

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И МЕХАТРОНИКИ

Герасимов Кирилл Вячеславович

**Динамика омниколесного экипажа с учетом инерции
роликов и трения**

Специальность 01.02.01 — теоретическая механика

Научно-квалификационная работа

Научные руководители:
д.ф.-м.н. проф. Косенко И.И.
к.ф.-м.н. доц. Зобова А.А.

Москва — 2018

Введение

Омни-колеса (в русской литературе также используется название роликоне-сущие колеса) – это колеса особой конструкции, позволяющей экипажу двигаться в произвольном направлении, вращая колеса вокруг их собственных осей и не поворачивая их вокруг вертикали. На ободе такого колеса располагаются ролики, которые могут свободно вращаться вокруг своих осей, жестко закрепленных в диске колеса. Существуют два варианта расположения осей роликов: первый (собственно омни-колеса) – оси роликов являются касательными к ободу колеса и, следовательно, лежат в его плоскости; второй (*mesanum wheels* [1]) – оси роликов развернуты вокруг нормали к ободу колеса на постоянный угол, обычно $\pi/4$.

Основное свойство омни-колеса – способность совершать движение относительно опоры не только в плоскости колеса, то есть вперед или назад, как это доступно обыкновенным колесам, но и в дополнительном направлении под углом к плоскости колеса, за счет качения на ролике, контактирующем с опорной поверхностью. Благодаря этому мобильные экипажи, оснащенные такими колесами, обладают повышенной маневренностью и применяются для выполнения различных работ в условиях стесненного пространства, например, для перемещения грузов. Свойства омни-колес мотивируют инженеров и ученых находить новые и новые их применения, подчас самые неожиданные. Сложность их устройства, обусловленная наличием роликов, на протяжении последних десятилетий делает системы с омни-колесами предметом исследований и моделирования, все более точно описывающих их движение.

Большинство известных моделей омниколесных экипажей построено в приближении, не учитывающем движение роликов. Как правило, это обусловлено двумя причинами. Во-первых, относительно большое количество твердых тел в полной системе затрудняет аналитическое исследование и замедляет численное. Во-вторых, при рассмотрении динамики роликов возникает необходимость моделировать фазы движения, в которых колеса экипажа переходят с одного ролика на другой. Настоящая работа посвящена построению динамических моделей омни-колесного экипажа, учитывающих движение всех роликов, а также описывающих переход с одного ролика на другой.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Одной из широких областей, в которых омни-колеса находят применение, является изучение мобильных роботов [2–5]. Экипажи с омни-колесами и колесами *mesaunit* [6] подробно описаны в обзорных работах в этой области [7–11] как с точки зрения теоретической механики, так и с позиции технической реализации систем. Геометрия поверхности ролика отдельно рассмотрена в [1], где также выполнена аппроксимация последней поверхности тором и записано условие невырожденности омниколесного экипажа, в соответствии с которым оси роликов не должны проходить через одну точку, включая бесконечность (в противном случае экипаж оказывается не способен совершать ряд движений).

Движение экипажа с омни-колесами по абсолютно шероховатой плоскости рассмотрено в [12–16]. Уравнения движения произвольной конфигурации экипажа получены, например, в [13], где также найдены их интегралы и инвариантная мера. Для конфигурации с тремя колесами в двух перпендикулярных плоскостях изучается устойчивость движений. Получены уравнения управляемого движения. Здесь уравнения движения получены методом Я.В.Татарина уравнений в лаконичной форме [17, 18]. Доказательство метода получения уравнений движения в лаконичной форме проведено также, например, в [19]. Там же метод проиллюстрирован на примере омниколесного экипажа, а также рояльного колеса и экипажа с дифференциальным приводом.

В работе [20, 21] рассмотрена симметричная конфигурация экипажа с омни-колесами, в которой колеса стоят в углах правильного треугольника, а их плоскости вертикальны и перпендикулярны радиусам-векторам центров колес, выпущенным из центра треугольника. Описана ее кинематика, и рассматриваются движения по инерции и при постоянных напряжениях, подаваемых на моторы, вращающие колеса. Дана оценка мощности, потребляемой моторами, и показано, что она наименьшая при движении в направлении оси одного из колес, либо в противоположном направлении. Строится алгоритм для отслеживания направления движения экипажа. Развитием этой работы стало рассмотрение экипажа со смещенным центром масс [22, 23], где построены траектории свободного движения и изучены вопросы существования дви-

жений по прямой и по окружности.

Движение экипажа произвольной конфигурации по инерции по абсолютно шероховатой плоскости рассматривается и в [24], где также строятся различные примеры движения по инерции, в том числе, периодического; получены уравнения движения омниколесного экипажа на сфере. Позже в [25] изучена управляемость экипажа произвольной конфигурации на абсолютно шероховатой плоскости и осуществимость движения по любой наперед заданной траектории.

Кроме экипажей,двигающихся за счет взаимодействия колес и опорной поверхности, изучаются и другие конструкции, например, шарообразные роботы, управляемые изнутри симметричным омниколесным экипажем [26], либо двумя омниколесами [27]. Последняя статья содержит также более широкий обзор литературы о шарообразных роботах. Кроме того, в ней найдены условия, при которых возможно движение вдоль произвольной траектории. Работа выполнена в формализме алгебры кватернионов. Известны и конструкции шарообразных роботов, управляемых двумя обычными колесами [28], однако [27] имеют преимущество в способности нести полезный груз. Омни-колеса можно применять не только для перемещения в пространстве, но и для изменения ориентации тел. К примеру, манипуляторы, основанные на сфере, управляемой омниколесами, находящимися снаружи, рассмотрены в [29]. Контакт задается в контактной модели Герца. Аналогичная работа [30] предлагает использовать сферу в качестве корпуса тренажера для пилотов.

В большинстве работ инерцией и вообще, движением роликов пренебрегают. Однако в работе [31], рассматривающей движение экипажа с четырьмя колесами *mesanit* учтено движение контактного ролика с учетом вязкого трения в осях колес и роликов. Строятся уравнения движения Аппеля. При этом предполагается, что точка контакта всегда находится строго под центром колеса. Изучается структура управляющих моментов на примере движения экипажа по окружности, а также устойчивость движения в линейном приближении. Отдельной областью интересов является определение коэффициентов в уравнениях движения [32].

Большую категорию работ составляют описания практических реализаций омни-колесных экипажей. Такие экипажи часто используются на сорев-

нованиях мобильных роботов, и потому описываются в статьях в этом контексте. К примеру, в [33] описывается кинематика и строится управление симметричным омниколесным экипажем, причем в условиях ограниченности моментов, прилагаемых двигателями. В [34] строится гибридный экипаж с двумя обычными колесами и двумя роликонесущими. Весьма распространены работы, описывающие низкоуровневую техническую реализацию экипажей, такие как [35–37]. В практике мобильных роботов необходимой задачей является навигация. В [38] рассматривается способ навигации омни-колесных экипажей с помощью фильтра частиц. Для омни-колес важен характер поверхности, по которой экипаж движется. В работе [39] строится метод определения класса опорной поверхности с помощью оценивания вибраций при движении, с целью адаптации управления (движение по мягким поверхностям естественным образом оказывается медленнее, а движение по жестким вызывает большие вибрации, что требуется компенсировать). Известна также модель, учитывающая влияние неровности поверхности [40], где колеса экипажа подпружинены.

С точки зрения оптимального управления известно, что переход между двумя точками на плоскости делается быстрее всего не по прямой, а по дуге окружности [41]. В [42] оптимальные по времени траектории рассмотрены существенно детальнее, их построение проводится с помощью принципа максимума Понтрягина, и строится минимальная полная классификация таких траекторий. Класс работ о построении управляемых движений весьма широк [43–46]. Встречаются работы с частичным отказом приводов [27, 47].

Показательны работы, покрывающие все стадии разработки робототехнической платформы с омни-колесами, от кинематики и уравнений движения до построения (оптимального) управления, включающие также технические реализации экипажей [48–50]. В [51] построено управление с объездом препятствий. В [52] рассмотрено адаптивное управление с учетом переменных коэффициентов трения в точках контакта, а также массы платформы.

В настоящей работе строятся динамические модели полной системы тел, составляющих омни-экипаж, а именно, платформы, N колес и n роликов на каждом колесе. При построении таких моделей требуется описать движение относительно большого количества твердых тел — $1 + N(n + 1)$, важен способ

задания контакта роликов и опорной поверхности, требуется моделирование перехода экипажа с одного ролика на другой.

Для описания систем многих тел, в том числе, систем, организованных иерархически, известны различные подходы [53–57]. Классические подходы основаны на теории графов [53, 57]. Разработаны рекурсивные методы для описания древовидных структур [54]. Весьма обширный обзор существующих методов для описания систем тел, в том числе, с замкнутыми кинематическими цепями, проведен в [55]. Работа [56], кроме непосредственно методов описания систем тел, уделяет отдельное внимание историческому контексту развития данной области, в частности, констатируя слабопреодолимые затруднения, возникающие в аналитическом исследовании из-за нелинейностей и количества тел в системах, а также подробно освещая их разрешение с помощью вычислительной техники, как основной метод их изучения и проектирования.

В отношении контактного взаимодействия твердых тел, при описании динамики омни-колес и экипажей можно либо идти по пути наложения дифференциальных связей отсутствия проскальзывания, либо вводить силу трения в контакте. Динамика систем с дифференциальными связями подробно описана, например, в [58, 59]. В [59] и [60], в частности, подробно обсуждается вопрос обоснованности подобных идеализаций. В главах 1 и 2 настоящей работы принимается модель точечного контакта ролика и опорной плоскости. Для получения уравнений движения таких систем часто пользуются методами Аппеля либо Лагранжа первого рода [61–63]. В силу объема требуемых выкладок в рассматриваемой системе мы применили метод получения уравнений движения в лаконичной форме Я.В. Татарина [17, 18].

В отсутствии проскальзывания отдельного рассмотрения требует смена ролика в контакте с опорной плоскостью. Явления, возникающие при подобных движениях, описываются теорией удара [63–65]. В [65] приведено формальное построение этой теории, и обсуждается ее физическая обоснованность. Всестороннее современное рассмотрение механики систем с односторонними связями с учетом их моделирования с помощью вычислительной техники содержится в [66], а также в серии работ [67–77]. Уравнения движения для систем с односторонними связями в интегральной форме построены

в [78], и там же рассмотрены удары, в частности, о дифференциальные связи.

Постановка с сухим трением приводит к дальнейшим усложнениям в решении задачи, методы работы с которыми описаны в [79–85], а также [86] Исследование омниколесного экипажа с учетом динамики всех роликов и трения возможно лишь численно, и здесь, кроме понимания природы трения, требуется подходящий формализм для создания компьютерной модели экипажа. Нами был выбран формализм языка Modelica [87–89], примененный ранее к задачам динамики систем тел [90–93, 93–99]. Этот метод уже использовался и при изучении динамики омниэкипажей [100–103], где рассматривается контакт с трением, но ролики имеют существенно упрощенную форму – считаются массивными цилиндрами либо конусами, и утверждается, что такая модель слишком медленна и сложна, и потому строится еще одна – упрощенная, где инерцией роликов полностью пренебрегают, учитывая только трение в направлении оси ролика. В [102] изучается вопрос заноса омни-колесных экипажей при торможении в такой же модели.

Результаты, представленной работы опубликованы, либо приняты к печати в [104], где получены уравнения движения экипажа с массивными роликами без проскальзывания, в [105], где строится модель перехода с одного ролика на другой с позиции теории удара, и в [106, 107], где экипаж моделируется в постановке с регуляризованным сухим трением в точечном контакте ролика и опорной плоскости, а также в трудах конференций [108–115].

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Настоящая работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Во введении дано описание предметной области и цели данной работы, выполнен обзор литературы об омни-колесах и экипажах, оснащенных ими, о динамике систем тел, в том числе, с односторонними связями, ударами и трением, а также составлено краткое содержание работы.

Целью работы является изучение неуправляемого движения роликонесущего экипажа по горизонтальной плоскости с учетом инерции роликов и трения в двух постановках. В первой постановке опорная плоскость абсолютно шероховата, т.е. проскальзывание между роликом в контакте и плоскостью отсутствует. При этом предполагается, что при смене ролика в контакте про-

исходит мгновенное согласование скоростей системы в соответствии с новыми связями (удар связями). Во второй между контактным роликом и опорной плоскостью действует сила сухого трения Кулона.

Экипаж состоит из несущей платформы и трех одинаковых омни-колес, центры которых расположены в вершинах правильного треугольника, а плоскости перпендикулярны биссектрисам соответствующих углов. Омни-колесо моделируется абсолютно твердым диском и некоторым количеством распределенных по его окружности весоных роликов, свободно вращающихся вокруг своих осей, направленных вдоль касательных к окружности.

В первой и второй главе работы рассматривается движение экипажа по абсолютно шероховатой плоскости, т.е. предполагается, что проскальзывание между опорным роликом и плоскостью отсутствует. Уравнения движения получены в явном виде с использованием формализма лаконичных уравнений Я.В. Татарина. Изучена структура уравнений, найдены первые интегралы и проведено сравнение с уравнениями движения безынерционной модели. Показано, что если момент инерции ролика относительно его оси равен нулю, то уравнения совпадают с уравнениями безынерционной модели.

Во второй главе рассмотрена задача о смене ролика в контакте: при повороте колеса вокруг своей оси в контакт с плоскостью приходит новый ролик, скорость которого, вообще говоря, не согласована со связями, при этом возникает проскальзывание. Предполагается, что проскальзывание прекращается за бесконечный малый промежуток времени. Составлены линейные алгебраические уравнения, определяющие обобщенные скорости после смены ролика в контакте в соответствии с теорией удара. Таким образом, численное моделирование движения экипажа состоит из решения задачи Коши уравнений, полученных в первой главе, пока в контакте находится один и тот же ролик, и решения линейных алгебраических уравнений при смене ролика для получения начальных условий для следующего гладкого участка. Получены и проанализированы численные решения для симметричной конфигурации экипажа.

В третьей главе построена динамическая модель экипажа на плоскости с сухим трением Кулона-Амонтона, регуляризованным в окрестности нуля по скоростям участком линейной функции насыщения с достаточно большим

угловым коэффициентом. Особое внимание уделяется вопросу моделирования неударивающей связи в контакте ролика и горизонтальной плоскости, отслеживанию точки контакта ролика и опорной плоскости, а также алгоритмической реализации процесса переключения контакта от ролика к ролику при качении омни-колеса. Динамическая модель построена в формализме объектно-ориентированного моделирования на языке Modelica. Выполнена верификация динамической модели с использованием безынерционной модели.

В заключении перечислены результаты работы.

По результатам работы опубликованы и приняты к печати в рецензируемых журналах, реферируемых в международных базах WebOfScience, Scopus, RSCI и входящих в список ВАК, следующие статьи [104–107, 110, 113]

Результаты докладывались аспирантом на ряде международных и все-российских конференциях: Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам 2018, Суздаль, Россия, 6-11 июля 2018; 20-е Международное рабочее совещание по компьютерной алгебре (Дубна, 21-22 мая 2018), Дубна, Россия, 21-22 мая 2018; Ломоносовские Чтения - 2018, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 16-25 апреля 2018; Ломоносовские чтения - 2017, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 17-26 апреля 2017; 11th International Modelica Conference Versailles, France, September 21-23, 2015. Результаты также были представлены аспирантом на семинаре Аналитическая механика и теория устойчивости (имени В.В. Румянцева) под руководством д.ф.-м.н. проф. А.В. Карапетяна в 2017 и 2018 г. и на семинаре Динамика относительного движения под руководством д.ф.-м.н. проф. В.Е. Павловского на механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова в 2018 г.

Глава 1

Уравнения движения экипажа на омни-колесах с учетом динамики роликов

1 Постановка задачи

Рассмотрим экипаж с омни-колесами, движущийся по инерции по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Экипаж состоит из платформы и N одинаковых омни-колес, плоскости которых относительно платформы неподвижны. Каждое колесо может свободно вращаться относительно платформы вокруг собственной оси, расположенной горизонтально, и на каждом из них установлено n массивных роликов, так что оси роликов параллельны касательным к контурам дисков колес (см. левую часть фиг. 1.1). Ролики расположены по контуру дисков колес и показаны в виде затемненных областей, либо областей, ограниченных штриховой линией. Они пронумерованы от 1 до n . Таким образом, система состоит из $N(n + 1) + 1$ абсолютно твердых тел.

