УДК 531.36

ДВИЖЕНИЕ СИММЕТРИЧНОГО ЭКИПАЖА НА ОМНИ-КОЛЕСАХ С МАССИВНЫМИ РОЛИКАМИ

© 2018 г. **К.В. Герасимов**[1,*], **А.А. Зобова**[1,**]

[1] *Кафедра теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова*

*E-mail: kiriger@gmail.com, **E-mail: azobova@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 14.11.2017 г.

Рассматривается динамика симметричного экипажа с роликонесущими колесами, движущегося по неподвижной горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости в следующих предположениях: масса каждого ролика ненулевая, контакт между роликами и плоскостью точечный, проскальзывания нет. Уравнения движения составлены с помощью системы символьных вычислений Maxima. В уравнениях движения получены дополнительные члены, пропорциональные осевому моменту инерции ролика и зависящие от углов поворота колес. Массивность роликов учитывается в тех фазах движения, когда не происходит смены роликов в контакте. При переходе колес с одного ролика на другой масса роликов считается пренебрежимо малой. Показано, что ряд движений, существующих в безынерционной модели (т.е. не учитывающей массу роликов), пропадает, так же как и линейный первый интеграл. Проведено сравнение основных типов движения симметричного трехколесного экипажа, полученных

численным интегрированием уравнений движения с результатами, полученными на основании безынерционной модели.

Ключевые слова: роликонесущее колесо, омниколесо, массивные ролики, неголономная связь, лаконичная форма уравнений движения Я.В. Татаринова

1. Введение. Омниколеса (в русской литературе также используется название роликонесущие колеса) – это колеса особой конструкции, позволяющей экипажу двигаться в произвольном направлении, вращая колеса вокруг их собственных осей и не поворачивая их вокруг вертикали. На ободе такого колеса располагаются ролики, которые могут свободно вращаться вокруг своих осей, жестко закрепленных в диске колеса. Существуют два варианта расположения осей роликов: первый (собственно омниколеса) – оси роликов являются касательными к ободу колеса и, следовательно, лежат в его плоскости; второй (mecanum wheels [1]) – оси роликов развернуты вокруг нормали к ободу колеса на постоянный угол, обычно $\pi/4$.

Ранее была рассмотрена динамика омни-экипажей с использованием упрощенных моделей омни-колес, в которых не учитывается инерция и форма роликов [2–7], колеса моделируются как жесткие диски (без роликов), которые могут скользить в одном направлении и катиться без проскальзывания в другом. Далее будем называть такую модель безынерционной, в том смысле, что инерция собственного вращения роликов в ней не учитывается. В другой части работ по динамике омни-экипажа [8–11] используются некоторые формализмы для построения численных моделей систем тел. При этом явный вид уравнений движения оказывается скрытым, что делает невозможным непосредственный анализ уравнений и затрудняет оценку влияния разных факторов на динамику системы.

Цель настоящей работы – получение в явном виде уравнений движения по инерции экипажа с омни-колесами с массивными роликами в неголономной постановке с помощью подхода Я.В. Татаринова [12], исследование их свойств и сравнение поведения такой системы с поведением системы в безынерционном случае [13].

2. Постановка задачи. Рассмотрим экипаж с омни-колесами, движущийся по инерции по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Экипаж состоит из платформы и N одинаковых омни-колес, плоскости которых относительно платформы неподвижны. Каждое колесо может свободно вращаться относительно платформы вокруг собственной оси, расположенной горизонтально. Будем считать, что на каждом колесе установлено n массивных роликов, так что оси роликов параллельны касательным

Фиг. 1 к контурам дисков колес (см. фиг. 1). На рисунках ролики обозначены как закрашенные области, либо области с пунктирными границами, расположенные вдоль контуров дисков колес. На фиг. 1 ролики пронумерованы от 1 до n. Таким образом, система состоит из $N(n+1)+1$ абсолютно твердых тел.

Введем неподвижную систему отсчета так, что ось OZ направлена вертикально вверх, а плоскость OXY совпадает с опорной плоскостью. Введем также подвижную систему отсчета $S\xi\eta Z$, жестко связанную с платформой экипажа так, что плоскость $S\xi\eta$ горизонтальна и содержит центры всех колес P_i. Будем считать, что оси колес лежат на лучах,

Фиг. 2 соединяющих центр масс платформы S и центры колес (см. фиг. 2), а расстояния от центров колес до S одинаковы и равны R. Геометрию установки колес на платформе зададим углами α_i между осью $S\xi$ и осями колес (см. фиг. 1). Будем считать, что центр масс всей системы совпадает с точкой S (отсюда следует, что $\sum\limits_k \cos\alpha_k = \sum\limits_k \sin\alpha_k = 0$). Введем также три орта, жестко связанных с дисками колес: единичный орт оси i-го колеса $\mathbf{n}_i = \mathbf{SP}_i/|\mathbf{SP}_i|$ и орты $\mathbf{n}_i^{\perp}$ и $\mathbf{n}_i^z$, лежащие в плоскости диска колеса, причем вектор

$\mathbf{n}_i^z$ вертикален при нулевом повороте колеса χ_i. Положения центров роликов на колесе определим углами κ_j между ними и направлением, противоположным вектору $\mathbf{n}_i^z$.

Положение экипажа будем задавать следующими координатами: x, y — координаты точки S на плоскости OXY, θ – угол между осями OX и $S\xi$ (угол курса), χ_i $(i = 1, \dots, N)$ – углы поворота колес вокруг их осей, отсчитываемые против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\mathbf{n}_i$, и ϕ_j – углы поворота роликов вокруг их собственных осей. Таким образом, вектор обобщенных координат имеет вид

$$\mathbf{q} = (x, y, \theta, \{\chi_i\}|_{i=1}^{N}, \{\phi_k\}|_{k=1}^{N}, \{\phi_s\}|_{s=1}^{N(n-1)})^T \in \mathbb{R}^{N(n+1)+3}$$

где сначала указаны углы поворота ϕ_k роликов, находящихся в данный момент в контакте с опорной плоскостью, а затем – остальных, “свободных”, роликов. Индекс s используется для сквозной нумерации свободных роликов и связан с номером колеса i и ролика на колесе j по формуле $s = n(i-1) + j$.

