

## ДВИЖЕНИЕ СИММЕТРИЧНОГО ЭКИПАЖА НА ОМНИ-КОЛЕСАХ С МАССИВНЫМИ РОЛИКАМИ

© 2018 г. К.В. Герасимов\*, А.А. Зобова\*\*

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва*

*\*e-mail: kiriger@gmail.com, \*\*e-mail: azobova@mech.math.msu.su*

Поступила в редакцию 14.11.2017 г.

Рассматривается динамика симметричного экипажа с роликонесущими колесами, движущегося по неподвижной горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости в следующих предположениях: масса каждого ролика ненулевая, контакт между роликами и плоскостью точечный, проскальзывания нет. Уравнения движения, составленные с помощью системы символьных вычислений Mathematica, содержат дополнительные члены, пропорциональные осевому моменту инерции ролика и зависящие от углов поворота колес. Масса роликов учитывается в тех фазах движения, когда не происходит смены роликов в контакте. При переходе колес с одного ролика на другой масса роликов считается пренебрежимо малой. Показано, что ряд движений, существующих в безынерционной модели (т.е. не учитывающей массу роликов), пропадает, так же как и линейный первый интеграл. Проведено сравнение основных типов движения симметричного трехколесного экипажа, полученных численным интегрированием уравнений движения с результатами, полученными на основании безынерционной модели.

*Ключевые слова:* омни-колесо, массивные ролики, неголономная связь, лаконичная форма уравнений движения Я.В. Татарина

**1. Введение.** Омни-колеса (в русской литературе также используется название роликонесущие колеса) – это колеса особой конструкции, позволяющей экипажу двигаться в произвольном направлении, вращая колеса вокруг их собственных осей и не поворачивая их вокруг вертикали. На ободе такого колеса располагаются ролики, которые могут свободно вращаться вокруг своих осей, жестко закрепленных в диске колеса. Существуют два варианта расположения осей роликов: первый (собственно омни-колеса) – оси роликов являются касательными к ободу колеса и, следовательно, лежат в его плоскости; второй (*mesanite wheels* [1]) – оси роликов развернуты вокруг нормали к ободу колеса на постоянный угол, обычно  $\pi/4$ .

Ранее была рассмотрена динамика омни-экипажей с использованием упрощенных моделей омни-колес без учета инерции и формы роликов [2–7], колеса (без роликов) моделируются как жесткие диски, которые могут скользить в одном направлении и катиться без проскальзывания в другом. Далее будем называть такую модель безынерционной, в том смысле, что инерция собственного вращения роликов в ней не учитывается. В другой части работ по динамике омни-экипажа [8–11] используются некоторые формализмы для построения численных моделей систем тел. При этом явный вид уравнений движения оказывается скрытым, что делает невозможным непосредственный анализ уравнений и затрудняет оценку влияния разных факторов на динамику системы.

Цель настоящей работы – получение в явном виде уравнений движения по инерции экипажа с омни-колесами с массивными роликами в неголономной постановке с помо-

пью подхода Я.В. Татаринова [12], исследование их свойств и сравнение поведения такой системы с поведением системы в безынерционном случае [13].

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим экипаж с омни-колесами, движущийся по инерции по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Экипаж состоит из платформы и  $N$  одинаковых омни-колес, плоскости которых относительно платформы неподвижны. Каждое колесо может свободно вращаться относительно платформы вокруг собственной оси, расположенной горизонтально, и на каждом из них установлено  $n$  массивных роликов, так что оси роликов параллельны касательным к контурам дисков колес (см. левую часть фиг. 1). Ролики расположены по контуру дисков колес и показаны в виде затемненных областей, либо областей, ограниченных штриховой линией. Они пронумерованы от 1 до  $n$ . Таким образом, система состоит из  $N(n + 1) + 1$  абсолютно твердых тел.

Фиг. 1  
лев.ч.

Введем неподвижную систему отсчета так, что ось  $OZ$  направлена вверх, а плоскость  $OXY$  совпадает с опорной плоскостью. Введем также подвижную систему отсчета  $S\xi\eta Z$ , жестко связанную с платформой экипажа так, что плоскость  $S\xi\eta$  горизонтальна и содержит центры всех колес  $P_i$ . Будем считать, что оси колес лежат на лучах, соединяющих центр масс  $S$  платформы и центры колес (см. правую часть фиг. 1), а расстояния от центров колес до  $S$  одинаковы и равны  $R$ . Геометрию установки колес на платформе зададим углами  $\alpha_i$  между осью  $S\xi$  и осями колес (см. левую часть фиг. 1). Будем считать, что центр масс всей системы совпадает с точкой  $S$  (отсюда следует, что  $\sum_k \cos \alpha_k = \sum_k \sin \alpha_k = 0$ ). Введем также три орта, жестко связанных с дисками колес: орт оси  $i$ -го колеса  $\mathbf{n}_i = \mathbf{SP}_i/|\mathbf{SP}_i|$  и орты  $\mathbf{n}_i^\perp$  и  $\mathbf{n}_i^z$ , лежащие в плоскости диска колеса, причем вектор  $\mathbf{n}_i^z$  вертикален при нулевом повороте колеса  $\chi_i$ . Положения центров роликов на колесе определим углами  $\kappa_j$  между ними и направлением, противоположным вектору  $\mathbf{n}_i^z$ .