Введем неподвижную систему отсчета так, что ось OZ направлена вверх, а плоскость OXY совпадает с опорной плоскостью. Введем также подвижную систему отсчета $S\xi\eta Z$, жестко связанную с платформой экипажа так, что плоскость $S\xi\eta$ горизонтальна и содержит центры всех колес P_i . Будем считать, что оси колес лежат на лучах, соединяющих центр масс S плат-

Положение экипажа будем задавать следующими координатами: x, y — координаты точки S на плоскости OXY , θ — угол между осями OX и $S\xi$ (угол курса), χ_i ($i = 1, \dots, N$) — углы поворота колес вокруг их осей, отсчитываемые против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \mathbf{n}_i , и ϕ_j — углы поворота роликов вокруг их собственных осей. Таким образом, вектор обобщенных координат имеет вид

где сначала указаны углы поворота ϕ_k роликов, находящихся в данный момент в контакте с опорной плоскостью, а затем – остальных, “свободных”, роликов. Индекс s используется для сквозной нумерации свободных роликов и связан с номером колеса i и ролика на колесе j по формуле

11

Введем псевдоскорости

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \quad \mathbf{v}_S = R\nu_1 \mathbf{e}_\xi + R\nu_2 \mathbf{e}_\eta, \quad \nu_3 = \Lambda \dot{\theta}, \quad \nu_s = \dot{\phi}_s, \quad s = 1, \dots, N(n-1)$$

Их механический смысл таков: ν_1, ν_2 — проекции скорости точки S на оси системы $S\xi\eta$, связанные с платформой, ν_3 — с точностью до множителя угловая скорость платформы, ν_s — угловые скорости свободных роликов. Число независимых псевдоскоростей системы $K = N(n-1) + 3$. Таким образом, имеем

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos \theta - R\nu_2 \sin \theta, \quad \dot{y} = R\nu_1 \sin \theta + R\nu_2 \cos \theta$$

Будем считать, что проскальзывания между опорной плоскостью и роликами в контакте не происходит, т.е. скорости точек C_i контакта равны нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.2)$$

Выражая скорость точек контакта через введенные псевдоскорости и проектируя на оси системы $S\xi\eta$, получим:

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{\rho_k}(\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k); \quad \rho_k = l \cos \chi_k - r \quad (1.3)$$

$$\dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}) \quad (1.4)$$

Заметим, что знаменатель ρ_k в формуле (1.3) — расстояние от оси ролика до точки контакта, обращающееся в нуль на стыке роликов (см. левую часть фиг. 1.1). Это обстоятельство приводит к разрывам второго рода функций в правых частях уравнений движения и будет рассмотрено отдельно ниже. Уравнение (1.4) совпадает с уравнением связи в случае безынерционной модели роликов.

Таким образом, выражение обобщенных скоростей через псевдоскорости, учитывающее связи, наложенные на систему, можно записать в матричном виде:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}(\theta, \chi_i), \quad (1.5)$$

где компоненты матрицы \mathbf{V} имеют вид:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \tilde{V} & O_1 \\ O_2 & E \end{bmatrix}; \quad \tilde{V} = \begin{bmatrix} R \cos \theta & -R \sin \theta & 0 \\ R \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} \\ \frac{R}{l} \sin \alpha_i & -\frac{R}{l} \cos \alpha_i & -\frac{R}{\Lambda l} \\ \frac{R}{\rho_k} \cos \alpha_k & \frac{R}{\rho_k} \sin \alpha_k & 0 \end{bmatrix}$$

Здесь O_1 и O_2 – нулевые $(3 + 2n \times N(n-1))$ - и $(N(n-1) \times 3)$ -матрицы, E – единичная матрица размерности $N(n-1)$.

3. Уравнения движения. Воспользуемся лаконичным методом получения уравнений движения для систем с дифференциальными связями, предложенным Я.В. Татариновым [17]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \sum_{\mu=1}^K \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}, \quad \alpha = 1, \dots, K \quad (2.1)$$

Здесь L – лагранжиан, L^* – он же с учетом связей (здесь и далее верхний индекс $*$ означает учет связей), P_α – линейные комбинации формальных канонических импульсов p_i , определяемые из соотношения

$$\sum_{\mu=1}^K \nu_\mu P_\mu \equiv \sum_{i=1}^{N(n+1)+3} \dot{q}_i p_i$$

в котором \dot{q}_i выражены через псевдоскорости ν_μ в соответствии с формулами (1.5); $\{\cdot, \cdot\}$ – скобка Пуассона по p_i, q_i , после ее вычисления выполняется подстановка

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

(Подробности см. в работах [17, 19].)

Так как потенциальная энергия системы во время движения не меняется, лагранжиан равен кинетической энергии:

$$2L = 2T = M \mathbf{v}_S^2 + I_S \dot{\theta}^2 + J \sum_i \dot{\chi}_i^2 + B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.2)$$

Здесь M , I_S , J — массово-инерционные характеристики экипажа (его общая масса, момент инерции относительно оси SZ и инерции тела одного колеса относительно его оси вращения соответственно), B — момент инерции ролика относительно его оси вращения. Лагранжиан при учете связей определяется соотношением:

$$2L^* = \boldsymbol{\nu}^T V^T \mathcal{M} V \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu}$$

Матрица кинетической энергии имеет следующий вид:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{M}}_{11} & \widetilde{\mathcal{M}}_{12} & \widetilde{\mathcal{M}}_{13} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^T & \widetilde{\mathcal{M}}_{22} & \widetilde{\mathcal{M}}_{23} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{13}^T & \widetilde{\mathcal{M}}_{23}^T & \widetilde{\mathcal{M}}_{33} \end{bmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_{11} &= \text{diag}(M, M, I_S), \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{22} = J E_{N \times N}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{33} = B E_{Nn \times Nn} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12} &= O_{3 \times N}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ B \sin \chi_{11} & \dots & B \sin \chi_{Nn} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{23} = O_{N \times Nn} \end{aligned}$$

Здесь $O_{(\cdot)}$ и $E_{(\cdot)}$ — нулевые и единичные матрицы, в индексах которых указаны их размерности. В третьей строке $\widetilde{\mathcal{M}}_{13}$ сначала указаны элементы, соответствующие роликам, находящимся в контакте, а затем соответствующие “свободным” роликам; элементы упорядочены по возрастанию индексов, так что ролики одного колеса соседствуют.

Соответственно, структура симметрической матрицы \mathcal{M}^* кинетической энергии с учетом связей следующая:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^* &= \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{M}}_{11}^* & \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^* \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^{*T} & \widetilde{\mathcal{M}}_{22}^* \end{bmatrix} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{11}^* &= (m_{ij}^*)_{3 \times 3}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{22}^* = B E_{N(n-1) \times N(n-1)} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^* &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ B \Lambda^{-1} \sin \chi_{12} & \dots & B \Lambda^{-1} \sin \chi_{Nn} \end{bmatrix}_{3 \times N(n-1)} \end{aligned}$$

Здесь $E_{N(n-1) \times N(n-1)}$ — единичная матрица, $\chi_{kl} = \chi_k + \kappa_l$ — угол между вертикалью и осью ролика, где индекс $k = 1, \dots, N$ означает номер колеса, $l = 2, \dots, n$ — номер свободного ролика на колесе ($l = 1$ — ролик, находящийся в контакте).

Элементы матрицы $\widetilde{\mathcal{M}}_{11}^*$ зависят только от координат χ_i , которые входят в отношения B/ρ_i^2 и $B \sin \chi_i / \rho_i$, имеющие разрывы второго рода при смене роликов, т.е. при переходе с одного ролика на другой (см. равенство (1.3)). Явный вид элементов $\widetilde{\mathcal{M}}_{11}^*$ таков:

$$\begin{aligned} m_{11}^* &= MR^2 + \sum_i \left(J \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \alpha_i + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \cos^2 \alpha_i \right) \quad (11 \leftrightarrow 22, \sin \alpha_i \leftrightarrow \cos \alpha_i) \\ m_{33}^* &= \frac{1}{\Lambda} \left(I_S + \sum_i J \frac{R^2}{l^2} \right), \quad m_{12}^* = \sum_i \left(-J \frac{R^2}{l^2} + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \right) \sin \alpha_i \cos \alpha_i \\ m_{13}^* &= \frac{1}{\Lambda} \sum_i B \frac{R}{\rho_i} \sin \chi_i \cos \alpha_i, \quad m_{23}^* = \frac{1}{\Lambda} \sum_i B \frac{R}{\rho_i} \sin \chi_i \sin \alpha_i \end{aligned} \quad (2.3)$$

Первое слагаемое в левой части равенства (2.1) получается дифференцированием лагранжиана и подстановкой связей:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi) \boldsymbol{\nu}) = \mathcal{M}^*(\chi) \dot{\boldsymbol{\nu}} + \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi)) \boldsymbol{\nu} = \mathcal{M}^*(\chi) \dot{\boldsymbol{\nu}} + \sum_{i=1}^N \dot{\chi}_i^* \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu} \quad (2.4)$$

где $\mathcal{M}_i^* = \frac{\partial \mathcal{M}^*}{\partial \chi_i}$. Обратим внимание, что компоненты векторов под знаком суммы, соответствующие свободным роликам, т.е. компоненты с номерами $\alpha = 4, \dots, K$, имеют вид $\dot{\chi}_i^* \nu_3 B \Lambda^{-1} \cos \chi_{ij}$, где индексы i, j связаны с индексом α по формуле $\alpha = 3 + s(i, j)$ (см. формулу (1.1)).

Имеем выражения:

$$\begin{aligned} P_1 &= R \left(p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_i \left(\frac{p_{\chi_i}}{l} \sin \alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \cos \alpha_i \right) \right) \\ P_2 &= R \left(-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_i \left(-\frac{p_{\chi_i}}{l} \cos \alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \sin \alpha_i \right) \right) \\ P_3 &= \frac{1}{\Lambda} \left(p_\theta - \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i} \right) \\ P_s &= p_{\phi_s} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Поскольку коэффициенты лагранжиана L^* зависят только от координаты χ_i , его скобки Пуассона с P_1, P_2, P_3 — квадратичные формы псевдоскоростей, пропорциональные моменту инерции ролика B с коэффициентами, зависящими от χ_i :

$$\{P_1, L^*\} = -\frac{\partial P_1}{\partial p_{\chi_i}} \frac{\partial L^*}{\partial \chi_i} = -\frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu} \sin \alpha_i,$$

$$\{P_2, L^*\} = \frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu} \cos \alpha_i, \quad \{P_3, L^*\} = \frac{R}{2l\Lambda} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}, \quad \{P_s, L^*\} = 0, s > 3$$

Остается рассмотреть правую часть равенства (2.1): она отлична от нуля лишь при $\alpha = 1, 2, 3$.

Обозначая

$$\xi_{\pm}(\alpha) = \nu_1 \cos \alpha \pm \nu_2 \sin \alpha, \quad \eta_{\pm}(\alpha) = \nu_1 \sin \alpha \pm \nu_2 \cos \alpha$$

для импульсов $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ получим

$$\begin{aligned} p_x &= MR\xi_-(\theta), \quad p_y = MR\eta_+(\theta), \\ p_{\theta} &= BR \sum_i \frac{\sin \chi_i}{\rho_i} \xi_+(\alpha_i) + \frac{I_S}{\Lambda} \nu_3 + B \sum_s \sin \chi_s \nu_s \\ p_{\chi_i} &= J \frac{R}{l} (\eta_-(\alpha_i) - \frac{1}{\Lambda} \nu_3), \quad p_{\phi_{k1}} = \frac{BR}{\rho_k} \xi_+(\alpha_k) + \frac{B}{\Lambda} \sin \chi_k, \\ p_{\phi_s} &= \frac{B}{\Lambda} \nu_3 \sin \chi_s + B \nu_s \end{aligned} \tag{2.6}$$

Для упрощения записи правой части системы (2.1) введем обозначение для операции дискретной свертки произвольной функции f :

$$\sigma[f(\alpha, \chi)] = \sum_{k=1}^N f(\alpha_k, \chi_k) \frac{\sin \chi_k}{\rho_k^3}$$

Тогда скобки Пуассона в правой части системы (2.1) имеют вид (звездочкой

обозначена подстановка импульсов p_i)

$$\begin{aligned}
(\{P_1, P_2\})^* &= \left(-\sum_{k=1}^N R^2 \tau_k p_{\phi_k} \right)^* \\
&= -BR^2(R\nu_1\sigma[\cos \alpha] + R\nu_2\sigma[\sin \alpha] + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho \sin \chi]) = \\
&= -BR^2 \mathbf{p}_{12} \boldsymbol{\nu} \\
\mathbf{p}_{12} &= (\sigma[\cos \alpha], R\sigma[\sin \alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho \sin \chi], 0, \dots, 0) \\
(\{P_1, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left(-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta - \sum_{k=1}^N R \cos \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* \\
&= MR^2\Lambda^{-1}\nu_2 - \\
&\quad - BR^2\Lambda^{-1}(R\nu_1\sigma[\cos^2 \alpha] + R\nu_2\sigma[\sin \alpha \cos \alpha] + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi]) = \\
&= MR^2\Lambda^{-1}\nu_2 - BR^2 \mathbf{p}_{13} \boldsymbol{\nu} \\
\mathbf{p}_{13} &= \Lambda^{-1}(R\sigma[\cos^2 \alpha], R\sigma[\sin \alpha \cos \alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0) \\
(\{P_2, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left(-p_x \cos \theta - p_y \sin \theta - \sum_{k=1}^N R \sin \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = -MR^2\Lambda^{-1}\nu_1 - \\
&\quad - BR^2\Lambda^{-1}(R\nu_1\sigma[\sin \alpha \cos \alpha] + R\nu_2\sigma[\sin^2 \alpha] + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho \sin \alpha \sin \chi]) = \\
&= -MR^2\Lambda^{-1}\nu_1 - BR^2 \mathbf{p}_{23} \boldsymbol{\nu} \\
\mathbf{p}_{23} &= \Lambda^{-1}(R\sigma[\sin \alpha \cos \alpha], R\sigma[\sin^2 \alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho \sin \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0)
\end{aligned}$$

Окончательно, объединяя выражения для всех слагаемых (2.1), получаем, что уравнения движения имеют следующую структуру:

$$\mathcal{M}^* \dot{\boldsymbol{\nu}} = MR^2\Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \nu_2\nu_3 \\ -\nu_1\nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{R}{2l} \begin{bmatrix} -\mathcal{M}_i^* \sin \alpha_i \\ \mathcal{M}_i^* \cos \alpha_i \\ \mathcal{M}_i^* \Lambda^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - BR^2 \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\nu} - B \begin{bmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_1^* \cos \chi_{12} \\ \vdots \\ \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_N^* \cos \chi_{Nn} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Символ \star в последнем слагаемом правой части уравнений для $\alpha = 1, 2, 3$ заменяет выражения под знаком суммы в равенствах (2.4). Матрицы \mathcal{P}_α размера

$K \times K$ составлены из строк $\mathbf{p}_{\alpha\beta}$, определенных в Приложении и зависящих от геометрии экипажа и углов поворота колес χ_i :

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{p}_{13} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{13} \\ -\mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Поскольку матрицы \mathcal{M}_i^* и \mathcal{P}_α зависят от углов поворота колес χ_i , для замыкания системы к этим уравнениям надо добавить уравнения (1.4).

Структура уравнений позволяет выявить следующие свойства.

1. Система допускает интеграл энергии $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i)\boldsymbol{\nu} = h = \text{const}$ в силу общей теоремы об изменении полной механической энергии: так как система стеснена автономными идеальными связями, а силы консервативны, то полная энергия (в рассматриваемом здесь случае она равна кинетической энергии) сохраняется.

2. Если платформа экипажа неподвижна, т.е. $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$, свободные ролики сохраняют свою начальную угловую скорость: $\nu_s = \text{const}$, чего и следовало ожидать.

3. При $B = 0$ все слагаемые в правой части равенства (2.7), кроме первого, обращаются в нуль, как и все члены, соответствующие свободным роликам, в левой части (см. Приложение, равенства (2.3)). В этом случае существенными остаются первые три уравнения системы (2.1) относительно ν_1, ν_2, ν_3 , описывающие динамику безынерционной модели экипажа [15].

4. Существовавший в безынерционной модели линейный первый интеграл разрушается для модели с массивными роликами. При $B = 0$ он имеет вид $m_{33}^*\nu_3 = \text{const}$ (причем $m_{33} = \text{const}$) и следует непосредственно из третьего уравнения системы (2.1). При $B \neq 0$ скорость изменения ν_3 пропорциональна моменту инерции ролика B .

5. Поскольку скобки Пуассона в уравнениях для свободных роликов равны нулю, система допускает первые интегралы:

$$\nu_s + \frac{1}{\Lambda} \sin \chi_{ij} \nu_3 = \text{const} \quad (2.8)$$

Скорость вращения платформы ν_3 связана со скоростями собственного вращения свободных роликов. В частности, вращение экипажа вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр ($\nu_1(0) = 0, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) \neq 0$), неравномерно, в отличие от выводов, основанных на безынерционной модели.

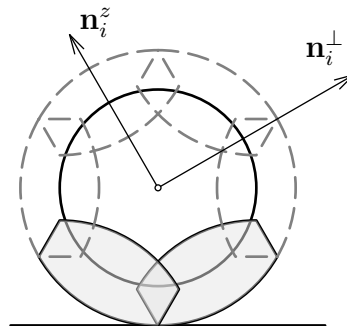
6. Одновременное изменение начальных значений всех псевдоскоростей $\boldsymbol{\nu} \rightarrow \lambda \boldsymbol{\nu}$, $\lambda \neq 0$ умножением на число, отличное от нуля, эквивалентно замене времени $t \rightarrow \lambda t$.

Глава 2

Смена ролика в контакте с опорной плоскостью

При рассмотрении динамики роликов отдельного внимания заслуживает момент перехода колеса с одного ролика на другой, поскольку вращение ролика, входящего в контакт, может не быть согласовано с условием отсутствия скольжения в контакте.

В тех интервалах времени, когда ролик в контакте с опорной плоскостью не меняется, динамика системы описывается уравнениями движения системы (см. [104]). Смена контакта на i -том колесе происходит при значении угла $\chi_i = \frac{2\pi}{n}$. При этом, во-первых, правая часть уравнений движения терпит разрыв второго рода из-за равенства нулю выражений $\rho_i = l \cos \chi_i - r$ в знаменателе. Во-вторых, происходит мгновенное снятие и наложение связей: условие отсутствия проскальзывания для ролика, выходящего из контакта,



Фиг. 2.1. Перекрытие

снимается, и аналогичное ему мгновенно налагается на вновь входящий в контакт ролик.

