) \dot{\boldsymbol{\nu}}_\alpha + \left(\frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi)) \boldsymbol{\nu} \right)_\alpha = \mathcal{M}^*(\chi_i) \dot{\boldsymbol{\nu}}_\alpha + \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i^*(V \boldsymbol{\nu})_{3+i} \boldsymbol{\nu} \right)_\alpha \quad (3.3)$$

где $\mathcal{M}_i^* = \frac{\partial \mathcal{M}^*}{\partial \chi_i}$. Обратим внимание, что вторая группа слагаемых, соответствующих свободным роликам ($\alpha = 4, \dots, K$), имеет вид

$$\nu_3 \frac{B}{\Lambda} \left(-\frac{\nu_3 R}{l \Lambda} - \frac{\nu_2 R}{l} \cos \alpha_i + \frac{\nu_1 R}{l} \sin \alpha_i \right) \cos \chi_{ij} = \nu_3 \frac{B}{\Lambda} (\dot{\chi}_i)^* \cos \chi_{ij}. \quad (3.4)$$

Выпишем выражения для P_α :

$$\begin{aligned} P_1 &= R \left(p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_i \left(\frac{p_{\chi_i}}{l} \sin \alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \cos \alpha_i \right) \right) \\ P_2 &= R \left(-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_i \left(-\frac{p_{\chi_i}}{l} \cos \alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \sin \alpha_i \right) \right) \\ P_3 &= \frac{1}{\Lambda} \left(p_\theta - \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i} \right) \\ P_s &= p_{\phi_s} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Поскольку коэффициенты лагранжиана L^* зависят только от координаты χ_i , его скобки Пуассона с P_1, P_2, P_3 — квадратичные формы псевдоскоростей, пропорциональные моменту инерции ролика B с коэффициентами, зависящими от χ_i :

$$\begin{aligned} \{P_1, L^*\} &= -\frac{\partial P_1}{\partial p_{\chi_i}} \frac{\partial L^*}{\partial \chi_i} = -\frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu} \sin \alpha_i, \\ \{P_2, L^*\} &= \frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu} \cos \alpha_i, \quad \{P_3, L^*\} = \frac{R}{2l \Lambda} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}, \quad \{P_s, L^*\} = 0, s > 3 \end{aligned}$$

Остается рассмотреть правую часть (3.1). Суммы $\{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}$ отличны от нуля лишь в уравнениях для $\alpha = 1, \dots, 3$ (см. Приложение).

Собирая вместе выражения для слагаемых (3.1) и пользуясь обозначениями из Прило-

жения, окончательно получим следующую структуру уравнений:

$$\mathcal{M}^* \dot{\boldsymbol{\nu}} = MR^2 \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} \nu_2 \nu_3 \\ -\nu_1 \nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\nu}^T \begin{pmatrix} \frac{R}{2l} \begin{pmatrix} -\mathcal{M}_i^* \sin \alpha_i \\ \mathcal{M}_i^* \cos \alpha_i \\ \mathcal{M}_i^* \Lambda^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - BR^2 \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu} - B \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_1^* \cos \chi_{12} \\ \vdots \\ \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_N^* \cos \chi_{Nn} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Символ \star в последнем слагаемом правой части уравнений для $\alpha = 1, \dots, 3$ заменяет выражения из второго слагаемого (3.3). Матрицы \mathcal{P}_α размера $K \times K$ составлены из строк $\mathbf{p}_{\alpha\beta}$, определенных явно в Приложении и зависящих от геометрии экипажа и углов поворота колес χ_i :

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{p}_{13} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{13} \\ -\mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Поскольку матрицы \mathcal{M}_i^* и \mathcal{P}_α зависят от углов поворота колес χ_i , для замыкания системы к этим уравнениям надо добавить уравнения (2.2).

Структура уравнений позволяет выявить следующие свойства:

1. Система допускает интеграл энергии $\frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu} = h = \text{const}$ в силу общей теоремы об изменении полной механической энергии: так как система стеснена автономными

идеальными связями, а силы консервативны, то полная энергия (в нашем случае она равна кинетической энергии) сохраняется.

2. В случае, если платформа экипажа неподвижна, т.е. $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$, свободные ролики сохраняют свою начальную угловую скорость: $\nu_s = \text{const}$, что и следовало ожидать.

