

На переключение  
с стр. 16, 18 и фиг 6 (верхне ФР-го)  
УДК 531.36  
переворота академии  
5 фев. 18

14 11 17

с горизонтали

К.В. Герасимов, А.А. Зобова

## Движение симметричного экипажа на омни-колесах $\frac{d}{dt}$

### с массивными роликами

Рассматривается динамика симметричного экипажа с роликонесущими колесами, движущегося по неподвижной горизонтальной абсолютно гладкой плоскости в следующих предположениях: масса каждого ролика неизменная, контакт между роликами и плоскостью точечный, проскальзывания нет.

Уравнения движения составлены с помощью системы символьных вычислений Maxima. В уравнениях движения получены дополнительные члены, пропорциональные осевому моменту инерции ролика и зависящие от углов поворота колес.

Массивность роликов учитывается в тех фазах движения, когда не происходит смены роликов в контакте. При переходе колес с одного ролика на другой масса роликов считается пренебрежимо малой. Показано, что ряд движений, существующих в безынерционной модели (т.е. не учитывающей массу роликов), пронаследует, так же как и линейный первый интеграл. Проведено сравнение основных типов движения симметричного трехколесного экипажа, полученных численным интегрированием уравнений движения, с безынерционной моделью.

**1. Введение.** Омниколеса (в русской литературе также используется название роликонесущие колеса) – это колеса особой конструкции, позволяющей экипажу двигаться в произвольном направлении, врача колеса вокруг их собственных осей и не поворачивая их вокруг вертикали. На ободе такого колеса располагаются ролики, которые могут сво-

бодно вращаться вокруг своих осей, жестко закрепленных в диске колеса. Существуют два варианта расположения осей роликов: первый (составно омниколеса) – оси роликов являются касательными к ободу колеса и, следовательно, лежат в его плоскости; второй *несимметричные колеса* [1] – оси роликов развернуты вокруг нормали к ободу колеса на постоянный угол, обычно  $\pi/4$ .

Ранее была рассмотрена динамика омни-экипажей с упрощенными моделями омниколес, в которых не учитывается инерция и форма роликов [2–7]. В этих работах колеса моделируются как жесткие диски (без роликов), которые могут скользить в одном направлении и катиться без проскальзывания в другом. Далее мы будем называть такую модель безынерционной в том смысле, что инерция собственного вращения роликов в ней не учитывается. Другая часть работ по динамике омни-экипажа [8–11] использует некоторые формализмы для построения численных моделей систем тел. При этом явный вид уравнений движения оказывается скрыт *быть разо*, делает невозможным непосредственный анализ уравнений и затрудняет оценку влияния разных факторов на динамику системы.

Цель настоящей работы – получение уравнений движения по инерции экипажа с омниколесами с массивными роликами в неголономной постановке с помощью подхода [12], *в явном виде* *д.в. Тагаринова*. Исследование их свойств и сравнение поведения такой системы с новением системы в безынерционном случае [13].

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим экипаж с омни-колесами, движущийся по инерции по неподвижной абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Экипаж состоит из платформы и  $N$  одинаковых омни-колес, плоскости которых относительно платформы неподвижны. Каждое колесо может свободно вращаться относительно платформы вокруг собственной оси, расположенной горизонтально. Будем считать, что на каждом колесе установлено  $n$  массивных роликов, так что оси роликов параллельны касательным к фра-

см. фиг. 9

контурами

нижних дисков колес (см. фиг. 1). Таким образом, система состоит из  $N(n+1)+1$  абсолютно твердых тел.

Введем неподвижную систему отсчета так, что ось  $OZ$  направлена вертикально вверх, а плоскость  $OXY$  совпадает с опорной плоскостью. Введем также подвижную систему отсчета  $S\xi\eta Z$ , жестко связанную с платформой экипажа так, что плоскость  $S\xi\eta$  горизонтальна и содержит центры всех колес  $P_i$ . Будем считать, что оси колес лежат на лучах, соединяющих центр масс платформы  $S$  и центры колес (см. фиг. 2), а расстояния от центров колес до  $S$  одинаковы и равны  $R$ . Геометрию установки колес на платформе зададим углами  $\alpha_i$  между осью  $S\xi$  и осями колес (см. фиг. 1). Будем считать, что центр масс всей системы совпадает с точкой  $S$  (отсюда следует, что  $\sum_k \cos \alpha_k = \sum_k \sin \alpha_k = 0$ ).

Введем также три орта, жестко связанных с дисками колес: единичный орт оси  $i$ -го колеса  $\mathbf{n}_i = \mathbf{SP}_i / |\mathbf{SP}_i|$  и орты  $\mathbf{n}_i^\perp$  и  $\mathbf{n}_i^z$ , лежащие в плоскости диска колеса, причем вектор  $\mathbf{n}_i^z$  вертикален при нулевом повороте колеса  $\chi_i$ . Положения центров роликов на колесе определим углами  $\kappa_j$  между ними и направлением, противоположным вектору  $\mathbf{n}_i^z$ .

Положение экипажа будем задавать следующими координатами:  $x, y$  — координаты точки  $S$  на плоскости  $OXY$ ,  $\theta$  — угол между осями  $OX$  и  $S\xi$  (угол курса),  $\chi_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) — углы поворота колес вокруг их осей, отсчитываемые против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $\mathbf{n}_i$ , и  $\phi_j$  — углы поворота роликов вокруг их собственных осей. Таким образом, вектор обобщенных координат имеет вид

$$\mathbf{q} = (x, y, \theta, \{\chi_i\}_{i=1}^N, \{\phi_j\}_{j=1}^N, \{\phi_s\}_{s=1}^{N(n+1)})^T \in \mathbb{R}^{N(n+1)+3}$$

где сперва указаны углы поворота  $\phi_k$  роликов, находящихся в данный момент в контакте с опорной плоскостью, а затем — остальных, "свободных", роликов.