На практике первое обстоятельство никогда не реализуется, поскольку оси роликов в реальных системах имеют ненулевую толщину, а значит, концы роликов усекаются. При этом ролики располагают рядами в двух и более плоскостях, чтобы в каждый момент гладкая сторона хотя бы одного ролика была в контакте с плоскостью. В данной работе рассматриваются усеченные ролики (см. фиг. 2.1), но их оси расположены в одной плоскости, и допускается пересечение тел роликов в пространстве. Ось ролика находится на расстоянии $r = l \cos \frac{\pi}{n-1}$ от центра колеса. Ролик представляет собой тело вращения относительно этой оси дуги окружности радиуса l с углом раствора $\frac{2\pi}{n}$.

В данной главе проведено детальное рассмотрение момента смены ролика в контакте с учетом ударного характера взаимодействия с опорной плоскостью. Также, получены численные решения, состоящие из участков, определяемых уравнениями движения, и моментов смены контакта, моделируемых с точки зрения теории удара.

1 Наложение связи при смене ролика в контакте

В реальной системе при смене контакта имеет место скольжение роликов относительно плоскости, и при этом полная энергия системы рассеивается. В данной работе будем считать, что трение достаточно велико, и прекращение проскальзывания вновь вошедшего в контакт ролика происходит мгновенно. Это взаимодействие будет рассматриваться как абсолютно неупругий удар, происходящий при мгновенном наложении связи. Освободившийся ролик начинает свободно вращаться вокруг своей оси. Будем предполагать следующее:

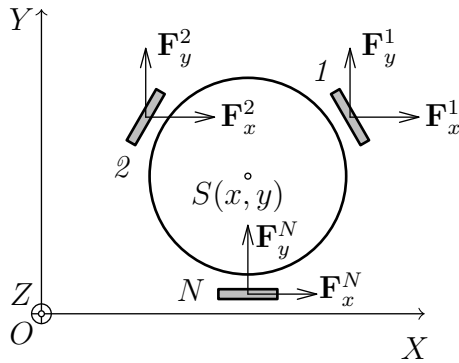
- удар происходит за бесконечно малый интервал времени $\Delta t \ll 1$, так что изменения обобщенных координат пренебрежимо малы $\Delta \mathbf{q} \sim \dot{\mathbf{q}} \Delta t \ll 1$, а изменения обобщенных скоростей конечны $\Delta \dot{\mathbf{q}} < \infty$;
- взаимодействие экипажа с опорной полоскостью во время удара сводит-

ся к действию в точках контакта нормальных и касательных реакций $\mathbf{R}_i = \mathbf{N}_i + \mathbf{F}_i$ с нулевым моментом $\mathbf{M}_i = 0$;

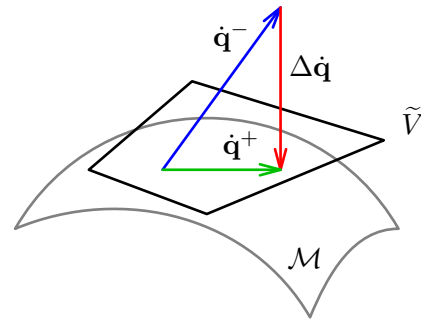
- к моменту окончания удара $t^* + \Delta t$ уравнения связей выполнены $\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}^+$, т.е. за время Δt проскальзывание вошедшего в контакт ролика заканчивается.

Исходя из этих предположений, в следующих разделах получим системы алгебраических уравнений, связывающих значения обобщенных скоростей непосредственно перед ударом $\dot{\mathbf{q}}^-$ и значения псевдоскоростей сразу после удара $\boldsymbol{\nu}^+$ двумя разными способами: в первом случае, будем вводить ударные реакции, действующие в точках контакта, а во втором, будем рассматривать неупругий удар как проецирование вектора обобщенных скоростей на плоскость, задаваемую уравнениями вновь налагаемых связей.

Таким образом, моделирование системы состоит в решении задачи Коши системы обыкновенных дифференциальных уравнений в интервалах между моментами смены роликов в контактах и решения систем алгебраических уравнений в эти моменты для получения начальных условий для следующего безударного интервала.



Фиг. 2.2. Компоненты векторов ударных реакций в точках контакта



Фиг. 2.3. Проецирование вектора обобщенных скоростей на ядро дифференциальной формы связей

1.1 Основное уравнение теории удара

Составим алгебраические уравнения, связывающие значения псевдоскоростей после удара и величины ударных импульсов. В течение бесконечно ма-

лого времени Δt наложены только геометрические связи, так что скорости $\dot{\mathbf{q}}$ независимы. Запишем уравнение удара в обобщенных координатах [64]:

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{Q}, \quad (1.1)$$

где \mathbf{M} – матрица кинетической энергии без учета связей (так что $\mathcal{M}^* = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}$), а \mathbf{Q} – вектор ударных импульсов обобщенных сил:

$$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_\theta, Q_{\chi_i}|_{i=1}^N, Q_{\phi_i}|_{i=1}^N, Q_s)^T$$

Исходя из геометрии системы (см. фиг. 2.2), получаем, что компоненты этого вектора связаны с касательными составляющими реакций следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sum_{i=1}^N F_i^x \\ Q_2 &= \sum_{i=1}^N F_i^y \\ Q_\theta &= \sum_{i=1}^N Q_\theta^i = \sum_{i=1}^N R(-F_i^x \sin(\theta + \alpha_i) + F_i^y \cos(\theta + \alpha_i)) \\ Q_{\chi_i} &= \frac{l}{R} Q_\theta^i \\ Q_{\phi_i} &= -\rho_i (F_i^x \cos(\theta + \alpha_i) + F_i^y \sin(\theta + \alpha_i)) \\ Q_s &= 0 \end{aligned}$$

В матричном виде $\mathbf{Q} = \mathbf{KF}$, где \mathbf{K} имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ -R \sin(\theta + \alpha_1) & R \cos(\theta + \alpha_1) & \dots & -R \sin(\theta + \alpha_N) & R \cos(\theta + \alpha_N) \\ -l \sin(\theta + \alpha_1) & l \cos(\theta + \alpha_1) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -l \sin(\theta + \alpha_N) & l \cos(\theta + \alpha_N) \\ -\rho_1 \cos(\theta + \alpha_1) & -\rho_1 \sin(\theta + \alpha_1) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\rho_N \cos(\theta + \alpha_N) & -\rho_N \sin(\theta + \alpha_N) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Размерность матрицы \mathbf{K} равна $(3 + N(n + 1)) \times 2N$, и её ранг максимален.

Непосредственно перед ударом связи, запрещающие проскальзывание в точках касания роликов, находящихся в контакте в этот момент, снимаются. В момент сразу после удара аналогичные связи налагаются на вновь входящие в контакт ролики.

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+$$

Тогда уравнение (1.1) можно записать в виде:

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{KF} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^- \quad (1.2)$$

Полученная линейная система относительно $\boldsymbol{\nu}^+$ и \mathbf{F} допускает единственное решение.

1.2 Разрешимость основного уравнения теории удара при наложении дифференциальных связей

Обоснуем существование и единственность решения уравнения (1.2).

Наложение на систему связей, аналогичных (1.2), равносильно заданию на конфигурационном многообразии дифференциальной формы \mathbf{J} и требованию

к вектору обобщенных скоростей находиться в ядре этой формы:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}^+ = 0, \quad (1.3)$$

то есть в линейном подпространстве $\tilde{V} = \ker \mathbf{J}$ пространства виртуальных перемещений $T_{\mathbf{q}}\mathcal{M}$. В этом подпространстве размерности $\dim \mathbf{q} - \text{rk} \mathbf{J}$ можно выбрать базис и компоненты вектора обобщенных скоростей в этом базисе использовать как псевдоскорости: $\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+$, при этом для матрицы дифференциальной формы связей \mathbf{J} и матрицы \mathbf{V} , связывающей псевдоскорости и обобщенные скорости, будет выполнено равенство:

$$\mathbf{J}\mathbf{V} = 0. \quad (1.4)$$

Налагаемые связи будем считать идеальными, то есть работу ударных импульсов на допустимых связями перемещениях равной нулю:

$$0 = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}^+ = \mathbf{Q}^T \mathbf{V} \delta \boldsymbol{\nu}^+. \quad (1.5)$$

Таким образом, ударные импульсы находятся в подпространстве, ортогональном \tilde{V} , а значит, вектор \mathbf{Q} может быть представлен в базисе, образованном столбцами матрицы \mathbf{J}^T : $\mathbf{Q} = \mathbf{J}^T \mathbf{F}$.

Для экипажа с омни-колесами, рассматриваемого здесь, матрица дифференциальной формы связей (1.2) может быть получена, в частности, как якобиан зависимости вектора из координат точек нижних роликов колес экипажа, находящихся в контакте с опорной плоскостью, в неподвижной системе отсчета $OXYZ$, от обобщенных координат \mathbf{q} : $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$, где $\mathbf{r} = (x_1, y_1, \dots, x_N, y_N)^T$ (координаты вдоль оси Z опущены, поскольку они учтены при введении обобщенных координат, и соответствующие им компоненты якобиана равны нулю). В этом случае \mathbf{J}^T в точности совпадает с матрицей \mathbf{K} из раздела 1.1.

Итак, основное уравнение удара (1.1) можно записать в более общем, чем полученный для изучаемого экипажа (1.2), виде:

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{J}^T \mathbf{F} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-, \quad (1.6)$$

где вместо матрицы \mathbf{K} , приведенной в разделе 1.1, стоит любая матрица дифференциальной формы связей.

Равенство (1.6) есть система алгебраических уравнений относительно вектора неизвестных $(\boldsymbol{\nu}^+, \mathbf{F})^T$. Матрица $(\mathbf{M}\mathbf{V}; -\mathbf{J}^T)$ этой системы – квадратная размерности $\dim \mathbf{q} \times \dim \mathbf{q}$, поскольку столбцы \mathbf{V} и \mathbf{J}^T образуют базисы в дополнительных подпространствах $\mathbb{R}^{\dim \mathbf{q}}$. По той же причине она невырождена. Действительно, поскольку с одной стороны, каждая из систем столбцов $\{\mathbf{V}_{\cdot i}\}$ и $\{\mathbf{J}_{\cdot j}^T\}$ линейно-независима, и с другой, эти две системы взаимно ортогональны (1.4), то действие положительно определенного оператора \mathbf{M} на \mathbf{V} не нарушает линейной независимости системы столбцов в целом. Показать это можно от противного, предположив существование таких чисел x_i и y_j , не равных нулю одновременно, что $\sum_i x_i \mathbf{M}\mathbf{V}_{\cdot i} + \sum_j y_j \mathbf{J}_{\cdot j}^T = 0$, домножив это равенство скалярно на каждый из столбцов $\{\mathbf{V}_{\cdot \alpha}\}$ и рассмотрев сумму полученных выражений: $\sum_{\alpha, i} x_i \mathbf{V}_{\cdot \alpha}^T \mathbf{M}\mathbf{V}_{\cdot i} + \sum_{\alpha, j} y_j \mathbf{V}_{\cdot \alpha}^T \mathbf{M}\mathbf{J}_{\cdot j}^T = \mathbf{V}^T \mathbf{M}\mathbf{V}\mathbf{x} + \mathbf{V}^T \mathbf{J}^T \mathbf{y}$, где последнее слагаемое равно нулю в силу (1.4), а первое отлично от нуля, поскольку матрица $\mathbf{V}^T \mathbf{M}\mathbf{V}$ является матрицей Грама линейно-независимой системы столбцов матрицы \mathbf{V} в метрике \mathbf{M} , а значит, невырождена – противоречие. Таким образом, система (1.6) имеет единственное решение.

Отметим также, что мгновенное наложение связи можно рассматривать как абсолютно неупругий удар, при котором теряется компонента $\Delta \dot{\mathbf{q}}$ вектора обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}^-$, ортогональная подпространству \tilde{V} в кинетической метрике, и соответственно, находить вектор обобщенных скоростей после удара $\dot{\mathbf{q}}^+ = \dot{\mathbf{q}}^- - \Delta \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ \in \tilde{V}$ можно непосредственно из условия идеальности связей (1.5) и основного уравнения удара (1.1), минуя вычисление величин реакций \mathbf{Q} или \mathbf{F} и необходимой для этого матрицы \mathbf{J} :

$$0 = \mathbf{V}^T \mathbf{Q} = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \Delta \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}^T \mathbf{M} (\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{V}^T \mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{V}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-,$$

откуда:

$$\boldsymbol{\nu}^+ = (\mathbf{V}^T \mathbf{M}\mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-.$$

Эту же формулу можно получить и из уравнения (1.6), домножая его слева на \mathbf{V}^T . Симметрично, при умножении (1.6) слева на $\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}$, имеем выражение для реакций:

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{J}\mathbf{M}\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^-,$$

не включающее явно матрицу связей \mathbf{V} .

1.3 Изменение кинетической энергии

Выясним, как меняется кинетическая энергия при смене ролика в контакте:

$$\begin{aligned} 2\Delta T &= 2(\mathbf{T}^+ - \mathbf{T}^-) = (\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^+, \dot{\mathbf{q}}^+) - (\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-, \dot{\mathbf{q}}^-) = \\ &= (\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \Delta\dot{\mathbf{q}}) + 2(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-, \Delta\dot{\mathbf{q}}) = -(\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \Delta\dot{\mathbf{q}}) + 2(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^+, \Delta\dot{\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

Последнее слагаемое равно нулю в силу идеальности связей (1.5) и основного уравнения удара (1.1), т.е. равенства нулю мощности ударных импульсов на перемещениях, допускаемых связями

$$(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^+, \Delta\dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}^+) = (\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{q}}^+) = 0.$$

Таким образом, потеря кинетической энергии системы равна энергии потерянных скоростей $\Delta\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-$:

$$\Delta T = -\frac{1}{2}(\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \Delta\dot{\mathbf{q}}) \leq 0,$$

что соответствует теореме Карно [64].

2 Примеры движений

Рассмотрим результаты расчетов для трех вариантов начальных условий.

1. Вращение вокруг своей оси ($\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$) (фиг. 2).
2. Движение по прямой в направлении оси $S\xi$ ($\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = \nu_3(0) = 0$) (фиг. 2).
3. Движение с ненулевой скоростью центра масс и, одновременно, с ненулевой угловой скоростью платформы ($\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$) (фиг. 2).

Такие же варианты рассмотрены в [104] при интегрировании уравнений движения на гладких участках с упрощенной моделью изменения обобщенных скоростей при смене контакта.

Расчеты выполнены для симметричного трехколесного экипажа ($\alpha_i = \frac{2\pi}{N}(i-1), N=3$) с $n=5$ роликами на колесе. Все величины безразмерны, так

что радиусы платформы и колеса $R = 0.15$ и $r = 0.05$, массы платформы, колеса и ролика 1, 0.15 и 0.05. При этом момент инерции ролика $B \approx 1.6 \cdot 10^{-5}$.

Во всех трех случаях наблюдается убывание кинетической энергии скачками в моменты смены контакта. В промежутки времени между сменами энергия остается постоянной.

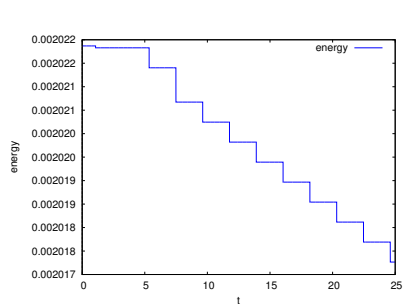
В вариантах 1 и 2 заметны переходные режимы вращения роликов в начале движения, когда колесо совершает первый оборот, и каждый ролик проходит полный круг, выходя из контакта и возвращаясь в него снова.

В случае 1 вращения вокруг вертикали угловая скорость платформы ν_3 в среднем медленно убывает (немонотонно): уменьшается на 5% за первые 10^3 с. Кинетическая энергия системы также медленно убывает. Центр масс покоится. На фиг. 2 приведены скорости собственного вращения роликов на первом колесе $\dot{\phi}_{1j}$. Находящийся в контакте ролик неподвижен относительно колеса (в силу связи со скоростью центра масс, см. (1.3) при $\nu_1 = \nu_2 = 0$, чему соответствуют участки графиков, лежащие на оси абсцисс. Когда контакт этого ролика с опорной плоскостью прекращается, он начинает вращаться за счёт вращения экипажа в целом вокруг вертикальной оси (см. первый интеграл (2.8), существующий на гладких участках). После полного оборота колеса ролик приобретает некоторую скорость вращения, которую мгновенно теряет при следующем входе в контакт. В результате вся система теряет часть энергии, испытывая удар связями непроскальзывания. Скорость ν_3 вращения экипажа вокруг вертикальной оси при этом изменяется скачком (см. например $t = 1, 3, 5, 7.5$ с на графиках).

