Движение симметричного экипажа с массивными роликами на омни-колесах

К.В. Герасимов, А.А. Зобова, И.И.Косенко

Кафедра теоретической механики и мехатроники
Механико-математический факультет
МГУ им. М.В. Ломоносова

Ломоносовские чтения, 2017

План

Постановка задачи

Рисунки

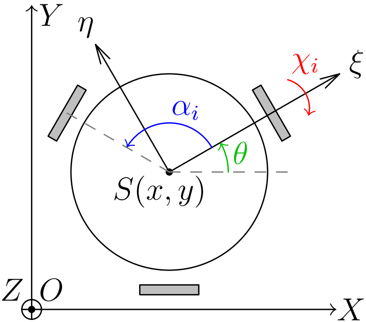


Рис.: Экипаж

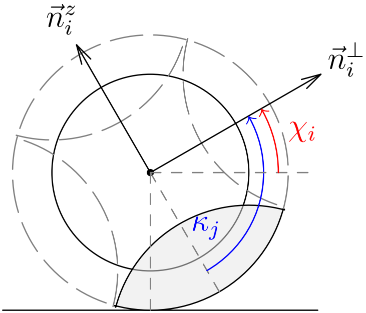


Рис.: Колесо

Постановка задачи

Тела, связи, степени свободы

- Экипаж состоит из платформы, N колес и n роликов, количество твердых тел:

$$1 + N(n+1)$$

- Оси и центры колес и роликов неподвижны относительно платформы и колес соответственно
- Скорость точек контакта равна нулю:

$$\vec{v}_{C_i} = 0, i = 1 \ldots N$$

- Количество степеней свободы:

$$3 + N(n-1)$$

Постановка задачи

Координаты, псевдоскорости, связи

- Обобщенные координаты:
  $q = (x, y, \theta, \chi_i, \phi_k, \phi_s)$, где $i, k = 1 \dots N$, s – ролики вне контакта.
- Псевдоскорости:
  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \vec{v}_S = R\nu_1\vec{e}_\xi + R\nu_2\vec{e}_\eta, \nu_3 = \Lambda\dot{\theta}, \nu_s = \dot{\phi}_s$
- Связи:

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos\theta - R\nu_2 \sin\theta, \qquad \dot{y} = R\nu_1 \sin\theta + R\nu_2 \cos\theta,$$

$$\dot{\theta} = \frac{\nu_3}{\Lambda}, \qquad \dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin\alpha_i - \nu_2 \cos\alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}),$$

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{l\cos\chi_k - r}(\nu_1 \cos\alpha_k + \nu_2 \sin\alpha_k), \qquad \dot{\phi}_s = \nu_s$$

План

Кинетическая энергия и лагранжиан

- Присутствует аддитивный член, пропорциональный B – моменту инерции ролика относительно его оси собственного вращения:

$$2T = 2L = M\vec{v}_S^2 + I_S\dot{\theta}^2 + J\sum_i \dot{\chi}_i^2 +$$

$$+B\sum_{i,j}(\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta}\sin(\kappa_j + \chi_i)\dot{\phi}_{ij}),$$

$$M = \mathring{M} + Nnm$$

$$I_S = \mathring{I}_S + N \cdot n(\frac{A+B}{2} + mR^2 + \frac{mr^2}{2}),$$

$$J = \mathring{J} + n(A + mr^2)$$

Кинетическая энергия и лагранжиан

- С учетом связей:

$$2L^* = \mathring{\nu}^T \mathring{V}^T \mathring{M} \mathring{V} \mathring{\nu} +$$

$$+B \sum_i \Big(\frac{(\nu_2 \sin\alpha_i + \nu_1 \cos\alpha_i)^2 R^2}{\rho_i^2} +$$

$$+ \frac{2R\nu_3(\nu_2 \sin\alpha_i + \nu_1 \cos\alpha_i)\sin\chi_i}{\rho_i \Lambda} \Big)$$

$$+B \sum_{i,j} \Big(\frac{2\nu_3 \nu_{ni+j} \sin(\kappa_j + \chi_i)}{\Lambda} + \nu_{ni+j}^2 \Big)$$

где $\frac{1}{2}\mathring{\nu}^T \mathring{V}^T \mathring{M} \mathring{V} \mathring{\nu}$ – лагранжиан системы без роликов, $\rho_i = l \cos\chi_i - r$

