

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И МЕХАТРОНИКИ

На правах рукописи

Герасимов Кирилл Вячеславович

**Динамика роликонесущего экипажа
с учетом инерции роликов и трения**

Диссертация на соискание степени кандидата
физико-математических наук
по специальности 01.02.01 – теоретическая механика

Научные руководители:
д.ф.-м.н. проф. Косенко И.И.
к.ф.-м.н. доц. Зобова А.А.

Москва — 2018

Оглавление

Введение	3
1 Уравнения движения экипажа на омни-колесах с учетом динамики роликов	16
1.1 Постановка задачи	16
1.2 Уравнения движения	21
1.3 Приложение. Безынерционная модель	30
2 Смена ролика в контакте с опорной плоскостью	34
2.1 Модель удара при смене ролика в контакте	36
2.1.1 Основное уравнение теории удара	38
2.1.2 Разрешимость основного уравнения теории удара при наложении дифференциальных связей	41
2.1.3 Изменение кинетической энергии при ударе	44
2.2 Численные эксперименты	45
3 Динамика экипажа на омни-колесах на плоскости с трением	53
3.1 Метод построения механической модели системы твердых тел	55
3.2 Отслеживание контакта роликов при движении омни-колеса	57
3.3 Отслеживание контакта в случае <i>тесалит</i> колеса	61
3.4 Моделирование трения в контакте	67
3.5 Результаты численного моделирования	68
3.5.1 Верификация модели с сухим трением	68
3.5.2 Качественное сравнение модели с вязким трением и безынерционной модели	73
Заключение	83
Литература	85

Введение

Омни-колеса (в русской литературе также используется название роликонесущие колеса) – это колеса особой конструкции, позволяющей экипажу двигаться в произвольном направлении, вращая колеса вокруг их собственных осей и не поворачивая их вокруг вертикали. На ободе такого колеса располагаются ролики, которые могут свободно вращаться вокруг своих осей, жестко закрепленных в диске колеса. Существуют два варианта расположения осей роликов: первый (собственно омни-колеса [1]) – оси роликов являются касательными к ободу колеса и, следовательно, лежат в его плоскости; второй (*mesanite wheels* [2]) – оси роликов развернуты вокруг радиусов-векторов их центров на постоянный угол, обычно $\pi/4$.

За счет своей конструкции омни-колесо может катиться вперед или назад, как обыкновенное колесо, кроме того, диск колеса может двигаться поступательно под углом к своей плоскости за счет вращения ролика, контактирующего с опорной поверхностью. Благодаря этому мобильные экипажи, оснащенные такими колесами, обладают повышенной маневренностью и применяются для выполнения различных работ в условиях стесненного пространства, например, для перемещения грузов. Свойства омни-колес мотивируют инженеров и ученых находить новые и новые их применения. Сложность их устройства, обусловленная наличием роликов, на протяжении последних десятилетий делает системы с омни-колесами предметом исследований, в которых движение описывается все более точно.

Большинство известных моделей омниколесных экипажей построено в приближении, не учитывающем движение роликов. Как пра-

вило, это обусловлено двумя причинами. Во-первых, относительно большое количество твердых тел в полной системе затрудняет аналитическое исследование и замедляет численное. Во-вторых, при моделировании роликов как отдельных твердых тел, ролик в контакте с опорной плоскостью меняется. В силу этого система уравнений становится не непрерывной, а гибридной. Кроме того, ролик, не находящийся в контакте, может совершать такие движения, что при входе его в контакт возникнет некоторый переходный процесс, который также требуется моделировать. Настоящая работа посвящена построению динамических моделей омни-колесного экипажа, учитывающих движение всех роликов. При этом необходимо выбрать подходящий метод построения модели большого количества связанных твердых тел, способ задания контакта роликов и опорной поверхности и моделирования перехода колеса экипажа с одного ролика на другой. Поэтому обзор литературы построен следующим образом: сначала будут описаны работы, непосредственно посвященные исследованиям омни-экипажей; далее будут упомянуты работы по формализмам построения уравнений систем связанных твердых тел, близко относящиеся к представленной работе; будут даны необходимые ссылки на работы по теории удара; в конце обзора обсуждаются работы по языку Modelica, используемому в последней главе работы.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Основной областью, в которой омни-колеса находят применение, является робототехника [3–5]. Экипажи с омни-колесами и колесами *тесанит* [2] подробно описаны в обзорных работах [6–10] как с точки зрения теоретической механики, так и с позиции технической реализации систем. Геометрия поверхности ролика *тесанит*-колеса отдельно рассмотрена в [11], где показано, что это алгебраическая поверхность восьмого порядка, построена аппроксимация поверхно-

сти ролика тором и сформулировано условие корректности конфигурации омниколесного экипажа: оси всех роликов, контактирующих с опорной плоскостью, не должны проходить через одну точку или быть параллельны, иначе экипаж не способен совершать ряд движений.

Движение экипажа с омни-колесами по абсолютно шероховатой плоскости рассмотрено в [12–15]. Уравнения движения произвольной конфигурации экипажа получены, например, в [14], где также найдены их первые интегралы и инвариантная мера. Изучается конфигурация с тремя колесами, в которой два колеса имеют общую ось, а третье – ось, перпендикулярную ей. Изучается устойчивость управляемых движений. Уравнения управляемого движения составлены методом Я.В.Татарина (уравнения в лаконичной форме) [16, 17]. В [15] этот метод получения уравнений движения проиллюстрирован на примере омниколесного экипажа, а также рояльного колеса и экипажа с дифференциальным приводом.

В работе [1] рассмотрена симметричная конфигурация экипажа с омни-колесами, в которой центры колес расположены в углах правильного треугольника, а их плоскости вертикальны и перпендикулярны радиусам-векторам центров колес, выпущенным из центра треугольника. Описана ее кинематика, и рассматриваются движения по инерции и при постоянных напряжениях, подаваемых на моторы постоянного тока, установленные в осях колес. Дана оценка мощности, потребляемой моторами, и показано, что она наименьшая при движении в направлении оси одного из колес. Строится алгоритм отслеживания направления движения экипажа. Развитием этой работы стало рассмотрение экипажа со смещенным центром масс [18], где построены траектории свободного движения и изучены вопросы существования движений по прямой и по окружности.

Движение экипажа произвольной конфигурации по инерции по абсолютно шероховатой плоскости рассматривается и в [19], где также строятся различные примеры движения по инерции, в том числе, периодического; получены уравнения движения омниколесного экипажа на сфере. Позже в [20] изучена управляемость экипажа произвольной конфигурации на абсолютно шероховатой плоскости и осуществимость движения по любой наперед заданной траектории.

Кроме экипажей,двигающихся за счет взаимодействия колес и опорной поверхности, изучаются и другие конструкции, например, шарообразные роботы, управляемые изнутри симметричным омниколесным экипажем [21], либо двумя омниколесами, установленными на сфере меньшего радиуса, находящейся внутри внешней сферы [22]. Последняя статья содержит также более широкий обзор литературы о роботах-шарах. Кроме того, в ней найдены условия, при которых возможно движение робота-шара вдоль произвольной траектории. Работа выполнена в формализме алгебры кватернионов. Известны и конструкции шарообразных роботов, управляемых двумя обычными колесами [23], однако роботы, рассмотренные в [22], имеют преимущество в способности нести полезный груз. Омни-колеса можно применять не только для перемещения в пространстве, но и для изменения ориентации тел. К примеру, в [24, 25] предлагается использовать сферу, приводимую в движение омни-колесами, касающимися ее извне, в качестве корпуса тренажера для пилотов. В работе [25] рассматривается точечный контакт колес и сферы, в [24] их взаимодействие задается в контактной модели Герца.

Инерцией движения роликов в большинстве работ пренебрегают. Однако в работе [26], опубликованной летом 2018 года, рассматривающей движение экипажа с четырьмя колесами *tesanit*, учтено движение контактного ролика с учетом вязкого трения в осях ко-

лес и роликов. Уравнения движения строятся методом Аппеля. При этом предполагается, что точка контакта всегда находится строго под центром колеса. Изучается структура управляющих моментов на примере движения экипажа по окружности, а также устойчивость движения в линейном приближении. Отдельной областью интересов является определение коэффициентов в уравнениях движения [27] в случаях, когда технические характеристики систем оказываются неизвестны, либо изменяются в процессе движения.

Отметим отдельно многочисленные работы по омни-роботам, содержащие описания практических реализаций экипажей. Такие экипажи часто используются на соревнованиях мобильных роботов. К примеру, в [28] описывается кинематика и строится управление симметричным омниколесным экипажем в условиях ограниченности моментов, прилагаемых двигателями. В [29] строится гибридный экипаж с двумя обычными колесами и двумя роликонесущими. Весьма распространены работы, описывающие низкоуровневую техническую реализацию экипажей, такие как [30–32]. В практике мобильных роботов необходимой задачей является навигация. В [33] рассматривается способ навигации омни-колесных экипажей с помощью так называемого многочастичного фильтра [34], широко распространенного в робототехнике метода решения нелинейных задач оценивания [35]. Для омни-колес важен характер поверхности, по которой экипаж движется. Поэтому в работе [36] строится метод определения типа материала опорной поверхности с помощью оценивания вибраций при движении с целью адаптации управления: движение по мягким поверхностям естественным образом оказывается медленнее, а движение по жестким вызывает большие вибрации, что требуется компенсировать управлением. Предлагается также модель, в которой колеса экипажа подпружинены для компенсации неровности по-

верхности [37].

Следующие работы посвящены оптимальному управлению движением омни-экипажей по кинематическим связям. В работе [38] показано, что перемещение омни-экипажа между двумя точками на плоскости происходит быстрее всего не по прямой, а по дуге окружности. В [39] оптимальные по времени траектории рассмотрены существенно детальнее, их построение проводится с помощью принципа максимума Понтрягина, и строится классификация таких траекторий. Класс работ о построении управляемых движений весьма широк [40–43], имеются работы с управлением с учетом динамики системы. Встречаются работы, рассматривающие ситуацию частичного отказа приводов [22, 44].

Интересны работы, описывающие все стадии разработки робототехнической платформы с омни-колесами, от кинематики и уравнений движения до построения (оптимального) управления, включающие также технические реализации экипажей [45–47]. В [48] построено управление с объездом препятствий. В [49] рассматривается адаптивное управление с учетом переменных коэффициентов трения в точках контакта, а также массы платформы.

Перейдем теперь к обзору формализмов, используемых при построении динамических уравнений систем твердых тел.

Для описания систем многих тел, в том числе, систем, организованных иерархически, известны различные подходы [50–54]. Классические подходы основаны на теории графов [50, 54]. Разработаны рекурсивные методы для описания древовидных структур [51]. Весьма обширный обзор существующих методов для описания систем тел, в том числе, с замкнутыми кинематическими цепями, проведен в [52]. Работа [53], кроме непосредственно методов описания систем тел, уделяет отдельное внимание историческому контексту развития

данной области, в частности, констатируя слабопреодолимые затруднения, возникающие в аналитическом исследовании из-за нелинейностей и количества тел в системах, а также подробно освещая их разрешение с помощью вычислительной техники, как основной метод их изучения и проектирования.

В отношении контактного взаимодействия твердых тел, при описании динамики омни-колес и экипажей можно либо идти по пути наложения дифференциальных связей отсутствия проскальзывания, либо вводить силу трения в контакте. Динамика систем с дифференциальными связями подробно описана, например, в [55, 56]. В [56] и [57], в частности, подробно обсуждается вопрос обоснованности подобных идеализаций. В главах 1 и 2 настоящей работы принимается модель точечного контакта ролика и опорной плоскости. Для получения уравнений движения таких систем часто пользуются методами Аппеля либо Лагранжа первого рода [58–60]. В силу объема требуемых выкладок в рассматриваемой системе мы применили метод получения уравнений движения в лаконичной форме Я.В. Татаринова [16, 17].

В отсутствии проскальзывания отдельного рассмотрения требует смена ролика в контакте с опорной плоскостью. Явления, возникающие при подобных движениях, описываются теорией удара [60–62]. В [62] приведено формальное построение этой теории, и обсуждается ее физическая обоснованность. Всестороннее современное рассмотрение механики систем с односторонними связями с учетом их моделирования с помощью вычислительной техники содержится в [63], а также в серии работ [64–74]. Уравнения движения для систем с односторонними связями в интегральной форме построены в [75], и там же рассмотрены удары, в частности, о дифференциальные связи.

Постановка задачи с сухим трением в контакте между роликом

и опорной плоскостью приводит к дальнейшему усложнению задачи. Методы исследования истем с сухим трением описаны в [76–82], а также [83] Исследование омниколесного экипажа с учетом динамики всех роликов и трения возможно лишь численно, и здесь, кроме понимания природы трения, требуется подходящий формализм для создания компьютерной модели экипажа. Нами был выбран формализм языка Modelica [84–86], примененный ранее к задачам динамики систем тел [87–89, 89–95]. Этот метод уже использовался и при изучении динамики омниэкипажей [96–99]. В этих работах рассматривается контакт с трением, но ролики имеют существенно упрощенную форму – считаются массивными цилиндрами либо конусами. Автор утверждает, что полученная им модель слишком медленна и сложна, и потому строит еще одну упрощенную модель, полностью пренебрегая инерцией роликов, но учитывая трение в направлении оси ролика. В [98] изучается вопрос заноса омни-колесных экипажей при торможении в упрощенной модели.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Настоящая работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Во введении дано описание предметной области и цели данной работы, выполнен обзор литературы об омни-колесах и экипажах, оснащенных ими, о динамике систем тел, в том числе, с односторонними связями, ударами и трением, а также составлено краткое содержание работы.

Целью работы является изучение неуправляемого движения роликонесущего экипажа по горизонтальной плоскости с учетом инерции роликов и трения в двух постановках. В первой постановке опорная плоскость абсолютно шероховата, т.е. проскальзывание между роликом в контакте и плоскостью отсутствует. При этом предпо-

лагается, что при смене ролика в контакте происходит мгновенное согласование скоростей системы в соответствии с новыми связями (удар связями). Во второй между контактным роликом и опорной плоскостью действует сила сухого трения скольжения Кулона, либо сила вязкого трения скольжения.

Экипаж состоит из несущей платформы и трех одинаковых омни-колес, центры которых расположены в вершинах правильного треугольника, а плоскости перпендикулярны биссектрисам соответствующих углов. Омни-колесо моделируется абсолютно твердым диском и некоторым количеством распределенных по его окружности весо-вых роликов, свободно вращающихся вокруг своих осей, направленных вдоль касательных к окружности.

В первой и второй главе работы рассматривается движение экипажа по абсолютно шероховатой плоскости, т.е. предполагается, что проскальзывание между опорным роликом и плоскостью отсутствует. Уравнения движения получены в явном виде с использованием формализма лаконичных уравнений Я.В. Татарина. Изучена структура уравнений, найдены первые интегралы и проведено сравнение с уравнениями движения безынерционной модели. Показано, что если момент инерции ролика относительно его оси равен нулю, то уравнения совпадают с уравнениями безынерционной модели. Результаты первой главы изложены в [100].

Во второй главе рассмотрена задача о смене ролика в контакте: при повороте колеса вокруг своей оси в контакт с плоскостью приходит новый ролик, скорость которого, вообще говоря, не согласована со связями, при этом возникает проскальзывание. Предполагается, что проскальзывание прекращается за бесконечно малый промежуток времени. Составлены линейные алгебраические уравнения, определяющие обобщенные скорости после смены ролика в

контакте в соответствии с теорией удара. Таким образом, численное моделирование движения экипажа состоит из решения задачи Коши уравнений, полученных в первой главе, пока в контакте находится один и тот же ролик, и решения линейных алгебраических уравнений при смене ролика для получения начальных условий для следующего гладкого участка. Получены и проанализированы численные решения для симметричной конфигурации экипажа. По результатам второй главы опубликована статья [101].

В третьей главе построена динамическая модель экипажа на плоскости с сухим трением Кулона-Амонтона, регуляризованным в окрестности нуля по скоростям участком линейной функции насыщения с достаточно большим угловым коэффициентом. Особое внимание уделяется вопросу моделирования связи в контакте ролика и горизонтальной плоскости, отслеживанию точки контакта ролика и опорной плоскости, а также алгоритмической реализации процесса переключения контакта от ролика к ролику при качении омни-колеса. Динамическая модель построена в формализме объектно-ориентированного моделирования на языке Modelica. Выполнена верификация динамической модели с использованием безынерционной модели. Результаты третьей главы опубликованы в работах [102,103], а также доложены на конференциях и опубликованы в их сборниках трудов [104–110].

В заключении перечислены результаты работы.

По результатам работы опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах WebOfScience, Scopus и RSCI, следующие статьи:

1. Косенко И.И., Герасимов К.В. Физически-ориентированное мо-

делирование динамики омнитележки // Нелин. дин. 2016. Т. 12, No 2. С. 251–262 (и.-ф. РИНЦ 0,394)

2. Герасимов К.В., Зобова А.А. Движение симметричного экипажа на омни-колесах с массивными роликами // ПММ. 2018. Т. 82, No 4., стр. 427–440 (и.-ф. РИНЦ 0,831)
3. Kosenko I.I., Gerasimov K.V. Object-oriented approach to the construction of an omni vehicle dynamical model // Journal of Mechanical Science and Technology. — 2015. — Vol. 29, No. 7. — P. 2593–2599 (SJР 0,55)

Опубликована статья в журнале, входящем в список ВАК:

4. Герасимов К.В., Зобова А.А. Динамика экипажа на омни-колесах с массивными роликами с учетом смены ролика в контакте с опорной плоскостью // Труды МАИ. 2018. No 101. (и.-ф. РИНЦ 0,445)

Также опубликованы статьи в сборниках трудов международных конференций, включенных в международные базы Scopus либо Web Of Science:

5. Kosenko I.I., Stepanov S.Y., Gerasimov K.V. Improved contact tracking algorithm for the omni wheel in general case of roller orientation // The Proceedings of the Asian Conference on Multibody Dynamics. 2016.8. The Japan Society of Mechanical Engineers. — 2017. — no. July 01 — P. 2424-2985
6. Kosenko I.I., Gerasimov K.V. Omni vehicle dynamics model: Object-oriented implementation and verification // Proceedings of the

International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2014 (ICNAAM-2014), volume 1648 of AIP Conference Proceedings, College Park, Md., United States — 2015 — P. 1–4.

7. Kosenko I. I., Gerasimov K. V., Stavrovskiy M. E. Contact types hierarchy and its object-oriented implementation // B. Schrefler, E. Onate and M. Papadrakakis (Eds), Proceedings of the VI International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering, San Servolo, Venice, Italy, May 18–20, 2015. — 2015. — P. 191–202.

Результаты докладывались соискателем на ряде международных и всероссийских конференциях:

1. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам 2018, Суздаль, Россия, 6-11 июля 2018
2. Двадцатое международное рабочее совещание по компьютерной алгебре, Дубна, Россия, 21-22 мая 2018
3. Ломоносовские Чтения - 2018, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 16-25 апреля 2018
4. Ломоносовские чтения - 2017, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 17-26 апреля 2017
5. 11th International Modelica Conference, Версаль, Франция, 21-23 сентября 2015

Результаты также были представлены диссертантом на следующих научных семинарах механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова:

1. Семинар по аналитической механике и теории устойчивости имени В.В. Румянцева под руководством д.ф.-м.н. проф. А.В. Карапетяна (2017, 2018 г.)
2. Семинар имени В.В.Белецкого по динамике относительного движения под руководством д.ф.-м.н. проф. Ю.Ф. Голубева, д.ф.-м.н. проф. В.Е.Павловского, к.ф.-м.н. доц. К.Е. Якимовой, к.ф.-м.н. доц. Е.В. Мелкумовой в 2018 г.

Глава 1

Уравнения движения экипажа на омни-колесах с учетом динамики роликов

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим экипаж с омни-колесами, движущийся по инерции по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной опорной плоскости в поле силы тяжести.

Омни-колесо – это система абсолютно твердых тел, включающая в себя плоский диск колеса и n массивных роликов. Схема колеса

Данная глава изложена на основании статьи [100], опубликованной в соавторстве с научным руководителем, предложившим постановку задачи и используемые методы. Все результаты главы получены соискателем лично.

приведена на фиг. 1; ролики на ней показаны в виде затемненной области и областей, ограниченных штриховой линией. Плоскость, содержащую диск колеса, будем называть плоскостью колеса. Каждый ролик может свободно вращаться вокруг оси, неподвижной относительно диска колеса. Оси роликов – это прямые, лежащие в плоскости колеса и касательные к его окружности радиуса r . Поверхность ролика является поверхностью вращения дуги окружности радиуса $l > r$, лежащей в плоскости колеса с центром в центре диска вокруг хорды, лежащей на оси ролика. Центры K_j , $j = 1 \dots n$ роликов расположены на окружности диска колеса в вершинах правильного n -угольника. Отметим, что при такой конфигурации, если плоскость колеса вертикальна, то расстояние от оси колеса до опорной плоскости постоянно во все время движения, и в частности, при переходе колеса с одного ролика на другой (последнее рассмотрено в главе 2).

Экипаж состоит из платформы и N одинаковых омни-колес. Платформа экипажа – это плоский диск радиуса R . Оси колес неподвижны относительно платформы и лежат в ее плоскости. Таким образом, система состоит из $N(n + 1) + 1$ абсолютно твердых тел.