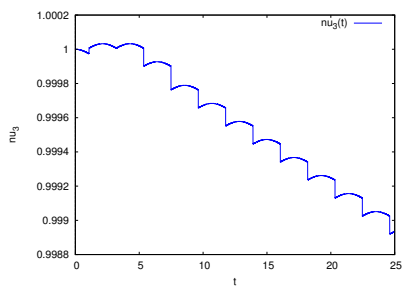
При поступательном движении экипажа (вариант 2) угловая скорость тождественно равна нулю. Зависимости скорости центра масс экипажа $v = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ и кинетической энергии T от времени показаны на фиг. 2. Обе величины убывают (энергия – монотонно, скачками, с каждой сменой контакта; скорость центра масс – в среднем). Переднее колесо не вращается вокруг своей оси и движется с опорой на один и тот же ролик. Скорость вращения этого ролика связана со скоростью центра масс согласно связи (1.3). Остальные ролики переднего колеса покоятся относительно экипажа. На задних колесах все ролики раскручиваются, скорости вращения показаны на фиг. 2.5с. После того как все ролики побывают в контакте, их движение становится квазипе-

риодичным.

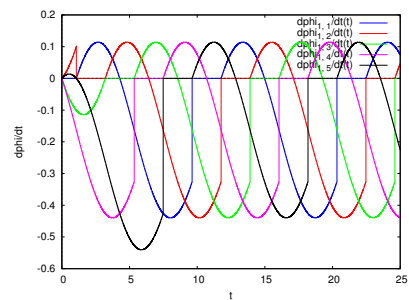
При комбинации поступательного и вращательного движений экипажа (случай 3), кинетическая энергия его центра масс убывает, переходя в кинетическую энергию платформы в осях Кёнига. Угловая скорость экипажа ω_3 растет и достигает максимума (фиг. 2.6с) в момент $t_1^* \approx 150$ с, после чего почти монотонно убывает (с точностью до влияния первых интегралов (2.8)), скорость центра S экипажа v становится исчезающе малой к моменту $t_2^* \approx 300$ с (фиг. 2.6b), а кинетическая энергия (фиг. 2.6a) убывает при каждой смене контакта. Центр платформы S описывает спираль (фиг. 2.6d). После почти полной остановки центра масс при $t > t_2^*$ экипаж вращается вокруг вертикальной оси Sz , постепенно замедляясь. Угловые скорости роликов представляют собой квазипериодические функции времени (характерный участок представлен на фиг. 2.6f).



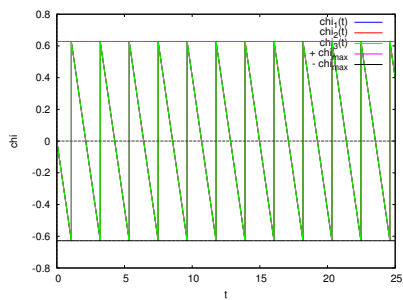
(a) Кинетическая энергия



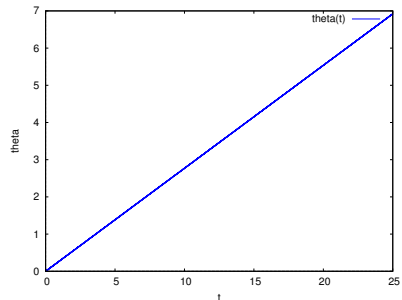
(b) Угловая скорость экипажа



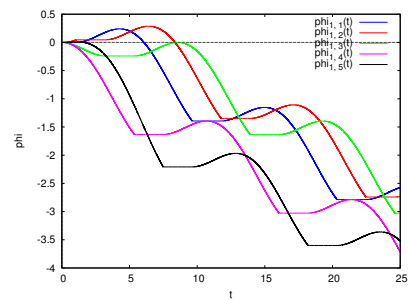
(c) Угловые скорости роликов



(d) Углы поворота колес

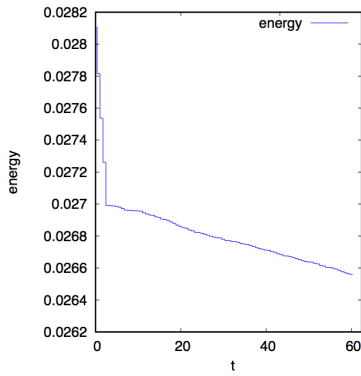


(e) Угол поворота экипажа

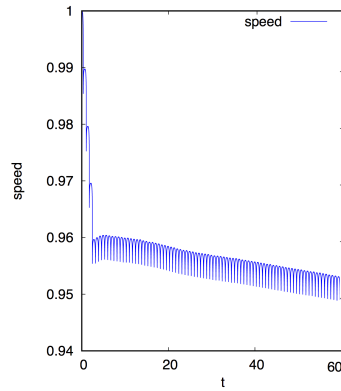


(f) Углы поворота роликов

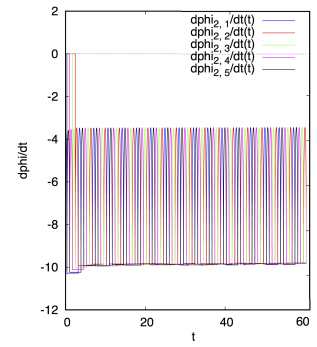
Фиг. 2.4. Вращение экипажа вокруг своей оси



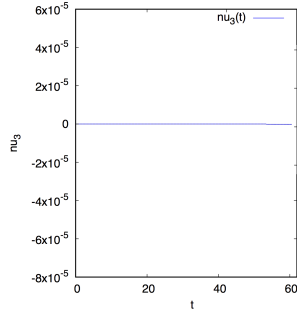
(a) Кинетическая энергия



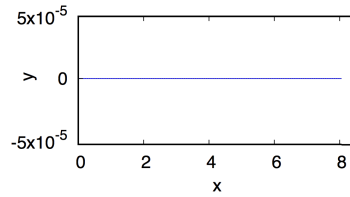
(b) Скорость центра масс



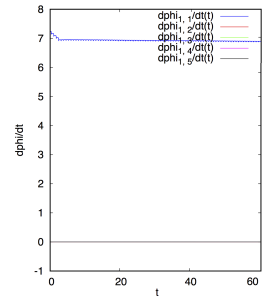
(c) Угловые скорости роликов на заднем колесе



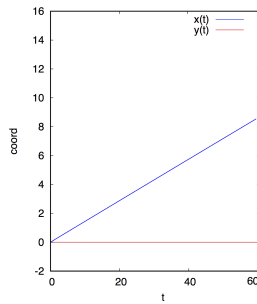
(d) Угловая скорость экипажа



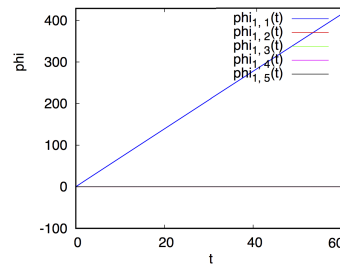
(e) Траектория



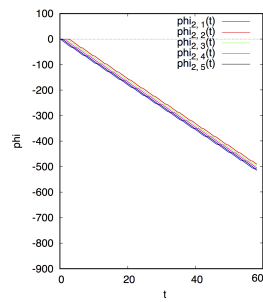
(f) Угловые скорости роликов на переднем колесе



(g) Координаты центра масс

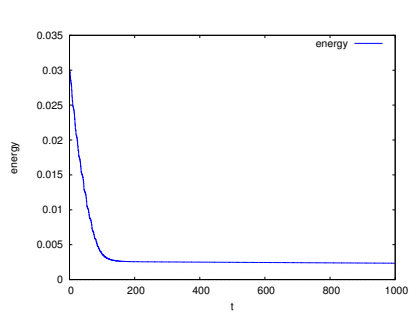


(h) Углы поворота роликов на переднем колесе

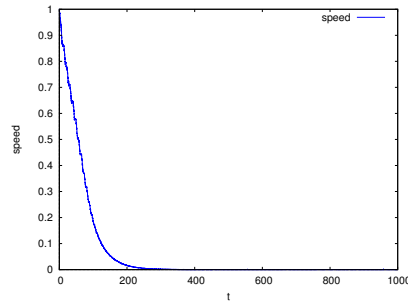


(i) Углы поворота роликов на заднем колесе

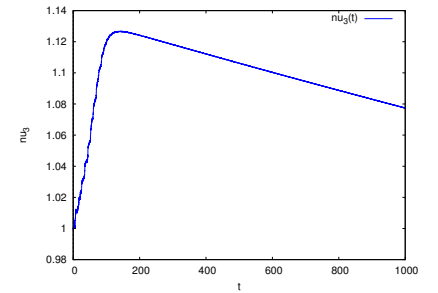
Фиг. 2.5. Движение экипажа по прямой



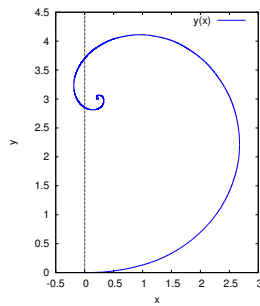
(a) Кинетическая энергия



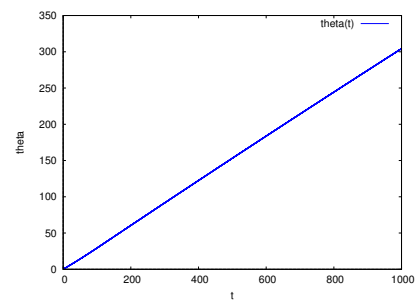
(b) Скорость центра масс



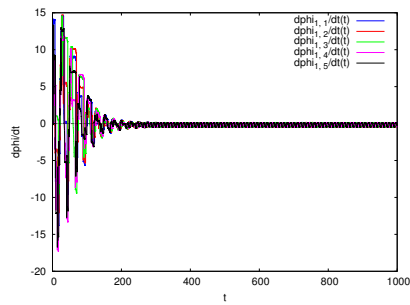
(c) Угловая скорость экипажа



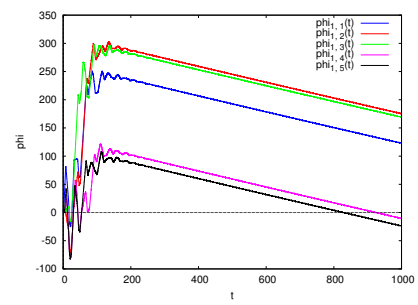
(d) Траектория центра масс



(e) Угол поворота экипажа



(f) Угловые скорости роликов на переднем колесе



(g) Углы поворота роликов на переднем колесе

Фиг. 2.6. Движение экипажа с закруткой

Глава 3

Динамика экипажа на ОМНИ-колесах с трением

Наряду с постановкой задачи движения омни-колесного экипажа по абсолютно шероховатой плоскости, интерес представляет его динамика на плоскости с трением. В настоящей главе строится модель экипажа на плоскости с сухим трением Кулона-Амонтона, регуляризованного в окрестности нуля по скоростям участком линейной функции насыщения с достаточно большим угловым коэффициентом, то есть достаточно сильного вязкого трения.

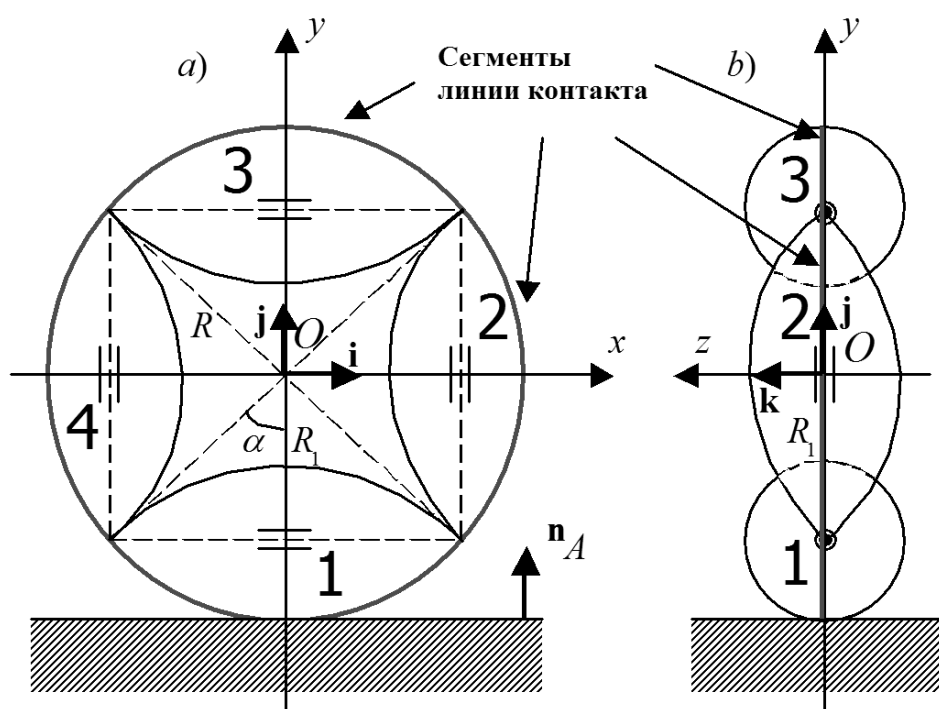
Вначале моделируется динамика ролика, совершающего свободное движение в поле сил тяжести. При этом предполагается, что на ролик может быть наложена неудерживающая связь — твердотельный контакт с горизонтальной плоскостью. Оказалось, что в упомянутых условиях возможно применение упрощенного и эффективного алгоритма отслеживания контакта. На следующем этапе реализуется модель омни-колеса, а затем — экипажа в целом. Геометрия экипажа та же, что и в предыдущих главах.

Особое внимание уделяется вопросу конструирования неудерживающей связи в контакте ролика и горизонтальной плоскости, отслеживанию точки контакта ролика и опорной плоскости, а также алгоритмической реализации процесса переключения контакта от ролика к ролику при качении омни-колеса. Для удобства описания модели отслеживания контакта, в этой главе вводятся специальные обозначения, не связанные с принятыми в предыдущих главах.

Динамические свойства результирующей модели экипажа иллюстрируются при помощи численных экспериментов. Проводится верификация построенной модели в сравнении с безынерционной моделью при стремлении суммарной массы роликов к нулю.

1 Динамика ролика и отслеживание контакта

Для простоты и наглядности мы ограничиваемся рассмотрением омни-колес, оснащенных четырьмя роликами. Также для простоты сами ролики имеют оси вращения, лежащие в плоскости колеса (Рис. 3.1).



Фиг. 3.1. Омни-колесо в вертикальном положении: а) вид сбоку; б) вид спереди.

Предполагается также, что ролики размещаются на колесе таким образом, что для вертикально поставленного омни-колеса проекция линии контактирования наинизшего ролика с горизонтальной плоскостью будет состоять из последовательности сегментов соответствующих линий контактирования отдельных роликов. Эти сегменты сопрягаются таким образом, что при переходе контакта от ролика к ролику нормальная составляющая скорости точки ролика, находящейся в точке контакта, к горизонтальной плоскости равна

нулю. Это означает отсутствие удара по нормали к плоскости. В случае коллинеарности осей роликов и плоскости колеса скачки скорости скольжения по касательному направлению к горизонтальной плоскости также отсутствуют, так как при переходе контакта между роликами их внешние поверхности непрерывно вырождаются в точку (в идеализированной модели), что означает отсутствие кинематического влияния собственного вращения роликов при переходе контакта с ролика на ролик. Так что в результате переключения контактов между роликами омни-колеса не приведет к нарушению регулярности движения в силу причин ударного характера. Заметим еще раз, что все описанное будет справедливо, если колесо все время остается в вертикальном положении.

2 Модель динамики отдельного ролика.

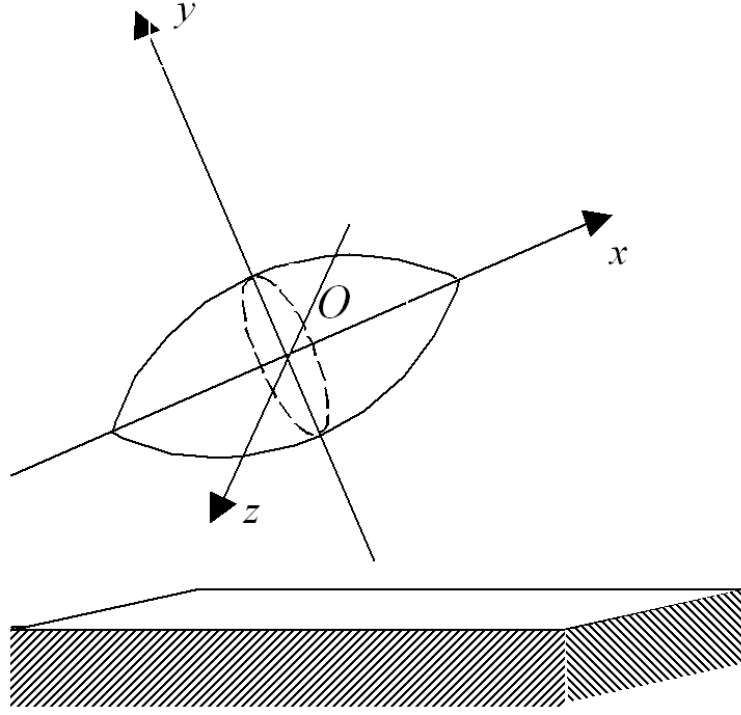
Вначале предположим, что ролик представляет собой осесимметричное вентенообразное твердое тело с внешней поверхностью, задаваемой в своих собственных осях $Oxyz$ уравнением

$$x^2 + \left(\sqrt{y^2 + z^2} + R_1 \right)^2 = R^2, \quad (2.1)$$

где R — радиус омни-колеса, $R_1 = R \cos \alpha$ — расстояние от центра ролика до центра колеса, $\alpha = \pi/n$ — половина центрального угла, под которым ролик виден из центра колеса, n — количество роликов на колесе.

Динамика поступательно-вращательного движения реализуется так, как это описано в [94], в виде уравнений Ньютона – Эйлера. Причем для моделирования вращательного движения твердого тела используется алгебра кватернионов [90, 91].

