

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И МЕХАТРОНИКИ

Герасимов Кирилл Вячеславович

**Динамика роликонесущего экипажа  
с учетом инерции роликов и трения**

Автореферат диссертации на соискание степени кандидата  
физико-математических наук  
по специальности 01.02.01 – теоретическая механика

Научные руководители:  
д.ф.-м.н. проф. Косенко И.И.  
к.ф.-м.н. доц. Зобова А.А.

Москва — 2018

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы

Роликонесущие колеса – это колеса особой конструкции, позволяющей экипажу двигаться в произвольном направлении, не поворачиваясь вокруг вертикальной оси. Колеса при этом вращаются лишь вокруг их собственных осей и не поворачиваются вокруг вертикали. Экипажи с такими колесами обладают повышенной маневренностью и используются, например, в качестве погрузочных платформ в авиастроении. Ранее была рассмотрена динамика роликонесущих экипажей с использованием упрощенной модели омни-колес без учета инерции и формы роликов (безынерционная модель). В этой модели колеса представляют собой жесткие диски, которые могут скользить в одном направлении и катиться без проскальзывания в другом. Динамические эффекты, порождаемые вращением роликов, не учитываются. В другой части работ по динамике роликонесущего экипажа используются алгоритмы для построения численных моделей систем твердых тел. При этом явный вид уравнений движения оказывается скрытым, что делает невозможным непосредственный анализ уравнений и затрудняет оценку влияния разных факторов на динамику системы. В этом случае авторами также применяются существенные упрощения геометрии роликов, либо их динамика также не учитывается. В настоящей работе динамические эффекты, возникающие из-за собственного вращения роликов, учитываются, и форма роликов приближена к применяемой на практике.

## Цель работы

Целью работы является изучение неуправляемого движения роликонесущего экипажа по горизонтальной плоскости с учетом инерции роликов и трения в двух постановках. В первой постановке опорная плоскость абсолютно шероховата, т.е. проскальзывание между роликом в контакте и плоскостью отсутствует. При этом предполагается, что при смене ролика в контакте происходит мгновенное согласование скоростей системы в соответствии с новыми связями (удар связями). Во второй между контактным роликом и опорной плоскостью действует сила сухого трения Кулона.

## Методы исследования

Для получения уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой

плоскости используется метод, предложенный Я.В. Татариновым. Рассмотрение перехода колеса с одного ролика на другой проведено с точки зрения теории удара. Решения составленной системы уравнений получены для случая трех колес и пяти роликов на каждом с помощью системы компьютерной алгебры *Maxima*. При построении модели экипажа на плоскости с сухим трением кинематика вращательного движения твердых тел описывается в алгебре кватернионов. Сила сухого трения Кулона в точечном твердотельном контакте роликов и опорной плоскости регуляризуется, основываясь на теории И.В. Новожилова. Компьютерная модель экипажа с трением построена с помощью технологии объектно-ориентированного моделирования *Modelica*.

### **Достоверность и обоснованность результатов**

Все основные результаты первой и второй главы диссертации получены строгими аналитическими методами и базируются на основных положениях механики систем тел и теории удара. Решения уравнений движения из первой и второй главы, а также результаты третьей главы получены при помощи численных методов. Численные решения верифицируются с использованием хорошо изученных аналитических моделей, либо свойств моделируемых систем, выявленных аналитически. Аналитические результаты подтверждены и проиллюстрированы с помощью численного анализа.

### **Научная новизна**

Все основные результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми. Впервые получены уравнения движения экипажа на омни-колесах по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции всех роликов. Построен способ расчета изменения обобщенных скоростей при смене ролика в контакте согласно теории удара. Проведено численное моделирование движений экипажа. Построена динамическая модель экипажа на плоскости с регуляризованным сухим трением с учетом геометрии роликов, приближенной к применяемой на практике, показаны отличия движений этой модели от движений безынерционной модели.

### **Положения, выдвигаемые на защиту**

- Построены модели экипажа с омни-колесами, движущегося по горизонтальной плоскости по инерции: неголономная с идеальными связями и голономная с неидеальными. Обе модели учитывают инерцию роликов

омни-колес.

- Первая модель получена в предположении, что ролик омни-колеса не проскальзывает относительно плоскости (связи идеальны). Уравнения движения на гладких участках (т.е. между сменой ролика в контакте) получены аналитически в псевдоскоростях и представляют собой уравнения 33 порядка для экипажа с 3 колесами и 5 роликами на каждом колесе. С помощью теории удара расчет изменения обобщенных скоростей при смене ролика в контакте сведен к решению системы линейных алгебраических уравнений, имеющей единственное решение в т.ч. при кратном ударе.
- Аналитически показано, что при равенстве осевого момента инерции ролика нулю, её уравнения движения совпадают с уравнениями движения безынерционной модели [1].
- Показано, что линейный первый интеграл, существующий в безынерционной модели, разрушается при осевом моменте инерции, отличном от нуля. При этом скорость изменения значения этого интеграла пропорциональна осевому моменту инерции ролика. Найдены линейные интегралы, связывающие угловую скорость платформы экипажа и скорости собственного вращения роликов, не находящихся в контакте.
- В ходе численных экспериментов обнаружен эффект быстрого убывания скорости центра масс по сравнению с угловой скоростью платформы экипажа.
- Модель с неидеальными голономными связями реализована в системе автоматического построения численных динамических моделей для вязкого трения и для регуляризованного сухого трения. Для этого найдены геометрические условия контакта роликов омни- и месапум-колес и опорной плоскости.
- Численно показано, что при стремлении осевого момента инерции ролика к нулю, движения системы с трением стремятся к движениям безынерционной модели. Обнаружено качественное сходство траекторий си-

стемы с вязким трением с достаточно большим коэффициентом трения с движениями модели, рассмотренной в главах 1 и 2.

