

К.В. Герасимов, А.А. Зобова

## Движение симметричного экипажа на омни-колесах с массивными роликами

Рассматривается динамика симметричного экипажа с роликонесущими колесами, движущегося по неподвижной горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости в следующих предположениях: масса каждого ролика ненулевая, контакт между роликами и плоскостью точечный, проскальзывания нет. Уравнения движения составлены с помощью системы символьных вычислений Mathematica. В уравнениях движения выявлены дополнительные члены, пропорциональные собственному моменту инерции ролика. Эти слагаемые явно зависят от углов поворота колес. Вследствие этого, для замыкания системы уравнений необходимо добавить уравнения связей. Предложена модель перехода колеса с одного ролика на другой, при этом разрывы в правых частях уравнений движения устранены путем введения дополнительных предположений о характере движения роликов. Массивность роликов учитывается только на фазах движения между переходами с ролика на ролик. Показано, что ряд движений, существующих в безынерционной модели (т.е. не учитывающей массу роликов), пропадает, так же как и линейный первый интеграл. Проведено сравнение основных типов движения симметричного трехколесного экипажа, полученных численным интегрированием уравнений движения, с безынерционной моделью.

**1. Введение.** Омниколеса (в русской литературе также используется название роли-

конесущие колеса) – это колеса особой конструкции, позволяющей экипажу двигаться в произвольном направлении, вращая колеса вокруг их собственных осей и не поворачивая их вокруг вертикали. На ободе такого колеса располагаются ролики, которые могут свободно вращаться вокруг своих осей, жестко закрепленных в диске колеса. Существуют два варианта расположения осей роликов: первый (собственно омниколеса) – оси роликов являются касательными к ободу колеса и, следовательно, лежат в его плоскости; второй (меканум-колеса [1]) – оси роликов развернуты вокруг нормали к ободу колеса на постоянный угол, обычно  $\pi/4$ .

Ранее была рассмотрена динамика омни-экипажей с упрощенными моделями омни-колес, в которых не учитывается инерция и форма роликов [2–7]. В этих работах колеса моделируются как жесткие диски (без роликов), которые могут скользить в одном направлении и катиться без проскальзывания в другом. Далее мы будем называть такую модель безынерционной в том смысле, что инерция собственного вращения роликов в ней не учитывается. Другая часть работ по динамике омни-экипажа [8–11] использует некоторые формализмы для построения численных моделей систем тел, при этом явный вид уравнений движения оказывается скрыт. Это делает невозможным непосредственный анализ уравнений и затрудняет оценку влияния разных факторов на динамику системы.

Цель настоящей работы – получение уравнений движения по инерции экипажа с омни-колесами с массивными роликами в неголономной постановке с помощью подхода [12] в явном виде, исследование их свойств и сравнение поведения такой системы с поведением системы в безынерционном случае [13].

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим экипаж с омни-колесами, движущийся по инерции по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Экипаж состоит из платформы и  $N$  одинаковых омни-колес, плоскости которых относительно платформы

неподвижны. Каждое колесо может свободно вращаться относительно платформы вокруг собственной оси, расположенной горизонтально. Будем считать, что на каждом колесе установлено  $n$  массивных роликов, так что оси роликов лежат в плоскостях колёс и параллельны касательным к границам дисков колес (см. рис. 1). Таким образом, система состоит из  $N(n + 1) + 1$  абсолютно твердых тел.

Введем неподвижную систему отсчета так, что ось  $OZ$  направлена вертикально вверх, а плоскость  $OXY$  совпадает с опорной плоскостью. Введем также подвижную систему отсчета  $S\xi\eta Z$ , жестко связанную с платформой экипажа так, что плоскость  $S\xi\eta$  горизонтальна и содержит центры всех колес  $P_i$ . Будем считать, что оси колес лежат на лучах, соединяющих центр масс платформы  $S$  и центры колес (см. рис. 2), а расстояния от центров колес до  $S$  одинаковы и равны  $R$ . Геометрию установки колес на платформе зададим углами  $\alpha_i$  между осями колес и осью  $S\xi$  (см. рис. 1). Будем считать, что центр масс всей системы совпадает с точкой  $S$  (отсюда следует, что  $\sum_k \cos \alpha_k = \sum_k \sin \alpha_k = 0$ ). Введем также орты, жестко связанные с дисками колес: пусть  $\mathbf{n}_i = \mathbf{SP}_i / |\mathbf{SP}_i|$  — единичный орт оси  $i$ -ого колеса, и орты  $\mathbf{n}_i^\perp$  и  $\mathbf{n}_i^z$ , лежащие в плоскости диска колеса, так что вектор  $\mathbf{n}_i^z$  вертикален при нулевом повороте колеса. Положения центров роликов на колесе определим углами  $\kappa_j$  между ними и направлением, противоположным вектору  $\mathbf{n}_i^z$ .

Положение экипажа будем задавать следующими координатами:  $x, y$  — координаты точки  $S$  на плоскости  $OXY$ ,  $\theta$  — угол между осями  $OX$  и  $S\xi$  (угол курса),  $\chi_i$  ( $i = 1 \dots N$ ) — углы поворота колес вокруг их осей, отсчитываемые против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $\mathbf{n}_i$ , и  $\phi_j$  — углы поворота роликов вокруг их собственных осей. Таким образом, вектор обобщенных координат имеет вид:

$$\mathbf{q} = (x, y, \theta, \{\chi_i\}_{i=1}^N, \{\phi_k\}_{k=1}^N, \{\phi_s\}_{s=1}^{N(n-1)})^T \in \mathbb{R}^{N(n+1)+3},$$

где сначала указаны углы поворота  $\phi_k$  роликов, находящихся в данный момент в контакте с опорной плоскостью, а затем – остальных, “свободных”, роликов.