3. При $B = 0$ все слагаемые в правой части равенства, кроме первого, обращаются в нуль, как и все члены, соответствующие свободным роликам, в левой части (см. Приложение, равенства (7.1)). В этом случае существенными остаются первые три уравнения системы на ν_1, ν_2, ν_3 . Эти уравнения описывают динамику безынерционной модели экипажа [5].

4. Существовавший в безынерционной модели линейный первый интеграл разрушается для модели с массивными роликами. При $B = 0$ он имеет вид $m_{33}^* \nu_3 = \text{const}$ (причем $m_{33} = \text{const}$) и следует непосредственно из третьего уравнения системы. При $B \neq 0$ скорость изменения ν_3 пропорциональна моменту инерции ролика B .

5. Поскольку скобки Пуассона в уравнениях для свободных роликов равны нулю, система допускает первые интегралы:

$$\nu_s + \frac{1}{\Lambda} \sin \chi_{ij} \nu_3 = \text{const} \quad (3.7)$$

Скорость вращения платформы ν_3 связана со скоростями собственного вращения свободных роликов. В частности, вращение экипажа вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр ($\nu_1(0) = 0, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) \neq 0$), неравномерно, в отличие от выводов, основанных на безынерционной модели.

6. Одновременное изменение начальных значений всех псевдоскоростей $\boldsymbol{\nu} \rightarrow \lambda \boldsymbol{\nu}, \lambda \neq 0$ умножением на число, отличное от нуля, эквивалентно замене времени $t \rightarrow \lambda t$.

4. Переход между роликами. Уравнения (3.6) описывают динамику системы на промежутках времени, в течение которых не происходит смены роликов. При переходе любого колеса с одного ролика на другой коэффициенты уравнений терпят разрыв второго рода из-за выражений $\rho_i = l \cos \chi_i - r$ в знаменателе.

Заметим, что на практике ситуация $\rho_i = 0$ никогда не реализуется, так как концы роликов усекаются (в частности, потому что оси роликов в реальных системах имеют ненулевую толщину и должны быть закреплены в колесах). Для того чтобы в каждый момент в контакте между колесом и плоскостью был ролик, ролики располагают в два или больше рядов.

Для исследования движений, на которых происходят смены контактных роликов, примем следующие предположения. Усечем ролики (см. левую часть фиг. 3), но оставим их

Фиг. 3 оси в одной плоскости, пренебрегая пересечением тел роликов в пространстве. Переход между роликами одного колеса будет происходить при значении угла $\chi_i = \frac{2\pi}{n}$. Колесо с усеченными роликами определим, располагая ось ролика на расстоянии $r = l \cos \frac{\pi}{n-1}$ от центра колеса, а его поверхность задавая как фигуру вращения дуги окружности радиуса l с углом раствора $\frac{2\pi}{n}$ вокруг этой оси, замкнутую соответствующими дисками.

Кроме этого, при смене контакта происходит мгновенное наложение связи на вновь вошедший в контакт ролик и снятие ее с освободившегося, после чего последний может свободно вращаться вокруг своей оси. В этот момент в реальной системе происходят взаимодействия типа ударных, в том числе проскальзывание роликов относительно плоскости, при котором происходит уменьшение полной энергии системы. Однако моделирование этих эффектов здесь не рассматривается. Будем считать, что скорости ν_1, ν_2, ν_3 при переходе с ролика на ролик не изменяются, как и в безынерционной модели в отсутствии роликов ($B = 0$). Таким образом, масса роликов влияет на динамику системы только

на гладких участках движения и не учитывается при смене роликов. Из уравнений (2.1) и (2.2) получим, что ролик, входящий в контакт, мгновенно приобретает ту же угловую скорость, что и освобождающийся ролик.

