

К.В. Герасимов, А.А. Зобова

Движение симметричного экипажа на омни-колесах с массивными роликами

Рассматривается динамика симметричного экипажа с роликонесущими колесами, движущегося по неподвижной горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости в следующих предположениях: масса каждого ролика ненулевая, контакт между роликами и плоскостью точечный, проскальзывания нет. Уравнения движения составлены с помощью системы символьных вычислений Mathematica. В уравнениях движения получены дополнительные члены, пропорциональные осевому моменту инерции ролика и зависящие от углов поворота колес. Массивность роликов учитывается в тех фазах движения, когда не происходит смены роликов в контакте. При переходе колес с одного ролика на другой масса роликов считается пренебрежимо малой. Показано, что ряд движений, существующих в безынерционной модели (т.е. не учитывающей массу роликов), пропадает, так же как и линейный первый интеграл. Проведено сравнение основных типов движения симметричного трехколесного экипажа, полученных численным интегрированием уравнений движения, с безынерционной моделью.

1. Введение. Омниколеса (в русской литературе также используется название роликонесущие колеса) – это колеса особой конструкции, позволяющей экипажу двигаться в произвольном направлении, вращая колеса вокруг их собственных осей и не поворачивая их вокруг вертикали. На ободе такого колеса располагаются ролики, которые могут сво-

бодно вращаться вокруг своих осей, жестко закрепленных в диске колеса. Существуют два варианта расположения осей роликов: первый (собственно омниколеса) – оси роликов являются касательными к ободу колеса и, следовательно, лежат в его плоскости; второй (меканум-колеса [1]) – оси роликов развернуты вокруг нормали к ободу колеса на постоянный угол, обычно $\pi/4$.

Ранее была рассмотрена динамика омни-экипажей с упрощенными моделями омни-колес, в которых не учитывается инерция и форма роликов [2–7]. В этих работах колеса моделируются как жесткие диски (без роликов), которые могут скользить в одном направлении и катиться без проскальзывания в другом. Далее мы будем называть такую модель безынерционной в том смысле, что инерция собственного вращения роликов в ней не учитывается. Другая часть работ по динамике омни-экипажа [8–11] использует некоторые формализмы для построения численных моделей систем тел, при этом явный вид уравнений движения оказывается скрыт. Это делает невозможным непосредственный анализ уравнений и затрудняет оценку влияния разных факторов на динамику системы.

Цель настоящей работы – получение уравнений движения по инерции экипажа с омни-колесами с массивными роликами в неголономной постановке с помощью подхода [12] в явном виде, исследование их свойств и сравнение поведения такой системы с поведением системы в безынерционном случае [13].

2. Постановка задачи. Рассмотрим экипаж с омни-колесами, движущийся по инерции по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Экипаж состоит из платформы и N одинаковых омни-колес, плоскости которых относительно платформы неподвижны. Каждое колесо может свободно вращаться относительно платформы вокруг собственной оси, расположенной горизонтально. Будем считать, что на каждом колесе установлено n массивных роликов, так что оси роликов параллельны касательным к гра-

ницам дисков колес (см. фиг. 1). Таким образом, система состоит из $N(n+1)+1$ абсолютно твердых тел.

Введем неподвижную систему отсчета так, что ось OZ направлена вертикально вверх, а плоскость OXY совпадает с опорной плоскостью. Введем также подвижную систему отсчета $S\xi\eta Z$, жестко связанную с платформой экипажа так, что плоскость $S\xi\eta$ горизонтальна и содержит центры всех колес P_i . Будем считать, что оси колес лежат на лучах, соединяющих центр масс платформы S и центры колес (см. фиг. 2), а расстояния от центров колес до S одинаковы и равны R . Геометрию установки колес на платформе зададим углами α_i между осью $S\xi$ и осями колес (см. фиг. 1). Будем считать, что центр масс всей системы совпадает с точкой S (отсюда следует, что $\sum_k \cos \alpha_k = \sum_k \sin \alpha_k = 0$). Введем также три орта, жестко связанных с дисками колес: единичный орт оси i -ого колеса $\mathbf{n}_i = \mathbf{SP}_i/|\mathbf{SP}_i|$ и орты \mathbf{n}_i^\perp и \mathbf{n}_i^z , лежащие в плоскости диска колеса, причем вектор \mathbf{n}_i^z вертикален при нулевом повороте колеса χ_i . Положения центров роликов на колесе определим углами κ_j между ними и направлением, противоположным вектору \mathbf{n}_i^z .

Положение экипажа будем задавать следующими координатами: x, y — координаты точки S на плоскости OXY , θ — угол между осями OX и $S\xi$ (угол курса), χ_i ($i = 1 \dots N$) — углы поворота колес вокруг их осей, отсчитываемые против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \mathbf{n}_i , и ϕ_j — углы поворота роликов вокруг их собственных осей. Таким образом, вектор обобщенных координат имеет вид:

$$\mathbf{q} = (x, y, \theta, \{\chi_i\}_{i=1}^N, \{\phi_k\}_{k=1}^N, \{\phi_s\}_{s=1}^{N(n-1)})^T \in \mathbb{R}^{N(n+1)+3}$$

где сначала указаны углы поворота ϕ_k роликов, находящихся в данный момент в контакте с опорной плоскостью, а затем — остальных, “свободных”, роликов.

