

# О динамике экипажа с омни-колесами с массивными роликами

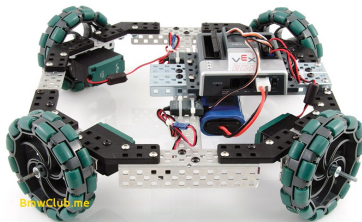
К.В. Герасимов, А.А. Зобова, И.И. Косенко

Кафедра теоретической механики и мехатроники  
Механико-математический факультет  
МГУ им. М.В. Ломоносова

Июль 2018

# Об омни-колесах

Оси роликов параллельны плоскости колеса



# Об омни-колесах

Оси роликов под углом к плоскости колеса (Mecanum)



## 1. Уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов

- Постановка задачи

- Уравнения движения в форме Я.В. Татаринова

- Свойства и сравнение с безынерционной моделью

## 2. Смена ролика в контакте колеса и опорной плоскости

- Основное уравнение теории удара

- Изменение энергии

- Численное решение

## 3. Динамика экипажа с трением

- Построение и верификация модели

## 1. Уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов

### Постановка задачи

Уравнения движения в форме Я.В. Татаринова

Свойства и сравнение с безынерционной моделью

## 2. Смена ролика в контакте колеса и опорной плоскости

Основное уравнение теории удара

Изменение энергии

Численное решение

## 3. Динамика экипажа с трением

Построение и верификация модели

# Постановка задачи

## Рисунки

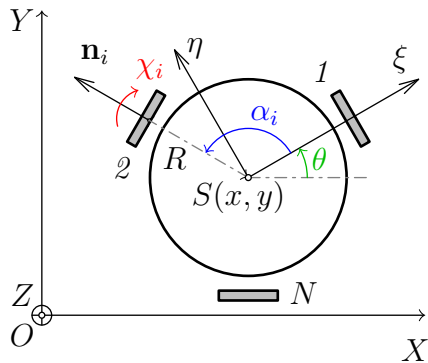


Рис.: Экипаж

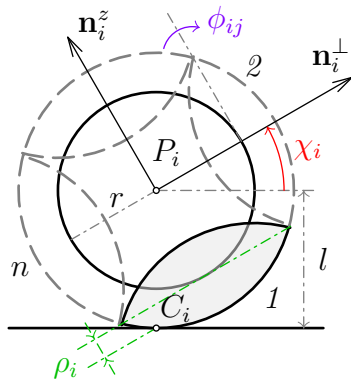


Рис.: Колесо

# Постановка задачи

## Тела, связи, степени свободы

- ▶ Экипаж состоит из платформы,  $N$  колес и  $n$  роликов, количество твердых тел:

$$1 + N(n + 1)$$

- ▶ Оси и центры колес и роликов неподвижны относительно платформы и колес соответственно
- ▶ Скорость точек контакта равна нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, i = 1 \dots N$$

- ▶ Количество степеней свободы:

$$3 + N(n - 1)$$

# Постановка задачи

Координаты, псевдоскорости, связи

- Обобщенные координаты:

$q = (x, y, \theta, \chi_i, \phi_k, \phi_s)$ , где  $i, k = 1 \dots N$ ,  $s$  – ролики вне контакта.

- Псевдоскорости:

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \mathbf{v}_S = R\nu_1 \mathbf{e}_\xi + R\nu_2 \mathbf{e}_\eta, \nu_3 = \Lambda \dot{\theta}, \nu_s = \dot{\phi}_s$$

- Связи:

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos \theta - R\nu_2 \sin \theta, \quad \dot{y} = R\nu_1 \sin \theta + R\nu_2 \cos \theta,$$

$$\dot{\theta} = \frac{\nu_3}{\Lambda}, \quad \dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}),$$

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{l \cos \chi_k - r}(\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k), \quad \dot{\phi}_s = \nu_s$$



# Кинетическая энергия и лагранжиан

- ▶ Присутствует слагаемое, пропорциональное  $B$  – моменту инерции ролика относительно его оси собственного вращения:

$$2T = 2L = M\mathbf{v}_S^2 + I_S\dot{\theta}^2 + J\sum_i \dot{\chi}_i^2 +$$

$$+ B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}),$$

$$M = \dot{M} + Nnm$$

$$I_S = \dot{I}_S + N \cdot n \left( \frac{A+B}{2} + mR^2 + \frac{mr^2}{2} \right),$$

$$J = \dot{J} + n(A + mr^2)$$

# Кинетическая энергия и лагранжиан

- С учетом связей:

$$\begin{aligned} 2L^* = & \dot{\nu}^T \dot{V}^T \dot{M} \dot{V} \dot{\nu} + \\ & + B \sum_i \left( \frac{(\nu_2 \sin \alpha_i + \nu_1 \cos \alpha_i)^2 R^2}{\rho_i^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2R\nu_3(\nu_2 \sin \alpha_i + \nu_1 \cos \alpha_i) \sin \chi_i}{\rho_i \Lambda} \right) \\ & + B \sum_{i,j} \left( \frac{2\nu_3 \nu_{ni+j} \sin(\kappa_j + \chi_i)}{\Lambda} + \nu_{ni+j}^2 \right) \end{aligned}$$