## Введем псевдоскорости

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \quad \mathbf{v}_S = R\nu_1 \mathbf{e}_\xi + R\nu_2 \mathbf{e}_\eta, \quad \nu_3 = \dot{\Lambda}\theta, \quad \nu_s = \dot{\phi}_s$$

Их механический смысл таков:  $\nu_1, \nu_2$  — проекции скорости точки  $S$  на оси  $S\xi\eta$ , связанные с платформой,  $\nu_3$  — с точностью до множителя угловая скорость платформы,  $\nu_s$  — угловые скорости свободных роликов. Число независимых псевдоскоростей системы  $L = N(n - 1) + 3$ . Таким образом, имеем

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos \theta - R\nu_2 \sin \theta, \quad \dot{y} = R\nu_1 \sin \theta + R\nu_2 \cos \theta$$

Будем считать, что проскальзывания между опорной плоскостью и роликами в контакте не происходит, т.е. скорости точек  $C_i$  контакта равны нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

Выражая скорость точек контакта через введенные псевдоскорости и проектируя на векторы  $\mathbf{e}_\xi$  и  $\mathbf{e}_\eta$  соответственно, получим:

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{\rho_k}(\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k), \quad \text{где } \rho_k = l \cos \chi_k - r \quad (2.1)$$

$$\dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}) \quad (2.2)$$

*Формула*  
Заметим, что знаменатель  $\rho_k$  в (2.1) есть расстояние от оси ролика до точки контакта, обрацающееся в нуль на стыке роликов (см. фиг. 1). Это обстоятельство приводит к разрывам второго рода функций в правых частях уравнений движения и будет рассмотрено отдельно ниже. Уравнение (2.2) совпадает с уравнением связи в случае безынерционной модели роликов.

Таким образом, выражение обобщенных скоростей через псевдоскорости, учитывающее связи, наложенные на систему, можно записать в матричном виде (явные выражения

компонент матрицы  $V$  приведены в приложении):

$$\dot{\mathbf{q}} = V\boldsymbol{\nu}, \quad V = V(\theta, \chi_i) \quad (2.3)$$

**3. Уравнения движения.** Воспользуемся лаконичным методом получения уравнений движения для систем с дифференциальными связями, предложенным Я.В. Татариновым [12]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \sum_{\mu=1}^L \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}, \quad \alpha = 1, \dots, L \quad (3.1)$$

Здесь  $L$  – лагранжиан,  $L^*$  – он же с учетом связей,  $P_\alpha$  – линейные комбинации формальных канонических импульсов  $p_i$ , определяемые из соотношения

$$\sum_\mu \nu_\mu P_\mu \equiv \sum_i \dot{q}_i p_i$$

*в соответствии с формулами*

в котором  $\dot{q}_i$  выражены через псевдоскорости  $\nu_\mu$  ~~из (2.3)~~. Фигурными скобками  $\{\dots\}$  обозначена скобка Пуассона по  $p_i, q_i$ . После ее вычисления выполняется подстановка

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

*(Подробно смотрите в работах*  
*[Недорогий вывод и применение изложено в [12, 13].]*

Так как потенциальная энергия системы во время движения не меняется, лагранжиан равен кинетической энергии:

$$2L = 2T = M\mathbf{v}_S^2 + I_S \dot{\theta}^2 + J \sum_i \dot{\chi}_i^2 + B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2)$$

Здесь  $M, I_S, J$  – массово-инерционные характеристики экипажа (см. Приложение),  $B$  – момент инерции ролика относительно его оси вращения. Лагранжиан *при учете связей* *может быть определен с точностью*

$$2L^* = \boldsymbol{\nu}^T V^T \mathcal{M} V \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu}$$

Структура симметрической матрицы  $\mathcal{M}^*$  следующая:

$$\mathcal{M}^* = \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} m_{ij}^* \\ \vdots \\ m_{ij}^* \end{array} \right)_{3 \times 3} & \left( \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ B\Lambda^{-1} \sin \chi_{12} & \dots & B\Lambda^{-1} \sin \chi_{nN} \end{array} \right) \\ & B \\ & \star \\ & \ddots \end{bmatrix}.$$

*здесь круглая звезда означает  $B$*

Явные формулы для коэффициентов  $m_{ij}^*$  главного минора  $3 \times 3$  выписаны в приложении;

отметим, что они зависят только от координат  $\chi_i$ , которые входят в дроби вида  $B/\rho_i^2$  и  $B \sin \chi_i / \rho_i$ , имеющие разрывы второго рода при смене роликов (см. (2.1)). Этот минор соответствует псевдоскоростям  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ . Остальные элементы матрицы  $\mathcal{M}^*$  соответствуют скоростям свободных роликов  $\nu_s$ , для которых  $\chi_{kl} = \chi_k + \kappa_l$  — угол между вертикалью и осью ролика. Индекс  $k = 1, \dots, N$  означает номер колеса, индекс  $l = 2, \dots, n$  — номер свободного ролика на колесе ( $l = 1$  — ролик, находящийся в контакте).