Введем псевдоскорости

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \quad \mathbf{v}_S = R\nu_1 \mathbf{e}_\xi + R\nu_2 \mathbf{e}_\eta, \quad \nu_3 = \Lambda \dot{\theta}, \quad \nu_s = \dot{\phi}_s$$

Их механический смысл таков: ν_1, ν_2 — проекции скорости точки S на оси $S\xi\eta$, связанные с платформой, ν_3 — с точностью до множителя угловая скорость платформы, ν_s — угловые скорости свободных роликов. Число независимых псевдоскоростей системы $L = N(n - 1) + 3$. Таким образом, имеем

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos \theta - R\nu_2 \sin \theta, \quad \dot{y} = R\nu_1 \sin \theta + R\nu_2 \cos \theta$$

Будем считать, что проскальзывания между опорной плоскостью и роликами в контакте не происходит, т.е. скорости точек C_i контакта равны нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

Выражая скорость точек контакта через введенные псевдоскорости и проектируя на векторы \mathbf{e}_ξ и \mathbf{e}_η соответственно, получим:

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{\rho_k}(\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k), \quad \text{где } \rho_k = l \cos \chi_k - r \quad (2.1)$$

$$\dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}) \quad (2.2)$$

Заметим, что знаменатель ρ_k в (2.1) есть расстояние от оси ролика до точки контакта, обращающееся в ноль на стыке роликов (см. фиг. 1). Это обстоятельство приводит к разрывам второго рода функций в правых частях уравнений движения и будет рассмотрено отдельно ниже. Уравнение (2.2) совпадает с уравнением связи в случае безынерционной модели роликов.

Таким образом, выражение обобщенных скоростей через псевдоскорости, учитывающее связи, наложенные на систему, можно записать в матричном виде (явные выражения

компонент матрицы V приведены в приложении):

$$\dot{\mathbf{q}} = V\boldsymbol{\nu}, \quad V = V(\theta, \chi_i) \quad (2.3)$$

3. Уравнения движения. Воспользуемся лаконичным методом получения уравнений движения для систем с дифференциальными связями, предложенным Я.В. Татаринвым [12]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \sum_{\mu=1}^L \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}, \quad \alpha = 1, \dots, L \quad (3.1)$$

Здесь L – лагранжиан, L^* – он же с учетом связей. P_α – линейные комбинации формальных канонических импульсов p_i , определяемые из соотношения

$$\sum_{\mu} \nu_\mu P_\mu \equiv \sum_i \dot{q}_i p_i$$

в котором \dot{q}_i выражены через псевдоскорости ν_μ из 2.3. Фигурными скобками $\{\cdot, \cdot\}$ обозначена скобка Пуассона по p_i, q_i . После ее вычисления выполняется подстановка

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Подробно их вывод и применение изложено в [12, 13].

Так как потенциальная энергия системы во время движения не меняется, то лагранжиан равен кинетической энергии:

$$2L = 2T = M\mathbf{v}_S^2 + I_S\dot{\theta}^2 + J \sum_i \dot{\chi}_i^2 + B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2)$$

Здесь M, I_S, J – массово-инерционные характеристики экипажа (см. приложение), B – момент инерции ролика относительно его оси вращения. Лагранжиан с учетом связей имеет вид:

$$2L^* = \boldsymbol{\nu}^T V^T \mathcal{M} V \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu}$$

Структура симметрической матрицы \mathcal{M}^* следующая:

$$\mathcal{M}^* = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & m_{ij}^* & \\ & & \end{pmatrix}_{3 \times 3} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ B\Lambda^{-1} \sin \chi_{12} & \dots & B\Lambda^{-1} \sin \chi_{nN} \end{pmatrix} \\ * & B \\ & \ddots \\ & B \end{bmatrix},$$

Явные формулы для коэффициентов m_{ij}^* главного минора 3×3 выписаны в приложении; отметим, что они зависят только от координат χ_i , которые входят в дроби вида B/ρ_i^2 и $B \sin \chi_i/\rho_i$, имеющие разрывы второго рода при смене роликов (см. (2.1)). Этот минор соответствует псевдоскоростям ν_1, ν_2, ν_3 . Остальные элементы матрицы \mathcal{M}^* соответствуют скоростям свободных роликов ν_s , для которых $\chi_{kl} = \chi_k + \kappa_l$ — угол между вертикалью и осью ролика. Индекс $k = 1, \dots, N$ означает номер колеса, индекс $l = 2, \dots, n$ — номер свободного ролика на колесе ($l = 1$ — ролик, находящийся в контакте).

