

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В.
ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И МЕХАТРОНИКИ

Герасимов Кирилл Вячеславович

**Динамика омниколесного экипажа с учетом инерции
роликов и трения**

Специальность 01.02.01 — теоретическая механика

Научно-квалификационная работа

Научные руководители:
д.ф.-м.н. проф. Косенко И.И.
к.ф.-м.н. доц. Зобова А.А.

Москва — 2018

Введение

Омни-колеса (в русской литературе также используется название роликоне-сущие колеса) – это колеса особой конструкции, позволяющей экипажу двигаться в произвольном направлении, вращая колеса вокруг их собственных осей и не поворачивая их вокруг вертикали. На ободе такого колеса располагаются ролики, которые могут свободно вращаться вокруг своих осей, жестко закрепленных в диске колеса. Существуют два варианта расположения осей роликов: первый (собственно омни-колеса) – оси роликов являются касательными к ободу колеса и, следовательно, лежат в его плоскости; второй (*mesanite wheels* [1]) – оси роликов развернуты вокруг нормали к ободу колеса на постоянный угол, обычно $\pi/4$.

Ранее была рассмотрена динамика омни-экипажей с использованием упрощенных моделей омни-колес без учета инерции и формы роликов [2–7], колеса (без роликов) моделируются как жесткие диски, которые могут скользить в одном направлении и катиться без проскальзывания в другом. Далее будем называть такую модель безынерционной, в том смысле, что инерция собственного вращения роликов в ней не учитывается. В другой части работ по динамике омни-экипажа [8–11] используются некоторые формализмы для построения численных моделей систем тел. При этом явный вид уравнений движения оказывается скрытым, что делает невозможным непосредственный анализ уравнений и затрудняет оценку влияния разных факторов на динамику системы.

Цель настоящей работы – изучение движения по инерции экипажа с омни-колесами с массивными роликами. Задача рассматривается в постановке с дифференциальными связями отсутствия проскальзывания в контакте, где составляются уравнения движения Я.В. Татарина [12] и проводится исследование их свойств и сравнение поведения такой системы с поведением системы в безынерционном случае [13], причем моменты перехода колес с одного ролика на другой изучаются с точки зрения теории удара; а также в постановке с трением, где строится численная динамическая модель экипажа и проводится ее верификация в сравнении с безынерционным случаем [4].

Глава 1

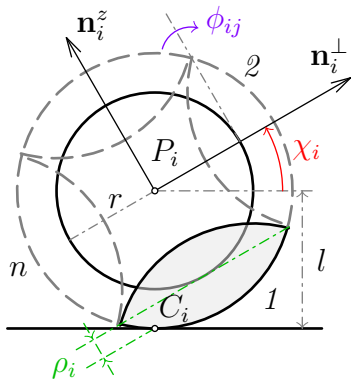
Уравнения движения экипажа на омни-колесах с учетом динамики роликов

1 Постановка задачи

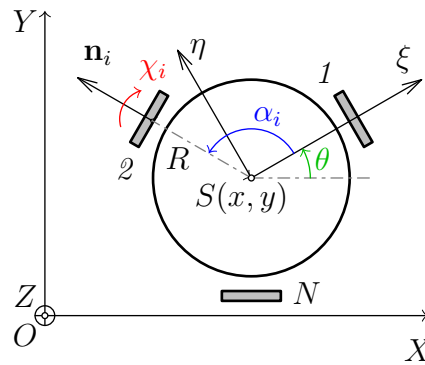
Рассмотрим экипаж с омни-колесами, движущийся по инерции по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Экипаж состоит из платформы и N одинаковых омни-колес, плоскости которых относительно платформы неподвижны. Каждое колесо может свободно вращаться относительно платформы вокруг собственной оси, расположенной горизонтально, и на каждом из них установлено n массивных роликов, так что оси роликов параллельны касательным к контурам дисков колес (см. левую часть фиг. 1.1). Ролики расположены по контуру дисков колес и показаны в виде затемненных областей, либо областей, ограниченных штриховой линией. Они пронумерованы от 1 до n . Таким образом, система состоит из $N(n + 1) + 1$ абсолютно твердых тел.

Введем неподвижную систему отсчета так, что ось OZ направлена вверх, а плоскость OXY совпадает с опорной плоскостью. Введем также подвижную систему отсчета $S\xi\eta Z$, жестко связанную с платформой экипажа так, что плоскость $S\xi\eta$ горизонтальна и содержит центры всех колес P_i . Будем считать, что оси колес лежат на лучах, соединяющих центр масс S плат-

формы и центры колес (см. правую часть фиг. 1.1), а расстояния от центров колес до S одинаковы и равны R . Геометрию установки колес на платформе зададим углами α_i между осью $S\xi$ и осями колес (см. левую часть фиг. 1.1). Будем считать, что центр масс всей системы совпадает с точкой S (отсюда следует, что $\sum_k \cos \alpha_k = \sum_k \sin \alpha_k = 0$). Введем также три орта, жестко связанных с дисками колес: орт оси i -го колеса $\mathbf{n}_i = \mathbf{SP}_i/|\mathbf{SP}_i|$ и орты \mathbf{n}_i^\perp и \mathbf{n}_i^z , лежащие в плоскости диска колеса, причем вектор \mathbf{n}_i^z вертикален при нулевом повороте колеса χ_i . Положения центров роликов на колесе определим углами κ_j между ними и направлением, противоположным вектору \mathbf{n}_i^z .



Фиг. 1.1. Колесо



Фиг. 1.2. Экипаж

Положение экипажа будем задавать следующими координатами: x, y — координаты точки S на плоскости OXY , θ — угол между осями OX и $S\xi$ (угол курса), χ_i ($i = 1, \dots, N$) — углы поворота колес вокруг их осей, отсчитываемые против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \mathbf{n}_i , и ϕ_j — углы поворота роликов вокруг их собственных осей. Таким образом, вектор обобщенных координат имеет вид

$$\mathbf{q} = (x, y, \theta, \{\chi_i\}_{i=1}^N, \{\phi_k\}_{k=1}^N, \{\phi_s\}_{s=1}^{N(n-1)})^T \in \mathbb{R}^{N(n+1)+3}$$

где сначала указаны углы поворота ϕ_k роликов, находящихся в данный момент в контакте с опорной плоскостью, а затем — остальных, “свободных”, роликов. Индекс s используется для сквозной нумерации свободных роликов и связан с номером колеса i и ролика на колесе j по формуле

$$s(i, j) = (n - 1)(i - 1) + j - 1 \quad (1.1)$$

Введем псевдоскорости

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \quad \mathbf{v}_S = R\nu_1 \mathbf{e}_\xi + R\nu_2 \mathbf{e}_\eta, \quad \nu_3 = \Lambda \dot{\theta}, \quad \nu_s = \dot{\phi}_s, \quad s = 1, \dots, N(n-1)$$

Их механический смысл таков: ν_1, ν_2 — проекции скорости точки S на оси системы $S\xi\eta$, связанные с платформой, ν_3 — с точностью до множителя угловая скорость платформы, ν_s — угловые скорости свободных роликов. Число независимых псевдоскоростей системы $K = N(n-1) + 3$. Таким образом, имеем

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos \theta - R\nu_2 \sin \theta, \quad \dot{y} = R\nu_1 \sin \theta + R\nu_2 \cos \theta$$

Будем считать, что проскальзывания между опорной плоскостью и роликами в контакте не происходит, т.е. скорости точек C_i контакта равны нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.2)$$

Выражая скорость точек контакта через введенные псевдоскорости и проектируя на оси системы $S\xi\eta$, получим:

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{\rho_k}(\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k); \quad \rho_k = l \cos \chi_k - r \quad (1.3)$$

$$\dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}) \quad (1.4)$$

Заметим, что знаменатель ρ_k в формуле (1.3) — расстояние от оси ролика до точки контакта, обращающееся в нуль на стыке роликов (см. левую часть фиг. 1.1). Это обстоятельство приводит к разрывам второго рода функций в правых частях уравнений движения и будет рассмотрено отдельно ниже. Уравнение (1.4) совпадает с уравнением связи в случае безынерционной модели роликов.

Таким образом, выражение обобщенных скоростей через псевдоскорости, учитывающее связи, наложенные на систему, можно записать в матричном виде:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}(\theta, \chi_i), \quad (1.5)$$

где компоненты матрицы \mathbf{V} имеют вид:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \tilde{V} & O_1 \\ O_2 & E \end{bmatrix}; \quad \tilde{V} = \begin{bmatrix} R \cos \theta & -R \sin \theta & 0 \\ R \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} \\ \frac{R}{l} \sin \alpha_i & -\frac{R}{l} \cos \alpha_i & -\frac{R}{\Lambda l} \\ \frac{R}{\rho_k} \cos \alpha_k & \frac{R}{\rho_k} \sin \alpha_k & 0 \end{bmatrix}$$

Здесь O_1 и O_2 – нулевые $(3 + 2n \times N(n-1))$ - и $(N(n-1) \times 3)$ -матрицы, E – единичная матрица размерности $N(n-1)$.

3. Уравнения движения. Воспользуемся лаконичным методом получения уравнений движения для систем с дифференциальными связями, предложенным Я.В. Татариновым [12]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \sum_{\mu=1}^K \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}, \quad \alpha = 1, \dots, K \quad (2.1)$$

Здесь L – лагранжиан, L^* – он же с учетом связей (здесь и далее верхний индекс $*$ означает учет связей), P_α – линейные комбинации формальных канонических импульсов p_i , определяемые из соотношения

$$\sum_{\mu=1}^K \nu_\mu P_\mu \equiv \sum_{i=1}^{N(n+1)+3} \dot{q}_i p_i$$

в котором \dot{q}_i выражены через псевдоскорости ν_μ в соответствии с формулами (1.5); $\{\cdot, \cdot\}$ – скобка Пуассона по p_i, q_i , после ее вычисления выполняется подстановка

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

(Подробности см. в работах [12, 13].)

Так как потенциальная энергия системы во время движения не меняется, лагранжиан равен кинетической энергии:

$$2L = 2T = M \mathbf{v}_S^2 + I_S \dot{\theta}^2 + J \sum_i \dot{\chi}_i^2 + B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.2)$$

Здесь M , I_S , J — массово-инерционные характеристики экипажа (его общая масса, момент инерции относительно оси SZ и инерции тела одного колеса относительно его оси вращения соответственно), B — момент инерции ролика относительно его оси вращения. Лагранжиан при учете связей определяется соотношением:

$$2L^* = \boldsymbol{\nu}^T V^T \mathcal{M} V \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu}$$

Матрица кинетической энергии имеет следующий вид:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{M}}_{11} & \widetilde{\mathcal{M}}_{12} & \widetilde{\mathcal{M}}_{13} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^T & \widetilde{\mathcal{M}}_{22} & \widetilde{\mathcal{M}}_{23} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{13}^T & \widetilde{\mathcal{M}}_{23}^T & \widetilde{\mathcal{M}}_{33} \end{bmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_{11} &= \text{diag}(M, M, I_S), \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{22} = J E_{N \times N}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{33} = B E_{Nn \times Nn} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12} &= O_{3 \times N}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ B \sin \chi_{11} & \dots & B \sin \chi_{Nn} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{23} = O_{N \times Nn} \end{aligned}$$

Здесь $O_{(\cdot)}$ и $E_{(\cdot)}$ — нулевые и единичные матрицы, в индексах которых указаны их размерности. В третьей строке $\widetilde{\mathcal{M}}_{13}$ сначала указаны элементы, соответствующие роликам, находящимся в контакте, а затем соответствующие “свободным” роликам; элементы упорядочены по возрастанию индексов, так что ролики одного колеса соседствуют.

Соответственно, структура симметрической матрицы \mathcal{M}^* кинетической энергии с учетом связей следующая:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^* &= \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{M}}_{11}^* & \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^* \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^{*T} & \widetilde{\mathcal{M}}_{22}^* \end{bmatrix} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{11}^* &= (m_{ij}^*)_{3 \times 3}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{22}^* = B E_{N(n-1) \times N(n-1)} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^* &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ B \Lambda^{-1} \sin \chi_{12} & \dots & B \Lambda^{-1} \sin \chi_{Nn} \end{bmatrix}_{3 \times N(n-1)} \end{aligned}$$

Здесь $E_{N(n-1) \times N(n-1)}$ — единичная матрица, $\chi_{kl} = \chi_k + \kappa_l$ — угол между вертикалью и осью ролика, где индекс $k = 1, \dots, N$ означает номер колеса, $l = 2, \dots, n$ — номер свободного ролика на колесе ($l = 1$ — ролик, находящийся в контакте).