- Численные эксперименты показали, что проскальзывание между роликом в контакте и опорной плоскостью заканчивается за время, существенно меньшее, чем время нахождения ролика в контакте. Это служит обоснованием применимости теории удара в неголономной модели. Также обнаружено, что время проскальзывания тем меньше, чем меньше осевой момент инерции ролика.

### **Научная и практическая значимость**

Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применения при проведении исследований в МГУ имени М.В. Ломоносова, Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН и научно-исследовательских центрах, занимающихся проектированием и исследованием колесных систем различного назначения.

### **Апробация работы**

По результатам работы опубликованы и приняты к печати в рецензируемых журналах, реферируемых в международных базах WebOfScience, Scopus, RSCI и входящих в список ВАК, следующие статьи:

1. Герасимов К.В., Зобова А.А. Движение симметричного экипажа на омни-колесах с массивными роликами // ПММ. 2018. Т. 82, No 4. С. 427 - 440.
2. Герасимов К.В., Зобова А.А. Динамика экипажа на омни-колесах с массивными роликами с учетом смены ролика в контакте с опорной плоскостью // Труды МАИ. Сент. 2018. No. 101
3. Косенко И.И., Герасимов К.В. Физически-ориентированное моделирование динамики омнитежки // Нелин. дин. 2016. Т. 12, No 2. С. 251–262.
4. Kosenko I.I., Stepanov S.Y., Gerasimov K.V. Improved contact tracking algorithm for the omni wheel in general case of roller orientation // The Proceedings of the Asian Conference on Multibody Dynamics. 2016.8. The

Japan Society of Mechanical Engineers. — 2017. — no. July 01 — P. 2424-2985.

5. Kosenko I.I., Gerasimov K.V. Object-oriented approach to the construction of an omni vehicle dynamical model // Journal of Mechanical Science and Technology. — 2015. — Vol. 29, no. 7. — P. 2593–2599.

Результаты докладывались автором на ряде международных и всероссийских конференций:

1. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам 2018, Суздаль, Россия, 6-11 июля 2018
2. 20-е Международное рабочее совещание по компьютерной алгебре, Дубна, Россия, 21-22 мая 2018
3. Ломоносовские Чтения - 2018, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 16-25 апреля 2018
4. Ломоносовские Чтения - 2017, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 17-26 апреля 2017
5. 11th International Modelica Conference, Versailles, France, September 21-23, 2015

Результаты также были представлены автором на научных семинарах механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (семинар по аналитической механике и теории устойчивости имени В.В. Румянцева под руководством д.ф.-м.н. проф. А.В. Карапетяна, семинар «Динамика относительного движения» под руководством д.ф.-м.н. проф. В.Е. Павловского).

### **Личный вклад**

Научные руководители предложили постановку всех задач и указали методы их исследования. Все представленные в диссертации результаты получены лично соискателем.

### **Структура и объем работы**

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Полный объем научно-квалификационной работы 72 страницы текста с 23 рисунками. Список литературы содержит 117 наименований.

# Содержание работы

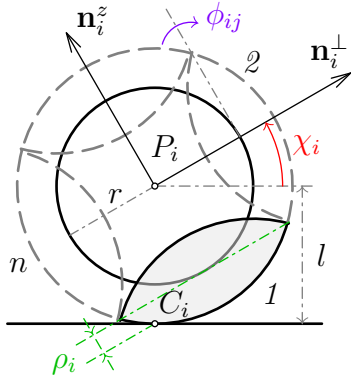
Во **введении** приведен обзор литературы, обоснована актуальность решаемых задач, дан обзор литературы по предметной области и применяемым методам, приведено краткое содержание работы, даны ссылки на статьи, опубликованные по результатам работы и названы семинары и конференции, где результаты были представлены.

В **первой главе** рассматривается движение экипажа по абсолютно шероховатой плоскости, т.е. предполагается, что проскальзывание между опорным роликом и плоскостью отсутствует. Получены уравнения движения экипажа с омни-колесами как системы абсолютно твердых тел — платформы, колес и всех роликов — в явном виде с использованием формализма лаконичных уравнений Я.В. Татарина. Изучена структура уравнений, найдены первые интегралы и проведено сравнение с уравнениями движения безынерционной модели. Показано, что если момент инерции ролика относительно его оси равен нулю, то уравнения совпадают с уравнениями безынерционной модели. Далее приводится подробное изложение результатов первой главы.

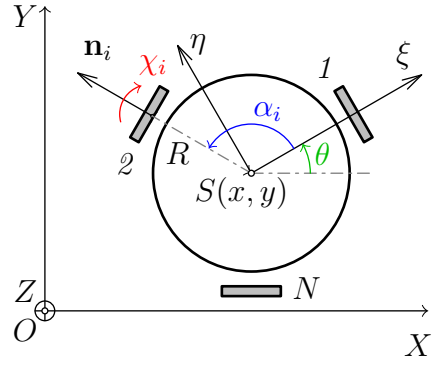
Исследуется следующая механическая система. Экипаж состоит из платформы и  $N$  одинаковых омни-колес, которые могут свободно вращаться вокруг собственных осей, расположенных горизонтально, в плоскостях, неподвижных относительно платформы. На каждом колесе установлено  $n$  массивных роликов, так что их оси направлены по касательным к контурам дисков колес (см. левую часть фиг. 1, ролики и показаны в виде затемненных областей, либо областей, ограниченных штриховой линией, и пронумерованы от 1 до  $n$ ). Таким образом, система состоит из  $N(n + 1) + 1$  абсолютно твердых тел.