Первое слагаемое (3.1) получается дифференцированием лагранжиана и подстановкой связей:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} = \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi) \boldsymbol{\nu}_\alpha) = \mathcal{M}^*(\chi_i) \dot{\boldsymbol{\nu}}_\alpha + \left(\frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi)) \boldsymbol{\nu} \right)_\alpha = \mathcal{M}^*(\chi_i) \dot{\boldsymbol{\nu}}_\alpha + \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i^*(V \nu)_{3+i} \boldsymbol{\nu} \right)_\alpha, \quad (3.3)$$

где $\mathcal{M}_i^* = \frac{\partial \mathcal{M}^*}{\partial \chi_i}$. Обратим внимание, что вторая группа слагаемых, соответствующих свободным роликам ($\alpha = 4, \dots, L$), имеет вид:

$$\frac{\cos \chi_{ij} \nu_3 B \left(-\frac{\nu_3 R}{l\Lambda} - \frac{\cos \alpha_i \nu_2 R}{l} + \frac{\sin \alpha_i \nu_1 R}{l} \right)}{\Lambda} = \frac{B}{\Lambda} \cos \chi_{ij} (\dot{\chi}_i)^* \nu_3. \quad (3.4)$$

Выпишем выражения для P_α :

$$\begin{aligned}
P_1 &= R \left(p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_i \left(\frac{\sin \alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\cos \alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \right) \right), \\
P_2 &= R \left(-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_i \left(-\frac{\cos \alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\sin \alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \right) \right), \\
P_3 &= \frac{1}{\Lambda} \left(p_\theta - \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i} \right), \\
P_s &= p_{\phi_s},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Поскольку коэффициенты лагранжиана L^* зависят только от координаты χ_i , то его скобки Пуассона с P_1, P_2, P_3 — квадратичные формы псевдоскоростей, пропорциональные моменту инерции ролика B с коэффициентами, зависящими от χ_i :

$$\begin{aligned}
\{P_1, L^*\} &= -\frac{\partial P_1}{\partial p_{\chi_i}} \frac{\partial L^*}{\partial \chi_i} = -\frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^T \sin \alpha_i \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}, \\
\{P_2, L^*\} &= \frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^T \cos \alpha_i \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}, \quad \{P_3, L^*\} = \frac{R}{2l\Lambda} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}, \quad \{P_s, L^*\} = 0, s > 3
\end{aligned}$$

Суммы $\{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}$ в правой части отличны от нуля лишь для первых трех уравнений (см. приложение).

Собирая все вместе и пользуясь обозначениями из приложения, окончательно получим следующую структуру уравнений:

$$\mathcal{M}^* \dot{\boldsymbol{\nu}} = \frac{MR^2}{\Lambda} \begin{pmatrix} \nu_2 \nu_3 \\ -\nu_1 \nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\nu}^T \begin{pmatrix} R \\ \frac{R}{2l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \cos \alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \Lambda^{-1} \mathcal{M}_i^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - BR^2 \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu} - B \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \cos \chi_{12} \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_1^* \\ \vdots \\ \cos \chi_{Nn} \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_N^* \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Здесь матрицы \mathcal{P}_α размера $L \times L$ составлены из строк $\mathbf{p}_{\alpha\beta}$, определенных явно в прило-

жении и зависящих от геометрии экипажа и углов поворота колес χ_i :

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{p}_{13} \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{13} \\ -\mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Поскольку матрицы \mathcal{M}_i^* и \mathcal{P}_α зависят от углов поворота колес χ_i , то для замыкания системы к этим уравнениям надо добавить уравнения (2.2).

Структура уравнений позволяет выявить следующие свойства:

1. Система допускает интеграл энергии $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i)\boldsymbol{\nu} = h = \text{const}$ в силу общей теоремы об изменении полной механической энергии: так как система стеснена автономными идеальными связями, а силы консервативны, то полная энергия (в нашем случае она равна кинетической энергии) сохраняется.
2. В случае, если платформа экипажа не движется $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$, свободные ролики сохраняют свою начальную угловую скорость: $\nu_s = \text{const}$, что соответствует здравому смыслу.
3. При $B = 0$ все слагаемые в правой части, кроме первого, обращаются в ноль, как и все члены, соответствующие свободным роликам, в левой части (см. (6.1)). В этом случае существенными остаются первые три уравнения системы на ν_1, ν_2, ν_3 . Эти уравнения описывают динамику безынерционной модели экипажа [2].
4. Существовавший в безынерционной модели линейный первый интеграл разрушается для модели с массивными роликами. При $B = 0$ этот интеграл имеет вид

$m_{33}^* \nu_3 = \text{const}$ (причем $m_{33} = \text{const}$) и следует непосредственно из третьего уравнения системы. При $B \neq 0$ скорость изменения ν_3 пропорциональна моменту инерции ролика B .

5. Поскольку скобки Пуассона в уравнениях для свободных роликов равны нулю, система допускает первые интегралы:

$$\nu_s + \frac{1}{\Lambda} \sin \chi_{ij} \nu_3 = \text{const} \quad (3.7)$$

Скорость вращения платформы ν_3 связана со скоростями собственного вращения свободных роликов. В частности, вращение экипажа вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр ($\nu_1(0) = 0, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) \neq 0$), неравномерно, в отличие от безынерционной модели.