Фиг. 1  
пр.ч.

Положение экипажа будем задавать следующими координатами:  $x, y$  — координаты точки  $S$  на плоскости  $OXY$ ,  $\theta$  — угол между осями  $OX$  и  $S\xi$  (угол курса),  $\chi_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) — углы поворота колес вокруг их осей, отсчитываемые против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $\mathbf{n}_i$ , и  $\phi_j$  — углы поворота роликов вокруг их собственных осей. Таким образом, вектор обобщенных координат имеет вид

$$\mathbf{q} = (x, y, \theta, \{\chi_i\}_{i=1}^N, \{\phi_k\}_{k=1}^N, \{\phi_s\}_{s=1}^{N(n-1)})^T \in \mathbb{R}^{N(n+1)+3}$$

где сначала указаны углы поворота  $\phi_k$  роликов, находящихся в данный момент в контакте с опорной плоскостью, а затем — остальных, “свободных”, роликов. Индекс  $s$  используется для сквозной нумерации свободных роликов и связан с номером колеса  $i$  и ролика на колесе  $j$  по формуле

$$s(i, j) = (n - 1)(i - 1) + j - 1 \quad (2.1)$$

Введем псевдоскорости

Греч.

$\mathbf{v}, \nu_{1,2,3,s}$

Лат.  $\mathbf{v}_S$

$$\mathbf{v} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \quad \mathbf{v}_S = R\nu_1 \mathbf{e}_\xi + R\nu_2 \mathbf{e}_\eta, \quad \nu_3 = \Lambda \dot{\theta}, \quad \nu_s = \dot{\phi}_s, \quad s = 1, \dots, N(n - 1)$$

Их механический смысл таков:  $\nu_1, \nu_2$  — проекции скорости точки  $S$  на оси системы  $S\xi\eta$ , связанные с платформой,  $\nu_3$  — с точностью до множителя угловая скорость платформы,  $\nu_s$  — угловые скорости свободных роликов. Число независимых псевдоскоростей системы  $K = N(n - 1) + 3$ . Таким образом, имеем

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos \theta - R\nu_2 \sin \theta, \quad \dot{y} = R\nu_1 \sin \theta + R\nu_2 \cos \theta$$

Будем считать, что проскальзывания между опорной плоскостью и роликами в контакте не происходит, т.е. скорости точек  $C_i$  контакта равны нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

Выражая скорость точек контакта через введенные псевдоскорости и проектируя на оси системы  $S\xi\eta$ , получим:

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{\rho_k}(\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k); \quad \rho_k = l \cos \chi_k - r \quad (2.2)$$

$$\dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}) \quad (2.3)$$

Заметим, что знаменатель  $\rho_k$  в формуле (2.2) – расстояние от оси ролика до точки контакта, обращающееся в нуль на стыке роликов (см. левую часть фиг. 1). Это обстоятельство приводит к разрывам второго рода функций в правых частях уравнений движения и будет рассмотрено отдельно ниже. Уравнение (2.3) совпадает с уравнением связи в случае безынерционной модели роликов.

Таким образом, выражение обобщенных скоростей через псевдоскорости, учитывающее связи, наложенные на систему, можно записать в матричном виде (явные выражения компонент матрицы  $V$  приведены в приложении):

$$\dot{\mathbf{q}} = V\mathbf{v}, \quad V = V(\theta, \chi_i) \quad (2.4)$$

**3. Уравнения движения.** Воспользуемся лаконичным методом получения уравнений движения для систем с дифференциальными связями, предложенным Я.В. Татариновым [12]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \sum_{\mu=1}^K \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}, \quad \alpha = 1, \dots, K \quad (3.1)$$

Здесь  $L$  – лагранжиан,  $L^*$  – он же с учетом связей (здесь и далее верхний индекс \* означает учет связей),  $P_\alpha$  – линейные комбинации формальных канонических импульсов  $p_i$ , определяемые из соотношения

$$\sum_{\mu=1}^K \nu_\mu P_\mu \equiv \sum_{i=1}^{N(n+1)+3} \dot{q}_i p_i$$

в котором  $\dot{q}_i$  выражены через псевдоскорости  $\nu_\mu$  в соответствии с формулами (2.4);  $\{\cdot, \cdot\}$

— скобка Пуассона по  $p_i, q_i$ , после ее вычисления выполняется подстановка

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

(Подробности см. в работах [12, 13].)

