Динамика роликонесущего экипажа с учетом инерции роликов и трения

К.В. Герасимов

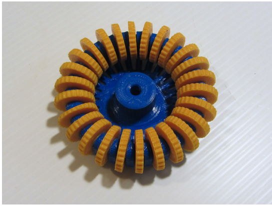
Научные руководители:
д.ф.-м.н. И.И. Косенко
к.ф.-м.н. А.А. Зобова

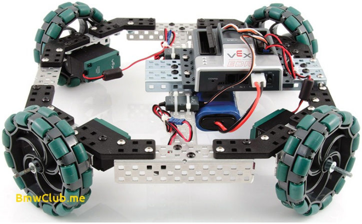
Кафедра теоретической механики и мехатроники
Механико-математический факультет
МГУ им. М.В. Ломоносова

Сентябрь 2018

Об омни-колесах

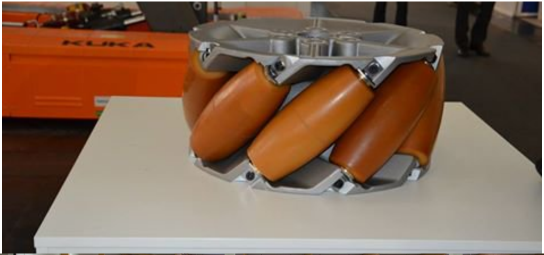
Оси роликов параллельны плоскости колеса





Об омни-колесах

Оси роликов под углом к плоскости колеса (Mecanum)



1. Уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов

- Постановка задачи
- Уравнения движения в форме Я.В. Татаринова
- Свойства и сравнение с безынерционной моделью

2. Смена ролика в контакте колеса и опорной плоскости

- Основное уравнение теории удара
- Изменение энергии
- Численное решение

3. Динамика экипажа с трением

- Построение и верификация модели

Постановка задачи

Рисунки

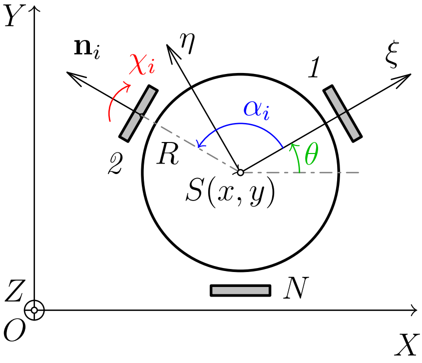


Рис.: Экипаж

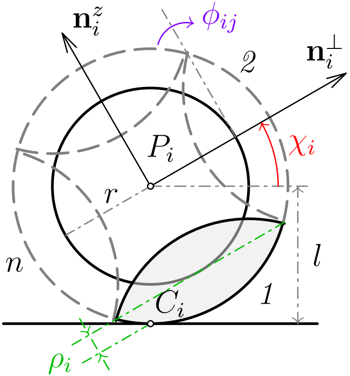


Рис.: Колесо

Постановка задачи

Тела, связи, степени свободы

- Экипаж состоит из платформы, N колес и n роликов, количество твердых тел:

$$1 + N(n + 1)$$

- Оси и центры колес и роликов неподвижны относительно платформы и колес соответственно
- Скорость точек контакта равна нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, i = 1 \dots N$$

- Количество степеней свободы:

$$3 + N(n - 1)$$

Постановка задачи

Координаты, псевдоскорости, связи

- Обобщенные координаты:
  $q = (x, y, \theta, \chi_i, \phi_k, \phi_s)$, где $i, k = 1 \dots N$, s – ролики вне контакта.
- Псевдоскорости:
  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \mathbf{v}_S = R\nu_1 \mathbf{e}_\xi + R\nu_2 \mathbf{e}_\eta, \nu_3 = \Lambda\dot{\theta}, \nu_s = \dot{\phi}_s$
- Связи:

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos\theta - R\nu_2 \sin\theta, \qquad \dot{y} = R\nu_1 \sin\theta + R\nu_2 \cos\theta,$$

$$\dot{\theta} = \frac{\nu_3}{\Lambda}, \qquad \dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin\alpha_i - \nu_2 \cos\alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}),$$

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{l\cos\chi_k - r}(\nu_1 \cos\alpha_k + \nu_2 \sin\alpha_k), \qquad \dot{\phi}_s = \nu_s$$

Кинетическая энергия и лагранжиан

- Присутствует слагаемое, пропорциональное B – моменту инерции ролика относительно его оси собственного вращения:

$$2T = 2L = M\mathbf{v}_S^2 + I_S\dot{\theta}^2 + J\sum_i \dot{\chi}_i^2 +$$

$$+B\sum_{i,j}(\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta}\sin(\kappa_j + \chi_i)\dot{\phi}_{ij}),$$

$$M = \mathring{M} + Nnm$$

$$I_S = \mathring{I}_S + N\cdot n(\frac{A+B}{2} + mR^2 + \frac{mr^2}{2}),$$

$$J = \mathring{J} + n(A + mr^2)$$

Кинетическая энергия и лагранжиан

- С учетом связей:

$$2L^* = \mathring{\nu}^T \mathring{V}^T \mathring{M} \mathring{V} \mathring{\nu} +$$

$$+B \sum_i \Big(\frac{(\nu_2 \sin\alpha_i + \nu_1 \cos\alpha_i)^2 R^2}{\rho_i^2} +$$

$$+ \frac{2R\nu_3(\nu_2 \sin\alpha_i + \nu_1 \cos\alpha_i) \sin\chi_i}{\rho_i \Lambda} \Big)$$

$$+B \sum_{i,j} \Big(\frac{2\nu_3 \nu_{ni+j} \sin(\kappa_j + \chi_i)}{\Lambda} + \nu_{ni+j}^2 \Big)$$

