Динамика роликонесущего экипажа с учетом инерции роликов и трения

К.В. Герасимов

Научные руководители:
д.ф.-м.н. И.И. Косенко
к.ф.-м.н. А.А. Зобова

Кафедра теоретической механики и мехатроники
Механико-математический факультет
МГУ им. М.В. Ломоносова

Октябрь 2018

Омни-колеса и экипажи

Обзор

- Формальский, Мартыненко
- Татаринов, Зобова
- Борисов, Килин, Мамаев
- Иностранцы
- Возможно, модели со всеми роликами (например, на `Modelica`) – но имеющие упрощения

Безынерционная модель

Количество твердых тел $1 + N$

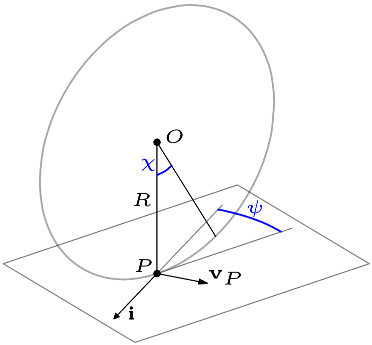


Рис.: Безынерционная модель колеса

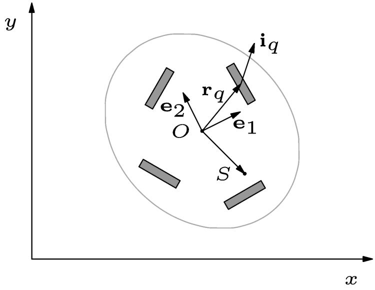


Рис.: Безынерционная модель экипажа

Постановка задачи

- Экипаж состоит из платформы, N колес и n роликов, количество твердых тел:

$$1 + N(n+1)$$

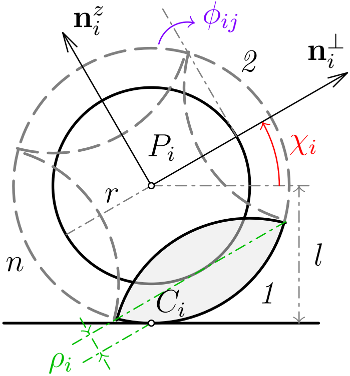


Рис.: Колесо

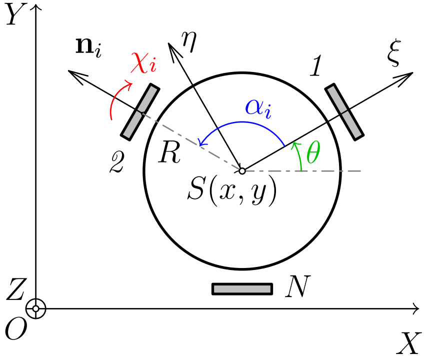


Рис.: Экипаж

Постановка задачи

Координаты, псевдоскорости, связи

- Обобщенные координаты:
  $q = (x, y, \theta, \chi_i, \phi_k, \phi_s)$, где $i, k = 1 \dots N$, s – ролики вне контакта.
- Псевдоскорости:
  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \mathbf{v}_S = R\nu_1\mathbf{e}_\xi + R\nu_2\mathbf{e}_\eta, \nu_3 = \Lambda\dot{\theta}, \nu_s = \dot{\phi}_s$
- Связи:

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos\theta - R\nu_2 \sin\theta, \qquad \dot{y} = R\nu_1 \sin\theta + R\nu_2 \cos\theta,$$

$$\dot{\theta} = \frac{\nu_3}{\Lambda}, \qquad \dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin\alpha_i - \nu_2 \cos\alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}),$$

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{l\cos\chi_k - r}(\nu_1 \cos\alpha_k + \nu_2 \sin\alpha_k), \qquad \dot{\phi}_s = \nu_s$$

