Динамика экипажа с омни-колесами с учетом массы роликов

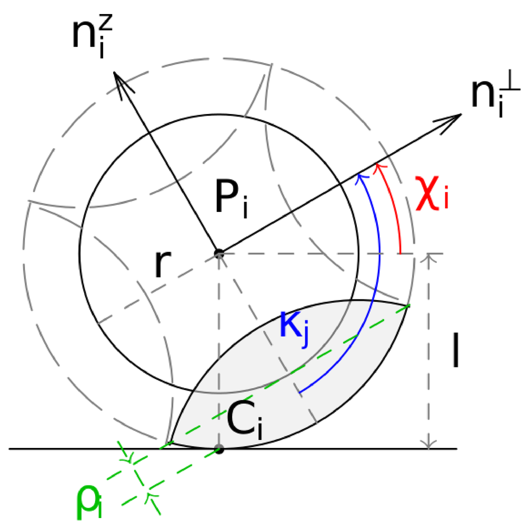
Г.Н. Моисеев, К.В. Герасимов, А.А. Зобова

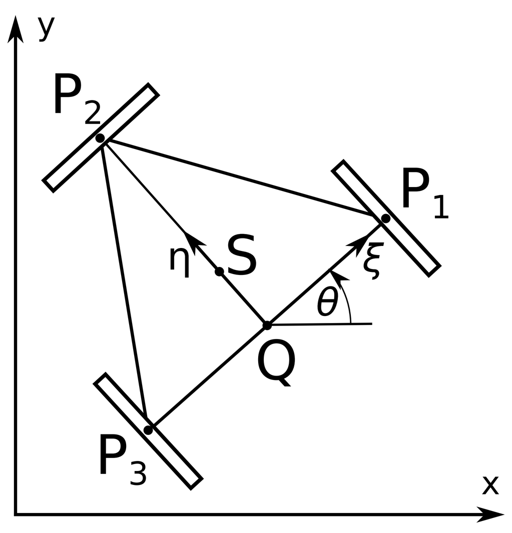
Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова,
azobova@mech.math.msu.su

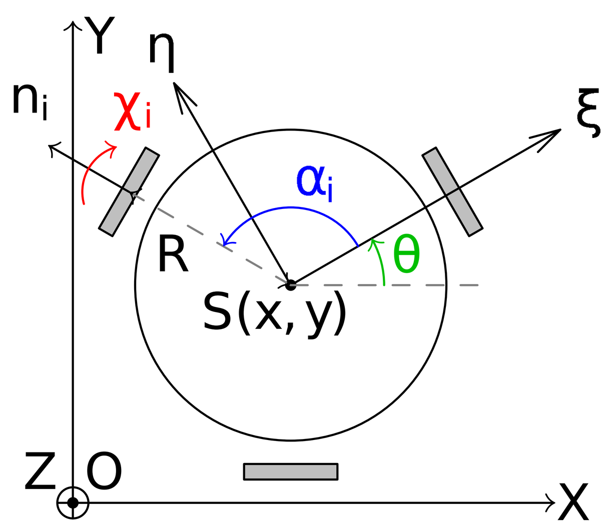
Аннотация

Рассматривается динамика мобильных экипажей, движущихся по неподвижной абсолютно шероховатой плоскости. Экипаж состоит из горизонтальной платформы и трех омни-колес, которые вращаются независимо друг от друга, их плоскости неподвижны относительно платформы и вертикальны. Ролики колес массивны, двигаются без проскальзывания. Составлены уравнения движения в форме лаконичных уравнений Я.В. Татаринова, исследована структура добавочных членов, возникающих вследствие добавления масс роликов, их влияние на свойства динамической системы и устойчивость некоторых стационарных движений. Обсуждается моделирование перехода с одного опорного ролика на другой ролик.

Постановка задачи







Координаты: $\mathbf{q} = (x, y, \theta, \{\chi_i\}|_{i=1}^N, \{\phi_k\}|_{k=1}^N, \phi_s)^T \in \mathbb{R}^{N(n+1)+3}$

Псевдоскорости: $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s)$, $\quad \dot{x} = R\nu_1 \cos\theta - R\nu_2 \sin\theta$, $\quad \dot{y} = R\nu_1 \sin\theta + R\nu_2 \cos\theta$, $\quad \nu_3 = \Lambda\dot{\theta}$, $\quad \nu_s = \dot{\phi}_s$ (s – свободные ролики)

Уравнения Я.В. Татаринова

Движение по инерции:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}$$

$$\nu_\mu P_\mu \equiv \dot{q}_i p_i, \qquad \dot{\mathbf{q}} = V\boldsymbol{\nu}, \qquad V = V(\theta, \chi_i)$$

Кинетическая энергия

$$2L = 2T = M\mathbf{v}_S^2 + I_S\dot{\theta}^2 + J\sum_i \dot{\chi}_i^2 + B\sum_{i,j}(\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta}\sin(\kappa_j + \chi_i)\dot{\phi}_{ij}) = \dot{\mathbf{q}}^T\mathcal{M}\dot{\mathbf{q}}$$

$$2L^* = \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}\mathcal{M}V\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathcal{M}^*(\chi_i)\boldsymbol{\nu}$$

B – момент инерции ролика относительно его оси.