6. Одновременное изменение начальных значений всех псевдоскоростей $\boldsymbol{\nu} \rightarrow \lambda \boldsymbol{\nu}, \lambda \neq 0$ умножением на число, отличное от нуля, эквивалентно замене времени $t \rightarrow \lambda t$.

4. Переход между роликами. Уравнения (3.6) описывают динамику системы на промежутках времени, в течение которых не происходит смены роликов. При переходе любого колеса с одного ролика на другой коэффициенты уравнений терпят разрыв второго рода из-за выражений $\rho_i = l \cos \chi_i - r$ в знаменателе.

Заметим, что в технических реализациях омни-колес ситуация $\rho_i = 0$ никогда не имеет места, т.к. концы роликов усекаются (в частности, потому что оси роликов в реальных системах имеют ненулевую толщину и должны быть закреплены в колесах). Для того, чтобы в каждый момент в контакте между колесом и плоскостью был ролик, их располагают в два или больше рядов.

Для исследования движений, на которых происходят смены контактных роликов, примем следующие предположения. Усечем ролики (см. фиг. 3), но оставим их оси в одной

плоскости, допуская пересечение тел роликов в пространстве и пренебрегая им. Переход между роликами одного колеса будет происходить при значении угла $\chi_i = \frac{2\pi}{n}$. Колесо с усеченными роликами определим, располагая ось ролика на расстоянии $r = l \cos \frac{\pi}{n-1}$ от центра колеса, а его поверхность задавая как фигуру вращения дуги окружности радиуса l с углом раствора $\frac{2\pi}{n}$ вокруг этой оси, замкнутую соответствующими дисками.

Кроме этого, при смене контакта происходит мгновенное наложение связи на вновь вошедший в контакт ролик и снятие её с освободившегося, после чего последний может свободно вращаться вокруг своей оси. В этот момент в реальной системе происходят взаимодействия типа ударных, в том числе проскальзывание роликов относительно плоскости, при котором происходит уменьшение полной энергии системы. Однако моделирование этих эффектов не рассматривается в настоящей работе. Будем считать, что скорости ν_1 , ν_2 , ν_3 при переходе с ролика на ролик не изменяются, как и в безынерционной модели в отсутствии роликов ($B = 0$). Таким образом, масса роликов влияет на динамику системы только на гладких участках движения и не учитывается при смене роликов. Из уравнений (2.1, 2.2) получим, что ролик, входящий в контакт, мгновенно приобретает ту же угловую скорость, что и освобождающийся ролик.

Таким образом, при переходе ($\chi_i = \chi_i^+$) сохраним значения ν_1 , ν_2 , ν_3 , заменим χ_i с χ_i^+ на χ_i^- (см. фиг. 4), и выполним с псевдоскоростями ν_s следующее преобразование. Пусть $\boldsymbol{\nu}_i^s = (\nu_{i2}, \dots, \nu_{in})$ – псевдоскорости свободных роликов на колесе i . Тогда если при смене контакта $\dot{\chi}_i > 0$ (т.е. колесо поворачивается против часовой стрелки, см. фиг. 1), то отбросим ν_{in} , остальные компоненты $\boldsymbol{\nu}_i^s$ перенумеруем, сдвигая их вперед: $\nu_{ij} \rightarrow \nu_{ij+1}$, а ν_{i2} положим равной значению правой части в уравнении связи (2.1). При вращении колеса в другую сторону, выполним аналогичные преобразования, сдвиг номеров роликов при этом происходит назад.

5. Примеры движений Численные решения получим для симметричного трехколесного экипажа ($\alpha_i = \frac{2\pi}{N}(i-1)$, $N=3$), с $n=5$ роликами на колесе и следующих движений:

1. вращение вокруг своей оси ($\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$) (фиг. 5),
2. движение по прямой в направлении оси первого колеса ($\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = \nu_3(0) = 0$) (фиг. 6)
3. движение с ненулевой скоростью центра масс и, одновременно, с ненулевой угловой скоростью платформы ($\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$) (фиг. 7).

Расчеты выполнены в безразмерных величинах, так что радиус платформы и колеса $R = 0.15$, $r = 0.05$, масса платформы, колеса и ролика $M_{пл} = 1$, $M_k = 0.15$, $m_{рол} = 0.05$. При этом момент инерции ролика $B \approx 1.6 \cdot 10^{-5}$. Для безынерционной модели массово-инерционные характеристики колес положим соответствующими экипажу с 5 заблокированными роликами.

Во всех трех случаях наблюдаются отличия между двумя постановками: свободные ролики приходят в движение, из-за чего меняется угловая скорость платформы экипажа и скорость центра масс экипажа. Кроме этого, становится заметно влияние введенных предположений о смене контакта: график кинетической энергии приобретает ступенчатый вид в силу изменений в слагаемых (3.2), зависящих от χ и $\dot{\phi}_{i,j}$:

$$B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}), \quad (5.1)$$

происходящих при мгновенном наложении связей. В промежутки времени между сменами роликов энергия остается постоянной.