Уравнения Я.В. Татаринова

- $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}, \qquad (0.1)$$
  $$\nu_\mu P_\mu = \dot{q}_i p_i, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$
- Лагранжиан и “импульсы” отличаются аддитивными членами:
  $$L^* = \mathring{L}^* + BL^*_\Delta(\nu, \chi)$$
  $$P_\alpha = \mathring{P}_\alpha(\theta, p_x, p_y, p_\chi) + P_\Delta(p_{\phi_i}, \chi)$$

Структура уравнений

Новые слагаемые ($\mathcal{P}_\alpha$ и $\mathcal{M}_i^*$ зависят от χ)

$$
\mathcal{M}^* \dot{\boldsymbol{\nu}} = \frac{MR^2}{\Lambda} \begin{pmatrix} \nu_2 \nu_3 \\ -\nu_1 \nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} -\sin \alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \cos \alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \Lambda^{-1} \mathcal{M}_i^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}
$$

$$
- BR^2 \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu} - B \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \cos \chi_{12} \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_1^* \\ \vdots \\ \cos \chi_{Nn} \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_N^* \end{pmatrix}
$$

Структура уравнений

Свойства

1. Интеграл энергии $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathcal{M}^*(\chi_i)\boldsymbol{\nu} = h = \mathrm{const}$ (связи автономны, идеальны, силы консервативны)
2. $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu_s = \mathrm{const}$
3. $B = 0 \quad \Longrightarrow$ уравнения как в безынерционной модели.
4. Интеграл $m_{33}^*\nu_3 = \mathrm{const}$ разрушается при $B \neq 0$. $\dot{\nu}_3 \sim B$.
5. Первые интегралы:

$$\nu_s + \frac{1}{\Lambda}\sin\chi_{ij}\nu_3 = const.$$

   Вращение $\nu_1(0) = 0, \nu_2(0) = 0, \nu 3(0) \neq 0$ неравномерно.

6. Замена псевдоскоростей $\boldsymbol{\nu} \to \lambda\boldsymbol{\nu}, \lambda \neq 0$ эквивалентна замене времени $t \to \lambda t$.

Смена ролика

(1) Уравнения вырождаются на стыках роликов:

разрыв 2ого рода в правой части из-за выражений $(l\cos\chi_i - r)$ *в знаменателе.*

Пусть переход на следующий ролик будет раньше стыка.

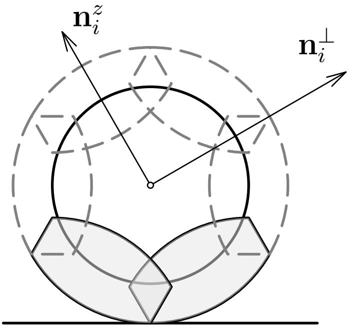


Рис.: Ролики перекрываются

Смена ролика

(2) Ролики входят и выходят из состояния контакта при $t = t^*$.

Происходит мгновенное снятие связи с одного ролика и наложение связи на другой.

Пусть:

- $\Delta t << 1, \quad \Delta \mathbf{q} \sim \dot{\mathbf{q}} \Delta t << 1, \quad \Delta \dot{\mathbf{q}} < \infty,$
- в точках контакта: $\quad \mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{F},$
- к моменту окончания удара $t^* + \Delta t$ уравнения связей выполнены ($\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}^+$)
- верно основное уравнение удара $\quad \mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{Q}$
- связи идеальны $\quad \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}^+ = 0$

Независимое нахождение обобщенных скоростей

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \dot{\mathbf{q}}^- - \Delta\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ \in \widetilde{V}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta\dot{\mathbf{q}},\ \mathbf{MV}) \\ &= \left(\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-,\ \mathbf{MV}\right) \\ &= \left(\mathbf{MV}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-,\ \mathbf{V}\right) \\ &= \mathbf{V}^T\mathbf{MV}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{V}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^- \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\nu}^+ = \left(\mathbf{V}^T\mathbf{MV}\right)^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-$$