Так как потенциальная энергия системы во время движения не меняется, лагранжиан равен кинетической энергии:

$$2L = 2T = M\mathbf{v}_S^2 + I_S\dot{\theta}^2 + J \sum_i \dot{\chi}_i^2 + B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2)$$

Здесь  $M, I_S, J$  — массово-инерционные характеристики экипажа (см. Приложение),  $B$  — момент инерции ролика относительно его оси вращения. Лагранжиан при учете связей определяется соотношением:

$$2L^* = \mathbf{v}^T V^T \mathcal{M} V \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathcal{M}^*(\chi_i) \mathbf{v}$$

Структура симметрической матрицы  $\mathcal{M}^*$  следующая:

$$\mathcal{M}^* = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{M}}_{11}^* & \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^* \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^{*T} & \widetilde{\mathcal{M}}_{22}^* \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{11}^* = (m_{ij}^*)_{3 \times 3}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{22}^* = B E_{N(n-1) \times N(n-1)}$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{12}^* = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ B\Lambda^{-1} \sin \chi_{12} & \dots & B\Lambda^{-1} \sin \chi_{Nn} \end{bmatrix}_{3 \times N(n-1)}$$

Здесь  $E_{N(n-1) \times N(n-1)}$  — единичная матрица,  $\chi_{kl} = \chi_k + \kappa_l$  — угол между вертикалью и осью ролика, где индекс  $k = 1, \dots, N$  означает номер колеса,  $l = 2, \dots, n$  — номер свободного ролика на колесе ( $l = 1$  — ролик, находящийся в контакте).

Явные формулы для элементов матрицы  $\widetilde{\mathcal{M}}_{11}^*$  выписаны в Приложении; отметим, что они зависят только от координат  $\chi_i$ , которые входят в отношения  $B/\rho_i^2$  и  $B \sin \chi_i/\rho_i$ , имеющие разрывы второго рода при смене роликов, т.е. при переходе с одного ролика на другой (см. равенство (2.2)).

Первое слагаемое в левой части равенства (3.1) получается дифференцированием лагранжиана и подстановкой связей:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{v}} = \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi) \mathbf{v}) = \mathcal{M}^*(\chi) \dot{\mathbf{v}} + \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi)) \mathbf{v} = \mathcal{M}^*(\chi) \dot{\mathbf{v}} + \sum_{i=1}^N \dot{\chi}_i^* \mathcal{M}_i^* \mathbf{v} \quad (3.3)$$

где  $\mathcal{M}_i^* = \frac{\partial \mathcal{M}^*}{\partial \chi_i}$ . Обратим внимание, что компоненты векторов под знаком суммы, соответствующие свободным роликам, т.е. компоненты с номерами  $\alpha = 4, \dots, K$ , имеют вид  $\dot{\chi}_i^* \nu_3 B \Lambda^{-1} \cos \chi_{ij}$ , где индексы  $i, j$  связаны с индексом  $\alpha$  по формуле  $\alpha = 3 + s(i, j)$  (см. формулу (2.1)).

Имеем выражения:

$$\begin{aligned} P_1 &= R \left( p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_i \left( \frac{p_{\chi_i}}{l} \sin \alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \cos \alpha_i \right) \right) \\ P_2 &= R \left( -p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_i \left( -\frac{p_{\chi_i}}{l} \cos \alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \sin \alpha_i \right) \right) \\ P_3 &= \frac{1}{\Lambda} \left( p_\theta - \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i} \right) \\ P_s &= p_{\phi_s} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Поскольку коэффициенты лагранжиана  $L^*$  зависят только от координаты  $\chi_i$ , его скобки Пуассона с  $P_1, P_2, P_3$  — квадратичные формы псевдоскоростей, пропорциональные моменту инерции ролика  $B$  с коэффициентами, зависящими от  $\chi_i$ :

$$\begin{aligned} \{P_1, L^*\} &= -\frac{\partial P_1}{\partial p_{\chi_i}} \frac{\partial L^*}{\partial \chi_i} = -\frac{R}{2l} \mathbf{v}^T \mathcal{M}_i^* \mathbf{v} \sin \alpha_i, \\ \{P_2, L^*\} &= \frac{R}{2l} \mathbf{v}^T \mathcal{M}_i^* \mathbf{v} \cos \alpha_i, \quad \{P_3, L^*\} = \frac{R}{2l\Lambda} \mathbf{v}^T \mathcal{M}_i^* \mathbf{v}, \quad \{P_s, L^*\} = 0, s > 3 \end{aligned}$$

Остается рассмотреть правую часть равенства (3.1): она отлична от нуля лишь при  $\alpha = 1, 2, 3$  (см. Приложение).

Окончательно, пользуясь обозначениями из Приложения, получаем, что уравнения (3.1) имеют следующую структуру:

$$\mathcal{M}^* \dot{\mathbf{v}} = MR^2 \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} \nu_2 \nu_3 \\ -\nu_1 \nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{v}^T \begin{pmatrix} \frac{R}{2l} \begin{pmatrix} -\mathcal{M}_i^* \sin \alpha_i \\ \mathcal{M}_i^* \cos \alpha_i \\ \mathcal{M}_i^* \Lambda^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - BR^2 \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \mathbf{v} - B \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_1^* \cos \chi_{12} \\ \vdots \\ \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_N^* \cos \chi_{Nn} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Символ  $\star$  в последнем слагаемом правой части уравнений для  $\alpha = 1, 2, 3$  заменяет выражения под знаком суммы в равенствах (3.3). Матрицы  $\mathcal{P}_\alpha$  размера  $K \times K$  составлены из строк  $\mathbf{p}_{\alpha\beta}$ , определенных в Приложении и зависящих от геометрии экипажа и углов поворота колес  $\chi_i$ :

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{p}_{13} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{13} \\ -\mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Поскольку матрицы  $\mathcal{M}_i^*$  и  $\mathcal{P}_\alpha$  зависят от углов поворота колес  $\chi_i$ , для замыкания системы к этим уравнениям надо добавить уравнения (2.3).