Положение экипажа задается следующими координатами:  $x, y$  — координаты точки  $S$  на плоскости  $OXY$ ,  $\theta$  — угол между осями  $OX$  и  $S\xi$  (угол курса),  $\chi_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) — углы поворота колес вокруг их осей, отсчитываемые против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $\mathbf{n}_i$ , и  $\phi_j$  — углы поворота роликов вокруг их собственных осей. Таким образом, вектор обобщенных координат имеет вид

$$\mathbf{q} = (x, y, \theta, \{\chi_i\}_{i=1}^N, \{\phi_k\}_{k=1}^N, \{\phi_s\}_{s=1}^{N(n-1)})^T \in \mathbb{R}^{N(n+1)+3}$$



Фиг. 1. Колесо



Фиг. 2. Экипаж

где сначала указаны углы поворота  $\phi_k$  роликов, находящихся в данный момент в контакте с опорной плоскостью, а затем – остальных, “свободных”, роликов.

Введены псевдоскорости

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \quad \mathbf{v}_S = R\nu_1 \mathbf{e}_\xi + R\nu_2 \mathbf{e}_\eta, \quad \nu_3 = \Lambda \dot{\theta},$$

$$\nu_s = \dot{\phi}_s, \quad s = 1, \dots, N(n-1)$$

Их механический смысл таков:  $\nu_1, \nu_2$  – проекции скорости точки  $S$  на оси системы  $S\xi\eta$ , связанные с платформой, так что

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos \theta - R\nu_2 \sin \theta, \quad \dot{y} = R\nu_1 \sin \theta + R\nu_2 \cos \theta$$

$\nu_3$  – с точностью до множителя угловая скорость платформы,  $\nu_s$  – угловые скорости свободных (то есть не находящихся в контакте с опорной плоскостью) роликов.

Предполагается, что проскальзывания между опорной плоскостью и роликами в контакте не происходит, т.е. скорости точек  $C_i$  контакта равны нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

Отсюда получены уравнения связей:

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{\rho_k} (\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k); \quad \rho_k = l \cos \chi_k - r \quad (2)$$

$$\dot{\chi}_i = \frac{R}{l} (\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}) \quad (3)$$



Таким образом, число независимых псевдоскоростей системы равно  $K = N(n-1)+3$ . Знаменатель  $\rho_k$  в формуле (2) – расстояние от оси ролика до точки контакта, обращающееся в нуль на стыке роликов (см. левую часть фиг. 1). Это обстоятельство приводит к разрывам второго рода функций в правых частях уравнений движения и будет рассмотрено отдельно ниже. Уравнение (3) совпадает с уравнением связи в случае безынерционной модели роликов.

В работе используется лаконичный метод получения уравнений движения для систем с дифференциальными связями, предложенным Я.В. Татариновым [2]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \sum_{\mu=1}^K \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}, \quad \alpha = 1, \dots, K \quad (4)$$

Здесь  $L$  – лагранжиан системы, верхний индекс  $*$  означает подстановку связей,  $P_\alpha$  – линейные комбинации формальных канонических импульсов  $p_i$ , определяемые из соотношения

$$\sum_{\mu=1}^K \nu_\mu P_\mu \equiv \sum_{i=1}^{N(n+1)+3} \dot{q}_i p_i$$

в котором  $\dot{q}_i$  выражены через псевдоскорости  $\nu_\mu$  в соответствии с формулами связей;  $\{\cdot, \cdot\}$  – скобка Пуассона по  $p_i, q_i$ , после ее вычисления выполняется подстановка

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

(подробности см. в работах [1, 2].)

Так как потенциальная энергия системы во время движения не меняется, лагранжиан равен кинетической энергии:

$$2L = 2T = M\mathbf{v}_S^2 + I_S\dot{\theta}^2 + J \sum_i \dot{\chi}_i^2 + B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (5)$$

Здесь  $M, I_S, J$  – массово-инерционные характеристики экипажа (его общая масса, суммарный момент инерции системы относительно оси  $SZ$  и момент инерции колеса относительно его оси вращения соответственно),  $B$  – момент инерции ролика относительно его оси вращения.

Все слагаемые равенства (4) получаются непосредственным подсчетом и при необходимости, подстановкой связей. Окончательно уравнения движения (4) имеют следующую структуру:

$$\mathcal{M}^* \dot{\boldsymbol{\nu}} = \frac{MR^2}{\Lambda} \begin{bmatrix} \nu_2 \nu_3 \\ -\nu_1 \nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{R}{2l} \begin{bmatrix} -\mathcal{M}_i^* \sin \alpha_i \\ \mathcal{M}_i^* \cos \alpha_i \\ \mathcal{M}_i^* \Lambda^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - BR^2 \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\nu} - B \begin{bmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_1^* \cos \chi_{12} \\ \vdots \\ \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_N^* \cos \chi_{Nn} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Выявлены следующие свойства уравнений:

1. Система допускает интеграл энергии  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu} = h = \text{const}$  в силу общей теоремы об изменении полной механической энергии: так как система стеснена автономными идеальными связями, а силы консервативны, то полная энергия (в рассматриваемом здесь случае она равна кинетической энергии) сохраняется.