Введем псевдоскорости

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \quad \mathbf{v}_S = R\nu_1 \mathbf{e}_\xi + R\nu_2 \mathbf{e}_\eta, \quad \nu_3 = \Lambda \dot{\theta}, \quad \nu_s = \dot{\phi}_s$$

Их механический смысл таков:  $\nu_1, \nu_2$  — проекции скорости точки  $S$  на оси  $S\xi\eta$ , связанные с платформой,  $\nu_3$  — с точностью до множителя угловая скорость платформы,  $\nu_s$  — угловые скорости свободных роликов. Таким образом, имеем

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos \theta - R\nu_2 \sin \theta, \quad \dot{y} = R\nu_1 \sin \theta + R\nu_2 \cos \theta,$$

Будем считать, что проскальзывания между опорной плоскостью и роликами в контакте не происходит, т.е. скорости точек  $C_i$  контакта равны нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, \quad i = 1 \dots N.$$

Выражая скорость точек контакта через введенные псевдоскорости и проектируя на векторы  $\mathbf{e}_\xi$  и  $\mathbf{e}_\eta$  соответственно, получим:

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{\rho_k}(\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k), \quad \text{где } \rho_k = l \cos \chi_k - r \quad (2.1)$$

$$\dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}) \quad (2.2)$$

Заметим, что знаменатель  $\rho_k$  в (2.1) есть расстояние от оси ролика до точки контакта, обращающееся в ноль на стыке роликов (см. рис. 1). Это обстоятельство приводит к разрывам второго рода в правых частях уравнений движения и будет рассмотрено отдельно ниже. Уравнение (2.2) совпадает с уравнением связи в случае безынерционной модели роликов.

Таким образом, выражение обобщенных скоростей через псевдоскорости, учитывающее связи, наложенные на систему, можно записать в матричном виде (явные выражения компонент матрицы  $V$  приведены в приложении):

$$\dot{\mathbf{q}} = V\boldsymbol{\nu}, \quad V = V(\theta, \chi_i) \quad (2.3)$$

**3. Уравнения движения.** Воспользуемся лаконичным методом получения уравнений движения для систем с дифференциальными связями, предложенным Я.В. Татариновым [12]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}. \quad (3.1)$$

Здесь  $L$  – лагранжиан,  $L^*$  – он же с учетом связей.  $P_\alpha$  – линейные комбинации формальных канонических импульсов  $p_i$ , определяемые из соотношения

$$\nu_\mu P_\mu \equiv \dot{q}_i p_i,$$

в котором  $\dot{q}_i$  выражены через псевдоскорости  $\nu_\mu$ . Фигурными скобками  $\{\cdot, \cdot\}$  обозначена скобка Пуассона по  $p_i, q_i$ . После ее вычисления выполняется подстановка

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Подробно их вывод и применение изложено в [12, 13].

Так как потенциальная энергия системы во время движения не меняется, то лагранжиан равен кинетической энергии:

$$2L = 2T = M\mathbf{v}_S^2 + I_S\dot{\theta}^2 + J \sum_i \dot{\chi}_i^2 + B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2)$$

Здесь  $M, I_S, J$  – массово-инерционные характеристики экипажа (см. приложение),  $B$  – момент инерции ролика относительно его оси вращения. Лагранжиан с учетом связей имеет вид:

$$2L^* = \boldsymbol{\nu}^T V^T \mathcal{M} V \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu}$$

Структура симметричной матрицы  $\mathcal{M}^*$  следующая:

$$\mathcal{M}^* = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & m_{ij}^* & \\ & & \end{pmatrix}_{3 \times 3} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ B\Lambda^{-1} \sin \chi_{12} & \dots & B\Lambda^{-1} \sin \chi_{nN} \end{pmatrix} \\ * & B \\ & \ddots \\ & B \end{bmatrix},$$

Явные формулы для коэффициентов  $m_{ij}^*$  главного минора  $3 \times 3$  выписаны в приложении; отметим, что они зависят только от координат  $\chi_i$ , которые входят в дроби вида  $B/\rho_i^2$  и  $B \sin \chi_i/\rho_i$ , имеющие разрыв второго рода при смене роликов (см. (2.1)). Этот минор соответствует псевдоскоростям  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ . Остальные элементы матрицы  $\mathcal{M}^*$  соответствуют скоростям свободных роликов  $\nu_s$ , для которых  $\chi_{kl} = \chi_k + \kappa_l$  — угол между вертикалью и осью ролика. Индекс  $k = 1, \dots, N$  означает номер колеса, индекс  $l = 2, \dots, n$  — номер свободного ролика на колесе ( $l = 1$  — ролик, находящийся в контакте).

