

К.В. Герасимов, А.А. Зобова

## Движение симметричного экипажа на омни-колесах с массивными роликами

Рассматривается динамика симметричного экипажа с роликонесущими колесами, движущегося по неподвижной горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости в следующих предположениях: масса каждого ролика ненулевая, контакт между роликами и плоскостью точечный, проскальзывания нет. Уравнения движения составлены с помощью системы символьных вычислений Maxima. В уравнениях движения выявлены дополнительные члены, пропорциональные собственному моменту инерции ролика. Эти слагаемые явно зависят от углов поворота колес. Вследствие этого, для замыкания системы уравнений необходимо добавить уравнения связей. Предложена модель перехода колеса с одного ролика на другой, при этом разрывы в правых частях уравнений движения устранены путем введения дополнительных предположений о характере движения роликов. Показано, что ряд движений, существующих в безынерционной модели (т.е. не учитывающей массу роликов), пропадает, так же как и линейный первый интеграл. Проведено сравнение основных типов движения симметричного трехколесного экипажа, полученных численным интегрированием уравнений движения с безынерционной моделью.

**1. Введение.** Омниколеса (в русской литературе также используется название роликонесущие колеса) – это колеса особой конструкции, позволяющей экипажу двигаться в

произвольном направлении, вращая колеса вокруг их собственных осей и не поворачивая их вокруг вертикали. На ободе такого колеса располагаются ролики, которые могут свободно вращаться вокруг своих осей, жестко закрепленных в диске колеса. Существуют два варианта расположения осей роликов: первый (собственно омниколеса) – оси роликов являются касательными к ободу колеса и, следовательно, лежат в его плоскости; второй (меканум-колеса [1]) – оси роликов развернуты вокруг нормали к ободу колеса на постоянный угол, обычно  $\pi/4$ .

Ранее была рассмотрена динамика омни-экипажей с упрощенными моделями омни-колес, в которых не учитывается инерция и форма роликов [5, 6, 4, ?]. В этих работах колеса моделируются как жесткие диски (без роликов), которые могут скользить в одном направлении и катиться без проскальзывания в другом. Далее мы будем называть такую модель безынерционной в том смысле, что инерция собственного вращения роликов в ней не учитывается. Другая часть работ по динамике омни-экипажа [?, 2, ?] использует некоторые формализмы для построения численных моделей систем тел, при этом явный вид уравнений движения оказывается скрыт. Это делает невозможным непосредственный анализ уравнений и затрудняет оценку влияния разных факторов на динамику системы.

Цель настоящей работы – получение уравнений движения по инерции экипажа с омни-колесами с массивными роликами в неголономной постановке с помощью подхода [?] в явном виде, исследование их свойств и сравнение поведения такой системы с поведением системы в безынерционном случае [3].

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим экипаж с омни-колесами, движущийся по инерции по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Экипаж состоит из платформы и  $N$  одинаковых омни-колес, плоскости которых относительно платформы неподвижны. Каждое колесо может свободно вращаться относительно платформы вокруг

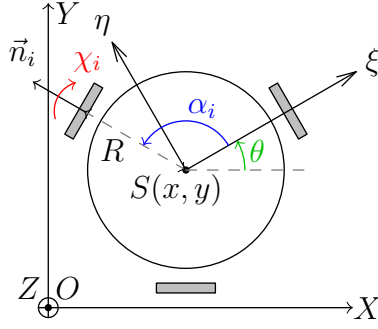


Рис. 1: Экипаж

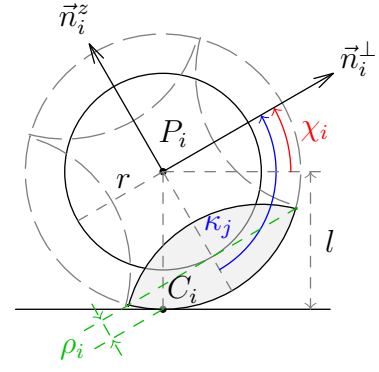


Рис. 2: Колесо

собственной оси, расположенной горизонтально. Будем считать, что на каждом колесе установлено  $n$  массивных роликов, так что оси роликов лежат в плоскостях колёс и направлены по касательной к границам дисков колес (см. рис. 2). Таким образом, система состоит из  $N(n + 1) + 1$  абсолютно твердых тел.