В случаях 1 и 2 траектории центра экипажа S на плоскости OXY и характер вращения вокруг вертикальной оси SZ ($\theta(t)$) отличаются между моделью с роликами и безынерцион-

ной несущественно, однако заметны переходные процессы во вращении роликов в начале движения.

В случае вращения вокруг вертикали (движение 1) угловая скорость платформы ν_3 меняется не монотонно, но в среднем медленно убывает: за первые 1000 секунд угловая скорость уменьшается на 2%. Скорость центра масс остается равной нулю. Кинетическая энергия системы также медленно убывает. На фиг. 5 представлены угловые скорости роликов на первом колесе $\dot{\phi}_{1j}$ (номер кривой, указанной на рисунке, совпадает с номером ролика на колесе, поведение роликов на других двух колесах полностью аналогично). Заметим, что при нулевой скорости центра экипажа опорный ролик не вращается (2.2): угловая скорость первого ролика в течение первой секунды движения нулевая. После выхода из контакта ролик начинает раскручиваться в соответствии с первым интегралом (3.7). Раскрученный ролик при входе в контакт с опорной плоскостью мгновенно теряет угловую скорость – на графике угловой скорости первого ролика это происходит при $t = 9.6$ с – что приводит к убыванию кинетической энергии.

При движении по прямой (движение 2) угловая скорость остается нулевой. На фиг. 6 слева показаны графики относительного изменения скорости центра масс $\nu_1(t)/\nu_1(0) - 1$ (кривая 1) и кинетической энергии $T/T(0) - 1$ (кривая 2). Видно, что на начальном этапе движения при смене контакта кинетическая энергия возрастает, что обусловлено принятой в данной работе моделью наложения связи, но при этом возрастание энергии остается в пределах 4%. Скорость центра масс (кривая 2, слева) в среднем убывает. Скорость вращения переднего колеса равна нулю, колесо катится, опираясь на один и тот же ролик, остальные ролики не раскручиваются. Угловые скорости роликов на одном из задних колес показаны на фиг. 6 справа. Свободные ролики двигаются с постоянной угловой скоростью, ролик в контакте изменяет свою скорость за счет скорости центра масс. После

того, как все ролики побывают в контакте, их движение становится квазипериодичным, а энергия убывает с каждой сменой контакта.

При движении 3, сочетающем поступательное и вращательное движение, угловая скорость экипажа ν_3 растет и выходит на постоянное значение (кривая 1 на фиг. 7 слева вверх), скорость центра экипажа $v = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ уменьшается до нуля (кривая 2 там же), а кинетическая энергия после короткого начального участка, где происходят маленькие по величине скачки вверх аналогично движению 2, убывает. Угловые скорости роликов представляют собой квазипериодические функции времени (характерный участок представлен на фиг. 7 справа вверх, обозначения те же что и на фиг. 5). Центр платформы описывает спираль, фиг. 7 внизу. Заметим, что если не учитывать массу роликов на колесе, то при этих начальных условиях скорость центра масс и угловая скорость платформы сохраняется, а центр платформы описывает окружность. Таким образом, даже малая масса роликов приводит к качественным изменениям в движении экипажа.

Заключение.

Результаты проведенной работы следующие:

1. получены уравнения движения экипажа с полным набором роликов в неголономной постановке,
2. показано, что при учете массы роликов возникают дополнительные члены, пропорциональные моменту инерции ролика относительно его оси,
3. предложена модель перехода с ролика на ролик,
4. получены численные решения с учетом движения свободных роликов для симметричного экипажа и обнаружены качественные отличия от безынерционной модели.

Список литературы

1. Gfrerrer A. Geometry and kinematics of the Mecanum wheel // Computer Aided Geometric Design. 2008. Т. 25. С. 784–791.
2. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Динамика экипажа с роликонесущими колесами // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, № 1. С. 13–22.
3. Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Известия российской академии наук. Теория и системы управления. 2007. № 6. С. 142–149.
4. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Тележка с омниколесами на плоскости и сфере // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4 (Мобильные роботы). С. 785–801.
5. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Математические аспекты динамики движения экипажа с тремя окольцованными колесами // Мобильные роботы и мехатронные системы. М., 2006. С. 61–67.
6. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Свободные и управляемые движения некоторой модели экипажа с роликонесущими колесами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. М., 2008. № 6. С. 62–65.
7. Мартыненко Ю. Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, № 4. С. 610–619.
8. Косенко И. И., Герасимов К. В. Физически-ориентированное моделирование динамики омнитеlejки // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12, № 2. С. 251–262.