Первое слагаемое (3.1) получается дифференцированием лагранжиана и подстановкой связей:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} = \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi) \nu_\alpha) = \mathcal{M}^*(\chi_i) \dot{\nu}_\alpha + \left( \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi)) \nu \right)_\alpha = \mathcal{M}^*(\chi_i) \dot{\nu}_\alpha + \left( \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i^*(V \nu)_{3+i} \nu \right)_\alpha, \quad (3.3)$$

где  $\mathcal{M}_i^* = \frac{\partial \mathcal{M}^*}{\partial \chi_i}$ . Обратим внимание, что вторая группа слагаемых, соответствующих свободным роликам ( $\alpha = 4 \dots 3 + N(n-1)$ ), имеет вид:

$$\frac{\cos \chi_{ij} \nu_3 B \left( -\frac{\nu_3 R}{l\Lambda} - \frac{\cos \alpha_i \nu_2 R}{l} + \frac{\sin \alpha_i \nu_1 R}{l} \right)}{\Lambda} = \frac{B}{\Lambda} \cos \chi_{ij} (\dot{\chi}_i)^* \nu_3. \quad (3.4)$$

Выпишем выражения для  $P_\alpha$ :

$$\begin{aligned}
P_1 &= R \left( p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_i \left( \frac{\sin \alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\cos \alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \right) \right), \\
P_2 &= R \left( -p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_i \left( -\frac{\cos \alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\sin \alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \right) \right), \\
P_3 &= \frac{1}{\Lambda} \left( p_\theta - \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i} \right), \\
P_s &= p_{\phi_s},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Поскольку коэффициенты  $L^*$  зависят только от координаты  $\chi_i$ , то его скобка Пуассона с  $P_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, 3$  — квадратичная форма псевдоскоростей, пропорциональная моменту инерции ролика  $B$  с коэффициентами, зависящими от  $\chi_i$ :

$$\begin{aligned}
\{P_1, L^*\} &= -\frac{\partial P_1}{\partial p_{\chi_i}} \frac{\partial L^*}{\partial \chi_i} = -\frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^T \sin \alpha_i \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}, \\
\{P_2, L^*\} &= \frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^T \cos \alpha_i \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}, \quad \{P_3, L^*\} = \frac{R}{2l\Lambda} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}, \quad \{P_s, L^*\} = 0, s > 3
\end{aligned}$$

Суммы  $\{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}$  в правой части также отличны от нуля лишь для первых трех уравнений (см. приложение).

Собирая все вместе и пользуясь обозначениями из приложения, окончательно получим следующую структуру уравнений:

$$\mathcal{M}^* \dot{\boldsymbol{\nu}} = \frac{MR^2}{\Lambda} \begin{pmatrix} \nu_2 \nu_3 \\ -\nu_1 \nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\nu}^T \begin{pmatrix} R \\ \frac{R}{2l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \cos \alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \Lambda^{-1} \mathcal{M}_i^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - BR^2 \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu} - B \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \cos \chi_{12} \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_1^* \\ \vdots \\ \cos \chi_{Nn} \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_N^* \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Здесь матрицы  $\mathcal{P}_\alpha$  размера  $3+N(n-1) \times 3+N(n-1)$  составлены из строк  $\mathbf{p}_{\alpha\beta}$ , определенных

явно в приложении и зависящих от геометрии экипажа и углов поворота колес  $\chi_i$ :

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{p}_{13} \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{13} \\ -\mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Поскольку матрицы  $\mathcal{M}_i^*$  и  $\mathcal{P}_\alpha$  зависят от углов поворота колес  $\chi_i$ , то для замыкания системы к этим уравнениям надо добавить уравнения (2.2).

Структура уравнений позволяет выявить следующие свойства:

1. Система допускает интеграл энергии  $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i)\boldsymbol{\nu} = h = \text{const}$  в силу общей теоремы об изменении полной механической энергии: так как система стеснена автономными идеальными связями, а силы консервативны, то полная энергия (в нашем случае она равна кинетической энергии) сохраняется.
2. В случае, если платформа экипажа не движется  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$ , свободные ролики сохраняют свою начальную угловую скорость:  $\nu_s = \text{const}$ , что соответствует здравому смыслу.
3. При  $B = 0$  все слагаемые в правой части, кроме первого, обращаются в ноль, как и все члены, соответствующие свободным роликам, в левой части (см. (6.1)). В этом случае существенными остаются первые три уравнения системы на  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ . Эти уравнения соответствуют безынерционной модели экипажа [2].
4. Существовавший в безынерционной модели линейный первый интеграл разрушается для модели с массивными роликами. При  $B = 0$  этот интеграл имеет вид



$m_{33}^* \nu_3 = \text{const}$  (причем  $m_{33} = \text{const}$ ) и следует непосредственно из третьего уравнения системы. При  $B \neq 0$  производная  $\nu_3$  пропорциональна моменту инерции ролика  $B$ .

5. Поскольку скобки Пуассона в уравнениях для свободных роликов равны нулю, система допускает первые интегралы:

$$\nu_s + \frac{1}{\Lambda} \sin \chi_{ij} \nu_3 = \text{const} \quad (3.7)$$

Скорость вращения платформы  $\nu_3$  оказывается связанной со скоростями собственного вращения свободных роликов. В частности, вращение экипажа вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр ( $\nu_1(0) = 0, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) \neq 0$ ), неравномерно, в отличие от безынерционной модели.

6. Одновременное изменение начальных значений всех псевдоскоростей  $\boldsymbol{\nu} \rightarrow \lambda \boldsymbol{\nu}, \lambda \neq 0$  умножением на число, отличное от нуля, эквивалентно замене времени  $t \rightarrow \lambda t$ .

**4. Переход между роликами.** Уравнения (3.6) описывают динамику системы на промежутках времени, в течение которых не происходит смены роликов. При переходе любого колеса с одного ролика на другой коэффициенты уравнений терпят разрыв второго рода из-за выражений  $\rho_i = l \cos \chi_i - r$  в знаменателе.

Заметим, что в технических реализациях омни-колес ситуация  $\rho_i = 0$  никогда не имеет места, т.к. концы роликов усекаются (в частности, потому что оси роликов в реальных системах имеют ненулевую толщину и должны быть закреплены в колесах). Для того, чтобы в каждый момент в контакте между колесом и плоскостью был ролик, их располагают в два или больше рядов.