Элементы матрицы $\widetilde{\mathcal{M}}_{11}^*$ зависят только от координат χ_i , которые входят в отношения B/ρ_i^2 и $B \sin \chi_i / \rho_i$, имеющие разрывы второго рода при смене роликов, т.е. при переходе с одного ролика на другой (см. равенство (1.3)). Явный вид элементов $\widetilde{\mathcal{M}}_{11}^*$ таков:

$$\begin{aligned} m_{11}^* &= MR^2 + \sum_i \left(J \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \alpha_i + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \cos^2 \alpha_i \right) \quad (11 \leftrightarrow 22, \sin \alpha_i \leftrightarrow \cos \alpha_i) \\ m_{33}^* &= \frac{1}{\Lambda} \left(I_S + \sum_i J \frac{R^2}{l^2} \right), \quad m_{12}^* = \sum_i \left(-J \frac{R^2}{l^2} + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \right) \sin \alpha_i \cos \alpha_i \\ m_{13}^* &= \frac{1}{\Lambda} \sum_i B \frac{R}{\rho_i} \sin \chi_i \cos \alpha_i, \quad m_{23}^* = \frac{1}{\Lambda} \sum_i B \frac{R}{\rho_i} \sin \chi_i \sin \alpha_i \end{aligned} \quad (2.3)$$

Первое слагаемое в левой части равенства (2.1) получается дифференцированием лагранжиана и подстановкой связей:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi) \boldsymbol{\nu}) = \mathcal{M}^*(\chi) \dot{\boldsymbol{\nu}} + \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi)) \boldsymbol{\nu} = \mathcal{M}^*(\chi) \dot{\boldsymbol{\nu}} + \sum_{i=1}^N \dot{\chi}_i^* \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu} \quad (2.4)$$

где $\mathcal{M}_i^* = \frac{\partial \mathcal{M}^*}{\partial \chi_i}$. Обратим внимание, что компоненты векторов под знаком суммы, соответствующие свободным роликам, т.е. компоненты с номерами $\alpha = 4, \dots, K$, имеют вид $\dot{\chi}_i^* \nu_3 B \Lambda^{-1} \cos \chi_{ij}$, где индексы i, j связаны с индексом α по формуле $\alpha = 3 + s(i, j)$ (см. формулу (1.1)).

Имеем выражения:

$$\begin{aligned} P_1 &= R \left(p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_i \left(\frac{p_{\chi_i}}{l} \sin \alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \cos \alpha_i \right) \right) \\ P_2 &= R \left(-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_i \left(-\frac{p_{\chi_i}}{l} \cos \alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \sin \alpha_i \right) \right) \\ P_3 &= \frac{1}{\Lambda} \left(p_\theta - \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i} \right) \\ P_s &= p_{\phi_s} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Поскольку коэффициенты лагранжиана L^* зависят только от координаты χ_i , его скобки Пуассона с P_1, P_2, P_3 — квадратичные формы псевдоскоростей, пропорциональные моменту инерции ролика B с коэффициентами, зависящими от χ_i :

$$\{P_1, L^*\} = -\frac{\partial P_1}{\partial p_{\chi_i}} \frac{\partial L^*}{\partial \chi_i} = -\frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu} \sin \alpha_i,$$

$$\{P_2, L^*\} = \frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu} \cos \alpha_i, \quad \{P_3, L^*\} = \frac{R}{2l\Lambda} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}, \quad \{P_s, L^*\} = 0, s > 3$$

Остается рассмотреть правую часть равенства (2.1): она отлична от нуля лишь при $\alpha = 1, 2, 3$.

Обозначая

$$\xi_{\pm}(\alpha) = \nu_1 \cos \alpha \pm \nu_2 \sin \alpha, \quad \eta_{\pm}(\alpha) = \nu_1 \sin \alpha \pm \nu_2 \cos \alpha$$

для импульсов $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ получим

$$\begin{aligned} p_x &= MR\xi_-(\theta), \quad p_y = MR\eta_+(\theta), \\ p_{\theta} &= BR \sum_i \frac{\sin \chi_i}{\rho_i} \xi_+(\alpha_i) + \frac{I_S}{\Lambda} \nu_3 + B \sum_s \sin \chi_s \nu_s \\ p_{\chi_i} &= J \frac{R}{l} (\eta_-(\alpha_i) - \frac{1}{\Lambda} \nu_3), \quad p_{\phi_{k1}} = \frac{BR}{\rho_k} \xi_+(\alpha_k) + \frac{B}{\Lambda} \sin \chi_k, \\ p_{\phi_s} &= \frac{B}{\Lambda} \nu_3 \sin \chi_s + B \nu_s \end{aligned} \tag{2.6}$$

Для упрощения записи правой части системы (2.1) введем обозначение для операции дискретной свертки произвольной функции f :

$$\sigma[f(\alpha, \chi)] = \sum_{k=1}^N f(\alpha_k, \chi_k) \frac{\sin \chi_k}{\rho_k^3}$$

Тогда скобки Пуассона в правой части системы (2.1) имеют вид (звездочкой

обозначена подстановка импульсов p_i)

$$\begin{aligned}
(\{P_1, P_2\})^* &= \left(-\sum_{k=1}^N R^2 \tau_k p_{\phi_k} \right)^* \\
&= -BR^2(R\nu_1\sigma[\cos \alpha] + R\nu_2\sigma[\sin \alpha] + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho \sin \chi]) = \\
&= -BR^2 \mathbf{p}_{12} \boldsymbol{\nu} \\
\mathbf{p}_{12} &= (\sigma[\cos \alpha], R\sigma[\sin \alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho \sin \chi], 0, \dots, 0) \\
(\{P_1, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left(-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta - \sum_{k=1}^N R \cos \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* \\
&= MR^2\Lambda^{-1}\nu_2 - \\
&\quad - BR^2\Lambda^{-1}(R\nu_1\sigma[\cos^2 \alpha] + R\nu_2\sigma[\sin \alpha \cos \alpha] + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi]) = \\
&= MR^2\Lambda^{-1}\nu_2 - BR^2 \mathbf{p}_{13} \boldsymbol{\nu} \\
\mathbf{p}_{13} &= \Lambda^{-1}(R\sigma[\cos^2 \alpha], R\sigma[\sin \alpha \cos \alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0) \\
(\{P_2, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left(-p_x \cos \theta - p_y \sin \theta - \sum_{k=1}^N R \sin \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = -MR^2\Lambda^{-1}\nu_1 - \\
&\quad - BR^2\Lambda^{-1}(R\nu_1\sigma[\sin \alpha \cos \alpha] + R\nu_2\sigma[\sin^2 \alpha] + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho \sin \alpha \sin \chi]) = \\
&= -MR^2\Lambda^{-1}\nu_1 - BR^2 \mathbf{p}_{23} \boldsymbol{\nu} \\
\mathbf{p}_{23} &= \Lambda^{-1}(R\sigma[\sin \alpha \cos \alpha], R\sigma[\sin^2 \alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho \sin \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0)
\end{aligned}$$

Окончательно, объединяя выражения для всех слагаемых (2.1), получаем, что уравнения движения имеют следующую структуру:

$$\mathcal{M}^* \dot{\boldsymbol{\nu}} = MR^2\Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \nu_2\nu_3 \\ -\nu_1\nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{R}{2l} \begin{bmatrix} -\mathcal{M}_i^* \sin \alpha_i \\ \mathcal{M}_i^* \cos \alpha_i \\ \mathcal{M}_i^* \Lambda^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - BR^2 \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\nu} - B \begin{bmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_1^* \cos \chi_{12} \\ \vdots \\ \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_N^* \cos \chi_{Nn} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Символ \star в последнем слагаемом правой части уравнений для $\alpha = 1, 2, 3$ заменяет выражения под знаком суммы в равенствах (2.4). Матрицы \mathcal{P}_α размера

$K \times K$ составлены из строк $\mathbf{p}_{\alpha\beta}$, определенных в Приложении и зависящих от геометрии экипажа и углов поворота колес χ_i :

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{p}_{13} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{13} \\ -\mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Поскольку матрицы \mathcal{M}_i^* и \mathcal{P}_α зависят от углов поворота колес χ_i , для замыкания системы к этим уравнениям надо добавить уравнения (1.4).

Структура уравнений позволяет выявить следующие свойства.

1. Система допускает интеграл энергии $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i)\boldsymbol{\nu} = h = \text{const}$ в силу общей теоремы об изменении полной механической энергии: так как система стеснена автономными идеальными связями, а силы консервативны, то полная энергия (в рассматриваемом здесь случае она равна кинетической энергии) сохраняется.

2. Если платформа экипажа неподвижна, т.е. $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$, свободные ролики сохраняют свою начальную угловую скорость: $\nu_s = \text{const}$, чего и следовало ожидать.

3. При $B = 0$ все слагаемые в правой части равенства (2.7), кроме первого, обращаются в нуль, как и все члены, соответствующие свободным роликам, в левой части (см. Приложение, равенства (2.3)). В этом случае существенными остаются первые три уравнения системы (2.1) относительно ν_1, ν_2, ν_3 , описывающие динамику безынерционной модели экипажа [2].

4. Существовавший в безынерционной модели линейный первый интеграл разрушается для модели с массивными роликами. При $B = 0$ он имеет вид $m_{33}^*\nu_3 = \text{const}$ (причем $m_{33} = \text{const}$) и следует непосредственно из третьего уравнения системы (2.1). При $B \neq 0$ скорость изменения ν_3 пропорциональна моменту инерции ролика B .

5. Поскольку скобки Пуассона в уравнениях для свободных роликов равны нулю, система допускает первые интегралы:

$$\nu_s + \frac{1}{\Lambda} \sin \chi_{ij} \nu_3 = \text{const} \quad (2.8)$$

Скорость вращения платформы ν_3 связана со скоростями собственного вращения свободных роликов. В частности, вращение экипажа вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр ($\nu_1(0) = 0, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) \neq 0$), неравномерно, в отличие от выводов, основанных на безынерционной модели.

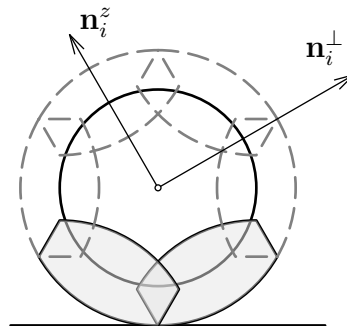
6. Одновременное изменение начальных значений всех псевдоскоростей $\boldsymbol{\nu} \rightarrow \lambda \boldsymbol{\nu}$, $\lambda \neq 0$ умножением на число, отличное от нуля, эквивалентно замене времени $t \rightarrow \lambda t$.

Глава 2

Смена ролика в контакте с опорной плоскостью

При рассмотрении динамики роликов отдельного внимания заслуживает момент перехода колеса с одного ролика на другой, поскольку вращение ролика, входящего в контакт, может не быть согласовано с условием отсутствия скольжения в контакте.

В тех интервалах времени, когда ролик в контакте с опорной плоскостью не меняется, динамика системы описывается уравнениями движения системы (см. [14]). Смена контакта на i -том колесе происходит при значении угла $\chi_i = \frac{2\pi}{n}$. При этом, во-первых, правая часть уравнений движения терпит разрыв второго рода из-за равенства нулю выражений $\rho_i = l \cos \chi_i - r$ в знаменателе. Во-вторых, происходит мгновенное снятие и наложение связей: условие отсутствия проскальзывания для ролика, выходящего из контакта,



Фиг. 2.1. Перекрытие

снимается, и аналогичное ему мгновенно налагается на вновь входящий в контакт ролик.

На практике первое обстоятельство никогда не реализуется, поскольку оси роликов в реальных системах имеют ненулевую толщину, а значит, концы роликов усекаются. При этом ролики располагают рядами в двух и более плоскостях, чтобы в каждый момент гладкая сторона хотя бы одного ролика была в контакте с плоскостью. В данной работе рассматриваются усеченные ролики (см. фиг. 2.1), но их оси расположены в одной плоскости, и допускается пересечение тел роликов в пространстве. Ось ролика находится на расстоянии $r = l \cos \frac{\pi}{n-1}$ от центра колеса. Ролик представляет собой тело вращения относительно этой оси дуги окружности радиуса l с углом раствора $\frac{2\pi}{n}$.

В данной главе проведено детальное рассмотрение момента смены ролика в контакте с учетом ударного характера взаимодействия с опорной плоскостью. Также, получены численные решения, состоящие из участков, определяемых уравнениями движения, и моментов смены контакта, моделируемых с точки зрения теории удара.

1 Наложение связи при смене ролика в контакте

В реальной системе при смене контакта имеет место скольжение роликов относительно плоскости, и при этом полная энергия системы рассеивается. В данной работе будем считать, что трение достаточно велико, и прекращение проскальзывания вновь вошедшего в контакт ролика происходит мгновенно. Это взаимодействие будет рассматриваться как абсолютно неупругий удар, происходящий при мгновенном наложении связи. Освободившийся ролик начинает свободно вращаться вокруг своей оси. Будем предполагать следующее:

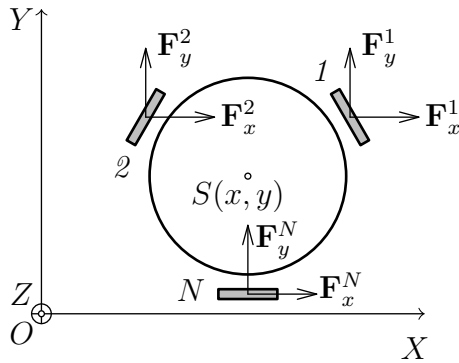
- удар происходит за бесконечно малый интервал времени $\Delta t \ll 1$, так что изменения обобщенных координат пренебрежимо малы $\Delta \mathbf{q} \sim \dot{\mathbf{q}} \Delta t \ll 1$, а изменения обобщенных скоростей конечны $\Delta \dot{\mathbf{q}} < \infty$;
- взаимодействие экипажа с опорной полоскостью во время удара сводит-

ся к действию в точках контакта нормальных и касательных реакций $\mathbf{R}_i = \mathbf{N}_i + \mathbf{F}_i$ с нулевым моментом $\mathbf{M}_i = 0$;

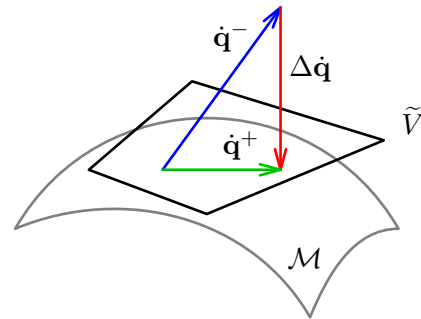
- к моменту окончания удара $t^* + \Delta t$ уравнения связей выполнены $\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}^+$, т.е. за время Δt проскальзывание вошедшего в контакт ролика заканчивается.

