Динамика смены ролика в контакте омни-колеса и плоскости

К.В. Герасимов, А.А. Зобова

Кафедра теоретической механики и мехатроники
Механико-математический факультет
МГУ им. М.В. Ломоносова

Ломоносовские чтения, Апрель 2018

План

Постановка задачи

Удар

Переход между роликами как задача теории удара

Удар как действие реакций

Удар как проецирование скоростей

Изменение энергии

Численное решение

Примеры.

Постановка задачи

Рисунки

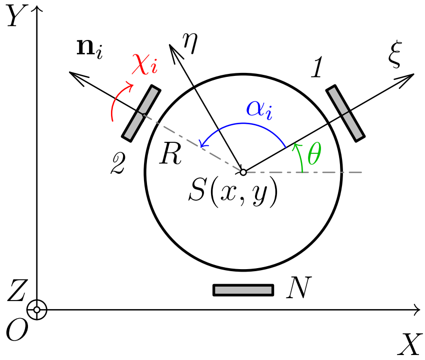

Рис.: Экипаж

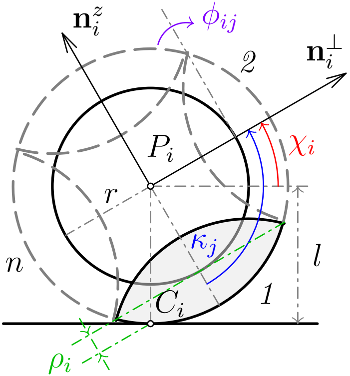

Рис.: Колесо

Постановка задачи

Тела, связи, степени свободы

- Экипаж состоит из платформы, N колес и n роликов, количество твердых тел:

$$1 + N(n+1)$$

- Оси и центры колес и роликов неподвижны относительно платформы и колес соответственно
- Скорость точек контакта равна нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, i = 1 \dots N$$

- Количество степеней свободы:

$$3 + N(n-1)$$

Постановка задачи

Координаты, псевдоскорости, связи

- Обобщенные координаты:
  $q = (x, y, \theta, \chi_i, \phi_k, \phi_s)$, где $i, k = 1 \dots N$, s – ролики вне контакта.
- Псевдоскорости:
  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \mathbf{v}_S = R\nu_1 \mathbf{e}_\xi + R\nu_2 \mathbf{e}_\eta, \nu_3 = \Lambda\dot{\theta}, \nu_s = \dot{\phi}_s$
- Связи:

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos\theta - R\nu_2 \sin\theta, \qquad \dot{y} = R\nu_1 \sin\theta + R\nu_2 \cos\theta,$$

$$\dot{\theta} = \frac{\nu_3}{\Lambda}, \qquad \dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin\alpha_i - \nu_2 \cos\alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}),$$

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{l\cos\chi_k - r}(\nu_1 \cos\alpha_k + \nu_2 \sin\alpha_k), \qquad \dot{\phi}_s = \nu_s$$

Уравнения движения

в форме Я.В. Татаринова

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}$$

$$\nu_\mu P_\mu = \dot{q}_i p_i, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$L^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}^*(\chi_i)\boldsymbol{\nu}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{M}}_{11} & O_{3\times N} & \widetilde{\mathbf{M}}_{13} \\ & JE_{N\times N} & O_{N\times Nn} \\ \star & & BE_{Nn\times Nn} \end{bmatrix} \\
\widetilde{\mathbf{M}}_{11} &= \mathrm{diag}(M, M, I_S) \\
\widetilde{\mathbf{M}}_{13} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ B\sin\chi_{11} & \cdots & B\sin\chi_{Nn} \end{bmatrix} \\
\mathring{V} &= \begin{bmatrix} R\cos\theta & -R\sin\theta & 0 \\ R\sin\theta & R\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} \\ \frac{R}{l}\sin\alpha_i & -\frac{R}{l}\cos\alpha_i & -\frac{R}{l\Lambda} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

План

Переход между роликами

(1) Уравнения вырождаются на стыках роликов:

разрыв 2ого рода в правой части из-за выражений $(l \cos \chi_i - r)$ *в знаменателе.*

Пусть переход на следующий ролик будет раньше стыка.