*в левой части равенства*

Первое слагаемое (3.1) получается дифференцированием лагранжиана и подстановкой связей:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} = \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi) \boldsymbol{\nu}_\alpha) = \mathcal{M}^*(\chi_i) \dot{\boldsymbol{\nu}}_\alpha + \left( \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi)) \boldsymbol{\nu} \right)_\alpha = \mathcal{M}^*(\chi_i) \dot{\boldsymbol{\nu}}_\alpha + \left( \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i^*(V\nu)_{3+i} \boldsymbol{\nu} \right)_\alpha, \quad (3.3)$$

где  $\mathcal{M}_i^* = \frac{\partial \mathcal{M}^*}{\partial \chi_i}$ . Обратим внимание, что вторая группа слагаемых, соответствующих свободным роликам ( $\alpha = 4, \dots, L$ ), имеет вид

$$\underbrace{(\cos \chi_i \mu_3 B \left( -\frac{\nu_3 R}{l \Lambda} - \frac{\cos \alpha_i \nu_2 R}{l} + \frac{\sin \alpha_i \nu_1 R}{l} \right))}_{\text{Diagram: wheel with forces } B, \text{ moment } \cos \chi_i \mu_3 B, \text{ coordinate } A, \text{ radius } R, \text{ angles } \alpha_i, \nu_1, \nu_2, \nu_3} = \frac{B}{\Lambda} \cos \chi_i (\Lambda_i) \mu_3 \quad (3.4)$$

Выпишем выражения для  $P_\alpha$ :

$$\begin{aligned}
 P_1 &= R \left( p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_i \left( \frac{\sin \alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\cos \alpha_i p_{\phi_i}}{\rho_i} \right) \right), \\
 P_2 &= R \left( -p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_i \left( -\frac{\cos \alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\sin \alpha_i p_{\phi_i}}{\rho_i} \right) \right), \\
 P_3 &= \frac{1}{\Lambda} \left( p_\theta - \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i} \right), \\
 P_s &= p_{\phi_s}.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Поскольку коэффициенты лагранжиана  $L^*$  зависят только от координаты  $\chi_i$ , скобки Ньютона с  $P_1, P_2, P_3$  — квадратичные формы псевдоскоростей, пропорциональные моменту инерции ролика  $B$  с коэффициентами, зависящими от  $\chi_i$ :

$$\{P_1, L^*\} = -\frac{\partial P_1}{\partial p_{\chi_i}} \frac{\partial L^*}{\partial \chi_i} = -\frac{R}{2l} \nu^T \sin \alpha_i \mathcal{M}_i^* \nu$$

$$\{P_2, L^*\} = \frac{R}{2l} \nu^T \cos \alpha_i \mathcal{M}_i^* \nu, \quad \{P_3, L^*\} = \frac{R}{2l\Lambda} \nu^T \mathcal{M}_i^* \nu, \quad \{P_s, L^*\} = 0, s > 3$$

Суммы  $\{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}$  (в правой части) отличны от нуля лишь для первых трех уравнений (см. Приложение).

Собирая все вместе и пользуясь обозначениями из Приложения, окончательно получим следующую структуру уравнений (крупные звезды означают аб. неизв.):

$$\mathcal{M}^* \nu = \frac{MR^2}{\Lambda^{-1}} \begin{pmatrix} \nu_2 \nu_3 \\ -\nu_1 \nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \nu^T \begin{pmatrix} -\sin \alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \cos \alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \Lambda^{-1} \mathcal{M}_i^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - BR^2 \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \nu = B \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ (\cos \chi_{12}) \frac{\nu_3}{\Lambda} \lambda_1^{-1} \\ \vdots \\ (\cos \chi_{MN}) \frac{\nu_3}{\Lambda} \lambda_N^{-1} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

~~Задача~~ Матрицы  $\mathcal{P}_\alpha$  размера  $L \times L$  составлены из строк  $\mathbf{r}_{\alpha i}$ , определенных явно в Приложении.

жений и зависящих от геометрии экипажа и углов поворота колес  $\chi_i$ :

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ p_{12} \\ p_{13} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -p_{12} \\ 0 \\ p_{23} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} -p_{13} \\ -p_{23} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку матрицы  $\mathcal{M}_i^*$  и  $\mathcal{P}_o$  зависят от углов поворота колес  $\chi_i$ , для замыкания системы к этим уравнениям надо добавить уравнения (2.2).

Структура уравнений позволяет выявить следующие свойства:

1. Система допускает интеграл энергии  $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_t) \boldsymbol{\nu} = h = \text{const}$  в силу общей теоремы

$\leftarrow$  об изменении полной механической энергии: так как система стеснена автономными идеальными связями, а силы консервативны, то полная энергия (в нашем случае она равна кинетической энергии) сохраняется.

2. В случае, если платформа экипажа не движется ( $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$ ), свободные роли

$\leftarrow$  ники сохраняют свою начальную угловую скорость:  $\nu_s = \text{const}$ , что соответствует правому смыслу и следованию описанию.

3. При  $B := 0$  все слагаемые в правой части, кроме первого, обращаются в ноль, как и

$\leftarrow$  все члены, соответствующие свободным роликам, в левой части (см. (6.1)). В этом случае существенными остаются первые три уравнения системы на  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ . Эти уравнения описывают динамику безынерционной модели экипажа [2].

4. Существовавший в безынерционной модели линейный первый интеграл разруша-

$\leftarrow$  ется для модели с массивными роликами. При  $B = 0$  этот интеграл имеет вид

?  $A \nu^8$ . Так?

Абс.  
Весь  
справиль

$m_{33}^* \nu_3 = \text{const}$  (причем  $m_{33} = \text{const}$ ) и следует непосредственно из третьего уравнения системы. При  $B \neq 0$  скорость изменения  $\nu_3$  пропорциональна моменту инерции ролика  $B$ .

5. Поскольку скобки Пуассона в уравнениях для свободных роликов равны нулю, си-

стема допускает первые интегралы:

$$\nu_s + \frac{1}{\Lambda} \sin \chi_{ij} \nu_3 = \text{const} \quad (3.7)$$

Скорость вращения платформы  $\nu_3$  связана со скоростями собственного вращения свободных роликов. В частности, вращение экипажа вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр ( $\nu_1(0) = 0, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) \neq 0$ ), неравномерно, в отличие от *бесшарнирной* модели.

6. Одновременное изменение начальных значений всех псевдоскоростей  $\nu \rightarrow \lambda \nu, \lambda \neq 0$

умножением на число, отличное от нуля, эквивалентно замене времени  $t \rightarrow \lambda t$ .