Таким образом, при переходе ($\chi_i = \chi_i^+$) сохраним значения ν_1, ν_2, ν_3 , заменим χ_i с χ_i^+ на χ_i^- (см. правую часть фиг. 3), и выполним с псевдоскоростями ν_s следующее преобразование. Пусть $\boldsymbol{\nu}_i^s = (\nu_{i2}, \dots, \nu_{in})$ – псевдоскорости свободных роликов на колесе i . Тогда, если при смене контакта $\dot{\chi}_i > 0$ (т.е. колесо поворачивается против часовой стрелки, см. фиг. 1), то отбросим ν_{in} , остальные компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}_i^s$ перенумеруем, сдвигая их вперед: $\nu_{ij} \rightarrow \nu_{ij+1}$, а компоненту ν_{i2} положим равной значению правой части в уравнении связи (2.1). При вращении колеса в другую сторону, выполним аналогичные преобразования, номера роликов при этом сдвигаются назад.

5. Примеры движений Численные решения получим для симметричного трехколесного экипажа ($\alpha_i = \frac{2\pi}{N}(i-1), N=3$), с $n=5$ роликами на колесе и следующих движений:

1. Вращение вокруг своей оси ($\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$) (фиг. 4);

Фиг. 4

2. Движение по прямой в направлении оси первого колеса ($\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = \nu_3(0) = 0$) (фиг. 5);

Фиг. 5

3. Движение с ненулевой скоростью центра масс и, одновременно, с ненулевой угловой скоростью платформы ($\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$) (фиг. 6).

Фиг. 6

Расчеты выполнены в безразмерных величинах, так что радиус платформы и колеса $R = 0.15$ и $r = 0.05$, массы платформы, колеса и ролика 1, 0.15 и 0.05. При этом момент инерции ролика $B \approx 1.6 \cdot 10^{-5}$. Для безынерционной модели массово-инерционные характеристики колес положим соответствующими экипажу с пятью заблокированными роликами.

Во всех трех случаях наблюдаются различия между двумя постановками: свободные ролики приходят в движение, из-за чего меняется угловая скорость платформы экипажа и скорость центра масс экипажа. Кроме этого, становится заметно влияние введенных предположений о смене контакта: график кинетической энергии приобретает ступенчатый вид в силу изменений, зависящих от χ и $\dot{\phi}_{i,j}$, в слагаемых (3.2):

$$B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}) \quad (5.1)$$

при мгновенном наложении связей. В промежутки времени между сменами роликов энергия остается постоянной.

В случаях 1 и 2 траектории центра экипажа S на плоскости OXY и характер вращения вокруг вертикальной оси SZ ($\theta(t)$) согласно модели с роликами и безынерционной модели различаются несущественно, однако заметны переходные режимы вращения роликов в начале движения.

При вращении вокруг вертикали (движение 1) угловая скорость платформы ν_3 меняется немонотонно, но в среднем медленно убывает: за первые 10^3 с угловая скорость уменьшается на 2%. Скорость центра масс остается равной нулю. Кинетическая энергия системы также медленно убывает. На фиг. 4 представлены угловые скорости роликов на первом колесе $\dot{\phi}_{1j}$. Номер кривой совпадает с номером ролика на колесе, поведение роликов на других двух колесах полностью аналогично. Заметим, что при нулевой скорости центра экипажа опорный ролик не вращается (см. формулу (2.2)): угловая скорость первого ролика в течение первой секунды движения нулевая. После выхода из контакта ролик начинает раскручиваться в соответствии с первым интегралом (3.7). Раскрученный ролик при входе в контакт с опорной плоскостью мгновенно теряет угловую скорость (на графике угловой скорости первого ролика это происходит при $t = 9.6$ с), что приводит к

Фиг. 4

Фиг. 5

убыванию кинетической энергии.

При движении по прямой (движение 2) угловая скорость остается нулевой. На фиг. 5 слева показаны графики относительного изменения скорости центра масс $\nu_1(t)/\nu_1(0) - 1$ (кривая 1) и кинетической энергии $T/T(0) - 1$ (кривая 2). Видно, что на начальном этапе движения при смене контакта кинетическая энергия возрастает, что обусловлено принятой моделью наложения связи, но при этом возрастание энергии остается в пределах 4%. Скорость центра масс (кривая 2, слева) в среднем убывает. Скорость вращения переднего колеса равна нулю, колесо катится, опираясь на один и тот же ролик, остальные ролики не раскручиваются. Угловые скорости роликов на одном из задних колес показаны на фиг. 5 справа. Свободные ролики двигаются с постоянной угловой скоростью, ролик в контакте изменяет свою скорость за счет скорости центра масс. После того как все ролики побывают в контакте, их движение становится квазипериодичным, а энергия убывает с каждой сменой контакта.