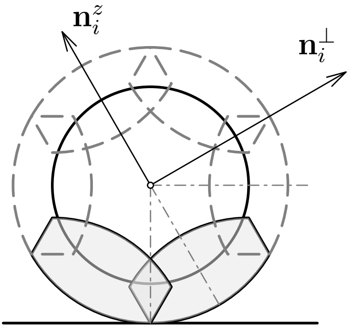

Рис.: Ролики перекрываются

Переход между роликами

(2) Ролики входят и выходят из состояния контакта при $t = t^*$.

Происходит мгновенное снятие связи с одного ролика и наложение связи на другой.

Пусть:

- $\Delta t << 1, \quad \Delta \mathbf{q} \sim \nu \Delta t << 1, \quad \Delta \nu < \infty,$
- в точках контакта: $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{F}, \quad \mathbf{M} = 0,$
- трения в осях нет,
- к моменту окончания удара $t^* + \Delta t$ уравнения связей выполнены ($\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}(\mathbf{q}^+)\boldsymbol{\nu}^+$), т.е. за время Δt проскальзывание вошедшего в контакт ролика закончилось

План

Удар как действие реакций

Линейная система уравнений на реакции и скорости после удара

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}^{+} - \dot{\mathbf{q}}^{-}) = \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}\mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{q}}^{+} = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^{+}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^{+} - \mathbf{K}\mathbf{F} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^{-}$$

$$(\boldsymbol{\nu}^{+}; \mathbf{F})^{T} = (\mathbf{M}\mathbf{V} \quad -\mathbf{K})^{-1}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^{-}$$

$$\begin{aligned}
\dim \mathbf{MV} &= \dim \mathbf{q} \times \dim \boldsymbol{\nu} \\
\dim \mathbf{K} &= \dim \mathbf{q} \times \dim \mathbf{F} \\
\dim \mathbf{q} &= 3 + N(n+1) \\
\dim \boldsymbol{\nu} &= 3 + N(n-1) \\
\dim \mathbf{F} &= 2N
\end{aligned}$$

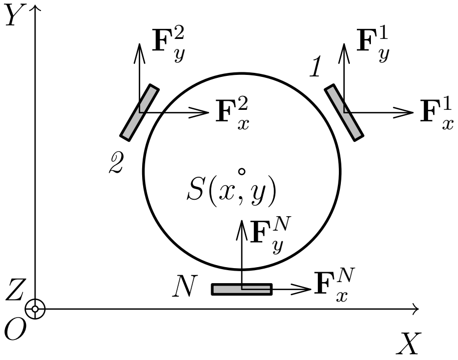

Рис.: Касательные реакции в точках контакта

Удар как действие реакций

Обобщенные импульсы и реакции

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}^i_1 &= \mathbf{F}^i_x \\
\mathbf{Q}^i_2 &= \mathbf{F}^i_y \\
\mathbf{Q}^i_\theta &= R\left(-\mathbf{F}^i_x \sin(\theta+\alpha_i) + \mathbf{F}^i_y \cos(\theta+\alpha_i)\right) \\
\mathbf{Q}_{\chi_i} &= \frac{l}{R}\mathbf{Q}^i_\theta \\
\mathbf{Q}_{\phi_i} &= -\rho_i\left(\mathbf{F}^i_x \cos(\theta+\alpha_i) + \mathbf{F}^i_y \sin(\theta+\alpha_i)\right) \\
\mathbf{Q}_s &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{Q} = \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{Q}^i_1,\ \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}^i_2,\ \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}^i_\theta,\ \mathbf{Q}_{\chi_i}|_{i=1}^N,\ \mathbf{Q}_{\phi_i}|_{i=1}^N,\ \mathbf{Q}_s \right)^T
$$

План

Удар как проецирование скоростей

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \dot{\mathbf{q}}^- - \Delta\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ \in \widetilde{V}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta\dot{\mathbf{q}},\ \mathbf{MV}) \\ &= \left(\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-,\ \mathbf{MV}\right) \\ &= \left(\mathbf{MV}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-,\ \mathbf{V}\right) \\ &= \mathbf{V}^T\mathbf{MV}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{V}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^- \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\nu}^+ = \left(\mathbf{V}^T\mathbf{MV}\right)^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-$$