4. Переход между роликами. Уравнения (3.6) описывают динамику системы на промежутках времени, в течение которых не происходит смены роликов. При переходе любого колеса с одного ролика на другой коэффициенты уравнений теряют разрыв второго рода из-за выражений  $\rho_i = l \cos \chi_i - r$  в знаменателе.

*на практике*  
Заметим, что в технических реализациях колеса ситуация  $\rho_i = 0$  никогда не *имеет* так как места. Так, концы роликов усекаются (в частности, потому что оси роликов в реальных системах имеют ненулевую толщину и должны быть закреплены в колесах). Для того чтобы колеса в каждый момент в контакте между колесом и плоскостью был ролик, расположают в два или большие ряды.

Для исследования движений, на которых происходят смены контактных роликов, при-  
меру часа  
мем следующие предположения. Усечем ролики (см. фиг. 3), но оставим их оси в одной

Фиг. 3

препрергая вращением  
 плоскости, ~~данной~~ пересечения роликов в пространстве и препрергая им. Переход между роликами одного колеса будет происходить при значении угла  $\chi_i = \frac{2\pi}{n}$ . Колесо с усеченными роликами определим, расположая ось ролика на расстоянии  $r = l \cos \frac{\pi}{n-1}$  от центра колеса, а его поверхность задавая как фигуру вращения дуги окружности радиуса  $l$  с углом раствора  $\frac{2\pi}{n}$  вокруг этой оси, замкнутую соответствующими дисками.

*Абстрактная модель колеса с роликами*  
 Кроме этого, при смене контакта происходит мгновенное наложение связи на вновь вошедший в контакт ролик и снятие её с освободившегося, после чего последний может свободно вращаться вокруг своей оси. В этот момент в реальной системе происходят взаимодействия типа ударных, в том числе проскальзывание роликов относительно плоскости, при котором происходит уменьшение полной энергии системы. Однако моделирование *здесь* этих эффектов не рассматривается, в ~~настоящей работе~~. Будем считать, что скорости  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  при переходе с ролика на ролик не изменяются, как и в безынерционной модели в отсутствии роликов ( $B = 0$ ). Таким образом, масса роликов влияет на динамику системы только на гладких участках движения и не учитывается при смене роликов. Из уравнений (2.1) и (2.2) получим, что ролик, входящий в контакт, мгновенно приобретает ту же угловую скорость, что и освобождающийся ролик.

Таким образом, при переходе ( $\chi_i = \chi_i^+$ ) сохраним значения  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ , заменим  $\chi_i$  с *правую час*  $\chi_i^+$  на  $\chi_i^-$  (см. фиг. 4), и выполним с исевдоскоростями  $v_s$  следующее преобразование. Пусть  $\nu_i^s = (v_{i2}, \dots, v_m)$  – исевдоскорости свободных роликов на колесе  $i$ . Тогда, если при смене контакта  $\dot{\chi}_i > 0$  (т.е. колесо поворачивается против часовой стрелки, см. фиг. 1), то отбросим  $v_{in}$ , остальные компоненты  $\nu_i^s$  перенумеруем, сдвигая их вперед:  $v_{ij} \rightarrow v_{ij+1}$ , а  $v_{i2}$  положим равной значению правой части в уравнении связи (2.1). При вращении колеса в другую сторону, выполним аналогичные преобразования, *сдвиг* номеров роликов при этом *сдвигается* *пронеходит* назад.

## 5. Примеры движений Численные решения получим для симметричного трехколесного экипажа ( $\alpha_i = \frac{2\pi}{N}(i-1)$ , $N = 3$ ), с $n = 5$ роликами на колесе и следующих движений:

Фиг. 4  
Фиг. 5  
Фиг. 6

3

1. вращение вокруг своей оси ( $\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ ) (фиг. 4).

2

2. движение по прямой в направлении оси первого колеса ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = \nu_3(0) = 0$ )

(фиг. 6)

3

3. движение с нецелевой скоростью центра масс и, одновременно, с нецелевой угловой

скоростью платформы ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ ) (фиг. 5).

Расчеты выполнены в безразмерных величинах, так что радиус платформы и колеса

$R = 0.15, r = 0.05$ , масса платформы, колеса и ролика  $M_{\text{пл}} = 1, M_{\text{кол}} = 0.15, m_{\text{рол}} = 0.05$ .

При этом момент инерции ролика  $B \approx 1.6 \cdot 10^{-5}$ . Для безынерционной модели массово-инерционные характеристики колес положим соответствующими экипажу с ~~з~~ заблокированными роликами.

Во всех трех случаях наблюдаются <sup>раз</sup> отличия между двумя постановками: свободные ролики приходят в движение, из-за чего меняется угловая скорость платформы экипажа и скорость центра масс экипажа. Кроме этого, становится заметно влияние введенных предположений о смене контакта: график кинетической энергии приобретает ступенчатый вид в силу изменений ~~в~~ слагаемых (3.2):  зависящих от  $\chi$  и  $\dot{\phi}_{ij}$

$$B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}) \quad (5.1)$$

~~пронеходящих~~ при мгновенном наложении связей. В промежутки времени между сменами роликов энергия остается постоянной.

В случаях 1 и 2 траектории центра экипажа  $S$  на плоскости  $OXY$  и характер вращения вокруг вертикальной оси  $SZ$  ( $\theta(t)$ ) ~~отличаются между~~ согласно и моделям с роликами и безынерцион-

*модели различающиеся*  
ной несущественно, однако заметны переходные ~~процессы~~ вращении роликов в начале  
движения.