Введем неподвижную систему отсчета $OXYZ$ так, что ось OZ направлена вертикально вверх, а плоскость OXY совпадает с опорной плоскостью. Введем также подвижную систему отсчета $S\xi\eta Z$ с началом в центре S платформы экипажа, жестко связанную с платформой экипажа так, что плоскость $S\xi\eta$ горизонтальна и содержит центры P_i , $i = 1 \dots N$ дисков всех колес. Будем рассматривать конфигурацию экипажа, в которой оси колес совпадают с прямыми, соединяющими центр S платформы и центры P_i дисков колес (см. фиг. 2), расстояния от P_i до S одинаковы и равны R , и центры дисков колес расположены в вершинах правильного N -угольника. Геометрию установки колес на платформе зададим углами α_i между осью

$S\xi$ и осями колес (см. фиг. 1). Заметим, что при такой конфигурации $\sum_k \cos \alpha_k = \sum_k \sin \alpha_k = 0$.

Будем считать, что все тела однородны. Тогда центр масс всей системы совпадает с точкой S , а центры масс колес – с центрами их дисков P_i .

Для каждого колеса введем также тройку единичных взаимно-ортогональных векторов (ортов), жестко связанных с дисками колес: орт оси i -го колеса $\mathbf{n}_i = \mathbf{SP}_i / |\mathbf{SP}_i|$ и орты \mathbf{n}_i^\perp и \mathbf{n}_i^z , лежащие в плоскости диска колеса. Положения центров K_j роликов относительно дисков колес определим углами κ_j между их радиусами-векторами $\overrightarrow{P_i K_j}$ относительно центра колеса P_i и направлением, противоположным вектору \mathbf{n}_i^z . Определим угол поворота колеса χ_i вокруг его собственной оси SP_i как угол между опорной плоскостью и вектором \mathbf{n}_i^\perp , отсчитываемый против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \mathbf{n}_i , так, что вектор \mathbf{n}_i^\perp горизонтален при $\chi_i = 0$.

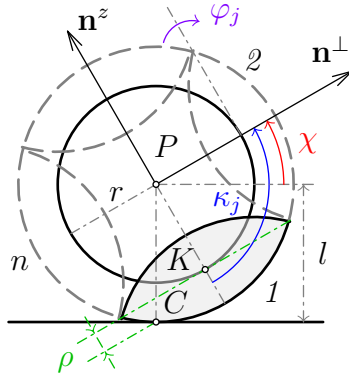


Рис. 1. Омни-колесо. Индексы i , означающие номер колеса, опущены.

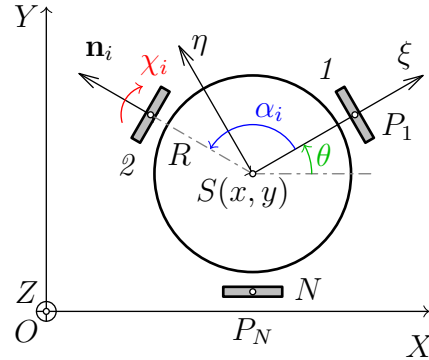


Рис. 2. Экипаж симметричной конфигурации

Положение экипажа будем задавать следующими обобщенными координатами: x, y — координаты точки S на плоскости OXY , θ

– угол между осями OX и $S\xi$ (будем называть θ углом курса), χ_i ($i = 1, \dots, N$) – углы поворота колес вокруг их осей, и φ_j – углы поворота роликов вокруг их собственных осей. Таким образом, вектор обобщенных координат имеет вид

$$\mathbf{q} = (x, y, \theta, \{\chi_i\}_{i=1}^N, \{\varphi_k\}_{k=1}^N, \{\varphi_s\}_{s=N+1}^{Nn})^T \in \mathbb{R}^{N(n+1)+3}, \quad (1.1)$$

где координаты φ сгруппированы таким образом, что сначала указаны углы поворота φ_k роликов, находящихся в данный момент в контакте с опорной плоскостью, а затем – остальных, “свободных”, роликов. Индекс s используется для сквозной нумерации свободных роликов.

Введем псевдоскорости

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \{\nu_s\}),$$

$$\mathbf{v}_S = R\nu_1 \mathbf{e}_\xi + R\nu_2 \mathbf{e}_\eta, \quad \nu_3 = \Lambda \dot{\theta}, \quad (1.2)$$

$$\nu_s = \dot{\varphi}_s, \quad s = N+1, \dots, Nn \quad (1.3)$$

Их механический смысл таков: ν_1, ν_2 – проекции скорости точки S на оси системы $S\xi$ и $S\eta$, связанные с платформой, ν_3 – проекция угловой скорости платформы на вертикальную ось SZ с точностью до безразмерного множителя Λ , ν_s – угловые скорости свободных роликов. Безразмерный множитель Λ вводится для удобства вывода уравнений и равен $\frac{I_S}{Ml^2}$, где $I_S = \text{const}$ – момент инерции всей системы относительно оси SZ , M – масса всей системы. Число независимых псевдоскоростей системы $K = N(n-1) + 3$.

В определении псевдоскоростей ν_s , равных угловым скоростям собственного вращения свободных роликов, используется индекс s , как и для углов φ_s поворота роликов вокруг их осей. Индекс s для угловой скорости ν_s собственного вращения ролика с номером j на

колесе i принимает значения $4, \dots, 3 + N(n - 1)$ и по определению задается формулой

$$s(i, j) = 3 + (n - 1)(i - 1) + j - 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 2, \dots, n \quad (1.4)$$

Поскольку $\mathbf{v}_S = \dot{x}\mathbf{e}_X + \dot{y}\mathbf{e}_Y$, из (1.2) имеем

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos \theta - R\nu_2 \sin \theta, \quad \dot{y} = R\nu_1 \sin \theta + R\nu_2 \cos \theta \quad (1.5)$$

В главах 1 и 2 будем считать, что проскальзывания между опорной плоскостью и роликами в точках контакта не происходит, т.е. скорости точек роликов C_i , находящихся в контакте (см. фиг. 1) равны нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.6)$$

Проектируя скорости точек контакта на оси системы $S\xi\eta$ и выражая через введенные псевдоскорости, получим:

$$\dot{\varphi}_k = \frac{R}{\rho_k} (\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k); \quad \rho_k = l \cos \chi_k - r \quad (1.7)$$

$$\dot{\chi}_i = \frac{R}{l} \left(\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda} \right) \quad (1.8)$$

Заметим, что знаменатель ρ_k в формуле (1.7) – расстояние от оси ролика до точки контакта, обращающееся в нуль на стыке роликов, то есть в случае, когда точка контакта C_i оказывается на оси ролика (см. левую часть фиг. 1). Данное обстоятельство может приводить к разрывам второго рода функций в правых частях уравнений движения. Эта проблема будет рассмотрена отдельно ниже.

Таким образом, введенные псевдоскорости независимы, и количество степеней свободы системы равно K . Выражение обобщенных скоростей через псевдоскорости, учитывающее связи, наложенные на систему (1.2)–(1.5) и (1.7), (1.8), можно записать в матричном виде:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}(\theta, \chi_i), \quad (1.9)$$

где матрица \mathbf{V} имеет вид:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \tilde{V} & O_1 \\ O_2 & E \end{bmatrix}; \quad \tilde{V} = \begin{bmatrix} R \cos \theta & -R \sin \theta & 0 \\ R \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} \\ \frac{R}{l} \sin \alpha_i & -\frac{R}{l} \cos \alpha_i & -\frac{R}{\Lambda l} \\ \frac{R}{\rho_k} \cos \alpha_k & \frac{R}{\rho_k} \sin \alpha_k & 0 \end{bmatrix}$$

Здесь O_1 и O_2 – нулевые $(3+2n \times N(n-1))$ - и $(N(n-1) \times 3)$ -матрицы, E – единичная матрица размера $N(n-1)$.

В литературе широко известна модель экипажа, не учитывающая инерцию роликов [1, 12–15, 18–20, 111]. Такую модель экипажа будем называть безынерционной. Описание безынерционной модели и ее уравнения движения приведены в Приложении к главе 1. Отметим здесь, что уравнение (1.8) совпадает с уравнением связи в безынерционной модели в форме, приведенной в [15]. В настоящей работе строятся модели, учитывающие инерцию роликов, и сравниваются с безынерционной моделью.

1.2 Уравнения движения

Для вывода уравнений движения системы воспользуемся лаконичным методом получения уравнений движения для систем с дифференциальными связями, предложенным Я.В. Татариновым [15, 16].

Уравнения имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\beta} + \{P_\beta, L^*\} = \sum_{\mu=1}^K \{P_\beta, \nu_\mu P_\mu\}, \quad \beta = 1, \dots, K \quad (1.10)$$

Здесь L – лагранжиан, L^* – он же с учетом связей (здесь и далее верхний индекс $*$ означает учет связей, то есть подстановку выражений обобщенных скоростей через псевдоскорости), P_β – линейные комбинации формальных канонических импульсов p_i , определяемые из соотношения

$$\sum_{\mu=1}^K \nu_\mu P_\mu \equiv \sum_{i=1}^{N(n+1)+3} \dot{q}_i p_i \quad (1.11)$$

в котором \dot{q}_i выражены через псевдоскорости ν_μ в соответствии с формулами (1.9); $\{\cdot, \cdot\}$ – скобка Пуассона по p_i, q_i , после ее вычисления выполняется подстановка

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Здесь q_i – компоненты вектора обобщенных координат \mathbf{q} .

Как отмечено ранее, расстояния от осей колес до опорной плоскости постоянны во все время движения. В силу этого факта, однородности всех тел и геометрии расположения колес относительно платформы, потенциальная энергия системы во время движения не меняется, и лагранжиан равен кинетической энергии:

$$2L = 2T = M\mathbf{v}_S^2 + I_S\dot{\theta}^2 + J \sum_i \dot{\chi}_i^2 + B \sum_{i,j} (\dot{\varphi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\varphi}_{ij}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (1.12)$$

Здесь M, I_S, J – массово-инерционные характеристики экипажа (его общая масса, момент инерции относительно оси SZ и момент инерции диска колеса относительно его оси вращения соответственно), B – момент инерции ролика относительно его оси вращения. Матрица \mathcal{M} кинетической энергии имеет следующий блочный вид:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{M}}_{11} & \widetilde{\mathcal{M}}_{12} & \widetilde{\mathcal{M}}_{13} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^T & \widetilde{\mathcal{M}}_{22} & \widetilde{\mathcal{M}}_{23} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{13}^T & \widetilde{\mathcal{M}}_{23}^T & \widetilde{\mathcal{M}}_{33} \end{bmatrix}$$

где

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{M}}_{11} &= \text{diag}(M, M, I_S), \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{22} = JE_{N \times N}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{33} = BE_{Nn \times Nn} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12} &= O_{3 \times N}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ B \sin \chi_{11} & \cdots & B \sin \chi_{Nn} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{23} = O_{N \times Nn}\end{aligned}$$

Здесь $O_{(\cdot)}$ и $E_{(\cdot)}$ — нулевые и единичные матрицы, в индексах которых указаны их размерности. В третьей строке матрицы $\widetilde{\mathcal{M}}_{13}$ сначала указаны элементы, соответствующие роликам, находящимся в контакте, а затем соответствующие “свободным” роликам; элементы упорядочены по возрастанию индексов, так что ролики одного колеса соседствуют, т.е. третья строка матрицы $\widetilde{\mathcal{M}}_{13}$ имеет вид:

$$(B \sin \chi_{11} \dots, B \sin \chi_{N1}, B \sin \chi_{12}, \dots, B \sin \chi_{1n}, B \sin \chi_{22}, \dots B \sin \chi_{Nn}).$$

Лагранжиан при учете связей определяется соотношением:

$$2L^* = \boldsymbol{\nu}^T V^T \mathcal{M} V \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu}$$

Структура симметрической матрицы \mathcal{M}^* кинетической энергии, выраженной в псевдоскоростях, следующая:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^* &= \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{M}}_{11}^* & \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^* \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^{*T} & \widetilde{\mathcal{M}}_{22}^* \end{bmatrix} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{11}^* &= (m_{ij}^*)_{3 \times 3}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{22}^* = BE_{N(n-1) \times N(n-1)} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^* &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ B\Lambda^{-1} \sin \chi_{12} & \cdots & B\Lambda^{-1} \sin \chi_{Nn} \end{bmatrix}_{3 \times N(n-1)}\end{aligned}$$

Здесь $E_{N(n-1) \times N(n-1)}$ — единичная матрица, $\chi_{kl} = \chi_k + \kappa_l$ — угол между вертикалью OZ и осью ролика, где индекс $k = 1, \dots, N$ означает номер колеса, $l = 2, \dots, n$ — номер свободного ролика на колесе ($l = 1$ — ролик, находящийся в контакте).

Элементы m_{ij}^* матрицы $\widetilde{\mathcal{M}}_{11}^*$ зависят только от координат χ_i , которые входят в отношения $\frac{B}{\rho_i^2(\chi_i)}$ и $B \frac{\sin \chi_i}{\rho_i(\chi_i)}$, имеющие разрывы второго рода при смене роликов, т.е. при переходе с одного ролика на другой (см. равенство (1.7)). Действительно, явный вид элементов матрицы $\widetilde{\mathcal{M}}_{11}^*$ таков:

$$\begin{aligned} m_{11}^* &= MR^2 + \sum_i \left(J \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \alpha_i + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \cos^2 \alpha_i \right) \quad (11 \leftrightarrow 22, \sin \alpha_i \leftrightarrow \cos \alpha_i) \\ m_{33}^* &= \frac{1}{\Lambda} \left(I_S + \sum_i J \frac{R^2}{l^2} \right), \quad m_{12}^* = \sum_i \left(-J \frac{R^2}{l^2} + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \right) \sin \alpha_i \cos \alpha_i \\ m_{13}^* &= \frac{1}{\Lambda} \sum_i B \frac{R}{\rho_i} \sin \chi_i \cos \alpha_i, \quad m_{23}^* = \frac{1}{\Lambda} \sum_i B \frac{R}{\rho_i} \sin \chi_i \sin \alpha_i \end{aligned} \quad (1.13)$$

Первое слагаемое в левой части равенства (1.10) получается дифференцированием лагранжиана:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi) \boldsymbol{\nu}) = \mathcal{M}^*(\chi) \dot{\boldsymbol{\nu}} + \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi)) \boldsymbol{\nu} = \mathcal{M}^*(\chi) \dot{\boldsymbol{\nu}} + \sum_{i=1}^N \dot{\chi}_i^* \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu} \quad (1.14)$$

где $\mathcal{M}_i^* = \frac{\partial \mathcal{M}^*}{\partial \chi_i}$.

Последнее слагаемое — $\sum_{i=1}^N \dot{\chi}_i^* \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}$ — является суммой векторов размерности K , где $K = \dim \boldsymbol{\nu}$ — число степеней свободы системы. Компоненты этих векторов с номерами $\beta = 4, \dots, K$, то есть компоненты, соответствующие свободным роликам, имеют вид $\dot{\chi}_i^* \nu_3 B \Lambda^{-1} \cos \chi_{ij}$, где индексы i, j связаны с индексом β по формуле (1.4): $\beta = s(i, j)$.

Найдем величины P_μ во втором слагаемом левой части (1.10). Подставляя в (1.11) выражения обобщенных скоростей через псевдоскорости (1.9) и приведя подобные слагаемые, получим:

$$\begin{aligned} P_1 &= R \left(p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_i \left(\frac{p_{\chi_i}}{l} \sin \alpha_i + \frac{p_{\varphi_{i1}}}{\rho_i} \cos \alpha_i \right) \right) \\ P_2 &= R \left(-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_i \left(-\frac{p_{\chi_i}}{l} \cos \alpha_i + \frac{p_{\varphi_{i1}}}{\rho_i} \sin \alpha_i \right) \right) \\ P_3 &= \frac{1}{\Lambda} \left(p_\theta - \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i} \right) \\ P_s &= p_{\varphi_s} \end{aligned} \tag{1.15}$$

Из всех обобщенных координат лагранжиан L^* зависит только от χ_i . Можно показать, что его скобки Пуассона с P_1, P_2, P_3 — квадратичные формы по псевдоскоростям, пропорциональные моменту инерции B ролика. Коэффициенты этих форм зависят от χ_i . Скобки Пуассона лагранжиана с P_s равны нулю.

$$\{P_1, L^*\} = -\frac{\partial P_1}{\partial p_{\chi_i}} \frac{\partial L^*}{\partial \chi_i} = -\frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu} \sin \alpha_i,$$

$$\{P_2, L^*\} = \frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu} \cos \alpha_i, \quad \{P_3, L^*\} = \frac{R}{2l\Lambda} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}, \quad \{P_s, L^*\} = 0, s > 3$$

Для завершения вывода уравнений движения рассмотрим правую часть равенства (1.10). Она отлична от нуля лишь при $\beta = 1, 2, 3$. Сперва выразим импульсы \mathbf{p} через псевдоскорости $\boldsymbol{\nu}$. Обозначим

$$\xi_\pm(\alpha) = \nu_1 \cos \alpha \pm \nu_2 \sin \alpha, \quad \eta_\pm(\alpha) = \nu_1 \sin \alpha \pm \nu_2 \cos \alpha.$$

Тогда для импульсов $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ получим

$$\begin{aligned}
p_x &= MR\xi_-(\theta), \quad p_y = MR\eta_+(\theta), \\
p_\theta &= BR \sum_i \frac{\sin \chi_i}{\rho_i} \xi_+(\alpha_i) + \frac{I_S}{\Lambda} \nu_3 + B \sum_s \sin \chi_s \nu_s \\
p_{\chi_i} &= J \frac{R}{l} (\eta_-(\alpha_i) - \frac{1}{\Lambda} \nu_3), \quad p_{\varphi_{k1}} = \frac{BR}{\rho_k} \xi_+(\alpha_k) + \frac{B}{\Lambda} \sin \chi_k, \\
p_{\varphi_s} &= \frac{B}{\Lambda} \nu_3 \sin \chi_s + B \nu_s
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Для упрощения записи правой части системы (1.10) введем обозначение для операции σ , которую будем называть дискретной сверткой произвольной функции $f(\alpha, \chi)$:

$$\sigma[f(\alpha, \chi)] = \sum_{k=1}^N f(\alpha_k, \chi_k) \frac{\sin \chi_k}{\rho_k^3(\chi_k)}$$

Тогда скобки Пуассона в правой части системы (1.10) имеют вид

(звездочкой обозначена подстановка импульсов p_i из 1.16)

$$\begin{aligned}
(\{P_1, P_2\})^* &= \left(-\sum_{k=1}^N R^2 \tau_k p_{\varphi_k} \right)^* \\
&= -BR^2(R\nu_1\sigma[\cos \alpha] + R\nu_2\sigma[\sin \alpha] + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho \sin \chi]) = \\
&= -BR^2 \mathbf{p}_{12} \boldsymbol{\nu} \\
\mathbf{p}_{12} &= (\sigma[\cos \alpha], R\sigma[\sin \alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho \sin \chi], 0, \dots, 0) \\
(\{P_1, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left(-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta - \sum_{k=1}^N R \cos \alpha_k \tau_k p_{\varphi_k} \right)^* \\
&= MR^2\Lambda^{-1}\nu_2 - \\
&\quad - BR^2\Lambda^{-1}(R\nu_1\sigma[\cos^2 \alpha] + R\nu_2\sigma[\sin \alpha \cos \alpha] + \\
&\quad + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi]) = \\
&= MR^2\Lambda^{-1}\nu_2 - BR^2 \mathbf{p}_{13} \boldsymbol{\nu} \\
\mathbf{p}_{13} &= \Lambda^{-1}(R\sigma[\cos^2 \alpha], R\sigma[\sin \alpha \cos \alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0) \\
(\{P_2, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left(-p_x \cos \theta - p_y \sin \theta - \sum_{k=1}^N R \sin \alpha_k \tau_k p_{\varphi_k} \right)^* = \\
&= -MR^2\Lambda^{-1}\nu_1 - BR^2\Lambda^{-1}(R\nu_1\sigma[\sin \alpha \cos \alpha] + R\nu_2\sigma[\sin^2 \alpha] \\
&\quad + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho \sin \alpha \sin \chi]) = \\
&= -MR^2\Lambda^{-1}\nu_1 - BR^2 \mathbf{p}_{23} \boldsymbol{\nu} \\
\mathbf{p}_{23} &= \Lambda^{-1}(R\sigma[\sin \alpha \cos \alpha], R\sigma[\sin^2 \alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho \sin \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0)
\end{aligned}$$

Окончательно, объединяя выражения для всех слагаемых (1.10) и разрешая полученные равенства относительно $\mathcal{M}^* \boldsymbol{\nu}$, получаем, что уравнения движения имеют следующую структуру:

$$\mathcal{M}^* \dot{\boldsymbol{\nu}} = MR^2 \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \nu_2 \nu_3 \\ -\nu_1 \nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{R}{2l} \begin{bmatrix} -\mathcal{M}_i^* \sin \alpha_i \\ \mathcal{M}_i^* \cos \alpha_i \\ \mathcal{M}_i^* \Lambda^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - BR^2 \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\nu} - B \begin{bmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_1^* \cos \chi_{12} \\ \vdots \\ \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_N^* \cos \chi_{Nn} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Поясним символ \star в правой части уравнений движения. В равенствах (1.14) последнее слагаемое – сумма векторов $\dot{\chi}_i^* \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}$, $i = 1 \dots N$. Символ \star заменяет суммы компонент $\beta = 1, 2, 3$ этих векторов. Матрицы \mathcal{P}_β размера $K \times K$ составлены из строк $\mathbf{p}_{\alpha\beta}$, определенных выше и зависящих от геометрии экипажа и углов поворота колес χ_i :

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{p}_{13} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{13} \\ -\mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Поскольку матрицы \mathcal{M}_i^* и \mathcal{P}_α зависят от углов поворота колес χ_i , для замыкания системы к этим уравнениям надо добавить уравнения (1.8).