Введем неподвижную систему отсчета так, что ось  $OZ$  направлена вертикально вверх, а плоскость  $OXY$  совпадает с опорной плоскостью. Введем также подвижную систему отсчета  $S\xi\eta Z$ , жестко связанную с платформой экипажа так, что плоскость  $S\xi\eta$  горизонтальна и содержит центры всех колес  $P_i$ . Будем считать, что оси колес лежат на лучах, соединяющих центр масс платформы  $S$  и центры колес (см. рис. 1), а расстояния от центров колес до  $S$  одинаковы и равны  $R$ . Геометрию установки колес на платформе зададим углами  $\alpha_i$  между осями колес и осью  $S\xi$  (см. рис. 2). Будем считать, что центр масс всей системы совпадает с точкой  $S$  (отсюда следует, что  $\sum_k \cos \alpha_k = \sum_k \sin \alpha_k = 0$ ). Введем также орты, жестко связанные с дисками колес: пусть  $\mathbf{n}_i = \mathbf{SP}_i / |\mathbf{SP}_i|$  – единичный орт оси  $i$ -ого колеса, и орты  $\mathbf{n}_i^\perp$  и  $\mathbf{n}_i^z$ , лежащие в плоскости диска колеса, так что вектор  $\mathbf{n}_i^z$  вертикален при нулевом повороте колеса. Положения центров роликов на колесе определим углами  $\kappa_j$  между ними и направлением, противоположным вектору  $\mathbf{n}_i^z$ .

Положение экипажа будем задавать следующими координатами:  $x, y$  — координаты

точки  $S$  на плоскости  $OXY$ ,  $\theta$  – угол между  $OX$  и  $S\xi$  (угол курса),  $\chi_i$  ( $i = 1 \dots N$ ) – углы поворота колес вокруг их осей, отсчитываемые против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $\mathbf{n}_i$ , и  $\phi_j$  – углы поворота роликов вокруг их собственных осей. Таким образом, вектор обобщенных координат имеет вид:

$$\mathbf{q} = (x, y, \theta, \{\chi_i\}_{i=1}^N, \{\phi_k\}_{k=1}^N, \phi_s)^T \in \mathbb{R}^{N(n+1)+3},$$

где сначала указаны углы поворота  $\phi_k$  роликов, находящихся в данный момент в контакте с опорной плоскостью, а затем – остальных, “свободных”, роликов.

Введем псевдоскорости

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \quad \mathbf{v}_S = R\nu_1 \mathbf{e}_\xi + R\nu_2 \mathbf{e}_\eta, \quad \nu_3 = \Lambda \dot{\theta}, \quad \nu_s = \dot{\phi}_s$$

Их механический смысл таков:  $\nu_1, \nu_2$  – проекции скорости точки  $S$  на оси  $S\xi\eta$ , связанные с платформой,  $\nu_3$  – с точностью до множителя угловая скорость платформы,  $\nu_s$  – угловые скорости свободных роликов. Таким образом, имеем

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos \theta - R\nu_2 \sin \theta, \quad \dot{y} = R\nu_1 \sin \theta + R\nu_2 \cos \theta,$$

Будем считать, что проскальзывания между опорной плоскостью и роликами в контакте не происходит, т.е. скорости точек  $C_i$  контакта равны нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, \quad i = 1 \dots N.$$

Выражая скорость точек контакта через введенные псевдоскорости и проектируя на векторы  $\mathbf{e}_\xi$  и  $\mathbf{e}_\eta$  соответственно, получим:

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{\rho_k}(\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k), \quad \text{где } \rho_k = l \cos \chi_k - r \quad (2.1)$$

$$\dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}) \quad (2.2)$$

Заметим, что знаменатель  $\rho_k$  в (2.1) есть расстояние от оси ролика до точки контакта, обращающееся в ноль на стыке роликов (см. рис. 2). Это обстоятельство приводит к неустрашимым разрывам правых частей уравнений движения и будет рассмотрено отдельно ниже. Уравнение (2.2) совпадает с уравнением связи в случае безынерционной модели.

Таким образом, выражение обобщенных скоростей через псевдоскорости, учитывающее связи, наложенные на систему, можно записать в матричном виде (явные выражения компонент матрицы  $V$  приведены в приложении):

$$\dot{\mathbf{q}} = V\boldsymbol{\nu}, \quad V = V(\theta, \chi_i) \quad (2.3)$$

**3. Уравнения движения.** Воспользуемся лаконичным методом получения уравнений движения для систем с дифференциальными связями, предложенным Я.В. Татариновым [?]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}. \quad (3.1)$$

Здесь  $L$  – лагранжиан,  $L^*$  – он же с учетом связей.  $P_\alpha$  – линейные комбинации формальных канонических импульсов  $p_i$ , определяемые из соотношения

$$\nu_\mu P_\mu \equiv \dot{q}_i p_i,$$

в котором  $\dot{q}_i$  выражены через псевдоскорости  $\nu_\mu$ . Фигурными скобками  $\{\cdot, \cdot\}$  обозначена скобка Пуассона по  $p_i, q_i$ . После ее вычисления выполняется подстановка

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Подробно их вывод и применение изложено в [?, 3, ?].