Введем псевдоскорости

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \quad \mathbf{v}_S = R\nu_1\mathbf{e}_\xi + R\nu_2\mathbf{e}_\eta, \quad \nu_3 = \Lambda\dot{\theta}, \quad \nu_s = \dot{\phi}_s, \quad s = 1, \dots, N(n-1)$$

Их механический смысл таков: ν_1, ν_2 — проекции скорости точки S на оси $S\xi\eta$, связанные с платформой, ν_3 — с точностью до множителя угловая скорость платформы, ν_s — угловые скорости свободных роликов. Число независимых псевдоскоростей системы $K = N(n-1) + 3$. Таким образом, имеем

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos\theta - R\nu_2 \sin\theta, \quad \dot{y} = R\nu_1 \sin\theta + R\nu_2 \cos\theta$$

Будем считать, что проскальзывания между опорной плоскостью и роликами в контакте не происходит, т.е. скорости точек C_i контакта равны нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

Выражая скорость точек контакта через введенные псевдоскорости и проектируя на векторы $\mathbf{e}_\xi$ и $\mathbf{e}_\eta$ соответственно, получим:

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{\rho_k}(\nu_1 \cos\alpha_k + \nu_2 \sin\alpha_k); \quad \rho_k = l\cos\chi_k - r \tag{2.1}$$

$$\dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin\alpha_i - \nu_2 \cos\alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}) \tag{2.2}$$

Заметим, что знаменатель ρ_k в формуле (2.1) – расстояние от оси ролика до точки контакта, обращающееся в нуль на стыке роликов (см. фиг. 1). Это обстоятельство приводит к разрывам второго рода функций в правых частях уравнений движения и будет рассмотрено отдельно ниже. Уравнение (2.2) совпадает с уравнением связи в случае безынерционной модели роликов.

Таким образом, выражение обобщенных скоростей через псевдоскорости, учитывающее связи, наложенные на систему, можно записать в матричном виде (явные выражения компонент матрицы V приведены в приложении):

$$\dot{\mathbf{q}} = V\boldsymbol{\nu}, \quad V = V(\theta, \chi_i) \tag{2.3}$$

3. Уравнения движения. Воспользуемся лаконичным методом получения уравнений движения для систем с дифференциальными связями, предложенным Я.В. Татариновым [12]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \sum_{\mu=1}^{K}\{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}, \quad \alpha = 1, \ldots, K \tag{3.1}$$

Здесь L – лагранжиан, L^* – он же с учетом связей, P_α – линейные комбинации формальных канонических импульсов p_i, определяемые из соотношения

$$\sum_{\mu=1}^{K} \nu_\mu P_\mu \equiv \sum_{i=1}^{N(n+1)+3} \dot{q}_i p_i$$

в котором $\dot{q}_i$ выражены через псевдоскорости ν_μ в соответствии с формулами (2.3). Фигурными скобками $\{\cdot, \cdot\}$ обозначена скобка Пуассона по p_i, q_i. После ее вычисления выполняется подстановка

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

(Подробности см. в работах [12, 13].)

Так как потенциальная энергия системы во время движения не меняется, лагранжиан равен кинетической энергии:

$$2L = 2T = M\mathbf{v}_S^2 + I_S\dot{\theta}^2 + J\sum_i \dot{\chi}_i^2 + B\sum_{i,j}(\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta}\sin(\kappa_j + \chi_i)\dot{\phi}_{ij}) = \dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathcal{M}\dot{\mathbf{q}} \tag{3.2}$$

Здесь $M,\ I_S,\ J$ — массово-инерционные характеристики экипажа (см. Приложение), B — момент инерции ролика относительно его оси вращения. Лагранжиан при учете связей определяется соотношением:

$$2L^* = \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} V^{\mathrm{T}} \mathcal{M} V \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} \mathcal{M}^*(\chi_i)\boldsymbol{\nu}$$

Структура симметрической матрицы $\mathcal{M}^*$ следующая:

$$\mathcal{M}^* = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & m_{ij}^* & \\ & & \end{pmatrix}_{3\times 3} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ B\Lambda^{-1}\sin\chi_{12} & \dots & B\Lambda^{-1}\sin\chi_{nN} \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} B & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B \end{matrix} \\ \star & \end{bmatrix},$$

Явные формулы для коэффициентов m_{ij}^* главного минора 3×3 выписаны в приложении; отметим, что они зависят только от координат χ_i, которые входят в дроби вида B/ρ_i^2 и $B\sin\chi_i/\rho_i$, имеющие разрывы второго рода при смене роликов (см. равенство (2.1)). Этот минор соответствует псевдоскоростям $\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3$. Остальные элементы матрицы $\mathcal{M}^*$ соответствуют скоростям свободных роликов ν_s, для которых $\chi_{kl} = \chi_k + \kappa_l$ — угол между вертикалью и осью ролика. Индекс $k = 1, \dots, N$ означает номер колеса, индекс $l = 2, \dots, n$ – номер свободного ролика на колесе ($l = 1$ – ролик, находящийся в контакте). Крупной звездой $\star$ обозначен минор $N(n-1) \times 3$, равный транспонированному минору $3 \times N(n-1)$ над главной диагональю.