где  $\frac{1}{2} \dot{\nu}^T \dot{V}^T \dot{M} \dot{V} \dot{\nu}$  – лагранжиан системы без роликов,  
 $\rho_i = l \cos \chi_i - r$

# Кинетическая энергия и лагранжиан

Матрицы кинетической энергии и связей для системы без роликов

$$\dot{M} = \text{diag}(M, M, I_S, J \dots J),$$

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} R \cos \theta & -R \sin \theta & 0 \\ R \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} \\ \frac{R}{l} \sin \alpha_i & -\frac{R}{l} \cos \alpha_i & -\frac{R}{l\Lambda} \end{bmatrix}$$

## 1. Уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов

Постановка задачи

Уравнения движения в форме Я.В. Татаринова

Свойства и сравнение с безынерционной моделью

## 2. Смена ролика в контакте колеса и опорной плоскости

Основное уравнение теории удара

Изменение энергии

Численное решение

## 3. Динамика экипажа с трением

Построение и верификация модели

# Структура уравнений

Отличие от случая без роликов

- Уравнения Я.В. Татаринова:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}, \quad (1.1)$$

$$\nu_\mu P_\mu = \dot{q}_i p_i, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

- Лагранжиан и “импульсы” отличаются аддитивными членами:

$$L^* = \dot{L}^* + BL_\Delta^*(\nu, \chi)$$

$$P_\alpha = \dot{P}_\alpha(\theta, p_x, p_y, p_\chi) + P_\Delta(p_{\phi_i}, \chi)$$

# Структура уравнений

## Матрица лагранжиана

Лагранжиан с учетом связей имеет вид:

$$2L^* = \boldsymbol{\nu}^T V^T \mathcal{M} V \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu}$$

Структура симметричной матрицы  $\mathcal{M}^*$  следующая:

$$\mathcal{M}^* = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} m_{ij}^* \end{pmatrix}_{3 \times 3} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ B\Lambda^{-1} \sin \chi_{12} & \dots & B\Lambda^{-1} \sin \chi_{nN} \end{pmatrix} \\ & B \\ & * & \ddots \\ & & B \end{bmatrix}$$

# Структура уравнений

## Слагаемые для свободных роликов

Первое слагаемое (1.1) получается дифференцированием лагранжиана и подстановкой связей (ниже  $\mathcal{M}_i^* = \frac{\partial \mathcal{M}^*}{\partial \chi_i}$ ):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} = \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi) \nu_\alpha) = \mathcal{M}^*(\chi_i) \dot{\nu}_\alpha + \left( \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i^* (V \nu)_{3+i} \nu \right)_\alpha,$$

Слагаемые, соответствующие свободным роликам:

$$\frac{\cos \chi_{ij} \nu_3 B \left( -\frac{\nu_3 R}{l \Lambda} - \frac{\cos \alpha_i \nu_2 R}{l} + \frac{\sin \alpha_i \nu_1 R}{l} \right)}{\Lambda} = \frac{B}{\Lambda} \cos \chi_{ij} (\dot{\chi}_i)^* \nu_3.$$

# Структура уравнений

## Детали

Формальные импульсы  $P_\alpha$  и скобки Пуассона  $L^*$  с ними:

$$\begin{aligned}P_1 &= R \left( p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_i \left( \frac{\sin \alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\cos \alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \right) \right), \\P_2 &= R \left( -p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_i \left( -\frac{\cos \alpha_i p_{\chi_i}}{l} + \frac{\sin \alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \right) \right), \\P_3 &= \frac{1}{\Lambda} \left( p_\theta - \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i} \right), \quad P_s p_{\phi_s},\end{aligned}$$

$$\{P_1, L^*\} = -\frac{\partial P_1}{\partial p_{\chi_i}} \frac{\partial L^*}{\partial \chi_i} = -\frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^T \sin \alpha_i \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu},$$

$$\{P_2, L^*\} = \frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^T \cos \alpha_i \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}, \quad \{P_3, L^*\} = \frac{R}{2\Lambda} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}, \quad \{P_s, L^*\} = 0,$$

Суммы  $\{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\} \neq 0$  лишь для первых трех уравнений.