где $\frac{1}{2}\mathring{\nu}^T \mathring{V}^T \mathring{M} \mathring{V} \mathring{\nu}$ – лагранжиан системы без роликов,
$\rho_i = l \cos\chi_i - r$

Кинетическая энергия и лагранжиан

Матрицы кинетической энергии и связей для системы без роликов

$$\mathring{M} = diag(M, M, I_S, J \ldots J),$$

$$\mathring{V} = \begin{bmatrix} R\cos\theta & -R\sin\theta & 0 \\ R\sin\theta & R\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} \\ \frac{R}{l}\sin\alpha_i & -\frac{R}{l}\cos\alpha_i & -\frac{R}{l\Lambda} \end{bmatrix}$$

Структура уравнений

Отличие от случая без роликов

- Уравнения Я.В. Татаринова:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}, \tag{1.1}$$

$$\nu_\mu P_\mu = \dot{q}_i p_i, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

- Лагранжиан и “импульсы” отличаются аддитивными членами:

$$L^* = \mathring{L}^* + BL^*_\Delta(\nu, \chi)$$

$$P_\alpha = \mathring{P}_\alpha(\theta, p_x, p_y, p_\chi) + P_\Delta(p_{\phi_i}, \chi)$$

Структура уравнений

Матрица лагранжиана

Лагранжиан с учетом связей имеет вид:

$$2L^* = \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} V^{\mathrm{T}} \mathcal{M} V \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} \mathcal{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu}$$

Структура симметричной матрицы $\mathcal{M}^*$ следующая:

$$\mathcal{M}^* = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & m^*_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}_{3\times 3} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ B\Lambda^{-1}\sin\chi_{12} & \dots & B\Lambda^{-1}\sin\chi_{nN} \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} B & & \\ & \ddots & \\ & & B \end{matrix} \\ * & \end{bmatrix}$$

Структура уравнений

Слагаемые для свободных роликов

Первое слагаемое (1.1) получается дифференцированием лагранжиана и подстановкой связей (ниже $\mathcal{M}_i^* = \dfrac{\partial \mathcal{M}^*}{\partial \chi_i}$):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} = \frac{d}{dt}(\mathcal{M}^*(\chi)\boldsymbol{\nu}_\alpha) = \mathcal{M}^*(\chi_i)\dot{\boldsymbol{\nu}}_\alpha + \left(\sum_{i=1}^{N} \mathcal{M}_i^*(V\nu)_{3+i}\boldsymbol{\nu}\right)_\alpha,$$

Слагаемые, соответствующие свободным роликам:

$$\frac{\cos\chi_{ij}\nu_3 B\left(-\dfrac{\nu_3 R}{l\Lambda} - \dfrac{\cos\alpha_i\nu_2 R}{l} + \dfrac{\sin\alpha_i\nu_1 R}{l}\right)}{\Lambda} = \frac{B}{\Lambda}\cos\chi_{ij}(\dot{\chi}_i)^*\nu_3.$$

Структура уравнений

Детали

Формальные импульсы P_α и скобки Пуассона L^* с ними:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= R\left(p_x\cos\theta + p_y\sin\theta + \sum_i\left(\frac{\sin\alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\cos\alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i}\right)\right),\\
P_2 &= R\left(-p_x\sin\theta + p_y\cos\theta + \sum_i\left(-\frac{\cos\alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\sin\alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i}\right)\right),\\
P_3 &= \frac{1}{\Lambda}\left(p_\theta - \sum_i \frac{R}{l}p_{\chi_i}\right), \quad P_s p_{\phi_s},
\end{aligned}
$$

$$
\{P_1, L^*\} = -\frac{\partial P_1}{\partial p_{\chi_i}}\frac{\partial L^*}{\partial \chi_i} = -\frac{R}{2l}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\sin\alpha_i\mathcal{M}_i^*\boldsymbol{\nu},
$$

$$
\{P_2, L^*\} = \frac{R}{2l}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\cos\alpha_i\mathcal{M}_i^*\boldsymbol{\nu},\ \{P_3, L^*\} = \frac{R}{2l\Lambda}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathcal{M}_i^*\boldsymbol{\nu}, \quad \{P_s, L^*\} = 0,
$$

Суммы $\{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\} \neq 0$ лишь для первых трех уравнений.