Для исследования движений, на которых происходят смены контактных роликов, примем следующие предположения. Усечем ролики (см. рис. 3), но оставим их оси в одной

плоскости, допуская пересечение тел роликов в пространстве и пренебрегая им. Переход между роликами одного колеса будет происходить при значении угла  $\chi_i = \frac{2\pi}{n}$ . Колесо с усеченными роликами определим, располагая ось ролика на расстоянии  $r = l \cos \frac{\pi}{n-1}$  от центра колеса, а его поверхность задавая как фигуру вращения дуги окружности радиуса  $l$  с углом раствора  $\frac{2\pi}{n}$  вокруг этой оси, замкнутую соответствующими дисками.

Кроме этого, при смене контакта происходит мгновенное наложение связи на вновь вошедший в контакт ролик и снятие её с освободившегося, после чего последний может свободно вращаться вокруг своей оси. При смене роликов в реальной системе происходят взаимодействия типа ударных, в том числе проскальзывание роликов относительно плоскости. Моделирование этих эффектов не рассматривается в настоящей статье. Опираясь на наблюдения за реальными системами, которые демонстрируют довольно “гладкое” поведение, будем считать, что скорости  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ , описывающие движение платформы, при переходе с ролика на ролик не изменяются. При существенном превышении массы платформы над массами роликов такое предположение представляется разумным. Из уравнений (2.1, 2.2) получим, что ролик, входящий в контакт, мгновенно приобретает ту же угловую скорость, что и освобождающийся ролик.

Таким образом, при переходе ( $\chi_i = \chi_i^+$ ) сохраним значения  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ , заменим  $\chi_i$  с  $\chi_i^+$  на  $\chi_i^-$  (см. рис. 4), и выполним с псевдоскоростями  $\nu_s$  следующее преобразование. Пусть  $\boldsymbol{\nu}_i^s = (\nu_{i2}, \dots, \nu_{in})$  – псевдоскорости свободных роликов на колесе  $i$ . Тогда если при смене контакта  $\dot{\chi}_i > 0$  (т.е. колесо поворачивается против часовой стрелки, см. рис. 1), то отбросим  $\nu_{in}$ , остальные компоненты  $\boldsymbol{\nu}_i^s$  перенумеруем, сдвигая их вперед:  $\nu_{ij} \rightarrow \nu_{ij+1}$ , а  $\nu_{i2}$  положим равной значению правой части в уравнении связи (2.1). При вращении колеса в другую сторону, выполним аналогичные преобразования, сдвиг номеров роликов при этом происходит назад.

**5. Примеры движений** Численные решения получим для симметричного трехколесного экипажа ( $\alpha_i = \frac{2\pi}{N}(i-1)$ ,  $N=3$ ), с  $n=5$  роликами на колесе и следующих движений:

1. вращение вокруг своей оси ( $\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ ) (фиг. 5),
2. движение по прямой в направлении оси первого колеса ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = \nu_3(0) = 0$ ) (фиг. 6)
3. движение с ненулевой скоростью центра масс и, одновременно, с ненулевой угловой скоростью платформы ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ ) (фиг. 7).

Для безынерционной модели массово-инерционные характеристики колес положим соответствующими системе с 5 заблокированными роликами.

Во всех трех случаях наблюдаются отличия между двумя постановками: свободные ролики приходят в движение, из-за чего меняется угловая скорость платформы экипажа и скорость центра масс экипажа. Кроме этого, становится заметно влияние введенных предположений о смене контакта: график кинетической энергии приобретает ступенчатый вид в силу изменений в слагаемых (3.2), зависящих от  $\chi$  и  $\dot{\phi}_{i,j}$ :

$$B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}), \quad (5.1)$$

происходящих при мгновенном наложении связей. В промежутки времени между сменами роликов энергия остается постоянной.

В случаях 1 и 2 траектории центра экипажа  $S$  на плоскости  $OXY$  и характер вращения вокруг вертикальной оси  $SZ$  ( $\theta(t)$ ) отличаются между моделью с роликами и безынерционной несущественно, однако заметны переходные процессы во вращении роликов в начале движения.

В случае вращения вокруг вертикали (движение 1) угловая скорость платформы  $\nu_3$  меняется не монотонно, но в среднем медленно убывает: за первые 1000 секунд угловая скорость уменьшается на 2%. Скорость центра масс остается равной нулю. Кинетическая энергия системы также медленно убывает. На фиг. 5 представлены угловые скорости роликов на первом колесе  $\dot{\phi}_{1j}$  (номер кривой, указанной на рисунке, совпадает с номером ролика на колесе, поведение роликов на других двух колесах полностью аналогично). Заметим, что при нулевой скорости центра экипажа опорный ролик не вращается (2.2): угловая скорость первого ролика в течение первой секунды движения нулевая. После выхода из контакта ролик начинает раскручиваться в соответствии с первым интегралом (3.7). Раскрученный ролик при входе в контакт с опорной плоскостью мгновенно теряет угловую скорость – на графике угловой скорости первого ролика это происходит при  $t = 9.6$  с – что приводит к убыванию кинетической энергии.