Первое слагаемое в левой части равенства (3.1) получается дифференцированием лагранжиана и подстановкой связей:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} = \frac{d}{dt}(\mathcal{M}^*(\chi)\boldsymbol{\nu}_\alpha) = \mathcal{M}^*(\chi_i)\dot{\boldsymbol{\nu}}_\alpha + \left(\frac{d}{dt}(\mathcal{M}^*(\chi))\boldsymbol{\nu}\right)_\alpha = \mathcal{M}^*(\chi_i)\dot{\boldsymbol{\nu}}_\alpha + \left(\sum_{i=1}^{N}\mathcal{M}_i^*(V\nu)_{3+i}\boldsymbol{\nu}\right)_\alpha \tag{3.3}$$

где $\mathcal{M}_i^* = \dfrac{\partial \mathcal{M}^*}{\partial \chi_i}$. Обратим внимание, что вторая группа слагаемых, соответствующих свободным роликам ($\alpha = 4, \dots, K$), имеет вид

$$\nu_3\frac{B}{\Lambda}\left(-\frac{\nu_3 R}{l\Lambda} - \frac{\nu_2 R}{l}\cos\alpha_i + \frac{\nu_1 R}{l}\sin\alpha_i\right)\cos\chi_{ij} = \nu_3\frac{B}{\Lambda}(\dot{\chi}_i)^*\cos\chi_{ij}. \tag{3.4}$$

Выпишем выражения для P_α:

$$\begin{aligned} P_1 &= R\Big(p_x\cos\theta + p_y\sin\theta + \sum_i\left(\frac{p_{\chi_i}}{l}\sin\alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i}\cos\alpha_i\right)\Big) \\ P_2 &= R\Big(-p_x\sin\theta + p_y\cos\theta + \sum_i\left(-\frac{p_{\chi_i}}{l}\cos\alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i}\sin\alpha_i\right)\Big) \\ P_3 &= \frac{1}{\Lambda}\Big(p_\theta - \sum_i\frac{R}{l}p_{\chi_i}\Big) \\ P_s &= p_{\phi_s} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Поскольку коэффициенты лагранжиана L^* зависят только от координаты χ_i, его скобки Пуассона с P_1, P_2, P_3 — квадратичные формы псевдоскоростей, пропорциональные моменту инерции ролика B с коэффициентами, зависящими от χ_i:

$$\{P_1, L^*\} = -\frac{\partial P_1}{\partial p_{\chi_i}}\frac{\partial L^*}{\partial \chi_i} = -\frac{R}{2l}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathcal{M}_i^*\boldsymbol{\nu}\sin\alpha_i,$$

$$\{P_2, L^*\} = \frac{R}{2l}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathcal{M}_i^*\boldsymbol{\nu}\cos\alpha_i,\ \{P_3, L^*\} = \frac{R}{2l\Lambda}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathcal{M}_i^*\boldsymbol{\nu}, \quad \{P_s, L^*\} = 0, s > 3$$

Остается рассмотреть правую часть (3.1): суммы $\{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}$ отличны от нуля лишь в уравнениях для $\alpha = 1, \ldots, 3$ (см. Приложение).

Собирая вместе выражения для слагаемых (3.1) и пользуясь обозначениями из Приложения, окончательно получим следующую структуру уравнений:

$$\mathcal{M}^*\dot{\boldsymbol{\nu}} = MR^2\Lambda^{-1}\begin{pmatrix}\nu_2\nu_3\\ -\nu_1\nu_3\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} + \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\left(\frac{R}{2l}\begin{pmatrix}-\mathcal{M}_i^*\sin\alpha_i\\ \mathcal{M}_i^*\cos\alpha_i\\ \mathcal{M}_i^*\Lambda^{-1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} - BR^2\begin{pmatrix}\mathcal{P}_1\\ \mathcal{P}_2\\ \mathcal{P}_3\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right)\boldsymbol{\nu} - B\begin{pmatrix}\star\\ \star\\ \star\\ \frac{\nu_3}{\Lambda}\dot{\chi}_1^*\cos\chi_{12}\\ \vdots\\ \frac{\nu_3}{\Lambda}\dot{\chi}_N^*\cos\chi_{Nn}\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Символ $\star$ в последнем слагаемом правой части уравнений для $\alpha = 1, \ldots, 3$ заменяет выражения из второго слагаемого (3.3). Матрицы $\mathcal{P}_\alpha$ размера $K \times K$ составлены из строк $\mathbf{p}_{\alpha\beta}$, определенных явно в Приложении и зависящих от геометрии экипажа и углов поворота колес χ_i:

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{p}_{12}\\ \mathbf{p}_{13}\\ \mathbf{0}\\ \vdots\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix}-\mathbf{p}_{12}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{p}_{23}\\ \mathbf{0}\\ \vdots\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}, \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix}-\mathbf{p}_{13}\\ -\mathbf{p}_{23}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \vdots\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Поскольку матрицы $\mathcal{M}_i^*$ и $\mathcal{P}_\alpha$ зависят от углов поворота колес χ_i, для замыкания системы к этим уравнениям надо добавить уравнения (2.2).

Структура уравнений позволяет выявить следующие свойства:

1. Система допускает интеграл энергии $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathcal{M}^*(\chi_i)\boldsymbol{\nu} = h = \mathrm{const}$ в силу общей теоремы об изменении полной механической энергии: так как система стеснена автономными идеальными связями, а силы консервативны, то полная энергия (в нашем случае она равна кинетической энергии) сохраняется.

2. В случае, если платформа экипажа неподвижна, т.е. $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$, свободные ролики сохраняют свою начальную угловую скорость: $\nu_s = \mathrm{const}$, чего и следовало ожидать.

3. При $B = 0$ все слагаемые в правой части равенства (3.6), кроме первого, обращаются в нуль, как и все члены, соответствующие свободным роликам, в левой части (см. Приложение, равенства (7.1)). В этом случае существенными остаются первые три уравнения системы на $\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3$. Эти уравнения описывают динамику безынерционной модели экипажа [5].

4. Существовавший в безынерционной модели линейный первый интеграл разрушается для модели с массивными роликами. При $B = 0$ он имеет вид $m_{33}^*\nu_3 = \mathrm{const}$ (причем $m_{33} = \mathrm{const}$) и следует непосредственно из третьего уравнения системы. При $B \neq 0$ скорость изменения ν_3 пропорциональна моменту инерции ролика B.