Уравнения движения

в форме Я.В. Татаринова

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}$$

$$\nu_\mu P_\mu = \dot{q}_i p_i, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$L^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}^*(\chi_i)\boldsymbol{\nu}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{M}}_{11} & O_{3\times N} & \widetilde{\mathbf{M}}_{13} \\ & JE_{N\times N} & O_{N\times Nn} \\ \star & & BE_{Nn\times Nn} \end{bmatrix} \\
\widetilde{\mathbf{M}}_{11} &= \operatorname{diag}(M, M, I_S) \\
\widetilde{\mathbf{M}}_{13} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ B\sin\chi_{11} & \cdots & B\sin\chi_{Nn} \end{bmatrix} \\
\mathring{V} &= \begin{bmatrix} R\cos\theta & -R\sin\theta & 0 \\ R\sin\theta & R\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} \\ \frac{R}{l}\sin\alpha_i & -\frac{R}{l}\cos\alpha_i & -\frac{R}{l\Lambda} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Структура уравнений

Новые слагаемые ($\mathcal{P}_\alpha$ и $\mathcal{M}_i^*$ зависят от χ)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^*\dot{\boldsymbol{\nu}} \quad &= \quad \frac{MR^2}{\Lambda}\begin{pmatrix} \nu_2\nu_3 \\ -\nu_1\nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{R}{2l}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} -\sin\alpha_i\mathcal{M}_i^* \\ \cos\alpha_i\mathcal{M}_i^* \\ \Lambda^{-1}\mathcal{M}_i^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{\nu} \\
&- \quad BR^2\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{\nu} \;-\; B\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \cos\chi_{12}\dfrac{\nu_3}{\Lambda}\dot{\chi}_1^* \\ \vdots \\ \cos\chi_{Nn}\dfrac{\nu_3}{\Lambda}\dot{\chi}_N^* \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Структура уравнений

Свойства

1. Интеграл энергии $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathcal{M}^*(\chi_i)\boldsymbol{\nu} = h = \mathrm{const}$ (связи автономны, идеальны, силы консервативны)
2. $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu_s = \mathrm{const}$
3. $B = 0 \quad \Longrightarrow$ уравнения как в безынерционной модели.
4. Интеграл $m^*_{33}\nu_3 = \mathrm{const}$ разрушается при $B \neq 0$. $\dot{\nu}_3 \sim B$.
5. Первые интегралы:

$$\nu_s + \frac{1}{\Lambda}\sin\chi_{ij}\nu_3 = const.$$

   Вращение $\nu_1(0) = 0, \nu_2(0) = 0, \nu 3(0) \neq 0$ неравномерно.
6. Замена псевдоскоростей $\boldsymbol{\nu} \to \lambda\boldsymbol{\nu}, \lambda \neq 0$ эквивалентна замене времени $t \to \lambda t$.

Смена ролика

(1) Уравнения вырождаются на стыках роликов:

разрыв 2ого рода в правой части из-за выражений $(l\cos\chi_i - r)$ *в знаменателе.*

Пусть переход на следующий ролик будет раньше стыка.

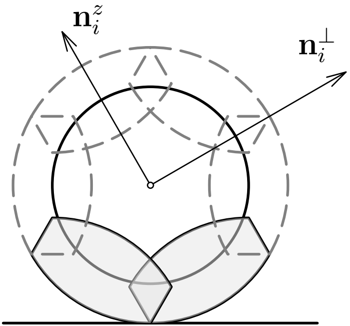


Рис.: Ролики перекрываются

Смена ролика

(2) Ролики входят и выходят из состояния контакта при $t = t^*$.

Происходит мгновенное снятие связи с одного ролика и наложение связи на другой.

Пусть:

- $\Delta t << 1, \quad \Delta \mathbf{q} \sim \dot{\mathbf{q}} \Delta t << 1, \quad \Delta \dot{\mathbf{q}} < \infty,$
- в точках контакта: $\quad \mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{F},$
- к моменту окончания удара $t^* + \Delta t$ уравнения связей выполнены ($\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\nu}^+$)
- верно основное уравнение удара $\quad \mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{Q}$
- связи идеальны $\quad \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}^+ = 0$

1. Уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов

Постановка задачи

Уравнения движения в форме Я.В. Татаринова

Свойства и сравнение с безынерционной моделью

2. Смена ролика в контакте колеса и опорной плоскости

Основное уравнение теории удара

Изменение энергии

Численное решение

3. Динамика экипажа с трением

Построение и верификация модели

Основное уравнение теории удара

Линейная система алгебраических уравнений на реакции и скорости после удара

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}^{+} - \dot{\mathbf{q}}^{-}) = \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}^{+} = 0, \quad \mathbf{Q}^{T}\delta\mathbf{q}^{+} = 0$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^{T}\mathbf{F}, \;\; \dot{\mathbf{q}}^{+} = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^{+}, \;\; \mathbf{AV} = 0$$

$$\mathbf{MV}\boldsymbol{\nu}^{+} - \mathbf{A}^{T}\mathbf{F} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^{-}$$

$$(\boldsymbol{\nu}^{+}; \mathbf{F})^{T} = \left(\mathbf{MV}; \; -\mathbf{A}^{T}\right)^{-1}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^{-}$$

$$\begin{aligned}
\dim \mathbf{MV} &= \dim \mathbf{q} \times \dim \boldsymbol{\nu} \\
\dim \mathbf{A}^{T} &= \dim \mathbf{q} \times \dim \mathbf{F} \\
\dim \mathbf{q} &= 3 + N(n+1) \\
\dim \boldsymbol{\nu} &= 3 + N(n-1) \\
\dim \mathbf{F} &= 2N
\end{aligned}$$