Так как потенциальная энергия системы во время движения не меняется, то лагранжиан равен кинетической энергии:

$$2L = 2T = M\mathbf{v}_S^2 + I_S\dot{\theta}^2 + J \sum_i \dot{\chi}_i^2 + B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2)$$

Здесь  $M$ ,  $I_S$ ,  $J$  — массово-инерционные характеристики экипажа (см. приложение),  $B$  — момент инерции ролика относительно его оси вращения. Лагранжиан с учетом связей имеет вид:

$$2L^* = \boldsymbol{\nu}^T V^T \mathcal{M} V \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu}$$

Структура симметричной матрицы  $\mathcal{M}^*$  следующая:

$$\mathcal{M}^* = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} m_{ij}^* \end{pmatrix}_{3 \times 3} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ B\Lambda^{-1} \sin \chi_{12} & \dots & B\Lambda^{-1} \sin \chi_{nN} \end{pmatrix} \\ * & \begin{matrix} B \\ \ddots \\ B \end{matrix} \end{bmatrix},$$

Явные формулы для коэффициентов  $m_{ij}^*$  главного минора  $3 \times 3$  выписаны в приложении; отметим, что они зависят только от координат  $\chi_i$ , которые входят в дроби вида  $B/\rho_i^2$  и  $B \sin \chi_i/\rho_i$ , имеющие неустранимый разрыв при смене роликов (см. (2.1)). Этот минор соответствует псевдоскоростям  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ . Остальные элементы матрицы  $\mathcal{M}^*$  соответствуют скоростям свободных роликов  $\nu_s$ , для которых  $\chi_{kl} = \chi_k + \kappa_l$  — угол между вертикалью и осью ролика. Индекс  $k = 1, \dots, N$  означает номер колеса, индекс  $l = 2, \dots, n$  — номер свободного ролика на колесе ( $l = 1$  — ролик, находящийся в контакте).

Первое слагаемое (3.1) получается дифференцированием лагранжиана и подстановкой связей:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} = \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi) \boldsymbol{\nu}_\alpha) = \mathcal{M}^*(\chi_i) \dot{\boldsymbol{\nu}}_\alpha + \left( \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi)) \boldsymbol{\nu} \right)_\alpha = \mathcal{M}^*(\chi_i) \dot{\boldsymbol{\nu}}_\alpha + \left( \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i^*(V \boldsymbol{\nu})_{3+i} \boldsymbol{\nu} \right)_\alpha, \quad (3.3)$$

где  $\mathcal{M}_i^* = \frac{\partial \mathcal{M}^*}{\partial \chi_i}$ . Обратим внимание, что в элементах полученного вектора, соответствующие

щих свободным роликам, слагаемые, включающие псевдоскорости, имеют вид:

$$\frac{\cos \chi_s \nu_3 B \left( -\frac{\nu_3 R}{l\Lambda} - \frac{\cos \alpha_i \nu_2 R}{l} + \frac{\sin \alpha_i \nu_1 R}{l} \right)}{\Lambda} = \frac{B}{\Lambda} \cos \chi_s (\dot{\chi}_i)^* \nu_3, \quad (3.4)$$

где  $\cos \chi_s = \cos(\chi_i + \kappa_j)$ , и  $i, j$  соответствуют  $s$ .

Выпишем выражения для  $P_\alpha$ :

$$\begin{aligned} P_1 &= R \left( p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_i \left( \frac{\sin \alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\cos \alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \right) \right), \\ P_2 &= R \left( -p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_i \left( -\frac{\cos \alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\sin \alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \right) \right), \\ P_3 &= \frac{1}{\Lambda} \left( p_\theta - \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i} \right), \\ P_s &= p_{\phi_s}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

Поскольку коэффициенты  $L^*$  зависят только от координаты  $\chi_i$ , то его скобка Пуассона с  $P_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, 3$  — квадратичная форма псевдоскоростей, пропорциональная моменту инерции ролика  $B$  с коэффициентами, зависящими от  $\chi_i$ :

$$\begin{aligned} \{P_1, L^*\} &= -\frac{\partial P_1}{\partial p_{\chi_i}} \frac{\partial L^*}{\partial \chi_i} = -\frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^T \sin \alpha_i \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}, \\ \{P_2, L^*\} &= \frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^T \cos \alpha_i \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}, \quad \{P_3, L^*\} = \frac{R}{2l\Lambda} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}, \quad \{P_s, L^*\} = 0, s > 3 \end{aligned}$$

Суммы  $\{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}$  в правой части также отличны от нуля лишь для первых трех уравнений (см. приложение).