Фиг. 6

При движении 3, сочетающем поступательное и вращательное движение, угловая скорость экипажа ν_3 растет и выходит на постоянное значение (кривая 1 на фиг. 6 слева вверх), скорость центра экипажа $v = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ уменьшается до нуля (кривая 2 там же), а кинетическая энергия (кривая 3) после короткого начального участка, где происходят маленькие по величине скачки вверх аналогично движению 2, убывает. Угловые скорости роликов представляют собой квазипериодические функции времени (характерный участок представлен на фиг. 6 справа сверху, обозначения те же что и на фиг. 4). Центр платформы описывает спираль (нижняя часть фиг. 6). Заметим, что если не учитывать массу роликов на колесе, то при принятых начальных условиях скорость центра масс и угловая скорость платформы сохраняются, а центр платформы описывает окружность. Таким образом, даже малая масса роликов приводит к качественным изменениям в дви-

жении экипажа.

6. Выводы.

1. Получены уравнения движения экипажа с полным набором роликов в неголономной постановке.
2. Показано, что при учете массы роликов возникают дополнительные члены, пропорциональные моменту инерции ролика относительно его оси.
3. Предложена модель перехода с ролика на ролик.
4. Получены численные решения с учетом движения свободных роликов для симметричного экипажа и обнаружены качественные отличия от безынерционной модели.

7. Приложение. Матрица кинетической энергии:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & M & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & I_S & 0 & \cdots & 0 & B \sin \chi_{k1} & \cdots & B \sin \chi_{Nn} \\ & & & J & & & & & \\ & & & & \ddots & & & 0 & \\ & & & & & J & & & \\ & & \star & & & & B & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & B \end{bmatrix}$$

В ее третьей строке сначала указаны элементы, соответствующие роликам, находящимся в контакте, а затем соответствующие “свободным” роликам; элементы упорядочены по возрастанию индексов, так что ролики одного колеса соседствуют. Матрица \mathcal{M} – симметрическая, звездой обозначены элементы, получающиеся транспонированием верхнего треугольника матрицы.

Матрица связей:

$$V = \begin{bmatrix} \tilde{V} & O_1 \\ O_2 & E \end{bmatrix}; \quad \tilde{V} = \begin{bmatrix} R \cos \theta & -R \sin \theta & 0 \\ R \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} \\ \frac{R}{l} \sin \alpha_i & -\frac{R}{l} \cos \alpha_i & -\frac{R}{\Lambda l} \\ \frac{R}{\rho_k} \cos \alpha_k & \frac{R}{\rho_k} \sin \alpha_k & 0 \end{bmatrix}$$

Здесь O_1 и O_2 – нулевые $(3 + 2n \times N(n - 1))$ - и $(N(n - 1) \times 3)$ -матрицы, E – единичная матрица размерности $N(n - 1)$.

Элементы матрицы кинетической энергии при учете связей:

$$\begin{aligned} m_{11}^* &= MR^2 + \sum_i \left(J \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \alpha_i + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \cos^2 \alpha_i \right) \quad (11 \leftrightarrow 22, \sin \alpha_i \leftrightarrow \cos \alpha_i) \\ m_{33}^* &= \frac{1}{\Lambda} \left(I_S + \sum_i J \frac{R^2}{l^2} \right), \quad m_{12}^* = \sum_i \left(-J \frac{R^2}{l^2} + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \right) \sin \alpha_i \cos \alpha_i \\ \frac{m_{13}^*}{\cos \alpha_i} &= \frac{m_{23}^*}{\sin \alpha_i} = \frac{1}{\Lambda} \sum_i B \frac{R}{\rho_i} \sin \chi_i \end{aligned} \quad (7.1)$$