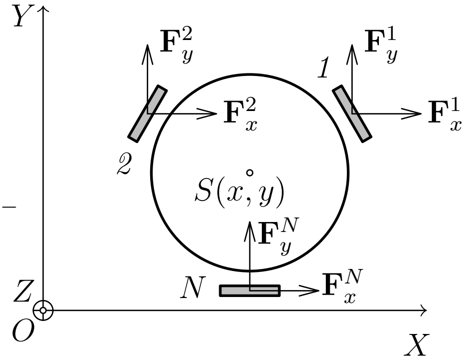


Рис.: Касательные реакции в точках контакта

Основное уравнение теории удара

Ударные обобщенные импульсы и реакции

$$\mathbf{Q} = \left(\; Q_1, \;\; Q_2, \;\; Q_\theta, \;\; Q_{\chi_i}|_{i=1}^N, \;\; Q_{\phi_i}|_{i=1}^N, \;\; Q_s \; \right)^T$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \sum_{i=1}^{N} F_i^x \\
Q_2 &= \sum_{i=1}^{N} F_i^y \\
Q_\theta &= \sum_{i=1}^{N} Q_\theta^i \;=\; \sum_{i=1}^{N} R\left(-F_i^x \sin(\theta+\alpha_i) + F_i^y \cos(\theta+\alpha_i)\right) \\
Q_{\chi_i} &= \frac{I}{R} Q_\theta^i \\
Q_{\phi_i} &= -\rho_i \left(F_i^x \cos(\theta+\alpha_i) + F_i^y \sin(\theta+\alpha_i)\right) \\
Q_s &= 0
\end{aligned}$$

Независимое нахождение обобщенных скоростей

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \dot{\mathbf{q}}^- - \Delta\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ \in \widetilde{V}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\Delta\dot{\mathbf{q}},\ \mathbf{M}\mathbf{V}\right) \\ &= \left(\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-,\ \mathbf{M}\mathbf{V}\right) \\ &= \left(\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-,\ \mathbf{V}\right) \\ &= \mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{V}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^- \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\nu}^+ = \left(\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V}\right)^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-$$

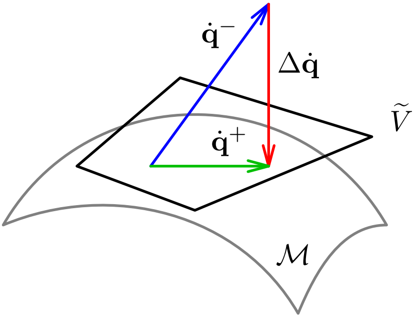


Рис.: $\dot{\mathbf{q}}^+$ – проекция $\dot{\mathbf{q}}^-$ на $\widetilde{V}$, ортогональная в метрике $\mathbf{M}$

Нахождение обобщенных скоростей и ударных реакций

Основное уравнение удара $\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{Q}$

Дифференциальные связи $\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}^+ = 0$

Условие идеальности связей $\mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}^+ = 0$

Система разрешима относительно $(\boldsymbol{\nu}^+; \mathbf{F})^T$

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{A}^T\mathbf{F} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-$$

Скорости находятся независимо от сил $(\mathbf{V}^T \cdot)$

$$\boldsymbol{\nu}^+ = \left(\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V}\right)^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-$$

Скорости находятся независимо от сил $(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1} \cdot)$

$$\mathbf{F} = -\left(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}^-$$

Изменение энергии

Соответствует теореме Карно

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}},\ \ \dot{\mathbf{q}}\right), \quad \dot{\mathbf{q}}^{+} = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^{+}$$

В силу идеальности связей:

$$\left(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^{+},\ \ \Delta\dot{\mathbf{q}}\right) = \left(\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}},\ \ \dot{\mathbf{q}}^{+}\right) = \left(\mathbf{Q},\ \ \dot{\mathbf{q}}^{+}\right) = 0$$

Поэтому:

$$\Delta\mathbf{T} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}},\ \ \Delta\dot{\mathbf{q}}\right) \leq 0$$

$$\begin{aligned} 2\Delta\mathbf{T} &= 2\left(\mathbf{T}^{+} - \mathbf{T}^{-}\right) = \left(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^{+},\ \ \dot{\mathbf{q}}^{+}\right) - \left(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^{-},\ \ \dot{\mathbf{q}}^{-}\right) \\ &= \left(\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}},\ \ \Delta\dot{\mathbf{q}}\right) + 2\left(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^{-},\ \ \Delta\dot{\mathbf{q}}\right) \\ &= -\left(\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}},\ \ \Delta\dot{\mathbf{q}}\right) + 2\left(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^{+},\ \ \Delta\dot{\mathbf{q}}\right) = -\left(\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}},\ \ \Delta\dot{\mathbf{q}}\right) \end{aligned}$$

Значения параметров

- радиус колеса $r = 0.05$,
- масса колеса $M_{\text{к}} = 0.15$,
- масса ролика $m_{\text{рол}} = 0.05$,
- радиус платформы $R = 0.15$,
- масса платформы $M_{\text{пл}} = 1$.