2. Если платформа экипажа неподвижна, т.е.  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$ , свободные ролики сохраняют свою начальную угловую скорость:  $\nu_s = \text{const}$ , чего и следовало ожидать.

3. При  $B = 0$  все слагаемые в правой части равенства (6), кроме первого, обращаются в нуль, как и все члены, соответствующие свободным роликам, в левой части. В этом случае существенными остаются первые три уравнения системы (4) относительно  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$ , описывающие динамику безынерционной модели экипажа [3].

4. Существовавший в безынерционной модели линейный первый интеграл разрушается для модели с массивными роликами. При  $B = 0$  он имеет вид  $m_{33}^* \nu_3 = \text{const}$  (причем  $m_{33} = \text{const}$ ) и следует непосредственно из третьего уравнения системы (4). При  $B \neq 0$  скорость изменения  $\nu_3$  пропорциональна моменту инерции ролика  $B$ .

5. Поскольку скобки Пуассона в уравнениях для свободных роликов равны нулю, система допускает первые интегралы:

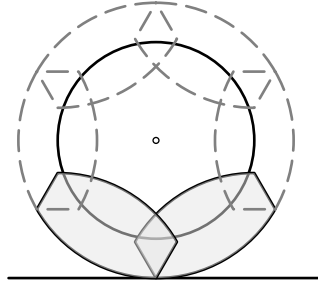
$$\nu_s + \frac{1}{\Lambda} \sin \chi_{ij} \nu_3 = \text{const} \quad (7)$$

Скорость вращения платформы  $\nu_3$  связана со скоростями собственного вращения свободных роликов. В частности, вращение экипажа вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр ( $\nu_1(0) = 0, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) \neq 0$ ), неравномерно, в отличие от выводов, основанных на безынерционной модели.

6. Одновременное изменение начальных значений всех псевдоскоростей  $\nu \rightarrow \lambda \nu$ ,  $\lambda \neq 0$  умножением на число, отличное от нуля, эквивалентно замене времени  $t \rightarrow \lambda t$ .

Во **второй главе** рассмотрена задача о смене ролика в контакте: при повороте колеса вокруг своей оси в контакт с плоскостью приходит новый ролик, скорость которого, вообще говоря, не согласована со связями, при этом возникает проскальзывание. Предполагается, что проскальзывание прекращается за бесконечно малый промежуток времени. Составлены линейные алгебраические уравнения, определяющие обобщенные скорости после смены ролика в контакте в соответствии с теорией удара. Таким образом, численное моделирование движения экипажа состоит из решения задачи Коши уравнений, полученных в первой главе, пока в контакте находится один и тот же ролик, и решения линейных алгебраических уравнений при смене ролика для получения начальных условий для следующего гладкого участка. Получены и проанализированы численные решения для симметричной конфигурации экипажа. Подробное изложение результатов второй главы приводится ниже.

Уравнения движения системы, полученные в первой главе, описывают динамику системы в тех интервалах времени, когда ролик в контакте с опорной плоскостью не меняется. Смена контакта на  $i$ -том колесе происходит при значении угла  $\chi_i = \frac{2\pi}{n}$ . При этом, во-первых, правая часть уравнений движения терпит разрыв второго рода из-за равенства нулю выражений  $\rho_i = l \cos \chi_i - r$  в знаменателе. Во-вторых, происходит мгновенное снятие и наложение связей: условие отсутствия проскальзывания для ролика, выходящего из контакта,



Фиг. 3. Перекрывтие

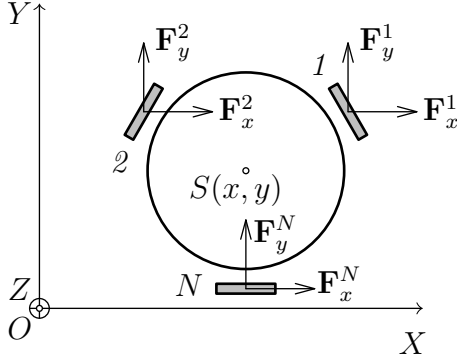
снимается, и аналогичное ему мгновенно налагается на вновь входящий в контакт ролик.

На практике первое обстоятельство никогда не реализуется, поскольку оси роликов в реальных системах имеют ненулевую толщину, а значит, концы роликов усекаются. При этом ролики располагают рядами в двух и более плоскостях, чтобы в каждый момент гладкая сторона хотя бы одного ролика была в контакте с плоскостью. В работе рассмотрены усеченные ролики (см. фиг. 3), но их оси расположены в одной плоскости, и допускается пересечение тел роликов в пространстве. Ось ролика находится на расстоянии  $r = l \cos \frac{\pi}{n-1}$  от центра колеса. Ролик представляет собой тело вращения относительно этой оси дуги окружности радиуса  $l$  с углом раствора  $\frac{2\pi}{n}$ .