Отдельную проблему представляет задача отслеживания контакта между поверхностью ролика и горизонтальной плоскостью. Для моделирования динамики твердого тела с неударживающей связью применена технология, описанная в [93]. В данном случае можно было бы применить систему алгебраических или дифференциально-алгебраических уравнений. Однако эти уравнения вырождаются в точках $x = \pm R \sin \alpha$ в координатах ролика. Такое вырождение обычно приводит к аварийному завершению вычислительного



Фиг. 3.2. Ролик над горизонтальной плоскостью. Вид сбоку.

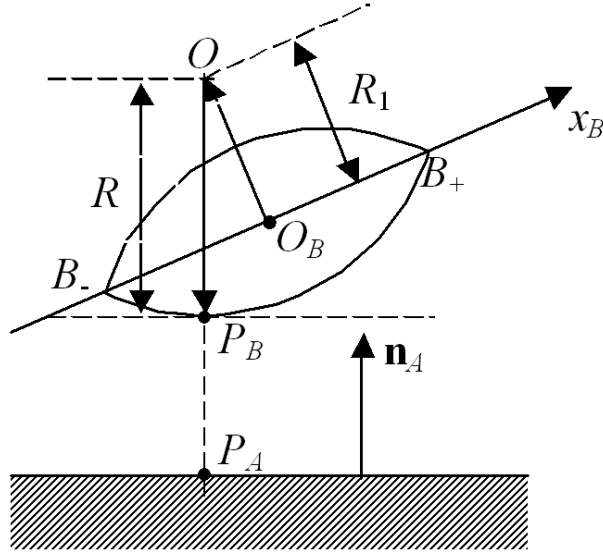
процесса моделирования.

В нашей задаче положение спасает специфика конфигурации, обеспечивающей постоянство вертикального расположения омни-колес. При этом условии можно указать явную формулу, позволяющую вычислить ближайшую к плоскости точку P_B ролика (Рис. 3.3). Этой точке всегда «противостоит» её вертикальная проекция P_A на плоскость (Рис. 3.3).

Обозначим символом $\mathbf{i}_B = (1, 0, 0)^T$ орт собственной оси ролика $O_B x_B$. Этот вектор представлен в системе координат ролика $O_B x_B y_B z_B$. Пусть T_B — матрица поворота ролика относительно инерциальной системы координат $O_A x_A y_A z_A$, связанной с неподвижной плоскостью. Пусть также \mathbf{r}_B — радиус-вектор геометрического центра ролика в текущий момент времени и $\mathbf{n}_A = (0, 1, 0)^T$ — орт нормали (восходящей вертикали) к плоскости. Плоскость условно обозначается нами телом с индексом A , ролик — B . Пусть \mathbf{d} — горизонтальный орт, вычисляемый по формуле

$$\mathbf{d} = \frac{T_B \mathbf{i}_B \times \mathbf{n}_A}{|T_B \mathbf{i}_B \times \mathbf{n}_A|}.$$

Тогда, очевидно, отрезок $\overrightarrow{O_B \mathcal{O}}$, расположенный в вертикальной плоскости,



Фиг. 3.3. Схема отслеживания контакта: вид сбоку отдельного ролика.

будет иметь длину R_1 и задаваться формулой

$$\overrightarrow{O_B O} = R_1 \mathbf{d} \times T_B \mathbf{i}_B.$$

Здесь O — центр кривизны окружности вертикального сечения ролика (Рис. 3.3). Так что самая нижняя точка P_B внешней поверхности ролика будет задаваться по формуле

$$\mathbf{r}_{P_B} = \mathbf{r}_B + R_1 \mathbf{d} \times T_B \mathbf{i}_B - R \mathbf{n}_A, \quad (2.2)$$

поскольку точка P_B лежит на упоминавшейся выше окружности на общей вертикали с точкой O . Для вычисления положения точки P_A нужно вторую координату вектора \mathbf{r}_{P_B} положить равной нулю

$$\mathbf{r}_{P_A} = (x_{P_B}, 0, z_{P_B})^T. \quad (2.3)$$

Вся описанная выше вычислительная процедура будет справедлива только, если вектор $T_B \mathbf{i}_B$ имеет направление, ограниченное по вертикали углами $\pm \alpha$. Если соответствующий угол превышает значение α , то следует положить $P_B = B_-$, где B_- — левая концевая точка ролика. Если же этот угол меньше величины $-\alpha$, нужно положить $P_B = B_+$, где B_+ — правая концевая точка ролика.

В конечном итоге условие контактирования ролика и плоскости можно записать в виде

$$|T_B \mathbf{i}_B \cdot \mathbf{n}_A| \leq \sin \alpha. \quad (2.4)$$

Это условие, однако, позволяет из всего множества роликов колеса выделить нижний (контактирующий) и верхний. Чтобы отбросить случай последнего ролика можно к последнему условию присоединить также требование

$$y_B < R, \quad (2.5)$$

где y_B — высота центра ролика относительно инерциальной системы координат.

Таким образом, конъюнкция условий (2.4) и (2.5) означает наличие контакта. В противном случае, при отсутствии контакта, нормальная реакция отсутствует (закон Синьорини). С другой стороны, реализация контакта геометрически означает выполнение скалярного условия

$$y_{P_B} = 0, \quad (2.6)$$

а его отсутствие — также скалярного (альтернативного) условия

$$F_n = 0,$$

где F_n — нормальная составляющая реакции (в данном случае отсутствующей) приложенной в точке P_B .

В случае фактического выполнения контакта помимо нормальной реакции вычисляется также её касательная составляющая, симулирующая силу трения. Для касательного контактного усилия имеется (как и для нормального) множество различных моделей. Мы остановились на реализации простейшего случая — модели сухого трения при одноточечном твердотельном контакте. При этом, как известно [86], идеальный «сухой» случай реализовать не удастся. Вместо разрывной функции sign от касательной скорости относительного скольжения контактирующих поверхностей используется её регуляризованный в нуле вариант. В нашем случае вместо функции знака sign применяется функция линейного насыщения, имеющая в окрестности нуля «крутой» линейный участок. Для таких функций известен результат [86] о близости аппроксимирующего движения и движения, соответствующего «точному» случаю разрывной функции sign .

Модель состоит из: а) твердого тела платформы омни-экипажа; б) трех твердых тел — моделей омни-колес; в) двенадцати твердых тел роликов,

размещенных на колесах. В соответствии, например, с [94] для каждого объекта, моделирующего твердое тело, реализуются шесть обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) Ньютона для движения центра масс тела плюс семь ОДУ Эйлера для вращательного движения тела вокруг центра масс. В последнем случае имеется четыре кинематических уравнения Эйлера для кватерниона ориентации тела плюс три динамических уравнения Эйлера для вектора угловой скорости твердого тела. В результате полная модель экипажа задается системой ОДУ порядка $16 \cdot 13 = 208$. Кроме этого, механические связи могут задавать дополнительные дифференциальные уравнения.

Колеса, собранные в экипаж, с неизбежностью будут сохранять вертикальное положение. Поэтому упрощенный алгоритм отслеживания контакта, описанный выше, всегда будет работать правильно.

3 Моделирование трения в контакте

Вычислительная практика показала, что уравнения контакта в форме (2.6) стабильно приводит к аварийному завершению процесса симуляции динамической модели ролика. Аналогичный результат получается, если в качестве уравнения контактирования использовать уравнение вида

$$v_n = 0,$$

где v_n – нормальная составляющая скорости точки контактирования, лежащей на теле B , относительно тела A (горизонтальной плоскости). И только уравнение вида

$$\dot{v}_n = 0$$

приводит к требуемому результату – корректной работе объекта контактирования (реализованного в данном случае на языке Modelica [89]) в процессе симуляции модели. Заметим, что вся реализация процесса контактирования выполнена в предположении точечного «твердого» контакта твердых тел без какой-либо податливости.

Для каждого ролика модели омни-экипажа при контактировании «включается» используемая здесь модель трения. Это «простейший» закон Амон-

тона – Кулона сухого трения. На самом деле вместо этого нами используется кусочно-линейная аппроксимация точного закона трения [92]. Эта аппроксимация обеспечивает высокую точность вычисления движения тел на больших интервалах времени [86]. Заметим, что и в общем случае реализация модели неудерживающей связи основывается на результатах, обозначенных в работе [92].

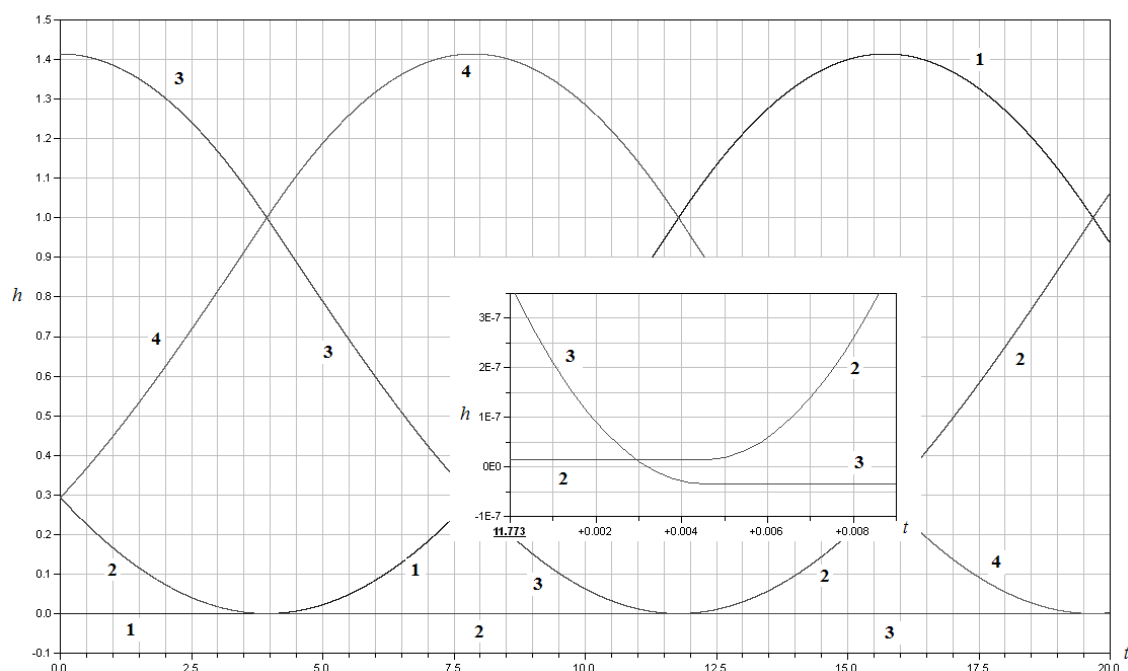
Конструкция омни-колеса такова, что в каждый данный момент времени имеется только один контакт. Остальные ролики «висят» над полом. При этом механическая связь между полом и, «висящим» на ободе колеса, роликом не исчезает – алгоритм отслеживания контакта продолжает работать, генерируя в качестве реакций нулевые усилия и моменты.

В случае фактического выполнения контакта помимо нормальной реакции вычисляется также её касательная составляющая, симулирующая силу трения. Для касательного контактного усилия имеется (как и для нормального) множество различных моделей. Мы остановились на реализации простейшего случая – модели сухого трения при одноточечном твердотельном контакте. При этом, как известно [86], идеальный «сухой» случай реализовать не удастся. Вместо разрывной функции sign от касательной скорости относительного скольжения контактирующих поверхностей используется её регуляризованный в нуле вариант. В нашем случае вместо функции знака sign применяется функция линейного насыщения, имеющая в окрестности нуля «крутой» линейный участок. Для таких функций известен результат [86] о близости аппроксимирующего движения и движения, соответствующего «точному» случаю разрывной функции sign .

В процессе отладки модели рассматривались автономные движения отдельного омни-колеса.

Заметим, что перед началом процесса редукции индекса системы дифференциальных алгебраических уравнений полной модели экипажа, реализованного в программном обеспечении лаборатории динамического моделирования Dymola [88], эта модель состоит из: а) твердого тела платформы омни-экипажа; б) трех твердых тел – моделей омни-колес; в) двенадцати твердых тел роликов, размещенных на колесах. В соответствии, например, с [94] для каждого объекта, моделирующего твердое тело, реализуются шесть обыкновенных диф-

ференциальных уравнений (ОДУ) Ньютона для движения центра масс тела плюс семь ОДУ Эйлера для вращательного движения тела вокруг центра масс. В последнем случае имеется четыре кинематических уравнения Эйлера для кватерниона ориентации тела плюс три динамических уравнения Эйлера для вектора угловой скорости твердого тела. В результате полная модель экипажа задается системой ОДУ порядка $16 \cdot 13 = 208$. Кроме этого, объекты механических связей могут генерировать дополнительные дифференциальные уравнения.

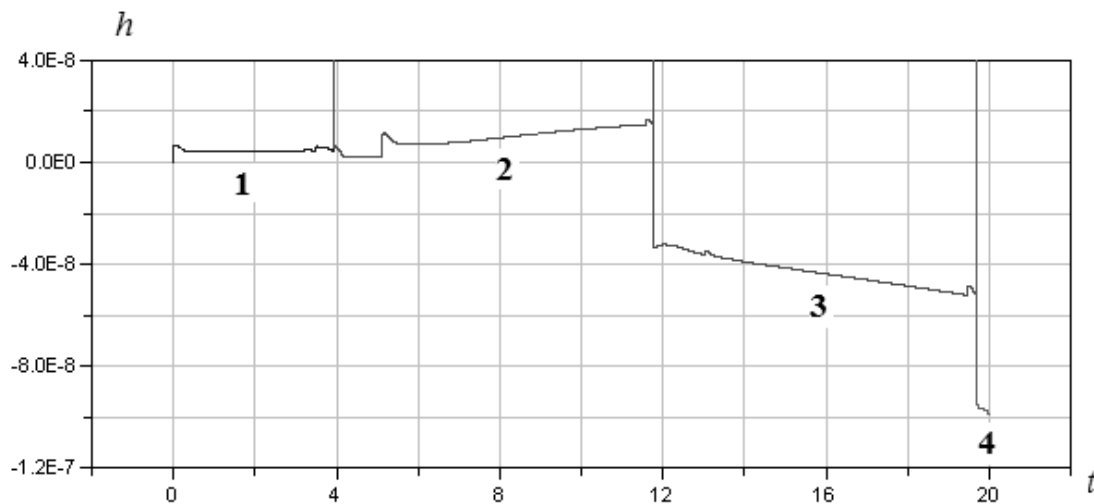


Фиг. 3.4. Процесс замещения роликов в контакте.

Эволюция процесса контактирования для отдельного катящегося омни-колеса показана на Рис. 3.4, где представлены зависимости функций расстояний h (фактически – высот) между горизонтальной плоскостью (полом) и роликами одного и того же колеса, находящимися в разных фазах (перед контактом, в контакте, после контакта). Функция высоты отдельного ролика помечена номером этого ролика. В увеличенном масштабе показан момент безударного гладкого переключения поверхностей контактирования роликов и горизонтальной плоскости.

Одновременно можно наблюдать точность соблюдения неудерживающей связи (Рис. 3.5). Здесь обнаруживается процесс постепенного «расползания»

вычислительной ошибки – расстояние между контактирующими телами медленно, для каждого последующего ролика в контакте, увеличивается. В то же время, абсолютная величина ошибки остается пренебрежимо малой – около 10^{-7} от единицы длины.



Фиг. 3.5. Точность сохранения неударживающей связи.

4 Верификация

В литературе представлены [15, 21, 24] работы, рассматривающие омниколеса в предположении, что массой и инерцией роликов можно пренебречь, налагающие на систему неголономные связи, ограничивающие направление скорости скольжения в точках контакта колес с поверхностью, на которой стоит экипаж, и не вводящие силу трения в контакте, т.е. считающие скольжение идеальным. Эти идеализированные модели имеют существенно меньше степеней свободы, чем "реальный" омниэкипаж, и легче поддаются аналитическому исследованию.

Описанные модели можно использовать для верификации построенной физически-ориентированной модели, рассматривая некоторые элементарные виды движений. Максимальное соответствие построенной модели упомянутым неголономным может быть достигнуто при уменьшении влияния массы роликов на динамику колеса, а именно, при уменьшении их массы с сохра-

нением общей массы колеса с роликами. На этом предположении и основан наш подход к верификации.

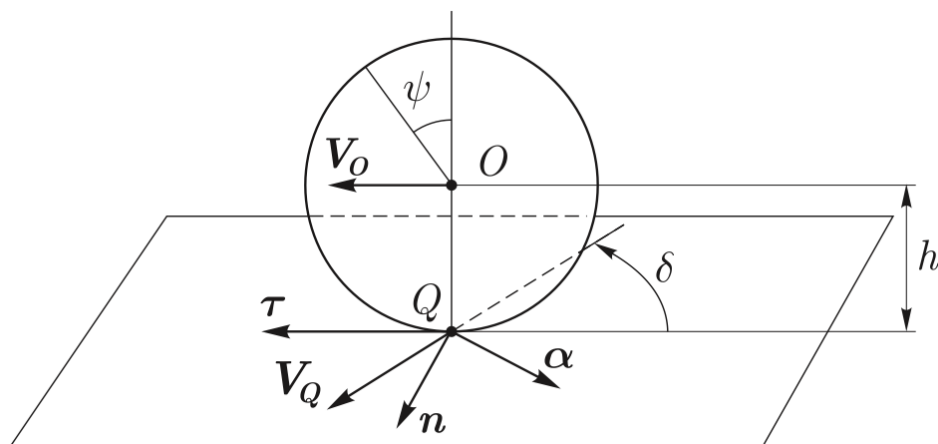
4.1 Проверочная модель

Для верификации использованы результаты работы [24] как новейшей из неголономных моделей динамики свободной тележки с омниколесами на плоскости.