При движении по прямой (движение 2) угловая скорость остается нулевой. На фиг. 6 слева показаны графики относительного изменения скорости центра масс  $\nu_1(t)/\nu_1(0) - 1$  (кривая 1) и кинетической энергии  $T/T(0) - 1$  (кривая 2). Видно, что на начальном этапе движения при смене контакта кинетическая энергия возрастает, что обусловлено принятой в данной работе моделью наложения связи, но при этом возрастание энергии остается в пределах 4%. Скорость центра масс (кривая 2, слева) в среднем убывает. Скорость вращения переднего колеса равна нулю, колесо катится, опираясь на один и тот же ролик, остальные ролики не раскручиваются. Угловые скорости роликов на одном из задних колес показаны на фиг. 6 справа. Свободные ролики двигаются с постоянной угловой скоростью, ролик в контакте изменяет свою скорость за счет скорости центра масс. После того, как все ролики побывают в контакте, их движение становится квазипериодичным, а энергия убывает с каждой сменой контакта.

При движении 3, сочетающем поступательное и вращательное движение, угловая скорость экипажа  $\nu_3$  растёт и выходит на постоянное значение (кривая 1 на фиг. 7 слева вверх), скорость центра экипажа  $v = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$  уменьшается до нуля (кривая 2 там же), а кинетическая энергия после короткого начального участка, где происходят маленькие по величине скачки вверх аналогично движению 2, убывает. Угловые скорости роликов представляют собой квазипериодические функции времени (характерный участок представлен на фиг. 7 справа вверх, обозначения те же что и на фиг. 5). Центр платформы описывает спираль, фиг. 7 внизу. Заметим, что если не учитывать массу роликов на колесе, то при этих начальных условиях скорость центра масс и угловая скорость платформы сохраняется, а центр масс описывает окружность. Таким образом, даже малая масса роликов приводит к качественным изменениям в движении экипажа.

### **Заключение.**

Результаты проведенной работы следующие:

1. получены уравнения движения экипажа с полным набором роликов в неголономной постановке,
2. показано, что при учете массы роликов возникают дополнительные члены, пропорциональные моменту инерции ролика относительно его оси,
3. предложена модель перехода с ролика на ролик,
4. получены численные решения с учетом движения свободных роликов для симметричного экипажа и обнаружены существенные отличия от безынерционной модели.

## Список литературы

1. Gfrerrer A. Geometry and kinematics of the Mecanum wheel // Computer Aided Geometric Design. 2008. Т. 25. С. 784–791.
2. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Динамика экипажа с роликонесущими колесами // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, № 1. С. 13–22.
3. Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Известия российской академии наук. Теория и системы управления. 2007. № 6. С. 142–149.
4. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Тележка с омниколесами на плоскости и сфере // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4 (Мобильные роботы). С. 785–801.
5. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Математические аспекты динамики движения экипажа с тремя окольцованными колесами // Мобильные роботы и мехатронные системы. М., 2006. С. 61–67.
6. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Свободные и управляемые движения некоторой модели экипажа с роликонесущими колесами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. М., 2008. № 6. С. 62–65.
7. Мартыненко Ю. Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, № 4. С. 610–619.
8. Косенко И. И., Герасимов К. В. Физически-ориентированное моделирование динамики омнитеlejки // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12, № 2. С. 251–262.

9. Tobolar J., Herrmann F., Bunte T. Object-oriented modelling and control of vehicles with omni-directional wheels // Computational Mechanics. Hrad Nectiny, Czech Republic: 2009. November 9–11.
10. Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots / R.L. Williams, B.E. Carter, P. Gallina [и др.] // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2002. jun. T. 18, № 3. С. 285–293. URL: <https://doi.org/10.1109/tra.2002.1019459>.
11. Ashmore Mark, Barnes Nick. Omni-drive Robot Motion on Curved Paths: The Fastest Path between Two Points Is Not a Straight-Line // Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2002. С. 225–236. URL: [https://doi.org/10.1007/3-540-36187-1\\_20](https://doi.org/10.1007/3-540-36187-1_20).
12. Татаринов Я. В. Уравнения классической механики в новой форме // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2003. № 3. С. 67–76.
13. Zobova A. A. Application of laconic forms of the equations of motion in the dynamics of nonholonomic mobile robots // Nelineinaya Dinamika. 2011. С. 771–783. URL: <https://doi.org/10.20537>

**6. Приложение. Явные виды выражений.** Матрица кинетической энергии:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} M & & & & & & \\ & M & & & & & \\ & & I_S & \cdots & B \sin(\chi_k + \kappa_1) & \cdots & B \sin(\chi_N + \kappa_n) \\ & & & J & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & J & \\ & * & & & & & B \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & B \end{bmatrix},$$

где в третьей строке сначала указаны элементы  $B \sin(\chi_k + \kappa_1)$ , соответствующие роликам, находящимся в контакте, а затем –  $B \sin(\chi_i + \kappa_j)$ ,  $i = 1, \dots, N, j = 2, \dots, n$ , соответствующие “свободным” роликам, упорядоченные по возрастанию индексов так, что ролики одного колеса соседствуют.