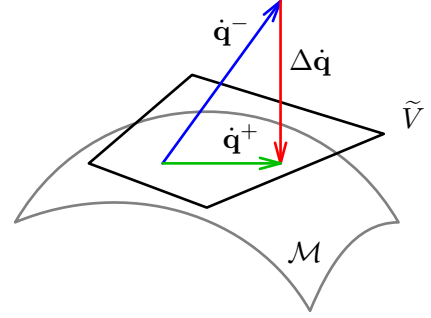
В реальной системе при смене контакта имеет место скольжение роликов относительно плоскости, и при этом полная энергия системы рассеивается. В данной главе будем считать, что трение достаточно велико, и прекращение проскальзывания вновь вошедшего в контакт ролика происходит мгновенно. Это взаимодействие будет рассматриваться как абсолютно неупругий удар, происходящий при мгновенном наложении связи. Освободившийся ролик начинает свободно вращаться вокруг своей оси. Будем предполагать следующее:

- удар происходит за бесконечно малый интервал времени  $\Delta t \ll 1$ , так что изменения обобщенных координат пренебрежимо малы  $\Delta \mathbf{q} \sim \dot{\mathbf{q}} \Delta t \ll 1$ , а изменения обобщенных скоростей конечны  $\Delta \dot{\mathbf{q}} < \infty$ ;
- взаимодействие экипажа с опорной полоскостью во время удара сводится к действию в точках контакта нормальных и касательных реакций  $\mathbf{R}_i = \mathbf{N}_i + \mathbf{F}_i$  с нулевым моментом  $\mathbf{M}_i = 0$ ;

- к моменту окончания удара  $t^* + \Delta t$  уравнения связей выполнены  $\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}^+$ , т.е. за время  $\Delta t$  проскальзывание вошедшего в контакт ролика заканчивается.



Фиг. 4. Компоненты векторов ударных реакций в точках контакта



Фиг. 5. Проецирование вектора обобщенных скоростей на ядро дифференциальной формы связей

Составим алгебраические уравнения, связывающие значения псевдоскоростей после удара и величины ударных импульсов. В течение бесконечно малого времени  $\Delta t$  наложены только геометрические связи, так что скорости  $\dot{\mathbf{q}}$  независимы. Запишем уравнение удара в обобщенных координатах [4]:

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{Q}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{Q}$  – вектор ударных импульсов обобщенных сил

Компоненты этого вектора связаны с касательными составляющими реакций линейно  $\mathbf{Q} = \mathbf{K}\mathbf{F}$ . Размерность матрицы  $\mathbf{K}$  равна  $(3 + N(n + 1)) \times 2N$ , и её ранг максимален.

Непосредственно перед ударом связи, запрещающие проскальзывание в точках касания роликов, находящихся в контакте в этот момент, снимаются. В момент сразу после удара аналогичные связи налагаются на вновь входящие в контакт ролики.

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+$$

Тогда уравнение (8) можно записать в виде:

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{K}\mathbf{F} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^- \quad (9)$$

Полученная линейная система относительно  $\boldsymbol{\nu}^+$  и  $\mathbf{F}$  допускает единственное решение. Это утверждение доказано для любых механических систем с кинетической энергией вида  $T = \frac{1}{2}(\mathbf{M}(q)\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ , на которые налагаются дифференциальные связи вида  $\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0$ . Доказательство проведено методами линейной алгебры, использовано условие идеальности связей  $\mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}^+ = 0$  и лемма о множителях Лагранжа (см. [5]).

При рассматриваемом абсолютно неупругом ударе теряется компонента  $\Delta \dot{\mathbf{q}}$  вектора обобщенных скоростей  $\dot{\mathbf{q}}^-$ , ортогональная подпространству  $\tilde{V}$  в кинетической метрике, и соответственно, находить вектор обобщенных скоростей после удара  $\dot{\mathbf{q}}^+ = \dot{\mathbf{q}}^- - \Delta \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ \in \tilde{V}$  можно непосредственно из условия идеальности связей  $0 = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}^+$  и основного уравнения удара (8), минуя вычисление величин реакций  $\mathbf{Q}$  или  $\mathbf{F}$  и необходимой для этого матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\boldsymbol{\nu}^+ = (\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}^-.$$

Получено выражение для реакций:

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}^-,$$

не включающее явно матрицу связей  $\mathbf{V}$ . Показано, что эти же формулы можно получить и из уравнения (9).

Потеря кинетической энергии системы при таком ударе равна энергии потерянных скоростей по теореме Карно [4].

В случае рассматриваемого экипажа матрица  $\mathbf{A}^T$  в точности совпадает с матрицей  $\mathbf{K}$ .

Получены результаты расчетов движения симметричного экипажа с тремя колесами  $N = 3$ , каждое из которых имеет  $n = 5$  роликов, для трех вариантов начальных условий.

1. Вращение вокруг своей оси ( $\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ )
2. Движение по прямой в направлении оси  $S\xi$  ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = \nu_3(0) = 0$ )
3. Движение с ненулевой скоростью центра масс и, одновременно, с ненулевой угловой скоростью платформы ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ )

Во всех трех случаях наблюдается убывание кинетической энергии скачками в моменты смены контакта. В промежутки времени между сменами энергия остается постоянной. Свободные ролики раскручиваются на всех рассмотренных движениях в силу влияния интегралов (7).

В вариантах 1 и 2 заметны переходные режимы вращения роликов в начале движения, когда колесо совершает первый оборот, и каждый ролик проходит полный круг, выходя из контакта и возвращаясь в него снова.

При комбинации поступательного и вращательного движений экипажа (случай 3), кинетическая энергия его центра масс убывает, переходя в кинетическую энергию платформы в осях Кёнига. Центр платформы  $S$  описывает спираль. После почти полной остановки центра масс экипаж продолжает вращаться вокруг вертикальной оси  $Sz$ , постепенно замедляясь.