Исходя из этих предположений, в следующих разделах получим системы алгебраических уравнений, связывающих значения обобщенных скоростей непосредственно перед ударом $\dot{\mathbf{q}}^-$ и значения псевдоскоростей сразу после удара $\boldsymbol{\nu}^+$ двумя разными способами: в первом случае, будем вводить ударные реакции, действующие в точках контакта, а во втором, будем рассматривать неупругий удар как проецирование вектора обобщенных скоростей на плоскость, задаваемую уравнениями вновь налагаемых связей.

Таким образом, моделирование системы состоит в решении задачи Коши системы обыкновенных дифференциальных уравнений в интервалах между моментами смены роликов в контактах и решения систем алгебраических уравнений в эти моменты для получения начальных условий для следующего безударного интервала.



Фиг. 2.2. Компоненты векторов ударных реакций в точках контакта



Фиг. 2.3. Проецирование вектора обобщенных скоростей на ядро дифференциальной формы связей

1.1 Основное уравнение теории удара

Составим алгебраические уравнения, связывающие значения псевдоскоростей после удара и величины ударных импульсов. В течение бесконечно ма-

лого времени Δt наложены только геометрические связи, так что скорости $\dot{\mathbf{q}}$ независимы. Запишем уравнение удара в обобщенных координатах [15]:

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{Q}, \quad (1.1)$$

где \mathbf{M} – матрица кинетической энергии без учета связей (так что $\mathcal{M}^* = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}$), а \mathbf{Q} – вектор ударных импульсов обобщенных сил:

$$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_\theta, Q_{\chi_i}|_{i=1}^N, Q_{\phi_i}|_{i=1}^N, Q_s)^T$$

Исходя из геометрии системы (см. фиг. 2.2), получаем, что компоненты этого вектора связаны с касательными составляющими реакций следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sum_{i=1}^N F_i^x \\ Q_2 &= \sum_{i=1}^N F_i^y \\ Q_\theta &= \sum_{i=1}^N Q_\theta^i = \sum_{i=1}^N R(-F_i^x \sin(\theta + \alpha_i) + F_i^y \cos(\theta + \alpha_i)) \\ Q_{\chi_i} &= \frac{l}{R} Q_\theta^i \\ Q_{\phi_i} &= -\rho_i (F_i^x \cos(\theta + \alpha_i) + F_i^y \sin(\theta + \alpha_i)) \\ Q_s &= 0 \end{aligned}$$

В матричном виде $\mathbf{Q} = \mathbf{KF}$, где \mathbf{K} имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ -R \sin(\theta + \alpha_1) & R \cos(\theta + \alpha_1) & \dots & -R \sin(\theta + \alpha_N) & R \cos(\theta + \alpha_N) \\ -l \sin(\theta + \alpha_1) & l \cos(\theta + \alpha_1) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -l \sin(\theta + \alpha_N) & l \cos(\theta + \alpha_N) \\ -\rho_1 \cos(\theta + \alpha_1) & -\rho_1 \sin(\theta + \alpha_1) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\rho_N \cos(\theta + \alpha_N) & -\rho_N \sin(\theta + \alpha_N) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Размерность матрицы \mathbf{K} равна $(3 + N(n + 1)) \times 2N$, и её ранг максимален.

Непосредственно перед ударом связи, запрещающие проскальзывание в точках касания роликов, находящихся в контакте в этот момент, снимаются. В момент сразу после удара аналогичные связи налагаются на вновь входящие в контакт ролики.

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+$$

Тогда уравнение (1.1) можно записать в виде:

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{KF} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^- \quad (1.2)$$

Полученная линейная система относительно $\boldsymbol{\nu}^+$ и \mathbf{F} допускает единственное решение.

1.2 Разрешимость основного уравнения теории удара при наложении дифференциальных связей

Обоснуем существование и единственность решения уравнения (1.2).

Наложение на систему связей, аналогичных (1.2), равносильно заданию на конфигурационном многообразии дифференциальной формы \mathbf{J} и требованию

к вектору обобщенных скоростей находиться в ядре этой формы:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}^+ = 0, \quad (1.3)$$

то есть в линейном подпространстве $\tilde{V} = \ker \mathbf{J}$ пространства виртуальных перемещений $T_{\mathbf{q}}\mathcal{M}$. В этом подпространстве размерности $\dim \mathbf{q} - \text{rk} \mathbf{J}$ можно выбрать базис и компоненты вектора обобщенных скоростей в этом базисе использовать как псевдоскорости: $\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+$, при этом для матрицы дифференциальной формы связей \mathbf{J} и матрицы \mathbf{V} , связывающей псевдоскорости и обобщенные скорости, будет выполнено равенство:

$$\mathbf{J}\mathbf{V} = 0. \quad (1.4)$$

Налагаемые связи будем считать идеальными, то есть работу ударных импульсов на допустимых связями перемещениях равной нулю:

$$0 = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}^+ = \mathbf{Q}^T \mathbf{V} \delta \boldsymbol{\nu}^+. \quad (1.5)$$

Таким образом, ударные импульсы находятся в подпространстве, ортогональном \tilde{V} , а значит, вектор \mathbf{Q} может быть представлен в базисе, образованном столбцами матрицы \mathbf{J}^T : $\mathbf{Q} = \mathbf{J}^T \mathbf{F}$.

Для экипажа с омни-колесами, рассматриваемого здесь, матрица дифференциальной формы связей (1.2) может быть получена, в частности, как якобиан зависимости вектора из координат точек нижних роликов колес экипажа, находящихся в контакте с опорной плоскостью, в неподвижной системе отсчета $OXYZ$, от обобщенных координат \mathbf{q} : $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$, где $\mathbf{r} = (x_1, y_1, \dots, x_N, y_N)^T$ (координаты вдоль оси Z опущены, поскольку они учтены при введении обобщенных координат, и соответствующие им компоненты якобиана равны нулю). В этом случае \mathbf{J}^T в точности совпадает с матрицей \mathbf{K} из раздела 1.1.

Итак, основное уравнение удара (1.1) можно записать в более общем, чем полученный для изучаемого экипажа (1.2), виде:

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{J}^T \mathbf{F} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-, \quad (1.6)$$

где вместо матрицы \mathbf{K} , приведенной в разделе 1.1, стоит любая матрица дифференциальной формы связей.

Равенство (1.6) есть система алгебраических уравнений относительно вектора неизвестных $(\boldsymbol{\nu}^+, \mathbf{F})^T$. Матрица $(\mathbf{M}\mathbf{V}; -\mathbf{J}^T)$ этой системы – квадратная размерности $\dim \mathbf{q} \times \dim \mathbf{q}$, поскольку столбцы \mathbf{V} и \mathbf{J}^T образуют базисы в дополнительных подпространствах $\mathbb{R}^{\dim \mathbf{q}}$. По той же причине она невырождена. Действительно, поскольку с одной стороны, каждая из систем столбцов $\{\mathbf{V}_{\cdot i}\}$ и $\{\mathbf{J}_{\cdot j}^T\}$ линейно-независима, и с другой, эти две системы взаимно ортогональны (1.4), то действие положительно определенного оператора \mathbf{M} на \mathbf{V} не нарушает линейной независимости системы столбцов в целом. Показать это можно от противного, предположив существование таких чисел x_i и y_j , не равных нулю одновременно, что $\sum_i x_i \mathbf{M}\mathbf{V}_{\cdot i} + \sum_j y_j \mathbf{J}_{\cdot j}^T = 0$, домножив это равенство скалярно на каждый из столбцов $\{\mathbf{V}_{\cdot \alpha}\}$ и рассмотрев сумму полученных выражений: $\sum_{\alpha, i} x_i \mathbf{V}_{\cdot \alpha}^T \mathbf{M}\mathbf{V}_{\cdot i} + \sum_{\alpha, j} y_j \mathbf{V}_{\cdot \alpha}^T \mathbf{M}\mathbf{J}_{\cdot j}^T = \mathbf{V}^T \mathbf{M}\mathbf{V}\mathbf{x} + \mathbf{V}^T \mathbf{J}^T \mathbf{y}$, где последнее слагаемое равно нулю в силу (1.4), а первое отлично от нуля, поскольку матрица $\mathbf{V}^T \mathbf{M}\mathbf{V}$ является матрицей Грама линейно-независимой системы столбцов матрицы \mathbf{V} в метрике \mathbf{M} , а значит, невырождена – противоречие. Таким образом, система (1.6) имеет единственное решение.

Отметим также, что мгновенное наложение связи можно рассматривать как абсолютно неупругий удар, при котором теряется компонента $\Delta \dot{\mathbf{q}}$ вектора обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}^-$, ортогональная подпространству \tilde{V} в кинетической метрике, и соответственно, находить вектор обобщенных скоростей после удара $\dot{\mathbf{q}}^+ = \dot{\mathbf{q}}^- - \Delta \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ \in \tilde{V}$ можно непосредственно из условия идеальности связей (1.5) и основного уравнения удара (1.1), минуя вычисление величин реакций \mathbf{Q} или \mathbf{F} и необходимой для этого матрицы \mathbf{J} :

$$0 = \mathbf{V}^T \mathbf{Q} = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \Delta \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}^T \mathbf{M} (\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{V}^T \mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{V}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-,$$

откуда:

$$\boldsymbol{\nu}^+ = (\mathbf{V}^T \mathbf{M}\mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-.$$

Эту же формулу можно получить и из уравнения (1.6), домножая его слева на \mathbf{V}^T . Симметрично, при умножении (1.6) слева на $\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}$, имеем выражение для реакций:

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{J}\mathbf{M}\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^-,$$

не включающее явно матрицу связей \mathbf{V} .

1.3 Изменение кинетической энергии

Выясним, как меняется кинетическая энергия при смене ролика в контакте:

$$\begin{aligned} 2\Delta T &= 2(\mathbf{T}^+ - \mathbf{T}^-) = (\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^+, \dot{\mathbf{q}}^+) - (\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-, \dot{\mathbf{q}}^-) = \\ &= (\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \Delta\dot{\mathbf{q}}) + 2(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-, \Delta\dot{\mathbf{q}}) = -(\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \Delta\dot{\mathbf{q}}) + 2(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^+, \Delta\dot{\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

Последнее слагаемое равно нулю в силу идеальности связей (1.5) и основного уравнения удара (1.1), т.е. равенства нулю мощности ударных импульсов на перемещениях, допускаемых связями

$$(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^+, \Delta\dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}^+) = (\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{q}}^+) = 0.$$

Таким образом, потеря кинетической энергии системы равна энергии потерянных скоростей $\Delta\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-$:

$$\Delta T = -\frac{1}{2}(\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \Delta\dot{\mathbf{q}}) \leq 0,$$

что соответствует теореме Карно [15].

2 Примеры движений

Рассмотрим результаты расчетов для трех вариантов начальных условий.

1. Вращение вокруг своей оси ($\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$) (фиг. 2).
2. Движение по прямой в направлении оси $S\xi$ ($\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = \nu_3(0) = 0$) (фиг. 2).
3. Движение с ненулевой скоростью центра масс и, одновременно, с ненулевой угловой скоростью платформы ($\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$) (фиг. 2).

Такие же варианты рассмотрены в [14] при интегрировании уравнений движения на гладких участках с упрощенной моделью изменения обобщенных скоростей при смене контакта.

Расчеты выполнены для симметричного трехколесного экипажа ($\alpha_i = \frac{2\pi}{N}(i-1), N = 3$) с $n = 5$ роликами на колесе. Все величины безразмерны, так

что радиусы платформы и колеса $R = 0.15$ и $r = 0.05$, массы платформы, колеса и ролика 1, 0.15 и 0.05. При этом момент инерции ролика $B \approx 1.6 \cdot 10^{-5}$.

Во всех трех случаях наблюдается убывание кинетической энергии скачками в моменты смены контакта. В промежутки времени между сменами энергия остается постоянной.

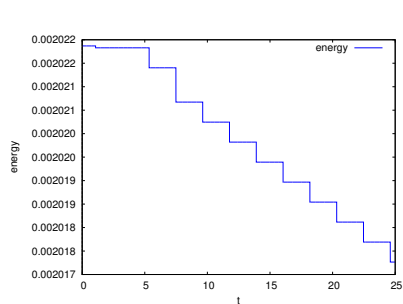
В вариантах 1 и 2 заметны переходные режимы вращения роликов в начале движения, когда колесо совершает первый оборот, и каждый ролик проходит полный круг, выходя из контакта и возвращаясь в него снова.