Матрица связей:

$$V = \begin{bmatrix} R \cos \theta & -R \sin \theta & 0 & & \\ R \sin \theta & R \cos \theta & 0 & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} & 0 & \\ \frac{R \sin \alpha_i}{l} & -\frac{R \cos \alpha_i}{l} & -\frac{R}{\Lambda l} & & \\ \frac{R \cos \alpha_k}{\rho_k} & \frac{R \sin \alpha_k}{\rho_k} & 0 & & \\ & 0 & & \mathbf{E}_{N(n-1)} & \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы кинетической энергии с учетом связей:



$$\begin{aligned}
m_{11}^* &= MR^2 + \sum_i \left( J \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \alpha_i + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \cos^2 \alpha_i \right), \\
m_{22}^* &= MR^2 + \sum_i \left( J \frac{R^2}{l^2} \cos^2 \alpha_i + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \sin^2 \alpha_i \right), \\
m_{33}^* &= \frac{1}{\Lambda} (I_S + \sum_i J \frac{R^2}{l^2}), \\
m_{12}^* &= \sum_i \left( -J \frac{R^2}{l^2} + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \right) \sin \alpha_i \cos \alpha_i, \\
m_{13}^* &= \frac{1}{\Lambda} \sum_i B \frac{R \sin \chi_i}{\rho_i} \cos \alpha_i, \\
m_{23}^* &= \frac{1}{\Lambda} \sum_i B \frac{R \sin \chi_i}{\rho_i} \sin \alpha_i.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Формальные импульсы  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ :

$$\begin{aligned}
p_x &= MR(\nu_1 \cos \theta - \nu_2 \sin \theta), \\
p_y &= MR(\nu_1 \sin \theta + \nu_2 \cos \theta), \\
p_\theta &= BR \sum_i \frac{\sin(\chi_i + \kappa_1)}{\rho_i} (\nu_1 \cos \alpha_i + \nu_2 \sin \alpha_i) + \frac{I_S}{\Lambda} \nu_3 + B \sum_s \sin(\chi_s) \nu_s, \\
p_{\chi_i} &= J \frac{R}{l} (\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{1}{\Lambda} \nu_3), \\
p_{\phi_{k1}} &= \frac{BR}{\rho_k} (\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k) + \frac{B}{\Lambda} \nu_3 \sin(\chi_k + \kappa_1), \\
p_{\phi_s} &= \frac{B}{\Lambda} \nu_3 \sin \chi_s + B \nu_s.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Линейные комбинации  $P_\alpha$ :

$$\begin{aligned}
P_1 &= R \left( p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_i \left( \frac{\sin \alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\cos \alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \right) \right), \\
P_2 &= R \left( -p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_i \left( -\frac{\cos \alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\sin \alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \right) \right), \\
P_3 &= \frac{1}{\Lambda} \left( p_\theta + \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i} \right), \\
P_s &= p_{\phi_s},
\end{aligned} \tag{6.3}$$

где от  $\chi_i$  зависят  $p_{\phi_{i1}}, p_\theta, \rho_i$  (см. (6.2)), а потому и  $P_1$  и  $P_2$ , отвечающие проекциям скорости центра масс платформы на подвижные оси, а также  $P_3$ , соответствующий вращению платформы.

Для упрощения записи правой части уравнений введем обозначение для операции дискретной свертки произвольной функции  $f$ :

$$\sigma[f(\alpha, \chi)] = \sum_{k=1}^N f(\alpha_k, \chi_k) \frac{\sin \chi_k}{\rho_k^3}$$

Тогда скобки Пуассона в правой части имеют вид (звездочкой обозначена подстановка канонических формальных импульсов  $p_i$ ):

$$\begin{aligned}
(\{P_1, P_2\})^* &= \left( -\sum_{k=1}^N R^2 \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = -BR^2 (R\nu_1 \sigma[\cos \alpha] + R\nu_2 \sigma[\sin \alpha] + \Lambda^{-1} \nu_3 \sigma[\rho \sin \chi]) = \\
&= -BR^2 \mathbf{p}_{12} \boldsymbol{\nu}, \text{ где } \mathbf{p}_{12} = (\sigma[\cos \alpha], R\sigma[\sin \alpha], \Lambda^{-1} \sigma[\rho \sin \chi], 0, \dots, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\{P_1, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left( -\sin \theta p_x + \cos \theta p_y - \sum_{k=1}^N R \cos \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = MR^2 \Lambda^{-1} \nu_2 - \\
&- BR^2 \Lambda^{-1} (R\nu_1 \sigma[\cos^2 \alpha] + R\nu_2 \sigma[\sin \alpha \cos \alpha] + \Lambda^{-1} \nu_3 \sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi]) = \\
&= MR^2 \Lambda^{-1} \nu_2 - BR^2 \mathbf{p}_{13} \boldsymbol{\nu},
\end{aligned}$$

$$\text{где } \mathbf{p}_{13} = \Lambda^{-1} (R\sigma[\cos^2 \alpha], R\sigma[\sin \alpha \cos \alpha], \Lambda^{-1} \sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0)$$

$$\begin{aligned}
(\{P_2, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left( -\cos \theta p_x - \sin \theta p_y - \sum_{k=1}^N R \sin \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = -MR^2 \Lambda^{-1} \nu_1 - \\
&- BR^2 \Lambda^{-1} (R\nu_1 \sigma [\sin \alpha \cos \alpha] + R\nu_2 \sigma [\sin^2 \alpha] + \Lambda^{-1} \nu_3 \sigma [\rho \sin \alpha \sin \chi] = \\
&= -MR^2 \Lambda^{-1} \nu_1 - BR^2 \mathbf{p}_{23} \boldsymbol{\nu},
\end{aligned}$$

$$\text{где } \mathbf{p}_{23} = \Lambda^{-1} (R\sigma [\sin \alpha \cos \alpha], R\sigma [\sin^2 \alpha], \Lambda^{-1} \sigma [\rho \sin \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0),$$

$$(\{P_1, P_2\})^* = \left( -\sum_{k=1}^N R^2 \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = -BR^2 (R\nu_1 S_1^1 + R\nu_2 S_2^1 + \Lambda^{-1} \nu_3 S_3^1)$$