Авторы [24] принимают простейшую модель омниколеса как плоского диска, для которого скорость точки контакта с опорной поверхностью направлена вдоль прямой, составляющей некоторый угол δ с плоскостью колеса (см. рис. 3.6). Связь, наложенная на колесо в таком случае имеет вид

$$\mathbf{v}_Q \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0,$$

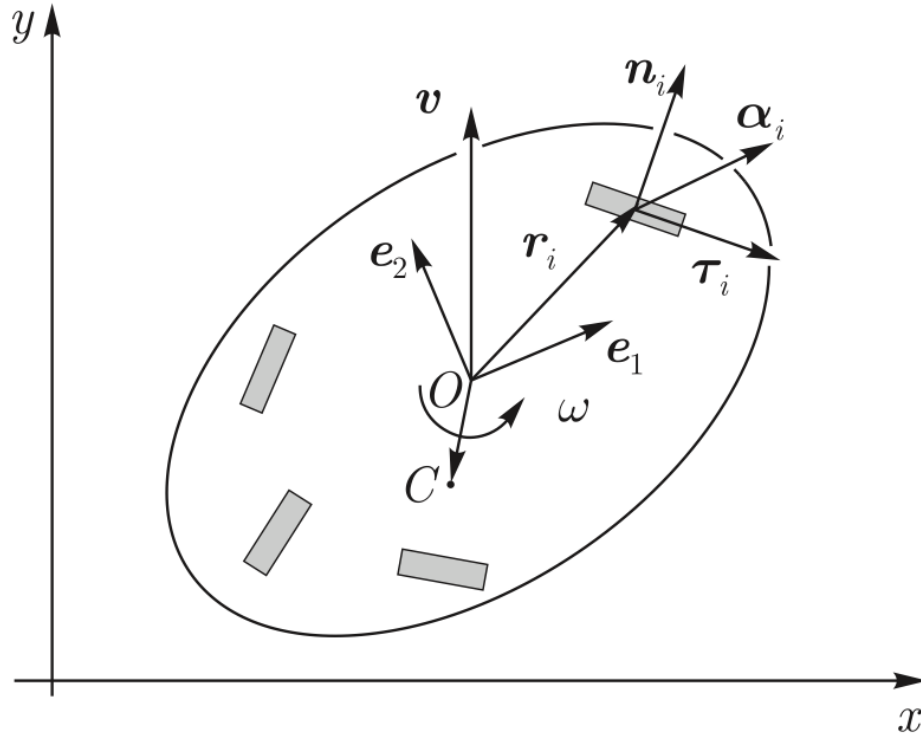
где \mathbf{v}_Q - скорость точки контакта, $\boldsymbol{\alpha}$ - единичный вектор вдоль оси закрепления роликов.



Фиг. 3.6. Неголономная модель колеса

Авторы [24] получают уравнения движения для экипажа с произвольным количеством колес, закрепленных так, что их оси неподвижны относительно

платформы, а оси роликов повернуты на произвольные углы относительно плоскостей соответствующих колес (см.рис. 3.7).



Фиг. 3.7. Неголономная модель экипажа

Вводится подвижная система отсчета, связанная с платформой экипажа (см.рис. 3.7). Уравнения свободного движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 (\Gamma + mE)\dot{\mathbf{v}} + m\dot{\omega}(J\mathbf{r}_C + R) + m\omega J(\mathbf{v} + \omega J\mathbf{r}_C) &= 0, \\
 \hat{I}\dot{\omega} + m(J\mathbf{r}_C + \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{v}} + m\omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_C &= 0, \\
 \dot{x} = v_1 \cos \phi - v_2 \sin \phi, \dot{y} = v_1 \sin \phi + v_2 \cos \phi, \dot{\phi} &= \omega, \\
 \Gamma_{kl} = \sum_i \frac{I_i}{s_i^2 h_i^2} \alpha_i^k \alpha_i^l, R = m^{-1} \sum_i \frac{I_i}{s_i^2 h_i^2} (J\mathbf{r}_i \cdot \alpha_i) \alpha_i, \\
 \hat{I} = I + \sum_i \frac{I_i}{s_i^2 h_i^2} (J\mathbf{r}_i \cdot \alpha_i)^2,
 \end{aligned}$$

где \hat{I} - суммарный момент инерции системы относительно вертикальной оси, проходящей через начало O подвижной системы отсчета, I - момент инерции платформы относительно той же прямой,

I_i - моменты инерции колес относительно их диаметров,

$s_i = \sin \delta_i$, h_i - радиусы колес,

\mathbf{r}_i - точки закрепления осей колес в подвижной системе,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

x, y, ϕ - координаты точки O и угол поворота платформы экипажа вокруг вертикальной оси,

\mathbf{v}, ω - вектор скорости точки O и скорость поворота платформы,

\mathbf{r}_C - координаты центра масс экипажа в подвижных осях, E - единичная матрица.

4.2 Два типа движений

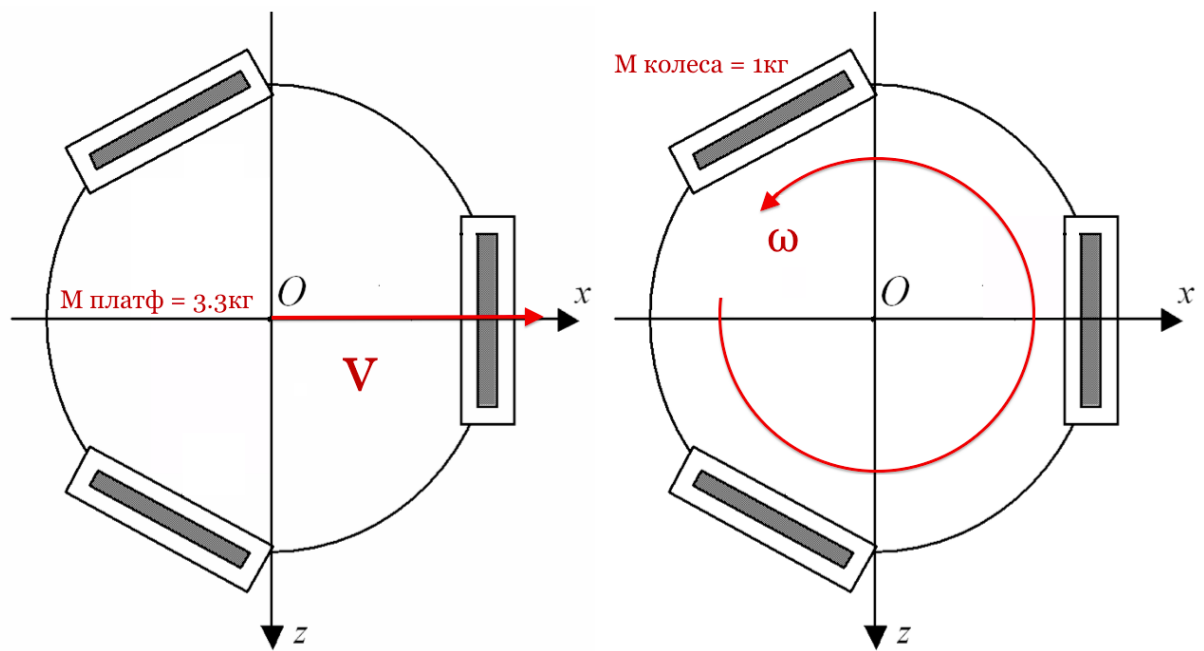
Задавая параметры экипажа, такие как массы его частей, их моменты инерции, геометрические размеры, положения, а также начальные данные - скорость центра масс и угловую скорость платформы, - и выполняя согласованные расчеты для двух реализаций - физической и идеальной - можно получить достаточно близкие движения при достаточно малой доле массы роликов.

При выполнении численных экспериментов массы платформы и колес, количество колес, количество роликов, геометрия системы были фиксированы (см. рис. 3.8). Изменялись начальные данные и доля массы роликов.

Испытания проводились, в частности, и для случая, когда относительная суммарная масса роликов приближается к нулю. В этом случае оказалось, что движение экипажа и омни-колес неограниченно приближаются к соответствующим функциям решения задачи Коши, получаемым в силу дифференциальных уравнений движения, используемых в работе [24], в которых динамика роликов не учитывается.

Рассмотрены два типа начальных условий $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)^T$, $\omega(0) = \omega_0$ (см. рис. 3.8):

1. экипаж закручен вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр



Фиг. 3.8. Параметры экспериментов

масс, скорость центра масс равна нулю (ожидаемый результат - экипаж вращается вокруг своей вертикальной оси симметрии, и центр масс покоится),

2. экипаж имеет начальную линейную скорость в направлении одного из колес и не закручен (ожидаемый результат - центр масс экипажа движется вдоль оси Ox , экипаж не вращается).

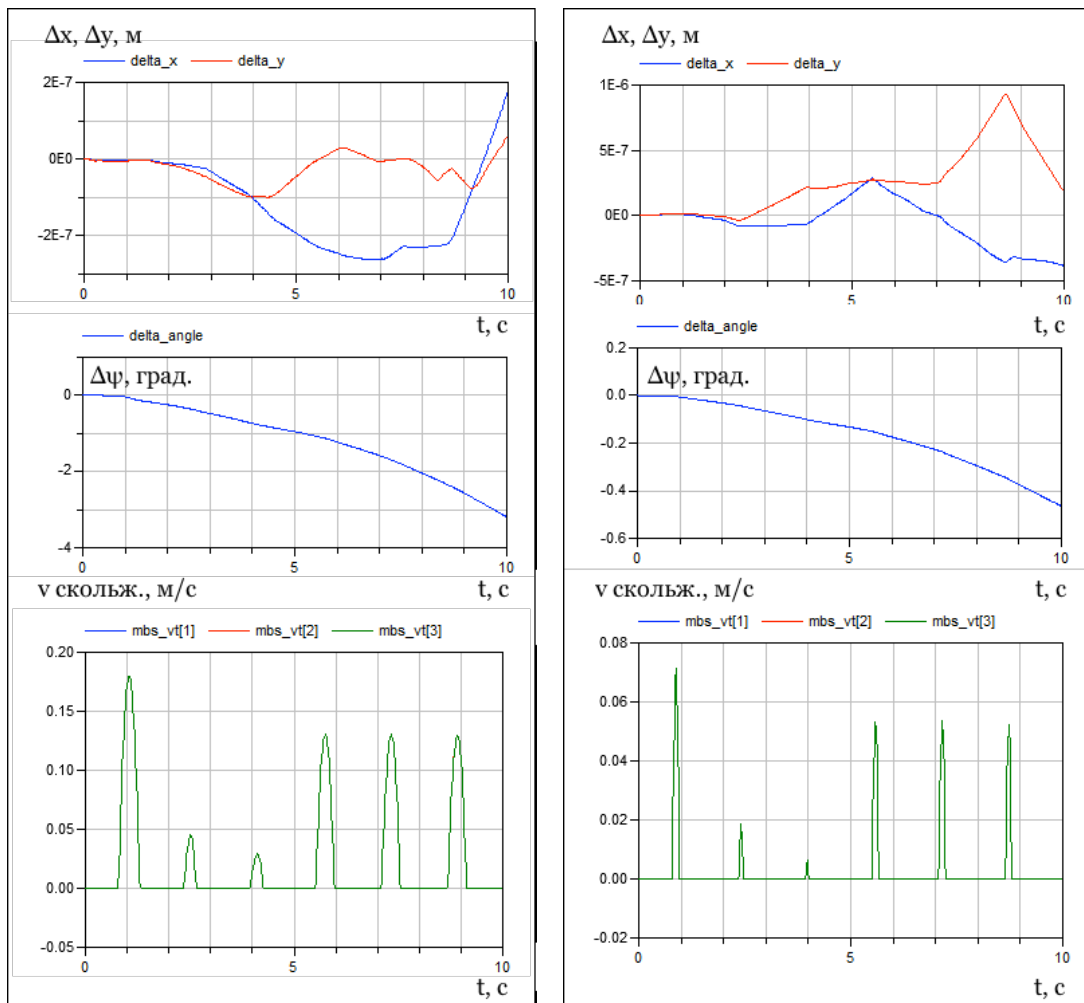
Значения отношения η массы ролика к общей массе колеса принимали в обоих случаях значения от $10^{-6}n^{-1}$ до $10^{-1}n^{-1}$ с шагом 1 по порядку малости (здесь n - фиксированное количество роликов).

На рис. 3.9 приведены примеры траектории центра масс $y(x)$ и зависимости $\psi(t)$ угла поворота ψ платформы вокруг вертикальной оси, проходящей через её центр, для случаев 1) и 2). Кривые $y(x)$, изображающие траектории центра масс, соответствуют, в сущности, точке - началу координат - в случае $v_0 = 0, \omega_0 = 1$, и отрезку прямой, совпадающей с осью x , в случае $v_0 = 1, \omega_0 = 0$, ибо масштаб отображения таков, чтобы были видны отклонения от точных значений, возникающие в силу вычислительной погрешности, но сами эти отклонения имеют порядок малости, позволяющий считать их нулевыми. Аналогичное утверждение верно и для зависимости угла поворота

платформы ψ от времени в случае поступательного движения - полученная зависимость близка к постоянной.

Ниже представлены результаты нескольких численных экспериментов. Во всех случаях величины, изображенные на рис. 3.9, демонстрируют поведение, не различимое в масштабе рис. 3.9, и поэтому приведены лишь расхождения между построенной нами моделью и верификационной идеализацией, которые и представляют интерес. Также представлена абсолютная величина скорости скольжения в точке контакта в физической модели.

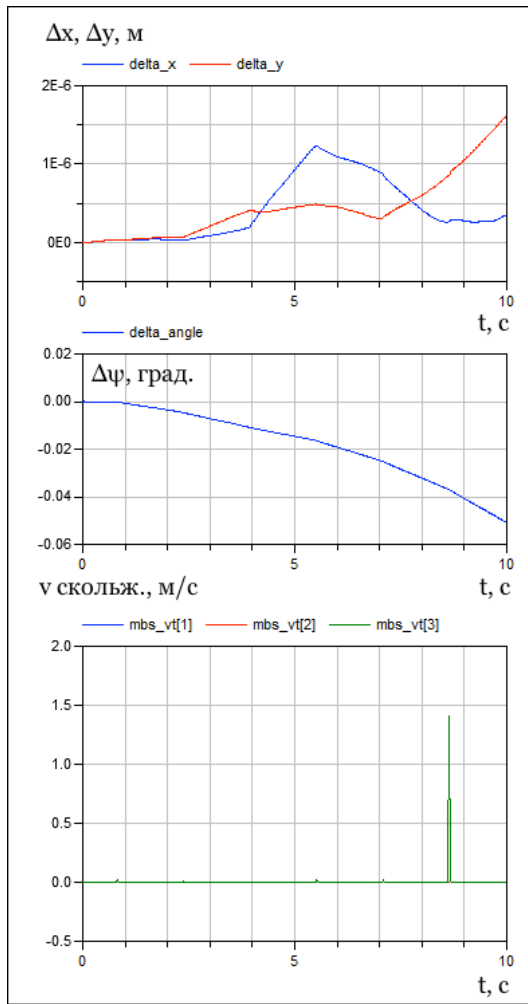
Графики зависимости скорости скольжения от времени показывают, что скольжение имеет место в окрестности момента смены роликов. Это объясняется тем, что для идеального качения в эти моменты ролику необходима бесконечная угловая скорость собственного вращения, ибо его размер вблизи вершины стремится к нулю. Видно, что с ростом доли массы роликов в общей массе колеса скольжение в контакте становится существеннее, изменяясь от пренебрежимо малого при $\eta = 10^{-6}$ до весьма существенного уже при $\eta = 10^{-3}$. Тем не менее, расхождения траектории и угла поворота платформы малы, а скольжение наблюдается лишь в точках колеса, которые в промышленных конструкциях не присутствуют (см. Обзор), что и позволяет считать верификацию проведенной.