5. Поскольку скобки Пуассона в уравнениях для свободных роликов равны нулю, система допускает первые интегралы:

$$\nu_s + \frac{1}{\Lambda}\sin\chi_{ij}\nu_3 = \mathrm{const} \tag{3.7}$$

Скорость вращения платформы ν_3 связана со скоростями собственного вращения свободных роликов. В частности, вращение экипажа вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр ($\nu_1(0) = 0, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) \neq 0$), неравномерно, в отличие от выводов, основанных на безынерционной модели.

6. Одновременное изменение начальных значений всех псевдоскоростей $\boldsymbol{\nu} \to \lambda\boldsymbol{\nu}, \lambda \neq 0$ умножением на число, отличное от нуля, эквивалентно замене времени $t \to \lambda t$.

4. Переход между роликами. Уравнения (3.6) описывают динамику системы на промежутках времени, в течение которых не происходит смены роликов. При переходе любого колеса с одного ролика на другой коэффициенты уравнений терпят разрыв второго рода из-за выражений $\rho_i = l\cos\chi_i - r$ в знаменателе.

Заметим, что на практике ситуация $\rho_i = 0$ никогда не реализуется, так как концы роликов усекаются (в частности, потому что оси роликов в реальных системах имеют ненулевую толщину и должны быть закреплены в колесах). Для того чтобы в каждый момент в контакте между колесом и плоскостью был ролик, ролики располагают в два или больше рядов.

Фиг. 3 Для исследования движений, на которых происходят смены контактных роликов, примем следующие предположения. Усечем ролики (см. левую часть фиг. 3), но оставим их оси в одной плоскости, пренебрегая пересечением тел роликов в пространстве. Переход между роликами одного колеса будет происходить при значении угла $\chi_i = \dfrac{2\pi}{n}$. Колесо с усеченными роликами определим, располагая ось ролика на расстоянии $r = l\cos\dfrac{\pi}{n-1}$ от центра колеса , а его поверхность задавая как фигуру вращения дуги окружности радиуса l с углом раствора $\dfrac{2\pi}{n}$ вокруг этой оси, замкнутую соответствующими дисками.

Кроме этого, при смене контакта происходит мгновенное наложение связи на вновь вошедший в контакт ролик и снятие ее с освободившегося, после чего последний может свободно вращаться вокруг своей оси. В этот момент в реальной системе происходят взаимодействия типа ударных, в том числе проскальзывание роликов относительно плоскости, при котором происходит уменьшение полной энергии системы. Однако моделирование этих эффектов здесь не рассматривается. Будем считать, что скорости ν_1, ν_2, ν_3 при переходе с ролика на ролик не изменяются, как и в безынерционной модели в отсутствии роликов ($B = 0$). Таким образом, масса роликов влияет на динамику системы только на гладких участках движения и не учитывается при смене роликов. Из уравнений (2.1) и (2.2) получим, что ролик, входящий в контакт, мгновенно приобретает ту же угловую скорость, что и освобождающийся ролик.

Таким образом, при переходе ($\chi_i = \chi_i^+$) сохраним значения ν_1, ν_2, ν_3, заменим χ_i с χ_i^+ на χ_i^- (см. правую часть фиг. 3), и выполним с псевдоскоростями ν_s следующее преобразование. Пусть $\boldsymbol{\nu}_i^s = (\nu_{i2}, \ldots, \nu_{in})$ – псевдоскорости свободных роликов на колесе i. Тогда, если при смене контакта $\dot{\chi}_i > 0$ (т.е. колесо поворачивается против часовой стрелки, см. фиг. 1), то отбросим ν_{in}, остальные компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}_i^s$ перенумеруем, сдвигая их вперед: $\nu_{ij} \to \nu_{ij+1}$, а компоненту ν_{i2} положим равной значению правой части в уравнении связи (2.1). При вращении колеса в другую сторону, выполним аналогичные преобразования, номера роликов при этом сдвигаются назад.

5. Примеры движений Численные решения получим для симметричного трехколесного экипажа ($\alpha_i = \frac{2\pi}{N}(i-1), N = 3$), с $n = 5$ роликами на колесе и следующих движений:

Фиг. 4 1. Вращение вокруг своей оси ($\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$) (фиг. 4);

Фиг. 5 2. Движение по прямой в направлении оси первого колеса ($\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = \nu_3(0) = 0$) (фиг. 5);

Фиг. 6 3. Движение с ненулевой скоростью центра масс и, одновременно, с ненулевой угловой скоростью платформы ($\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$) (фиг. 6).

Расчеты выполнены в безразмерных величинах, так что радиус платформы и колеса $R = 0.15$ и $r = 0.05$, массы платформы, колеса и ролика 1, 0.15 и 0.05. При этом момент инерции ролика $B \approx 1.6 \cdot 10^{-5}$. Для безынерционной модели массово-инерционные характеристики колес положим соответствующими экипажу с пятью заблокированными роликами.

Во всех трех случаях наблюдаются различия между двумя постановками: свободные ролики приходят в движение, из-за чего меняется угловая скорость платформы экипажа и скорость центра масс экипажа. Кроме этого, становится заметно влияние введенных предположений о смене контакта: график кинетической энергии приобретает ступенчатый вид в силу изменений, зависящих от χ_i и $\dot{\phi}_{i,j}$, в слагаемых (3.2):

$$B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i)\dot{\phi}_{ij}) \tag{5.1}$$

при мгновенном наложении связей. В промежутки времени между сменами роликов энергия остается постоянной.

В случаях 1 и 2 траектории центра экипажа S на плоскости OXY и характер вращения вокруг вертикальной оси SZ ($\theta(t)$) согласно модели с роликами и безынерционной модели различаются несущественно, однако заметны переходные режимы вращения роликов в начале движения.