Обозначая $\xi_{\pm}(\alpha) = \nu_1 \cos \alpha \pm \nu_2 \sin \alpha$, $\eta_{\pm}(\alpha) = \nu_1 \sin \alpha \pm \nu_2 \cos \alpha$, для формальных импульсов $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ получим:

$$\begin{aligned} p_x &= MR\xi_{-}(\theta), \quad p_y = MR\eta_{+}(\theta), \quad p_{\theta} = BR \sum_i \frac{\sin \chi_i}{\rho_i} \xi_{+}(\alpha_i) + \frac{I_S}{\Lambda} \nu_3 + B \sum_s \sin(\chi_s) \nu_s \\ p_{\chi_i} &= J \frac{R}{l} (\eta_{-}(\alpha_i) - \frac{1}{\Lambda} \nu_3), \quad p_{\phi_{k1}} = \frac{BR}{\rho_k} \xi_{+}(\alpha_k) + \frac{B}{\Lambda} \sin \chi_k, \quad p_{\phi_s} = \frac{B}{\Lambda} \nu_3 \sin \chi_s + B \nu_s \end{aligned} \quad (7.2)$$

Линейные комбинации P_α имеют вид:

$$\begin{aligned}
P_1 &= R \left(p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_i \left(\frac{p_{\chi_i}}{l} \sin \alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \cos \alpha_i \right) \right) \\
P_2 &= R \left(-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_i \left(-\frac{p_{\chi_i}}{l} \cos \alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \sin \alpha_i \right) \right) \\
P_3 &= \frac{1}{\Lambda} \left(p_\theta + \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i} \right), \quad P_s = p_{\phi_s}
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Для упрощения записи правой части уравнений введем обозначение для операции дискретной свертки произвольной функции f :

$$\sigma[f(\alpha, \chi)] = \sum_{k=1}^N f(\alpha_k, \chi_k) \frac{\sin \chi_k}{\rho_k^3}$$

Тогда скобки Пуассона в правой части (3.1) имеют вид (звездочкой обозначена подстановка канонических формальных импульсов p_i):

$$\begin{aligned}
(\{P_1, P_2\})^* &= \left(-\sum_{k=1}^N R^2 \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = -BR^2 (R\nu_1 \sigma[\cos \alpha] + R\nu_2 \sigma[\sin \alpha] + \Lambda^{-1} \nu_3 \sigma[\rho \sin \chi]) = \\
&= -BR^2 \mathbf{p}_{12} \boldsymbol{\nu}, \quad \text{где } \mathbf{p}_{12} = (\sigma[\cos \alpha], R\sigma[\sin \alpha], \Lambda^{-1} \sigma[\rho \sin \chi], 0, \dots, 0) \\
(\{P_1, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left(-\sin \theta p_x + \cos \theta p_y - \sum_{k=1}^N R \cos \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = MR^2 \Lambda^{-1} \nu_2 - \\
&- BR^2 \Lambda^{-1} (R\nu_1 \sigma[\cos^2 \alpha] + R\nu_2 \sigma[\sin \alpha \cos \alpha] + \Lambda^{-1} \nu_3 \sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi]) = \\
&= MR^2 \Lambda^{-1} \nu_2 - BR^2 \mathbf{p}_{13} \boldsymbol{\nu}
\end{aligned}$$

$$\text{где } \mathbf{p}_{13} = \Lambda^{-1} (R\sigma[\cos^2 \alpha], R\sigma[\sin \alpha \cos \alpha], \Lambda^{-1} \sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0)$$

$$\begin{aligned}
(\{P_2, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left(-\cos \theta p_x - \sin \theta p_y - \sum_{k=1}^N R \sin \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = -MR^2 \Lambda^{-1} \nu_1 - \\
&- BR^2 \Lambda^{-1} (R\nu_1 \sigma[\sin \alpha \cos \alpha] + R\nu_2 \sigma[\sin^2 \alpha] + \Lambda^{-1} \nu_3 \sigma[\rho \sin \alpha \sin \chi]) = \\
&= -MR^2 \Lambda^{-1} \nu_1 - BR^2 \mathbf{p}_{23} \boldsymbol{\nu}
\end{aligned}$$