Собирая все вместе и пользуясь обозначениями из приложения, окончательно получим

следующую структуру уравнений:

$$\mathcal{M}^* \dot{\boldsymbol{\nu}} = \frac{MR^2}{\Lambda} \begin{pmatrix} \nu_2 \nu_3 \\ -\nu_1 \nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\nu}^T \begin{pmatrix} \frac{R}{2l} \begin{pmatrix} -\sin \alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \cos \alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \Lambda^{-1} \mathcal{M}_i^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - BR^2 \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu} - B \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \cos \chi_s \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_1^* \\ \vdots \\ \cos \chi_s \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_3^* \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Здесь матрицы  $\mathcal{P}_\alpha$  размера ?? составлены из строк  $\mathbf{p}_{\alpha\beta}$  размера ??, определенных явно в приложении и зависящих от геометрии экипажа и углов поворота колес  $\chi_i$ :

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{p}_{13} \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{13} \\ -\mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Поскольку матрицы  $\mathcal{M}_i^*$  и  $\mathcal{P}_\alpha$  зависят от углов поворота колес  $\chi_i$ , то для замыкания системы к этим уравнениям надо добавить уравнения 2.2.

Структура уравнений позволяет выявить следующие свойства:

1. Система допускает интеграл энергии  $1/2 \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu} = h = \text{const}$  в силу общей теоремы об изменении полной механической энергии: так как система стеснена автономными идеальными связями, а силы консервативны, то полная энергия (в нашем случае она равна кинетической энергии) сохраняется.
2. В случае, если платформа экипажа не движется  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$ , то свободные



ролики сохраняют свою начальную угловую скорость:  $\nu_s = \text{const}$ , что соответствует здравому смыслу.

3. При вращении вокруг вертикальной оси, проходящей через центр экипажа ( $\nu_1(0) = 0, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = \text{const}, \nu_s(0) = 0$ ), скорость вращения экипажа  $\nu_3$  оказывается связанной со скоростями собственного вращения свободных роликов, поскольку последнее слагаемое в (3.6) отлично от нуля.
4. При  $B = 0$  все слагаемые в правой части, кроме первого, обращаются в ноль, как и все члены, соответствующие свободным роликам, в левой части (см. (7.1)). В этом случае существенными остаются первые три уравнения системы на  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ . Эти уравнения соответствуют безынерционной модели экипажа [5].
5. Существовавший в безынерционной модели линейный первый интеграл разрушается для модели с роликами. При  $B = 0$  этот интеграл имеет вид  $m_{33}^* \nu_3 = \text{const}$  (причем  $m_{33} = \text{const}$ ) и следует непосредственно из третьего уравнения системы. При  $B \neq 0$  производная  $\nu_3$  пропорциональна моменту инерции ролика  $B$ .
6. Одновременное изменение начальных условий  $\boldsymbol{\nu} \rightarrow \lambda \boldsymbol{\nu}, \lambda \neq 0$  умножением на число, отличное от нуля, эквивалентно замене времени  $t = \frac{\tau}{\lambda}$ .

**4. Переход между роликами.** Уравнения (3.6) описывают динамику системы на промежутках времени, в течение которых не происходит смены роликов. При переходе любого колеса с одного ролика на другой коэффициенты уравнений терпят разрыв второго рода из-за выражений  $\rho_i = l \cos \chi_i - r$  в знаменателе.

Заметим, что в технических реализациях омни-колес ситуация  $\rho_i = 0$  никогда не имеет места, т.к. концы роликов усекаются (в частности, потому что оси роликов в реальных си-

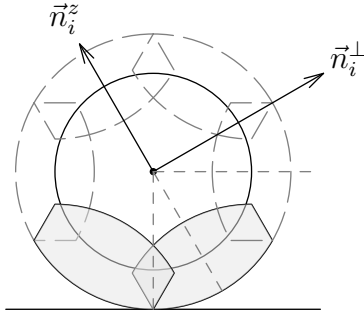


Рис. 3: Ролики перекрываются

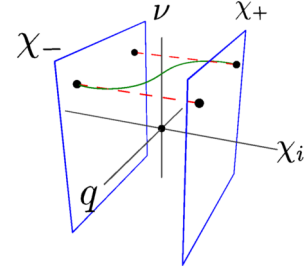


Рис. 4: Переход между роликами

стемах имеют ненулевую толщину и должны быть закреплены в колесах). Для того, чтобы в каждый момент в контакте между колесом и плоскостью был ролик, их располагают в два или больше рядов.

Для исследования движений, на которых происходят смены контактных роликов, примем следующие предположения. Мы усечем ролики (см. рис. 3), но оставим их оси в одной плоскости, допуская пересечение тел роликов в пространстве и пренебрегая им. Переход между роликами одного колеса будет происходить при значении угла  $\chi_i = \frac{2\pi}{n}$ . Колесо с усеченными роликами определим, располагая ось ролика на расстоянии  $r = l \cos \frac{\pi}{n-1}$  от центра колеса (знаменатель на единицу меньше количества роликов), а его поверхность задавая как фигуру вращения дуги окружности радиуса  $l$  с углом раствора  $\frac{2\pi}{n}$  вокруг этой оси, замкнутую соответствующими дисками.