При вращении вокруг вертикали (движение 1) угловая скорость платформы ν_3 меняется немонотонно, но в среднем медленно убывает: за первые 10^3с угловая скорость уменьшается на 2%. Скорость центра масс остается равной нулю. Кинетическая энергия системы также медленно убывает. На фиг. 4 представлены угловые скорости роликов на первом колесе $\dot{\phi}_{1j}$. Номер кривой совпадает с номером ролика на колесе, поведение роликов на других двух колесах полностью аналогично. Заметим, что при нулевой скорости

Фиг. 4

Фиг. 5

центра экипажа опорный ролик не вращается (см. формулу (2.2)): угловая скорость первого ролика в течение первой секунды движения нулевая. После выхода из контакта ролик начинает раскручиваться в соответствии с первым интегралом (3.7). Раскрученный ролик при входе в контакт с опорной плоскостью мгновенно теряет угловую скорость (на графике угловой скорости первого ролика это происходит при $t = 9.6$с), что приводит к убыванию кинетической энергии.

При движении по прямой (движение 2) угловая скорость остается нулевой. На фиг. 5 слева показаны графики относительного изменения скорости центра масс $\nu_1(t)/\nu_1(0) - 1$ (кривая *1*) и кинетической энергии $T/T(0) - 1$ (кривая *2*). Видно, что на начальном этапе движения при смене контакта кинетическая энергия возрастает, что обусловлено принятой моделью наложения связи, но при этом возрастание энергии остается в пределах 4%. Скорость центра масс (кривая *2*, слева) в среднем убывает. Скорость вращения переднего колеса равна нулю, колесо катится, опираясь на один и тот же ролик, остальные ролики не раскручиваются. Угловые скорости роликов на одном из задних колес показаны на фиг. 5 справа. Свободные ролики двигаются с постоянной угловой скоростью, ролик в контакте изменяет свою скорость за счет скорости центра масс. После того как все ролики побывают в контакте, их движение становится квазипериодичным, а энергия убывает с каждой сменой контакта.

Фиг. 6

При движении 3, сочетающем поступательное и вращательное движение, угловая скорость экипажа ν_3 растет и выходит на постоянное значение (кривая *1* на фиг. 6 слева вверху), скорость центра экипажа $v = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ уменьшается до нуля (кривая *2* там же), а кинетическая энергия (кривая *3*) после короткого начального участка, где происходят маленькие по величине скачки вверх аналогично движению 2, убывает. Угловые скорости роликов представляют собой квазипериодические функции времени (характерный участок представлен на фиг. 6 справа вверху, обозначения те же что и на фиг. 4). Центр платформы описывает спираль (нижняя часть фиг. 6). Заметим, что если не учитывать массу роликов на колесе, то при принятых начальных условиях скорость центра масс и угловая скорость платформы сохраняются, а центр платформы описывает окружность. Таким образом, даже малая масса роликов приводит к качественным изменениям в движении экипажа.

6. Выводы.

1. Получены уравнения движения экипажа с полным набором роликов в неголономной постановке.

2. Показано, что при учете массы роликов возникают дополнительные члены, пропорциональные моменту инерции ролика относительно его оси.

3. Предложена модель перехода с ролика на ролик.

4. Получены численные решения с учетом движения свободных роликов для симметричного экипажа и обнаружены качественные отличия от безынерционной модели.

7. Приложение. Матрица кинетической энергии:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & M & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & I_S & 0 & \cdots & 0 & B\sin\chi_{k1} & \cdots & B\sin\chi_{Nn} \\ & & & J & & & & & \\ & & & & \ddots & & & \text{\huge 0} & \\ & & & & & J & & & \\ & & \star & & & & B & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & B \end{bmatrix}$$

В ее третьей строке сначала указаны элементы, соответствующие роликам, находящимся в контакте, а затем соответствующие “свободным” роликам; элементы упорядочены по возрастанию индексов, так что ролики одного колеса соседствуют. Матрица $\mathcal{M}$ – симметрическая, звездой обозначены элементы, получающиеся транспонированием верхнего треугольника матрицы.

Матрица связей:

$$V = \begin{bmatrix} \widetilde{V} & O_1 \\ O_2 & E \end{bmatrix}; \quad \widetilde{V} = \begin{bmatrix} R\cos\theta & -R\sin\theta & 0 \\ R\sin\theta & R\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\Lambda} \\ \dfrac{R}{l}\sin\alpha_i & -\dfrac{R}{l}\cos\alpha_i & -\dfrac{R}{\Lambda l} \\ \dfrac{R}{\rho_k}\cos\alpha_k & \dfrac{R}{\rho_k}\sin\alpha_k & 0 \end{bmatrix}$$

Здесь O_1 и O_2 – нулевые $(3+2n\times N(n-1))$- и $(N(n-1)\times 3)$-матрицы, E – единичная матрица размерности $N(n-1)$.

Элементы матрицы кинетической энергии при учете связей:

$$
\begin{aligned}
m_{11}^* &= MR^2 + \sum_i \left(J\frac{R^2}{l^2}\sin^2\alpha_i + B\frac{R^2}{\rho_i^2}\cos^2\alpha_i \right) \quad (11 \leftrightarrow 22, \sin\alpha_i \leftrightarrow \cos\alpha_i) \\
m_{33}^* &= \frac{1}{\Lambda}\left(I_S + \sum_i J\frac{R^2}{l^2} \right), \quad m_{12}^* = \sum_i \left(-J\frac{R^2}{l^2} + B\frac{R^2}{\rho_i^2} \right)\sin\alpha_i\cos\alpha_i \\
m_{13}^* &= \frac{1}{\Lambda}\sum_i B\frac{R}{\rho_i}\sin\chi_i\cos\alpha_i, \quad m_{23}^* = \frac{1}{\Lambda}\sum_i B\frac{R}{\rho_i}\sin\chi_i\sin\alpha_i
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Обозначая $\xi_\pm(\alpha) = \nu_1\cos\alpha \pm \nu_2\sin\alpha$, $\eta_\pm(\alpha) = \nu_1\sin\alpha \pm \nu_2\cos\alpha$, для формальных импульсов $\mathbf{p} = \dfrac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{q}}}$ получим:

$$
\begin{aligned}
& p_x = MR\xi_-(\theta),\ p_y = MR\eta_+(\theta),\ p_\theta = BR\sum_i \frac{\sin\chi_i}{\rho_i}\xi_+(\alpha_i) + \frac{I_S}{\Lambda}\nu_3 + B\sum_s \sin\chi_s\nu_s \\
& p_{\chi_i} = J\frac{R}{l}(\eta_-(\alpha_i) - \frac{1}{\Lambda}\nu_3),\ p_{\phi_{k1}} = \frac{BR}{\rho_k}\xi_+(\alpha_k) + \frac{B}{\Lambda}\sin\chi_k,\ p_{\phi_s} = \frac{B}{\Lambda}\nu_3\sin\chi_s + B\nu_s
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