В случае 1 вращения вокруг вертикали угловая скорость платформы ν_3 в среднем медленно убывает (немонотонно): уменьшается на 5% за первые 10^3 с. Кинетическая энергия системы также медленно убывает. Центр масс покоится. На фиг. 2 приведены скорости собственного вращения роликов на первом колесе $\dot{\phi}_{1j}$. Находящийся в контакте ролик неподвижен относительно колеса (в силу связи со скоростью центра масс, см. (1.3) при $\nu_1 = \nu_2 = 0$, чему соответствуют участки графиков, лежащие на оси абсцисс. Когда контакт этого ролика с опорной плоскостью прекращается, он начинает вращаться за счёт вращения экипажа в целом вокруг вертикальной оси (см. первый интеграл (2.8), существующий на гладких участках). После полного оборота колеса ролик приобретает некоторую скорость вращения, которую мгновенно теряет при следующем входе в контакт. В результате вся система теряет часть энергии, испытывая удар связями непроскальзывания. Скорость ν_3 вращения экипажа вокруг вертикальной оси при этом изменяется скачком (см. например $t = 1, 3, 5, 7.5$ с на графиках).

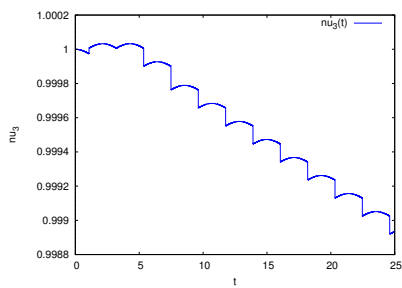
При поступательном движении экипажа (вариант 2) угловая скорость тождественно равна нулю. Зависимости скорости центра масс экипажа $v = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ и кинетической энергии T от времени показаны на фиг. 2. Обе величины убывают (энергия – монотонно, скачками, с каждой сменой контакта; скорость центра масс – в среднем). Переднее колесо не вращается вокруг своей оси и движется с опорой на один и тот же ролик. Скорость вращения этого ролика связана со скоростью центра масс согласно связи (1.3). Остальные ролики переднего колеса покоятся относительно экипажа. На задних колесах все ролики раскручиваются, скорости вращения показаны на фиг. 2.5с. После того как все ролики побывают в контакте, их движение становится квазипе-

риодичным.

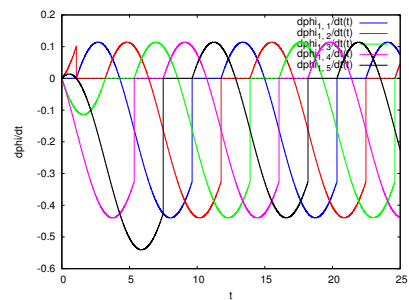
При комбинации поступательного и вращательного движений экипажа (случай 3), кинетическая энергия его центра масс убывает, переходя в кинетическую энергию платформы в осях Кёнига. Угловая скорость экипажа ω_3 растет и достигает максимума (фиг. 2.6с) в момент $t_1^* \approx 150$ с, после чего почти монотонно убывает (с точностью до влияния первых интегралов (2.8)), скорость центра S экипажа v становится исчезающе малой к моменту $t_2^* \approx 300$ с (фиг. 2.6b), а кинетическая энергия (фиг. 2.6a) убывает при каждой смене контакта. Центр платформы S описывает спираль (фиг. 2.6d). После почти полной остановки центра масс при $t > t_2^*$ экипаж вращается вокруг вертикальной оси Sz , постепенно замедляясь. Угловые скорости роликов представляют собой квазипериодические функции времени (характерный участок представлен на фиг. 2.6f).



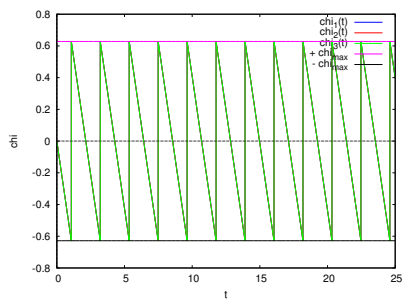
(a) Кинетическая энергия



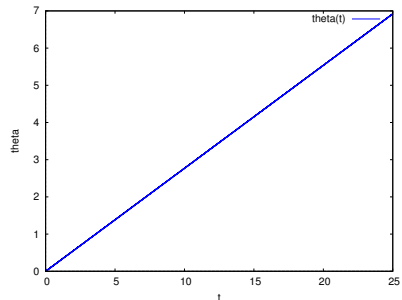
(b) Угловая скорость экипажа



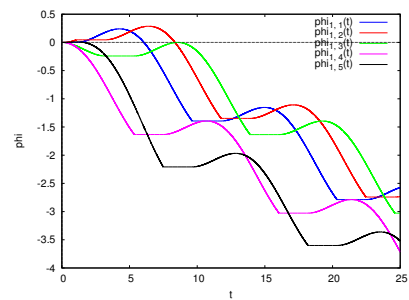
(c) Угловые скорости роликов



(d) Углы поворота колес

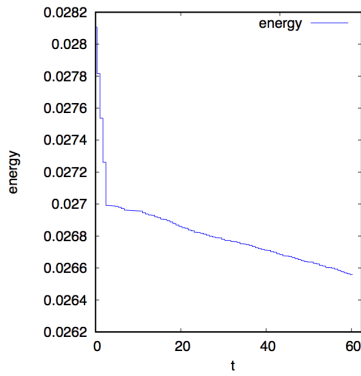


(e) Угол поворота экипажа

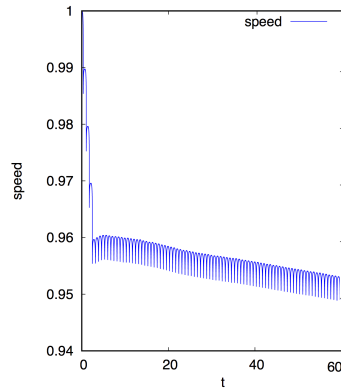


(f) Углы поворота роликов

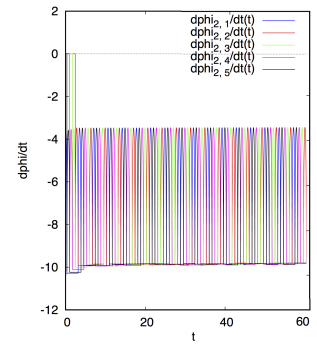
Фиг. 2.4. Вращение экипажа вокруг своей оси



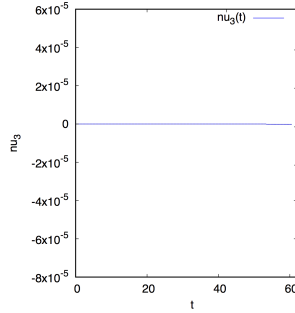
(a) Кинетическая энергия



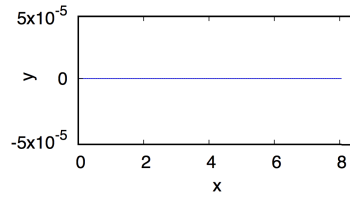
(b) Скорость центра масс



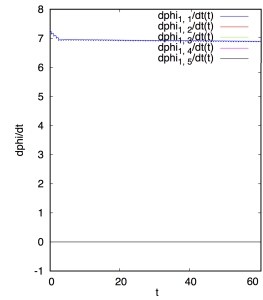
(c) Угловые скорости роликов на заднем колесе



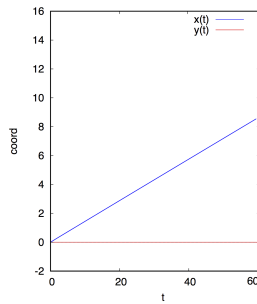
(d) Угловая скорость экипажа



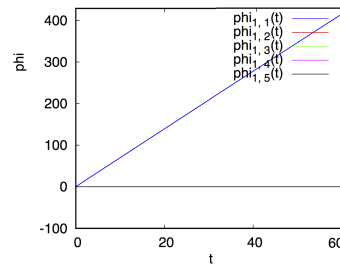
(e) Траектория



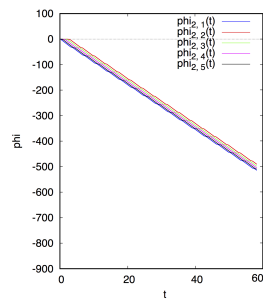
(f) Угловые скорости роликов на переднем колесе



(g) Координаты центра масс

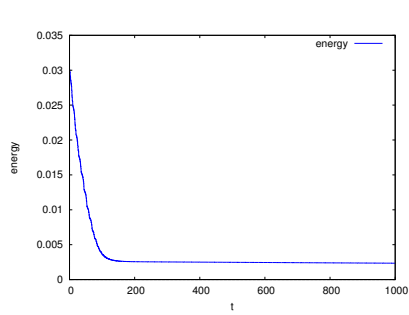


(h) Углы поворота роликов на переднем колесе

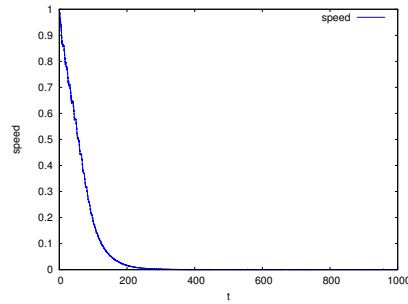


(i) Углы поворота роликов на заднем колесе

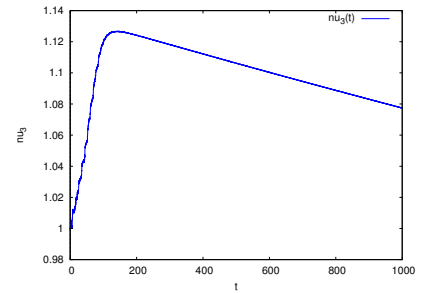
Фиг. 2.5. Движение экипажа по прямой



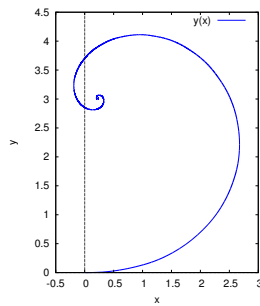
(a) Кинетическая энергия



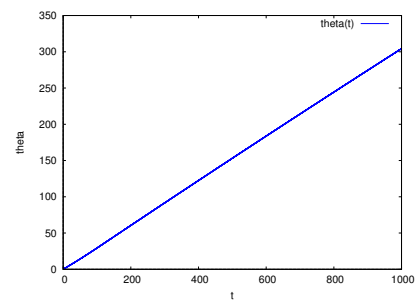
(b) Скорость центра масс



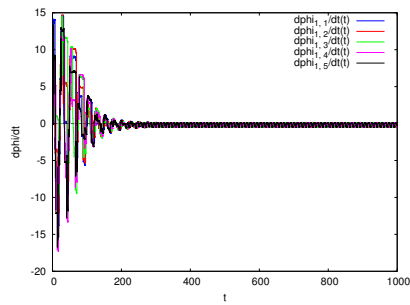
(c) Угловая скорость экипажа



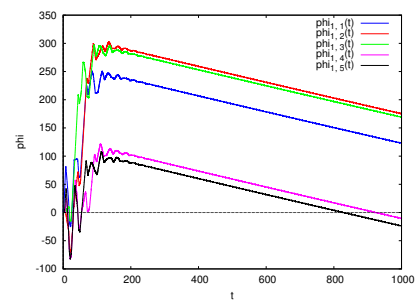
(d) Траектория центра масс



(e) Угол поворота экипажа



(f) Угловые скорости роликов на переднем колесе



(g) Углы поворота роликов на переднем колесе

Фиг. 2.6. Движение экипажа с закруткой

Глава 3

Динамика экипажа на ОМНИ-колесах с трением

Наряду с постановкой задачи движения омни-колесного экипажа по абсолютно шероховатой плоскости, интерес представляет его динамика на плоскости с трением. В настоящей главе строится модель экипажа на плоскости с сухим трением Кулона-Амонтона, регуляризованного в окрестности нуля по скоростям участком линейной функции насыщения с достаточно большим угловым коэффициентом, то есть достаточно сильного вязкого трения.