Кроме этого, при смене контакта происходит мгновенное наложение связи на вновь вошедший в контакт ролик и снятие её с освободившегося, после чего последний может свободно вращаться вокруг своей оси. При смене роликов в реальной системе происходит взаимодействия типа ударных, в том числе проскальзывание роликов относительно плоскости. Моделирование этих эффектов не входит в рамки настоящей статьи. Опираясь на наблюдения за реальными системами, которые демонстрируют довольно “гладкое” поведение, будем считать, что скорости  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ , описывающие движение платформы, при пере-

ходе с ролика на ролик не изменяются. При существенном превышении массы платформы над массами роликов такое предположение представляется разумным. Из уравнений (2.2, 2.1) тогда получим, что ролик, входящий в контакт, мгновенно приобретает ту же угловую скорость, что и освобождающийся ролик.

Для этого, отбросим уравнения

$$\Lambda \dot{\nu}_{ni+j} = -\dot{\nu}_3 \sin(\chi_i + \kappa_j) - \dot{\chi}_i \nu_3 \cos(\chi_i + \kappa_j), \quad i = 1..n, j = 2..n,$$

описывающие движение свободных роликов, и при переходе ( $\chi_i = \chi_i^+$ ) сохраним значения  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ , заменим  $\chi_i$  с  $\chi_i^+$  на  $\chi_i^-$  (см. рис. 4), а  $\dot{\chi}_i$  пересчитаем по уравнениям связей.

**5. Примеры движений** Численные решения получим для симметричного трехколесного экипажа ( $\alpha_i = \frac{2\pi}{N}(i-1), N=3$ ), с  $n=5$  роликами на колесе (для случая без роликов – с колесами соответствующей массы) и следующих движений:

1. вращение вокруг своей оси ( $\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ ) – см. рис. ??, ??,
2. движение по прямой в направлении оси одного из колес ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = \nu_3(0) = 0$ ) – см. рис. ??, ??
3. движение с ненулевой скоростью центра масс и, одновременно, с ненулевой угловой скоростью платформы (т.е. “с закруткой”) ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ ) – см. рис. 5, 6 и 7.

Во всех трех случаях наблюдаются отличия между двумя постановками (с роликами и без): свободные ролики приходят в движение, из-за чего меняется угловая скорость платформы экипажа и скорость центра масс экипажа.

Кроме этого, становится заметно влияние введенных предположений о смене контакта: график кинетической энергии приобретает ступенчатый вид в силу изменений в слагаемых

(3.2), зависящих от  $\chi$ :

$$B \sum_{i,j} 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}, \quad (5.1)$$

происходящих при замене  $\chi_i$  с  $\chi^+$  на  $\chi^-$  или наоборот. В промежутки времени между сменами роликов, впрочем, энергия остается постоянной.

В случаях 1 и 2 траектории центра экипажа  $S$  на плоскости  $OXY$  и характер вращения вокруг вертикальной оси  $SZ$  ( $\theta(t)$ ) отличаются несущественно, однако заметны переходные процессы во вращении роликов в начале движения.

В 1 свободные ролики раскручиваются до значений угловых скоростей, соответствующих положению роликов на колесах, проходя по всей окружности колеса до первого входа в контакт с опорной плоскостью, см рис. (??), что заметно и на графиках (с точностью до постоянного множителя) угловой скорости платформы  $\nu_z$  и кинетической энергии. Скорость центра масс остается равной нулю. После этого процесса при каждой смене контакта теряется часть энергии, поскольку ролик, входящий в контакт, перестает совершать собственное вращение.

В 2 ролики на колесах, находящихся со стороны экипажа, противоположной направлению движения, сперва остаются неподвижными, но когда каждый побывает в контакте, их движение становится “однородным”. Энергия также убывает с каждой сменой контакта, а раскрутка роликов между сменами происходит за счет скорости центра масс.

Движения 3 заметно отличаются между двумя постановками. При учете движения свободных роликов, экипаж описывает не окружность, как в безынерционной модели, а спираль (рис. ??), причем поступательное движение постепенно замедляется, а вращательное ускоряется. Все ролики почти постоянно вращаются вокруг своих осей, направление и скорость вращения меняется. Кинетическая энергия имеет ступенчатый вид из-за многократного наложения связей на вновь входящие в контакт ролики.

## 6 Заключение

Результаты проведенной работы следующие:

1. получены уравнения движения экипажа с полным набором роликов в неголономной постановке,
2. показано, что разница с уравнениями для системы без роликов пропорциональна моменту инерции ролика,
3. предложена модель перехода с ролика на ролик,
4. получены численные решения с учетом движения свободных роликов для симметричной конфигурации.

Поведение системы существенно меняется при добавлении роликов, но их конкретное расположение а также способ отслеживания контакта непосредственно влияют на наблюдаемые величины. Данная модель является простым способом получить решение, но возможны и более сложные: например, расположение роликов рядами и под углом, различные конфигурации колес, – что позволяет говорить о построении иерархии моделей омни-колесных экипажей, все более точно описывающих их движения, очередной ступенью в которой и является настоящая.