Линейные комбинации P_α имеют вид:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= R\left(p_x\cos\theta + p_y\sin\theta + \sum_i \left(\frac{p_{\chi_i}}{l}\sin\alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i}\cos\alpha_i \right) \right) \\
P_2 &= R\left(-p_x\sin\theta + p_y\cos\theta + \sum_i \left(-\frac{p_{\chi_i}}{l}\cos\alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i}\sin\alpha_i \right) \right) \\
P_3 &= \frac{1}{\Lambda}\left(p_\theta + \sum_i \frac{R}{l}p_{\chi_i} \right),\ P_s = p_{\phi_s}
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

Для упрощения записи правой части уравнений введем обозначение для операции дискретной свертки произвольной функции f:

$$\sigma[f(\alpha,\chi)] = \sum_{k=1}^{N} f(\alpha_k,\chi_k)\frac{\sin\chi_k}{\rho_k^3}$$

Тогда скобки Пуассона в правой части (3.1) имеют вид (звездочкой обозначена подстановка канонических формальных импульсов p_i):

$$
\begin{aligned}
(\{P_1,P_2\})^* &= \left(-\sum_{k=1}^{N} R^2\tau_k p_{\phi_k}\right)^* = -BR^2(R\nu_1\sigma[\cos\alpha] + R\nu_2\sigma[\sin\alpha] + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho\sin\chi]) = \\
&= -BR^2\mathbf{p}_{12}\boldsymbol{\nu},\ \text{где } \mathbf{p}_{12} = (\sigma[\cos\alpha], R\sigma[\sin\alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho\sin\chi], 0, \ldots, 0) \\
(\{P_1,P_3\})^* &= R\Lambda^{-1}\left(-\sin\theta p_x + \cos\theta p_y - \sum_{k=1}^{N} R\cos\alpha_k\tau_k p_{\phi_k}\right)^* = MR^2\Lambda^{-1}\nu_2 - \\
&- BR^2\Lambda^{-1}(R\nu_1\sigma[\cos^2\alpha] + R\nu_2\sigma[\sin\alpha\cos\alpha] + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho\cos\alpha\sin\chi]) = \\
&= MR^2\Lambda^{-1}\nu_2 - BR^2\mathbf{p}_{13}\boldsymbol{\nu} \\
\text{где } \mathbf{p}_{13} &= \Lambda^{-1}(R\sigma[\cos^2\alpha], R\sigma[\sin\alpha\cos\alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho\cos\alpha\sin\chi], 0, \ldots, 0) \\
(\{P_2,P_3\})^* &= R\Lambda^{-1}\left(-\cos\theta p_x - \sin\theta p_y - \sum_{k=1}^{N} R\sin\alpha_k\tau_k p_{\phi_k}\right)^* = -MR^2\Lambda^{-1}\nu_1 - \\
&- BR^2\Lambda^{-1}(R\nu_1\sigma[\sin\alpha\cos\alpha] + R\nu_2\sigma[\sin^2\alpha] + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho\sin\alpha\sin\chi] = \\
&= -MR^2\Lambda^{-1}\nu_1 - BR^2\mathbf{p}_{23}\boldsymbol{\nu} \\
\text{где } \mathbf{p}_{23} &= \Lambda^{-1}(R\sigma[\sin\alpha\cos\alpha], R\sigma[\sin^2\alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho\sin\alpha\sin\chi], 0, \ldots, 0),
\end{aligned}
$$

Литература

1. Gfrerrer A. Geometry and kinematics of the Mecanum wheel // Computer Aided Geom. Design. T. 25. C. 784–791.

2. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Математические аспекты динамики движения экипажа с тремя окольцованными колесами // Мобильные роботы и мехатронные системы. М.: Изд-во МГУ, С. 61–67.

3. Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Изв. РАН. Теория сист. управл. № 6. С. 142–149.

4. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Свободные и управляемые движения некоторой модели экипажа с роликонесущими колесами // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. № 6. С. 62–65.

5. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Динамика экипажа с роликонесущими колесами // ПММ. Т. 73. № 1. С. 13–22.

6. Мартыненко Ю. Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // ПММ. Т. 74. № 4. С. 610–619.

7. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Тележка с омниколесами на плоскости и сфере // Нелин. дин. Т. 7. № 4 (Мобильные роботы). С. 785–801.

8. Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots / R.L. Williams, B.E. Carter, P. Gallina [и др.] // IEEE Transactions on Robotics and Automation. Т. 18. № 3. С. 285–293.

9. Ashmore Mark, Barnes Nick. Omni-drive robot motion on curved paths: the fastest path between two points is not a straight-line // Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2002. С. 225–236.