Структура уравнений позволяет выявить следующие свойства.



1. Система допускает интеграл энергии  $\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathcal{M}^*(\chi_i)\mathbf{v} = h = \text{const}$  в силу общей теоремы об изменении полной механической энергии: так как система стеснена автономными идеальными связями, а силы консервативны, то полная энергия (в рассматриваемом здесь случае она равна кинетической энергии) сохраняется.

2. Если платформа экипажа неподвижна, т.е.  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$ , свободные ролики сохраняют свою начальную угловую скорость:  $\nu_s = \text{const}$ , чего и следовало ожидать.

3. При  $B = 0$  все слагаемые в правой части равенства (3.5), кроме первого, обращаются в нуль, как и все члены, соответствующие свободным роликам, в левой части (см. Приложение, равенства (7.1)). В этом случае существенными остаются первые три уравнения системы (3.1) относительно  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ , описывающие динамику безынерционной модели экипажа [5].

4. Существовавший в безынерционной модели линейный первый интеграл разрушается для модели с массивными роликами. При  $B = 0$  он имеет вид  $m_{33}^*\nu_3 = \text{const}$  (причем  $m_{33} = \text{const}$ ) и следует непосредственно из третьего уравнения системы (3.1). При  $B \neq 0$  скорость изменения  $\nu_3$  пропорциональна моменту инерции ролика  $B$ .

5. Поскольку скобки Пуассона в уравнениях для свободных роликов равны нулю, система допускает первые интегралы:

$$\nu_s + \frac{1}{\Lambda} \sin \chi_{ij} \nu_3 = \text{const} \quad (3.6)$$

Скорость вращения платформы  $\nu_3$  связана со скоростями собственного вращения свободных роликов. В частности, вращение экипажа вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр ( $\nu_1(0) = 0, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) \neq 0$ ), неравномерно, в отличие от выводов, основанных на безынерционной модели.

6. Одновременное изменение начальных значений всех псевдоскоростей  $\mathbf{v} \rightarrow \lambda \mathbf{v}, \lambda \neq 0$  умножением на число, отличное от нуля, эквивалентно замене времени  $t \rightarrow \lambda t$ .

**4. Смена роликов.** Уравнения (3.5) описывают динамику системы на промежутках времени, в течение которых не происходит смены роликов. При смене роликов любого колеса коэффициенты уравнений терпят разрыв второго рода из-за выражений  $\rho_i = l \cos \chi_i - r$  в знаменателе.

Заметим, что на практике ситуация  $\rho_i = 0$  никогда не реализуется, так как концы роликов усекаются (в частности, потому что оси роликов в реальных системах имеют ненулевую толщину и должны быть закреплены в колесах). Для того чтобы в каждый момент в контакте между колесом и плоскостью был ролик, ролики располагают в два или больше рядов.

Фиг. 2

Для исследования движений, на которых происходят смены роликов, примем следующие предположения. Усечем ролики (см. левую часть фиг. 2), но оставим их оси в одной плоскости, пренебрегая пересечением тел роликов в пространстве. Смена роликов одного колеса будет происходить при значении угла  $\chi_i = \frac{2\pi}{n}$ . Колесо с усеченными роликами определим, располагая ось ролика на расстоянии  $r = l \cos \frac{\pi}{n-1}$  от центра колеса, а его поверхность задавая как фигуру вращения дуги окружности радиуса  $l$  с углом раствора  $\frac{2\pi}{n}$  вокруг этой оси, замкнутую соответствующими дисками.

Кроме этого, при смене контакта происходит мгновенное наложение связи на вновь вошедший в контакт ролик и снятие ее с освободившегося, после чего последний может свободно вращаться вокруг своей оси. В этот момент в реальной системе происходят взаимодействия типа ударных, в том числе проскальзывание роликов относительно плоскости, при котором происходит уменьшение полной энергии системы. Однако моделирование

этих эффектов здесь не рассматривается. Будем считать, что скорости  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  при смене роликов не изменяются, как и в безынерционной модели в отсутствии роликов ( $B = 0$ ). Таким образом, масса роликов влияет на динамику системы только на гладких участках движения и не учитывается при смене роликов. Из уравнений (2.2) и (2.3) получим, что ролик, входящий в контакт, мгновенно приобретает ту же угловую скорость, что и освобождающийся ролик.