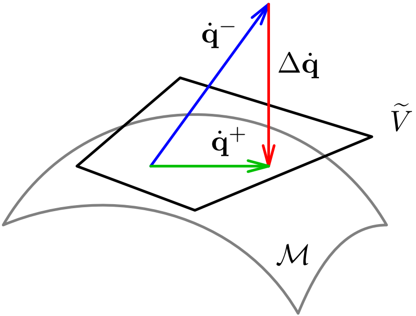

Рис.: $\dot{\mathbf{q}}^+$ – проекция $\dot{\mathbf{q}}^-$ на $\widetilde{V}$, ортогональная в метрике $\mathbf{M}$

Два способа

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}\mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+$$

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{K}\mathbf{F} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-$$

$$\begin{aligned}
\dim \mathbf{MV} &= \dim \mathbf{q} \times \dim \boldsymbol{\nu} \\
\dim \mathbf{K} &= \dim \mathbf{q} \times \dim \mathbf{F} \\
\dim \mathbf{q} &= 3 + N(n+1) \\
\dim \boldsymbol{\nu} &= 3 + N(n-1) \\
\dim \mathbf{F} &= 2N
\end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{\nu}^+; \mathbf{F})^T = (\mathbf{MV} \quad -\mathbf{K})^{-1}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-$$

Вычисление ударных импульсов и проецирование $\dot{\mathbf{q}}^-$ на $\widetilde{V}$ дают один результат.

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \dot{\mathbf{q}}^- - \Delta\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ \in \widetilde{V}$$

$$\begin{aligned}
0 &= (\Delta\dot{\mathbf{q}}, \ \mathbf{MV}) \\
&= (\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-, \ \mathbf{MV}) \\
&= (\mathbf{MV}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-, \ \mathbf{V}) \\
&= \mathbf{V}^T\mathbf{MV}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{V}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\nu}^+ = \left(\mathbf{V}^T\mathbf{MV}\right)^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-$$

План

Постановка задачи

Удар

- Переход между роликами как задача теории удара
- Удар как действие реакций
- Удар как проецирование скоростей
- Изменение энергии

Численное решение

- Примеры.

Изменение энергии

Соответствует теореме Карно

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}},\ \ \dot{\mathbf{q}}\right), \quad \dot{\mathbf{q}}^{+} = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^{+}$$

В силу идеальности связей:

$$\left(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^{+},\ \ \Delta\dot{\mathbf{q}}\right) = \left(\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}},\ \ \dot{\mathbf{q}}^{+}\right) = \left(\mathbf{P},\ \ \dot{\mathbf{q}}^{+}\right) = 0$$

Поэтому:

$$\Delta\mathbf{T} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}},\ \ \Delta\dot{\mathbf{q}}\right) < 0$$

$$\begin{aligned}
2\Delta\mathbf{T} &= 2\left(\mathbf{T}^{+} - \mathbf{T}^{-}\right) = \left(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^{+},\ \ \dot{\mathbf{q}}^{+}\right) - \left(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^{-},\ \ \dot{\mathbf{q}}^{-}\right) \\
&= \left(\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}},\ \ \Delta\dot{\mathbf{q}}\right) + 2\left(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^{-},\ \ \Delta\dot{\mathbf{q}}\right) \\
&= -\left(\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}},\ \ \Delta\dot{\mathbf{q}}\right) + 2\left(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^{+},\ \ \Delta\dot{\mathbf{q}}\right) = -\left(\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}},\ \ \Delta\dot{\mathbf{q}}\right)
\end{aligned}$$

План

Значения параметров

- радиус колеса $r = 0.05$,
- масса колеса $M_{\text{к}} = 0.15$,
- масса ролика $m_{\text{рол}} = 0.05$,
- радиус платформы $R = 0.15$,
- масса платформы $M_{\text{пл}} = 1$.

Вращение вокруг своей оси ($\nu_{1,2}(0) = 0, \nu_3 = 1$).