# Уравнения движения

в форме Я.В. Татаринова

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}$$

$$\nu_\mu P_\mu = \dot{q}_i p_i, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$L^* = \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \boldsymbol{\nu} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_{11} & O_{3 \times N} & \tilde{\mathbf{M}}_{13} \\ & J E_{N \times N} & O_{N \times Nn} \\ \star & & B E_{Nn \times Nn} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{11} = \text{diag}(M, M, I_S)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ B \sin \chi_{11} & \cdots & B \sin \chi_{Nn} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} R \cos \theta & -R \sin \theta & 0 \\ R \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} \\ \frac{R}{l} \sin \alpha_i & -\frac{R}{l} \cos \alpha_i & -\frac{R}{l\Lambda} \end{bmatrix}$$

## 1. Уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов

Постановка задачи

Уравнения движения в форме Я.В. Татаринова

Свойства и сравнение с безынерционной моделью

## 2. Смена ролика в контакте колеса и опорной плоскости

Основное уравнение теории удара

Изменение энергии

Численное решение

## 3. Динамика экипажа с трением

Построение и верификация модели

# Структура уравнений

Новые слагаемые ( $\mathcal{P}_\alpha$  и  $\mathcal{M}_i^*$  зависят от  $\chi$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^* \dot{\boldsymbol{\nu}} = & \frac{MR^2}{\Lambda} \begin{pmatrix} \nu_2 \nu_3 \\ -\nu_1 \nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{R}{2I} \boldsymbol{\nu}^T \begin{pmatrix} -\sin \alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \cos \alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \Lambda^{-1} \mathcal{M}_i^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ & - BR^2 \boldsymbol{\nu}^T \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu} - B \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \cos \chi_{12} \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_1^* \\ \vdots \\ \cos \chi_{Nn} \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_N^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Структура уравнений

## Свойства

1. Интеграл энергии  $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i)\boldsymbol{\nu} = h = \text{const}$   
(связи автономны, идеальны, силы консервативны)
2.  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0 \implies \nu_s = \text{const}$
3.  $B = 0 \implies$  уравнения как в безынерционной модели.
4. Интеграл  $m_{33}^*\nu_3 = \text{const}$  разрушается при  $B \neq 0$ .  $\dot{\nu}_3 \sim B$ .
5. Первые интегралы:

$$\nu_s + \frac{1}{\Lambda} \sin \chi_{ij} \nu_3 = \text{const.}$$

Вращение  $\nu_1(0) = 0, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) \neq 0$  неравномерно.

6. Замена псевдоскоростей  $\boldsymbol{\nu} \rightarrow \lambda \boldsymbol{\nu}, \lambda \neq 0$  эквивалентна замене времени  $t \rightarrow \lambda t$ .

# Смена ролика

(1) Уравнения вырождаются на стыках роликов:

разрыв 2ого рода в правой части из-за выражений  $(l \cos \chi_i - r)$  в знаменателе.

Пусть переход на следующий ролик будет раньше стыка.

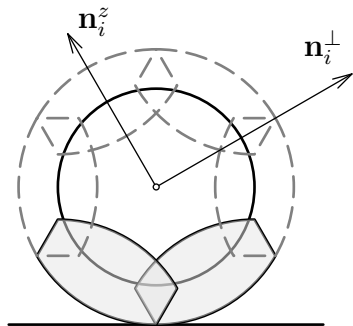


Рис.: Ролики перекрываются

# Смена ролика

(2) Ролики входят и выходят из состояния контакта при  $t = t^*$ .

Происходит мгновенное снятие связи с одного ролика и наложение связи на другой.

Пусть:

- ▶  $\Delta t \ll 1$ ,  $\Delta \mathbf{q} \sim \nu \Delta t \ll 1$ ,  $\Delta \nu < \infty$ ,
- ▶ в точках контакта:  $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{F}$ ,
- ▶ к моменту окончания удара  $t^* + \Delta t$  уравнения связей выполнены (  $\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}(\mathbf{q})\nu^+$  )
- ▶ верно основное уравнение удара  $\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{Q}$
- ▶ связи идеальны  $\mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}^+ = 0$

## 1. Уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов

Постановка задачи

Уравнения движения в форме Я.В. Татаринова

Свойства и сравнение с безынерционной моделью

## 2. Смена ролика в контакте колеса и опорной плоскости

Основное уравнение теории удара

Изменение энергии

Численное решение

## 3. Динамика экипажа с трением

Построение и верификация модели

# Основное уравнение теории удара

Линейная система алгебраических уравнений на реакции и скорости после удара

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^+ = 0, \quad \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}^+ = 0$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{J}^T \mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+, \quad \mathbf{J}\mathbf{V} = 0$$