Система уравнений движения имеет следующие свойства.

1. Система допускает интеграл энергии $\frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu} = h = \text{const}$: так как система стеснена автономными идеальными связями, а силы консервативны, то полная энергия (в рассматриваемом здесь случае она равна кинетической энергии) сохраняется.

2. Если платформа экипажа неподвижна, т.е. $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$, то свободные ролики сохраняют свою начальную угловую скорость: $\nu_s = \text{const}$, чего и следовало ожидать.

3. При $B = 0$ (ролики не имеют инерции) все слагаемые в правой части равенства (1.17), кроме первого, обращаются в нуль, как и все члены, соответствующие свободным роликам, в его левой части (см. Приложение, равенства (1.13)). В этом случае существенными остаются лишь первые три уравнения системы (1.10) относительно ν_1, ν_2, ν_3 . Важно отметить, что оставшиеся нетривиальные уравнения в точности совпадают с уравнениями движения безынерционной модели экипажа [14].

4. Существовавший в безынерционной модели линейный первый интеграл [14] разрушается для модели с массивными роликами. При $B = 0$ он имеет вид $m_{33}^* \nu_3 = \text{const}$ (причем $m_{33}^* = \text{const}$) и получается непосредственно из третьего уравнения системы (1.10). Из вида интеграла следует, что $\nu_3 = \text{const}$. При $B \neq 0$ скорость изменения ν_3 пропорциональна моменту инерции ролика B .

5. Поскольку скобки Пуассона в уравнениях движения для свободных роликов равны нулю, система допускает первые интегралы:

$$\nu_s + \frac{\nu_3}{\Lambda} \sin \chi_{ij} = \text{const} \quad (1.18)$$

Механический смысл этого интеграла заключается в сохранении проекции угловой скорости ролика на его ось вращения. Действительно, из определений псевдоскоростей (1.2, 1.3) следует, что $\nu_3 = \Lambda \dot{\theta}$, $\nu_s = \dot{\varphi}_{ij}$, и абсолютная угловая скорость ролика равна $\dot{\theta} \mathbf{e}_Z + \dot{\varphi}_{ij} \mathbf{e}_{ij}$, где $\mathbf{e}_{ij} = \cos \chi_{ij} \mathbf{n}_i^\perp + \sin \chi_{ij} \mathbf{n}_i^z$ — единичный направляющий вектор оси ролика, и при этом $\mathbf{e}_{ij} \cdot \mathbf{e}_Z = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \chi_{ij} \right) = \sin \chi_{ij}$. Получаем, что

в левой части равенств (1.18) стоит проекция абсолютной угловой скорости ролика на его ось \mathbf{e}_{ij} . Таким образом, псевдоскорость ν_3 , пропорциональная проекции угловой скорости платформы на вертикаль OZ , связана со скоростями собственного вращения свободных роликов вокруг их осей. В частности, вращение экипажа вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр (т.е. движение с начальными условиями $\nu_1(0) = 0, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) \neq 0$), неравномерно, в отличие от выводов, основанных на безынерционной модели [14].

6. При одновременном умножении начальных значений всех псевдоскоростей на отличное от нуля число λ получаются такие же уравнения движения, как при умножении времени t на λ :

$$\boldsymbol{\nu} \mapsto \lambda \boldsymbol{\nu}, \quad \lambda \neq 0 \quad \sim \quad t \mapsto \lambda t.$$

1.3 Приложение. Безынерционная модель

На протяжении всей работы делаются ссылки на модель экипажа с омни-колесами, широко представленную в литературе (например, в [1, 14, 19]). Для полноты изложения, опишем здесь эту модель и приведем ее уравнения движения.

В данной модели омниколеса рассматриваются в предположении, что массой и инерцией роликов можно пренебречь. Поэтому будем называть эту модель безынерционной. На систему налагаются неголономные связи, ограничивающие направление скорости скольжения в точках контакта колес с опорной поверхностью, на которой стоит экипаж. Сила трения в контакте не вводится, т.е. скольжение дисков колес считается идеальным.

Приведем в качестве примера уравнения движения, полученные в работе [19]. Авторы принимают простейшую модель омниколеса как

плоского диска, для которого скорость точки контакта с опорной поверхностью направлена вдоль прямой, составляющей некоторый угол ψ с плоскостью колеса (см. рис. 3). Связь, наложенная на колесо в таком случае имеет вид

$$\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{e} = 0,$$

где \mathbf{v}_C – скорость точки контакта C , \mathbf{e} – единичный вектор, направленный вдоль “оси ролика”. Таким образом, эти связи моделируют свободное вращение ролика, находящегося в опоре омни-колеса, хотя сами тела роликов исключены из рассмотрения.

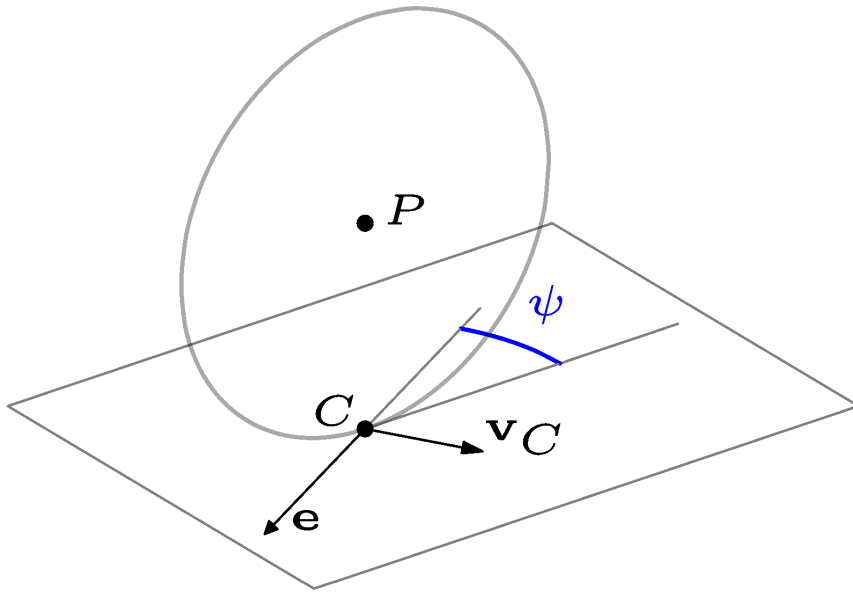


Рис. 3. Безынерционная модель колеса

Авторы [19] получают уравнения движения для экипажа с произвольным количеством и расположением колес, закрепленных так, что их оси неподвижны относительно платформы, а оси роликов повернуты на произвольные углы относительно плоскостей соответствующих колес (см. фиг. 4).

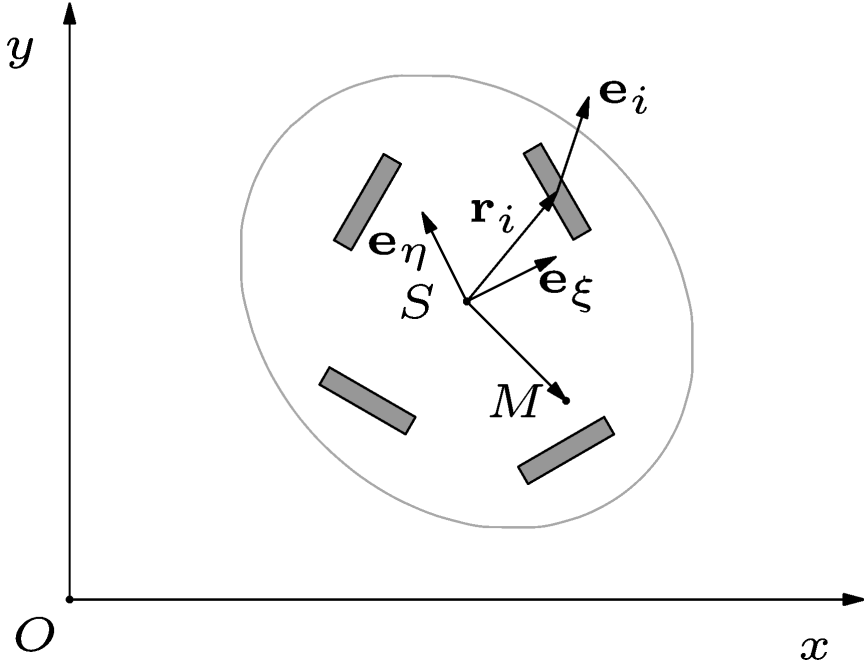


Рис. 4. Безынерционная модель экипажа

Вводится подвижная система отсчета $S\xi\eta$, связанная с платформой экипажа. Центр масс M экипажа может не совпадать с началом S подвижной системы отсчета. В качестве уравнений движения используются уравнения Феррерса. Все векторы в записи уравнений движения двумерны. Уравнения движения по инерции имеют вид:

$$(\Gamma + mE)\dot{\mathbf{v}}_S + m\dot{\omega}(J\mathbf{r}_S + \mathbf{R}) + m\omega J(\mathbf{v}_S + \omega J\mathbf{r}_S) = 0, \quad (1.19)$$

$$I_S\dot{\omega} + m(J\mathbf{r}_S + \mathbf{R}) \cdot \dot{\mathbf{v}}_S + m\omega \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{r}_S = 0, \quad (1.20)$$

$$\dot{x} = v_1 \cos \theta - v_2 \sin \theta, \quad \dot{y} = v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta, \quad \dot{\theta} = \omega, \quad (1.21)$$

$$\Gamma = (\Gamma_{kl}), \quad \Gamma_{kl} = \sum_i \frac{I_i}{l_i^2 \cos^2 \psi_i} \mathbf{e}_i^k \mathbf{e}_i^l, \quad k, l \in \{1, 2\} \quad (1.22)$$

$$\mathbf{R} = m^{-1} \sum_i \frac{I_i}{l_i^2 \cos^2 \psi_i} (J\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i, \quad (1.23)$$

где:

x, y, θ – координаты точки S и угол поворота платформы экипажа

вокруг вертикальной оси,

\mathbf{v}_S , ω – вектор скорости точки S и проекция угловой скорости платформы на вертикаль,

\mathbf{r}_S – координаты центра масс экипажа в подвижной системе отсчета,

\mathbf{r}_i – радиусы-векторы точек закрепления осей колес в подвижной системе отсчета,

$\mathbf{e}_i^{1,2}$ – проекции векторов \mathbf{e}_i на оси ξ, η подвижной системы отсчета,

I_S – суммарный момент инерции системы относительно вертикальной оси, проходящей через начало O подвижной системы отсчета,

I_i – моменты инерции колес относительно их диаметров,

l_i – радиусы колес,

E – единичная матрица, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

В конфигурации экипажа, рассматриваемой в настоящей работе, центр масс совпадает с началом подвижной системы отсчета $\mathbf{r}_S = 0$. Кроме того, в силу расположения центров колес в вершинах правильного многоугольника, лежащего в плоскости платформы, а также, поскольку все колеса одинаковы, вектор \mathbf{R} также равен нулю. В этих условиях второе уравнение системы 1.19 принимает вид $I_S \dot{\omega} = 0$, откуда следует первый интеграл $I_S \omega = \text{const}$. Этот интеграл разрушается при учете инерции роликов, как показано в разделе 1.2.

Количество степеней свободы безынерционной модели экипажа с N колесами равно трем, что меньше количества степеней свободы моделей, учитывающих инерцию всех n роликов каждого колеса – $3 + N(n - 1)$ в постановке без проскальзывания либо $3 + N(n + 1)$ в постановке с голономными связями. В силу более простой структуры, безынерционная модель может быть использована для верификации более сложных моделей экипажа с омни-колесами.

Глава 2

Смена ролика в контакте с опорной плоскостью

В настоящей главе рассмотрена задача о смене ролика в контакте. При повороте колеса вокруг своей оси на достаточно большой угол находящийся в контакте с опорной плоскостью ролик перестает с ней контактировать. В контакт с плоскостью приходит новый ролик, скорость которого, вообще говоря, не согласована со связями. При этом возникает переходный процесс, во время которого возможно скольжение ролика относительно опорной плоскости. В данной главе предполагается, что скольжение ролика прекращается за бесконечно малый промежуток времени. Составлены линейные алгебраические уравнения, определяющие обобщенные скорости после смены ролика в контакте в соответствии с теорией удара. Таким образом, для получения движений экипажа требуется найти решения

Данная глава изложена на основании статьи [101], опубликованной в соавторстве с научным руководителем, предложившим постановку задачи и используемые методы. Все результаты главы получены соискателем лично.

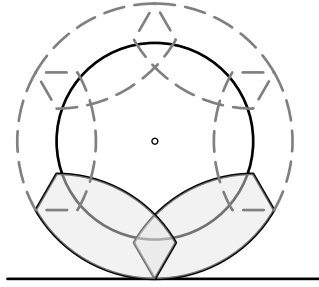


Рис. 5. Омни-колесо в рассматриваемой конфигурации. Концы роликов усечены. Имеется пренебрежимое пересечение тел роликов.

задачи Коши уравнений, полученных в первой главе, на интервалах, где в контакте находится один и тот же ролик, и решения линейных алгебраических уравнений при сменах роликов для получения начальных условий для следующих гладких участков. Получены и проанализированы численные решения для симметричной конфигурации экипажа.

В тех интервалах времени, когда ролик в контакте с опорной плоскостью не меняется, динамика системы описывается уравнениями движения системы (1.17) главы 1. Смена контакта на i -том колесе происходит при значении угла $\chi_i = \frac{2\pi}{n}$. При этом, во-первых, правая часть уравнений движения терпит разрыв второго рода из-за равенства нулю величин $\rho_i = l \cos \chi_i - r$ в знаменателе. Во-вторых, снимается условие отсутствия проскальзывания для ролика, выходящего из контакта, и условие отсутствия проскальзывания мгновенно налагается на вновь входящий в контакт ролик.

На практике первое обстоятельство никогда не реализуется, поскольку для закрепления роликов на колесах в реальных системах их концы усекаются. В некоторых вариантах омни-колес ролики располагают рядами в двух и более плоскостях, чтобы в каждый момент гладкий участок поверхности хотя бы одного ролика был в контакте

с плоскостью. В данной главе рассматриваются усеченные ролики (см. рис. 5), но их оси расположены в плоскости колеса. Пересечением тел роликов в пространстве, возникающим в такой конфигурации, пренебрегается. Ось ролика находится на расстоянии $r = l \cos \frac{\pi}{n-1}$ от центра колеса. Ролик представляет собой тело вращения относительно этой оси дуги окружности радиуса l с углом раствора $\frac{2\pi}{n}$.

В данной главе проведено детальное рассмотрение момента времени смены ролика в контакте с учетом ударного характера взаимодействия с опорной плоскостью. Проведено численное моделирование движения экипажа по инерции. Получены численные решения, состоящие из участков, определяемых уравнениями движения (1.17), сшитых с помощью решения уравнений теории удара.

2.1 Модель удара при смене ролика в контакте

В реальной системе при смене контакта имеет место скольжение роликов относительно плоскости, и при этом полная энергия системы рассеивается. В данной главе будем считать, что трение при проскальзывании достаточно велико, и прекращение проскальзывания вошедшего в контакт ролика происходит достаточно быстро. Это взаимодействие будет рассматриваться как абсолютно неупругий удар, происходящий при мгновенном снятии и наложении связи. Освободившийся ролик на том же колесе начинает свободно вращаться вокруг своей оси. Будем предполагать следующее:

- ударное взаимодействие происходит за бесконечно малый ин-

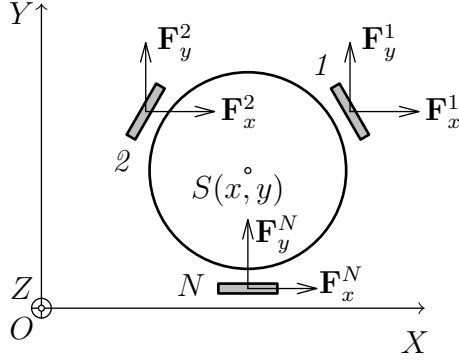


Рис. 6. Импульсы ударных реакций, приложенные к роликам, входящим в контакт с опорной плоскостью.

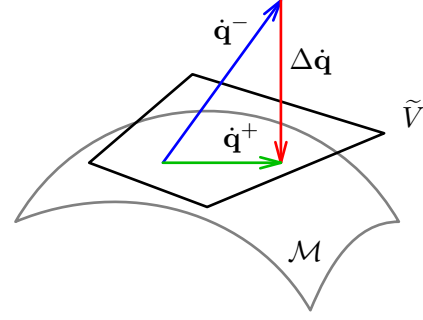


Рис. 7. Вектор $\dot{\mathbf{q}}^+$ обобщенных скоростей после удара как ортогональная проекция в кинетическая метрике вектора $\dot{\mathbf{q}}^-$ обобщенных скоростей до удара на пространство \tilde{V} виртуальных перемещений, допустимых мгновенно налагаемыми связями

тервал времени $\Delta t \ll 1$, так что изменения обобщенных координат пренебрежимо малы $|\Delta \mathbf{q}| \sim |\dot{\mathbf{q}} \Delta t| \ll 1$, а изменения обобщенных скоростей конечны $|\Delta \dot{\mathbf{q}}| < \infty$;

- взаимодействие экипажа с опорной плоскостью во время удара сводится к действию на экипаж в точках контакта нормальных и касательных реакций $\mathbf{R}_i = \mathbf{N}_i + \mathbf{F}_i$, где индекс i равен номеру колеса;
- сразу после удара уравнения связей, запрещающих проскальзывание, выполнены: $\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}^+$, т.е. за время Δt проскальзывание вошедшего в контакт ролика заканчивается.

Исходя из этих предположений, в следующих разделах получим

системы алгебраических уравнений, связывающих при $\Delta t \rightarrow 0$ значения обобщенных скоростей непосредственно перед ударом $\dot{\mathbf{q}}^-$ и значения псевдоскоростей сразу после удара ν^+ .

Таким образом, чтобы найти движение экипажа, необходимо найти решения задачи Коши системы обыкновенных дифференциальных уравнений в интервалах между моментами смены роликов в контактах и решения системы алгебраических уравнений в эти моменты для получения начальных условий для следующего безударного интервала.

2.1.1 Основное уравнение теории удара

Составим алгебраические уравнения, связывающие значения псевдоскоростей после удара и величины ударных импульсов. В течение бесконечно малого времени Δt наложены только геометрические связи, так что скорости $\dot{\mathbf{q}}$ независимы. Запишем основное уравнение удара в обобщенных координатах [61]:

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{Q}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{M} – матрица кинетической энергии без учета связей (так что матрица кинетической энергии с учетом связей $\mathcal{M}^* = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}$ (см. также раздел 1.2 главы 1)), а \mathbf{Q} – вектор импульсов ударных реакций в обобщенных координатах:

$$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_\theta, Q_{\chi_i}|_{i=1}^N, Q_{\varphi_i}|_{i=1}^N, Q_s)^T$$

Исходя из геометрии системы, найдем связь между компонентами этого вектора и касательными составляющими ударных реакций. Компоненты касательных реакций вдоль неподвижных осей OX , OY показаны на рис. 6. Компоненты ударных реакций вдоль оси

OZ равны нулю, поскольку в рассматриваемой конфигурации колеса внешняя граница проекции тел всех роликов на плоскость колеса есть окружность, и скорость точки ролика, первой оказывающейся в контакте с опорной плоскостью, параллельна опорной плоскости. Верхний индекс в F_i^{\cdot} означает проекцию на соответствующую ось неподвижной системы отсчета. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \sum_{i=1}^N F_i^x \\
Q_2 &= \sum_{i=1}^N F_i^y \\
Q_\theta &= \sum_{i=1}^N Q_\theta^i = \sum_{i=1}^N R(-F_i^x \sin(\theta + \alpha_i) + F_i^y \cos(\theta + \alpha_i)) \\
Q_{\chi_i} &= \frac{l}{R} Q_\theta^i \\
Q_{\varphi_i} &= -\rho_i (F_i^x \cos(\theta + \alpha_i) + F_i^y \sin(\theta + \alpha_i)) \\
Q_s &= 0
\end{aligned}$$

В матричном виде:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{KF}$$

где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ -R \sin(\theta + \alpha_1) & R \cos(\theta + \alpha_1) & \dots & -R \sin(\theta + \alpha_N) & R \cos(\theta + \alpha_N) \\ -l \sin(\theta + \alpha_1) & l \cos(\theta + \alpha_1) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -l \sin(\theta + \alpha_N) & l \cos(\theta + \alpha_N) \\ -\rho_1 \cos(\theta + \alpha_1) & -\rho_1 \sin(\theta + \alpha_1) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\rho_N \cos(\theta + \alpha_N) & -\rho_N \sin(\theta + \alpha_N) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Размер матрицы \mathbf{K} равен $(3 + N(n + 1)) \times 2N$, её ранг максимален и равен $(3 + N(n + 1))$, что можно показать непосредственным вычислением.

В момент удара происходит мгновенное снятие связей, запрещающих проскальзывание роликов, выходящих из контакта и мгновенное наложение аналогичных связей на вновь входящие в контакт ролики:

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+$$

Отсюда уравнение (2.1) принимает вид:

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{K}\mathbf{F} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-. \quad (2.2)$$

В следующем пункте будет доказано, что полученная линейная система алгебраических уравнений относительно $\boldsymbol{\nu}^+$ и \mathbf{F} допускает единственное решение.