Кинетическая энергия и лагранжиан

Матрицы кинетической энергии и связей для системы без роликов

$$\mathring{M} = diag(M, M, I_S, J ... J),$$

$$\mathring{V} = \begin{bmatrix} R\cos\theta & -R\sin\theta & 0 \\ R\sin\theta & R\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} \\ \frac{R}{l}\sin\alpha_i & -\frac{R}{l}\cos\alpha_i & -\frac{R}{l\Lambda} \end{bmatrix}$$

План

Структура уравнений

Отличие от случая без роликов

- Уравнения Я.В. Татаринова:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\},$$

$$\nu_\mu P_\mu = \dot{q}_i p_i, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

- Лагранжиан и "импульсы" отличаются аддитивными членами:

$$L^* = \mathring{L}^* + BL^*_\Delta(\nu, \chi)$$

$$P_\alpha = \mathring{P}_\alpha(\theta, p_x, p_y, p_\chi) + P_\Delta(p_{\phi_i}, \chi)$$

Структура уравнений

Отличие от случая без роликов

Утверждение

Учет массы роликов приводит к появлению в правой части дифференциальных уравнений, описывающих динамику экипажа, слагаемых, пропорциональных собственному моменту инерции роликов B и квадратично зависящих от псевдоскоростей. Эти новые слагаемые явно зависят от углов поворота колес χ_i.

$$\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{\nu}} = \frac{1}{\Lambda}\begin{pmatrix} \nu_2\nu_3 \\ -\nu_1\nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{F}_1(\chi_i)\boldsymbol{\nu} \\ \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{F}_2(\chi_i)\boldsymbol{\nu} \\ \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{F}_3(\chi_i)\boldsymbol{\nu} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\chi}_i = \frac{R\sin\alpha_i}{l}\nu_1 - \frac{R\cos(\alpha_i)}{l}\nu_2 - \frac{R}{l\Lambda}\nu_3, \quad i = 1..N$$

$$\Lambda\dot{\nu}_{ni+j} = -\dot{\nu}_3\sin(\chi_i + \kappa_j) - \dot{\chi}_i\nu_3\cos(\chi_i + \kappa_j), \quad j = 2..n$$

Структура уравнений

Отличие от случая без роликов

$$\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{\nu}} = \frac{1}{\Lambda}\begin{pmatrix} \nu_2\nu_3 \\ -\nu_1\nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{F}_1(\chi_i)\boldsymbol{\nu} \\ \boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{F}_2(\chi_i)\boldsymbol{\nu} \\ \boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{F}_3(\chi_i)\boldsymbol{\nu} \end{pmatrix}$$

Доказательство:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} = -\{P_\alpha, L^*\} + \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \nu_\alpha}(L^* - \mathring{L}^*) = B\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \nu_\alpha}L^*_\Delta(\nu,\chi),$$

$$\{P_\alpha, L^*\} - \{\mathring{P}_\alpha, \mathring{L}^*\} = B\{P_\alpha, L^*_\Delta(\nu,\chi)\}$$

$$\rho_i = l\cos\chi_i - r, \quad \{P_\alpha, P_\mu\} - \{\mathring{P}_\alpha, \mathring{P}_\mu\} =$$

$$= B\frac{R^2}{\Lambda}\sum_i \frac{f_\alpha(\nu,\chi)}{\rho_i^2}\left(\frac{R}{\rho_i}(\nu_1\cos\alpha_i + \nu_2\sin\alpha_i) + \frac{\sin\chi_i}{\Lambda}\nu_3\right)$$

План

Переход между роликами

Сложности и допущения

(1) Уравнения вырождаются на стыках роликов:
квадратичные формы $\boldsymbol{F}_i$ *терпят разрыв 2ого рода из-за выражений* $(l\cos\chi_i - r)$ *в знаменателе.*
Пусть переход на следующий ролик будет раньше стыка.

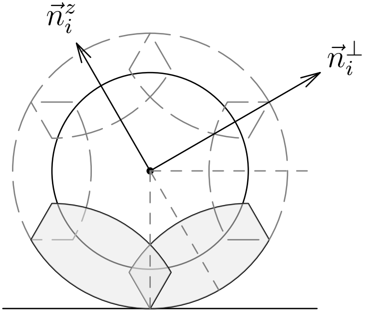


Рис.: Ролики перекрываются

Переход между роликами

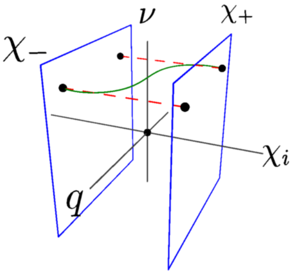
Сложности и допущения

(2) Ролики входят и выходят из состояния контакта.