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{J}^T \mathbf{F} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-$$

$$(\boldsymbol{\nu}^+; \mathbf{F})^T = (\mathbf{M}\mathbf{V}; -\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-$$

$$\dim \mathbf{M}\mathbf{V} = \dim \mathbf{q} \times \dim \boldsymbol{\nu}$$

$$\dim \mathbf{J}^T = \dim \mathbf{q} \times \dim \mathbf{F}$$

$$\dim \mathbf{q} = 3 + N(n+1)$$

$$\dim \boldsymbol{\nu} = 3 + N(n-1)$$

$$\dim \mathbf{F} = 2N$$

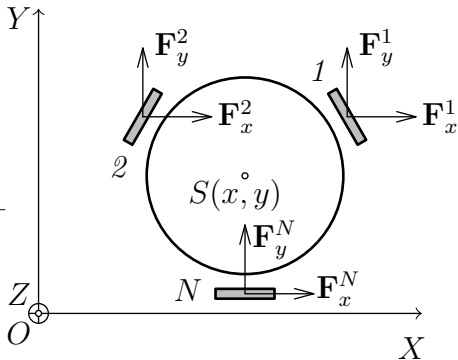


Рис.: Касательные реакции в точках контакта



# Основное уравнение теории удара

## Ударные обобщенные импульсы и реакции

$$\mathbf{Q} = \left( Q_1, Q_2, Q_\theta, Q_{\chi_i}|_{i=1}^N, Q_{\phi_i}|_{i=1}^N, Q_s \right)^T$$

$$Q_1 = \sum_{i=1}^N F_i^x$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^N F_i^y$$

$$Q_\theta = \sum_{i=1}^N Q_\theta^i = \sum_{i=1}^N R \left( -F_i^x \sin(\theta + \alpha_i) + F_i^y \cos(\theta + \alpha_i) \right)$$

$$Q_{\chi_i} = \frac{l}{R} Q_\theta^i$$

$$Q_{\phi_i} = -\rho_i \left( F_i^x \cos(\theta + \alpha_i) + F_i^y \sin(\theta + \alpha_i) \right)$$

$$Q_s = 0$$

# Независимое нахождение обобщенных скоростей

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \dot{\mathbf{q}}^- - \Delta\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ \in \tilde{\mathcal{V}}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{M}\mathbf{V}) \\ &= (\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-, \mathbf{M}\mathbf{V}) \\ &= (\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-, \mathbf{V}) \\ &= \mathbf{V}^T \mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{V}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^- \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\nu}^+ = \left( \mathbf{V}^T \mathbf{M}\mathbf{V} \right)^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-$$

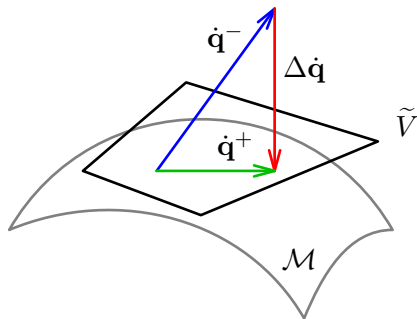


Рис.:  $\dot{\mathbf{q}}^+$  – проекция  $\dot{\mathbf{q}}^-$  на  $\tilde{\mathcal{V}}$ ,  
ортогональная в метрике  $\mathbf{M}$

# Нахождение обобщенных скоростей и ударных реакций

Основное уравнение удара  $M(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{Q}$

Дифференциальные связи  $\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^+ = 0$

Условие идеальности связей  $\mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}^+ = 0$

Система разрешима относительно  $(\boldsymbol{\nu}^+; \mathbf{F})^T$

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{J}^T \mathbf{F} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-$$

Скорости находятся независимо от сил  $(\mathbf{V}^T \cdot)$

$$\boldsymbol{\nu}^+ = \left( \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \right)^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}^-$$

Скорости находятся независимо от сил  $(\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} \cdot)$

$$\mathbf{F} = - \left( \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T \right)^{-1} \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}^-$$

## 1. Уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов

Постановка задачи

Уравнения движения в форме Я.В. Татаринова

Свойства и сравнение с безынерционной моделью

## 2. Смена ролика в контакте колеса и опорной плоскости

Основное уравнение теории удара

**Изменение энергии**

Численное решение

## 3. Динамика экипажа с трением

Построение и верификация модели

# Изменение энергии

Соответствует теореме Карно

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} (\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}), \quad \dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}\nu^+$$

В силу идеальности связей:

$$(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^+, \Delta\dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}^+) = (\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{q}}^+) = 0$$