Вращение вокруг своей оси $(\nu_{1,2}(0) = 0, \nu_3 = 1)$.

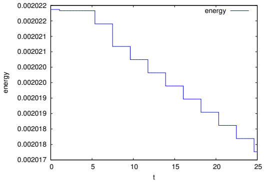


Рис.: Кинетическая энергия

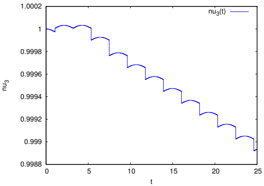


Рис.: Угловая скорость экипажа

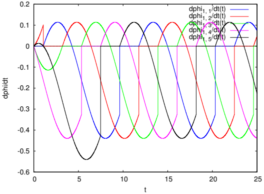


Рис.: Угловые скорости роликов

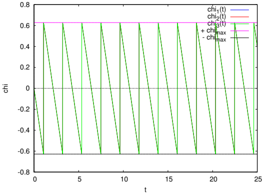


Рис.: Углы поворота колес

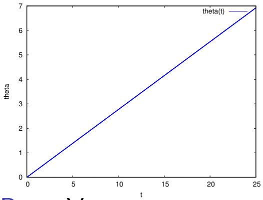


Рис.: Угол поворота экипажа

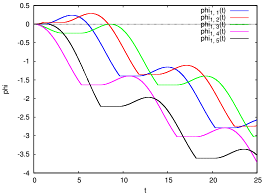


Рис.: Углы поворота роликов

Движение по прямой ($\nu_1(0) = 1, \nu_{2,3} = 0$).

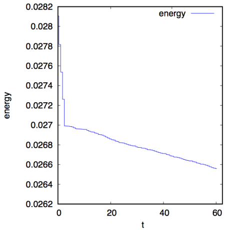


Рис.: Кинетическая энергия

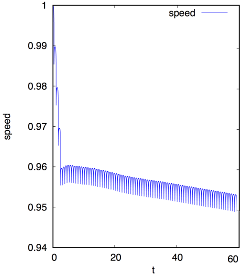


Рис.: Скорость центра масс

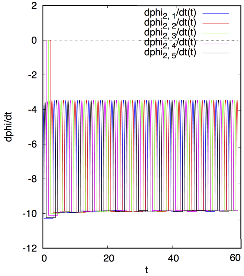


Рис.: $\dot{\phi}$ на заднем колесе

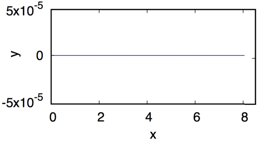


Рис.: Траектория

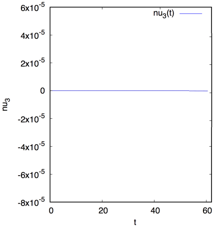


Рис.: Угловая

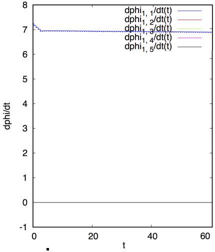


Рис.: $\dot{\phi}$ на переднем

Движение с закруткой $(\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1)$.

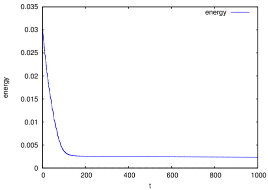


Рис.: Кинетическая энергия

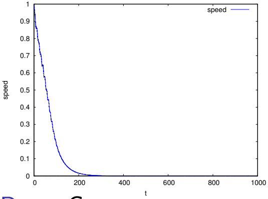


Рис.: Скорость центра масс

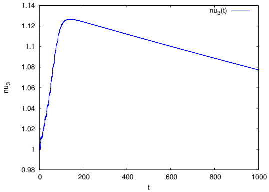


Рис.: Угловая скорость экипажа

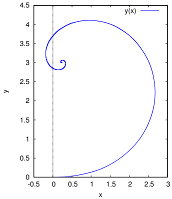


Рис.: Траектория

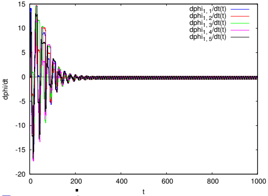


Рис.: $\dot{\phi}$ на первом колесе

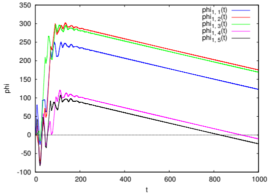


Рис.: углыϕ на первом колесе

1. Уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов
   - Постановка задачи
   - Уравнения движения в форме Я.В. Татаринова
   - Свойства и сравнение с безынерционной моделью

2. Смена ролика в контакте колеса и опорной плоскости
   - Основное уравнение теории удара
   - Изменение энергии
   - Численное решение