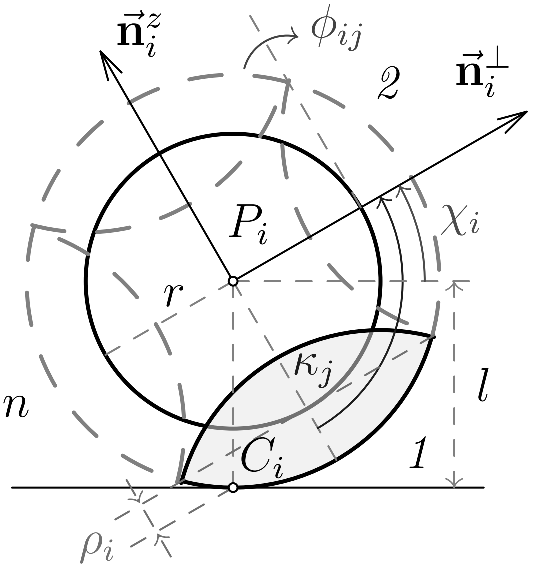
10. Tobolar J., Herrmann F., Bunte T. Object-oriented modelling and control of vehicles with omni-directional wheels // Computational Mechanics. Hrad Nectiny, Czech Republic: 2009.

11. Косенко И. И., Герасимов К. В. Физически-ориентированное моделирование динамики омнитележки // Нелин. дин. Т. 12. № 2. С. 251–262.

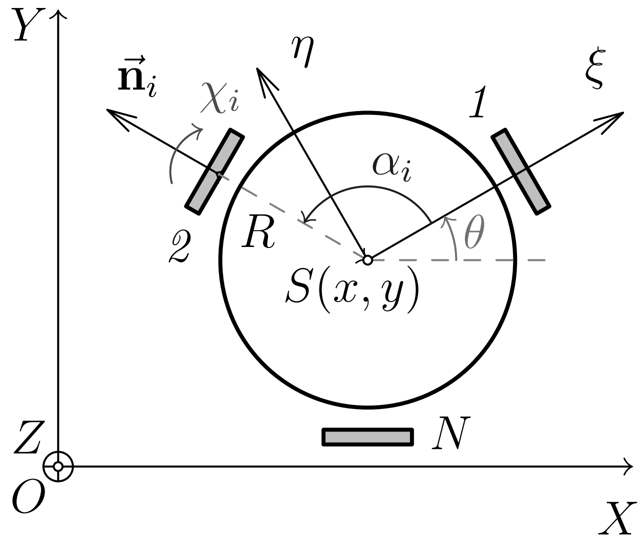
12. Татаринов Я. В. Уравнения классической механики в новой форме // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. № 3. С. 67–76.

13. Zobova A. A. Application of laconic forms of the equations of motion in the dynamics of nonholonomic mobile robots // Nonlin. Dyn. V. 7. № 4. P. 771–783.

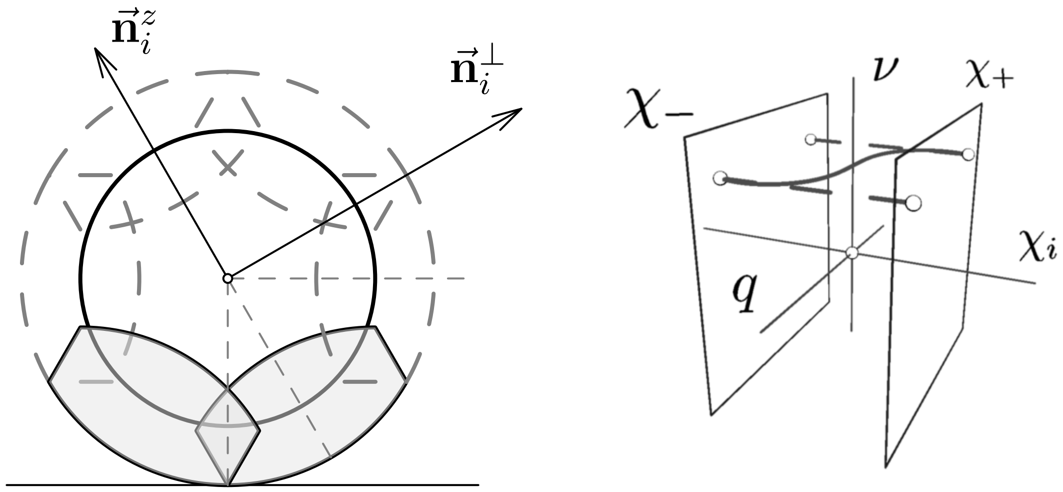
Фигуры.



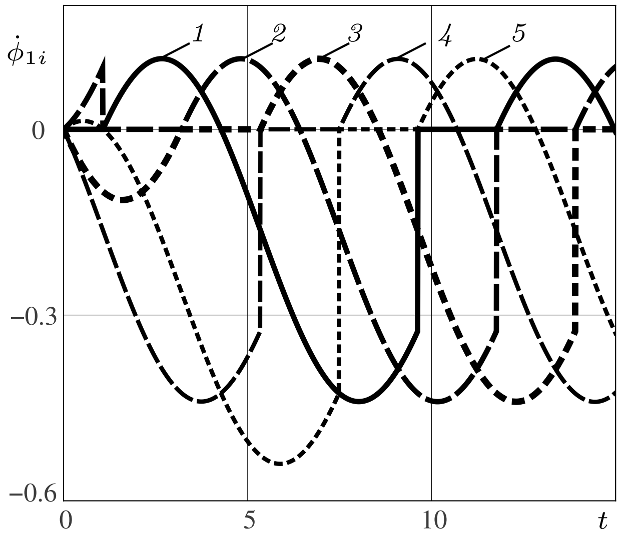
Фиг. 1.