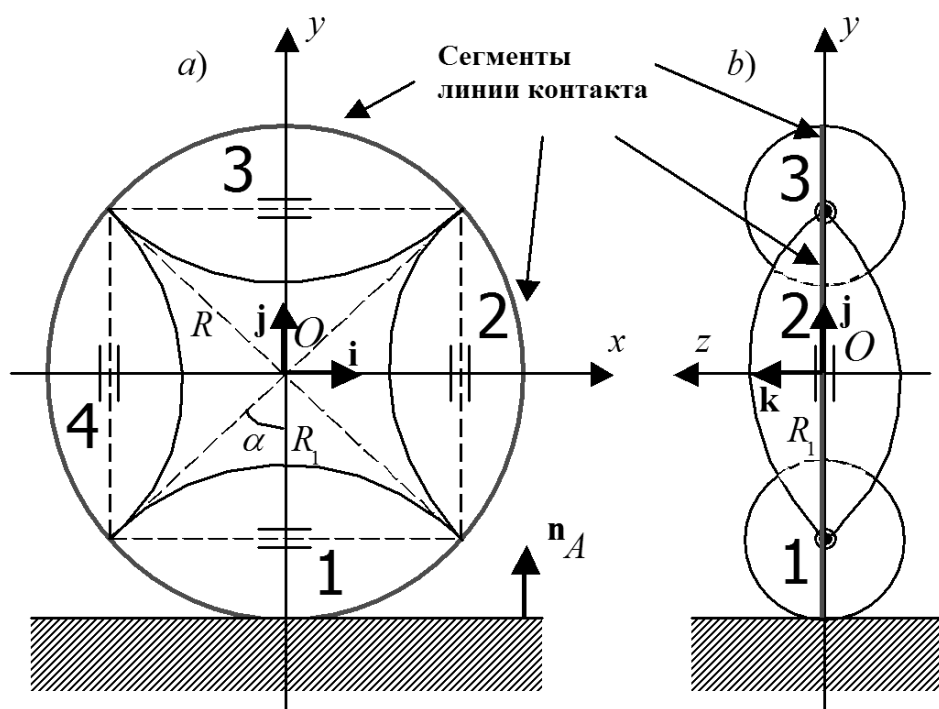
Вначале моделируется динамика ролика, совершающего свободное движение в поле сил тяжести. При этом предполагается, что на ролик может быть наложена неударивающая связь — твердотельный контакт с горизонтальной плоскостью. Оказалось, что в упомянутых условиях возможно применение упрощенного и эффективного алгоритма отслеживания контакта. На следующем этапе реализуется модель омни-колеса, а затем — экипажа в целом. Геометрия экипажа та же, что и в предыдущих главах.

Особое внимание уделяется вопросу конструирования неударивающей связи в контакте ролика и горизонтальной плоскости, отслеживанию точки контакта ролика и опорной плоскости, а также алгоритмической реализации процесса переключения контакта от ролика к ролику при качении омни-колеса. Для удобства описания модели отслеживания контакта, в этой главе вводятся специальные обозначения, не связанные с принятыми в предыдущих главах.

Динамические свойства результирующей модели экипажа иллюстрируются при помощи численных экспериментов. Проводится верификация построенной модели в сравнении с безынерционной моделью при стремлении суммарной массы роликов к нулю.

1 Постановка задачи для экипажа с осями роликов в плоскостях колес

Для простоты и наглядности мы ограничиваемся рассмотрением омни-колес, оснащенных четырьмя роликами. Также для простоты сами ролики имеют оси вращения, лежащие в плоскости колеса (Рис. 3.1).



Фиг. 3.1. Омни-колесо в вертикальном положении: а) вид сбоку; б) вид спереди.

Предполагается также, что ролики размещаются на колесе таким образом, что для вертикально поставленного омни-колеса проекция линии контактирования наинизшего ролика с горизонтальной плоскостью будет состоять из последовательности сегментов соответствующих линий контактирования отдельных роликов. Эти сегменты сопрягаются таким образом, что при пере-

ходе контакта от ролика к ролику нормальная составляющая скорости точки ролика, находящейся в точке контакта, к горизонтальной плоскости равна нулю. Это означает отсутствие удара по нормали к плоскости. В случае коллинеарности осей роликов и плоскости колеса скачки скорости скольжения по касательному направлению к горизонтальной плоскости также отсутствуют, так как при переходе контакта между роликами их внешние поверхности непрерывно вырождаются в точку (в идеализированной модели), что означает отсутствие кинематического влияния собственного вращения роликов при переходе контакта с ролика на ролик. Так что в результате переключения контактов между роликами омни-колеса не приведет к нарушению регулярности движения в силу причин ударного характера. Заметим еще раз, что все описанное будет справедливо, если колесо все время остается в вертикальном положении.

2 Модель динамики отдельного ролика.

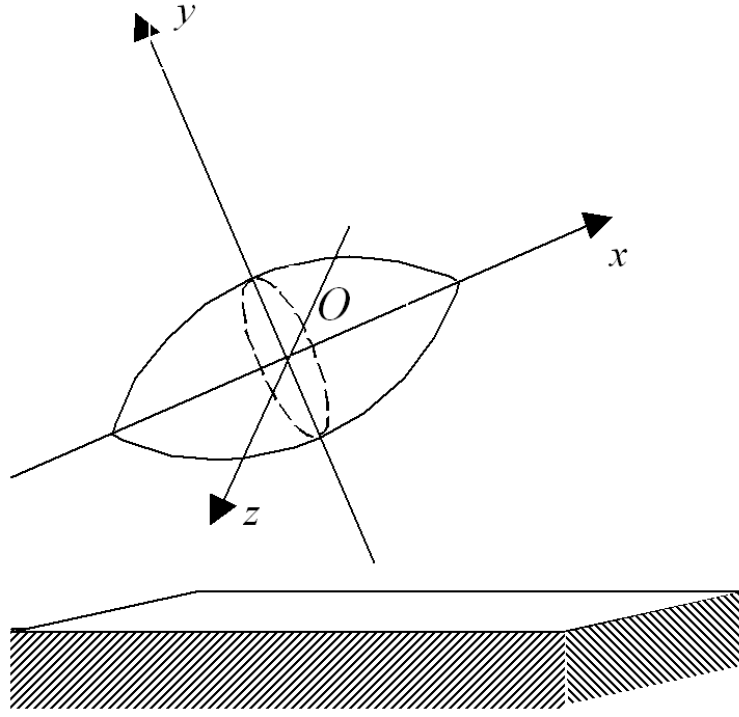
Вначале предположим, что ролик, представляющий собой осесимметричное веретенообразное твердое тело с внешней поверхностью, задаваемой в своих собственных осях $Oxyz$ уравнением

$$x^2 + \left(\sqrt{y^2 + z^2} + R_1 \right)^2 = R^2, \quad (2.1)$$

где R — радиус омни-колеса, $R_1 = R \cos \alpha$ — расстояние от центра ролика до центра колеса, $\alpha = \pi/n$ — половина центрального угла, под которым ролик виден из центра колеса, n — количество роликов на колесе.

Динамика поступательно-вращательного движения реализуется так, как это описано в [16], в виде уравнений Ньютона – Эйлера. Причем для моделирования вращательного движения твердого тела используется алгебра кватернионов [17].

Отдельную проблему представляет задача отслеживания контакта между поверхностью ролика и горизонтальной плоскостью. Для моделирования динамики твердого тела с неудерживающей связью применена технология, описанная в [18]. В данном случае можно было бы применить систему алгебраических или дифференциально-алгебраических уравнений. Однако эти

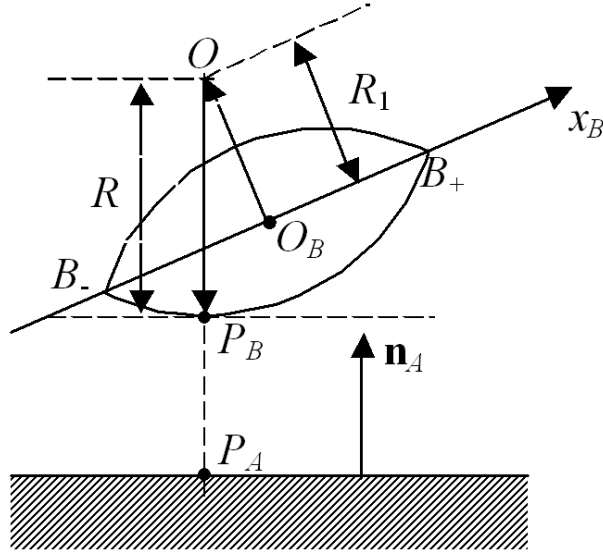


Фиг. 3.2. Ролик над горизонтальной плоскостью. Вид сбоку.

уравнения вырождаются в точках $x = \pm R \sin \alpha$ в координатах ролика. Такое вырождение обычно приводит к аварийному завершению вычислительного процесса моделирования.

В нашей задаче положение спасает специфика конфигурации, обеспечивающей постоянство вертикального расположения омни-колес. При этом условии можно указать явную формулу, позволяющую вычислить ближайшую к плоскости точку P_B ролика (Рис. 3.3). Этой точке всегда «противостоит» её вертикальная проекция P_A на плоскость (Рис. 3.3).

Обозначим символом $\mathbf{i}_B = (1, 0, 0)^T$ орт собственной оси ролика $O_B x_B$. Этот вектор представлен в системе координат ролика $O_B x_B y_B z_B$. Пусть T_B — матрица поворота ролика относительно инерциальной системы координат $O_A x_A y_A z_A$, связанной с неподвижной плоскостью. Пусть также \mathbf{r}_B — радиус-вектор геометрического центра ролика в текущий момент времени и $\mathbf{n}_A = (0, 1, 0)^T$ — орт нормали (восходящей вертикали) к плоскости. Плоскость условно обозначается нами телом с индексом A , ролик — B . Пусть \mathbf{d}



Фиг. 3.3. Схема отслеживания контакта: вид сбоку отдельного ролика.

— горизонтальный орт, вычисляемый по формуле

$$\mathbf{d} = \frac{T_B \mathbf{i}_B \times \mathbf{n}_A}{|T_B \mathbf{i}_B \times \mathbf{n}_A|}.$$

Тогда, очевидно, отрезок $\overrightarrow{O_B \hat{O}}$, расположенный в вертикальной плоскости, будет иметь длину R_1 и задаваться формулой

$$\overrightarrow{O_B \hat{O}} = R_1 \mathbf{d} \times T_B \mathbf{i}_B.$$

Здесь O — центр кривизны окружности вертикального сечения ролика (Рис. 3.3). Так что самая нижняя точка P_B внешней поверхности ролика будет задаваться по формуле

$$\mathbf{r}_{P_B} = \mathbf{r}_B + R_1 \mathbf{d} \times T_B \mathbf{i}_B - R \mathbf{n}_A, \quad (2.2)$$

поскольку точка P_B лежит на упоминавшейся выше окружности на общей вертикали с точкой O . Для вычисления положения точки P_A нужно вторую координату вектора \mathbf{r}_{P_B} положить равной нулю

$$\mathbf{r}_{P_A} = (x_{P_B}, 0, z_{P_B})^T. \quad (2.3)$$

Вся описанная выше вычислительная процедура будет справедлива только, если вектор $T_B \mathbf{i}_B$ имеет направление, ограниченное по вертикали углами $\pm\alpha$. Если соответствующий угол превышает значение α , то следует положить

$P_B = B_-$, где B_- — левая концевая точка ролика. Если же этот угол меньше величины $-\alpha$, нужно положить $P_B = B_+$, где B_+ — правая концевая точка ролика.

В конечном итоге условие контактирования ролика и плоскости можно записать в виде

$$|T_B \mathbf{i}_B \cdot \mathbf{n}_A| \leq \sin \alpha. \quad (2.4)$$

Это условие, однако, позволяет из всего множества роликов колеса выделить нижний (контактирующий) и верхний. Чтобы отбросить случай последнего ролика можно к последнему условию присоединить также требование

$$y_B < R, \quad (2.5)$$

где y_B — высота центра ролика относительно инерциальной системы координат.

Таким образом, конъюнкция условий (2.4) и (2.5) означает наличие контакта. В противном случае, при отсутствии контакта, нормальная реакция отсутствует (закон Синьорини). С другой стороны, реализация контакта геометрически означает выполнение скалярного условия

$$y_{P_B} = 0, \quad (2.6)$$

а его отсутствие — также скалярного (альтернативного) условия

$$F_n = 0,$$

где F_n — нормальная составляющая реакции (в данном случае отсутствующей) приложенной в точке P_B .

В случае фактического выполнения контакта помимо нормальной реакции вычисляется также её касательная составляющая, симулирующая силу трения. Для касательного контактного усилия имеется (как и для нормального) множество различных моделей. Мы остановились на реализации простейшего случая — модели сухого трения при одноточечном твердотельном контакте. При этом, как известно [19], идеальный «сухой» случай реализовать не удастся. Вместо разрывной функции sign от касательной скорости относительного скольжения контактирующих поверхностей используется её

регуляризованный в нуле вариант. В нашем случае вместо функции знака sign применяется функция линейного насыщения, имеющая в окрестности нуля «крутой» линейный участок. Для таких функций известен результат [19] о близости аппроксимирующего движения и движения, соответствующего «точному» случаю разрывной функции sign .

Модель составляется из: а) твердого тела платформы омни-экипажа; б) трех твердых тел — моделей омни-колес; в) двенадцати твердых тел роликов, размещенных на колесах. В соответствии, например, с [16] для каждого объекта, моделирующего твердое тело, реализуются шесть обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) Ньютона для движения центра масс тела плюс семь ОДУ Эйлера для вращательного движения тела вокруг центра масс. В последнем случае имеется четыре кинематических уравнения Эйлера для кватерниона ориентации тела плюс три динамических уравнения Эйлера для вектора угловой скорости твердого тела. В результате полная модель экипажа задается системой ОДУ порядка $16 \cdot 13 = 208$. Кроме этого, механические связи могут задавать дополнительные дифференциальные уравнения.

Колеса, собранные в экипаж, с неизбежностью будут сохранять вертикальное положение. Поэтому упрощенный алгоритм отслеживания контакта, описанный выше, всегда будет работать правильно.