9. Tobolar J., Herrmann F., Bunte T. Object-oriented modelling and control of vehicles with omni-directional wheels // Computational Mechanics. Hrad Nectiny, Czech Republic: 2009. November 9–11.
10. Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots / R.L. Williams, B.E. Carter, P. Gallina [и др.] // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2002. jun. T. 18, № 3. С. 285–293. URL: <https://doi.org/10.1109/tra.2002.1019459>.
11. Ashmore Mark, Barnes Nick. Omni-drive Robot Motion on Curved Paths: The Fastest Path between Two Points Is Not a Straight-Line // Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2002. С. 225–236. URL: https://doi.org/10.1007/3-540-36187-1_20.
12. Татаринов Я. В. Уравнения классической механики в новой форме // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2003. № 3. С. 67–76.
13. Zobova A. A. Application of laconic forms of the equations of motion in the dynamics of nonholonomic mobile robots // Nelineinaya Dinamika. 2011. С. 771–783. URL: <https://doi.org/10.20537>

6. Приложение. Матрица кинетической энергии:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & M & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & I_S & 0 & \cdots & 0 & B \sin \chi_{k1} & \cdots & B \sin \chi_{Nn} \\ & & & J & & & & & \\ & & & & \ddots & & & 0 & \\ & & & & & J & & & \\ & & * & & & & B & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & B \end{bmatrix},$$

где в третьей строке сначала указаны элементы, соответствующие роликам, находящимся в контакте, а затем соответствующие “свободным” роликам, упорядоченные по возрастанию индексов так, что ролики одного колеса соседствуют. Матрица \mathcal{M} – симметрическая, звездочкой обозначены элементы, получающиеся транспонированием верхнего треугольника матрицы.

Матрица связей:

$$V = \begin{bmatrix} R \cos \theta & -R \sin \theta & 0 \\ R \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} & 0 \\ \frac{R \sin \alpha_i}{l} & -\frac{R \cos \alpha_i}{l} & -\frac{R}{\Lambda l} \\ \frac{R \cos \alpha_k}{\rho_k} & \frac{R \sin \alpha_k}{\rho_k} & 0 \\ & 0 & & E_{N(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы кинетической энергии с учетом связей:

$$\begin{aligned}
m_{11}^* &= MR^2 + \sum_i \left(J \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \alpha_i + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \cos^2 \alpha_i \right), \\
m_{22}^* &= MR^2 + \sum_i \left(J \frac{R^2}{l^2} \cos^2 \alpha_i + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \sin^2 \alpha_i \right), \\
m_{33}^* &= \frac{1}{\Lambda} (I_S + \sum_i J \frac{R^2}{l^2}), \\
m_{12}^* &= \sum_i \left(-J \frac{R^2}{l^2} + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \right) \sin \alpha_i \cos \alpha_i, \\
m_{13}^* &= \frac{1}{\Lambda} \sum_i B \frac{R \sin \chi_i}{\rho_i} \cos \alpha_i, \\
m_{23}^* &= \frac{1}{\Lambda} \sum_i B \frac{R \sin \chi_i}{\rho_i} \sin \alpha_i.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Формальные импульсы $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$:

$$\begin{aligned}
p_x &= MR(\nu_1 \cos \theta - \nu_2 \sin \theta), \\
p_y &= MR(\nu_1 \sin \theta + \nu_2 \cos \theta), \\
p_\theta &= BR \sum_i \frac{\sin(\chi_i + \kappa_1)}{\rho_i} (\nu_1 \cos \alpha_i + \nu_2 \sin \alpha_i) + \frac{I_S}{\Lambda} \nu_3 + B \sum_s \sin(\chi_s) \nu_s, \\
p_{\chi_i} &= J \frac{R}{l} (\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{1}{\Lambda} \nu_3), \\
p_{\phi_{k1}} &= \frac{BR}{\rho_k} (\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k) + \frac{B}{\Lambda} \nu_3 \sin(\chi_k + \kappa_1), \\
p_{\phi_s} &= \frac{B}{\Lambda} \nu_3 \sin \chi_s + B \nu_s.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Линейные комбинации P_α :

$$\begin{aligned}
P_1 &= R \left(p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_i \left(\frac{\sin \alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\cos \alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \right) \right), \\
P_2 &= R \left(-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_i \left(-\frac{\cos \alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\sin \alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \right) \right), \\
P_3 &= \frac{1}{\Lambda} \left(p_\theta + \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i} \right), \\
P_s &= p_{\phi_s},
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Для упрощения записи правой части уравнений введем обозначение для операции дискретной свертки произвольной функции f :

$$\sigma[f(\alpha, \chi)] = \sum_{k=1}^N f(\alpha_k, \chi_k) \frac{\sin \chi_k}{\rho_k^3}$$

Тогда скобки Пуассона в правой части имеют вид (звездочкой обозначена подстановка канонических формальных импульсов p_i):

$$\begin{aligned}
(\{P_1, P_2\})^* &= \left(-\sum_{k=1}^N R^2 \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = -BR^2 (R\nu_1 \sigma[\cos \alpha] + R\nu_2 \sigma[\sin \alpha] + \Lambda^{-1} \nu_3 \sigma[\rho \sin \chi]) = \\
&= -BR^2 \mathbf{p}_{12} \boldsymbol{\nu}, \text{ где } \mathbf{p}_{12} = (\sigma[\cos \alpha], R\sigma[\sin \alpha], \Lambda^{-1} \sigma[\rho \sin \chi], 0, \dots, 0)
\end{aligned}$$