$$S_1^1 = \sum_{k=1}^N \frac{\cos \alpha_k}{\rho_k} \tau_k, \quad S_2^1 = \sum_{k=1}^N \frac{\sin \alpha_k}{\rho_k} \tau_k, \quad S_3^1 = \sum_{k=1}^N \sin \chi_k \tau_k,$$

$$\begin{aligned}
(\{P_1, P_3\})^* &= \frac{R}{\Lambda} \left( -\sin \theta p_x + \cos \theta p_y - \sum_{k=1}^N R \cos \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = \\
&= -\frac{BR^2}{\Lambda} (R\nu_1 S_1^2 + R\nu_2 S_2^2 + \Lambda^{-1} \nu_3 S_3^2),
\end{aligned}$$

$$S_1^2 = \sum_{k=1}^N \cos \alpha_k \frac{\cos \alpha_k}{\rho_k} \tau_k, \quad S_2^2 = \sum_{k=1}^N \cos \alpha_k \frac{\sin \alpha_k}{\rho_k} \tau_k - \frac{M}{BR},$$

$$S_3^2 = \sum_{k=1}^N \cos \alpha_k \sin \chi_k \tau_k,$$

$$\begin{aligned}
(\{P_2, P_3\})^* &= \frac{R}{\Lambda} \left( -\cos \theta p_x - \sin \theta p_y - \sum_{k=1}^N R \sin \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = \\
&= -\frac{BR^2}{\Lambda} (R\nu_1 S_1^3 + R\nu_2 S_2^3 + \Lambda^{-1} \nu_3 S_3^3),
\end{aligned}$$

$$S_1^3 = \sum_{k=1}^N \sin \alpha_k \frac{\cos \alpha_k}{\rho_k} \tau_k + \frac{M}{BR}, \quad S_2^3 = \sum_{k=1}^N \sin \alpha_k \frac{\sin \alpha_k}{\rho_k} \tau_k,$$

$$S_3^3 = \sum_{k=1}^N \sin \alpha_k \sin \chi_k \tau_k,$$

$$\{P_\alpha, P_\beta\} = 0, \quad \alpha, \beta > 3$$

## 7. Результаты расчетов и схемы.

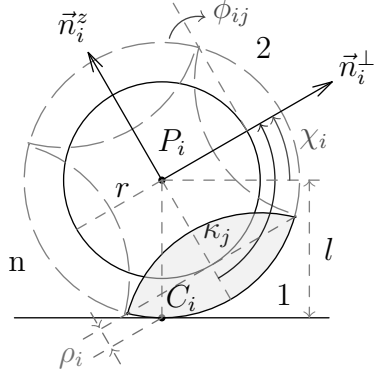


Рис. 1: Колесо

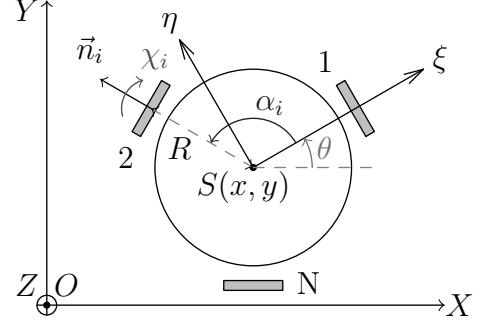


Рис. 2: Экипаж

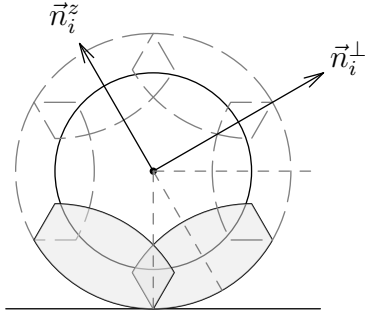


Рис. 3: Ролики перекрываются

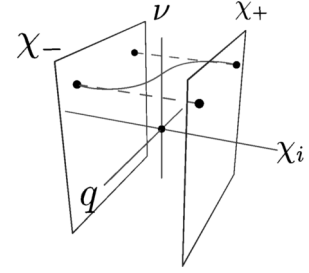


Рис. 4: Переход между роликами

Расчеты выполнены при следующих значениях геометрических и массовых параметров: радиус колеса  $r = 0.05$ , масса колеса  $M_{\text{к}} = 0.15$ , масса ролика  $m_{\text{рол}} = 0.05$ , радиус платформы  $R = 0.15$ , масса платформы  $M_{\text{пл}} = 1$ .