Таким образом, при смене роликов ( $\chi_i = \chi_i^+$ ) сохраним значения  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ , заменим  $\chi_i = \chi_i^+$  на  $\chi_i = \chi_i^-$  (см. правую часть фиг. 2), и выполним с псевдоскоростями  $\nu_s$  следующее преобразование. Пусть  $\mathbf{v}_i^s = (\nu_{i2}, \dots, \nu_{in})$  – псевдоскорости свободных роликов на колесе  $i$ . Тогда, если при смене контакта  $\dot{\chi}_i > 0$  (т.е. колесо поворачивается против часовой стрелки, см. левую часть фиг. 1), то отбросим  $\nu_{in}$ , остальные компоненты вектора  $\mathbf{v}_i^s$  перенумеруем, сдвигая их индексы вперед:  $\nu_{ij} \rightarrow \nu_{ij+1}$ , а компоненту  $\nu_{i2}$  положим равной значению правой части в уравнении связи (2.2). При вращении колеса в другую сторону, выполним аналогичные преобразования.

**5. Примеры движений** Численные решения получим для симметричного трехколесного экипажа ( $\alpha_i = \frac{2\pi}{N}(i-1), N=3$ ) с  $n=5$  роликами на колесе и следующих случаев движений.

Фиг. 3

1. Вращение вокруг своей оси ( $\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ ) (фиг. 3).

Фиг. 4

2. Движение по прямой в направлении оси  $S\xi$  ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = \nu_3(0) = 0$ ) (фиг. 4).

Фиг. 5

3. Движение с ненулевой скоростью центра масс и, одновременно, с ненулевой угловой скоростью платформы ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ ) (фиг. 5).

Расчеты выполнены в безразмерных величинах, так что радиус платформы и колеса  $R = 0.15$  и  $r = 0.05$ , массы платформы, колеса и ролика 1, 0.15 и 0.05. При этом

момент инерции ролика  $B \approx 1.6 \cdot 10^{-5}$ . Для безынерционной модели массо-инерционные характеристики колес положим соответствующими экипажу с пятью заблокированными роликами.

Во всех трех случаях наблюдаются различия между двумя постановками: свободные ролики приходят в движение, из-за чего меняется угловая скорость платформы экипажа и скорость центра масс экипажа. Кроме этого, становится заметно влияние введенных предположений о смене контакта: график кинетической энергии приобретает ступенчатый вид в силу изменений, зависящих от  $\chi_i$  и  $\dot{\phi}_{i,j}$ , в слагаемых (3.2):

$$B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}) \quad (5.1)$$

при мгновенном наложении связей. В промежутки времени между сменами роликов энергия остается постоянной.

В случаях 1 и 2 траектории центра экипажа  $S$  на плоскости  $OXY$  и характер вращения вокруг вертикальной оси  $SZ$  ( $\theta(t)$ ) согласно модели с роликами и безынерционной модели различаются несущественно, однако заметны переходные режимы вращения роликов в начале движения.

При вращении вокруг вертикали (движение 1) угловая скорость платформы  $\nu_3$  меняется немонотонно, но в среднем медленно убывает: за первые  $10^3$ с угловая скорость уменьшается на 2%. Скорость центра масс остается равной нулю. Кинетическая энергия системы также медленно убывает. На фиг. 3 представлены угловые скорости роликов с номерами 1, 3 и 5 на первом колесе  $\dot{\phi}_{1j}$ . Номер кривой совпадает с номером ролика на колесе, поведение роликов на других двух колесах полностью аналогично. Заметим, что при нулевой скорости центра экипажа опорный ролик не вращается (см. формулу (2.3)): угловая скорость первого ролика в течение первой секунды движения нулевая. После вы-

Фиг. 3

Фиг. 4

хода из контакта ролик начинает раскручиваться в соответствии с первым интегралом (3.6). Раскрученный ролик при входе в контакт с опорной плоскостью мгновенно теряет угловую скорость (на графике угловой скорости первого ролика это происходит при  $t = 9.6\text{с}$ ), что приводит к убыванию кинетической энергии.

При движении по прямой (движение 2) угловая скорость остается нулевой. На фиг. 4 слева показаны графики относительного изменения скорости центра масс  $\nu_1(t)/\nu_1(0) - 1$  (кривая 1) и кинетической энергии  $T(t)/T(0) - 1$  (кривая 2). Видно, что на начальном этапе движения при смене контакта кинетическая энергия возрастает, что обусловлено принятой моделью наложения связи, но при этом возрастание энергии остается в пределах 4%. Скорость центра масс (кривая 2, слева) в среднем убывает. Скорость вращения переднего колеса равна нулю, колесо катится, опираясь на один и тот же ролик, остальные ролики не раскручиваются. Угловые скорости роликов на одном из задних колес показаны на фиг. 4 справа. Свободные ролики двигаются с постоянной угловой скоростью, ролик в контакте изменяет свою скорость за счет скорости центра масс. После того как все ролики побывают в контакте, их движение становится квазипериодичным, а энергия убывает с каждой сменой контакта.