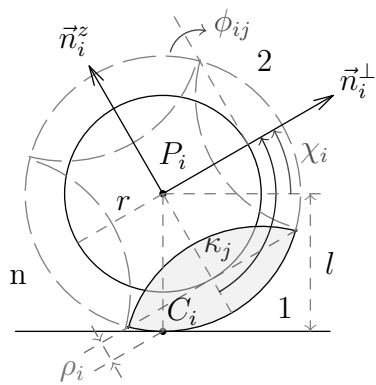
$$\begin{aligned}
(\{P_1, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left(-\sin \theta p_x + \cos \theta p_y - \sum_{k=1}^N R \cos \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = MR^2 \Lambda^{-1} \nu_2 - \\
&- BR^2 \Lambda^{-1} (R\nu_1 \sigma[\cos^2 \alpha] + R\nu_2 \sigma[\sin \alpha \cos \alpha] + \Lambda^{-1} \nu_3 \sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi]) = \\
&= MR^2 \Lambda^{-1} \nu_2 - BR^2 \mathbf{p}_{13} \boldsymbol{\nu},
\end{aligned}$$

$$\text{где } \mathbf{p}_{13} = \Lambda^{-1} (R\sigma[\cos^2 \alpha], R\sigma[\sin \alpha \cos \alpha], \Lambda^{-1} \sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0)$$

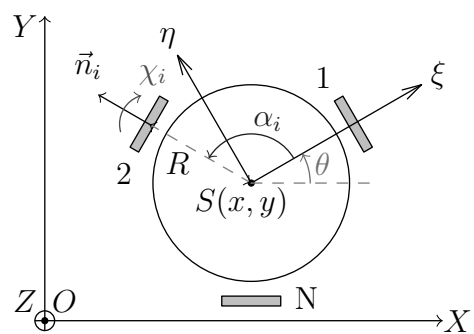
$$\begin{aligned}
(\{P_2, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left(-\cos \theta p_x - \sin \theta p_y - \sum_{k=1}^N R \sin \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = -MR^2 \Lambda^{-1} \nu_1 - \\
&- BR^2 \Lambda^{-1} (R\nu_1 \sigma[\sin \alpha \cos \alpha] + R\nu_2 \sigma[\sin^2 \alpha] + \Lambda^{-1} \nu_3 \sigma[\rho \sin \alpha \sin \chi]) = \\
&= -MR^2 \Lambda^{-1} \nu_1 - BR^2 \mathbf{p}_{23} \boldsymbol{\nu},
\end{aligned}$$

$$\text{где } \mathbf{p}_{23} = \Lambda^{-1} (R\sigma[\sin \alpha \cos \alpha], R\sigma[\sin^2 \alpha], \Lambda^{-1} \sigma[\rho \sin \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0),$$

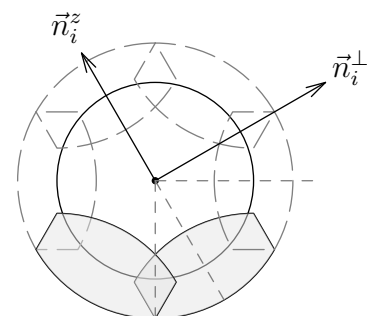
Фигуры.



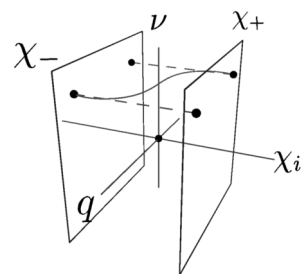
Фиг. 1.



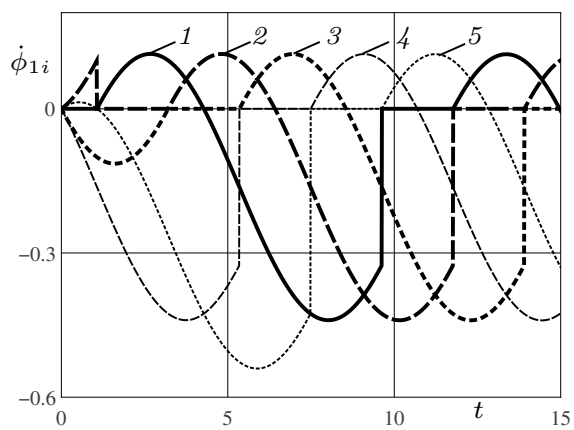
Фиг. 2.