*При*  
~~в~~ *случае* вращения *округ* вертикали (движение 1) угловая скорость платформы  $\nu_3$   
меняется не ~~монотонно~~, но в среднем медленно убывает: за первые  $1000$  ~~секунд~~ угловая  
скорость уменьшается на  $2\%$ . Скорость центра масс остается равной нулю. Кинетическая  
*Энергия* системы также медленно убывает. На фиг. 4 *представлены* угловые скорости роликов на первом колесе  $\phi_{1j}$ . *Номер* кривой ~~указанной на рисунке~~ совпадает с номером  
ролика на колесе, поведение роликов на других двух колесах полностью аналогично.  
Заметим, что при нулевой скорости центра экипажа опорный ролик не вращается (2.2);  
угловая скорость первого ролика в течение первой секунды движения нулевая. После вы-  
хода из контакта ролик начинает раскручиваться в соответствии с первым интегралом  
(3.7). Раскрученный ролик при входе в контакт с опорной плоскостью мгновенно теря-  
ет угловую скорость  $\dot{\phi}_{1j}$  (на графике угловой скорости первого ролика это происходит при  
 $t = 9.6$  с), что приводит к убыванию кинетической энергии.

*При* движении по прямой (движение 2) угловая скорость остается нулевой. На фиг. 5  
слева показаны графики относительного изменения скорости центра масс  $v_1(t)/v_1(0) - 1$   
*исчезают* (кривая 1) и кинетической энергии  $T/T(0) - 1$  (кривая 2). Видно, что на начальном этапе  
движения при смене контакта кинетическая энергия возрастает, что обусловлено принятой  
~~в данной работе~~ моделью наложения связи, но при этом возрастание энергии остается  
в пределах  $4\%$ . Скорость центра масс (кривая 2, слева) в среднем убывает. Скорость  
вращения переднего колеса равна нулю, колесо катится, опираясь на один и тот же ролик,  
остальные ролики не раскручиваются. Угловые скорости роликов на одном из задних  
колес показаны на фиг. 6 *справа*. Свободные ролики двигаются с постоянной угловой  
скоростью, ролик в контакте изменяет свою скорость за счет скорости центра масс. После

того, как все ролики побывают в контакте, их движение становится квазипериодичным, а энергия убывает с каждой сменой контакта.

При движении 3, сочетающим поступательное и вращательное движение, угловая скорость экипажа  $\nu_3$  растет и выходит на постоянное значение (кривая 1 на фиг. 6 слева вверху), скорость центра экипажа  $v = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$  уменьшается до нуля (кривая 2 там же), а кинетическая энергия после короткого начального участка, где происходят маленькие по величине скачки вверх аналогично движению 2, убывает. Угловые скорости роликов представляют собой квазипериодические функции времени (характерный участок представлен на фиг. 6 справа вверху, обозначения те же что и на фиг. 5). Центр платформы описывает спираль (фиг. 6 внизу). Заметим, что если не учитывать массу роликов на колесе, то при ~~этих~~ начальных условиях скорость центра масс и угловая скорость платформы сохраняются, а центр платформы описывает окружность. Таким образом, даже малая масса роликов приводит к качественным изменениям в движении экипажа.

### Заключение.

Результаты проведенной работы следующие:

n/m

76. Выводы.

1. Получены уравнения движения экипажа с полным набором роликов в неголономной

постановке.

2. Показано, что при учете массы роликов возникают дополнительные члены, пропор-

циональные моменту инерции ролика относительно его оси.

3. Предложена модель перехода с ролика на ролик.

4. Получены численные решения с учетом движения свободных роликов для симметричного экипажа и обнаружены качественные отличия от безынерционной модели.

7

**6. Приложение.** Матрица кинетической энергии:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ M & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ I_S & 0 & \cdots & 0 & B \sin \chi_{k_1} & \cdots & B \sin \chi_{N_n} \\ J & & & & & & \\ \vdots & & & & & & 0 \\ J & & & & & & \\ \star & & & & & & B \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & B \end{bmatrix}.$$

З ее

в третьей строке сначала указаны элементы, соответствующие роликам, находящимся в контакте, а затем соответствующие "свободным" роликам ~~упорядоченные~~ по возрастанию индексов, так что ролики одного колеса соседствуют. Матрица  $\mathcal{M}$  — симметрическая, звездочки обозначены элементы, получающиеся транспонированием верхнего треугольника матрицы.

Матрица связей:

$$V = \begin{bmatrix} \tilde{V} & O_1 \\ O_2 & E \end{bmatrix}; \quad \tilde{V} = \begin{bmatrix} R \cos \theta & -R \sin \theta & 0 \\ R \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \\ \frac{R \sin \alpha_i}{l} & -\frac{R \cos \alpha_i}{l} & -\frac{R}{\lambda l} \\ \frac{R \cos \alpha_k}{\rho_k} & \frac{R \sin \alpha_k}{\rho_k} & 0 \end{bmatrix}$$

Здесь  $O_1$  и  $O_2$  — нулевые ( $\times$ )- и ( $\times'$ )-матрицы,  $E$  — единичная ( $\times$ )-матрица.

Абр. Указав разноту

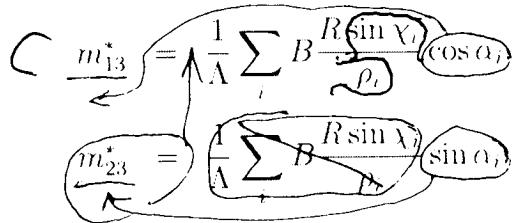
Элементы матрицы кинетической энергии  $\frac{\text{при учетом связей}}$ :

$$m_{11}^* = MR^2 + \sum_i \left( J \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \alpha_i + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \cos^2 \alpha_i \right), \quad (11 \leftrightarrow 22, \cos \alpha_i \leftrightarrow)$$

$$m_{22}^* = MR^2 + \sum_i \left( J \frac{R^2}{l^2} \cos^2 \alpha_i + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \sin^2 \alpha_i \right).$$

$$m_{33}^* = \frac{1}{\Lambda} \left( I_S + \sum_i J \frac{R^2}{l^2} \right) \zeta$$

$$m_{12}^* = \sum_i \left( -J \frac{R^2}{l^2} + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \right) \sin \alpha_i \cos \alpha_i.$$
7  
(6.1)