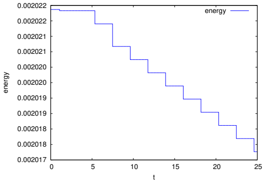

Рис.: Кинетическая энергия

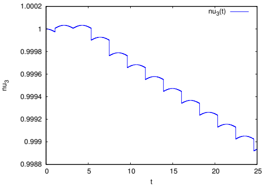

Рис.: Угловая скорость экипажа

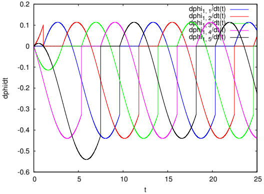

Рис.: Угловые скорости роликов

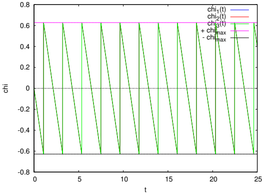

Рис.: Углы поворота колес

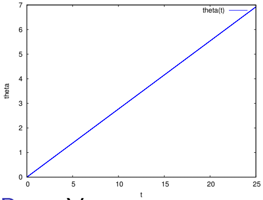

Рис.: Угол поворота экипажа

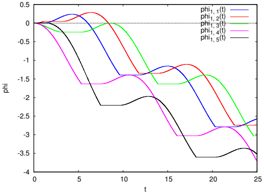

Рис.: Углы поворота роликов

Движение по прямой $(\nu_1(0) = 1, \nu_{2,3} = 0)$.

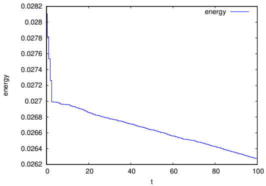

Рис.: Кинетическая энергия

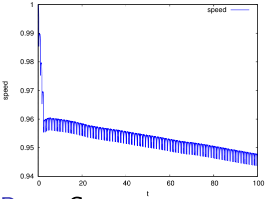

Рис.: Скорость центра масс

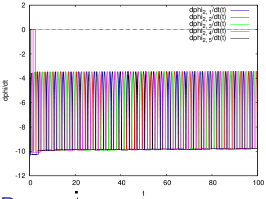

Рис.: $\dot{\phi}$ на заднем колесе

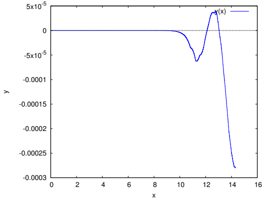

Рис.: Траектория

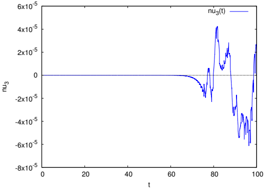

Рис.: Угловая скорость экипажа

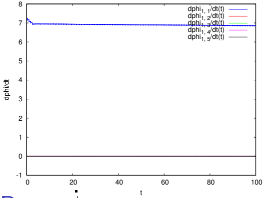

Рис.: $\dot{\phi}$ на переднем колесе

Движение с закруткой $(\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1)$.

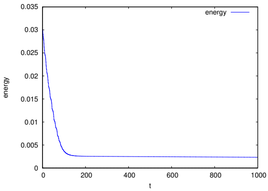

Рис.: Кинетическая энергия

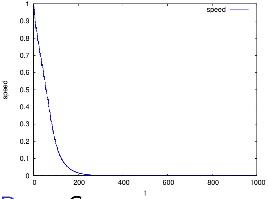

Рис.: Скорость центра масс

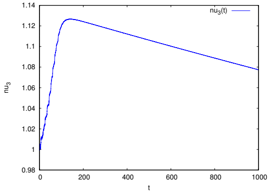

Рис.: Угловая скорость экипажа

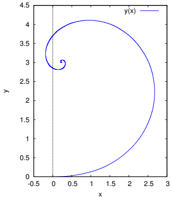

Рис.: Траектория

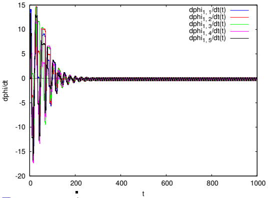

Рис.: $\dot{\phi}$ на первом колесе

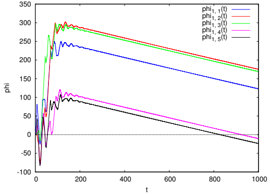

Рис.: углыϕ на первом колесе

Результаты

- Рассмотрены уравнения движения экипажа в неголономной постановке с учетом движения всех роликов.
- Предложен способ ведения расчетов, учитывающий влияние ударного взаимодействия при смене контакта на всю систему.
- Показано, что кинетическая энергия не возрастает при сменах контакта и постоянна на гладких участках движения.
- Получены численные решения для симметричной конфигурации.