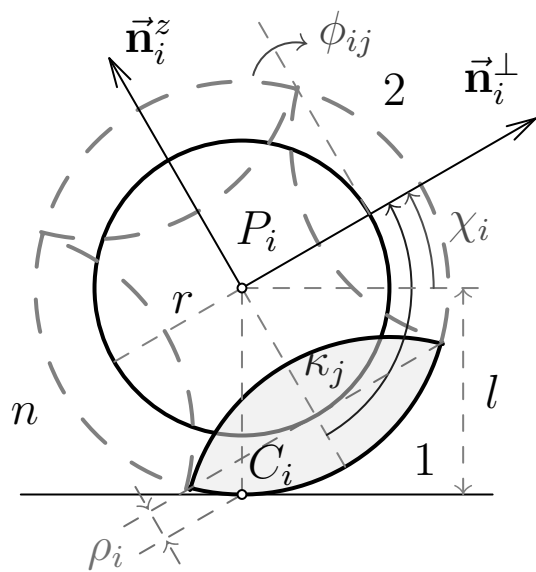
$$\text{где } \mathbf{p}_{23} = \Lambda^{-1} (R\sigma[\sin \alpha \cos \alpha], R\sigma[\sin^2 \alpha], \Lambda^{-1} \sigma[\rho \sin \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0),$$

Литература

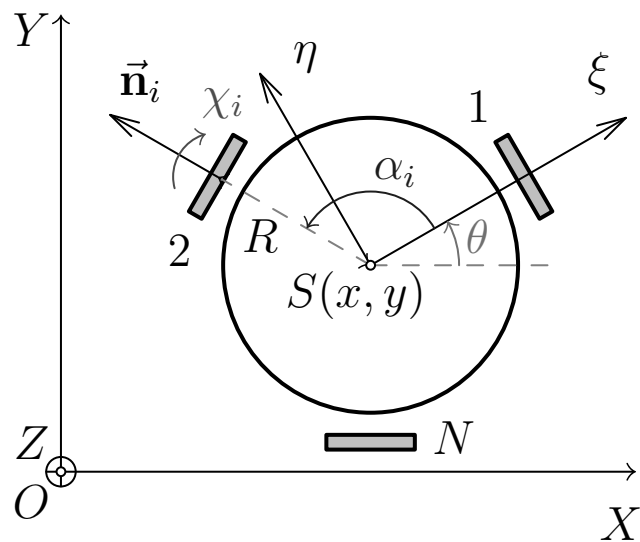
1. Gferrer A. Geometry and kinematics of the Mecanum wheel // Computer Aided Geom. Design. 2008. Т. 25. С. 784–791.
2. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Математические аспекты динамики движения экипажа с тремя окольцованными колесами // Мобильные роботы и мехатронные системы. М.: Изд-во МГУ, 2006. С. 61–67.
3. Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Изв. РАН. Теория сист. управл. 2007. № 6. С. 142–149.
4. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Свободные и управляемые движения некоторой модели экипажа с роликонесущими колесами // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. 2008. № 6. С. 62–65.
5. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Динамика экипажа с роликонесущими колесами // ПММ. 2009. Т. 73, № 1. С. 13–22.
6. Мартыненко Ю. Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // ПММ. 2010. Т. 74, № 4. С. 610–619.
7. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Тележка с омниколесами на плоскости и сфере // Нелин. дин. 2011. Т. 7., № 4 (Мобильные роботы). С. 785–801.
8. Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots / R.L. Williams, B.E. Carter, P. Gallina [и др.] // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2002. jun. Т. 18, № 3. С. 285–293. URL: <https://doi.org/10.1109/tra.2002.1019459>.

9. Ashmore Mark, Barnes Nick. Omni-drive Robot Motion on Curved Paths: The Fastest Path between Two Points Is Not a Straight-Line // Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2002. С. 225–236. URL: https://doi.org/10.1007/3-540-36187-1_20.
10. Tobolar J., Herrmann F., Bunte T. Object-oriented modelling and control of vehicles with omni-directional wheels // Computational Mechanics. Hrad Nectiny, Czech Republic: 2009. November 9–11.
11. Косенко И. И., Герасимов К. В. Физически-ориентированное моделирование динамики омнитележки // Нелин. дин. 2016. Т. 12, № 2. С. 251–262.
12. Татаринов Я. В. Уравнения классической механики в новой форме // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2003. № 3. С. 67–76.
13. Zobova A. A. Application of laconic forms of the equations of motion in the dynamics of nonholonomic mobile robots // Nelineinaya Dinamika. 2011. С. 771–783. URL: <https://doi.org/10.20537>