Формальные импульсы  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ :

$$p_x = MR(\nu_1 \cos \theta - \nu_2 \sin \theta).$$

$$p_y = MR(\nu_1 \sin \theta + \nu_2 \cos \theta).$$

Аналогично

$$\begin{cases} p_\theta = BR \sum_i \frac{\sin(\chi_i + \kappa_1)}{\rho_i} (\nu_1 \cos \alpha_i + \nu_2 \sin \alpha_i) + \frac{I_S}{\Lambda} \nu_3 + B \sum_s \sin(\chi_s) \nu_s \\ p_{\chi_i} = J \frac{R}{l} (\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{1}{\Lambda} \nu_3) \\ p_{\phi_{\kappa_1}} = \frac{BR}{\rho_k} (\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k) + \frac{B}{\Lambda} \nu_3 \sin(\chi_k + \kappa_1) \\ p_{\phi_s} = \frac{B}{\Lambda} \nu_3 \sin \chi_s + B \nu_s \end{cases}$$
7  
(6.2)

т.е.

$$\xi_{\pm}(\alpha) = \nu_1 \cos \alpha \pm \nu_2 \sin \alpha, \quad \eta_{\pm}(\alpha) = \nu_1 \sin \alpha \pm \nu_2 \cos \alpha$$

Абр. Стр. 16 преобразуют аналогично

Линейные комбинации  $P_\alpha$ :

$$\begin{aligned}
 P_1 &= R \left( p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_i \left( \frac{\sin \alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\cos \alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \right) \right), \\
 P_2 &= R \left( -p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_i \left( -\frac{\cos \alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\sin \alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \right) \right), \\
 P_3 &= \frac{1}{\Lambda} \left( p_\theta + \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i} \right), \\
 P_s &= p_{\phi_{s1}}.
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Для упрощения записи правой части уравнений введем обозначение для операции дискретной свертки произвольной функции  $f$ :

$$\sigma[f(\alpha, \chi)] = \sum_{k=1}^N f(\alpha_k, \chi_k) \frac{\sin \chi_k}{\rho_k^3}$$

Тогда скобки Пуассона в правой части имеют вид (звездочкой обозначена подстановка канонических формальных импульсов  $p_i$ ):

$$\begin{aligned}
 (\{P_1, P_2\})^* &= \left( - \sum_{k=1}^N R^2 \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = -BR^2(R\nu_1 \sigma[\cos \alpha] + R\nu_2 \sigma[\sin \alpha] + \Lambda^{-1} \nu_3 \sigma[\rho \sin \chi]) = \\
 &= -BR^2 \mathbf{p}_{12} \boldsymbol{\nu}, \text{ где } \mathbf{p}_{12} = (\sigma[\cos \alpha], R\sigma[\sin \alpha], \Lambda^{-1} \sigma[\rho \sin \chi], 0, \dots, 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\{P_1, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left( -\sin \theta p_x + \cos \theta p_y - \sum_{k=1}^N R \cos \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = MR^2 \Lambda^{-1} \nu_2 - \\
 &- BR^2 \Lambda^{-1} (R\nu_1 \sigma[\cos^2 \alpha] + R\nu_2 \sigma[\sin \alpha \cos \alpha] + \Lambda^{-1} \nu_3 \sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi]) = \\
 &= MR^2 \Lambda^{-1} \nu_2 - BR^2 \mathbf{p}_{13} \boldsymbol{\nu},
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{p}_{13} = \Lambda^{-1}(R\sigma[\cos^2 \alpha], R\sigma[\sin \alpha \cos \alpha], \Lambda^{-1} \sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}
 (\{P_2, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left( -\cos \theta p_x - \sin \theta p_y - \sum_{k=1}^N R \sin \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = -MR^2 \Lambda^{-1} \nu_1 - \\
 &- BR^2 \Lambda^{-1} (R\nu_1 \sigma[\sin \alpha \cos \alpha] + R\nu_2 \sigma[\sin^2 \alpha] + \Lambda^{-1} \nu_3 \sigma[\rho \sin \alpha \sin \chi]) = \\
 &= -MR^2 \Lambda^{-1} \nu_1 - BR^2 \mathbf{p}_{23} \boldsymbol{\nu},
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{p}_{23} = \Lambda^{-1}(R\sigma[\sin \alpha \cos \alpha], R\sigma[\sin^2 \alpha], \Lambda^{-1} \sigma[\rho \sin \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0)$ .

# Список литературы

1. Gfrerrer A. Geometry and kinematics of the Mecanum wheel // Computer Aided

Geometry Design. 2008. T. 25. C. 784–791.

2. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Динамика экипажа с роликонесущими колесами

← ПММ ~~Прикладная математика и механика~~. 2009. Т. 73, № 1. С. 13–22.

3. Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. О движении мобильного робота с роликоне-

суущими колесами // Известия Российской академии наук. Теория и практика управления. 2007. № 6. С. 142–149.

4. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Тележка с омниколесами на плоскости и

← сфере // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4 (Мобильные роботы). С. 785–801.

5. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Математические аспекты динамики движения экипажа

← с тремя окольцованными колесами // Мобильные роботы и мехатронные системы. М.: 2006. С. 61–67.

6. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Свободные и управляемые движения некоторой модели

← экипажа с роликонесущими колесами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика, Механика. № 6. 2008. С. 62–65.

7. Мартыненко Ю. Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смешанным центром масс //

← Нелинейная динамика. 2010. Т. 74, № 4. С. 610–619.