Испытания проводились, в частности, и для случая, когда относительная суммарная масса роликов приближается к нулю. В этом случае оказалось, что движение экипажа и омни-колес неограниченно приближаются к соответствующим функциям решения задачи Коши, получаемым в силу дифференциальных уравнений движения, используемых в работе [4], в которых динамика роликов не учитывается.

3 Верификация

В литературе представлены [2–4] работы, рассматривающие омниколеса в предположении, что массой и инерцией роликов можно пренебречь, налагающие на систему неголономные связи, ограничивающие направление скорости скольжения в точках контакта колес с поверхностью, на которой стоит эки-

паж, и не вводящие силу трения в контакте, т.е. считающие скольжение идеальным. Эти идеализированные модели имеют существенно меньше степеней свободы, чем "реальный" омниэкипаж, и легче поддаются аналитическому исследованию.

Описанные модели можно использовать для верификации построенной физически-ориентированной модели, рассматривая некоторые элементарные виды движений. Максимальное соответствие построенной модели упомянутым неголономным может быть достигнуто при уменьшении влияния массы роликов на динамику колеса, а именно, при уменьшении их массы с сохранением общей массы колеса с роликами. На этом предположении и основан наш подход к верификации.

3.1 Проверочная модель

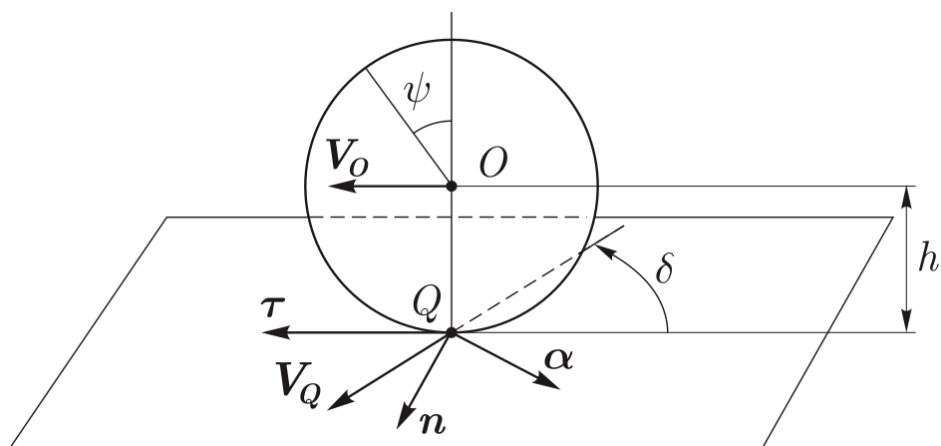
Для верификации использованы результаты работы [4] как новейшей из неголономных моделей динамики свободной тележки с омниколесами на плоскости.

Авторы [4] принимают простейшую модель омниколеса как плоского диска, для которого скорость точки контакта с опорной поверхностью направлена вдоль прямой, составляющей некоторый угол δ с плоскостью колеса (см. рис. 3.4). Связь, наложенная на колесо в таком случае имеет вид

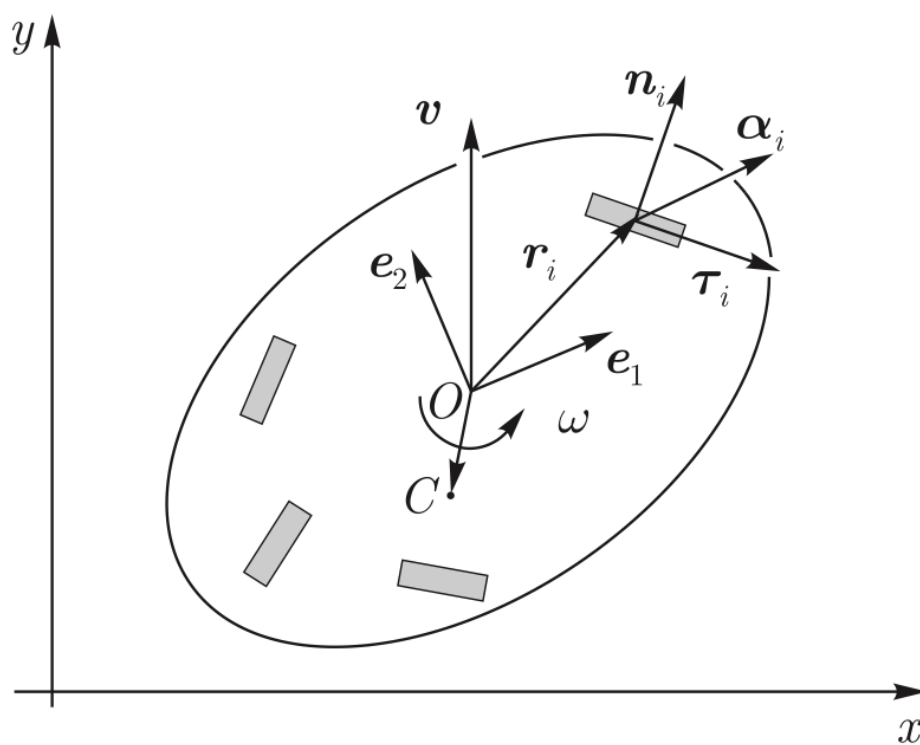
$$\mathbf{v}_Q \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0,$$

где \mathbf{v}_Q - скорость точки контакта, $\boldsymbol{\alpha}$ - единичный вектор вдоль оси закрепления роликов.

Авторы [4] получают уравнения движения для экипажа с произвольным количеством колес, закрепленных так, что их оси неподвижны относительно платформы, а оси роликов повернуты на произвольные углы относительно плоскостей соответствующих колес (см.рис. 3.5).



Фиг. 3.4. Неголономная модель колеса



Фиг. 3.5. Неголономная модель экипажа

Вводится подвижная система отсчета, связанная с платформой экипажа

(см.рис. 3.5). Уравнения свободного движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
(\Gamma + mE)\dot{\mathbf{v}} + m\dot{\omega}(J\mathbf{r}_C + R) + m\omega J(\mathbf{v} + \omega J\mathbf{r}_C) &= 0, \\
\hat{I}\dot{\omega} + m(J\mathbf{r}_C + \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{v}} + m\omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_C &= 0, \\
\dot{x} = v_1 \cos \phi - v_2 \sin \phi, \dot{y} = v_1 \sin \phi + v_2 \cos \phi, \dot{\phi} &= \omega, \\
\Gamma_{kl} = \sum_i \frac{I_i}{s_i^2 h_i^2} \alpha_i^k \alpha_i^l, R = m^{-1} \sum_i \frac{I_i}{s_i^2 h_i^2} (J\mathbf{r}_i \cdot \alpha_i) \alpha_i, \\
\hat{I} = I + \sum_i \frac{I_i}{s_i^2 h_i^2} (J\mathbf{r}_i \cdot \alpha_i)^2,
\end{aligned}$$

где \hat{I} - суммарный момент инерции системы относительно вертикальной оси, проходящей через начало O подвижной системы отсчета,

I - момент инерции платформы относительно той же прямой,

I_i - моменты инерции колес относительно их диаметров,

$s_i = \sin \delta_i$, h_i - радиусы колес,

\mathbf{r}_i - точки закрепления осей колес в подвижной системе,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

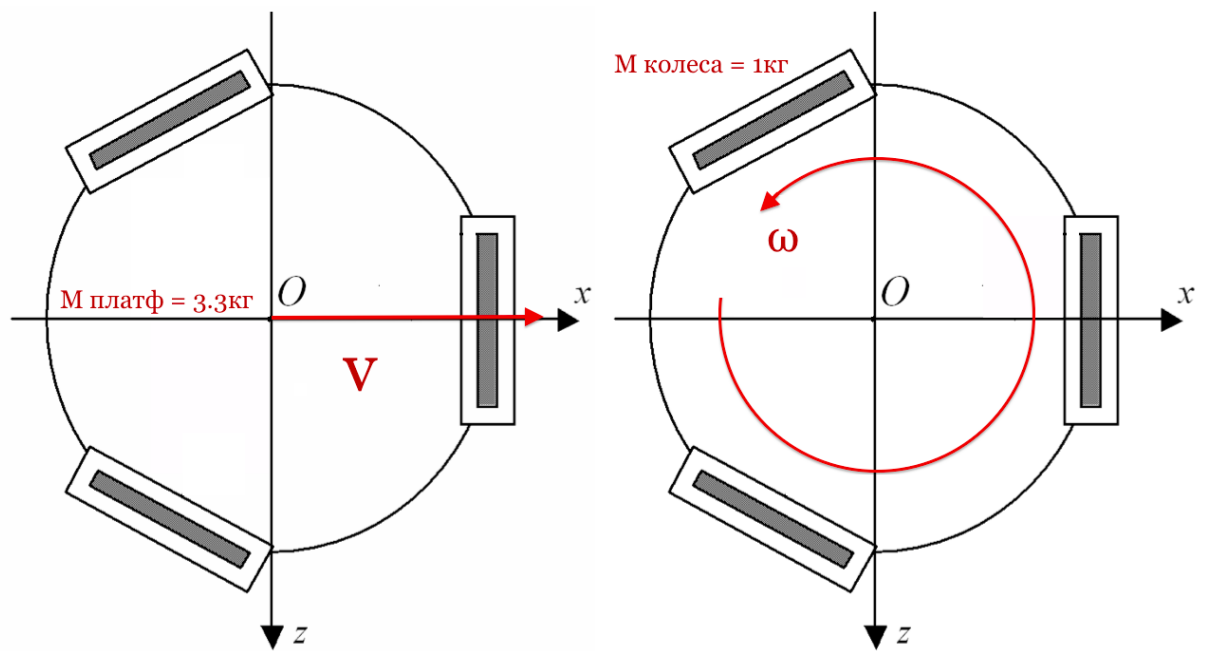
x, y, ϕ - координаты точки O и угол поворота платформы экипажа вокруг вертикальной оси,

\mathbf{v}, ω - вектор скорости точки O и скорость поворота платформы,

\mathbf{r}_C - координаты центра масс экипажа в подвижных осях, E - единичная матрица.

3.2 Два типа движений

Задавая параметры экипажа, такие как массы его частей, их моменты инерции, геометрические размеры, положения, а также начальные данные - скорость центра масс и угловую скорость платформы, - и выполняя согласованные расчеты для двух реализаций - физической и идеальной - можно получить достаточно близкие движения при достаточно малой доле массы роликов.



Фиг. 3.6. Параметры экспериментов

При выполнении численных экспериментов массы платформы и колес, количество колес, количество роликов, геометрия системы были фиксированы (см. рис. 3.6). Изменялись начальные данные и доля массы роликов.

Рассмотрены два типа начальных условий $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)^T, \omega(0) = \omega_0$ (см. рис. 3.6):

1. экипаж закручен вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр масс, скорость центра масс равна нулю (ожидаемый результат - экипаж вращается вокруг своей вертикальной оси симметрии, и центр масс покоится),
2. экипаж имеет начальную линейную скорость в направлении одного из колес и не закручен (ожидаемый результат - центр масс экипажа движется вдоль оси Ox , экипаж не вращается).

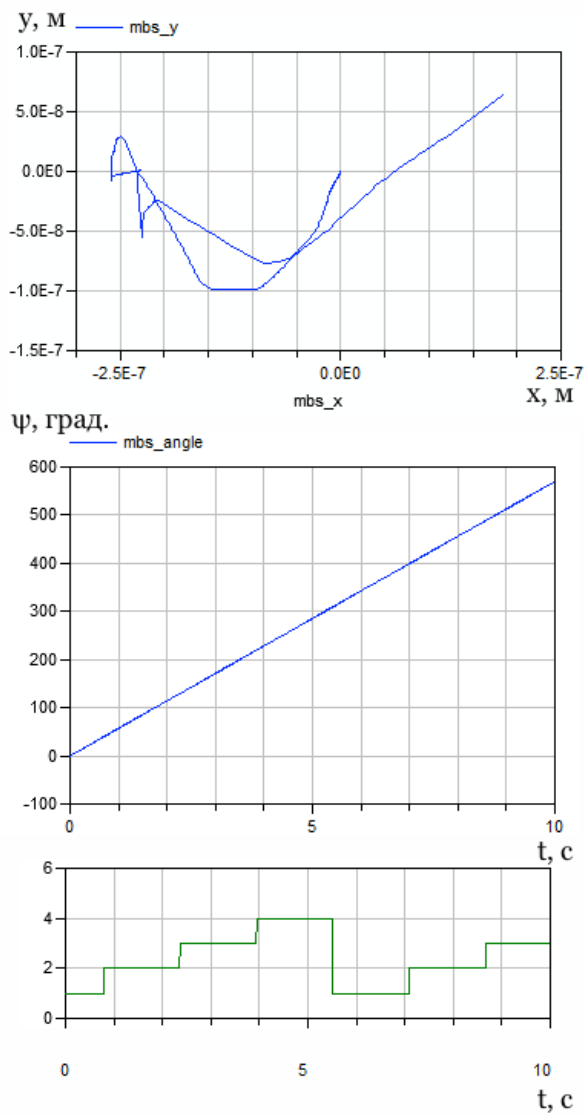
Значения отношения η массы ролика к общей массе колеса принимали в обоих случаях значения от $10^{-6}n^{-1}$ до $10^{-1}n^{-1}$ с шагом 1 по порядку малости (здесь n - фиксированное количество роликов).