2.1.2 Разрешимость основного уравнения теории удара при наложении дифференциальных связей

Покажем существование и единственность решения уравнения (2.2) для более общего случая. Рассмотрим натуральную систему с обобщенными координатами \mathbf{q} и кинетической энергией $T = \frac{1}{2}(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$, на которую в момент времени t^* мгновенно налагаются дифференциальные связи вида $\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} = 0$. При этом верно основное уравнение удара (2.1). Будем считать также, что выполнено условие идеальности связей:

$$\mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}^+ = 0, \quad (2.3)$$

где $\delta \mathbf{q}^+$ – виртуальные перемещения системы после наложения связей.

Обобщенные скорости системы после наложения связей $\dot{\mathbf{q}}^+$ лежат в линейном подпространстве $\tilde{V} = \ker \mathbf{A}$ пространства виртуальных перемещений $T_{\mathbf{q}}\mathcal{M}$. В этом подпространстве можно выбрать базис, и таким образом ввести псевдоскорости на интервале после наложения связей: $\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+$, где столбцы матрицы \mathbf{V} есть векторы базиса в \tilde{V} . При этом для матрицы оператора \mathbf{A} и матрицы \mathbf{V} будет выполнено:

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = 0. \quad (2.4)$$

Условие идеальности связей (2.3) означает, в частности, что вектор импульса ударных реакций \mathbf{Q} лежит в подпространстве $T_{\mathbf{q}}\mathcal{M}$, дополнительном к $\tilde{V} = \ker \mathbf{A}$, и таким образом, по лемме о множителях Лагранжа [58] представляется в базисе, составленном из строк матрицы \mathbf{A} : $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}$, где $\boldsymbol{\lambda}$ – множители Лагранжа.

Уравнение удара (2.1) тогда можно представить в виде:

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-. \quad (2.5)$$

Равенство (2.5) есть система алгебраических уравнений относительно вектора неизвестных $(\boldsymbol{\nu}^+, \boldsymbol{\lambda})^T$. Матрица $(\mathbf{M}\mathbf{V}; -\mathbf{A}^T)$ этой системы – невырожденная квадратная размера $\dim \mathbf{q} \times \dim \mathbf{q}$, поскольку столбцы \mathbf{V} и \mathbf{A}^T образуют базисы в дополнительных подпространствах $T_{\mathbf{q}}\mathcal{M} = \mathbb{R}^{\dim \mathbf{q}}$. Доказательство невырожденности этой матрицы носит технический характер и проведено в Приложении к настоящему разделу ниже. Таким образом, задача теории удара в рассматриваемом случае всегда имеет решение, решение единственно и доставляет одновременно значения обобщенных скоростей после удара $\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+$ и импульсов ударных реакций $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}$.

Отметим также, в силу основного уравнения удара (2.1) и условия идеальности (2.3), мгновенное наложение связей можно рассматривать как абсолютно неупругий удар, при котором теряется компонента $\Delta\dot{\mathbf{q}}$ вектора обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}^-$, ортогональная подпространству \tilde{V} в кинетической метрике:

$$\Delta\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \delta\mathbf{q} = 0.$$

Тогда вектор обобщенных скоростей после удара $\tilde{V} \ni \dot{\mathbf{q}}^+ = \dot{\mathbf{q}}^- - \Delta\dot{\mathbf{q}}$ вычисляется непосредственно как проекция вектора $\dot{\mathbf{q}}^-$ на подпространство \tilde{V} , минуя получение импульсов ударных реакций \mathbf{Q} . Явный вид матрицы \mathbf{A} также не требуется, достаточно ввести псевдоскорости: $\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+$. Выражение для $\boldsymbol{\nu}^+$ тогда может быть получено следующим образом:

$$0 = \mathbf{V}^T \mathbf{Q} = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \Delta\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}^T \mathbf{M} (\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}^-,$$

откуда:

$$\boldsymbol{\nu}^+ = (\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}^-.$$

Эту же формулу можно получить и из уравнения (2.5), домножая его слева на \mathbf{V}^T и пользуясь равенством (2.4). Симметрично, при умножении (2.5) слева на $\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}$, имеем выражение для множителей Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\boldsymbol{\lambda} = -(\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}^-,$$

не включающее явно матрицу связей \mathbf{V} .

Вернемся к рассмотрению экипажа с омни-колесами. Покажем, как связаны матрица \mathbf{K} и вектор импульсов ударных реакций \mathbf{F} в координатах OXY с изложенными общими утверждениями. Рассмотрим вектор $\mathbf{r} = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)^T$, составленный из координат точек колес, находящихся в контакте с опорной плоскостью C_i в неподвижной системе отсчета $OXYZ$. Матрица \mathbf{A} связей (1.6) может быть получена, например, как матрица Якоби зависимости вектора \mathbf{r} от обобщенных координат \mathbf{q} : $\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \left. \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{x,y}$. Непосредственный подсчет показывает, что столбцы матрицы Якоби, соответствующие оси OZ , нулевые, и потому их следует исключить. При этом матрица \mathbf{A}^T в точности совпадает с матрицей \mathbf{K} из раздела 2.1.1, и таким образом, вектор множителей Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}$ совпадает с вектором реакций \mathbf{F} .

Приложение. Покажем невырожденность матрицы $(\mathbf{M}\mathbf{V}; -\mathbf{A}^T)$ основного уравнения удара (2.5). С одной стороны, каждая из систем столбцов $\{\mathbf{V}_{\cdot i}\}$ и $\{\mathbf{A}_{\cdot j}^T\}$ линейно-независима, а с другой, эти две системы взаимно ортогональны (2.4). Поскольку матрица \mathbf{M} положительно определена, ее действие на \mathbf{V} не нарушает линейной независимости системы столбцов в целом. Последнее можно показать от противного. Предположим существование таких чисел x_i и y_j , не равных нулю одновременно, что $\sum_i x_i \mathbf{M}\mathbf{V}_{\cdot i} + \sum_j y_j \mathbf{A}_{\cdot j}^T = 0$. Домножим это равенство скалярно на каждый из столбцов $\{\mathbf{V}_{\cdot \alpha}\}$ и рассмотрим

сумму полученных выражений:

$$\sum_{\alpha,i} x_i \mathbf{V}_{\cdot\alpha}^T \mathbf{M} \mathbf{V}_{\cdot i} + \sum_{\alpha,j} y_j \mathbf{V}_{\cdot\alpha}^T \mathbf{M} \mathbf{A}_{\cdot j}^T = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}_{\mathbf{x}} + \mathbf{V}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y}.$$

Последнее слагаемое здесь равно нулю в силу (2.4), а первое отлично от нуля, поскольку матрица $\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}$ является матрицей Грама линейно-независимой системы столбцов $\{\mathbf{V}_{\cdot i}\}$ в метрике \mathbf{M} , а значит, невырождена. Таким образом, все выражение не может быть равным нулю. Полученное противоречие завершает доказательство.

2.1.3 Изменение кинетической энергии при ударе

Выясним, как меняется кинетическая энергия при смене ролика в контакте:

$$\begin{aligned} 2\Delta \mathbf{T} &= 2(\mathbf{T}^+ - \mathbf{T}^-) = (\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^+, \dot{\mathbf{q}}^+) - (\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-, \dot{\mathbf{q}}^-) = \\ &= (\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \Delta\dot{\mathbf{q}}) + 2(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-, \Delta\dot{\mathbf{q}}) = -(\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \Delta\dot{\mathbf{q}}) + 2(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^+, \Delta\dot{\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

Последнее слагаемое равно нулю в силу идеальности связей (2.3) и основного уравнения удара (2.1):

$$(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^+, \Delta\dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}^+) = (\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{q}}^+) = 0.$$

Таким образом, потеря кинетической энергии системы равна энергии потерянных скоростей $\Delta\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-$:

$$\Delta \mathbf{T} = -\frac{1}{2} (\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \Delta\dot{\mathbf{q}}) \leq 0,$$

что соответствует теореме Карно [61].

2.2 Численные эксперименты

Проведены численные эксперименты, моделирующие движение экипажа по инерции для трех вариантов начальных условий (см. рис. 8).

1. Платформа экипажа имеет ненулевую угловую скорость относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс экипажа; центр масс платформы покоится ($\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$) (рис. 8а, 9).

2. Центр масс платформы имеет ненулевую скорость в направлении от центра экипажа к центру первого колеса, угловая скорость платформы равна нулю ($\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = \nu_3(0) = 0$) (рис. 8б, 10).

3. Платформа экипажа имеет ненулевую угловую скорость относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс экипажа, и центр масс платформы имеет ненулевую скорость в направлении от центра экипажа к центру первого колеса ($\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$) (рис. 8с, 11).

Свободные ролики в начальный момент покоятся относительно дисков колес, $\nu_s(0) = 0$. Угловые скорости $\dot{\chi}_i$ собственного вращения дисков колес относительно платформы экипажа и угловые скорости $\dot{\varphi}_i$ собственного вращения роликов, находящихся в контакте с опорной плоскостью в начальный момент времени задаются согласованными со связями (1.7), (1.8). Такие же варианты начальных условий рассмотрены в [100], где используется упрощенная модель изменения обобщенных скоростей при смене контакта.

Расчеты выполнены для симметричного трехколесного экипажа ($\alpha_i = \frac{2\pi}{N}(i-1), N=3$) с $n=5$ роликами на колесе. Все величины, участвующие в уравнениях, безразмерны. В безразмерных единицах

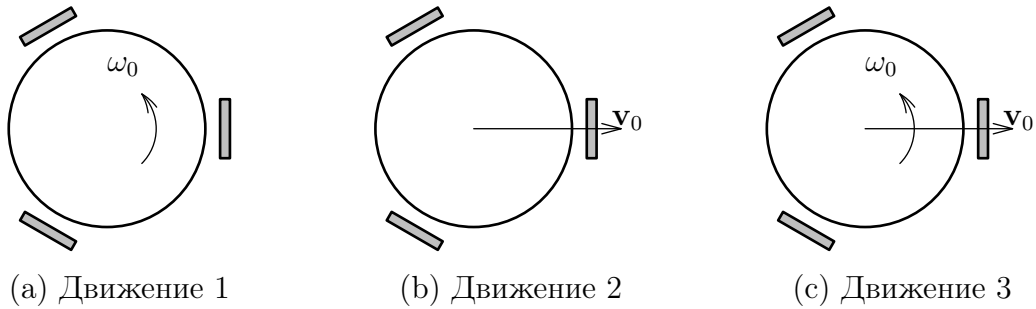


Рис. 8. Рассмотренные варианты начальных условий

радиусы платформы и колеса $R = 0.15$ и $r = 0.05$, массы платформы, колеса и ролика 1, 0.15 и 0.05, и момент инерции B ролика относительно его оси вращения положен равным $B \approx 1.6 \cdot 10^{-5}$. Таково значение осевого момента инерции однородного цилиндра радиуса $\frac{l-r}{2}$, где $r = l \cos \frac{\pi}{n}$, и массы, равной массе ролика.

Во всех трех случаях наблюдается убывание кинетической энергии скачками в моменты смены контакта. В промежутки времени между сменами энергия остается постоянной, что свидетельствует о точности вычислений.

В вариантах 1 и 2 заметны переходные режимы вращения роликов в начале движения, когда колесо совершает первый оборот, и каждый ролик проходит полный круг, выходя из контакта и возвращаясь в него снова.

Расчеты показали, что в случае 1 центр масс экипажа покоится, платформа экипажа вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. При этом угловая скорость платформы ν_z в среднем медленно убывает (немонотонно), уменьшается на 5% за безразмерное время 10^3 от начала движения. На графике на рис. 9с представлен интервал $t < 25$. Кинетическая энергия системы также медленно убывает, см. рис. 9b. На более длительном интервале $0 < t < 1000$ заметно, что характер убывания угловой скорости плат-

формы экипажа ν_3 близок к линейному, см. рис. 9a. Кинетическая энергия T убывает нелинейно, но при полученных значениях псевдоскорости ν_3 нелинейность почти не различима в масштабе рисунка. На рис. 9d приведены скорости собственного вращения роликов на первом колесе $\dot{\varphi}_{1j}$. Находящийся в контакте ролик неподвижен относительно колеса (в силу связи со скоростью центра масс, см. (1.7)) при $\nu_1 = \nu_2 = 0$, чему соответствуют участки графиков, лежащие на оси абсцисс. Когда контакт этого ролика с опорной плоскостью прекращается, он начинает вращаться за счёт вращения экипажа в целом вокруг вертикальной оси (см. первый интеграл (1.18), существующий на гладких участках). После полного оборота колеса ролик приобретает некоторую скорость вращения, которую мгновенно теряет при следующем входе в контакт. В результате вся система теряет часть энергии, испытывая удар связями, запрещающими проскальзывание. Скорость ν_3 вращения экипажа вокруг вертикальной оси при этом изменяется скачком (см. например $t = 1, 3, 5, 7.5$ на графиках).

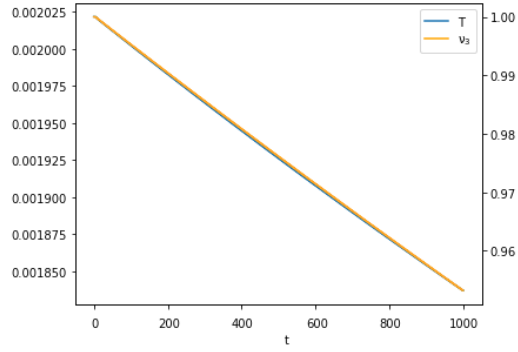
При движении 2 угловая скорость ν_3 тождественно равна нулю, центр масс совершает прямолинейное движение в направлении оси OX неподвижной системы отсчета. Зависимости скорости центра масс экипажа $v = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ и кинетической энергии T от времени показаны на рис. 10a и 10b. Обе величины убывают (энергия – монотонно, скачками, с каждой сменой контакта; скорость центра масс – в среднем). Переднее колесо не вращается вокруг своей оси и движется с опорой на один и тот же ролик. Скорость вращения этого ролика связана со скоростью центра масс согласно связи (1.7), см. рис. 10c. Остальные ролики переднего колеса покоятся относительно экипажа. На задних колесах все ролики раскручиваются, скорости вращения показаны на рис. 10d. После того как все ролики побывают

в контакте, их движение становится близким к периодическому.

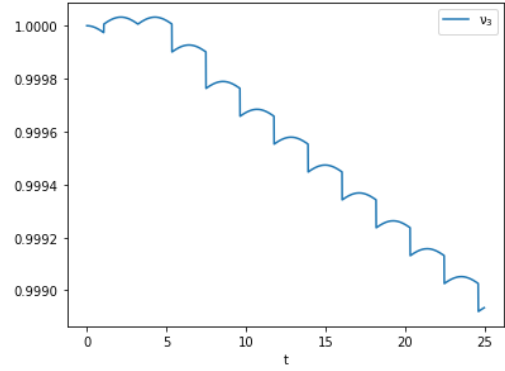
При движении 3 центр S платформы описывает спираль на плоскости OXY (рис. 11d) Платформа экипажа во все время движения вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс. Кинетическая энергия (рис. 11b) убывает при каждой смене контакта. Убывает и скорость v центра масс экипажа. Угловая скорость платформы экипажа ν_3 растёт и достигает максимума (рис. 11a) в момент $t_1^* \approx 150$. Комбинацию последних двух явлений можно интерпретировать как переход кинетической энергии поступательного движения центра масс в кинетическую энергию платформы в осях Кёнига. После $t = t_1^*$ угловая скорость ν_3 почти монотонно убывает (немонотонность связана с наличием первых интегралов (1.18)), скорость v_S центра масс S экипажа становится исчезающе малой к моменту $t_2^* \approx 300$. Фрагмент графика зависимости $v(t)$ после t_2^* показан на рис. 11c. После почти полной остановки центра масс при $t > t_2^*$ платформа экипажа вращается вокруг вертикальной оси SZ , постепенно замедляясь. Угловые скорости роликов представляют собой функции времени, близкие к периодическим (характерный участок представлен на правой части рис. 11e).

В этой главе завершено построение модели экипажа с омни-колесами с массивными роликами, движущегося по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. С помощью теории удара расчет изменения обобщенных скоростей при смене ролика в контакте сведен к решению системы линейных алгебраических уравнений, имеющей единственное решение в т.ч. при кратном ударе. Проведены численные эксперименты для трех видов начальных условий. В ходе численных экспериментов обнаружен эффект быстрого убывания скорости центра масс по сравнению с угловой скоростью платформы экипажа при движении экипажа по инерции при отличных от

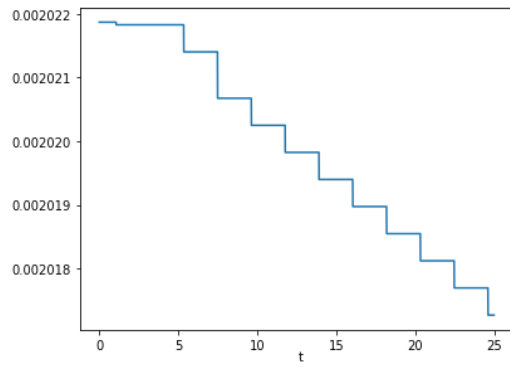
нуля начальных значениях скорости центра масс и угловой скорости платформы.



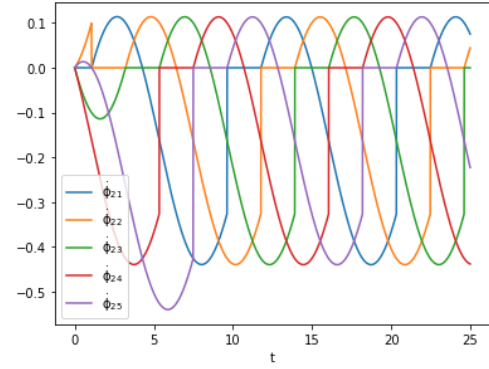
(a) Кинетическая энергия T всей системы и угловая скорость ν_3 платформы экипажа на интервале $0 < t < 1000$



(c) Угловая скорость ν_3 платформы экипажа

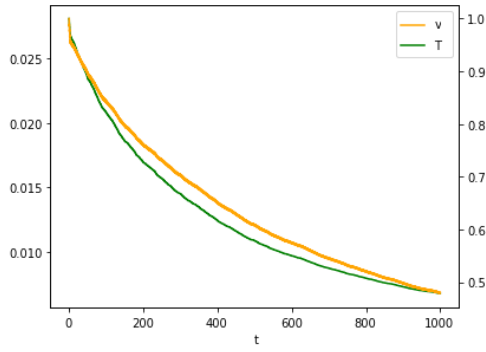


(b) Кинетическая энергия T всей системы на интервале $0 < t < 25$

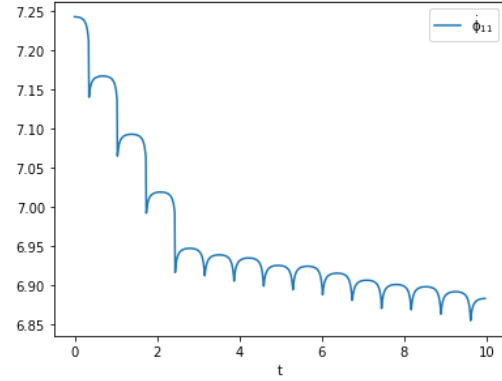


(d) Угловые скорости роликов на колесе 1.

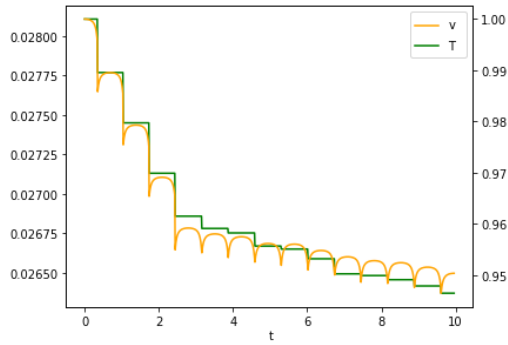
Рис. 9. Движение 1 ($\nu_{1,2}(0) = 0, \nu_3(0) = 1$) экипажа на абсолютно шероховатой плоскости.



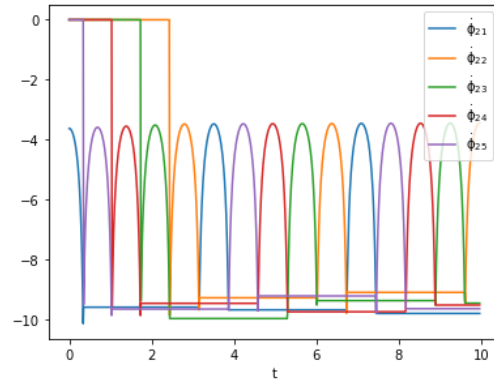
(a) Абсолютная величина v скорости центра масс экипажа и кинетическая энергия T всей системы на интервале $0 < t < 1000$



(c) Угловая скорость собственного вращения ролика с номером 1 на переднем колесе

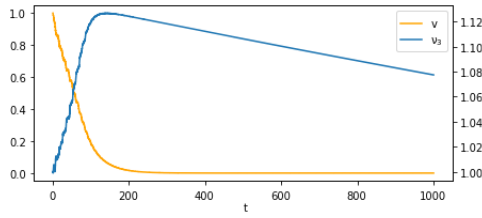


(b) Абсолютная величина v скорости центра масс экипажа и кинетическая энергия T всей системы на интервале $0 < t < 10$

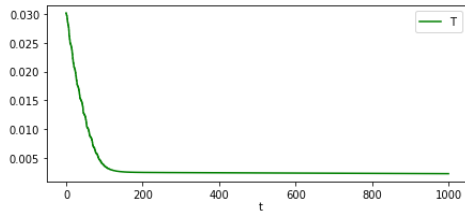


(d) Угловые скорости роликов на колесе номер 2 (одном из задних).