8. Косенко И. И., Герасимов К. В. Физически-ориентированное моделирование динами-

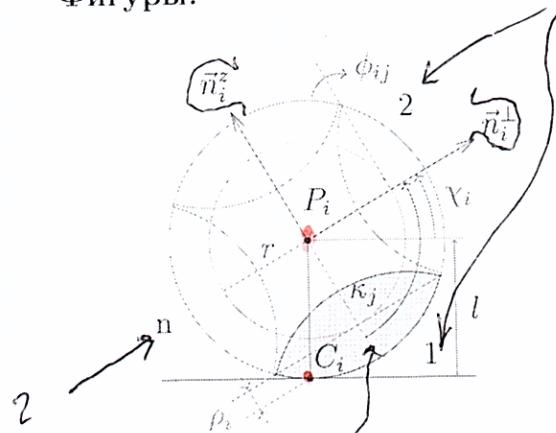
← ки омнитележки // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12, № 2. С. 251–262.

1. Алг. 1. Алгоритм  $\left[ \begin{matrix} 1 \\ 2 - 7 \end{matrix} \right]$  расстояния  
в хронолог. порядке, аналогичны – ссылки [8 – 11].  
2. Аналогично преобразует стр. 18.

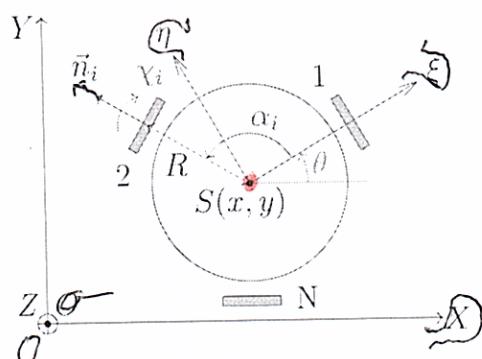
9. Tobolar J., Herrmann F., Bunte T. Object-oriented modelling and control of vehicles with omni-directional wheels // Computational Mechanics. Hrad Nectiny, Czech Republic: 2009. November 9–11.
10. Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots / R.L. Williams, B.E. Carter, P. Gallina [и др.] // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2002. jun. Т. 18. № 3. С. 285–293. URL: <https://doi.org/10.1109/tra.2002.1019459>.
11. Ashmore Mark, Barnes Nick. Omni-drive Robot Motion on Curved Paths: The Fastest Path between Two Points Is Not a Straight-Line // Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2002. С. 225–236. URL: [https://doi.org/10.1007/3-540-36187-1\\_20](https://doi.org/10.1007/3-540-36187-1_20).
12. Татаринов Я. В. Уравнения классической механики в новой форме // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2003. № 3. С. 67–76.
13. Zobova A. A. Application of laconic forms of the equations of motion in the dynamics of nonholonomic mobile robots // Nelineinaya Dinamika. 2011. С. 771–783. URL: <https://doi.org/10.20537>

Фиг. 1, 2 и 4  
увеличено в  $1\frac{1}{2}$  раза

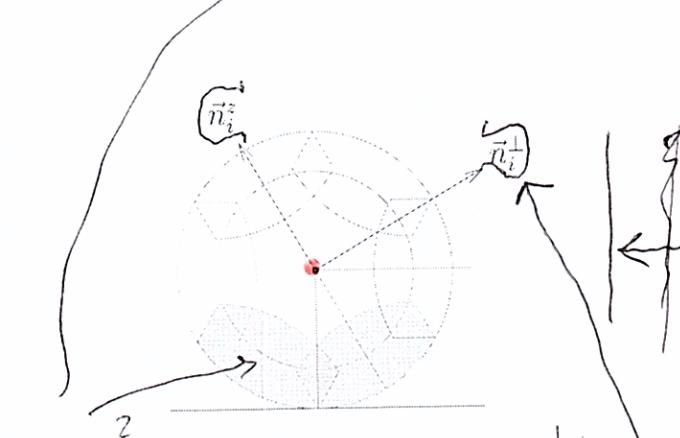
Фигуры.



Фиг. 1:

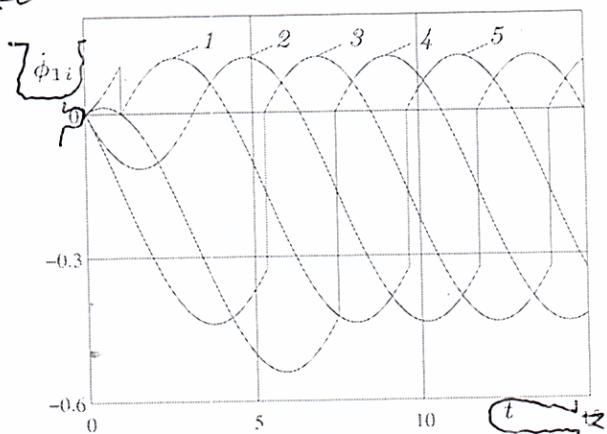


Фиг. 2.

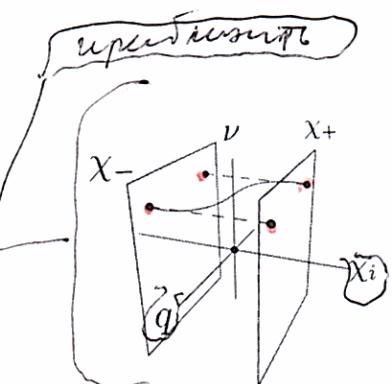


Фиг. 3.

Всё должно  
быть нарисовано  
вручную



Фиг. 4.