На рис. 3.7 приведены примеры траектории центра масс $y(x)$ и зависимости $\psi(t)$ угла поворота ψ платформы вокруг вертикальной оси, проходящей

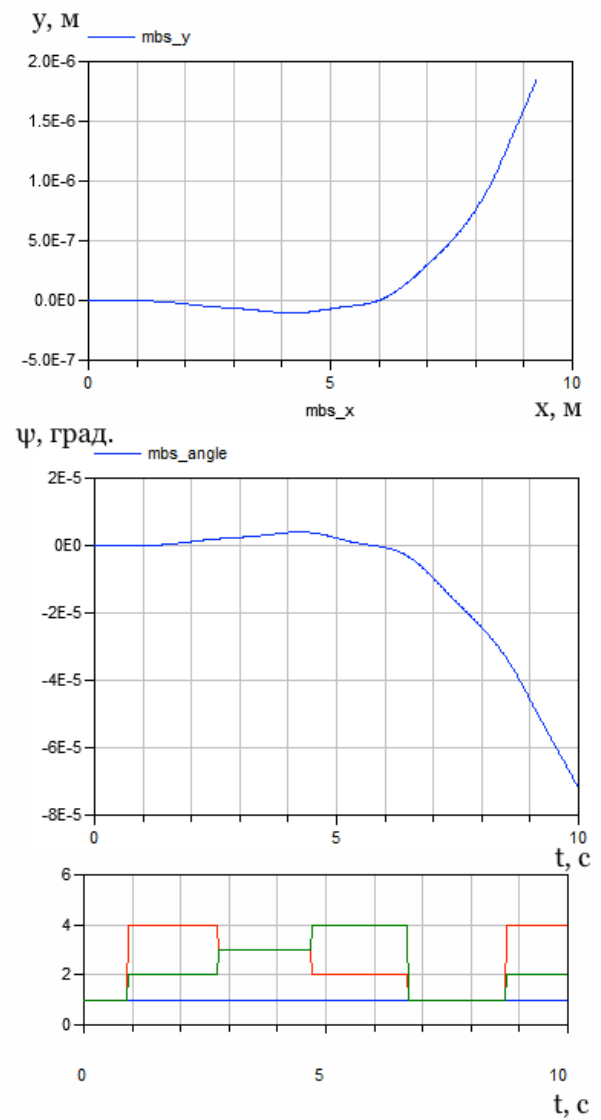
через её центр, для случаев 1) и 2). Кривые $y(x)$, изображающие траектории центра масс, соответствуют, в сущности, точке - началу координат - в случае $v_0 = 0, \omega_0 = 1$, и отрезку прямой, совпадающей с осью x , в случае $v_0 = 1, \omega_0 = 0$, ибо масштаб отображения таков, чтобы были видны отклонения от точных значений, возникающие в силу вычислительной погрешности, но сами эти отклонения имеют порядок малости, позволяющий считать их нулевыми. Аналогичное утверждение верно и для зависимости угла поворота платформы ψ от времени в случае поступательного движения - полученная зависимость близка к постоянной.

Ниже представлены результаты нескольких численных экспериментов. Во всех случаях величины, изображенные на рис. 3.7, демонстрируют поведение, не различимое в масштабе рис. 3.7, и поэтому приведены лишь расхождения между построенной нами моделью и верификационной идеализацией, которые и представляют интерес. Также представлена абсолютная величина скорости скольжения в точке контакта в физической модели.

Графики зависимости скорости скольжения от времени показывают, что скольжение имеет место в окрестности момента смены роликов. Это объясняется тем, что для идеального качения в эти моменты ролику необходима бесконечная угловая скорость собственного вращения, ибо его размер вблизи вершины стремится к нулю. Видно, что с ростом доли массы роликов в общей массе колеса скольжение в контакте становится существеннее, изменяясь от пренебрежимо малого при $\eta = 10^{-6}$ до весьма существенного уже при $\eta = 10^{-3}$. Тем не менее, расхождения траектории и угла поворота платформы малы, а скольжение наблюдается лишь в точках колеса, которые в промышленных конструкциях не присутствуют (см. Обзор), что и позволяет считать верификацию проведенной.

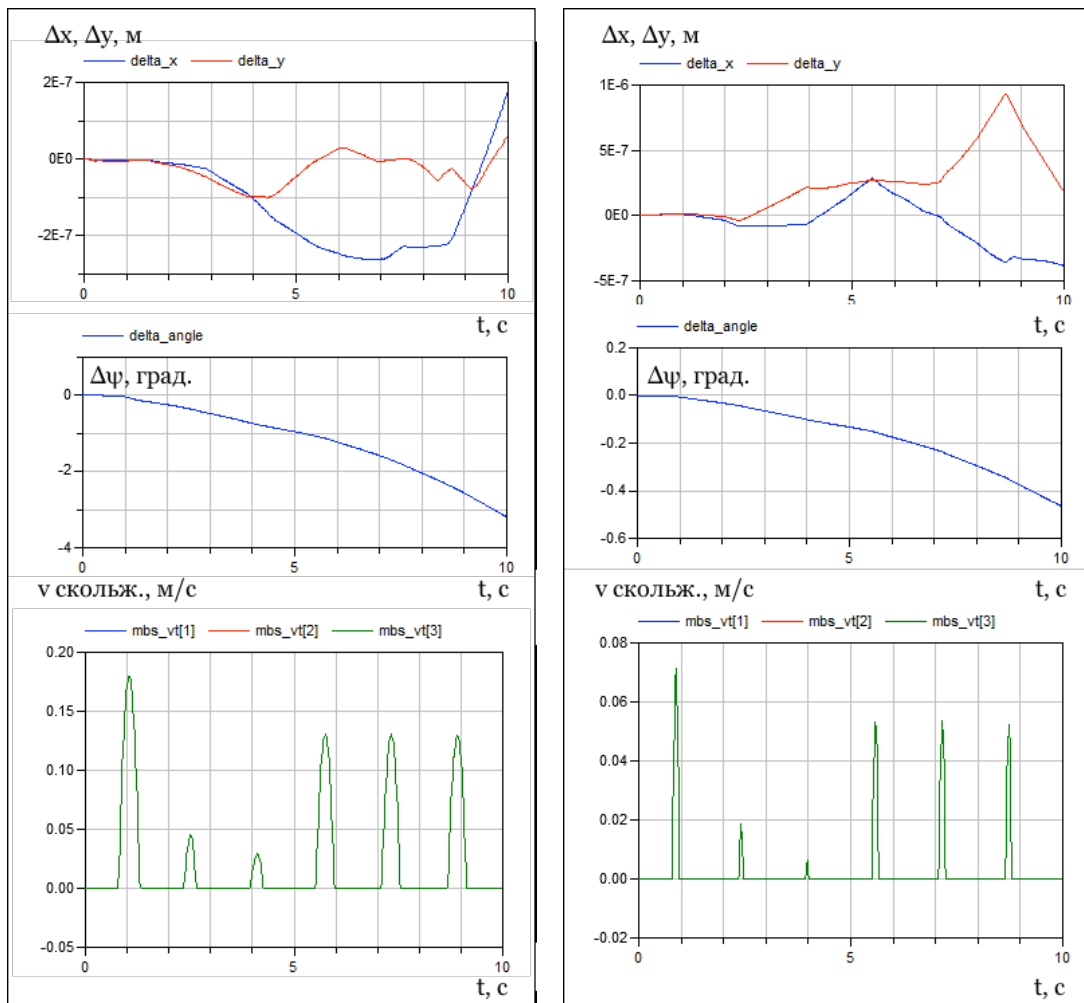


(a) $\eta = 0, 1, v_0 = 0, \omega_0 = 1$



(b) $\eta = 0, 1, v_0 = 1, \omega_0 = 0$

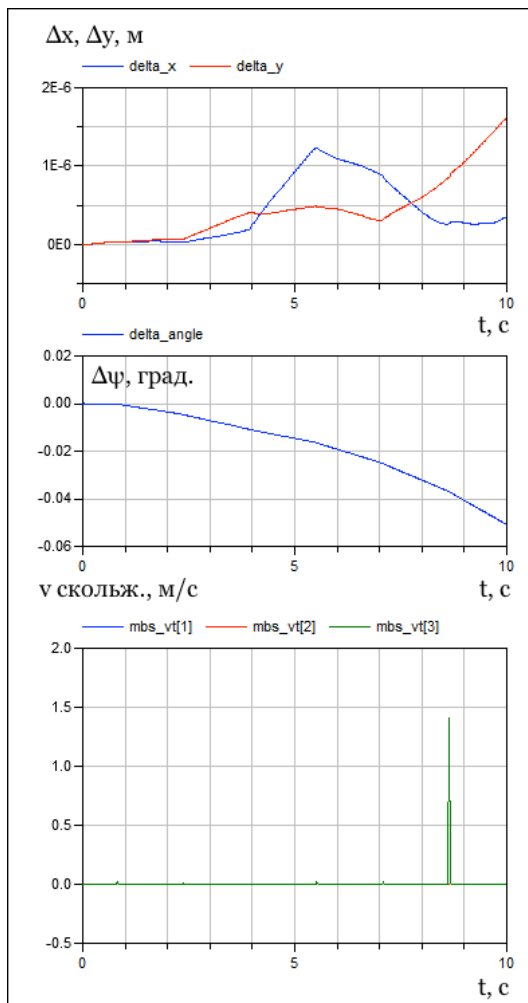
Фиг. 3.7. Примеры траекторий, характера изменения угла и смены номеров роликов в контакте для двух типов начальных условий. На нижнем графике - номер ролика в контакте, см. рис. 3.1



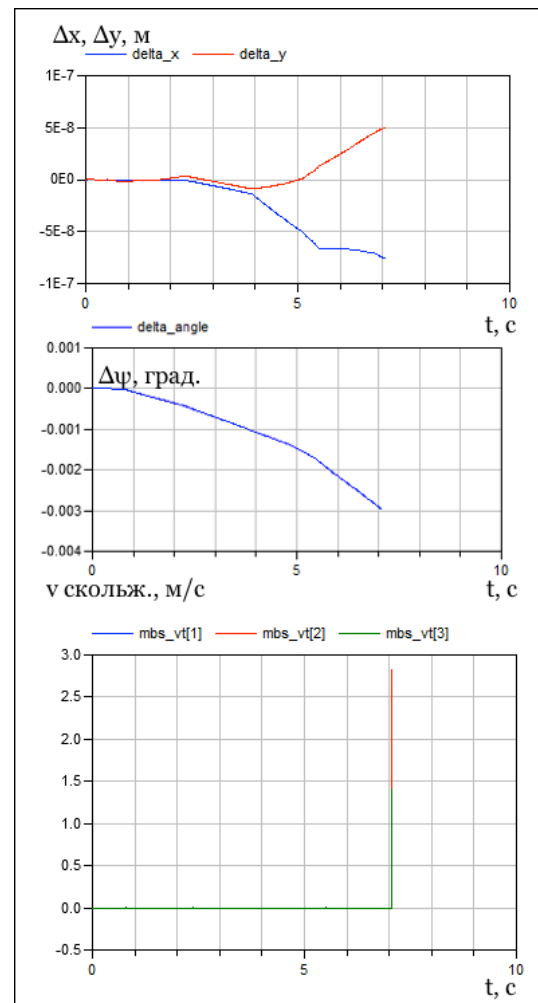
$$\eta = 0, 1, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