Будем рассматривать только движение роликов в контакте. Отбросим уравнения

$$\Lambda\dot{\nu}_{ni+j} = -\dot{\nu}_3 \sin(\chi_i + \kappa_j) - \dot{\chi}_i \nu_3 \cos(\chi_i + \kappa_j), \quad j = 2..n.$$

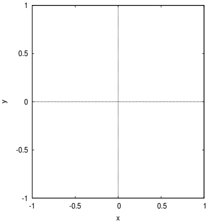
При переходе сохраним значения ν_1, ν_2, ν_3, а $\dot{\chi}_i$ пересчитаем по уравнениям связей.



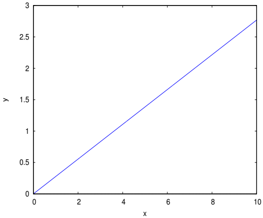
План

Вращение вокруг своей оси ($\nu_{1,2}(0) = 0, \nu_3 = 1$)

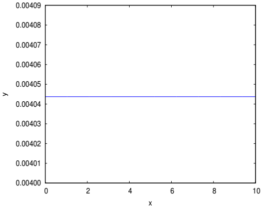
Экипаж без роликов



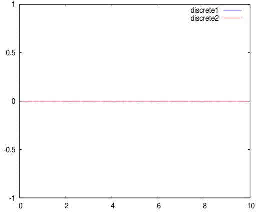
Траектория X, Y



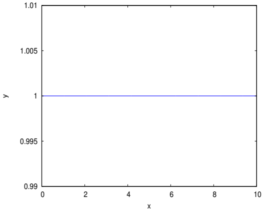
$\theta(t)$



Кинетическая энергия



$\nu_1(t), \nu_2(t)$

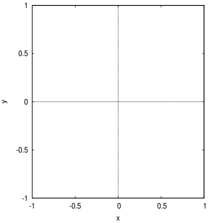


$\nu_3(t)$

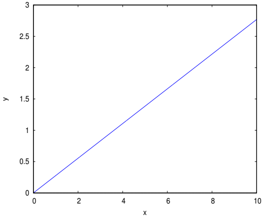
Центр экипажа неподвижен, скорость вращения и энергия постоянны.

Вращение вокруг своей оси ($\nu_{1,2}(0) = 0, \nu_3 = 1$)

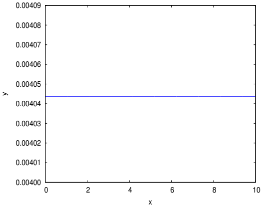
Экипаж с роликами



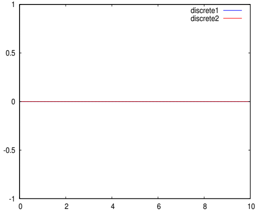
Траектория X, Y



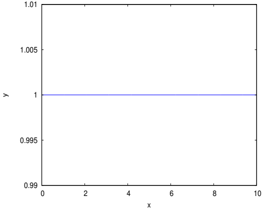
$\theta(t)$



Кинетическая энергия



$\nu_1(t), \nu_2(t)$

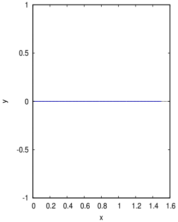


$\nu_3(t)$

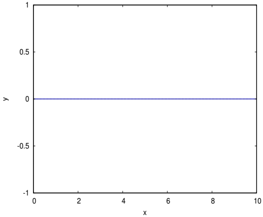
Идентично случаю с роликами.

Движение по прямой ($\nu_1(0) = 1, \nu_{2,3} = 0$)

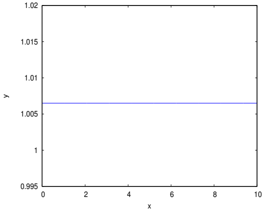
Экипаж без роликов



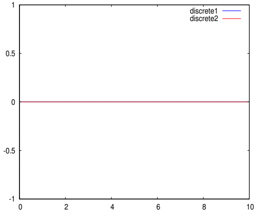
Траектория X, Y



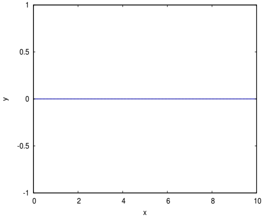
$\theta(t)$



Кинетическая энергия



$\nu_{1,2}(t) - \nu_{1,2}(0)$

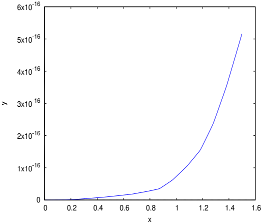


$\nu_3(t)$

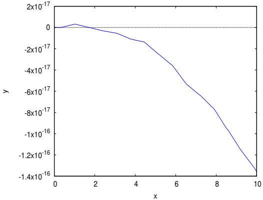
Экипаж равномерно движется по прямой, не вращаясь, энергия постоянна.