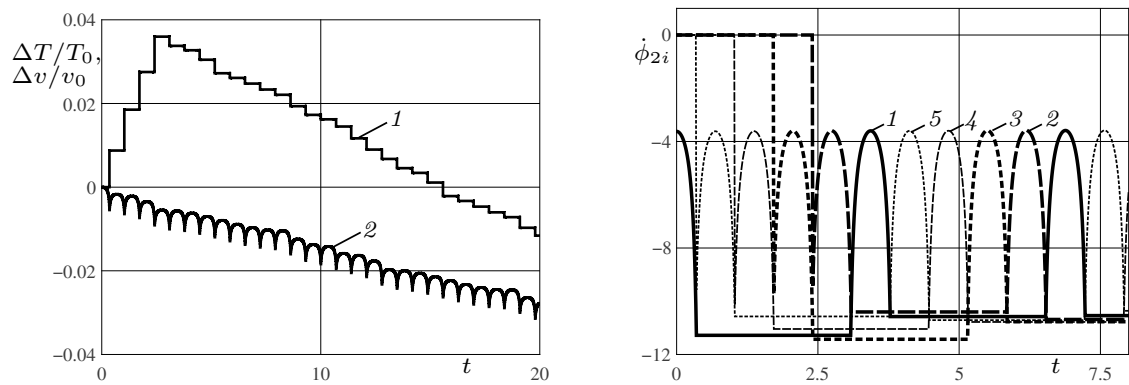
Фиг. 3.



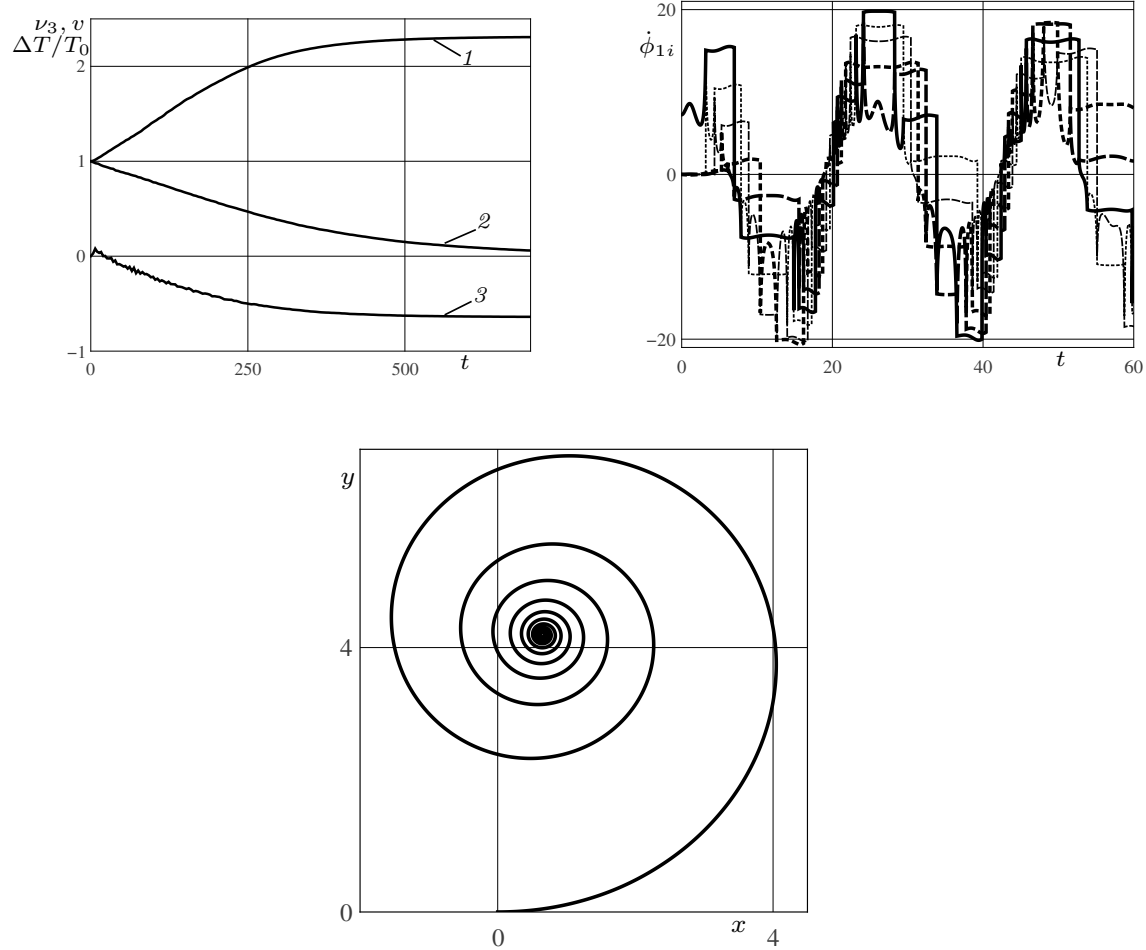
Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Авторы.

- Герасимов Кирилл Вячеславович (Kirill Gerasimov); 119234, Москва, Ленинские горы, 1Б, 1725; 8 (925) 033-60-79; kiriger@gmail.com;
- Зобова Александра Александровна (Alexandra Zobova); Москва, Дмитровское шоссе, 165Е, корп. 1, кв. 28; 8 (916) 333-19-78; azobova@mech.math.msu.su.

Кафедра теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Тел.: (495) 939-36-81

On the motion of a symmetrical vehicle with omniwheels with massive rollers