В **третьей главе** построена динамическая модель экипажа на плоскости с сухим трением Амонтона – Кулона, регуляризованным в окрестности нуля по скоростям участком линейной функции насыщения с достаточно большим угловым коэффициентом. Рассматриваются две конструкции колеса: обыкновенное омни-колесо, оси роликов которого лежат в одной плоскости, и колесо *тесанит*, оси роликов которого находятся под углом к плоскости колеса. Особое внимание уделяется вопросу моделирования неудерживающей связи в контакте ролика и горизонтальной плоскости, отслеживанию точки контакта ролика и опорной плоскости, а также алгоритмической реализации процесса переключения контакта от ролика к ролику при качении омни-колеса. Динамическая модель построена в формализме объектно-ориентированного моделирования на языке Modelica. Выполнена верификация динамической модели с использованием безынерционной модели.

Наряду с постановкой задачи движения омни-колесного экипажа по абсолютно шероховатой плоскости, интерес представляет его динамика на плоскости с трением.

В данной главе строится модель экипажа той же геометрии, что и выше, с точечным твердотельным контактом колес и роликов. Выбрана модель сухого трения Амонтона – Кулона. При этом, как известно [6], идеальный «сухой» случай реализовать не удастся. Вместо разрывной функции  $\text{sign}$  от скорости относительного скольжения применяется функция линейного насы-

щения, имеющая в окрестности нуля «крутой» линейный участок. Для таких функций известен результат [6] о близости аппроксимирующего движения и движения, соответствующего «точному» случаю разрывной функции  $\text{sign}$ .

Особое внимание уделяется вопросу отслеживания точки контакта ролика и опорной плоскости, а также алгоритмической реализации процесса переключения контакта от ролика к ролику при качении омни-колеса.

Динамические свойства результирующей модели экипажа иллюстрируются при помощи численных экспериментов. Проводится верификация построенной модели в сравнении с безынерционной моделью при стремлении суммарной массы роликов к нулю.

В разделе об **отслеживании контакта** обыкновенного омни-колеса описывается моделирование динамики ролика и строится алгоритм нахождения координат точки контакта.

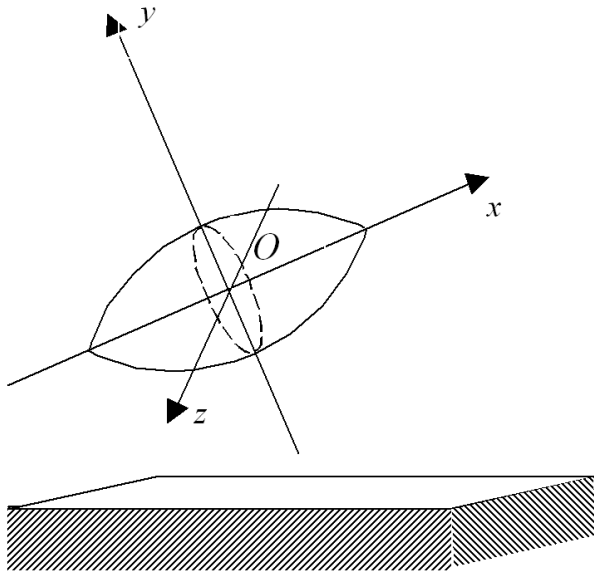
Динамика поступательно-вращательного движения реализуется так, как это описано в [7], в виде уравнений Ньютона – Эйлера. Причем для моделирования вращательного движения твердого тела используется алгебра кватернионов [8, 9].

Отдельную проблему представляет задача отслеживания контакта между поверхностью ролика и горизонтальной плоскостью. Для моделирования динамики твердого тела с неудерживающей связью применена технология, описанная в [10]. В данном случае можно было бы применить систему алгебраических или дифференциально-алгебраических уравнений. Однако эти уравнения вырождаются в точках  $x = \pm R \sin \alpha$  в координатах ролика (см. фиг. 6а), где  $\alpha$  – половина угла раствора дуги окружности, образующей поверхность ролика. Такое вырождение обычно приводит к аварийному завершению вычислительного процесса моделирования.

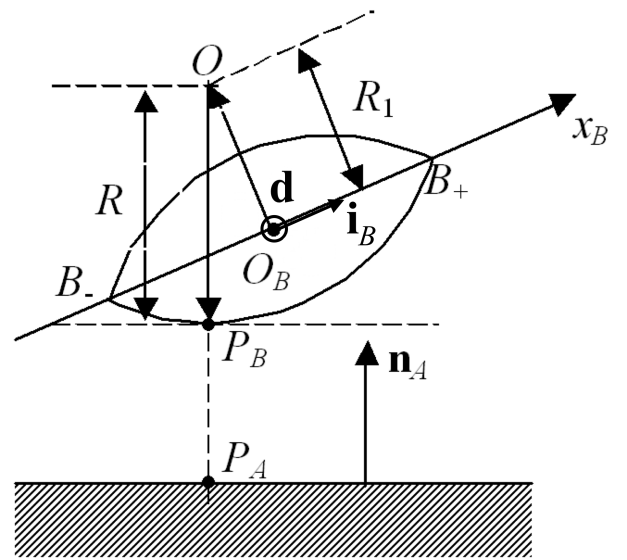
В нашей задаче положение спасает специфика конфигурации, обеспечивающей постоянство вертикального расположения омни-колес. При этом условии можно указать явную формулу, позволяющую вычислить ближайшую к плоскости точку  $P_B$  ролика (Рис. 6b). Этой точке всегда «противостоит» её вертикальная проекция  $P_A$  на плоскость (Рис. 6b).