Свойства уравнений

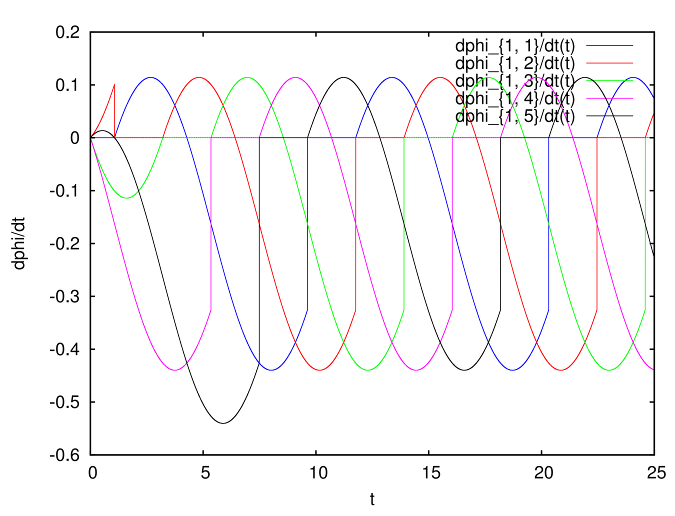
1. Система допускает интеграл энергии $\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathcal{M}^*(\chi_i)\boldsymbol{\nu} = 2h = \mathrm{const}$.
2. При $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$, имеем $\nu_s = \mathrm{const}$
3. Первые интегралы свободных роликов $\frac{\partial L^*}{\partial \nu_s} = B\Lambda^{-1}\sin\tilde{\chi}\nu_3 + B\nu_s = \mathrm{const}$
4. При $B = 0$ получим уравнения безынерционной модели
5. Линейный первый интеграл безынерционной модели разрушается, его скорость изменения пропорциональна B

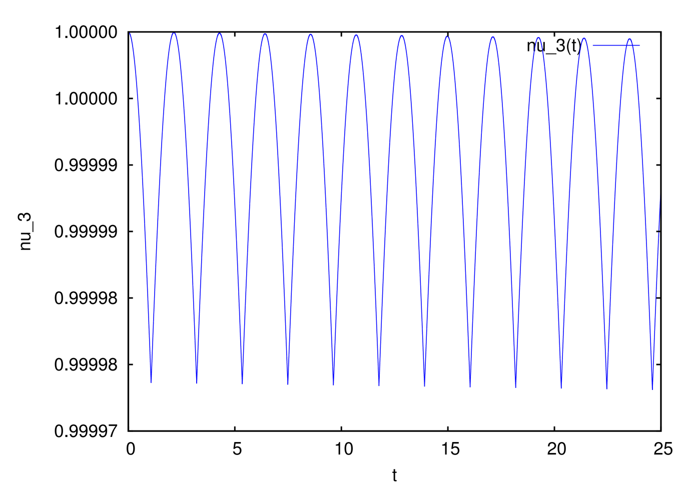
Переход между роликами

1. Входящий в контакт ролик мгновенно приобретает скорость вращения согласно связям, а ν_1, ν_2, ν_3 сохраняются.
2. Ролики усечены, так что $\rho_i \neq 0$
3. Уравнения интегрируются численно на Maxima

Вращение вокруг вертикали

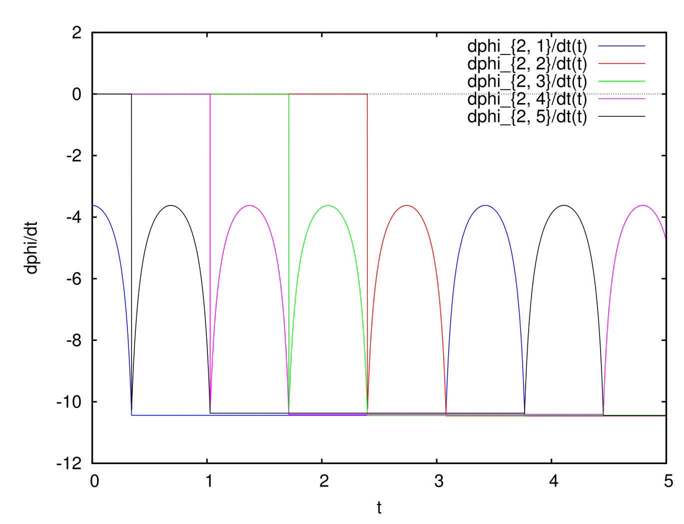
Угловые скорости роликов: $\qquad \nu_3 = \Lambda\dot{\theta}$