Движение по прямой ($\nu_1(0) = 1, \nu_{2,3} = 0$)

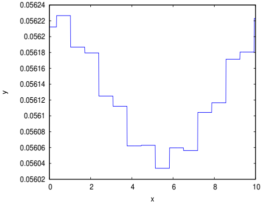
Экипаж с роликами



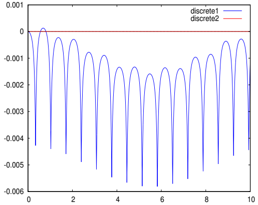
Траектория X, Y



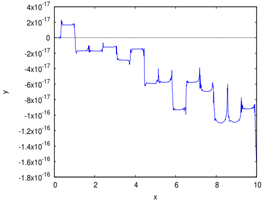
$\theta(t)$



Кинетическая энергия



$\nu_{1,2}(t) - \nu_{1,2}(0)$

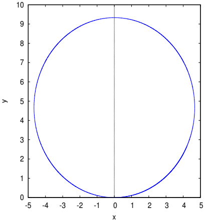


$\nu_3(t)$

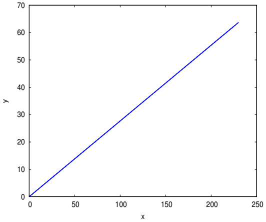
Энергия и псевдоскорость ν_1 не постоянны. Присутствует шум по координатам.

Движение с закруткой $(\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1)$

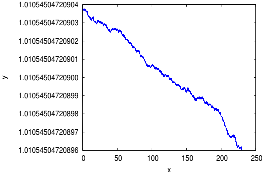
Экипаж без роликов



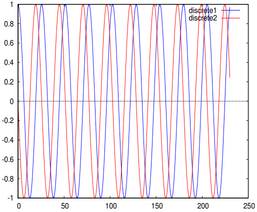
Траектория X, Y



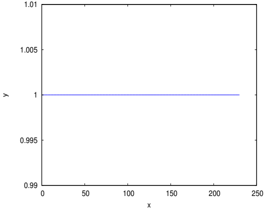
$\theta(t)$



Кинетическая энергия



$\nu_{1,2}(t) - \nu_{1,2}(0)$

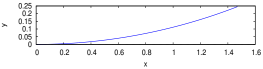


$\nu_3(t)$

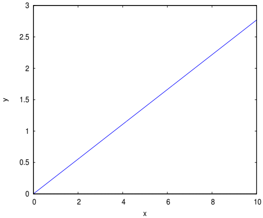
Экипаж движется по окружности, равномерно вращаясь вокруг своей оси.

Движение с закруткой $(\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1)$

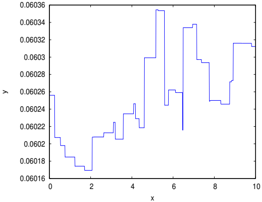
Экипаж с роликами



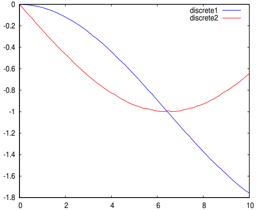
Траектория X, Y



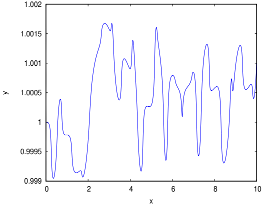
$\theta(t)$



Кинетическая энергия



$\nu_{1,2}(t) - \nu_{1,2}(0)$



$\nu_3(t)$

Энергия не постоянна. Биения в псевдоскоростях.

Результаты

- Получены уравнения движения экипажа с полным набором роликов в неголономной постановке.
- Показано, что разница с уравнениями для системы без роликов пропорциональна моменту инерции ролика.
- Предложена модель перехода с ролика на ролик.
- Получены численные решения при неподвижных свободных роликах для симметричной конфигурации.

Спасибо за внимание!