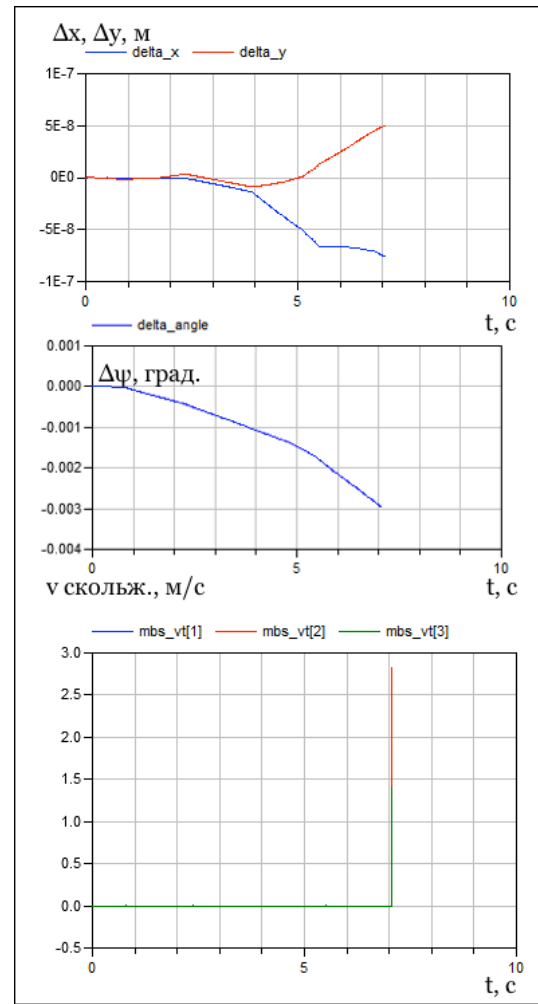
$$\eta = 0, 1, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

$$\eta = 0, 01, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

Фиг. 3.10. Вращение экипажа с трением вокруг вертикальной оси

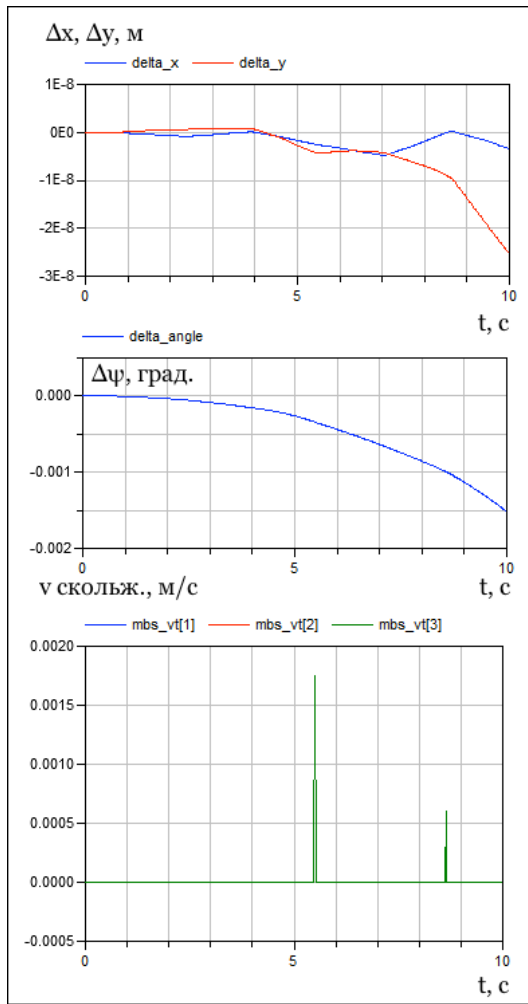


$$\eta = 0,001, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

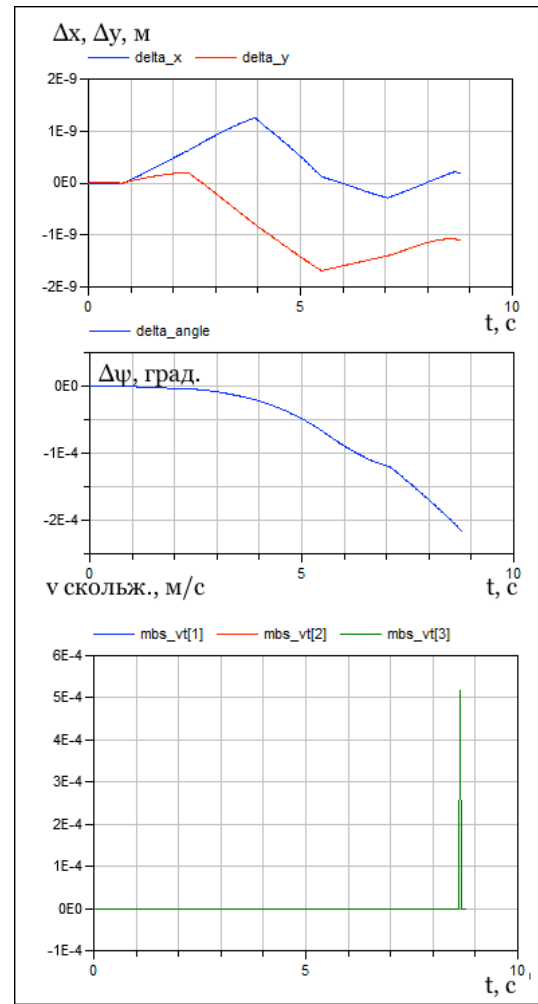


$$\eta = 0,0001, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

Фиг. 3.11. Вращение экипажа с трением вокруг вертикальной оси

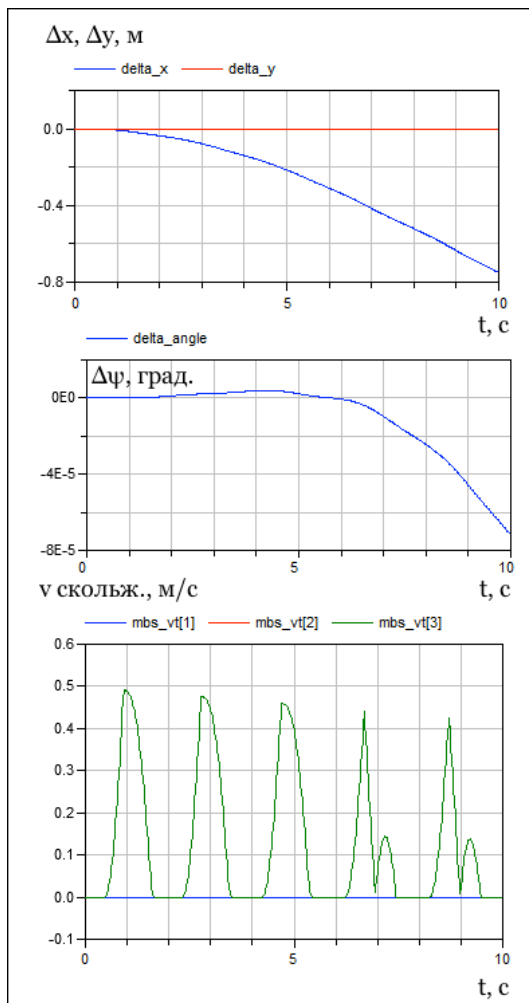


$$\eta = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

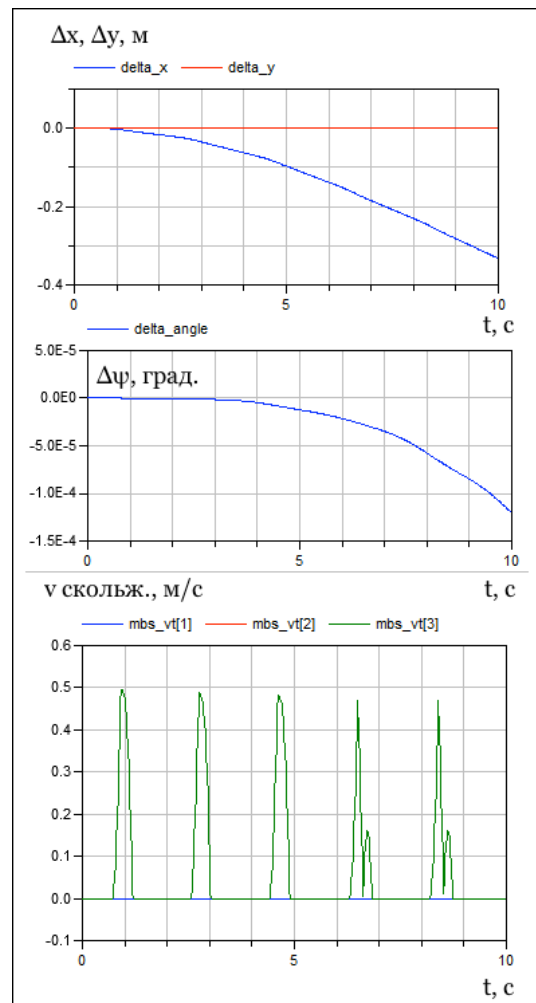


$$\eta = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

Фиг. 3.12. Вращение экипажа с трением вокруг вертикальной оси

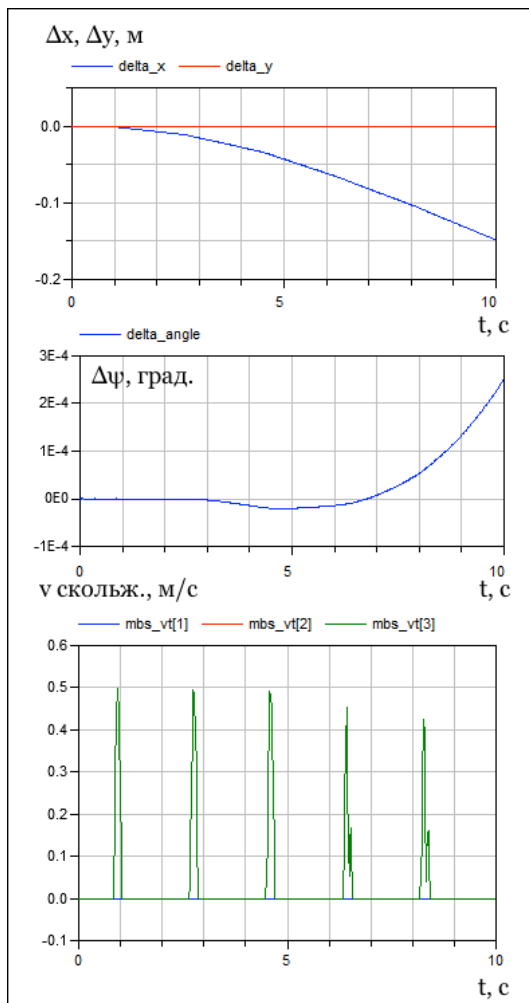


$$\eta = 0, 1, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

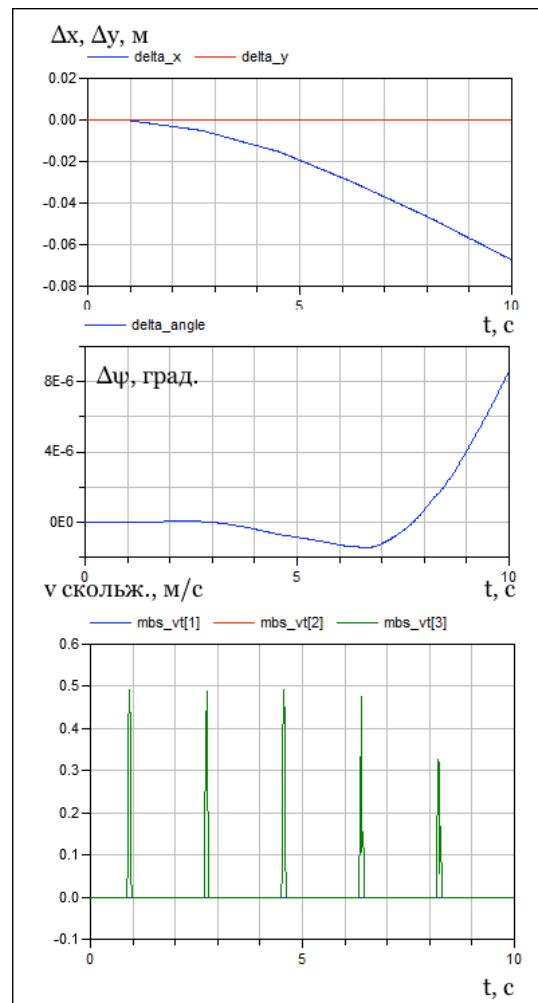


$$\eta = 0, 01, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

Фиг. 3.13. Вращение экипажа с трением по прямой



$$\eta = 0,001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$



$$\eta = 0,0001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

Фиг. 3.14. Вращение экипажа с трением по прямой

Выводы

1. Получены уравнения движения экипажа на омни-колесах по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов.
2. Изучены свойства этих уравнений движения и проведено сравнение их с уравнениями движения безынерционной модели [19].
3. Построен способ расчета изменения обобщенных скоростей при смене ролика в контакте, в предположении о мгновенном выполнении условия отсутствия проскальзывания между роликом и опорной плоскостью.
4. Получены численные решения для симметричной конфигурации экипажа с омни-колесами с учетом ударного взаимодействия роликов и опорной плоскости.
5. Построена динамическая модель экипажа с омни-колесами на плоскости с регуляризованным сухим трением. Показана возможность гладкого безударного переключения роликов в контакте в процессе качения/скольжения омни-колеса.
6. Выполнена верификация динамической модели омни-экипажа с использованием безынерционной модели, рассмотренной в работе [24], в качестве предельного случая (когда суммарная масса роликов равна нулю).

Литература

1. Gferrer A. Geometry and Kinematics of the Mecanum Wheel // Computer Aided Geometric Design. 2008. Т. 25. С. 784–791. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cagd.2008.07.008>.
2. Seeni Aravind, Schäfer Bernd, Hirzinger Gerd. Robot Mobility Systems for Planetary Surface Exploration – State-of-the-Art and Future Outlook : A Literature Survey // Aerospace Technologies Advancements. 2010. № January. С. 189–208.
3. Мартыненко Ю.Г. Управление движением мобильных колёсных роботов // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11, № 8. С. 29–80.
4. Martynenko Yu G. Motion control of mobile wheeled robots // Journal of Mathematical Sciences. 2007. Т. 147, № 2. С. 6569–6606.
5. Голубев Ю.Ф. Построение движений робота-снейкбордиста // препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 2004.
6. Ilon B. E. Wheels for a Course Stable Selfpropelling Vehicle Movable in Any Desired Direction on the Ground or Some Other Base. 1972.
7. Campion Guy, Bastin Georges, Dandrea-Novel B. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 1996. Т. 12, № 1. С. 47–62. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/481750/>.
8. Zimmermann Klaus, Zeidis Igor, Behn Carsten. Mechanics of Terrestrial Locomotion. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. С. 289. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-540-88841-3>.
9. Chung Woojin, Iagnemma Karl. Wheeled Robots // Springer Handbook of Robotics. Cham: Springer, 2016. С. 575–594.
10. Kanjanawanishkul Kiattisin. Omnidirectional wheeled mobile robots: wheel types and practical applications // International Journal of

Advanced Mechatronic Systems. 2015. Т. 6, № 6. С. 289. URL: <http://www.inderscience.com/link.php?id=74788>.

11. Adascalitei Florentina, Doroftei Ioan. Practical Applications for Mobile Robots based on Mecanum Wheels - a Systematic Survey // Proceedings of International Conference On Innovations, Recent Trends And Challenges In Mechatronics, Mechanical Engineering And New High-Tech Products Development – МЕCAHITECH'11. Т. 3. 2011. С. 112–123.
12. Зобова А.А., Татаринов Я.В. Математические аспекты динамики движения экипажа с тремя окольцованными колесами // Мобильные роботы и мехатронные системы. 2006. С. 61–67.
13. Zobova A.A., Tatarinov Ya.V. The dynamics of an omni-mobile vehicle // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2009. Т. 73. С. 8–15.
14. Зобова А.А., Татаринов Я.В. Свободные и управляемые движения некоторой модели экипажа с роликонесущими колесами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. М., 2008. № 6. С. 62–65.
15. Зобова А.А., Татаринов Я.В. Динамика экипажа с роликонесущими колесами // ПММ. 2009. Т. 73, № 1. С. 13–22.
16. Zobova A. A. Application of laconic forms of the equations of motion in the dynamics of nonholonomic mobile robots // Nelineinaya Dinamika. 2011. Т. 7, № 4. С. 771–783. URL: <http://nd.ics.org.ru/nd1104003/>.
17. Татаринов Я.В. Уравнения классической механики в новой форме // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. 2003. Т. 3. С. 67–76.
18. Татаринов Я.В. Уравнения классической механики в лаконичных формах. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005. С. 88.
19. Зобова А.А. Применение лаконичных форм уравнений движения в динамике неголономных мобильных роботов // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4. С. 771–783.

20. Martynenko Yu.G., Formal'skii A.M. On the Motion of a Mobile Robot with Roller-Carrying Wheels // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2007. Т. 46, № 6. С. 976–983.
21. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Изв. РАН. Теория сист. управл. 2007. 2007. № 6. С. 142–149.
22. Мартыненко Ю.Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // ПММ. 2010. Т. 74, № 4. С. 610–619.
23. Martynenko Yu G. Stability of steady motions of a mobile robot with roller-carrying wheels and a displaced centre of mass // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2010. jan. Т. 74, № 4. С. 436–442. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.09.009>
<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0021892810001139>.
24. Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С. Тележка с омниколесами на плоскости и сфере // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4. С. 785–801.
25. Килин А.А., Бобыкин А.Д. Управление тележкой с омниколесами на плоскости // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 4. С. 473–481.
26. Karavaev Yury L., Kilin Alexander A. The dynamics and control of a spherical robot with an internal omniwheel platform // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. mar. Т. 20, № 2. С. 134–152. URL: <http://link.springer.com/10.1134/S1560354715020033>.
27. Ivanov Alexander P. On the control of a robot ball using two omniwheels // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. jul. Т. 20, № 4. С. 441–448. URL: <http://link.springer.com/10.1134/S1560354715040036>.
28. Qiang Zhan, Yao Cai, Caixia Yan. Design, analysis and experiments of an omni-directional spherical robot // 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 2011. may. С. 4921–4926. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/5980491/>.