Поэтому:

$$\Delta\mathbf{T} = -\frac{1}{2} (\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \Delta\dot{\mathbf{q}}) \leq 0$$

$$\begin{aligned} 2\Delta\mathbf{T} &= 2(\mathbf{T}^+ - \mathbf{T}^-) = (\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^+, \dot{\mathbf{q}}^+) - (\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-, \dot{\mathbf{q}}^-) \\ &= (\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \Delta\dot{\mathbf{q}}) + 2(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-, \Delta\dot{\mathbf{q}}) \\ &= -(\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \Delta\dot{\mathbf{q}}) + 2(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^+, \Delta\dot{\mathbf{q}}) = -(\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \Delta\dot{\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

## 1. Уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов

Постановка задачи

Уравнения движения в форме Я.В. Татаринова

Свойства и сравнение с безынерционной моделью

## 2. Смена ролика в контакте колеса и опорной плоскости

Основное уравнение теории удара

Изменение энергии

Численное решение

## 3. Динамика экипажа с трением

Построение и верификация модели

# Значения параметров

- ▶ радиус колеса  $r = 0.05$ ,
- ▶ масса колеса  $M_k = 0.15$ ,
- ▶ масса ролика  $m_{рол} = 0.05$ ,
- ▶ радиус платформы  $R = 0.15$ ,
- ▶ масса платформы  $M_{пл} = 1$ .

Вращение вокруг своей оси ( $\nu_{1,2}(0) = 0, \nu_3 = 1$ ).

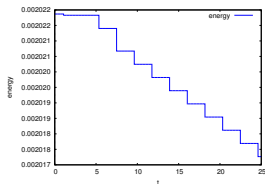


Рис.: Кинетическая энергия

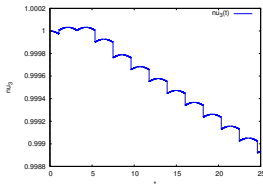


Рис.: Угловая скорость экипажа

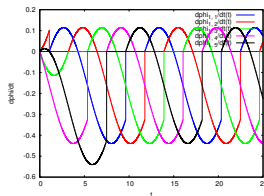


Рис.: Угловые скорости роликов

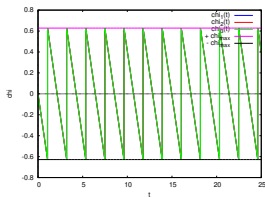


Рис.: Углы поворота колес

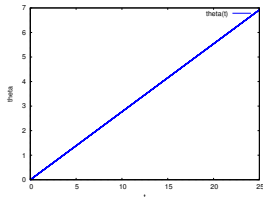


Рис.: Угол поворота экипажа

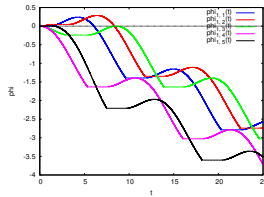


Рис.: Углы поворота роликов



Движение по прямой ( $\nu_1(0) = 1, \nu_{2,3} = 0$ ).

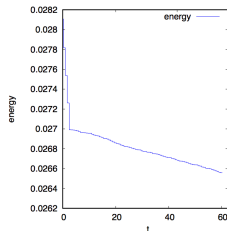


Рис.:  
Кинетическая  
энергия

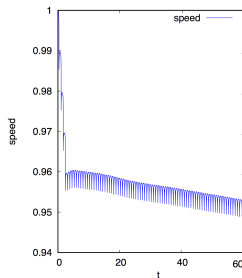


Рис.: Скорость центра  
масс

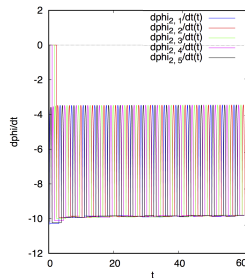


Рис.:  $\dot{\phi}$  на заднем колесе

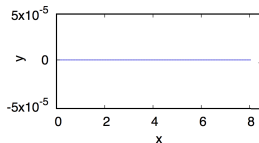


Рис.: Траектория

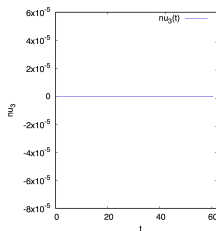


Рис.: Угловая

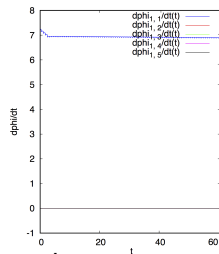


Рис.:  $\dot{\phi}$  на переднем

Движение с закруткой ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ ).