## Список литературы

1. Gferrer, A.: Geometry and kinematics of the mecanum wheel. Computer Aided Geometric Design **25**, 784–791 (2008)

2. Tobolar J.; Herrmann, F.B.T.: Object-oriented modelling and control of vehicles with omnidirectional wheels. In: Computational Mechanics. Hrad Nectiny, Czech Republic (2009)
3. Zobova, A.A.: Application of laconic forms of the equations of motion in the dynamics of nonholonomic mobile robots. Nelineinaya Dinamika pp. 771–783 (2011). DOI 10.20537/nd1104003. URL <https://doi.org/10.20537%2Fnd1104003>
4. А.В.Борисов А.А.Килин, : Тележка с омниколесами на плоскости и сфере. Нелинейная динамика **7**(4 (Мобильные роботы)), 785–801 (2011)
5. Зобова А.А., : Динамика экипажа с роликонесущими колесами. Прикладная математика и механика **73**(1), 13–22 (2009)
6. Мартыненко Ю.Г., : О движении мобильного робота с роликонесущими колесами. Известия российской академии наук. Теория и системы управления (6), 142–149 (2007)

**6. Приложение. Явные виды выражений.** Матрица кинетической энергии:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} M & & & & & & \\ & M & & & & & \\ & & I_S & \cdots & B \sin(\chi_k + \kappa_1) & \cdots & B \sin(\chi_N + \kappa_n) \\ & & & J & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & J & \\ & & * & & & & B \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & B \end{bmatrix},$$

где в третьей строке сначала указаны элементы  $B \sin(\chi_k + \kappa_1)$ , соответствующие роликам, находящимся в контакте, а затем  $-B \sin(\chi_i + \kappa_j)$ ,  $i = 1, \dots, N, j = 2, \dots, n$ , соответствующие “свободным” роликам, упорядоченные по возрастанию индексов так, что ролики одного колеса соседствуют.

Матрица связей:

$$V = \begin{bmatrix} R \cos \theta & -R \sin \theta & 0 & & \\ R \sin \theta & R \cos \theta & 0 & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} & 0 & \\ \frac{R \sin \alpha_i}{l} & -\frac{R \cos \alpha_i}{l} & -\frac{R}{\Lambda l} & & \\ \frac{R \cos \alpha_k}{\rho_k} & \frac{R \sin \alpha_k}{\rho_k} & 0 & & \\ & 0 & & \mathbf{E}_{N(n-1)} & \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы кинетической энергии с учетом связей:

$$\begin{aligned} m_{11}^* &= MR^2 + \sum_i \left( J \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \alpha_i + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \cos^2 \alpha_i \right), \\ m_{22}^* &= MR^2 + \sum_i \left( J \frac{R^2}{l^2} \cos^2 \alpha_i + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \sin^2 \alpha_i \right), \\ m_{33}^* &= \frac{1}{\Lambda} (I_S + \sum_i J \frac{R^2}{l^2}), \\ m_{12}^* &= \sum_i \left( -J \frac{R^2}{l^2} + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \right) \sin \alpha_i \cos \alpha_i, \\ m_{13}^* &= \frac{1}{\Lambda} \sum_i B \frac{R \sin \chi_i}{\rho_i} \cos \alpha_i, \\ m_{23}^* &= \frac{1}{\Lambda} \sum_i B \frac{R \sin \chi_i}{\rho_i} \sin \alpha_i. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Формальные импульсы  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ :

$$\begin{aligned}
p_x &= MR(\nu_1 \cos \theta - \nu_2 \sin \theta), \\
p_y &= MR(\nu_1 \sin \theta + \nu_2 \cos \theta), \\
p_\theta &= BR \sum_i \frac{\sin(\chi_i + \kappa_1)}{\rho_i} (\nu_1 \cos \alpha_i + \nu_2 \sin \alpha_i) + \frac{I_S}{\Lambda} \nu_3 + B \sum_s \sin(\chi_s) \nu_s, \\
p_{\chi_i} &= J \frac{R}{l} (\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{1}{\Lambda} \nu_3), \\
p_{\phi_{k1}} &= \frac{BR}{\rho_k} (\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k) + \frac{B}{\Lambda} \nu_3 \sin(\chi_k + \kappa_1), \\
p_{\phi_s} &= \frac{B}{\Lambda} \nu_3 \sin \chi_s + B \nu_s.
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Линейные комбинации  $P_\alpha$ :

$$\begin{aligned}
P_1 &= R \left( p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_i \left( \frac{\sin \alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\cos \alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \right) \right), \\
P_2 &= R \left( -p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_i \left( -\frac{\cos \alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\sin \alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \right) \right), \\
P_3 &= \frac{1}{\Lambda} \left( p_\theta + \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i} \right), \\
P_s &= p_{\phi_s},
\end{aligned} \tag{7.3}$$

где от  $\chi_i$  зависят  $p_{\phi_{i1}}, p_\theta, \rho_i$  (см. (7.2)), а потому и  $P_1$  и  $P_2$ , отвечающие проекциям скорости центра масс платформы на подвижные оси, а также  $P_3$ , соответствующий вращению платформы.