Спасибо за внимание!

Кинетическая энергия и лагранжиан

- Присутствует аддитивный член, пропорциональный B – моменту инерции ролика относительно его оси собственного вращения:

$$2T = 2L = M\mathbf{v}_S^2 + I_S\dot{\theta}^2 + J\sum_i \dot{\chi}_i^2 +$$

$$+B\sum_{i,j}(\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta}\sin(\kappa_j + \chi_i)\dot{\phi}_{ij}),$$

$$M = \mathring{M} + Nnm$$

$$I_S = \mathring{I}_S + N\cdot n(\frac{A+B}{2} + mR^2 + \frac{mr^2}{2}),$$

$$J = \mathring{J} + n(A + mr^2)$$

Кинетическая энергия и лагранжиан

- С учетом связей:

$$2L^* = \mathring{\nu}^T \mathring{V}^T \mathring{M} \mathring{V} \mathring{\nu} +$$

$$+B \sum_i \Big(\frac{(\nu_2 \sin \alpha_i + \nu_1 \cos \alpha_i)^2 R^2}{\rho_i^2} +$$

$$+ \frac{2R\nu_3(\nu_2 \sin \alpha_i + \nu_1 \cos \alpha_i) \sin \chi_i}{\rho_i \Lambda} \Big)$$

$$+B \sum_{i,j} \Big(\frac{2\nu_3 \nu_{ni+j} \sin(\kappa_j + \chi_i)}{\Lambda} + \nu_{ni+j}^2 \Big)$$

где $\frac{1}{2}\mathring{\nu}^T \mathring{V}^T \mathring{M} \mathring{V} \mathring{\nu}$ – лагранжиан системы без роликов,
$\rho_i = l \cos \chi_i - r$

Кинетическая энергия и лагранжиан

Матрицы кинетической энергии и связей для системы без роликов

$$\mathring{M} = diag(M, M, I_S, J...J),$$

$$\mathring{V} = \begin{bmatrix} R\cos\theta & -R\sin\theta & 0 \\ R\sin\theta & R\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} \\ \frac{R}{l}\sin\alpha_i & -\frac{R}{l}\cos\alpha_i & -\frac{R}{l\Lambda} \end{bmatrix}$$

Структура уравнений

Отличие от случая без роликов

- Уравнения Я.В. Татаринова:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}, \qquad (3.1)$$

$$\nu_\mu P_\mu = \dot{q}_i p_i, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

- Лагранжиан и "импульсы" отличаются аддитивными членами:

$$L^* = \mathring{L}^* + BL^*_\Delta(\nu, \chi)$$

$$P_\alpha = \mathring{P}_\alpha(\theta, p_x, p_y, p_\chi) + P_\Delta(p_{\phi_i}, \chi)$$

Структура уравнений

Матрица лагранжиана

Лагранжиан с учетом связей имеет вид:

$$2L^* = \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} V^{\mathrm{T}} \mathcal{M} V \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} \mathcal{M}^*(\chi_i)\boldsymbol{\nu}$$

Структура симметричной матрицы $\mathcal{M}^*$ следующая:

$$\mathcal{M}^* = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & m^*_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}_{3\times 3} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ B\Lambda^{-1}\sin\chi_{12} & \dots & B\Lambda^{-1}\sin\chi_{nN} \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} B & & \\ & \ddots & \\ & & B \end{matrix} \\ * & \end{bmatrix}$$