Самая нижняя точка  $P_B$  внешней поверхности ролика будет задаваться





(а) Ролик над горизонтальной плоскостью



(б) Схема отслеживания контакта: вид сбоку отдельного ролика.

формулой

$$\mathbf{r}_{P_B} = \mathbf{r}_B + R_1 \mathbf{d} \times T_B \mathbf{i}_B - R \mathbf{n}_A, \quad (10)$$

поскольку точка  $P_B$  лежит на окружности в вертикальной плоскости, огибающей все ролики, и на общей вертикали с точкой  $O$ . Вместе с тем необходимо потребовать нахождения радиус-вектора центра ролика относительно центра колеса на угловом расстоянии не более половины углового размера ролика от вертикали, а также нахождения точки контакта ниже центра колеса.

Одновременное выполнение описанных условий означает наличие контакта и означает выполнение скалярного условия

$$y_{P_B} = 0, \quad (11)$$

а в противном случае имеет место скалярное условие

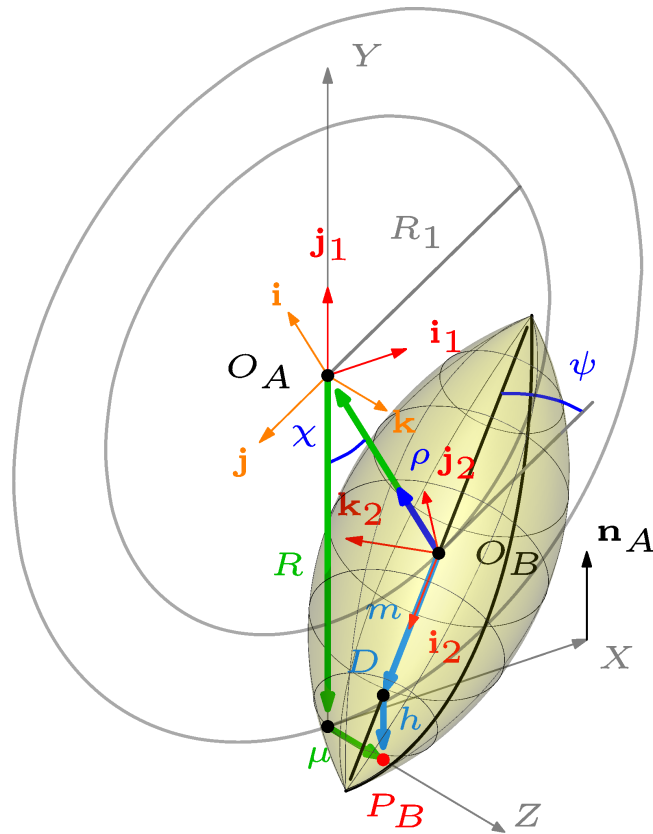
$$F_n = 0,$$

где  $F_n$  — нормальная составляющая реакции, приложенной в точке  $P_B$  (закон Синьорини).

Отмечается, что использование условия (11) во время численного решения непосредственно в указанной форме стабильно приводит к аварийному завершению процесса симуляции. То же самое происходит и при использовании первой производной этого выражения по времени. В работе алгоритм

отслеживания контакта реализован на языке Modelica [11], причем вместо условия (11) используется его вторая производная по времени  $\dot{v}_n = 0$ .

В разделе об **отслеживании контакта в случае тесанит колеса** строится два алгоритма для нахождения координат точки контакта: явный и неявный, сравниваются решения, полученные в соответствии с каждым, и вычислительная эффективность алгоритмов.



Фиг. 7. Отслеживание контакта для колеса *тесанит*

**Неявный алгоритм отслеживания контакта** основан на наблюдении, что точка контакта находится всегда в пересечении вертикальной плоскости, содержащей ось колеса, и горизонтальной опорной плоскости. Координаты проекции центра колеса на опорную плоскость могут быть вычислены явно, и остается получить лишь расстояние  $\mu$  от этой проекции до точки контакта вдоль отрезка линии пересечения плоскостей, соединяющего их, см. фиг. 7.

Величина  $\mu$  может быть выражена из равенства

$$\mathbf{r}_{P_B} = \mathbf{r}_{O_B} + R_1 \mathbf{c} - R \mathbf{j}_1 + \mu \mathbf{k}_1,$$

после умножения его скалярно на  $\mathbf{k}_2$ :

$$\mu = [R\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - R_1\mathbf{c} \cdot \mathbf{k}_2] / \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2,$$

где компоненты вектора  $\mathbf{c}$  находятся с помощью кинематических соотношений

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{i}_2 = 0, \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{k}_1 = 0,$$

а точнее, учитывая специфику численного решения, интегрированием их дифференциальных версий:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{c} \cdot \mathbf{i}_2 + \mathbf{c} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{i}_2 = 0, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{c} \cdot \mathbf{k}_1 + \mathbf{c} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{k}_1 = 0,$$

а компоненты векторов  $\mathbf{i}(\cdot), \mathbf{j}(\cdot)$  определяются ориентацией тел в пространстве.