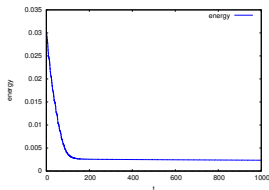


Рис.: Кинетическая энергия

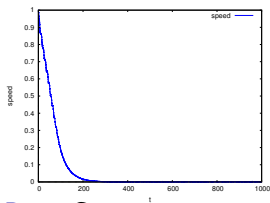


Рис.: Скорость центра масс

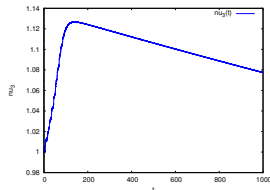


Рис.: Угловая скорость экипажа

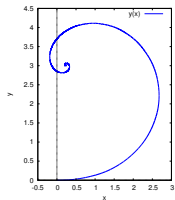


Рис.: Траектория

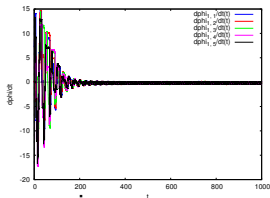


Рис.:  $\phi$  на первом колесе

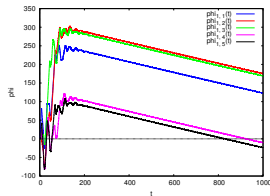


Рис.: углы  $\phi$  на первом колесе

## 1. Уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов

Постановка задачи

Уравнения движения в форме Я.В. Татаринова

Свойства и сравнение с безынерционной моделью

## 2. Смена ролика в контакте колеса и опорной плоскости

Основное уравнение теории удара

Изменение энергии

Численное решение

## 3. Динамика экипажа с трением

Построение и верификация модели

## Динамика отдельного ролика

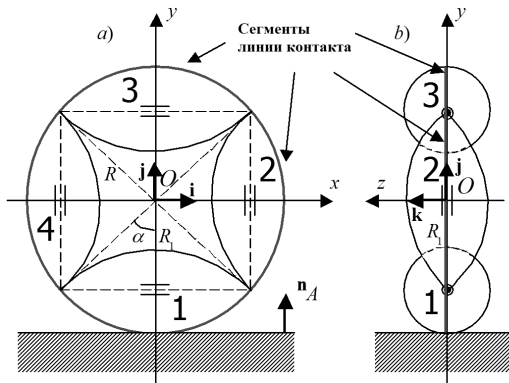


Рис.: Омни-колесо в вертикальном положении: а) вид сбоку; б) вид спереди.

$$x^2 + \left( \sqrt{y^2 + z^2} + R_1 \right)^2 = R^2$$

## Отслеживание контакта

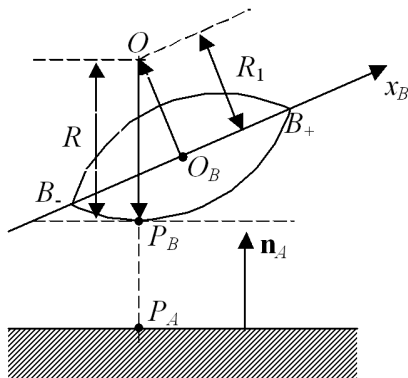


Рис.: Схема отслеживания контакта: вид сбоку отдельного ролика.

$$\mathbf{d} = \frac{T_B \mathbf{i}_B \times \mathbf{n}_A}{|T_B \mathbf{i}_B \times \mathbf{n}_A|}$$

$$\overrightarrow{O_B O} = R_1 \mathbf{d} \times T_B \mathbf{i}_B$$

$$\mathbf{r}_{P_B} = \mathbf{r}_B + R_1 \mathbf{d} \times T_B \mathbf{i}_B - R \mathbf{n}_A$$

$$\mathbf{r}_{P_A} = (x_{P_B}, 0, z_{P_B})^T$$

$$|T_B \mathbf{i}_B \cdot \mathbf{n}_A| \leq \sin \alpha$$

$$y_B < R, \quad y_{P_B} = 0, \quad F_n = 0$$

# Структура динамической модели

- ▶ сухое трение, регуляризованное в окрестности  $\mathbf{v} = 0$  линейной функцией насыщения
- ▶ твердое тело платформы, 3 твердых тела колес, 12 твердых тел роликов
- ▶ для каждого твердого тела 6 ОДУ Ньютона для ц.м. и 7 ОДУ Эйлера (4 кин.ур. для кватерниона и 3 дин.ур. для  $\omega$ )
- ▶ всего 208 ОДУ плюс дополнительные дифференциальные уравнения, задаваемые связями