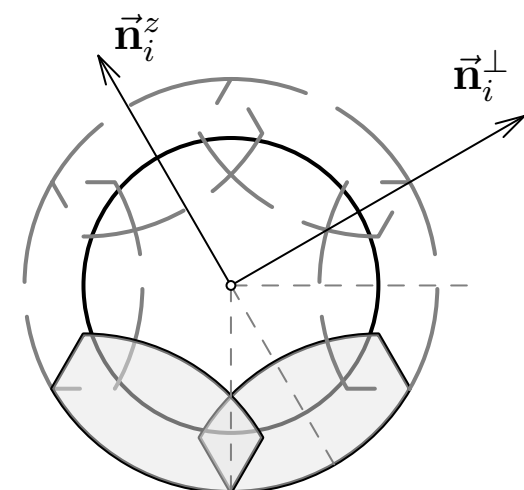
Фигуры.



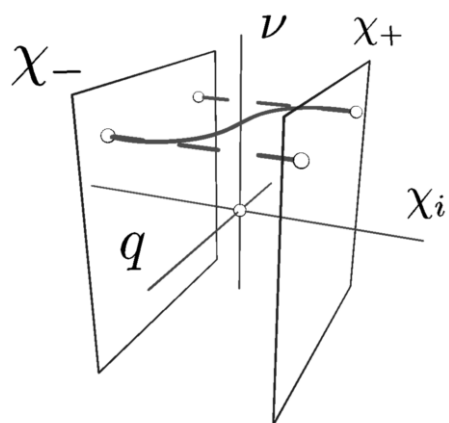
Фиг. 1.

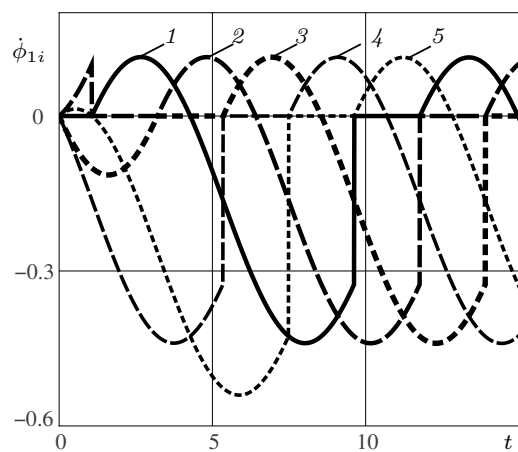


Фиг. 2.

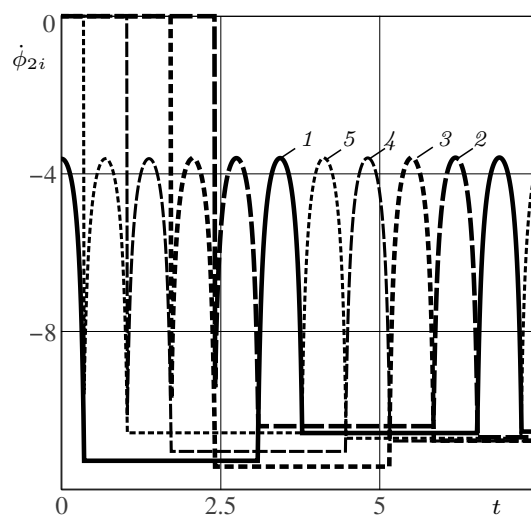
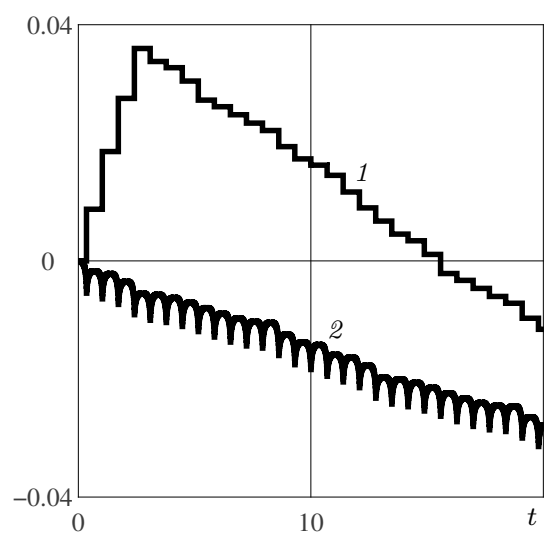


Фиг. 3.