Далее описывается **явный алгоритм отслеживания контакта**. Еще одним способом вычисления компонент радиус-вектора  $\mathbf{r}_{P_B}$  точки контакта point  $P_B$  или, точнее, точки ролика, ближайшей к опорной плоскости, является применение следующего набора равенств (см. фиг. 7):

$$\mathbf{r}_{P_B} = \mathbf{r}_{O_B} + \overrightarrow{O_B D} + \overrightarrow{D P_B}, \quad \overrightarrow{O_B D} = -m\mathbf{i}_2, \quad \overrightarrow{D P_B} = -h\mathbf{j}_1,$$

где  $m = R_1 \sin \chi / \cos \chi / \cos \psi$ ,  $h = R - R_1 / \cos \chi$ . Здесь  $\chi$  – текущее значение угла отклонения вектора  $\mathbf{r}_{O_A} - \mathbf{r}_{O_B}$  от вертикали. Таким образом,

$$\cos \chi = \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_A, \quad \sin \chi = (\mathbf{n}_A \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{k}_1.$$

Описанные алгоритмы отслеживания контакта дают практически одинаковые результаты, относительные различия между которыми имеют порядок  $10^{-8}$ . Показано, что использование явного алгоритма отслеживания контакта ускоряет численное моделирование задачи приблизительно в 1.5 раза.

При переходе колеса конструкции *тесанит* с одного ролика на другой его след на плоскости терпит разрыв, поскольку точка контакта мгновенно переходит на противоположный «борт» колеса. Отметим, что это обстоятельство, тем не менее, не препятствует эффективному численному решению.

В ходе численных испытаний проверено, что абсолютная величина ошибки соблюдения неудерживающей связи остается пренебрежимо малой – около  $10^{-7}$  от единицы длины.

В разделе о **верификации** описана идеализированная безынерционная модель и способ проверки построенной модели с трением в сравнении с безынерционной моделью при стремлении суммарной массы роликов к нулю.

Для верификации использованы результаты работы [12] как новейшей (на момент проведения исследования) из неголономных моделей динамики свободной тележки с омниколесами на плоскости [3, 12, 13]. Авторы [12] принимают простейшую модель омниколеса как плоского диска, для которого скорость точки контакта с опорной поверхностью направлена вдоль прямой, составляющей некоторый угол  $\delta$  с плоскостью колеса. В настоящей работе данная модель реализована с помощью той же технологии, что и модель с трением, построенная в этой главе, проведены испытания обеих и сравниваются результаты. Совпадение решений построенной и верификационной модели с точностью до вычислительной погрешности достигается при стремлении массы роликов к нулю.

Значения отношения  $\eta$  массы ролика к общей массе колеса принимали в обоих случаях значения от  $10^{-6}n^{-1}$  до  $10^{-1}n^{-1}$  с шагом 1 по порядку малости (здесь  $n$  - фиксированное количество роликов). Расчеты приведены для случаев 1 и 2 из главы 2 – вращения экипажа и его прямолинейного движения.

Во всех случаях величины координат центра масс экипажа на плоскости и угла его поворота относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс, совпадают между построенной нами моделью и верификационной идеализацией, с точностью до относительной погрешности величины порядка  $10^{-8}$ . Также представлена абсолютная величина скорости скольжения в точке контакта в физической модели. Видно, что скольжение имеет место при нахождении точки контакта в окрестности острых концов роликов, причем выражено тем ярче, чем тяжелее ролики.

В **заключении** перечислены основные результаты работы.

В **списке литературы** приведены работы, на которые делаются ссылки в основном тексте.

# Литература

1. Зобова А.А. Применение лаконичных форм уравнений движения в динамике неголономных мобильных роботов // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4. С. 771–783.
2. Татаринов Я.В. Уравнения классической механики в новой форме // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. 2003. Т. 3. С. 67–76.
3. Зобова А.А., Татаринов Я.В. Динамика экипажа с роликонесущими колесами // ПММ. 2009. Т. 73, № 1. С. 13–22.
4. Вильке В.Г. Теоретическая механика. СПб.: Лань, 2003. С. 304.
5. Теоретическая механика / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев [и др.]. Москва: Академия, 2010. С. 432.
6. Новожилов И.В. Фракционный анализ. Москва: Изд. Моск. Ун., 1991. С. 190.
7. Kosenko Ivan. Physically Oriented Approach To Construct Multibody System Dynamics Models Using Modelica Language // MULTIBODY DYNAMICS 2007, ECCOMAS Thematic Conference. Milano: 2007.
8. Косенко И.И. Интегрирование уравнений вращательного движения твердого тела в алгебре кватернионов. Случай Эйлера // ПММ. 1998. Т. 62, № 2. С. 206–214.
9. Kosenko I. I. Integration of the equations of a rotational motion of a rigid body in quaternion algebra. The Euler case // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1998. Т. 62, № 2. С. 193–200.
10. Multibody Systems Dynamics: Modelica Implementation and Bond Graph Representation / Ivan Kosenko, Maria Loginova, Yaroslav Obraztsov [и др.] // Proceedings of the 5th International Modelica Conference. 2006. С. 213–223. URL: <https://modelica.org/events/modelica2006/Proceedings/sessions/Session2d2.pdf>.

11. Fritzson P. Principles of Object–Oriented Modeling and Simulation with Modelica 2.1. Piscataway, New Jersey: IEEE Press, 2004. С. 898.
12. Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С. Тележка с омниколесами на плоскости и сфере // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4. С. 785–801.
13. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Изв. РАН. Теория сист. управл. 2007. 2007. № 6. С. 142–149.