3. Динамика экипажа с трением
   - Построение и верификация модели

Динамика отдельного ролика

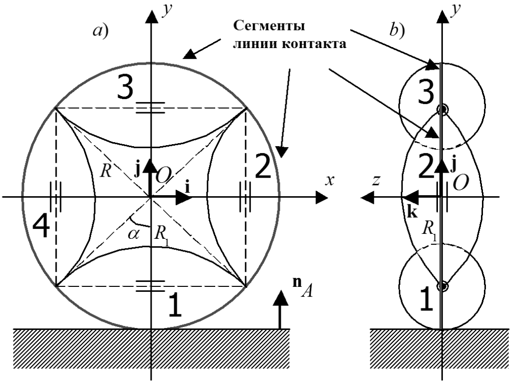


Рис.: Омни-колесо в вертикальном положении: a) вид сбоку; b) вид спереди.

$$x^2 + \left(\sqrt{y^2 + z^2} + R_1\right)^2 = R^2$$

Отслеживание контакта

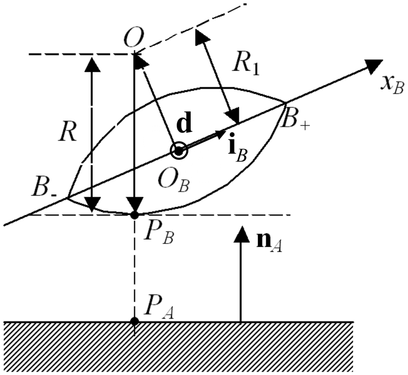


Рис.: Схема отслеживания контакта: вид сбоку отдельного ролика.

$$\mathbf{d} = \frac{T_B \mathbf{i}_B \times \mathbf{n}_A}{|T_B \mathbf{i}_B \times \mathbf{n}_A|}$$

$$\overrightarrow{O_B O} = R_1 \mathbf{d} \times T_B \mathbf{i}_B$$

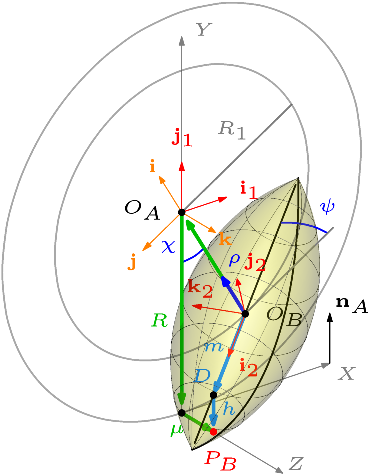
$$\mathbf{r}_{P_B} = \mathbf{r}_B + R_1 \mathbf{d} \times T_B \mathbf{i}_B - R\mathbf{n}_A$$

$$\mathbf{r}_{P_A} = (x_{P_B}, 0, z_{P_B})^T$$

$$|T_B \mathbf{i}_B \cdot \mathbf{n}_A| \leq \sin\alpha$$

$$y_B < R, \quad y_{P_B} = 0, \quad F_n = 0$$

Отслеживание контакта – *mecanum*



Неявный алгоритм

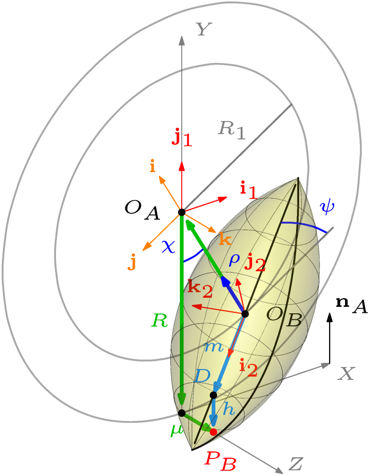
$$\mu = \left[R\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - R_1\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{k}_2\right] / \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2,$$

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{i}_2 = 0, \quad \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{k}_1 = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{i}_2 + \boldsymbol{\rho} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{i}_2 = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{k}_1 + \boldsymbol{\rho} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{k}_1 = 0,$$

Отслеживание контакта – *mecanum*



Явный алгоритм

$$\mathbf{r}_{P_B} = \mathbf{r}_{O_B} + R_1\boldsymbol{\rho} - R\mathbf{j}_1 + \mu\mathbf{k}_1,$$

$$\mathbf{r}_{P_B} = \mathbf{r}_{O_B} + \overrightarrow{O_B D} + \overrightarrow{DP_B}$$

$$\overrightarrow{O_B D} = -m\mathbf{i}_2, \quad \overrightarrow{DP_B} = -h\mathbf{j}_1,$$

$$m = R_1 \sin\chi / \cos\chi / \cos\psi$$

$$h = R - R_1 / \cos\chi$$

$$\cos\chi = \boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{n}_A, \quad \sin\chi = (\mathbf{n}_A \times \boldsymbol{\rho})\cdot\mathbf{k}_1.$$

Структура динамической модели

- сухое трение, регуляризованное в окрестности $\mathbf{v} = 0$ линейной функцией насыщения
- твердое тело платформы, 3 твердых тела колес, 12 твердых тел роликов
- для каждого твердого тела 6 ОДУ Ньютона для ц.м. и 7 ОДУ Эйлера (4 кин.ур. для кватерниона и 3 дин.ур. для ω)
- всего 208 ОДУ плюс дополнительные дифференциальные уравнения, задаваемые связями