# Верификация

## Модель для сравнения

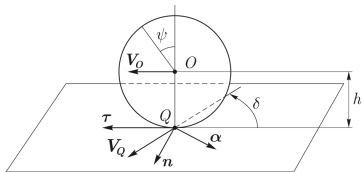


Рис.: Модель колеса

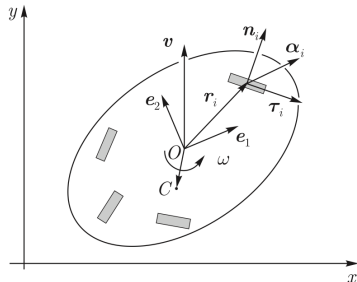


Рис.: Модель экипажа

# Верификация

## Варианты движений

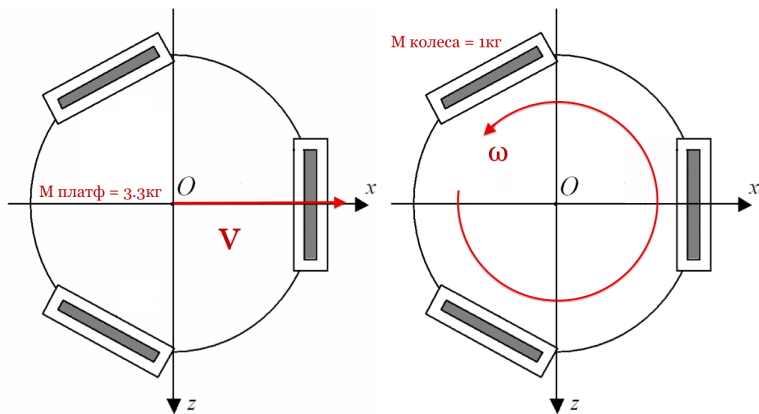
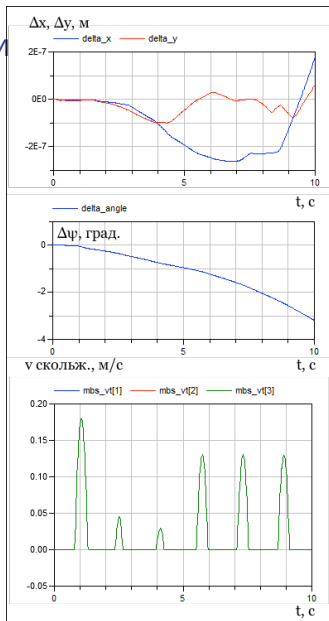


Рис.: Параметры экспериментов

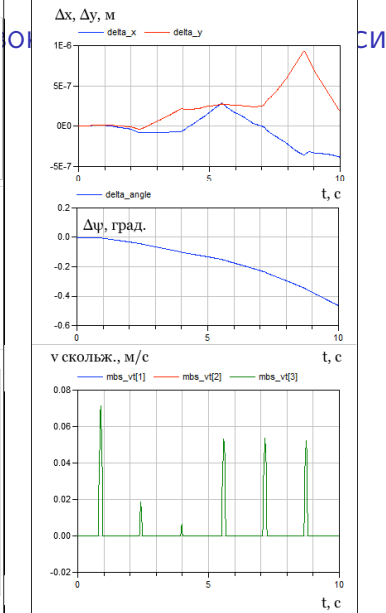
испытания – при  $\sum m_{\text{рол}} \rightarrow 0$



Верифи

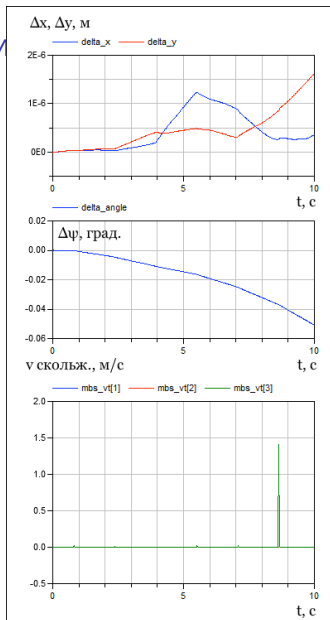


$$\eta = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$



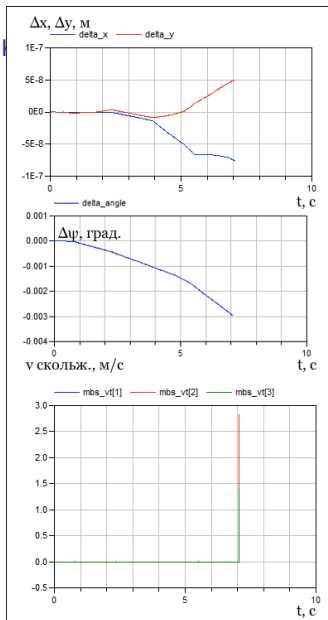
$$\eta = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