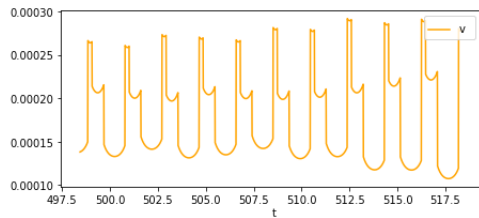
Рис. 10. Движение 2 ($\nu_1(0) = 1, \nu_{2,3}(0) = 0$) экипажа на абсолютно шероховатой плоскости.



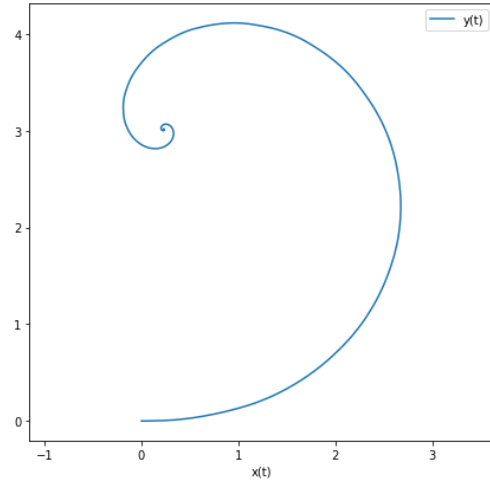
(a) Абсолютная величина v скорости центра масс экипажа и угловая скорость платформы ν_3



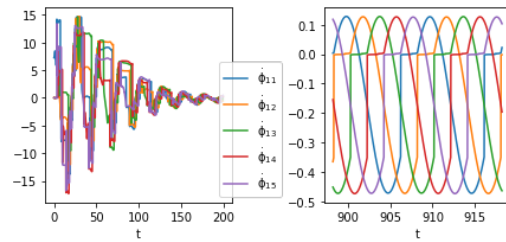
(b) Кинетическая энергия экипажа



(c) Абсолютная величина v скорости центра масс экипажа на фрагменте интервала времени после почти полного прекращения поступательного движения центра масс, за исключением показанной величины скорости.



(d) Траектория центра масс экипажа на плоскости OXU



(e) Угловые скорости роликов на колесе номер 1. Слева – на интервале $t < 200$, справа – на фрагменте интервала времени после почти полного прекращения поступательного движения центра масс.

Рис. 11. Движение 3 ($\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$) экипажа на абсолютно шероховатой плоскости.

Глава 3

Динамика экипажа на ОМНИ-КОЛЕСАХ на ПЛОСКОСТИ с трением

В предыдущих главах рассмотрена динамика омни-колесного экипажа на абсолютно шероховатой плоскости. Было показано, что в этом случае на интервалах движения без смены ролика в контакте полная механическая энергия сохраняется, что, однако, никогда не происходит в реальных системах. Отдельного рассмотрения заслуживает вопрос о том, как возникает и прекращается в реальных системах скольжение вновь вошедшего в контакт ролика, либо ролика, уже находящегося в контакте. Таким образом, интерес представляет изучение динамики экипажа по плоскости с трением.

В данной главе для моделирования контактного взаимодействия

Данная глава изложена на основании статей [102,103,105,109], опубликованных в соавторстве с научным руководителем, предложившим постановку задачи и используемые методы. Все результаты главы получены соискателем лично.

вместо идеальных неголомных связей отсутствия проскальзывания используются голономные неидеальные связи. Для касательных составляющих реакций опорной плоскости используются две модели: сухое трение Амонтона – Кулона, регуляризованное в окрестности нуля по скорости проскальзывания линейной функцией насыщения; а также вязкое трение.

Модель экипажа строится с помощью системы построения численных моделей *Modelica*. В формализме языка *Modelica* разработчик самостоятельно задает систему дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих динамику системы. Затем записанная вручную система уравнений автоматически приводится к виду, подходящему для численного интегрирования.

Построение модели экипажа в настоящей главе выполнено таким образом, что замена в ней модели контактного взаимодействия на другую требует изменения всего одного алгебраического выражения. Также подробно рассмотрен вопрос отслеживания контакта роликов и горизонтальной плоскости и алгоритмической реализации процесса переключения контакта от ролика к ролику при качении роликонесущего колеса.

Динамические свойства построенной модели экипажа проиллюстрированы при помощи численных экспериментов. Проведена верификация построенной модели с сухим трением в сравнении с безынерционной моделью при стремлении суммарной массы роликов к нулю. Модель с вязким трением представлена в сравнении с неголомной моделью, построенной в главах 1 и 2.

3.1 Метод построения механической модели системы твердых тел

Для описания динамики системы воспользуемся следующим формализмом [87,89,90]. Положение каждого твердого тела будем задавать радиусом-вектором центра масс тела \mathbf{r} в неподвижной системе отсчета $OXYZ$, введенной в главе 1, и кватернионом \mathbf{q} , задающим ориентацию тела; распределение скоростей описывается скоростью центра масс \mathbf{v} и угловой скоростью тела $\boldsymbol{\omega}$. Динамика этого твердого тела описывается уравнениями Ньютона-Эйлера:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$$

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, J\boldsymbol{\omega}] = \mathbf{M} + \mathbf{L}, \quad \dot{\mathbf{q}} = (0, \boldsymbol{\omega}),$$

где \mathbf{F} и \mathbf{R} – главные векторы активных сил и реакций, J – тензор инерции в подвижной системе отсчета, связанной с телом, производная по времени угловой скорости $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ берется в подвижной системе отсчета, \mathbf{M} и \mathbf{L} – главные векторы моментов, приложенных к телу, и реактивных моментов.

Для получения замкнутой системы уравнений требуется ввести также уравнения связей

$$f(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{q}}, \underline{\boldsymbol{\omega}}) = 0, \tag{3.1}$$

и модель реакций связей, в частности, контактного взаимодействия:

$$g(\underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{L}}, \underline{\mathbf{q}}, \underline{\boldsymbol{\omega}}) = 0, \tag{3.2}$$

где левые части зависят, вообще говоря, от величин, описывающих движение всех тел, что обозначено нижней чертой. Выражения в левых частях (3.1) и (3.2) также могут быть кусочно-заданными, что

и имеет место в задаче о движении омни-колеса, поскольку ролики входят и выходят из контакта с опорной поверхностью.

Отметим, что при необходимости изменения закона контактного взаимодействия достаточно изменить только уравнения (3.2).

В построенной системе дифференциально-алгебраических уравнений используются избыточные координаты, а дифференциальные уравнения, вообще говоря, не разрешены относительно первых производных фазовых переменных. Для эффективного численного интегрирования такой системы требуется [112] представить ее в виде

$$A(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, t),$$

где вектор \mathbf{x} составлен из фазовых переменных и множителей Лагранжа, матрица A – квадратная. Это может быть сделано в полуавтоматическом режиме с помощью инструментов инфраструктуры языка *Modelica*. Эти инструменты (см., например, [86]) выполняют редукцию индекса построенной системы дифференциально-алгебраических уравнений и строят разностную схему численного решения.

В отличие от глав 1 и 2, рассматриваемая в этой главе система голономна. Как и в главах 1 и 2, система состоит из $1 + N(n + 1)$ твердых тел и имеет древовидную структуру: диски колес крепятся с помощью идеальных цилиндрических шарниров к платформе экипажа, ролики аналогично крепятся к дискам колес. Поскольку в этой главе используются не лагранжевы координаты \mathbf{q} , определенные в главе 1 (см. (1.1)), а избыточные $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{q}, \mathbf{\omega})$, для построения модели требуется задать уравнения связей вида (3.1), описывающие шарниры. Это делается в соответствии с [91]. Также требуется задать уравнения связей, описывающие взаимодействие роликов и опорной плоскости. Эти связи не идеальны, и в дополнение к уравнениям связей вида (3.1) задаются модели реакций вида (3.2). Напомним, что

при переходе колеса с одного ролика на другой ударных реакций, направленных по нормали к опорной плоскости, не возникает, так как граница проекции колеса с роликами на плоскость колеса является окружностью.

Количество степеней свободы системы равно

$$3 + N(n + 1),$$

а количество дифференциальных уравнений движения твердых тел, поступающих на вход алгоритмам инструментов *Modelica* – $(3 + N(n+1)) \cdot 7$, что для экипажа с тремя колесами и четырьмя роликами на каждом составляет 208. Кроме этого, алгебраические уравнения связей также приводятся к дифференциальному виду.

Далее в разделах 3.2 и 3.3 подробно описаны геометрические построения для вывода уравнений (3.1), описывающих контакт ролика и опорной плоскости, в задаче о движении экипажа с *омни- и тесанит-* колесами.

3.2 Отслеживание контакта роликов при движении омни-колеса

Чтобы получить явный вид уравнения (3.1), выражающее условие контактирования двух поверхностей, требуется найти радиусы-векторы ближайших точек этих поверхностей и записать условия равенства проекций скоростей этих точек на общую нормаль поверхностей в этих точках.

Помимо этого, необходимо вычислить касательную составляющую скорости точки одного тела относительно другого для задания модели касательной составляющей реакции (3.2) в случае неидеальных связей.

Для начала составим формулы, задающие геометрическую связь контакта между опорной плоскостью и одним неусеченным роликом колеса с n роликами. Введем систему отсчета $Kxyz$, жестко связанную с роликом, следующим образом. Точку K поместим в центр ролика, ось x направим по продольной оси ролика, оси y и z расположим в плоскости, перпендикулярной оси x и содержащей K . Напомним, что ролик ограничен поверхностью вращения дуги окружности радиуса l вокруг ее хорды, отстоящей от центра P на расстояние r (обозначения см. на рис. 1), так что уравнение поверхности ролика в указанных осях имеет вид (см. фиг. 12):

$$x^2 + \left(\sqrt{y^2 + z^2} + r \right)^2 = l^2. \quad (3.3)$$

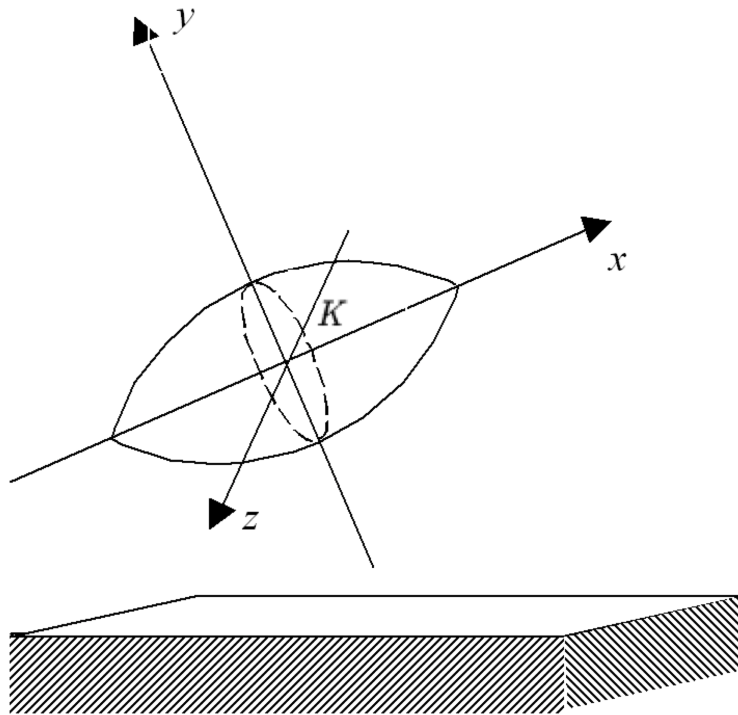


Рис. 12. Ролик над горизонтальной плоскостью.

Заметим, что эта поверхность имеет в точках $x = \pm\sqrt{l^2 - r^2}$ особенность, что в численных алгоритмах обычно приводит к аварийному завершению вычислительного процесса моделирования, так как требуется непрерывно вычислять градиент к поверхности ролика.

В задаче о движении экипажа с омни-колесами конфигурация системы твердых тел такова, что плоскости омни-колес остаются вертикальными во все время движения, и касательная плоскость к поверхности ролика определена при любом допустимом расположении тел. При этом условии можно указать явную формулу, позволяющую вычислить ближайшую к плоскости точку C ролика: это вертикальная проекция точки P на плоскость.

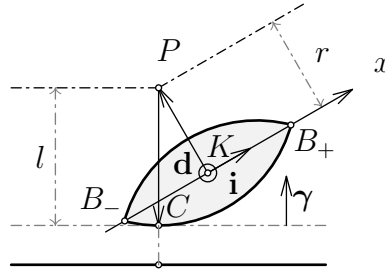


Рис. 13. Схема отслеживания контакта: вид сбоку отдельного ролика.

Найдем координаты точки C (см. рис. 13). Обозначим \mathbf{i} – единичный направляющий вектор оси ролика, \mathbf{r}_K – радиус-вектор геометрического центра ролика в текущий момент времени и $\boldsymbol{\gamma}$ – орт нормали к плоскости, в рассматриваемой задаче являющийся единичным вектором восходящей вертикали. Введем горизонтальный единичный вектор \mathbf{d} , перпендикулярный плоскости колеса следующим образом:

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{i} \times \boldsymbol{\gamma}}{|\mathbf{i} \times \boldsymbol{\gamma}|}.$$

Пусть P – центр окружности, вращением дуги которой образована поверхность ролика (заметим, что эта же точка является центром

омни-колеса). Тогда, очевидно, отрезок \overrightarrow{KP} , расположенный в вертикальной плоскости, будет иметь длину r и задаваться формулой

$$\overrightarrow{KP} = r\mathbf{d} \times \mathbf{i}.$$

Так что радиус-вектор \mathbf{r}_C самой нижней точки C внешней поверхности ролика будет задаваться по формуле

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_K + r\mathbf{d} \times \mathbf{i} - l\boldsymbol{\gamma}, \quad (3.4)$$

поскольку точка K лежит на упоминавшейся выше окружности на общей вертикали с точкой P .

Все описанные выше вычисления справедливы только, если вектор \mathbf{i} имеет направление, составляющее с вертикалью $\boldsymbol{\gamma}$ угол, ограниченный значениями $\pm \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)$. В противном случае следует положить $C = B_{\pm}$, где B_- и B_+ – левая и правая концевые точки ролика соответственно (см. рис. 13).

Итак, условие контактирования ролика и плоскости можно записать в виде

$$|\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\gamma}| \leq \sin \frac{\pi}{n}. \quad (3.5)$$

Это условие, однако, позволяет из всего множества роликов колеса выделить два: нижний (контактирующий) и верхний. Чтобы отбросить последний случай, можно к полученному неравенству присоединить также требование

$$Z_K < l \quad (3.6)$$

где Z_K – расстояние от центра ролика до опорной плоскости.

Таким образом, конъюнкция условий (3.5) и (3.6) означает наличие контакта. Реализация контакта геометрически означает выполнение скалярного условия

$$Z_C = 0, \quad (3.7)$$

позволяющего, вместе с уравнениями динамики твердого тела, вычислить величину нормальной реакции F_n , приложенной в точке C . Отсутствие контакта доставляет выполнение альтернативного, также скалярного, условия равенства нормальной реакции нулю

$$F_n = 0.$$

Вычислительные эксперименты показали, что условие контакта в форме (3.7) обычно приводит к аварийному завершению процесса численного решения уравнений движения ролика. Аналогичный результат получается, если в качестве уравнения контактирования использовать уравнение, требующее равенства нулю нормальной составляющей скорости v_n точки контакта:

$$v_n := \mathbf{v}_C \cdot \boldsymbol{\gamma} = \left(\mathbf{r}_C + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{KC} \right) \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0. \quad (3.8)$$

И только уравнение

$$\dot{v}_n = 0 \quad (3.9)$$

приводит к требуемому результату – корректной отработке процесса численного решения (выполняемого в данном случае инструментами языка *Modelica* [86]).

Рассмотрение алгоритма отслеживания контакта в ролика омни-колеса и опорной плоскости завершено. В следующем разделе построим аналогичный алгоритм для ролика *tesapit*-колеса, где ось ролика расположена под углом к плоскости колеса.

3.3 Отслеживание контакта в случае *tesapit* колеса

Обозначим угол между осью ролика и плоскостью колеса ψ . В конфигурации обычного омни-колеса этот угол равен нулю. Расширим

алгоритм отслеживания контакта, описанный выше для случая $\psi = 0$ на конфигурацию *тесанит*, $\psi > 0$. В этом случае, в первую очередь, отметим отличия в геометрической форме роликов. Каждый ролик – это твердое тело, ограниченное поверхностью вращения некоторой кривой вокруг его оси. В случае $\psi = 0$ эта кривая – дуга окружности, но при $\psi > 0$, для того, чтобы проекция внешней границы колеса с роликами на его плоскость оставалась окружностью, образующая кривая поверхности ролика становится алгебраической кривой четвертого порядка [11]. Для полноты приведем ее параметризацию в координатах $Kxyz$ (см. рис. 12 в разделе 3.2), указанную в [11]. В качестве параметра используется угол поворота колеса $\chi \in \left[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right]$:

$$\begin{aligned} x(\chi) &= r \frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi} \operatorname{tg} \chi + l \cos \psi \sin \chi \\ y(\chi) &= -\sqrt{\sin^2 \psi \operatorname{tg}^2 \chi + 1} (l \cos \chi - r). \end{aligned}$$

деле, основан на вычислении расстояния λ от этой плоскости до C . Условие наличия контакта аналогично полученному в предыдущем разделе, но для его проверки требуется учесть отличия в геометрии ролика: $\psi \neq 0$.

Неявный алгоритм отслеживания контакта

Как и в случае $\psi = 0$, определим направление “на центр колеса” от центра ролика, т.е. вектор

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_K}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_K|}.$$

Таким образом, ролик находится в контакте, если только если

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_z < \cos \frac{\pi}{n} \text{ и } z_C < l.$$

Также определим вектор \mathbf{k} , направленный вдоль оси колеса (т.е. перпендикулярно плоскости колеса). Тогда радиус-вектор \mathbf{r}_C точки контакта C можно выразить следующим образом через введенные векторы и радиус-вектор \mathbf{r}_K центра ролика K :

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_K + r\mathbf{s} - l\mathbf{e}_z + \lambda\mathbf{k}. \quad (3.10)$$

В этом выражении компоненты векторов \mathbf{s} и \mathbf{k} , а также расстояние от плоскости колеса до точки контакта λ не известны, их требуется вычислять. Для этого введем три вспомогательные системы отсчета и, пользуясь ими, получим необходимые выражения.

Введем систему отсчета $Pijk$, жестко связанную с диском колеса (см. рис. 14), с началом в его центре P . Пусть вектор \mathbf{k} направлен вдоль оси колеса, \mathbf{i} и \mathbf{j} лежат в его плоскости. Дополнительно введем также системы отсчета $Pi_1j_1k_1$ и $Ki_2j_2k_2$, где K – центр ролика.

Вектор \mathbf{i}_1 направим вдоль линии пересечения плоскости колеса и горизонтальной плоскости. Пусть вектор $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$ совпадает с вектором \mathbf{k} базиса, связанного с колесом, ортогонален плоскости колеса и

всегда горизонтален. \mathbf{j}_1 положим совпадающим с вектором восходящей вертикали $\boldsymbol{\gamma}$. Тогда \mathbf{i}_1 определим как $\mathbf{i}_1 = \mathbf{j}_1 \times \mathbf{k}_1$.

Вектор \mathbf{i}_2 направим вдоль оси собственного вращения ролика, см. рис. 14. Этот вектор по определению не может принять вертикальное положение при $\psi = 0$, если ролик находится в контакте с опорной плоскостью, а, в случае *тесания* ролик повернут на постоянный угол $\psi > 0$ относительно оси PK , и потому соотношение $\mathbf{i}_2 \neq \boldsymbol{\gamma}$ верно во все время движения. Это обстоятельство позволяет определить вектор $\mathbf{c} = \mathbf{i}_2 \times \boldsymbol{\gamma}$, всегда отличный от нуля. Положим $\mathbf{k}_2 = \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}$. Вектор \mathbf{j}_2 положим ортогональным \mathbf{i}_2 и лежащим в вертикальной плоскости как $\mathbf{j}_2 = \mathbf{k}_2 \times \mathbf{i}_2$.

Для определения компонент вектора \mathbf{s} теперь воспользуемся условиями ортогональности векторов, следующими из определений введенных систем отсчета:

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{i}_2 = 0, \quad \mathbf{s} \cdot \mathbf{k}_1 = 0,$$

а точнее, их дифференциальными вариантами:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{s} \cdot \mathbf{i}_2 + \mathbf{s} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{i}_2 = 0, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{s} \cdot \mathbf{k}_1 + \mathbf{s} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{k}_1 = 0.$$

Чтобы получить число λ , умножим уравнение (3.10) скалярно на \mathbf{k}_2 . Поскольку $\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_K$ лежит в вертикальном сечении осесимметричной поверхности ролика, и вектор \mathbf{k}_2 по построению ортогонален этому сечению, расстояние λ от плоскости колеса до точки контакта C определяется однозначно как

$$\lambda = \frac{(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_K) \cdot \mathbf{k}_2}{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2},$$

а вместе с ним, и весь радиус-вектор \mathbf{r}_C . Аналогично предыдущему разделу, налагается связь вида (3.8, 3.9).