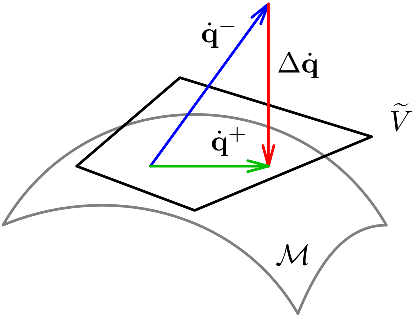


Рис.: $\dot{\mathbf{q}}^+$ – проекция $\dot{\mathbf{q}}^-$ на $\widetilde{V}$, ортогональная в метрике $\mathbf{M}$

Значения параметров

И ЗДЕСЬ ЖЕ ПОКАЗАТЬ ВАРИАНТЫ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ – РИСУНКИ

- радиус колеса $r = 0.05$,
- масса колеса $M_{\text{к}} = 0.15$,
- масса ролика $m_{\text{рол}} = 0.05$,
- радиус платформы $R = 0.15$,
- масса платформы $M_{\text{пл}} = 1$.

Вращение вокруг своей оси ($\nu_{1,2}(0) = 0, \nu_3 = 1$).

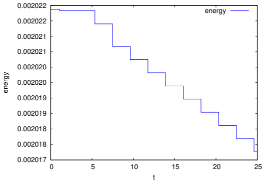


Рис.: Кинетическая энергия

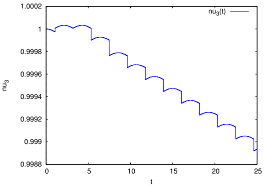


Рис.: Угловая скорость экипажа

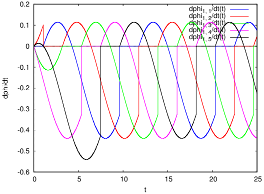


Рис.: Угловые скорости роликов

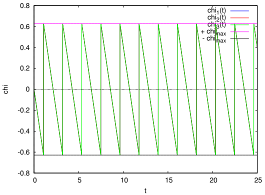


Рис.: Углы поворота колес

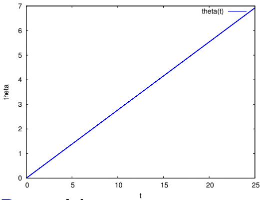


Рис.: Угол поворота экипажа

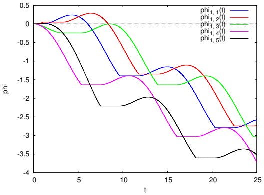


Рис.: Углы поворота роликов

Движение по прямой ($\nu_1(0) = 1, \nu_{2,3} = 0$).

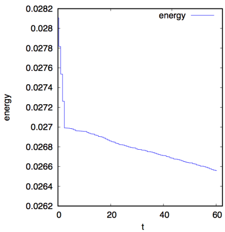


Рис.: Кинетическая энергия

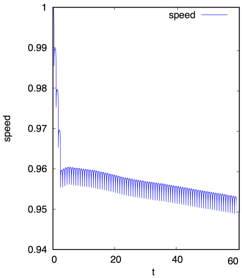


Рис.: Скорость центра масс

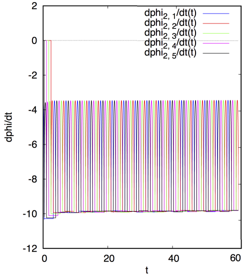


Рис.: $\dot{\phi}$ на заднем колесе

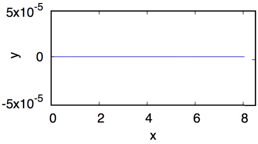


Рис.: Траектория

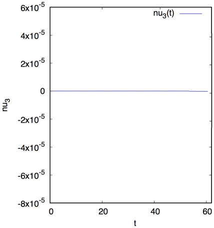


Рис.: Угловая

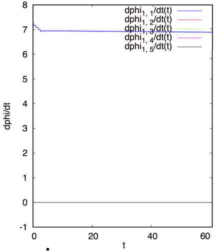


Рис.: $\dot{\phi}$ на переднем

Движение с закруткой $(\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1)$.