Фиг. 5

При движении 3, сочетающем поступательное и вращательное движение, угловая скорость экипажа  $\nu_3$  растет и выходит на постоянное значение (кривая 1 на фиг. 5 слева вверх), скорость центра экипажа  $v = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$  уменьшается до нуля (кривая 2 там же), а кинетическая энергия (кривая 3) после короткого начального участка, где происходят маленькие по величине скачки вверх аналогично движению 2, убывает. Угловые скорости роликов представляют собой квазипериодические функции времени (характерный участок представлен на фиг. 5 внизу, обозначения те же что и на фиг. 3). Центр платформы описывает спираль (правая верхняя часть фиг. 5). Заметим, что если не учитывать массу

роликов на колесе, то при принятых начальных условиях скорость центра масс и угловая скорость платформы сохраняются, а центр платформы описывает окружность. Таким образом, даже малая масса роликов приводит к качественным изменениям в движении экипажа.

## 6. Выводы.

1. Получены уравнения движения экипажа с полным набором роликов в неголономной постановке.
2. Показано, что при учете массы роликов возникают дополнительные члены, пропорциональные моменту инерции ролика относительно его оси.
3. Предложена модель перехода с ролика на ролик.
4. Получены численные решения с учетом движения свободных роликов для симметричного экипажа и обнаружены качественные отличия от безынерционной модели.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (16-01-00338).

## 7. Приложение. Матрица кинетической энергии:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{M}}_{11} & \widetilde{\mathcal{M}}_{12} & \widetilde{\mathcal{M}}_{13} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^T & \widetilde{\mathcal{M}}_{22} & \widetilde{\mathcal{M}}_{23} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{13}^T & \widetilde{\mathcal{M}}_{23}^T & \widetilde{\mathcal{M}}_{33} \end{bmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_{11} &= \text{diag}(M, M, I_S), \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{22} = JE_{N \times N}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{33} = BE_{Nn \times Nn} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12} &= O_{3 \times N}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ B \sin \chi_{11} & \cdots & B \sin \chi_{Nn} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{23} = O_{N \times Nn} \end{aligned}$$

Здесь  $O_{(\cdot)}$  и  $E_{(\cdot)}$  — нулевые и единичные матрицы, в индексах которых указаны их размерности. В третьей строке  $\widetilde{\mathcal{M}}_{13}$  сначала указаны элементы, соответствующие роликам, находящимся в контакте, а затем соответствующие “свободным” роликам; элементы упорядочены по возрастанию индексов, так что ролики одного колеса соседствуют.

Матрица связей:

$$V = \begin{bmatrix} \widetilde{V} & O_1 \\ O_2 & E \end{bmatrix}; \quad \widetilde{V} = \begin{bmatrix} R \cos \theta & -R \sin \theta & 0 \\ R \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} \\ \frac{R}{l} \sin \alpha_i & -\frac{R}{l} \cos \alpha_i & -\frac{R}{\Lambda l} \\ \frac{R}{\rho_k} \cos \alpha_k & \frac{R}{\rho_k} \sin \alpha_k & 0 \end{bmatrix}$$

Здесь  $O_1$  и  $O_2$  — нулевые  $(3 + 2n \times N(n - 1))$ - и  $(N(n - 1) \times 3)$ -матрицы,  $E$  — единичная матрица размерности  $N(n - 1)$ .

Элементы матрицы кинетической энергии при учете связей:

$$\begin{aligned} m_{11}^* &= MR^2 + \sum_i \left( J \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \alpha_i + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \cos^2 \alpha_i \right) \quad (11 \leftrightarrow 22, \sin \alpha_i \leftrightarrow \cos \alpha_i) \\ m_{33}^* &= \frac{1}{\Lambda} \left( I_S + \sum_i J \frac{R^2}{l^2} \right), \quad m_{12}^* = \sum_i \left( -J \frac{R^2}{l^2} + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \right) \sin \alpha_i \cos \alpha_i \\ m_{13}^* &= \frac{1}{\Lambda} \sum_i B \frac{R}{\rho_i} \sin \chi_i \cos \alpha_i, \quad m_{23}^* = \frac{1}{\Lambda} \sum_i B \frac{R}{\rho_i} \sin \chi_i \sin \alpha_i \end{aligned} \quad (7.1)$$

Обозначая

$$\xi_{\pm}(\alpha) = \nu_1 \cos \alpha \pm \nu_2 \sin \alpha, \quad \eta_{\pm}(\alpha) = \nu_1 \sin \alpha \pm \nu_2 \cos \alpha$$

для импульсов  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$  получим

$$\begin{aligned} p_x &= MR \xi_{-}(\theta), \quad p_y = MR \eta_{+}(\theta), \quad p_{\theta} = BR \sum_i \frac{\sin \chi_i}{\rho_i} \xi_{+}(\alpha_i) + \frac{I_S}{\Lambda} \nu_3 + B \sum_s \sin \chi_s \nu_s \\ p_{\chi_i} &= J \frac{R}{l} (\eta_{-}(\alpha_i) - \frac{1}{\Lambda} \nu_3), \quad p_{\phi_{k1}} = \frac{BR}{\rho_k} \xi_{+}(\alpha_k) + \frac{B}{\Lambda} \sin \chi_k, \quad p_{\phi_s} = \frac{B}{\Lambda} \nu_3 \sin \chi_s + B \nu_s \end{aligned} \quad (7.2)$$