Структура уравнений

Слагаемые для свободных роликов

Первое слагаемое (3.1) получается дифференцированием лагранжиана и подстановкой связей (ниже $\mathcal{M}_i^* = \dfrac{\partial \mathcal{M}^*}{\partial \chi_i}$):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} = \frac{d}{dt}(\mathcal{M}^*(\chi)\boldsymbol{\nu}_\alpha) = \mathcal{M}^*(\chi_i)\dot{\boldsymbol{\nu}}_\alpha + \left(\sum_{i=1}^{N} \mathcal{M}_i^*(V\nu)_{3+i}\boldsymbol{\nu}\right)_\alpha ,$$

Слагаемые, соответствующие свободным роликам:

$$\frac{\cos\chi_{ij}\nu_3 B\left(-\dfrac{\nu_3 R}{l\Lambda} - \dfrac{\cos\alpha_i\nu_2 R}{l} + \dfrac{\sin\alpha_i\nu_1 R}{l}\right)}{\Lambda} = \frac{B}{\Lambda}\cos\chi_{ij}(\dot{\chi}_i)^*\nu_3.$$

Структура уравнений

Детали

Формальные импульсы P_α и скобки Пуассона L^* с ними:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= R\Big(p_x\cos\theta + p_y\sin\theta + \sum_i\Big(\frac{\sin\alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\cos\alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i}\Big)\Big),\\
P_2 &= R\Big(-p_x\sin\theta + p_y\cos\theta + \sum_i\Big(-\frac{\cos\alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\sin\alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i}\Big)\Big),\\
P_3 &= \frac{1}{\Lambda}\Big(p_\theta - \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i}\Big), \quad P_s p_{\phi_s},
\end{aligned}
$$

$$
\{P_1, L^*\} = -\frac{\partial P_1}{\partial p_{\chi_i}}\frac{\partial L^*}{\partial \chi_i} = -\frac{R}{2l}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\sin\alpha_i\mathcal{M}_i^*\boldsymbol{\nu},
$$

$$
\{P_2, L^*\} = \frac{R}{2l}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\cos\alpha_i\mathcal{M}_i^*\boldsymbol{\nu},\ \{P_3, L^*\} = \frac{R}{2l\Lambda}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathcal{M}_i^*\boldsymbol{\nu}, \quad \{P_s, L^*\} = 0,
$$

Суммы $\{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\} \neq 0$ лишь для первых трех уравнений.

Структура уравнений

Новые слагаемые ($\mathcal{P}_\alpha$ и $\mathcal{M}_i^*$ зависят от χ)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^*\dot{\boldsymbol{\nu}} \quad = \quad & \frac{MR^2}{\Lambda}\begin{pmatrix} \nu_2\nu_3 \\ -\nu_1\nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{R}{2l}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} -\sin\alpha_i\mathcal{M}_i^* \\ \cos\alpha_i\mathcal{M}_i^* \\ \Lambda^{-1}\mathcal{M}_i^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{\nu} \\
- \quad & BR^2\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{\nu} \; - \; B\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \cos\chi_{12}\dfrac{\nu_3}{\Lambda}\dot{\chi}_1^* \\ \vdots \\ \cos\chi_{Nn}\dfrac{\nu_3}{\Lambda}\dot{\chi}_N^* \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Структура уравнений

Свойства

1. Интеграл энергии $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathcal{M}^*(\chi_i)\boldsymbol{\nu} = h = \mathrm{const}$
   (связи автономны, идеальны, силы консервативны)
2. $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu_s = \mathrm{const}$
3. $B = 0 \quad \Longrightarrow$ уравнения как в безынерционной модели.
4. Интеграл $m_{33}^*\nu_3 = \mathrm{const}$ разрушается при $B \neq 0$. $\dot{\nu}_3 \sim B$.
5. Первые интегралы:
   $$\nu_s + \frac{1}{\Lambda}\sin\chi_{ij}\nu_3 = const.$$
   Вращение $\nu_1(0) = 0, \nu_2(0) = 0, \nu 3(0) \neq 0$ неравномерно.
6. Замена псевдоскоростей $\boldsymbol{\nu} \to \lambda\boldsymbol{\nu}, \lambda \neq 0$ эквивалентна замене времени $t \to \lambda t$.