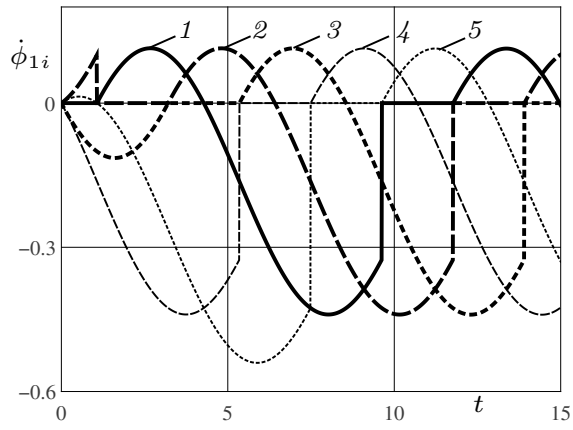


Рис. 5: Угловые скорости роликов колеса при вращении экипажа вокруг вертикали

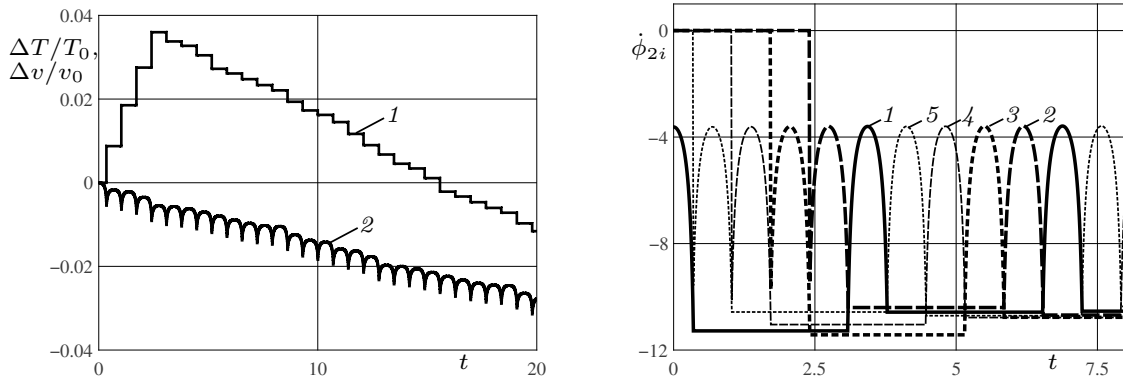


Рис. 6: Изменение энергии и скорости центра масс (слева) и угловые скорости роликов бокового колеса (справа) при прямолинейном движении

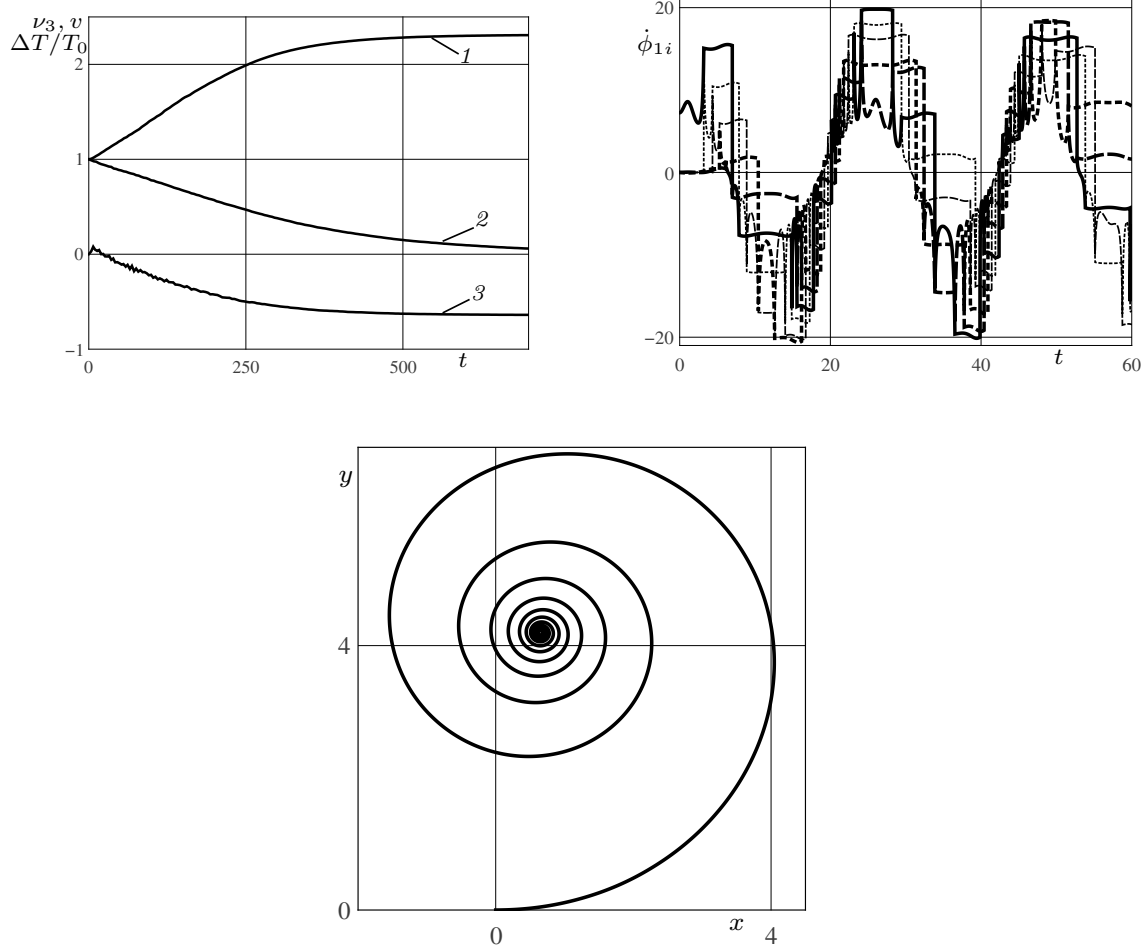


Рис. 7: Угловая скорость, скорость центра масс и изменение энергии (вверху слева), угловые скорости роликов первого колеса (вверху справа) и траектория центра масс (внизу) при поступательно-вращательном движении

#### Авторы.

- Герасимов Кирилл Вячеславович (Kirill Gerasimov); 119234, Москва, Ленинские горы, 1Б, 1725; 8 (925) 033-60-79; kiriger@gmail.com;
- Зобова Александра Александровна (Alexandra Zobova); Москва, Дмитровское шоссе, 165Е, корп. 1, кв. 28; 8 (916) 333-19-78; azobova@mech.math.msu.su.

Кафедра теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Тел.: (495) 939-36-81

On the motion of a symmetrical vehicle with omniwheels with massive rollers