Явный алгоритм отслеживания контакта

Для полноты изложения приведем еще один способ вычисления компонент радиуса-вектора \mathbf{r}_C точки контакта C или, точнее, точки ролика, ближайшей к опорной плоскости, предложенный С.Я.Степановым [109]. Способ заключается в применении следующего набора равенств (см. рис. 14):

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_K + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{KD} = -a\mathbf{i}_2, \quad \overrightarrow{DC} = -h\mathbf{j}_1,$$

где $a = r \frac{\sin \chi}{\cos \chi \cos \psi}$, $h = l - \frac{r}{\cos \chi}$. Здесь χ – текущее значение угла отклонения вектора \mathbf{s} из предыдущего раздела от вертикали. Таким образом,

$$\cos \chi = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad \sin \chi = (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{s}) \cdot \mathbf{k}_1.$$

Кривая, образующая поверхность ролика, пересекает его ось в окрестности острия и продолжается далее (параметризация образующей кривой, поверхности ролика и сечения этой поверхности плоскостью, содержащей ось ролика, приведены в [11]), в связи с чем необходимо ограничить длины роликов величиной

$$L = 2l \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \psi},$$

где $\frac{\pi}{n}$ – половина угла раствора дуги окружности, ограничивающей проекцию ролика на плоскость колеса. При такой конструкции колеса переход колеса с одного ролика на другой происходит мгновенно. Отметим, что при этом след колеса на плоскости имеет разрыв, поскольку точка контакта мгновенно переходит на противоположный «борт» колеса. Это обстоятельство, впрочем, не препятствует эффективному численному решению.

3.4 Моделирование трения в контакте

Конструкция омни-колеса такова, что в каждый момент времени имеется только один ролик, контактирующий с опорной поверхностью. Для остальных роликов при этом во время расчета алгоритм отслеживания контакта продолжает работать, генерируя нулевые реакции.

В случае фактического выполнения контакта помимо нормальной реакции вычисляется также её касательная составляющая, сила трения. Для касательного контактного усилия имеется множество различных моделей. Мы остановились на реализации двух случаев при одноточечном твердотельном контакте:

1. регуляризованное сухое трение

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\mu N \mathbf{v}_C \begin{cases} \frac{1}{\delta}, & |\mathbf{v}_C| < \delta \ll 1 \\ \frac{1}{|\mathbf{v}_C|} & \text{иначе} \end{cases}$$

2. вязкое трение

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\gamma \mathbf{v}_C$$

Как известно, идеальный «сухой» случай реализовать не удастся из-за разрыва в правой части уравнений движения, поэтому вместо разрывной функции от касательной скорости относительного скольжения контактирующих поверхностей, в первом случае используется её регуляризованный в нуле вариант. Вместо функции sign применяется функция насыщения, представляющая собой линейный участок с достаточно большим угловым коэффициентом в окрестности нуля. Для таких функций известен результат [83] о близости аппроксимирующего движения и движения, соответствующего точному случаю

разрывной функции sign . В целом, реализация модели неударивающей связи основана на результатах [88].

3.5 Результаты численного моделирования

В настоящем разделе описаны результаты двух видов расчетов. Во-первых, проведенной верификации модели экипажа на плоскости с регуляризованным сухим трением в сравнении с безынерционной моделью (см. Приложение к главе 1, а также [14, 19]). Сравнение проведено при стремлении доли массы ролика в общей массе омни-колеса к нулю. Во-вторых, качественного сравнения движения экипажа на плоскости с вязким трением с достаточно большим коэффициентом и движения модели, построенной в главах 1 и 2.

3.5.1 Верификация модели с сухим трением

Для проверки взаимной корректности безынерционной модели и модели с сухим трением проведены численные испытания, в которых, при прочих равных, изменялась величина $\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}}$ — отношение массы одного ролика к массе колеса в целом. В этом случае оказалось, что при уменьшении данного параметра движение экипажа и омни-колес приближаются к соответствующим решениям задачи Коши, получаемым в силу дифференциальных уравнений движения, используемых в работе [19], в которых динамика роликов не учитывается. При этом остальные параметры экипажа, такие как массы его частей, их моменты инерции, геометрические размеры, положения, а также начальные данные — скорость центра масс и угловая скорость платформы, задавались согласованными между двумя моделями. Как и в главах 1 и 2, рассматривается симметричная конфигурация эки-

пажа. Однако концы роликов в данном рассмотрении не усекаются: в силу выбора модели контактных сил и построенного явного алгоритма отслеживания контакта, особенность на острии ролика не препятствует проведению расчетов. Количество роликов n равно 4. Рассмотрены два типа начальных условий $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)^T, \omega(0) = \omega_0$ (см. рис. 15):

1. центр платформы экипажа имеет начальную поступательную скорость в направлении одного из колес, и угловая скорость платформы равна нулю (ожидаемый результат - центр масс экипажа движется вдоль оси Ox , экипаж не вращается),
2. платформа экипажа имеет ненулевую угловую скорость вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс экипажа, скорость центра масс равна нулю (ожидаемый результат - экипаж вращается вокруг своей вертикальной оси симметрии, и центр масс покоится).

За единицу безразмерной массы принята масса диска колеса. Безразмерная масса платформы при этом равна 3.3. Отношение $\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}}$ массы ролика к общей массе колеса в обоих случаях принимало значения от 10^{-6} до 10^{-1} с шагом 1 по показателю степени.

Для сравнения модели экипажа на плоскости с сухим трением и безынерционной модели с неголономными связями, в таблице (1) приведены величины отличий угла курса θ экипажа и координат центра масс x, y к моменту безразмерного времени $t = 10$. Отличия уменьшаются с уменьшением порядка величины отношения массы одного ролика $m_{\text{рол}}$ к суммарной массе колеса $m_{\text{к}}$.

На рис. 16 приведены примеры траекторий центра масс $y(x)$ и зависимостей $\theta(t)$ угла поворота θ платформы вокруг вертикальной

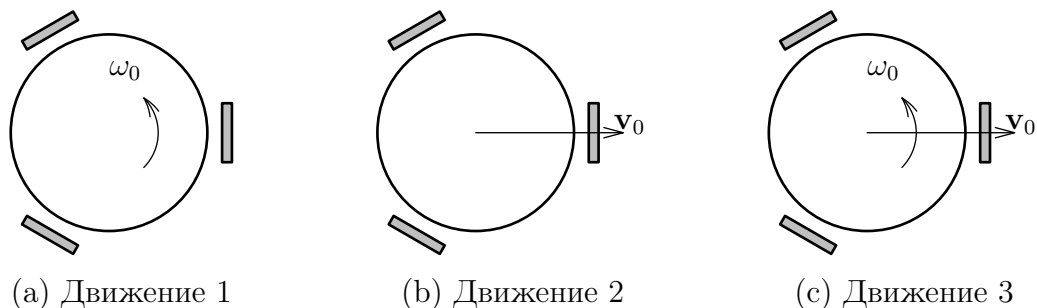


Рис. 15. Рассмотренные варианты начальных условий для моделей с трением. Для модели с сухим трением приведены результаты экспериментов с движениями 1 и 2. Для модели с вязким трением приведены результаты экспериментов с движением 3.

оси, проходящей через её центр, для случаев 1) и 2). Кривые $y(x)$, изображающие траектории центра масс, соответствуют, в сущности, точке – началу системы отсчета $OXYZ$ – в случае $v_0 = 0, \omega_0 = 1$, и отрезку прямой, совпадающей с осью x , в случае $v_0 = 1, \omega_0 = 0$, т.к. масштаб отображения таков, чтобы были видны отклонения от точных значений, возникающие в силу вычислительной погрешности, но сами эти отклонения имеют порядок малости, позволяющий считать их несущественными. Аналогичное утверждение верно и для зависимости угла поворота платформы θ от времени в случае поступательного движения – полученная зависимость близка к постоянной.

На рис. 16 представлены результаты нескольких численных экспериментов. Во всех случаях величины x, y и θ , демонстрируют поведение, не различимое в масштабе рисунка, и поэтому приведены лишь расхождения между построенной нами моделью и верификационной идеализацией, которые и представляют интерес. Также представлена абсолютная величина скорости скольжения в точке контакта в физической модели.

Графики зависимости скорости скольжения от времени показы-

	Движение 1	Движение 2
$\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}}$	$\Delta\theta$	$\max(\Delta x , \Delta y)$
10^{-1}	≈ 1	≈ 1
10^{-2}	$\approx 10^{-1}$	≈ 0.5
10^{-3}	$\approx 10^{-2}$	$\approx 10^{-1}$
10^{-4}	$\approx 10^{-3}$	$\approx 10^{-2}$
10^{-5}	$\approx 10^{-3}$	
10^{-6}	$\approx 10^{-4}$	

Таблица 1. Сравнение моделей экипажа на плоскости с сухим трением и безынерционной модели с неголономными связями. Порядок различий в значениях угла курса платформы θ и координат центра масс x, y экипажа при движениях 1 и 2 и уменьшении $\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}}$

вают, что скольжение всегда имеет место в окрестности момента смены роликов и только там. Для вращательного движения это объясняется наличием того же динамического эффекта раскручивания роликов, что был обнаружен в главах 1 и 2: скользят именно вновь входящие в контакт ролики, но не ролики, уже находящиеся в контакте достаточное время. В случае поступательного движения платформы экипажа дополнительно возникает раскручивание роликов задних колес, находящихся в контакте, поскольку для идеального качения при подходе к острию, ролик необходима бесконечная угловая скорость собственного вращения, т.к. его радиус вблизи острия стремится к нулю.

Из рис. 17–21 видно, что с ростом доли массы роликов в общей массе колеса скольжение в контакте становится существеннее, изменяясь от пренебрежимо малого при $\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-6}$ до весьма заметного

уже при $\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-3}$. Тем не менее, расхождения в сравниваемых моделях траектории центра масс и угла поворота платформы малы. Скольжение наблюдается лишь в точках колеса, которые в промышленных конструкциях не присутствуют (см. Обзор), что и позволяет считать построенную модель экипажа на плоскости с сухим трением верифицированной.

На рис. 22 представлены зависимости расстояний h между горизонтальной плоскостью и роликами одного и того же колеса, находящимися в разных фазах (перед контактом, в контакте, после контакта). Номер кривой соответствует номеру ролика на колесе. В увеличенном масштабе показан момент смены ролика в контакте с опорной плоскостью. Видно, что характер смены гладкий безударный.

Одновременно можно наблюдать, что неударная связь (рис. 23), реализуется достаточно точно, несмотря на постепенное увеличение вычислительной ошибки. Расстояние между контактирующими телами медленно увеличивается для каждого последующего ролика в контакте. В то же время, абсолютная величина ошибки остается пренебрежимо малой – около 10^{-7} от единицы безразмерной длины.

3.5.2 Качественное сравнение модели с вязким трением и безынерционной модели

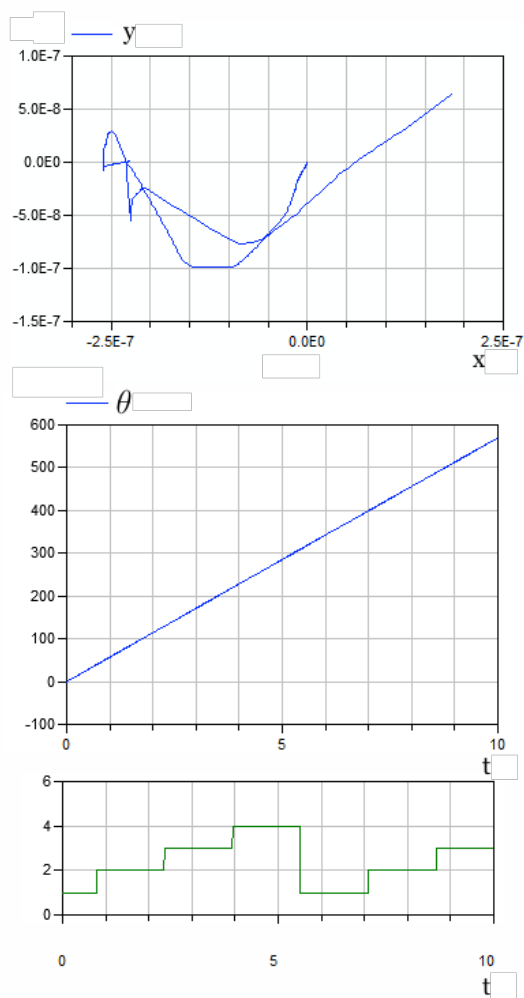
Для модели с вязким трением были проведены расчеты, аналогичные движению 3 из главы 2. Конфигурация экипажа также симметрична, ролики усечены, на каждом колесе пять роликов.

Обнаружены динамические эффекты, аналогичные полученным в главе 2: характерный спиральный вид траектории центра масс на опорной плоскости возникает и в данной модели; видно раскручивание роликов; возрастание угловой скорости платформы экипажа, одновременное с убыванием поступательной скорости её центра; последующее медленное убывание угловой скорости; убывание кинетической энергии экипажа, см. рис. 24.

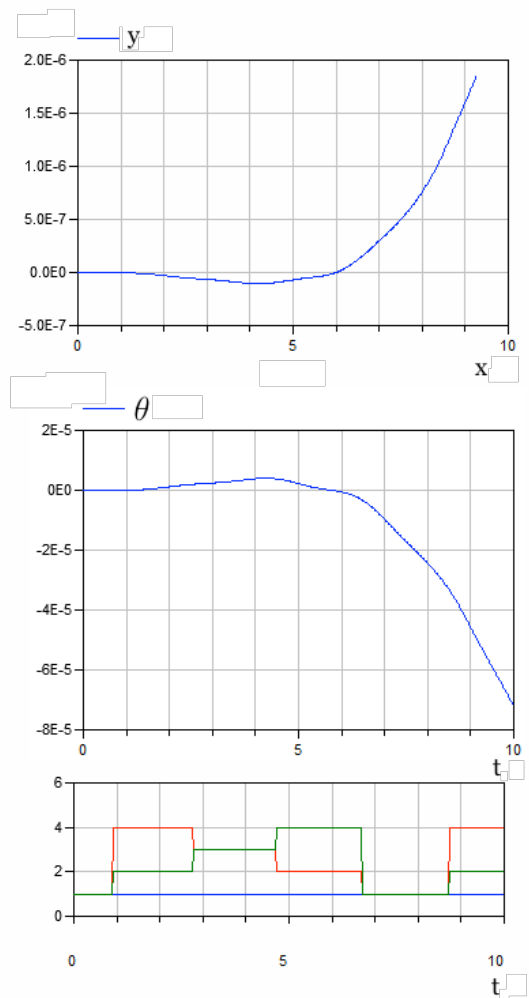
В данном расчете коэффициент вязкого трения принимался до-

статочно большим: 10^5 . Такое значение позволило моделировать ударный характер переходных процессов при смене ролика в контакте. На гладких участках движения сходство с движением неголономной модели соответствует результату [57].

Подведем итог описанным в настоящей главе исследованиям: построена модель экипажа с неидеальными голономными связями. Модель реализована в системе автоматического построения численных динамических моделей для двух моделей контактных сил: вязкого трения и регуляризованного сухого трения. Для этого найдены геометрические условия контакта роликов омни- и месапит-колес и опорной плоскости. Численно показано, что при стремлении осевого момента инерции ролика к нулю, движения системы с трением стремятся к движениям безынерционной модели. Обнаружено качественное сходство траекторий системы с вязким трением с достаточно большим коэффициентом трения с движениями модели, рассмотренной в главах 1 и 2.

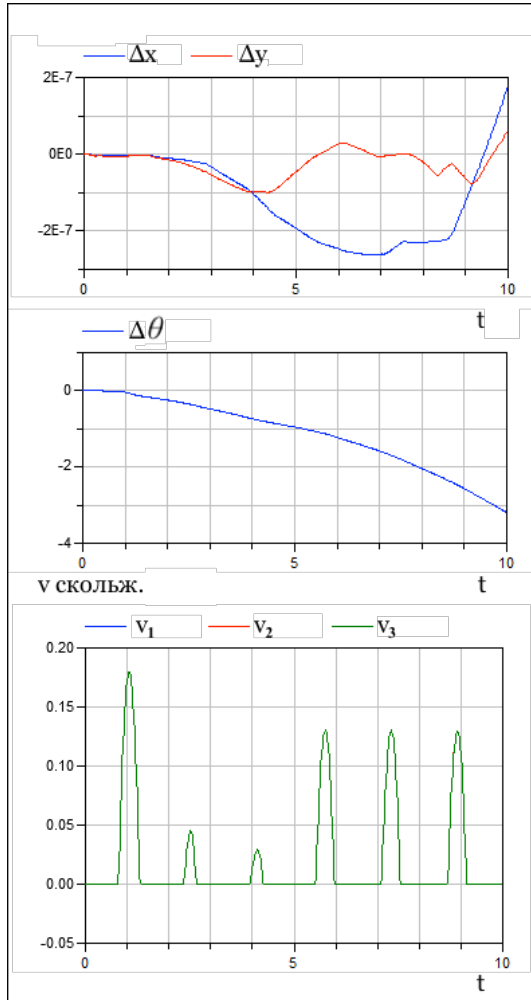


(a) $\frac{m_{\text{пол}}}{m_k} = 0, 1, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

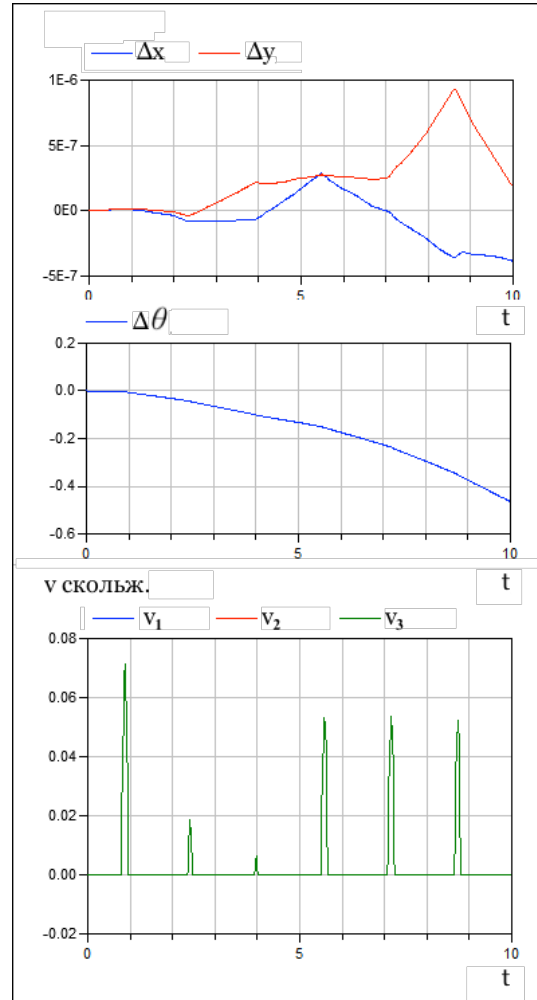


(b) $\frac{m_{\text{пол}}}{m_k} = 0, 1, v_0 = 1, \omega_0 = 0$

Рис. 16. Примеры траекторий центра масс экипажа, зависимости угла курса θ от времени и смены номеров роликов в контакте для двух типов начальных условий. На нижнем графике - номер ролика в контакте, см. также рис. 1

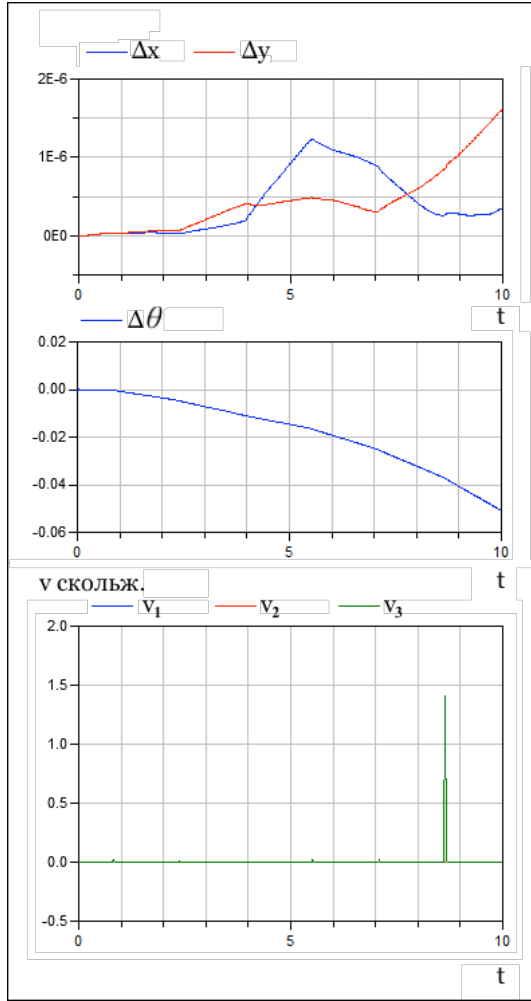


$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-1}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

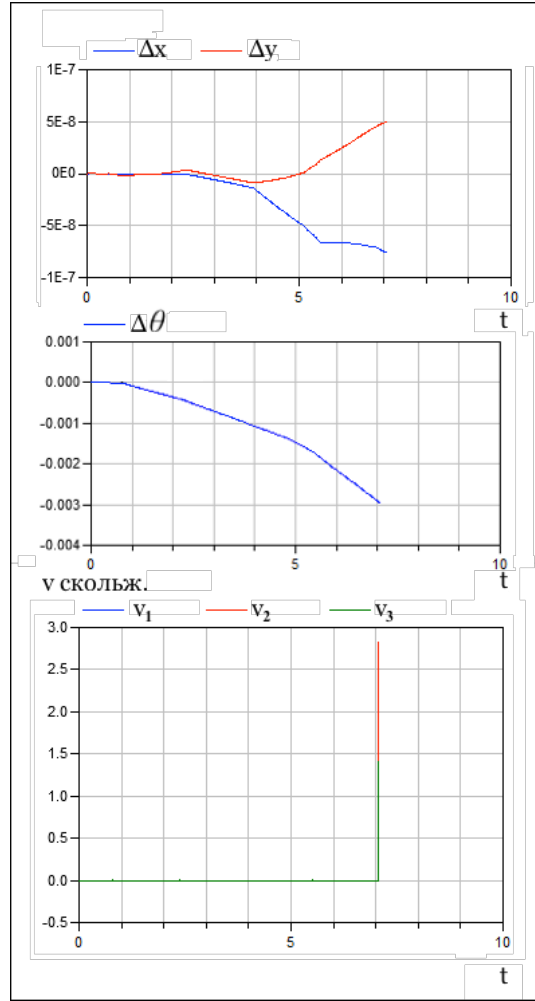


$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-2}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

Рис. 17. Движение 1 экипажа на плоскости с сухим трением, $\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-1}, 10^{-2}$. Траектории центра масс $y(x)$, зависимости $\theta(t)$ угла курса от времени и абсолютны величины скоростей скольжения в точках контакта.