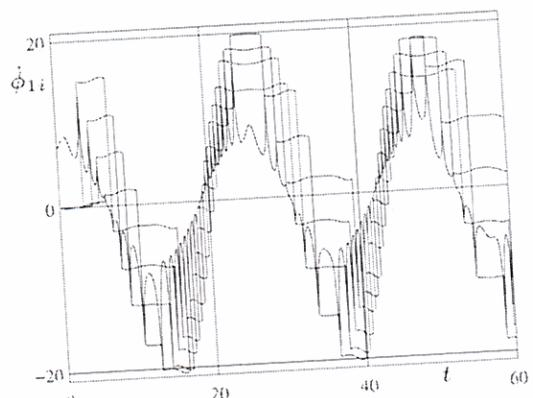
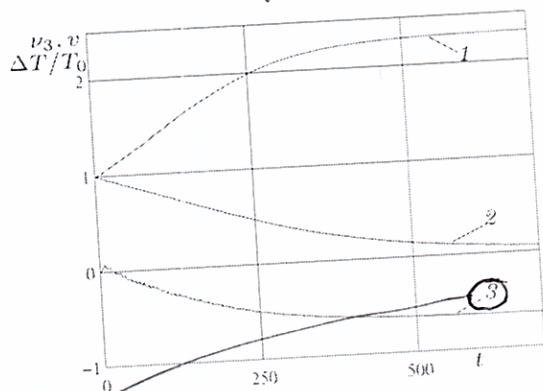
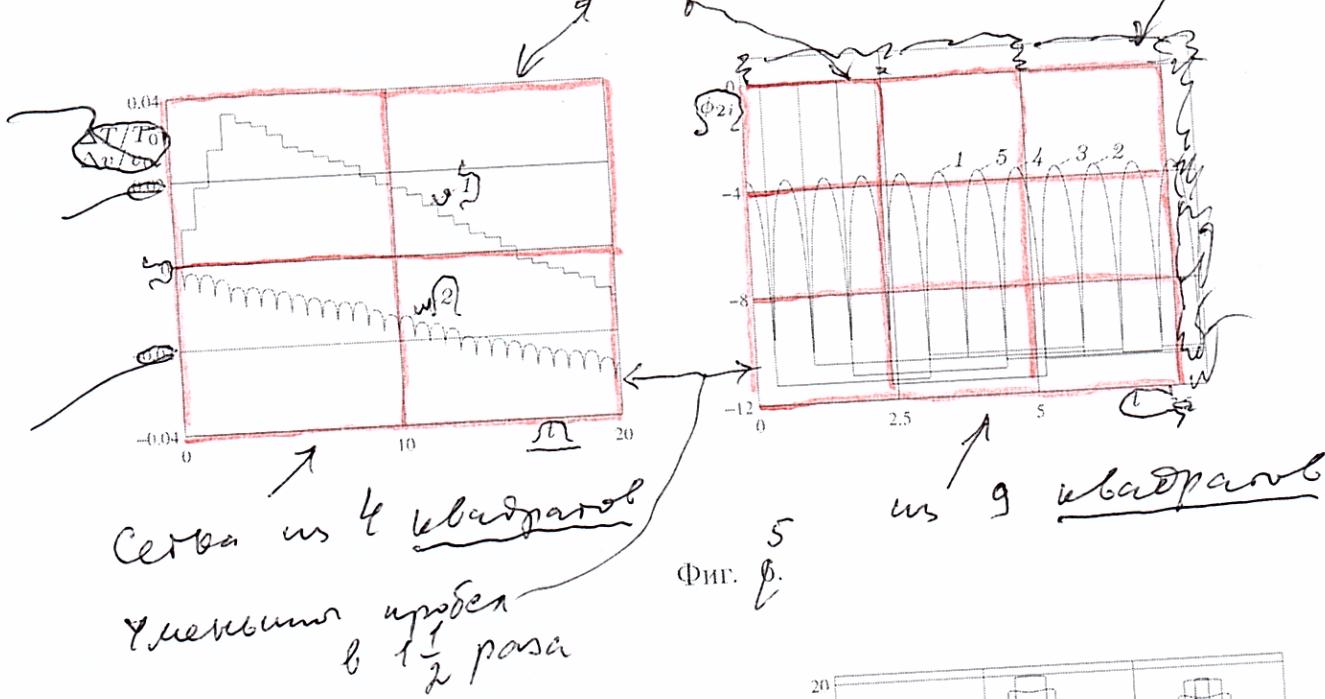


Фиг. 4.

Abz.

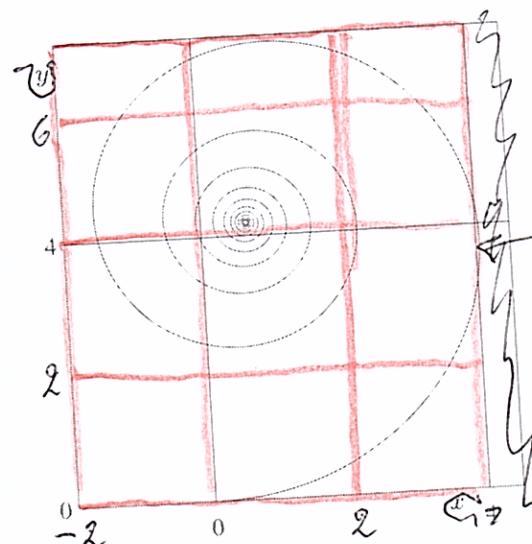
- 1) световые точки ✓
- 2) все надписи на фигурах должны быть симметричны; например,  $\vec{n}$  не  $n/\sqrt{2}$  и т.д., без единицы
- 3) сплошные линии (линия серая, оси  $x-y$ ) — тонкие, как здесь, а основные кривые (графики, конуры схем и т.д.) — толще в 2-3 раза

Фиг. 5. Схема на квадратах, схема генератора.



Ось тут кривые  
в форме  
квадратов  
не изображены.

Некоторые рисуют  
на фигурах верх,  
нижнюю  
линию代替



бесконечн  
за схему

Фиг. 7.

20

При переходе  
изменяется  
здесь Фиг. 6.