29. Weiss A., Langlois R. G., Hayes M.J.D. Dynamics and vibration analysis of the interface between a non-rigid sphere and omnidirectional wheel actuators // Robotica. 2015. T. 33. C. 1850–1868.
30. Atlas Motion Platform Mecanum Wheel Jacobian In The Velocity And Static Force Domains / Jonathan J. Plumpton, M. John D. Hayes, Robert G. Langlois [и др.] // Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering. 2014. jun. T. 38, № 2. C. 251–261. URL: <http://www.nrcresearchpress.com/doi/10.1139/tcsme-2014-0018>.
31. Adamov B.I. A Study of the Controlled Motion of a Four-wheeled Mecanum Platform // Nelineinaya Dinamika. 2018. T. 14, № 2. C. 265–290. URL: <http://nd.ics.org.ru/nd180209/>.
32. Adamov B. I., Kobrin A. I. Parametric Identification of the Mathematical Model of the Omnidirectional Mobile Robot KUKA youBot // Mehatronika, Avtomatizacia, Upravlenie. 2018. apr. T. 19, № 4. C. 251–258. URL: <http://www.novtex.ru/mech/eng/doi/mau.19.251-258.html>.
33. Indiveri Giovanni, Paulus Jan, Plöger P. RoboCup 2006: Robot Soccer World Cup X // RoboCup 2006: Robot Soccer World Cup X / под ред. Gerhard Lakemeyer, Elizabeth Sklar, Domenico G. Sorrenti [и др.]. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007. C. 35–46. URL: <http://www.springerlink.com/index/K28874139801055W.pdf>
<http://link.springer.com/10.1007/978-3-540-74024-7>.
34. Wada Masayoshi. Holonomic and omnidirectional wheelchairs with synchronized 4WD mechanism // IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2007. C. 1196–1202.
35. Development of mobile robot drive system using mecanum wheels / Taha Bin Mohamed, Norsehah Abd Karim, Norazlin Ibrahim [и др.] // 2016 International Conference on Advances in Electrical, Electronic and Systems Engineering (ICAEEES). IEEE, 2016. nov. C. 582–585. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/7888113/>.

36. A Mecanum Wheel Based Robot Platform for Warehouse Automation / J. Krishnaraj, K. Sangeetha, M.V. Tanneru Babu [и др.] // International Journal of Mechanical Engineering and Technology. 2017. Т. 8, № 7. С. 181–189.
37. Salam Al-Ammri A, Ahmed Iman. Control of Omni-Directional Mobile Robot Motion // Al-Khwarizmi Engineering Journal. 2010. Т. 6, № 4. С. 1–9. URL: <https://www.iasj.net/iasj?func=fulltext&aId=2195>.
38. Eng Donald. State Estimation for a Holonomic Omniwheel Robot Using a Particle Filter. Ph.D. thesis: Massachusetts Institute of Technology. 2010. С. 106.
39. Vicente Alexandre, Liu Jindong, Yang Guang-zhong. Surface classification based on vibration on omni-wheel mobile base // International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 2015. С. 916–921.
40. Ман Нгуен Ньы. Разработка математической модели погрузочно-разгрузочного устройства с всенаправленными колесами // Труды МАИ. 2012. Т. 58.
41. Ashmore Mark, Barnes Nick. Omni-drive robot motion on curved paths: The fastest path between two points is not a straight-line // AI 2002: Advances in Artificial Intelligence. 2002. С. 225–236. URL: <http://www.springerlink.com/index/q7cuajlf1xbu653d.pdf>.
42. Balkcom Devin J., Kavathekar Paritosh A., Mason Matthew T. Time-optimal Trajectories for an Omni-directional Vehicle // The International Journal of Robotics Research. 2006. oct. Т. 25, № 10. С. 985–999. URL: <http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/0278364906069166>.
43. Huang Jeng-tze, Van Hung Tran, Tseng Ming-lei. Smooth Switching Robust Adaptive Control for Omnidirectional Mobile Robots // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2015. sep. Т. 23, № 5. С. 1986–1993. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/7021920/>.
44. Bramanta Andra, Virgono Agus, Saputra Randy Erfa. Control system implementation and analysis for omniwheel vehicle // 2017

- International Conference on Control, Electronics, Renewable Energy and Communications (ICCREC). IEEE, 2017. C. 265–270. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/8226711/>.
45. Kalmár-Nagy Tamás. Real-time trajectory generation for omni-directional vehicles by constrained dynamic inversion // Mechatronics. 2016. may. T. 35. C. 44–53. URL: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0957415815002202>.
 46. Feasible utilization of the inherent characteristics of holonomic mobile robots / Géza Szayer, Bence Kovács, Ferenc Tajti [и др.] // Robotics and Autonomous Systems. 2017. aug. T. 94. C. 12–24. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.robot.2017.04.002> <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0921889016306327>.
 47. Field Jennifer R, Salman Mishah U. Kinematic motion studies of an OmniDirectional mobile robot // 2017 IEEE International Symposium on Robotics and Intelligent Sensors (IRIS). IEEE, 2017. C. 318–323. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/8250141/>.
 48. Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots / R.L. Williams, B.E. Carter, P Gallina [и др.] // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2002. jun. T. 18, № 3. C. 285–293. URL: <https://doi.org/10.1109/tra.2002.1019459> <http://ieeexplore.ieee.org/document/1019459/>.
 49. Purwin Oliver, D'Andrea Raffaello. Trajectory generation and control for four wheeled omnidirectional vehicles // Robotics and Autonomous Systems. 2006. jan. T. 54, № 1. C. 13–22. URL: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0921889005001673>.
 50. Li Xiang, Zell Andreas. Motion Control of an Omnidirectional Mobile Robot // Informatics in Control, Automation and Robotics. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. C. 181–193. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-3-540-85640-5_14.

51. Galicki Mirosław. Collision-free control of an omni-directional vehicle // Robotics and Autonomous Systems. 2009. T. 57. C. 889–900. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.robot.2009.06.005>.
52. Lin Lih-Chang, Shih Hao-Yin. Modeling and Adaptive Control of an Omni-Mecanum-Wheeled Robot // Intelligent Control and Automation. 2013. T. 4. C. 166–179. URL: <http://dx.doi.org/10.4236/ica.2013.42021>
<http://www.scirp.org/journal/ica>
<http://www.scirp.org/journal/doi.aspx?DOI=10.4236/ica.2013.42021>.
53. Wittenburg Jens. Dynamics of multibody systems. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
54. Schiehlen Werner, Eberhard Peter. Applied Dynamics. Heidelberg: Springer, 2014. C. 215.
55. Jain Abhinandan. Robot and Multibody Dynamics. Dordrecht: Springer, 2011. C. 510.
56. Roberson Robert E., Schwertassek Richard. Dynamics Of Multibody Systems. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1988.
57. Jerkovsky W. The Structure of Multi-Body dynamics equations: Tech. Rep.: Los Angeles: Space and Missile Systems Organization, Air Force Systems Command, 1977.
58. Чаплыгин С.А. Исследования по динамике неголономных систем. Ленинград: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1949. С. 111.
59. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. Москва: Наука, 1967. С. 520.
60. Карапетян А В. О реализации неголономных связей и устойчивость кельтских камней // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 45, № 1. С. 42–51.
61. Теоретическая механика / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев [и др.]. Москва: Академия, 2010. С. 432.

62. Аппель П. Теоретическая механика. Том первый. Статика. Динамика точки. Москва: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960. С. 515.
63. Аппель П. Теоретическая механика. Том второй. Динамика системы. Аналитическая механика. Москва: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960. С. 487.
64. Вильке В.Г. Теоретическая механика. СПб.: Лань, 2003. С. 304.
65. Козлов В.В., Трещев Д.В. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. Москва: Изд. Моск. Ун., 1991. С. 168.
66. Brogliato Bernard. Nonsmooth Mechanics Models. Dynamics and Control. London: Springer-Verlag London, 1999. С. 396.
67. Pfeiffer Friedrich, Glocker Christoph. Multibody Dynamics With Unilateral Constraints / под ред. Weinheim. Wiley-VCH, 1995. С. 317.
68. Pfeiffer Friedrich, Glocker Christoph. Multiple Impacts with Friction in rigid multibody systems // Nonlinear Dynamics. 1995. Т. 7. С. 471–497.
69. Pfeiffer Friedrich. Unilateral Multibody Dynamics // Meccanica. 1999. Т. 34, № 6. С. 435–449. URL: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1004724313496%5Cnhttp://www.springerlink.com/content>
70. Pfeiffer Friedrich, Glocker Christoph. Iutam Symposium on Unilateral Multibody Contacts. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1999.
71. Pfeiffer Friedrich, Wosle M. Dynamics of multibody systems with unilateral constraints // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1999. Т. 9, № 3. С. 473–478.
72. Glocker Christoph. Formulation of spatial contact situations in rigid multibody systems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1999. Т. 177, № 3-4. С. 199–214.
73. Pfeiffer Friedrich. Multibody systems with unilateral constraints // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2001. Т. 65, № 4. С. 665–670.

74. Numerical simulation of finite dimensional multibody nonsmooth mechanical systems / B. Brogliato, A.A. ten Dam, L. Paoli [и др.] // Applied Mechanics Reviews. 2002. Т. 55, № 2. URL: <http://appliedmechanicsreviews.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=>
75. Pfeiffer Friedrich. Unilateral Multibody Dynamics // International Journal for Multiscale Computational Engineering. 2003. Т. 1, № 2-3. С. 311–326.
76. Flores Paulo, Leine Remco, Glocker Christoph. Modeling and Analysis of Rigid Multibody Systems with Translational Clearance Joints Based on the Nonsmooth Dynamics Approach // Multibody Dynamics. Computational Methods and Applications. Dordrecht: Springer, 2011. Т. 23. С. 107–130. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-90-481-9971-6>.
77. Zbiciak Artur, Kozyra Zofia. Dynamics of Multi-body Mechanical Systems with Unilateral Constraints and Impacts // Procedia Engineering. 2014. Т. 91. С. 112–117. URL: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1877705814030422>.
78. Березинская С.Н., Сорокина О.В., Кугушев Е.И. Об односторонних неголономных связях // препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. Москва, 2003.
79. Pfeiffer Friedrich, Glocker Christoph. Complementarity problems in multibody systemes with planar friction // Applied Mechanics. 1993. Т. 64. С. 452–463.
80. Pfeiffer Friedrich, Wosle M. Dynamics of Multibody Systems Containing Dependent Unilateral Constraints with Friction // Journal of Vibration and Control. 1996. Т. 2, № 2. С. 161–192. URL: <http://jvc.sagepub.com/cgi/doi/10.1177/107754639600200203>.
81. Anitescu M., Potra F. Formulating Multi-rigid-body Contact Problems with Friction as Solvable Linear Complementarity Problems // Nonlinear Dynamics. 1997. Т. 14, № 3. С. 231–247. URL: <http://citeseer.ist.psu.edu/anitescu97formulating.html>.

82. Lacoursière Claude, Servin Martin. Regularized multibody dynamics with dry frictional contacts // Euromech Colloquium: Nonsmooth contact and impact laws in mechanics. 2011. URL: <http://umu.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2:475660>.
83. Charles Alexandre, Ballard Patrick. Multibody dynamics with unilateral constraints and friction // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. 2014. dec. T. 14. C. 63–64. URL: <http://doi.wiley.com/10.1002/pamm.201410019>.
84. Paoli Laetitia. Multibody Dynamics with Unilateral Constraints: Computational Modeling of Soft Contact and Dry Friction Laetitia Paoli // System Modeling and Optimization. Cham: Springer International Publishing, 2015. C. 420—429.
85. Moreau J. J. Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics // Nonsmooth Mechanics and Applications. Vienna: Springer Vienna, 1988. C. 1–82. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-3-7091-2624-0_1.
86. Новожилов И.В. Фракционный анализ. Москва: Изд. Моск. Ун., 1991. C. 190.
87. Association Modelica. Modelica® - A Unified Object-Oriented Language for Systems Modeling, Language Specification, Version 3.3. 2012.
88. ПО {Dymola}. \url{http://www.3ds.com/products-services/catia/products/dymola}.
89. Fritzson P. Principles of Object–Oriented Modeling and Simulation with Modelica 2.1. Piscataway, New Jersey: IEEE Press, 2004. C. 898.
90. Kosenko I. I. Integration of the equations of a rotational motion of a rigid body in quaternion algebra. The Euler case // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1998. T. 62, № 2. C. 193–200.
91. Косенко И.И. Интегрирование уравнений вращательного движения твердого тела в алгебре кватернионов. Случай Эйлера // ПММ. 1998. Т. 62, № 2. C. 206–214.

92. Косенко И.И. Реализация компьютерной модели динамики систем твердых тел с освобождающими связями // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 2. С. 95–106.
93. Multibody Systems Dynamics: Modelica Implementation and Bond Graph Representation / Ivan Kosenko, Maria Loginova, Yaroslav Obraztsov [и др.] // Proceedings of the 5th International Modelica Conference. 2006. С. 213–223. URL: <https://modelica.org/events/modelica2006/Proceedings/sessions/Session2d2.pdf>.
94. Kosenko Ivan. Physically Oriented Approach To Construct Multibody System Dynamics Models Using Modelica Language // MULTIBODY DYNAMICS 2007, ECCOMAS Thematic Conference. Milano: 2007.
95. Косенко И.И. Графовые представления моделей динамики систем тел // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, № 9. С. 80–88.
96. Косенко И.И., Гусев И.К. Компьютерная модель динамики прямозубого эвольвентного зацепления в редукторах // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 4. С. 713–734.
97. Kossenko I I, Stavrovskaja M S. How One Can Simulate Dynamics of Rolling Bodies via Dymola: Approach to Model Multibody System Dynamics Using Modelica // Proceedings of the 3rd International Modelica Conference. Linköping, Sweden: Linköpings universitet, 2003. С. 299–309.
98. Косенко И.И., Александров Е.Б. Реализация модели Контенсу-Эрисмана касательных сил в контактной задаче Герца // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 4. С. 499–517.
99. Косенко И.И., Ал. Эт. Моделирование и виртуальное прототипирование. М.: Альфа-М, 2012. С. 176.
100. Kálmán Viktor, Vajta László. Designing and tuning a brake assistant for omnidirectional wheels // Electrical Engineering and Computer Science. 2012. Т. 56, № 4. С. 105–111. URL: <https://pp.bme.hu/eecs/article/view/7164>.

101. Kálmán Viktor. On modeling and control of omnidirectional wheels. Ph.D. thesis: Budapest University of Technology and Economics. 2013. С. 94. URL: http://www.omikk.bme.hu/collections/phd/Villamosmernoki_es_Informatikai_Kar/
102. Kálmán Viktor. Controlled Braking for Omnidirectional Wheels // International Journal of Control Science and Engineering. 2013. Т. 3, № 2. С. 48–57. URL: <http://article.sapub.org/10.5923.j.control.20130302.03.html>.
103. Kálmán Viktor. Omnidirectional Wheel Simulation - a Practical Approach // Acta Technica Jaurinensis. 2013. Т. 6, № 2. С. 73–90.
104. Герасимов К.В., Зобова А.А. Движение симметричного экипажа на омни-колесах с массивными роликами // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, № 4. С. гот. к публ.
105. Герасимов К.В., Зобова А.А. Динамика экипажа на омни-колесах с массивными роликами с учетом смены ролика в контакте с опорной плоскостью // Труды МАИ. 2018. С. принята к печати.
106. Косенко И.И., Герасимов К.В. Физически-ориентированное моделирование динамики омнитележки // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12, № 2. С. 251–262. URL: <http://nd.ics.org.ru/nd1602007/>.
107. I. Kosenko Ivan, Ya. Stepanov Sergey, V. Gerasimov Kirill. Improved Contact Tracking Algorithm for the Omni Wheel in General Case of Roller Orientation // The Proceedings of the Asian Conference on Multibody Dynamics. 2016. Т. 2016.8. С. 10_1289244. URL: https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsmeacmd/2016.8/0/2016.8_10_1289244/_article_char/ja/.
108. Kosenko I., Gerasimov K. Object-oriented implementation of a unilateral point-contact constraint model with friction in frame of the omni vehicle multibody system // 11th World Congress on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference on Computational Mechanics, ECCM 2014 and 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECFD 2014. 2014.

109. Kosenko Ivan, Gerasimov Kirill. Implementation of the Omni Vehicle Dynamics on Modelica // Proceedings of the 10th International Modelica Conference. Lund: 2014. C. 1143–1150. URL: http://www.ep.liu.se/ecp_article/index.en.aspx?issue=63;article=35.
110. Kosenko I., Gerasimov K. Object-oriented approach to the construction of an omni vehicle dynamical model // Journal of Mechanical Science and Technology. 2015. T. 29, № 7.
111. Kosenko I., Gerasimov K. Omni vehicle dynamics model: Object-oriented implementation and verification // AIP Conference Proceedings. T. 1648. 2015.
112. Kosenko I.I., Gerasimov K.V., Stavrovskiy M.E. Contact types hierarchy and its object-oriented implementation // COUPLED PROBLEMS 2015 - Proceedings of the 6th International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. 2015.
113. Dynamical Model of a Vehicle with Omni Wheels: Improved and Generalized Contact Tracking Algorithm / Ivan Kosenko, Sergey Stepanov, Kirill Gerasimov [и др.] // Proceedings of the 11h International Modelica Conference. Versailles: 2015.
114. Virtual testbench for the omni wheel dynamics simulation: New contact tracking algorithm / I. Kosenko, S. Stepanov, K. Gerasimov [и др.] // ECCOMAS Congress 2016 - Proceedings of the 7th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. T. 3. 2016.
115. Kosenko I.I., Gerasimov K.V. Physically oriented simulation of the omnivehicle dynamics // Nelineinaya Dinamika. 2016. T. 12, № 2.