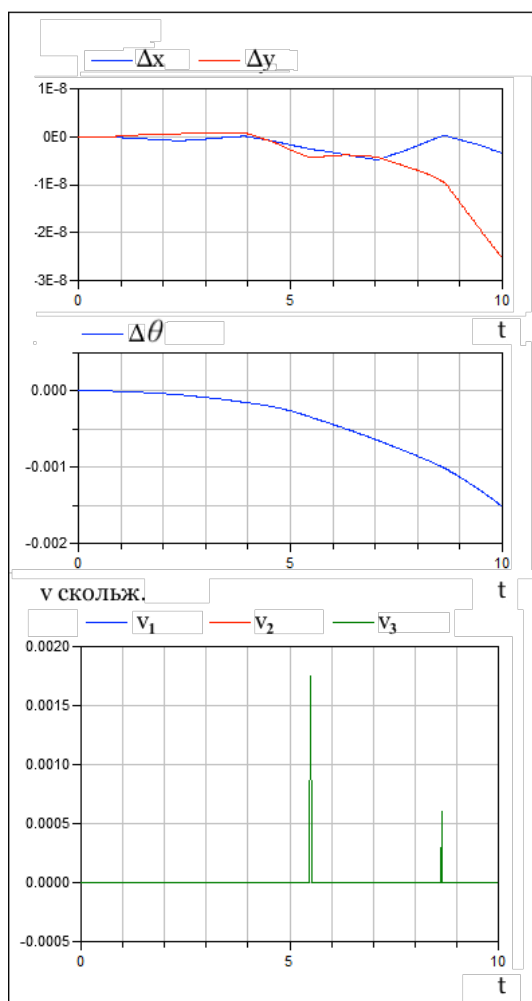


$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-3}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

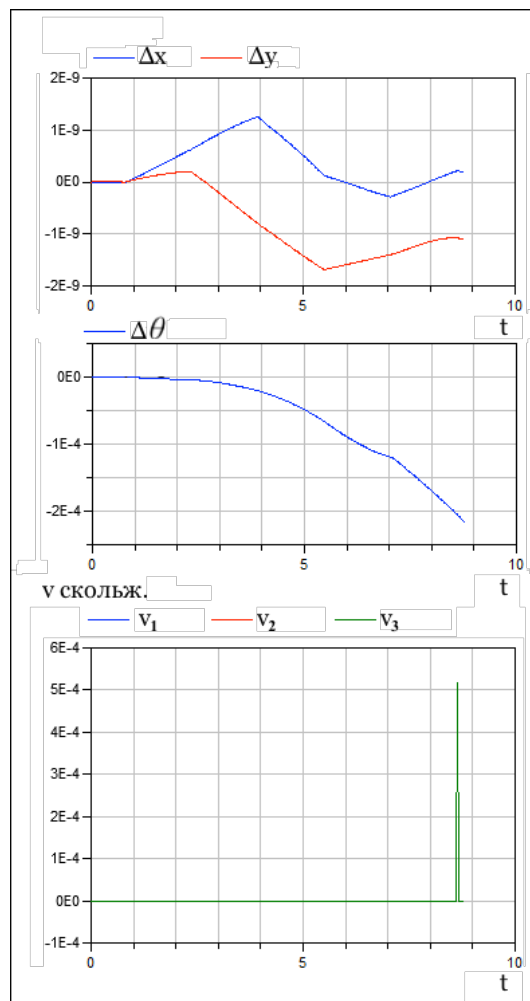


$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-4}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

Рис. 18. Движение 1 экипажа на плоскости с сухим трением, $\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-3}, 10^{-4}$. Типы графиков те же, что на рис. 17.

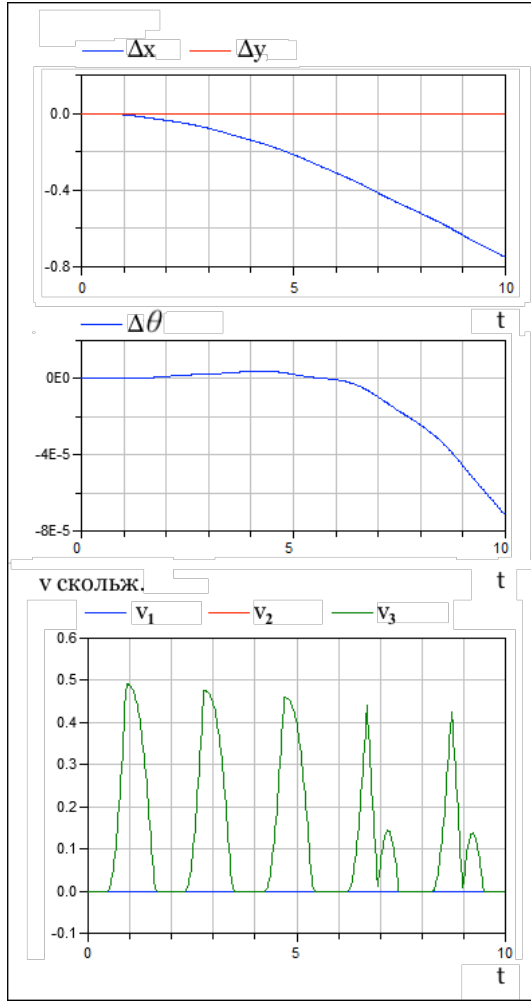


$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

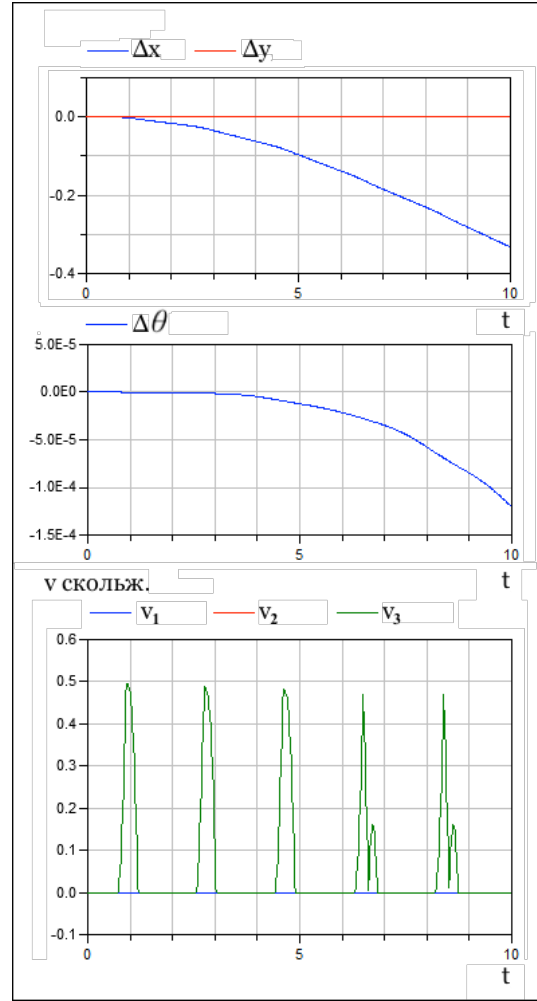


$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

Рис. 19. Движение 1 экипажа на плоскости с сухим трением, $\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-5}, 10^{-6}$. Типы графиков те же, что на рис. 17.

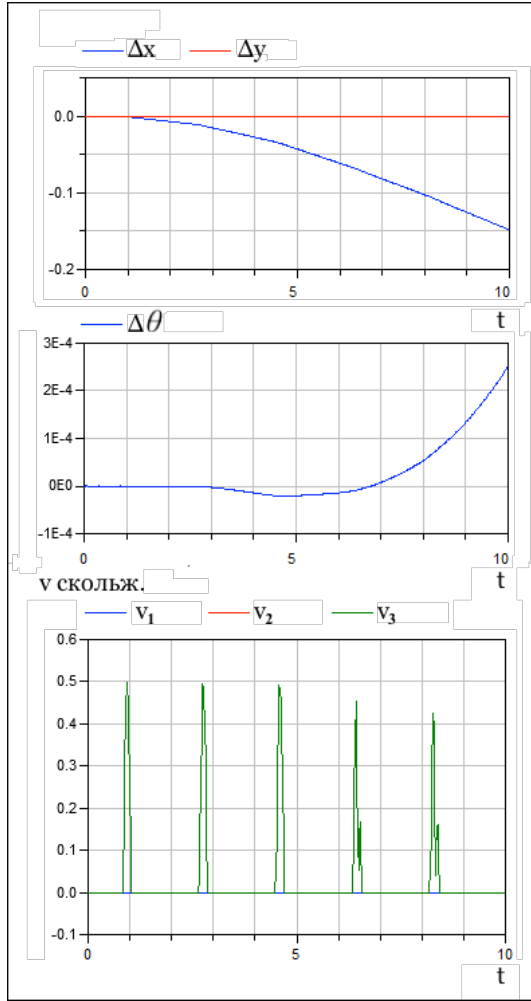


$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-1}, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

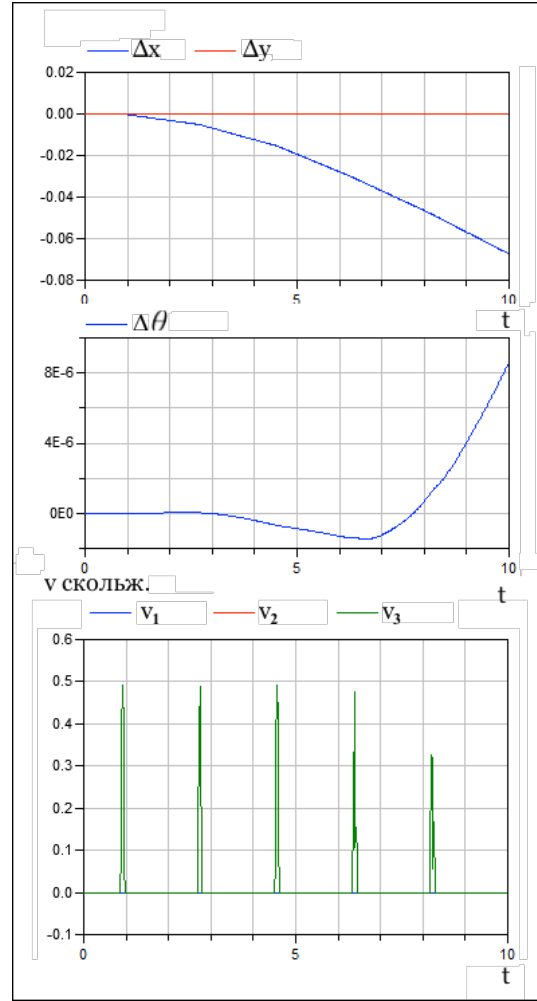


$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-2}, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

Рис. 20. Движение 2 экипажа на плоскости с сухим трением, $\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-1}, 10^{-2}$. Типы графиков те же, что на рис. 17.



$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-3}, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$



$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-4}, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

Рис. 21. Движение 1 экипажа на плоскости с сухим трением, $\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-3}, 10^{-4}$. Типы графиков те же, что на рис. 17.

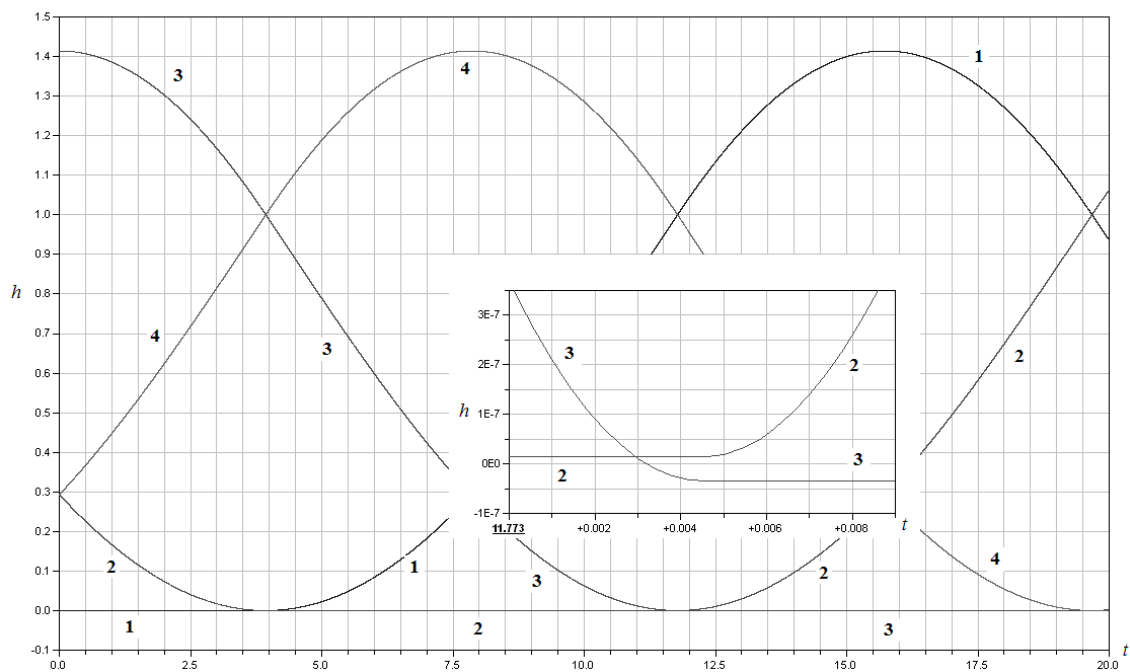


Рис. 22. Процесс смены роликов в контакте в численной модели.

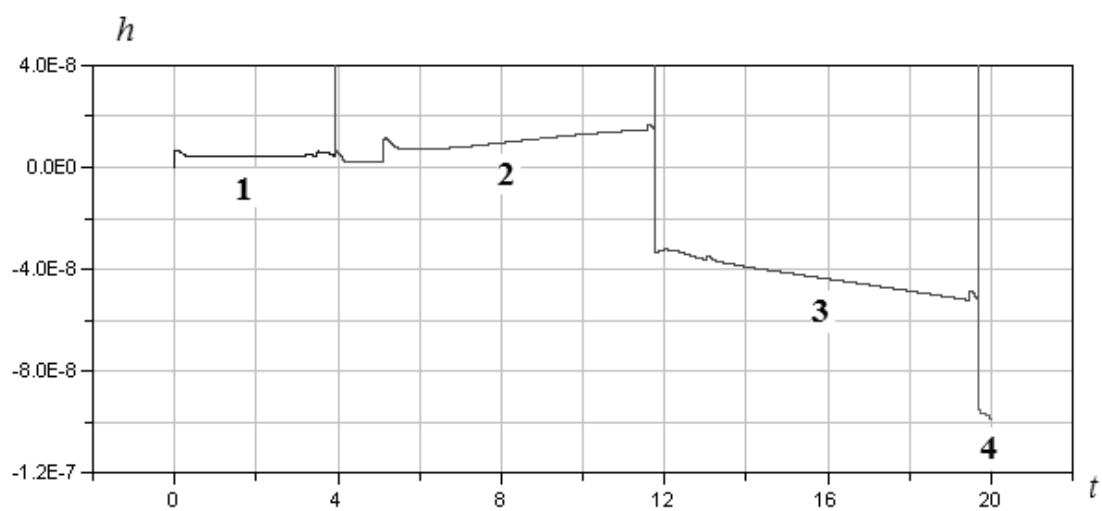
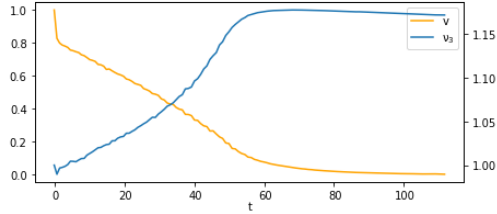
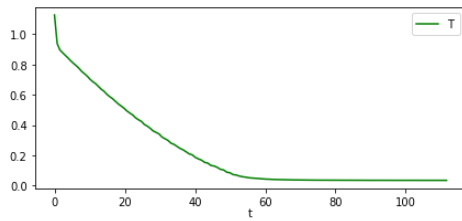


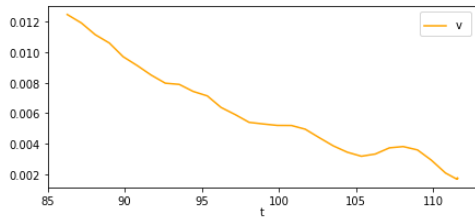
Рис. 23. Точность сохранения неударживающей связи.



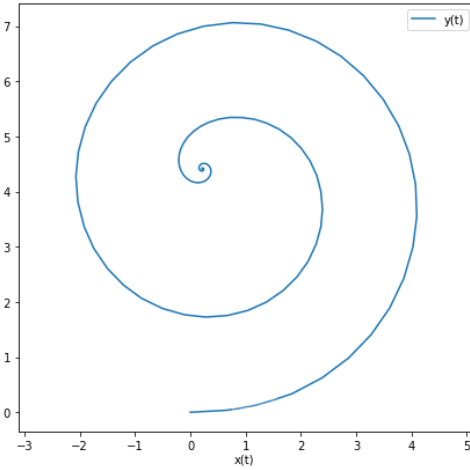
(a) Абсолютная величина v скорости центра масс экипажа и угловая скорость платформы ν_3



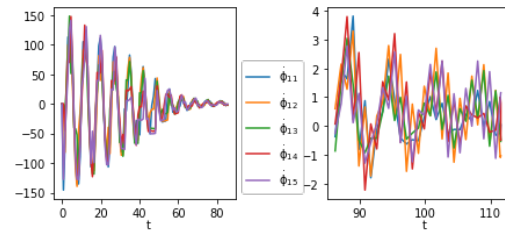
(b) Кинетическая энергия экипажа



(c) Абсолютная величина v скорости центра масс экипажа на интервале $t > 85$



(d) Траектория центра масс экипажа на плоскости OXY



(e) Угловые скорости роликов на колесе номер 1. Слева – на интервале $t < 85$, справа – на следующем интервале.

Рис. 24. Характер движения системы с вязким трением при комбинации начальных условий движений 1 и 2. По оси абсцисс всюду, кроме графика 24d, отложено безразмерное время t .

Заключение

Основные результаты, выносимые на защиту, следующие.

1. Построены модели экипажа с омни-колесами, движущегося по горизонтальной плоскости по инерции: неголономная с идеальными связями и голономная с неидеальными. Обе модели учитывают инерцию роликов омни-колес.
2. Первая модель получена в предположении, что ролик омни-колеса не проскальзывает относительно плоскости (связи идеальны). Уравнения движения на гладких участках (т.е. между сменой ролика в контакте) получены аналитически в псевдоскоростях и представляют собой уравнения 33 порядка для экипажа с 3 колесами и 5 роликами на каждом колесе. С помощью теории удара расчет изменения обобщенных скоростей при смене ролика в контакте сведен к решению системы линейных алгебраических уравнений, имеющей единственное решение в т.ч. при кратном ударе.
3. Аналитически показано, что при равенстве осевого момента инерции ролика нулю, её уравнения движения совпадают с уравнениями движения безынерционной модели [15].
4. Показано, что линейный первый интеграл, существующий в безынерционной модели, разрушается при осевом моменте инерции, отличном от нуля. При этом скорость изменения значения этого интеграла пропорциональна осевому моменту инерции ролика. Найдены линейные интегралы, связывающие угловую

скорость платформы экипажа и скорости собственного вращения роликов, не находящихся в контакте.

5. В ходе численных экспериментов обнаружен эффект быстрого убывания скорости центра масс по сравнению с угловой скоростью платформы экипажа.
6. Модель с неидеальными голономными связями реализована в системе автоматического построения численных динамических моделей для вязкого трения и для регуляризованного сухого трения. Для этого найдены геометрические условия контакта роликов омни- и месапит-колес и опорной плоскости.
7. Численно показано, что при стремлении осевого момента инерции ролика к нулю, движения системы с трением стремятся к движениям безынерционной модели. Обнаружено качественное сходство траекторий системы с вязким трением с достаточно большим коэффициентом трения с движениями модели, рассмотренной в главах 1 и 2.
8. Для различных моделей экипажа с омни-колесами, рассмотренных в работе – безынерционной модели и модели экипажа с массивными роликами на плоскости с регуляризованным сухим трением, а также для моделей экипажа с массивными роликами на абсолютно шероховатой плоскости и на плоскости с вязким трением – показана их взаимная согласованность при стремлении параметров – момента инерции ролика и коэффициента вязкого трения – к нулю или к бесконечности, соответственно.