Для упрощения записи правой части уравнений введем обозначение для операции дискретной свертки произвольной функции  $f$ :

$$\sigma[f(\alpha, \chi)] = \sum_{k=1}^N f(\alpha_k, \chi_k) \frac{\sin \chi_k}{\rho_k^3}$$

Тогда скобки Пуассона в правой части имеют вид (звездочкой обозначена подстановка канонических формальных импульсов  $p_i$ ):



$$\begin{aligned}
(\{P_1, P_2\})^* &= \left(-\sum_{k=1}^N R^2 \tau_k p_{\phi_k}\right)^* = -BR^2(R\nu_1\sigma[\cos\alpha] + R\nu_2\sigma[\sin\alpha] + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho\sin\chi]) = \\
&= -BR^2\mathbf{p}_{12}\boldsymbol{\nu}, \text{ где } \mathbf{p}_{12} = (\sigma[\cos\alpha], R\sigma[\sin\alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho\sin\chi], 0, \dots, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\{P_1, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1}\left(-\sin\theta p_x + \cos\theta p_y - \sum_{k=1}^N R\cos\alpha_k\tau_k p_{\phi_k}\right)^* = \\
&= MR^2\Lambda^{-1}\nu_2 - BR^2\Lambda^{-1}(R\nu_1\sigma[\cos^2\alpha] + R\nu_2\sigma[\sin\alpha\cos\alpha] + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho\cos\alpha\sin\chi]) = \\
&= MR^2\Lambda^{-1}\nu_2 - BR^2\mathbf{p}_{13}\boldsymbol{\nu}, \text{ где } \mathbf{p}_{13} = \Lambda^{-1}(R\sigma[\cos^2\alpha], R\sigma[\sin\alpha\cos\alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho\cos\alpha\sin\chi],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\{P_2, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1}\left(-\cos\theta p_x - \sin\theta p_y - \sum_{k=1}^N R\sin\alpha_k\tau_k p_{\phi_k}\right)^* = \\
&= -MR^2\Lambda^{-1}\nu_1 - BR^2\Lambda^{-1}(R\nu_1\sigma[\sin\alpha\cos\alpha] + R\nu_2\sigma[\sin^2\alpha] + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho\sin\alpha\sin\chi]) = \\
&= -MR^2\Lambda^{-1}\nu_1 - BR^2\mathbf{p}_{23}\boldsymbol{\nu}, \text{ где } \mathbf{p}_{23} = \Lambda^{-1}(R\sigma[\sin\alpha\cos\alpha], R\sigma[\sin^2\alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho\sin\alpha\sin\chi],
\end{aligned}$$

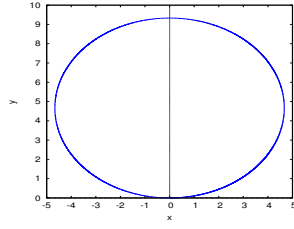
$$(\{P_1, P_2\})^* = \left(-\sum_{k=1}^N R^2 \tau_k p_{\phi_k}\right)^* = -BR^2(R\nu_1 S_1^1 + R\nu_2 S_2^1 + \Lambda^{-1}\nu_3 S_3^1)$$

$$S_1^1 = \sum_{k=1}^N \frac{\cos\alpha_k}{\rho_k} \tau_k, \quad S_2^1 = \sum_{k=1}^N \frac{\sin\alpha_k}{\rho_k} \tau_k, \quad S_3^1 = \sum_{k=1}^N \sin\chi_k \tau_k,$$

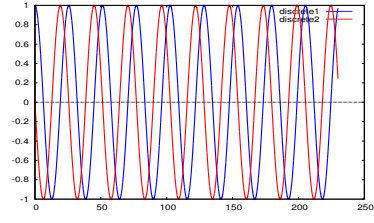
$$\begin{aligned}
(\{P_1, P_3\})^* &= \frac{R}{\Lambda}\left(-\sin\theta p_x + \cos\theta p_y - \sum_{k=1}^N R\cos\alpha_k\tau_k p_{\phi_k}\right)^* = \\
&= -\frac{BR^2}{\Lambda}(R\nu_1 S_1^2 + R\nu_2 S_2^2 + \Lambda^{-1}\nu_3 S_3^2),
\end{aligned}$$

$$S_1^2 = \sum_{k=1}^N \cos\alpha_k \frac{\cos\alpha_k}{\rho_k} \tau_k, \quad S_2^2 = \sum_{k=1}^N \cos\alpha_k \frac{\sin\alpha_k}{\rho_k} \tau_k - \frac{M}{BR},$$

$$S_3^2 = \sum_{k=1}^N \cos\alpha_k \sin\chi_k \tau_k,$$



(a) Трактория  $X, Y$



(b)  $\nu_1(t), \nu_2(t)$

Рис. 5: Экипаж без роликов. Движение с закруткой ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ ).