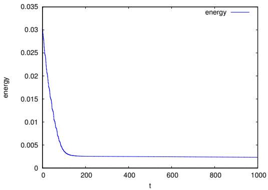


Рис.: Кинетическая энергия

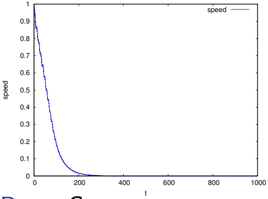


Рис.: Скорость центра масс

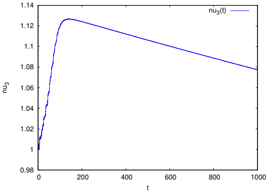


Рис.: Угловая скорость экипажа

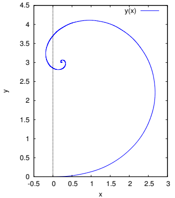


Рис.: Траектория

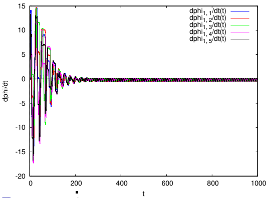


Рис.: $\dot{\phi}$ на первом колесе

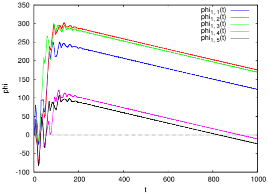


Рис.: углыϕ на первом колесе

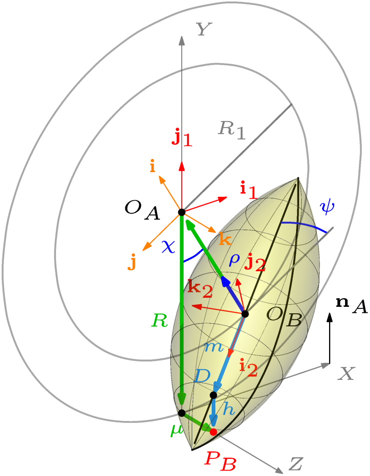
Модели контакта

- Трение
  - Вязкое
  - Регуляризованное сухое
-
  - Модульная структура
  - Нужен формализм

Подход

- Избыточные координаты (не лагранжевы)
  - для каждого твердого тела 6 ОДУ Ньютона для ц.м. и 7 ОДУ Эйлера (4 кин.ур. для кватерниона и 3 дин.ур. для ω)
  - всего 208 ОДУ плюс дополнительные дифференциальные уравнения, задаваемые связями
- Система уравнений
  - Уравнения Ньютона-Эйлера для каждого тела
  - Уравнения связей
  - Модель контактных сил
- Формализм языка `Modelica`

Отслеживание контакта



$$\mathbf{r}_{P_B} = \mathbf{r}_{O_B} + R_1\boldsymbol{\rho} - R\mathbf{j}_1 + \mu\mathbf{k}_1,$$

$$\mathbf{r}_{P_B} = \mathbf{r}_{O_B} + \overrightarrow{O_B D} + \overrightarrow{DP_B}$$

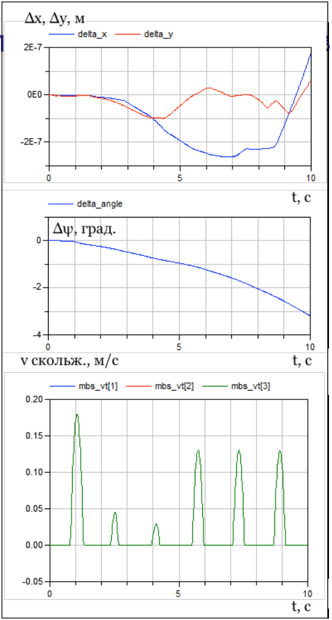
$$\overrightarrow{O_B D} = -m\mathbf{i}_2, \quad \overrightarrow{DP_B} = -h\mathbf{j}_1,$$