Для упрощения записи правой части системы (3.1) введем обозначение для операции дискретной свертки произвольной функции  $f$ :

$$\sigma[f(\alpha, \chi)] = \sum_{k=1}^N f(\alpha_k, \chi_k) \frac{\sin \chi_k}{\rho_k^3}$$

Тогда скобки Пуассона в правой части системы (3.1) имеют вид (звездочкой обозначена подстановка импульсов  $p_i$ )

$$\begin{aligned} (\{P_1, P_2\})^* &= \left( -\sum_{k=1}^N R^2 \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = -BR^2 (R\nu_1 \sigma[\cos \alpha] + R\nu_2 \sigma[\sin \alpha] + \Lambda^{-1} \nu_3 \sigma[\rho \sin \chi]) = \\ &= -BR^2 \mathbf{p}_{12} \mathbf{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{12} &= (\sigma[\cos \alpha], R\sigma[\sin \alpha], \Lambda^{-1} \sigma[\rho \sin \chi], 0, \dots, 0) \\ (\{P_1, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left( -p_x \sin \theta + p_y \cos \theta - \sum_{k=1}^N R \cos \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = MR^2 \Lambda^{-1} \nu_2 - \\ &- BR^2 \Lambda^{-1} (R\nu_1 \sigma[\cos^2 \alpha] + R\nu_2 \sigma[\sin \alpha \cos \alpha] + \Lambda^{-1} \nu_3 \sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi]) = \\ &= MR^2 \Lambda^{-1} \nu_2 - BR^2 \mathbf{p}_{13} \mathbf{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{13} &= \Lambda^{-1} (R\sigma[\cos^2 \alpha], R\sigma[\sin \alpha \cos \alpha], \Lambda^{-1} \sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0) \\ (\{P_2, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left( -p_x \cos \theta - p_y \sin \theta - \sum_{k=1}^N R \sin \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = -MR^2 \Lambda^{-1} \nu_1 - \\ &- BR^2 \Lambda^{-1} (R\nu_1 \sigma[\sin \alpha \cos \alpha] + R\nu_2 \sigma[\sin^2 \alpha] + \Lambda^{-1} \nu_3 \sigma[\rho \sin \alpha \sin \chi]) = \\ &= -MR^2 \Lambda^{-1} \nu_1 - BR^2 \mathbf{p}_{23} \mathbf{v} \end{aligned}$$

$$\mathbf{p}_{23} = \Lambda^{-1} (R\sigma[\sin \alpha \cos \alpha], R\sigma[\sin^2 \alpha], \Lambda^{-1} \sigma[\rho \sin \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0)$$

## Литература

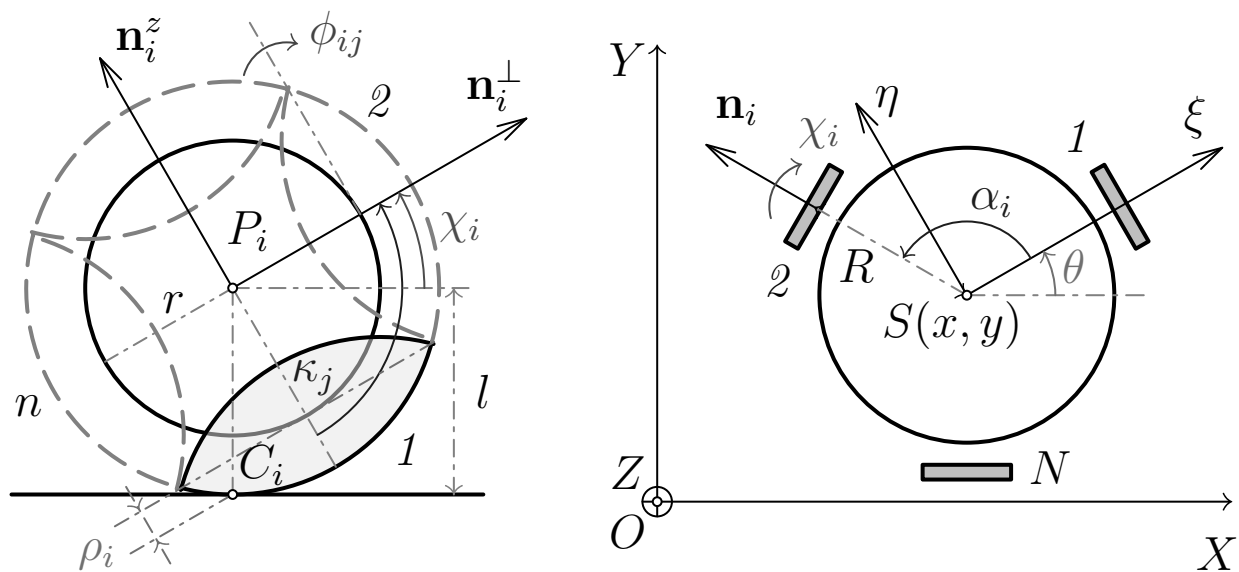
1. Gfrerrer A. Geometry and kinematics of the Mecanum wheel // Computer Aided Geom. Design. 2008. T. 25. С. 784–791.