Экипаж движется по окружности, равномерно вращаясь вокруг своей оси.

$$\begin{aligned} (\{P_2, P_3\})^* &= \frac{R}{\Lambda} \left( -\cos \theta p_x - \sin \theta p_y - \sum_{k=1}^N R \sin \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = \\ &= -\frac{BR^2}{\Lambda} (R\nu_1 S_1^3 + R\nu_2 S_2^3 + \Lambda^{-1} \nu_3 S_3^3), \end{aligned}$$

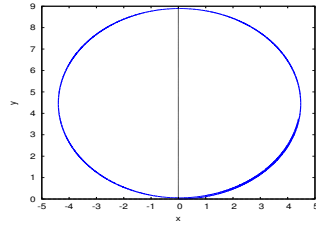
$$S_1^3 = \sum_{k=1}^N \sin \alpha_k \frac{\cos \alpha_k}{\rho_k} \tau_k + \frac{M}{BR}, \quad S_2^3 = \sum_{k=1}^N \sin \alpha_k \frac{\sin \alpha_k}{\rho_k} \tau_k,$$

$$S_3^3 = \sum_{k=1}^N \sin \alpha_k \sin \chi_k \tau_k,$$

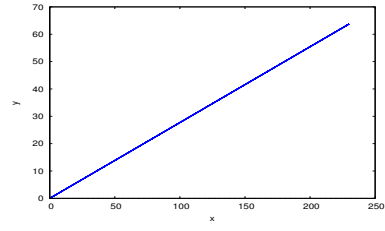
$$\{P_\alpha, P_\beta\} = 0, \quad \alpha, \beta > 3$$

TODO: ДОПИСАТЬ  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha}$

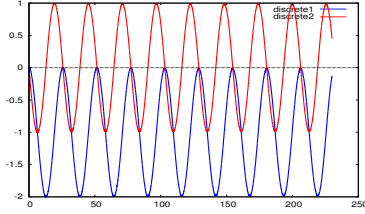
**Результаты расчетов.**



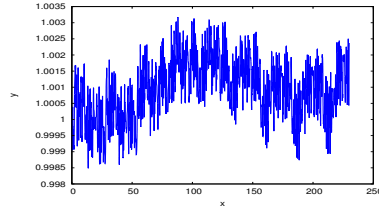
(a) Трактеория  $X, Y$



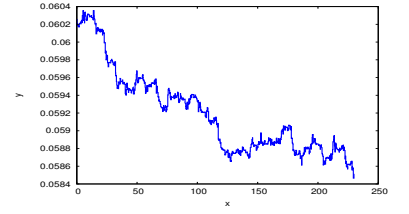
(b)  $\theta(t)$



(c)  $\nu_1(t), \nu_2(t)$

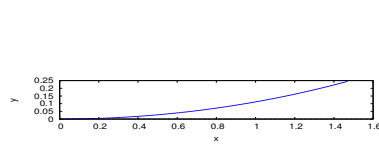


(d)  $\nu_3(t)$

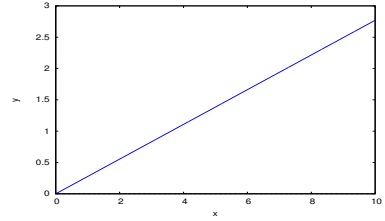


(e) Кинетическая энергия

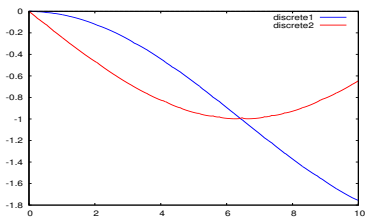
Рис. 6: Экипаж с роликами. Движение с закруткой ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ ). Энергия и псевдоскорости не постоянны.



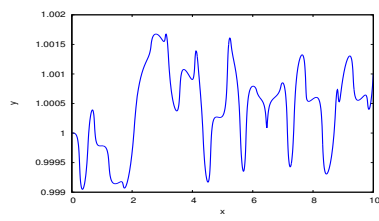
(a) Трактеория  $X, Y$



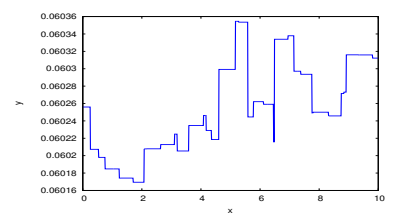
(b)  $\theta(t)$



(c)  $\nu_1(t), \nu_2(t)$



(d)  $\nu_3(t)$



(e) Кинетическая энергия

Рис. 7: Экипаж с роликами. Движение с закруткой ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ ) на коротком промежутке времени. Псевдоскорости не постоянны, виден ступенчатый вид кинетической энергии.