$$m = R_1 \sin\chi / \cos\chi / \cos\psi$$

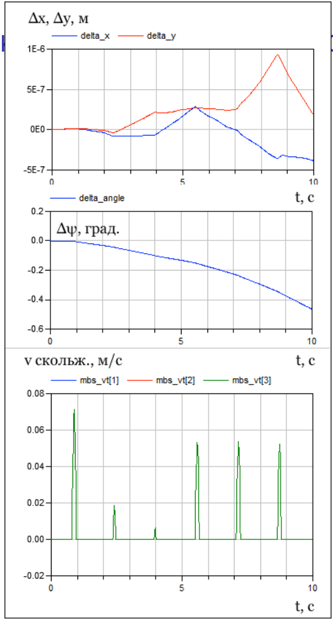
$$h = R - R_1 / \cos\chi$$

$$\cos\chi = \boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{n}_A, \quad \sin\chi = (\mathbf{n}_A \times \boldsymbol{\rho})\cdot\mathbf{k}_1.$$

Верифи ок си

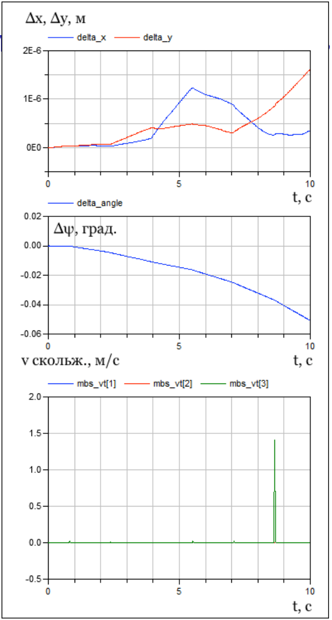


$\eta = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

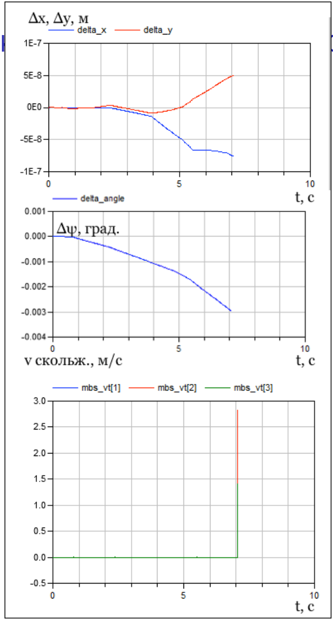


$\eta = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

Верифи ... ок ... си

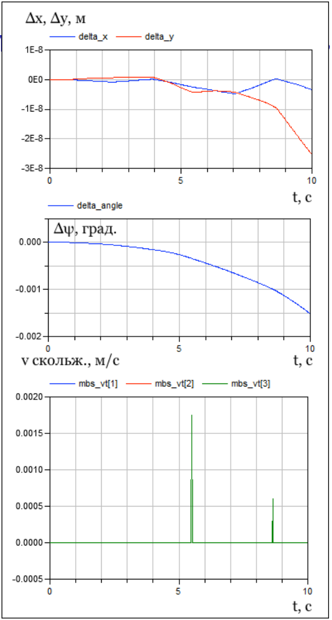


$\eta = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

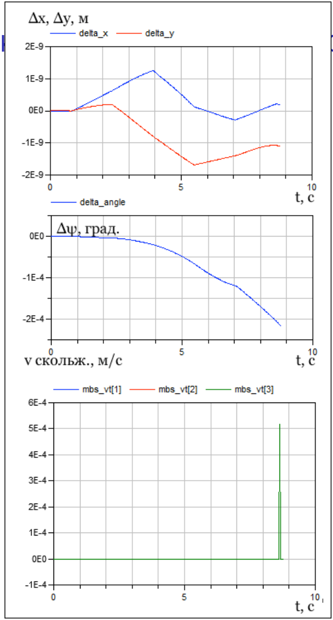


$\eta = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

Верифи … ок … си

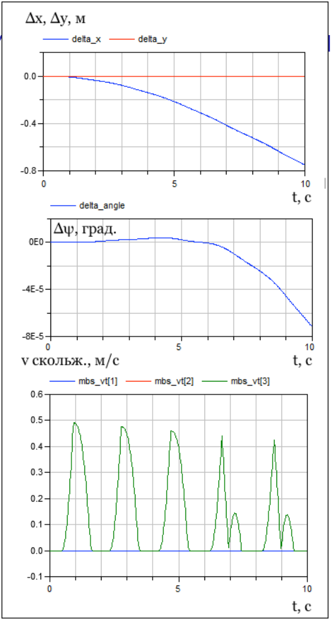


$\eta = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

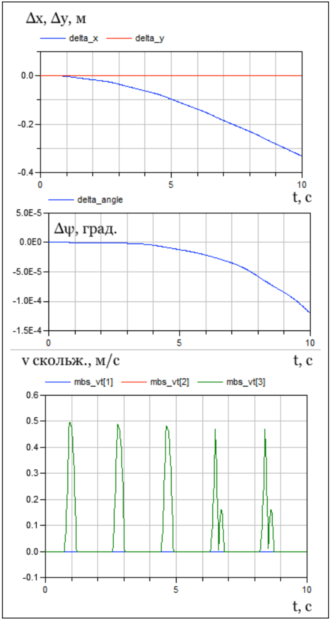


$\eta = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

Верифи… …но

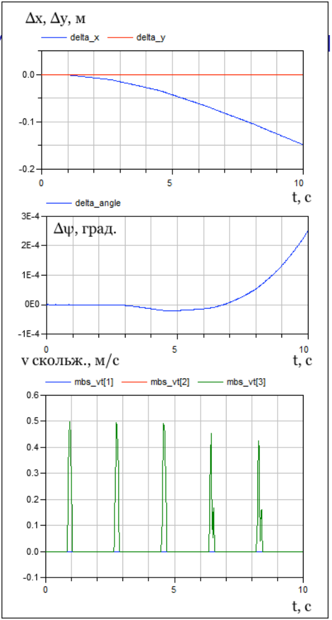