$$\eta = 0, 01, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

Фиг. 3.8. Вращение экипажа с трением вокруг вертикальной оси

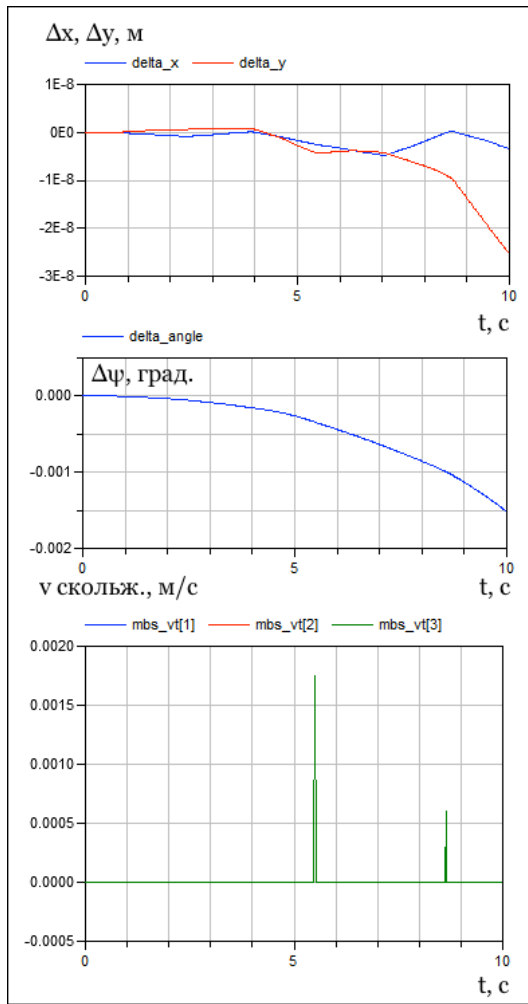


$$\eta = 0,001, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

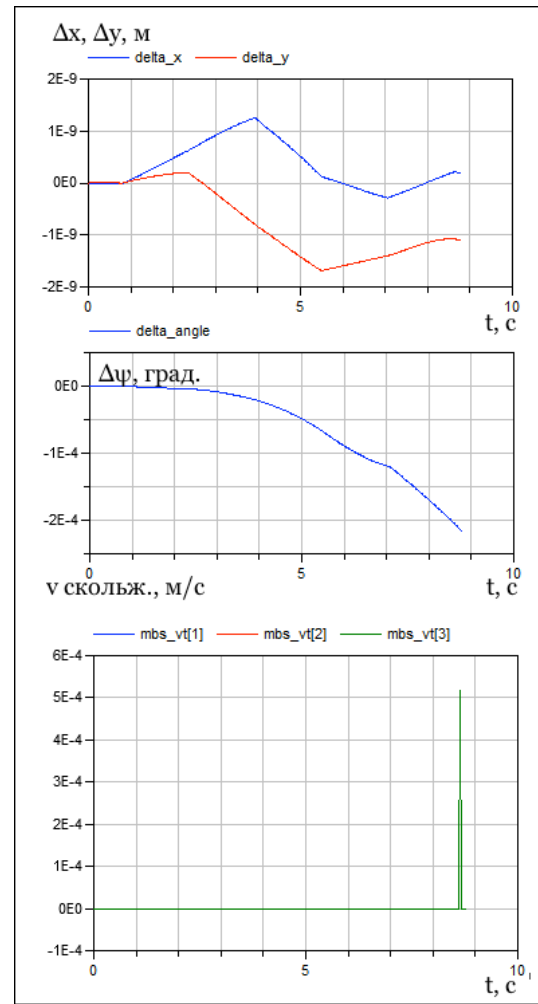


$$\eta = 0,0001, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

Фиг. 3.9. Вращение экипажа с трением вокруг вертикальной оси

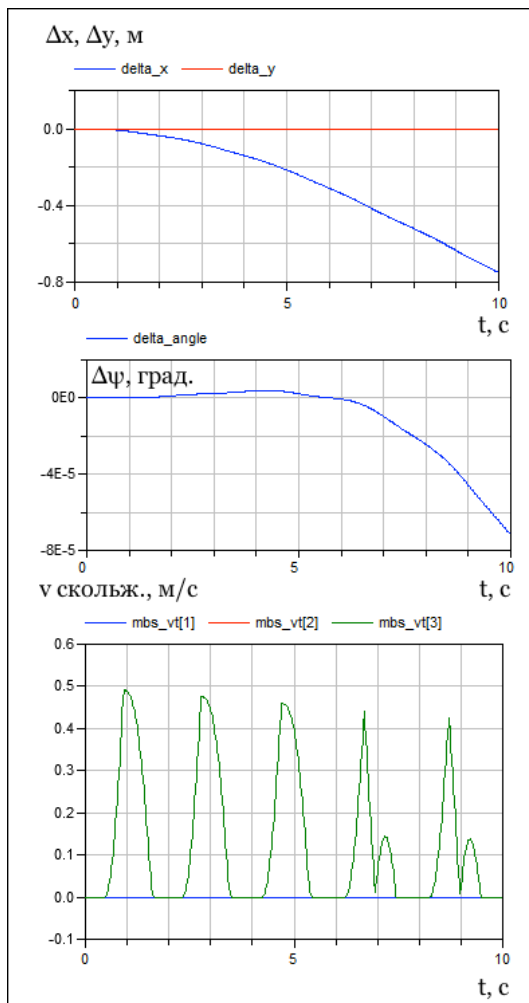


$$\eta = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

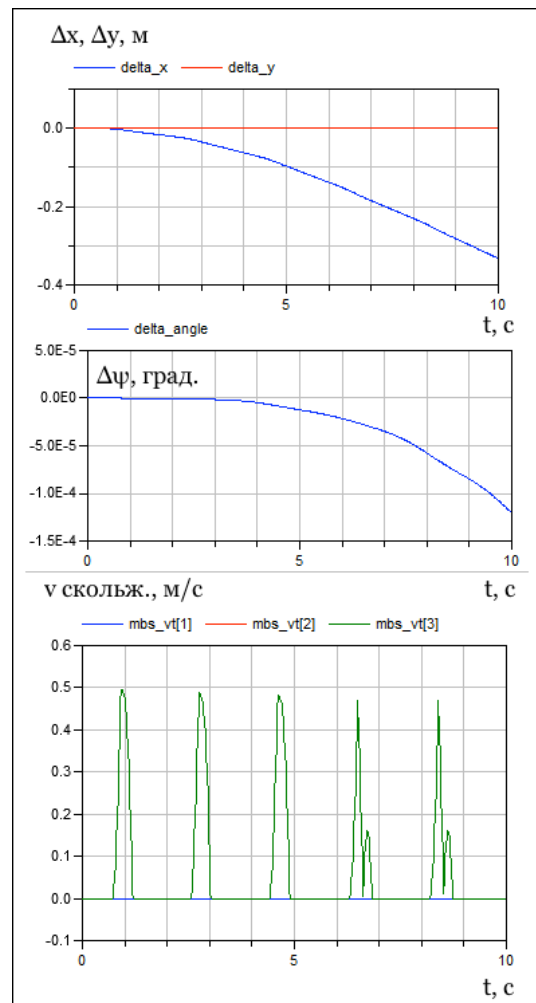


$$\eta = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

Фиг. 3.10. Вращение экипажа с трением вокруг вертикальной оси

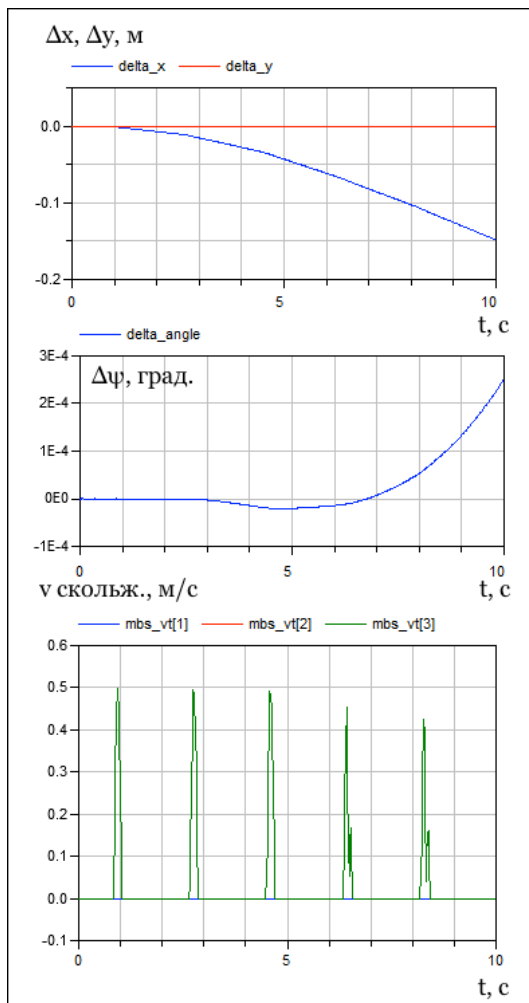


$$\eta = 0, 1, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

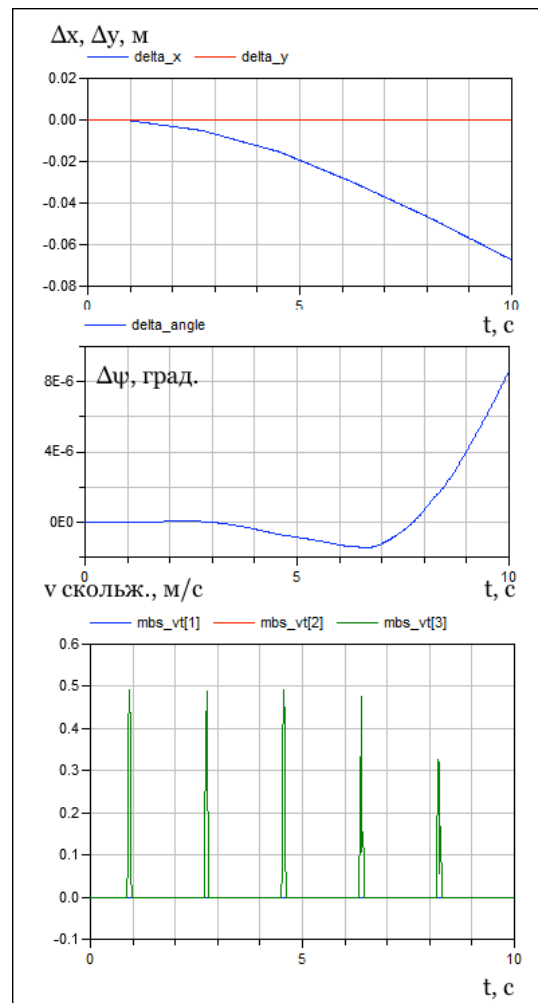


$$\eta = 0, 01, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

Фиг. 3.11. Вращение экипажа с трением по прямой



$$\eta = 0,001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$



$$\eta = 0,0001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

Фиг. 3.12. Вращение экипажа с трением по прямой

Выводы

1. Получены уравнения движения экипажа на омни-колесах по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов.
2. Изучены свойства этих уравнений движения и проведено сравнение их с уравнениями движения безынерционной модели [13].
3. Построен способ расчета изменения обобщенных скоростей при смене ролика в контакте, в предположении о мгновенном выполнении условия отсутствия проскальзывания между роликом и опорной плоскостью.
4. Получены численные решения для симметричной конфигурации экипажа с омни-колесами с учетом ударного взаимодействия роликов и опорной плоскости.
5. Построена динамическая модель экипажа с омни-колесами на плоскости с регуляризованным сухим трением. Показана возможность гладкого безударного переключения роликов в контакте в процессе качения/скольжения омни-колеса.
6. Выполнена верификация динамической модели омни-экипажа с использованием безынерционной модели, рассмотренной в работе [4], в качестве предельного случая (когда суммарная масса роликов равна нулю).

Литература

1. Gferrer A. Geometry and kinematics of the Mecanum wheel // Computer Aided Geom. Design. 2008. 2008. Т. 25. С. 784–791.
2. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Динамика экипажа с роликонесущими колесами // ПММ. 2009. 2009. Т. 73, № 1. С. 13–22.
3. Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Изв. РАН. Теория сист. управл. 2007. 2007. № 6. С. 142–149.
4. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Тележка с омниколесами на плоскости и сфере // Нелин. дин. 2011. 2011. Т. 7, № 4 (Мобильные роботы). С. 785–801.
5. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Математические аспекты динамики движения экипажа с тремя окольцованными колесами // Мобильные роботы и мехатронные системы. М.: Изд-во МГУ, 2006. 2006. С. 61–67.
6. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Свободные и управляемые движения некоторой модели экипажа с роликонесущими колесами // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. 2008. 2008. № 6. С. 62–65.
7. Мартыненко Ю. Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // ПММ. 2010. 2010. Т. 74, № 4. С. 610–619.
8. Косенко И. И., Герасимов К. В. Физически-ориентированное моделирование динамики омнитележки // Нелин. дин. 2016. 2016. Т. 12, № 2. С. 251–262.
9. Tobolar J., Herrmann F., Bunte T. Object-oriented modelling and control of vehicles with omni-directional wheels // Computational Mechanics. 2009. Hrad Nectiny, Czech Republic: 2009.
10. Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots / R.L. Williams, B.E. Carter, P. Gallina [и др.] // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2002. 2002. Т. 18, № 3. С. 285–293.

11. Ashmore M., Barnes N. Omni-drive robot motion on curved paths: the fastest path between two points is not a straight-line // Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2002. С. 225–236.
12. Татаринцов Я. В. Уравнения классической механики в новой форме // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. 2003. 2003. № 3. С. 67–76.
13. Зобова А. А. Применение лаконичных форм уравнений движения в динамике неголономных мобильных роботов // Нелин. дин. 2011. Т. 7. № 4. Р. 771–783. 2011.
14. Герасимов К. В., Зобова А. А. Движение симметричного экипажа на омни-колесах с массивными роликами // ПММ. 2018. 2018. Т. 82, № 4. С. гот. к публ.
15. Вильке В.Г. Теоретическая механика. СПб.: Лань, 2003.
16. Kosenko I. Physically oriented approach to construct multibody system dynamics models using Modelica language // MULTIBODY DYNAMICS 2007, ECCOMAS Thematic Conference / Ed. by C. Bottasso, P. Masarati, L. Trainelli. Milano, Italy: 25–28 June 2007.
17. И. Косенко И. Интегрирование уравнений вращательного движения твердого тела в алгебре кватернионов. Случай Эйлера // ПММ. 1998. 1998. Т. 62, № 2. С. 206–214.
18. И. Косенко И. Реализация компьютерной модели динамики систем твердых тел с освобождающими связями // Математическое моделирование. 2006. 2006. Т. 18, № 2. С. 95–106.
19. Новожилов И. В. Фракционный анализ. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1995. С. 224.