Верифи



$$\eta = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

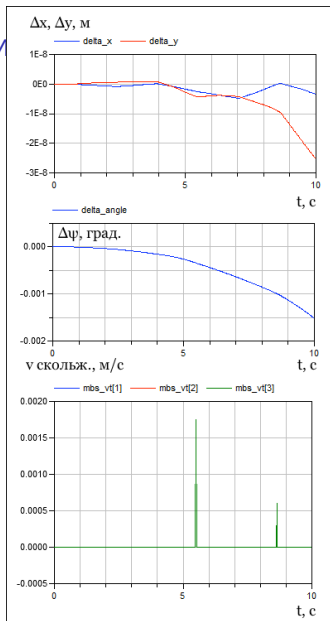
О



си

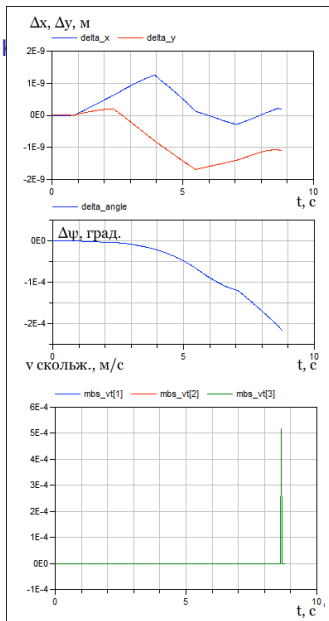
$$\eta = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

Верифи



$$\eta = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

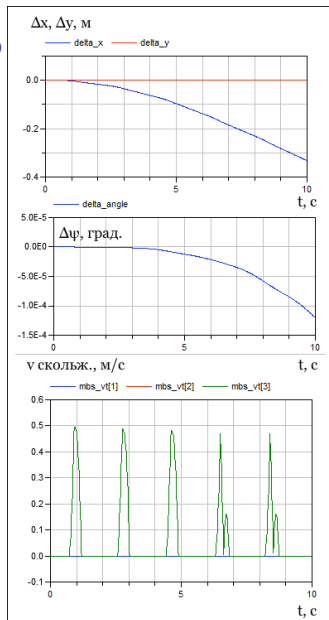
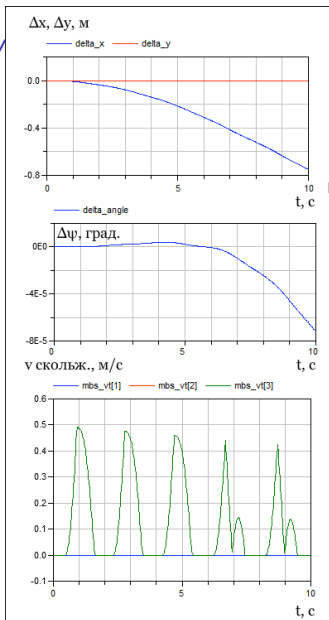
О



си

$$\eta = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

Верифи

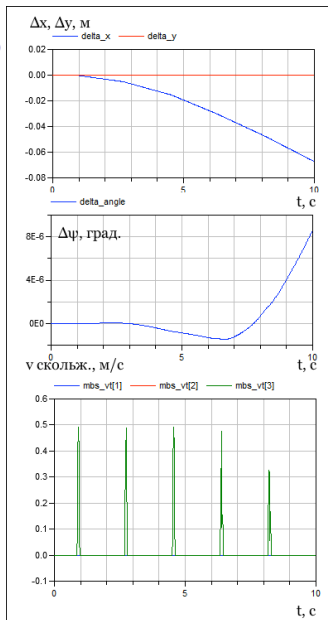
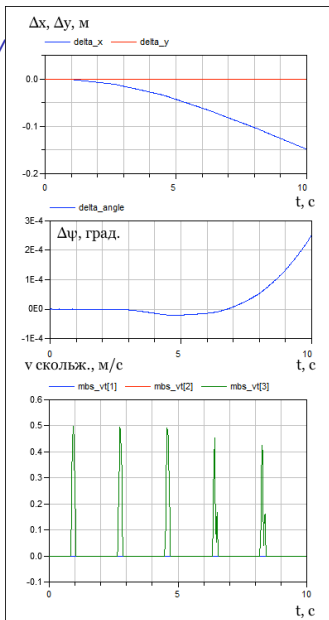


$$\eta = 0,001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

$$\eta = 0,0001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

Верифи

ю



$$\eta = 0,001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

$$\eta = 0,0001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

# Результаты

1. Получены уравнения движения экипажа на омни-колесах по абс. шероховатой плоскости с учетом инерции роликов
2. Изучены их свойства и проведено сравнение с уравнениями движения безынерционной модели
3. Построен способ расчета изменения обобщенных скоростей при смене ролика в контакте с точки зрения теории удара
4. Получены численные решения для симметричной конфигурации экипажа
5. Построена динамическая модель на плоскости с регуляризованным сухим трением
6. Выполнена верификация динамической с использованием безынерционной модели

Спасибо за внимание!