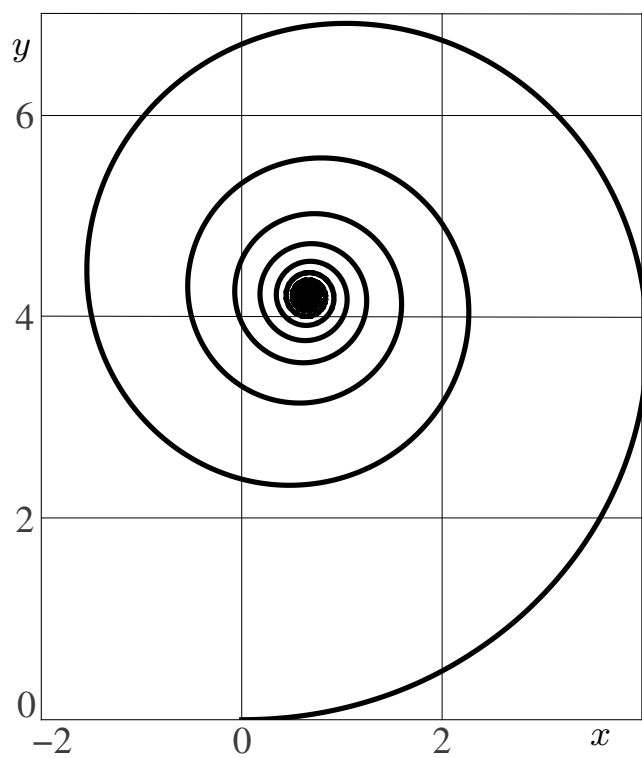
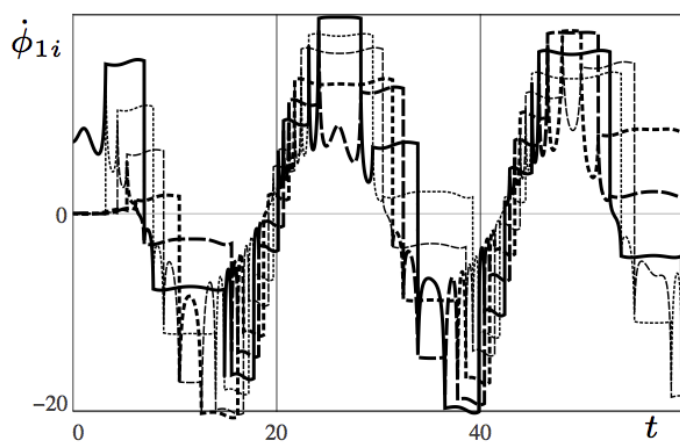
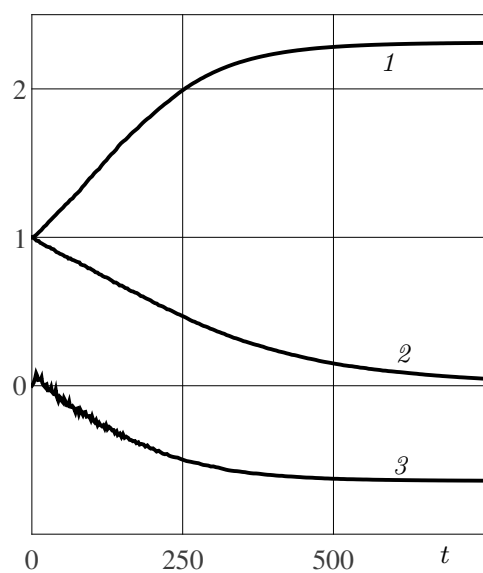




Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

ON THE MOTION OF A SYMMETRICAL VEHICLE WITH OMNIWHEELS WITH MASSIVE ROLLERS

© 2018 г. K. Gerasimov^{1,*}, A. Zobova^{1,**}

¹ *Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics, Department of Mechanics
and Mathematics, Lomonosov Moscow State University*

**E-mail: kiriger@gmail.com, **E-mail: azobova@mech.math.msu.su*