$\eta = 0,001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$

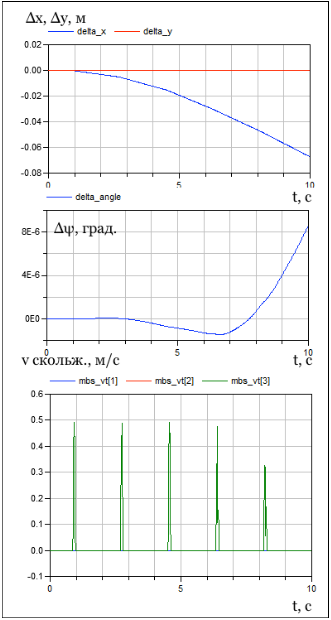


$\eta = 0,0001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$

Верифи… ю



$\eta = 0,001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$



$\eta = 0,0001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$

Подход

- Построены модели омни-экипажа: неголономная с идеальными связями и голономная с неидеальными. Обе модели учитывают инерцию роликов.
- В модели 1 уравнения движения на гладких участках получены аналитически и представляют собой уравнения 33 порядка для экипажа с 3 колесами и 5 роликами на каждом колесе. Расчет изменения обобщенных скоростей проведен с помощью теории удара.
- Аналитически показано, что при равенстве осевого момента инерции ролика нулю, уравнения движения совпадают с уравнениями движения безынерционной модели.
- Показано, что линейный первый интеграл, безынерционной модели, разрушается при $B0$. Скорость изменения значения этого интеграла пропорциональна осевому