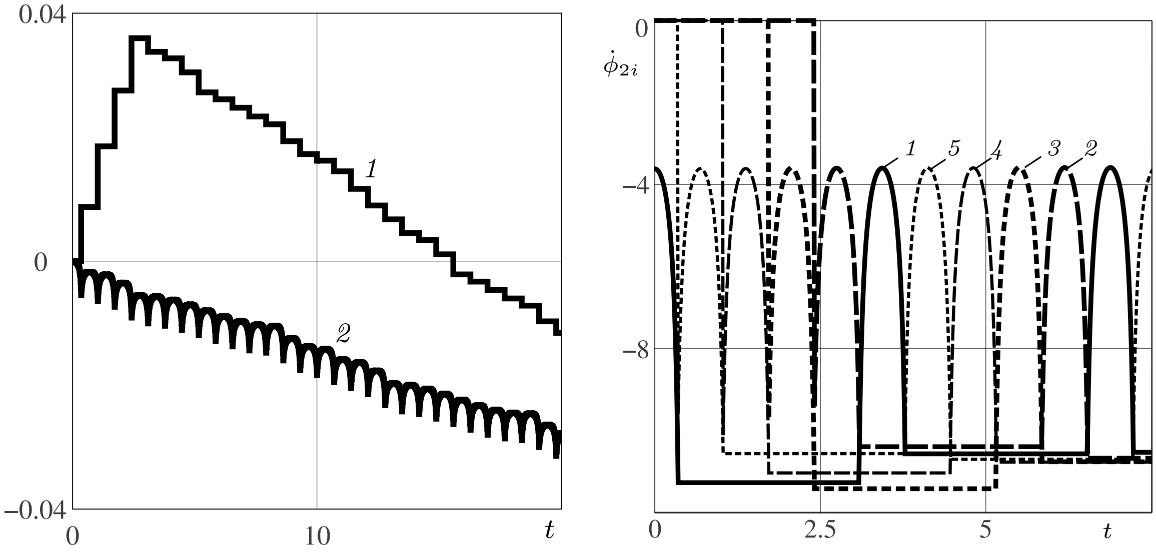
Фиг. 2.



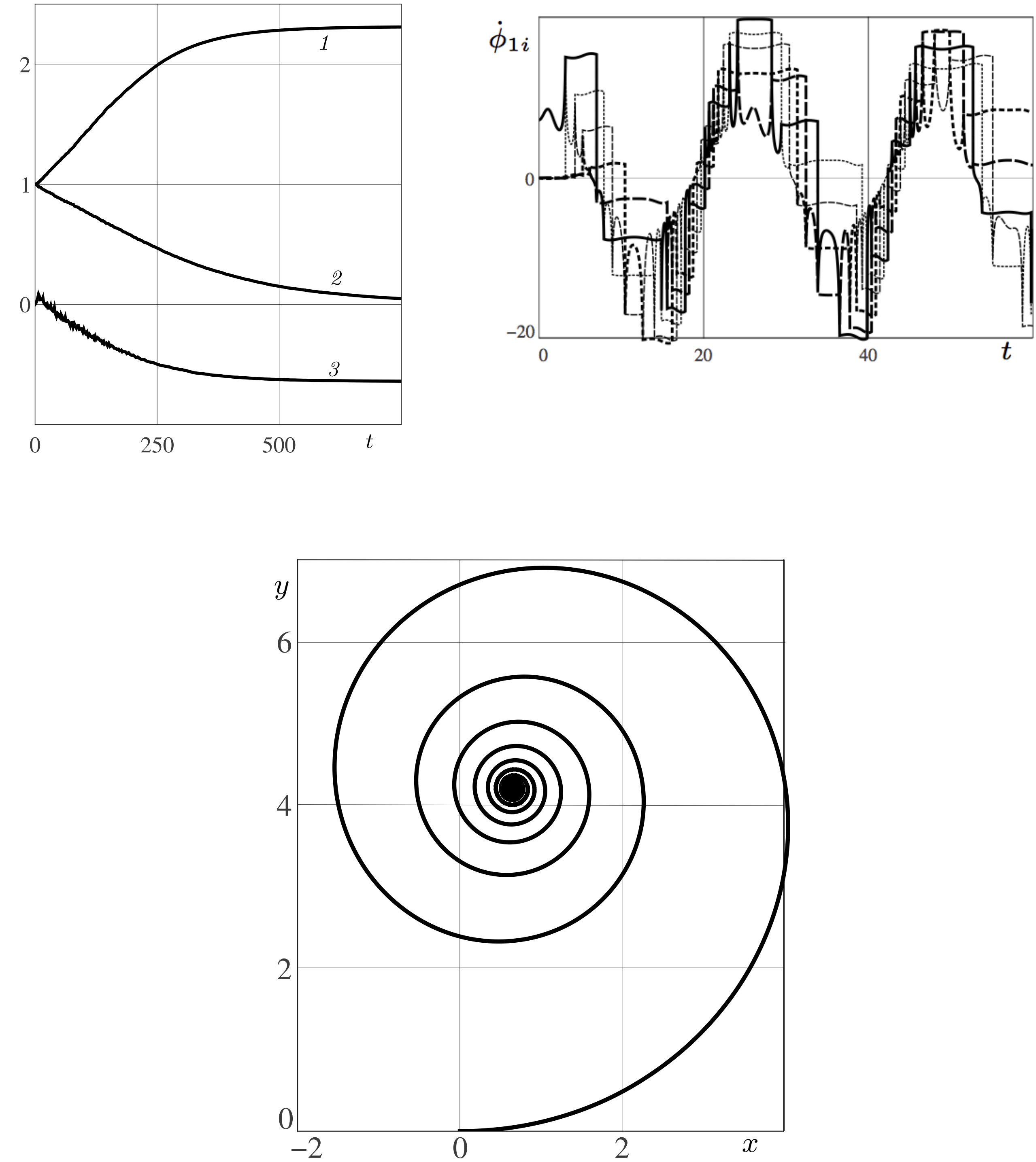
Фиг. 3.


$\dot{\phi}_{1i}$
1
2
3
4
5
0
−0.3
−0.6
0
5
10
t

Фиг. 4.


0.04
0
−0.04
0
10
t
1
2
0
$\dot{\phi}_{2i}$
−4
−8
0
2.5
5
t
1
5
4
3
2

Фиг. 5.



Фиг. 6.

ON THE MOTION OF A SYMMETRICAL VEHICLE WITH OMNIWHEELS WITH MASSIVE ROLLERS

© 2018 г. **K. Gerasimov**[1,*], **A. Zobova**[1,**]

[1] *Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University*

[*] *E-mail: kiriger@gmail.com*, [**] *E-mail: azobova@mech.math.msu.su*