Верификация

Модель для сравнения

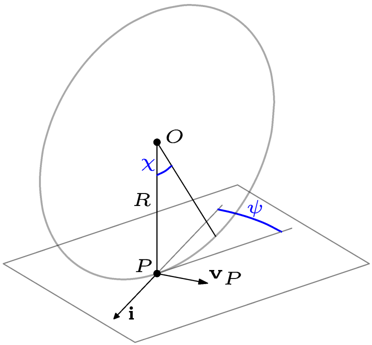


Рис.: Безынерционная модель колеса

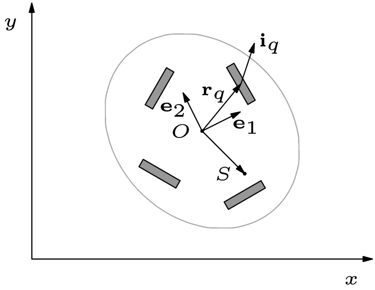


Рис.: Безынерционная модель экипажа

Верификация

Варианты движений

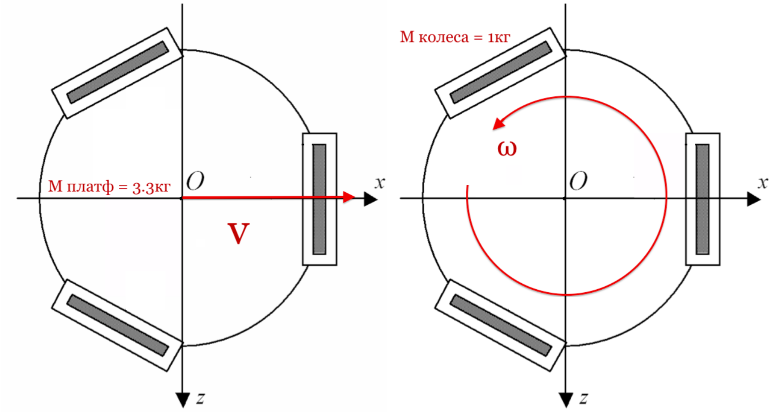
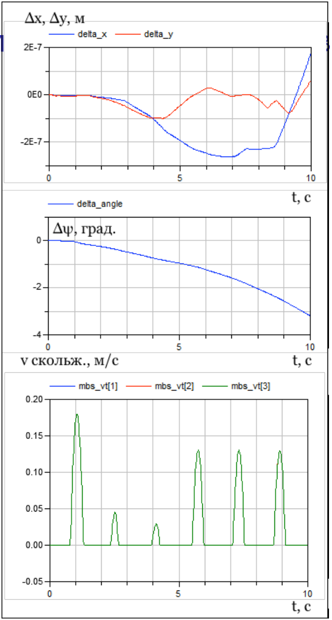