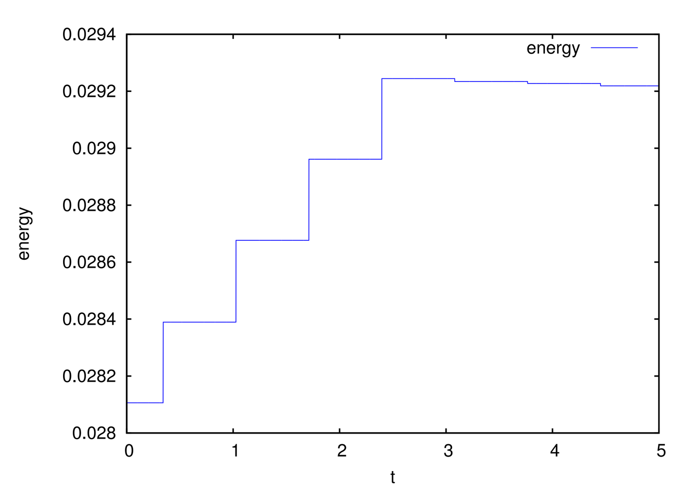




Движение вперед

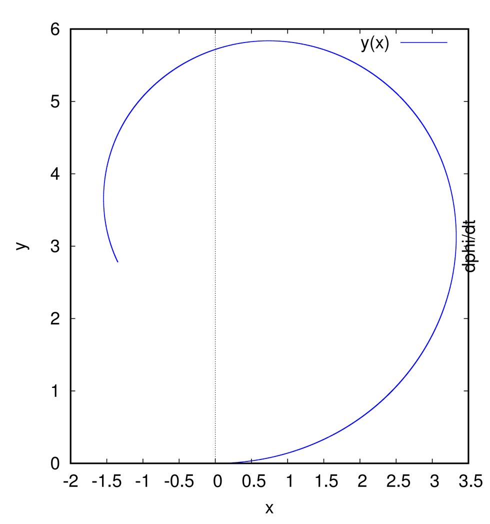
Угл. скорости роликов 2 колеса: $\qquad$ Кин. энергия

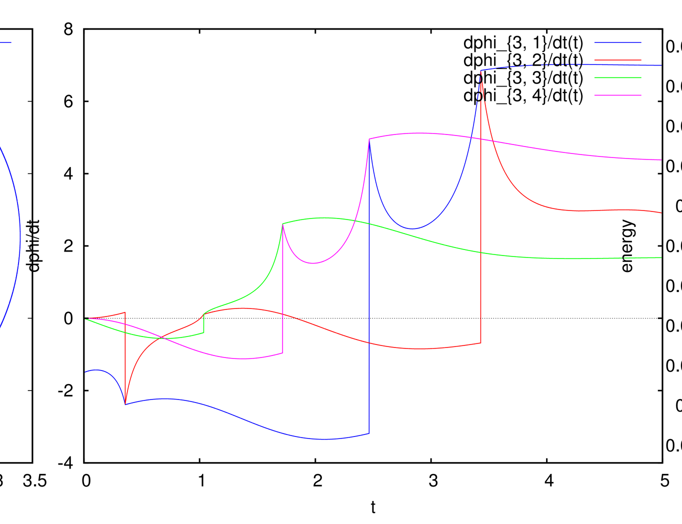


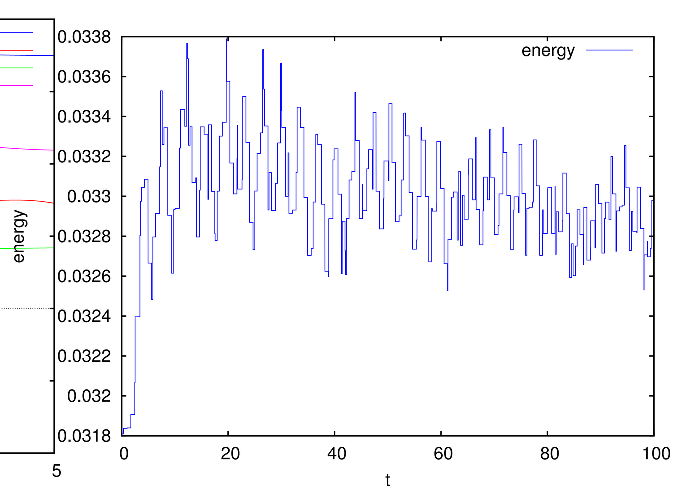


Комбинация движений $\nu_1^0 = \nu_3^0 = 1, \nu_2^0 = 0$

Траектория: $\qquad \dot{\phi}_i \qquad T$:







Результаты

1. Ролики раскручиваются при $\dot{\theta} \neq 0$
2. Линейный первый интеграл безынерциальной модели почти постоянен (скорость изменения пропорциональна B)
3. Энергия при переходе с ролика на ролик не сохраняется (убывает и возрастает)
4. Траектории центра масс различаются существенно, по сравнению с безынерционной моделью
5. Условия неустойчивости прямолинейных движений сохраняются те же, что и для безынерционной модели

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00338).