Литература

- [1] Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Изв. РАН. Теория сист. управл. 2007. 2007. № 6. С. 142–149.
- [2] Ilon B. E. Wheels for a Course Stable Selfpropelling Vehicle Movable in Any Desired Direction on the Ground or Some Other Base. 1972.
- [3] Seeni Aravind, Schäfer Bernd, Hirzinger Gerd. Robot Mobility Systems for Planetary Surface Exploration – State-of-the-Art and Future Outlook : A Literature Survey // Aerospace Technologies Advancements. 2010. № January. С. 189–208.
- [4] Мартыненко Ю.Г. Управление движением мобильных колёсных роботов // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11, № 8. С. 29–80.
- [5] Голубев Ю.Ф. Построение движений робота-снейкбордиста // препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 2004.
- [6] Campion Guy, Bastin Georges, Dandrea-Novel B. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots // IEEE Transactions on Robotics

and Automation. 1996. T. 12, № 1. C. 47–62. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/481750/>.

- [7] Zimmermann Klaus, Zeidis Igor, Behn Carsten. Mechanics of Terrestrial Locomotion. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. C. 289.
- [8] Chung Woojin, Iagnemma Karl. Wheeled Robots // Springer Handbook of Robotics. Cham: Springer, 2016. C. 575–594.
- [9] Kanjanawanishkul Kiattisin. Omnidirectional wheeled mobile robots: wheel types and practical applications // International Journal of Advanced Mechatronic Systems. 2015. T. 6, № 6. C. 289. URL: <http://www.inderscience.com/link.php?id=74788>.
- [10] Adascalitei Florentina, Doroftei Ioan. Practical Applications for Mobile Robots based on Mecanum Wheels - a Systematic Survey // Proceedings of International Conference On Innovations, Recent Trends And Challenges In Mechatronics, Mechanical Engineering And New High-Tech Products Development – MECANITECH'11. T. 3. 2011. C. 112–123.
- [11] Gfrerrer A. Geometry and Kinematics of the Mecanum Wheel // Computer Aided Geometric Design. 2008. T. 25. C. 784–791. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cagd.2008.07.008>.
- [12] Зобова А.А., Татаринов Я.В. Математические аспекты динамики движения экипажа с тремя окольцованными колесами // Мобильные роботы и мехатронные системы. 2006. С. 61–67.
- [13] Зобова А.А., Татаринов Я.В. Свободные и управляемые движения некоторой модели экипажа с роликонесущими колесами //

Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. М., 2008. № 6. С. 62–65.

- [14] Зобова А.А., Татаринев Я.В. Динамика экипажа с роликонесущими колесами // ПММ. 2009. Т. 73, № 1. С. 13–22.
- [15] Зобова А.А. Применение лаконичных форм уравнений движения в динамике неголономных мобильных роботов // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4. С. 771–783.
- [16] Татаринев Я.В. Уравнения классической механики в новой форме // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. 2003. Т. 3. С. 67–76.
- [17] Татаринев Я.В. Уравнения классической механики в лаконичных формах. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005. С. 88.
- [18] Мартыненко Ю.Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // ПММ. 2010. Т. 74, № 4. С. 610–619.
- [19] Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С. Тележка с омниколесами на плоскости и сфере // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4. С. 785–801.
- [20] Килин А.А., Бобыкин А.Д. Управление тележкой с омниколесами на плоскости // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 4. С. 473–481.
- [21] Karavaev Yury L., Kilin Alexander A. The dynamics and control of a spherical robot with an internal omniwheel platform // Regular

- and Chaotic Dynamics. 2015. mar. T. 20, № 2. C. 134–152. URL: <http://link.springer.com/10.1134/S1560354715020033>.
- [22] Ivanov Alexander P. On the control of a robot ball using two omniwheels // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. jul. T. 20, № 4. C. 441–448. URL: <http://link.springer.com/10.1134/S1560354715040036>.
- [23] Qiang Zhan, Yao Cai, Caixia Yan. Design, analysis and experiments of an omni-directional spherical robot // 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 2011. may. C. 4921–4926. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/5980491/>.
- [24] Weiss A., Langlois R. G., Hayes M.J.D. Dynamics and vibration analysis of the interface between a non-rigid sphere and omnidirectional wheel actuators // Robotica. 2015. T. 33. C. 1850–1868.
- [25] Atlas Motion Platform Mecanum Wheel Jacobian In The Velocity And Static Force Domains / Jonathan J. Plumpton, M. John D. Hayes, Robert G. Langlois [и др.] // Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering. 2014. jun. T. 38, № 2. C. 251–261. URL: <http://www.nrcresearchpress.com/doi/10.1139/tcsme-2014-0018>.
- [26] Adamov B.I. A Study of the Controlled Motion of a Four-wheeled Mecanum Platform // Nelineinaya Dinamika. 2018. T. 14, № 2. C. 265–290. URL: <http://nd.ics.org.ru/nd180209/>.
- [27] Adamov B. I., Kobrin A. I. Parametric Identification of the Mathematical Model of the Omnidirectional Mobile

- Robot KUKA youBot // Mehatronika, Avtomatizacia, Upravlenie. 2018. apr. T. 19, № 4. С. 251–258. URL: <http://www.novtex.ru/mech/eng/doi/mau.19.251-258.html>.
- [28] Indiveri Giovanni, Paulus Jan, Plöger P. RoboCup 2006: Robot Soccer World Cup X // RoboCup 2006: Robot Soccer World Cup X / под ред. Gerhard Lakemeyer, Elizabeth Sklar, Domenico G. Sorrenti [и др.]. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007. С. 35–46. URL: <http://www.springerlink.com/index/K28874139801055W.pdf>
<http://link.springer.com/10.1007/978-3-540-74024-7>.
- [29] Wada Masayoshi. Holonomic and omnidirectional wheelchairs with synchronized 4WD mechanism // IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2007. С. 1196–1202.
- [30] Development of mobile robot drive system using mecanum wheels / Taha Bin Mohamed, Norsehah Abd Karim, Norazlin Ibrahim [и др.] // 2016 International Conference on Advances in Electrical, Electronic and Systems Engineering (ICAEES). IEEE, 2016. nov. С. 582–585. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/7888113/>.
- [31] A Mecanum Wheel Based Robot Platform for Warehouse Automation / J. Krishnaraj, K. Sangeetha, M.V. Tanneru Babu [и др.] // International Journal of Mechanical Engineering and Technology. 2017. T. 8, № 7. С. 181–189.
- [32] Salam Al-Ammri A, Ahmed Iman. Control of Omnidirectional Mobile Robot Motion // Al-Khwarizmi

- Engineering Journal. 2010. T. 6, № 4. C. 1–9. URL: <https://www.iasj.net/iasj?func=fulltext&aId=2195>.
- [33] Eng Donald. State Estimation for a Holonomic Omniwheel Robot Using a Particle Filter. Ph.D. thesis: Massachusetts Institute of Technology. 2010. C. 106.
- [34] Gordon N.J., Salmond D.J., Smith A.F.M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation // IEE Proceedings F Radar and Signal Processing. 1993. T. 140, № 2. C. 107. URL: <http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/ip-f-2.1993.0015>.
- [35] Del Moral Pierre. Nonlinear filtering: Interacting particle resolution // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics. 1997. sep. T. 325, № 6. C. 653–658. URL: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0764444297847787>.
- [36] Vicente Alexandre, Liu Jindong, Yang Guang-zhong. Surface classification based on vibration on omni-wheel mobile base // International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 2015. C. 916–921.
- [37] Ман Нгуен Ньы. Разработка математической модели погрузочно-разгрузочного устройства с всенаправленными колесами // Труды МАИ. 2012. Т. 58.
- [38] Ashmore Mark, Barnes Nick. Omni-drive robot motion on curved paths: The fastest path between two points is not a straight-line // AI 2002: Advances in Artificial Intelligence. 2002. C. 225–236. URL: <http://www.springerlink.com/index/q7cuajlf1xbu653d.pdf>.

- [39] Balkcom Devin J., Kavathekar Paritosh A., Mason Matthew T. Time-optimal Trajectories for an Omni-directional Vehicle // The International Journal of Robotics Research. 2006. oct. T. 25, № 10. C. 985–999. URL: <http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/0278364906069166>.
- [40] Huang Jeng-tze, Van Hung Tran, Tseng Ming-lei. Smooth Switching Robust Adaptive Control for Omnidirectional Mobile Robots // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2015. sep. T. 23, № 5. C. 1986–1993. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/7021920/>.
- [41] Bramanta Andra, Virgono Agus, Saputra Randy Erfa. Control system implementation and analysis for omniwheel vehicle // 2017 International Conference on Control, Electronics, Renewable Energy and Communications (ICCREC). IEEE, 2017. C. 265–270. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/8226711/>.
- [42] Kalmár-Nagy Tamás. Real-time trajectory generation for omnidirectional vehicles by constrained dynamic inversion // Mechatronics. 2016. may. T. 35. C. 44–53. URL: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0957415815002202>.
- [43] Feasible utilization of the inherent characteristics of holonomic mobile robots / Géza Szayer, Bence Kovács, Ferenc Tajti [и др.] // Robotics and Autonomous Systems. 2017. aug. T. 94. C. 12–24. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.robot.2017.04.002> <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0921889016306327>.
- [44] Field Jennifer R, Salman Mishah U. Kinematic motion studies of an OmniDirectional mobile robot // 2017 IEEE

- International Symposium on Robotics and Intelligent Sensors (IRIS). IEEE, 2017. C. 318–323. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/8250141/>.
- [45] Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots / R.L. Williams, B.E. Carter, P. Gallina [и др.] // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2002. jun. T. 18, № 3. C. 285–293. URL: <https://doi.org/10.1109/tra.2002.1019459> <http://ieeexplore.ieee.org/document/1019459/>.
- [46] Purwin Oliver, D’Andrea Raffaello. Trajectory generation and control for four wheeled omnidirectional vehicles // Robotics and Autonomous Systems. 2006. jan. T. 54, № 1. C. 13–22. URL: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0921889005001673>.
- [47] Li Xiang, Zell Andreas. Motion Control of an Omnidirectional Mobile Robot // Informatics in Control, Automation and Robotics. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. C. 181–193. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-3-540-85640-5_14.
- [48] Galicki Mirosław. Collision-free control of an omni-directional vehicle // Robotics and Autonomous Systems. 2009. T. 57. C. 889–900. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.robot.2009.06.005>.
- [49] Lin Lih-Chang, Shih Hao-Yin. Modeling and Adaptive Control of an Omni-Mecanum-Wheeled Robot // Intelligent Control and Automation. 2013. T. 4. C. 166–179.
- [50] Wittenburg Jens. Dynamics of multibody systems. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

- [51] Schiehlen Werner, Eberhard Peter. Applied Dynamics. Heidelberg: Springer, 2014. С. 215.
- [52] Jain Abhinandan. Robot and Multibody Dynamics. Dordrecht: Springer, 2011. С. 510.
- [53] Roberson Robert E., Schwertassek Richard. Dynamics Of Multibody Systems. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1988.
- [54] Jerkovsky W. The Structure of Multi-Body dynamics equations: Tech. Rep.: Los Angeles: Space and Missile Systems Organization, Air Force Systems Command, 1977.
- [55] Чаплыгин С.А. Исследования по динамике неголономных систем. Ленинград: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1949. С. 111.
- [56] Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. Москва: Наука, 1967. С. 520.
- [57] Карапетян А В. О реализации неголономных связей и устойчивость кельтских камней // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 45, № 1. С. 42–51.
- [58] Теоретическая механика / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев [и др.]. Москва: Академия, 2010. С. 432.
- [59] Аппель П. Теоретическая механика. Том первый. Статика. Динамика точки. Москва: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960. С. 515.
- [60] Аппель П. Теоретическая механика. Том второй. Динамика системы. Аналитическая механика. Москва: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960. С. 487.

- [61] Вильке В.Г. Теоретическая механика. СПб.: Лань, 2003. С. 304.
- [62] Козлов В.В., Трещев Д.В. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. Москва: Изд. Моск. Ун., 1991. С. 168.
- [63] Brogliato Bernard. Nonsmooth Mechanics Models. Dynamics and Control. London: Springer-Verlag London, 1999. С. 396.
- [64] Pfeiffer Friedrich, Glocker Christoph. Multibody Dynamics With Unilateral Constraints / под ред. Weinheim. Wiley-VCH, 1995. С. 317.
- [65] Pfeiffer Friedrich, Glocker Christoph. Multiple Impacts with Friction in rigid multibody systems // Nonlinear Dynamics. 1995. Т. 7. С. 471–497.
- [66] Pfeiffer Friedrich. Unilateral Multibody Dynamics // Meccanica. 1999. Т. 34, № 6. С. 435–449.
- [67] Pfeiffer Friedrich, Glocker Christoph. Iutam Symposium on Unilateral Multibody Contacts. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1999.
- [68] Pfeiffer Friedrich, Wosle M. Dynamics of multibody systems with unilateral constraints // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1999. Т. 9, № 3. С. 473–478.
- [69] Glocker Christoph. Formulation of spatial contact situations in rigid multibody systems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1999. Т. 177, № 3-4. С. 199–214.

- [70] Pfeiffer Friedrich. Multibody systems with unilateral constraints // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2001. Т. 65, № 4. С. 665–670.
- [71] Numerical simulation of finite dimensional multibody nonsmooth mechanical systems / B. Brogliato, A.A. ten Dam, L. Paoli [и др.] // Applied Mechanics Reviews. 2002. Т. 55, № 2.
- [72] Pfeiffer Friedrich. Unilateral Multibody Dynamics // International Journal for Multiscale Computational Engineering. 2003. Т. 1, № 2-3. С. 311–326.
- [73] Flores Paulo, Leine Remco, Glocker Christoph. Modeling and Analysis of Rigid Multibody Systems with Translational Clearance Joints Based on the Nonsmooth Dynamics Approach // Multibody Dynamics. Computational Methods and Applications. Dordrecht: Springer, 2011. Т. 23. С. 107–130. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-90-481-9971-6>.
- [74] Zbiciak Artur, Kozyra Zofia. Dynamics of Multi-body Mechanical Systems with Unilateral Constraints and Impacts // Procedia Engineering. 2014. Т. 91. С. 112–117. URL: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1877705814030422>.
- [75] Березинская С.Н., Сорокина О.В., Кугушев Е.И. Об односторонних неголономных связях // препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. Москва, 2003.
- [76] Pfeiffer Friedrich, Glocker Christoph. Complementarity problems in multibody systemes with planar friction // Applied Mechanics. 1993. Т. 64. С. 452–463.

- [77] Pfeiffer Friedrich, Wosle M. Dynamics of Multibody Systems Containing Dependent Unilateral Constraints with Friction // Journal of Vibration and Control. 1996. T. 2, № 2. C. 161–192. URL: <http://jvc.sagepub.com/cgi/doi/10.1177/107754639600200203>.
- [78] Anitescu M., Potra F. Formulating Multi-rigid-body Contact Problems with Friction as Solvable Linear Complementarity Problems // Nonlinear Dynamics. 1997. T. 14, № 3. C. 231–247. URL: <http://citeseer.ist.psu.edu/anitescu97formulating.html>.
- [79] Lacoursière Claude, Servin Martin. Regularized multibody dynamics with dry frictional contacts // Euromech Colloquium: Nonsmooth contact and impact laws in mechanics. 2011. URL: <http://umu.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2:475660>.
- [80] Charles Alexandre, Ballard Patrick. Multibody dynamics with unilateral constraints and friction // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. 2014. dec. T. 14. C. 63–64. URL: <http://doi.wiley.com/10.1002/pamm.201410019>.
- [81] Paoli Laetitia. Multibody Dynamics with Unilateral Constraints: Computational Modeling of Soft Contact and Dry Friction Laetitia Paoli // System Modeling and Optimization. Cham: Springer International Publishing, 2015. C. 420—429.
- [82] Moreau J. J. Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics // Nonsmooth Mechanics and Applications. Vienna: Springer Vienna, 1988. C. 1–82. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-3-7091-2624-0_1.

- [83] Новожилов И.В. Фракционный анализ. Москва: Изд. Моск. Ун., 1991. С. 190.
- [84] Association Modelica. Modelica® - A Unified Object-Oriented Language for Systems Modeling, Language Specification, Version 3.3. 2012.
- [85] ПО {Dymola}. \url{http://www.3ds.com/products-services/catia/products/dymola}.
- [86] Fritzson P. Principles of Object–Oriented Modeling and Simulation with Modelica 2.1. Piscataway, New Jersey: IEEE Press, 2004. С. 898.
- [87] Косенко И.И. Интегрирование уравнений вращательного движения твердого тела в алгебре кватернионов. Случай Эйлера // ПММ. 1998. Т. 62, № 2. С. 206–214.
- [88] Косенко И.И. Реализация компьютерной модели динамики систем твердых тел с освобождающими связями // Математическое моделирование. 2006. 2006. Т. 18, № 2. С. 95–106.
- [89] Multibody Systems Dynamics: Modelica Implementation and Bond Graph Representation / Ivan Kosenko, Maria Loginova, Yaroslav Obraztsov [и др.] // Proceedings of the 5th International Modelica Conference. 2006. С. 213–223.
- [90] Kosenko Ivan. Physically Oriented Approach To Construct Multibody System Dynamics Models Using Modelica Language // MULTIBODY DYNAMICS 2007, ECCOMAS Thematic Conference. Milano: 2007.

- [91] Косенко И.И. Графовые представления моделей динамики систем тел // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, № 9. С. 80–88.
- [92] Косенко И.И., Гусев И.К. Компьютерная модель динамики прямозубого эвольвентного зацепления в редукторах // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 4. С. 713–734.
- [93] Kossenko I I, Stavrovskaja M S. How One Can Simulate Dynamics of Rolling Bodies via Dymola: Approach to Model Multibody System Dynamics Using Modelica // Proceedings of the 3rd International Modelica Conference. Linkoping, Sweden: Linkopings universitet, 2003. С. 299–309.
- [94] Косенко И.И., Александров Е.Б. Реализация модели Контенсу-Эрисмана касательных сил в контактной задаче Герца // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 4. С. 499–517.
- [95] Косенко И.И., Ал. Эт. Моделирование и виртуальное прототипирование. М.: Альфа-М, 2012. С. 176.
- [96] Kálmán Viktor, Vajta László. Designing and tuning a brake assistant for omnidirectional wheels // Electrical Engineering and Computer Science. 2012. Т. 56, № 4. С. 105–111. URL: <https://pp.bme.hu/eecs/article/view/7164>.
- [97] Kálmán Viktor. On modeling and control of omnidirectional wheels. Ph.D. thesis: Budapest University of Technology and Economics. 2013. С. 94.
- [98] Kálmán Viktor. Controlled Braking for Omnidirectional Wheels // International Journal of Control Science and

- Engineering. 2013. Т. 3, № 2. С. 48–57. URL: <http://article.sapub.org/10.5923.j.control.20130302.03.html>.
- [99] Kálmán Viktor. Omnidirectional Wheel Simulation - a Practical Approach // Acta Technica Jaurinensis. 2013. Т. 6, № 2. С. 73–90.
- [100] Герасимов К.В., Зобова А.А. Движение симметричного экипажа на омни-колесах с массивными роликами // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, № 4. С. 427–440.
- [101] Герасимов К.В., Зобова А.А. Динамика экипажа на омни-колесах с массивными роликами с учетом смены ролика в контакте с опорной плоскостью // Труды МАИ. 2018. С. принята к печати.
- [102] Косенко И.И., Герасимов К.В. Физически-ориентированное моделирование динамики омнитежки // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12, № 2. С. 251–262. URL: <http://nd.ics.org.ru/nd1602007/>.
- [103] I. Kosenko Ivan, Ya. Stepanov Sergey, V. Gerasimov Kirill. Improved Contact Tracking Algorithm for the Omni Wheel in General Case of Roller Orientation // The Proceedings of the Asian Conference on Multibody Dynamics. 2016. Т. 2016.8. С. 10_1289244.
- [104] Kosenko I., Gerasimov K. Object-oriented implementation of a unilateral point-contact constraint model with friction in frame of the omni vehicle multibody system // 11th World Congress on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference

- on Computational Mechanics, ECCM 2014 and 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECFD 2014. 2014.
- [105] Kosenko Ivan, Gerasimov Kirill. Implementation of the Omni Vehicle Dynamics on Modelica // Proceedings of the 10th International Modelica Conference. Lund: 2014. C. 1143–1150.
 - [106] Kosenko I., Gerasimov K. Object-oriented approach to the construction of an omni vehicle dynamical model // Journal of Mechanical Science and Technology. 2015. T. 29, № 7.
 - [107] Kosenko I., Gerasimov K. Omni vehicle dynamics model: Object-oriented implementation and verification // AIP Conference Proceedings. T. 1648. 2015.
 - [108] Kosenko I.I., Gerasimov K.V., Stavrovskiy M.E. Contact types hierarchy and its object-oriented implementation // COUPLED PROBLEMS 2015 - Proceedings of the 6th International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. 2015.
 - [109] Dynamical Model of a Vehicle with Omni Wheels: Improved and Generalized Contact Tracking Algorithm / Ivan Kosenko, Sergey Stepanov, Kirill Gerasimov [и др.] // Proceedings of the 11th International Modelica Conference. Versailles: 2015.
 - [110] Virtual testbench for the omni wheel dynamics simulation: New contact tracking algorithm / I. Kosenko, S. Stepanov, K. Gerasimov [и др.] // ECCOMAS Congress 2016 - Proceedings of the 7th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. T. 3. 2016.

- [111] Martynenko Yu.G., Formal'skii A.M. On the Motion of a Mobile Robot with Roller-Carrying Wheels // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2007. Т. 46, № 6. С. 976–983.
- [112] Моделирование и виртуальное прототипирование / И. И. Косенко, Л. В. Кузнецова, А. В. Николаев [и др.]. Альфа-М, 2012. 176 с.