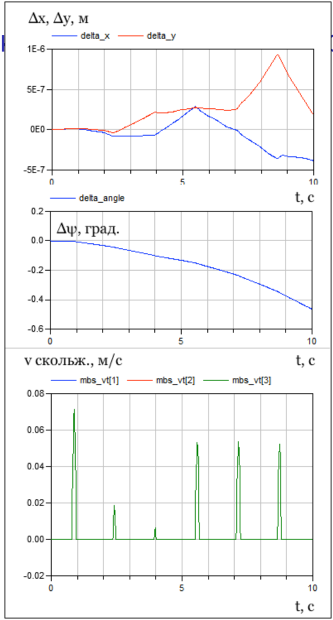
Рис.: Параметры экспериментов

испытания – при $\sum m_{\text{рол}} \to 0$

Верифи ок си

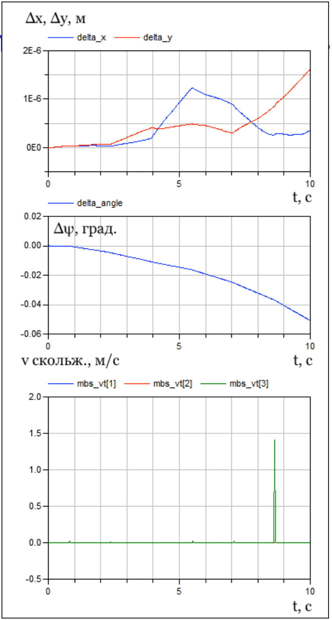


$\eta = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

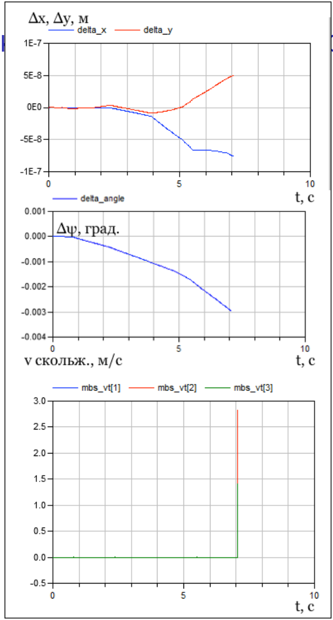


$\eta = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

Верифи … о … си

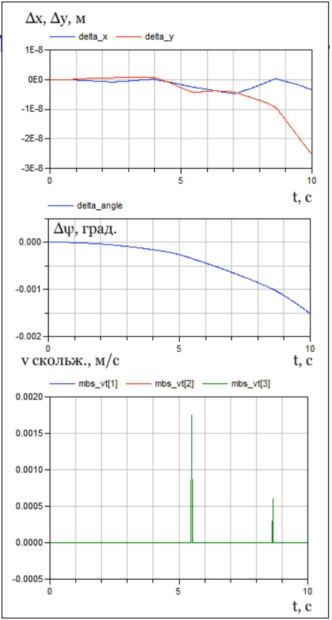


$\eta = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

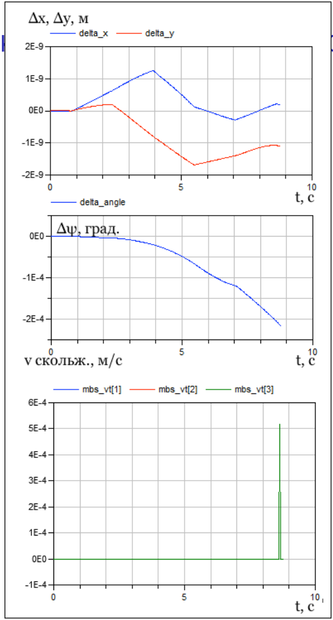


$\eta = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

Верифи… ок… си

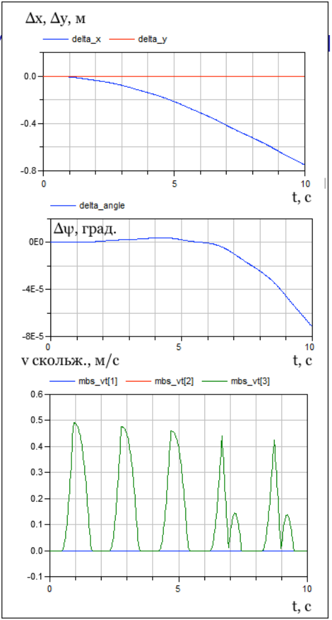


$\eta = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

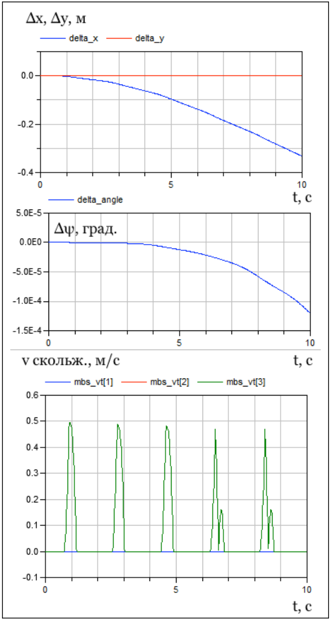


$\eta = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

Верифи

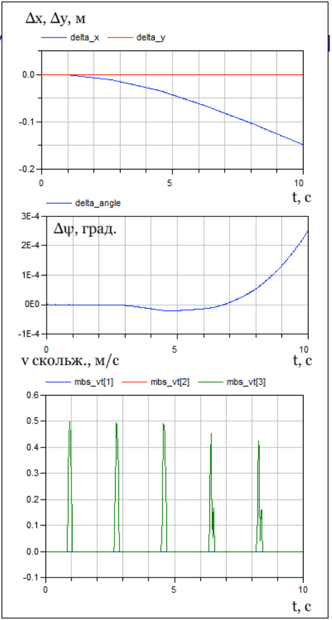


$\eta = 0,001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$

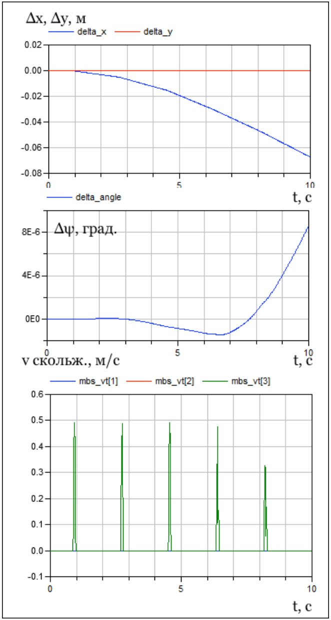


$\eta = 0,0001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$

Верифи



$\eta = 0,001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$



$\eta = 0,0001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$

Результаты

1. Получены уравнения движения экипажа на омни-колесах по абс. шероховатой плоскости с учетом инерции роликов
2. Изучены их свойства и проведено сравнение с уравнениями движения безынерционной модели
3. Построен способ расчета изменения обобщенных скоростей при смене ролика в контакте с точки зрения теории удара
4. Получены численные решения для симметричной конфигурации экипажа
5. Построена динамическая модель на плоскости с регуляризованным сухим трением
6. Выполнена верификация динамической с использованием безынерционной модели

Спасибо за внимание!