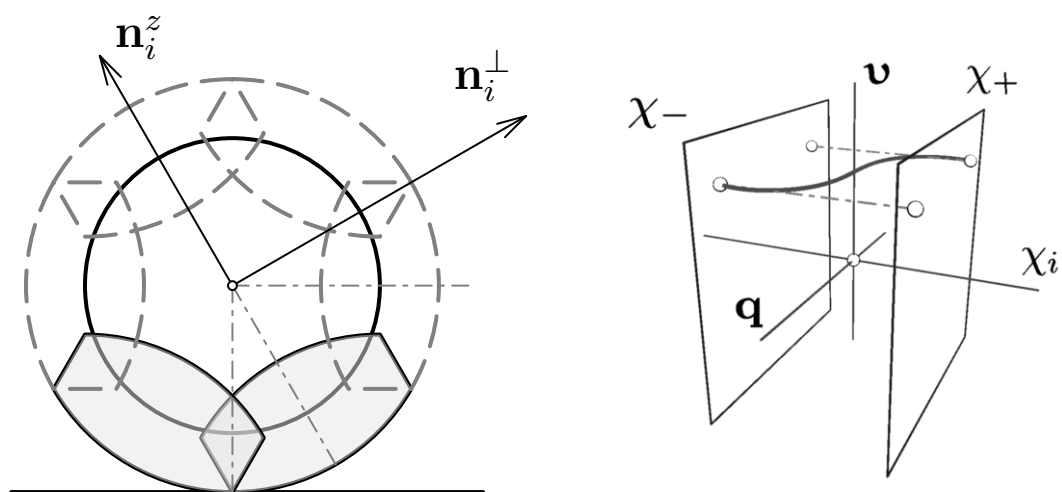
2. Зобова А. А., Татаринцов Я. В. Математические аспекты динамики движения экипажа с тремя окольцованными колесами // Мобильные роботы и мехатронные системы. М.: Изд-во МГУ, 2006. С. 61–67.
3. Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Изв. РАН. Теория сист. управл. 2007. № 6. С. 142–149.
4. Зобова А. А., Татаринцов Я. В. Свободные и управляемые движения некоторой модели экипажа с роликонесущими колесами // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2008. № 6. С. 62–65.
5. Зобова А. А., Татаринцов Я. В. Динамика экипажа с роликонесущими колесами // ПММ. 2009. Т. 73. № 1. С. 13–22.
6. Мартыненко Ю. Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // ПММ. 2010. Т. 74. № 4. С. 610–619.
7. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Тележка с омниколесами на плоскости и сфере // Нелин. дин. 2011. Т. 7. № 4 (Мобильные роботы). С. 785–801.
8. Williams R.L., Carter B.E., Gallina P., Rosati G. Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots // IEEE Trans. Robotics Automation. 2002. Т. 18. № 3. С. 285–293.
9. Ashmore M., Barnes N. Omni-drive robot motion on curved paths: the fastest path between two points is not a straight-line // Lecture Notes in Computer Science. B.; Heidelberg: Springer, 2002. С. 225–236.

10. Tobolar J., Herrmann F., Bunte T. Object-oriented modelling and control of vehicles with omni-directional wheels // Computational Mechanics. 2009. Hrad Nectiny, Czech Republic: 2009.
11. Косенко И. И., Герасимов К. В. Физически-ориентированное моделирование динамики омнитележки // Нелин. дин. 2016. Т. 12. № 2. С. 251–262.
12. Татаринов Я. В. Уравнения классической механики в новой форме // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2003. № 3. С. 67–76.
13. Зобова А. А. Применение лаконичных форм уравнений движения в динамике неголономных мобильных роботов // Нелин. дин. 2011. Т. 7. № 4. Р. 771–783.

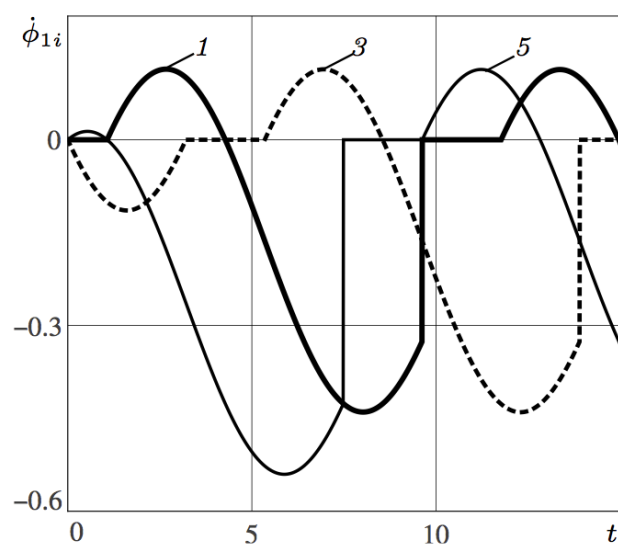
Фигуры.



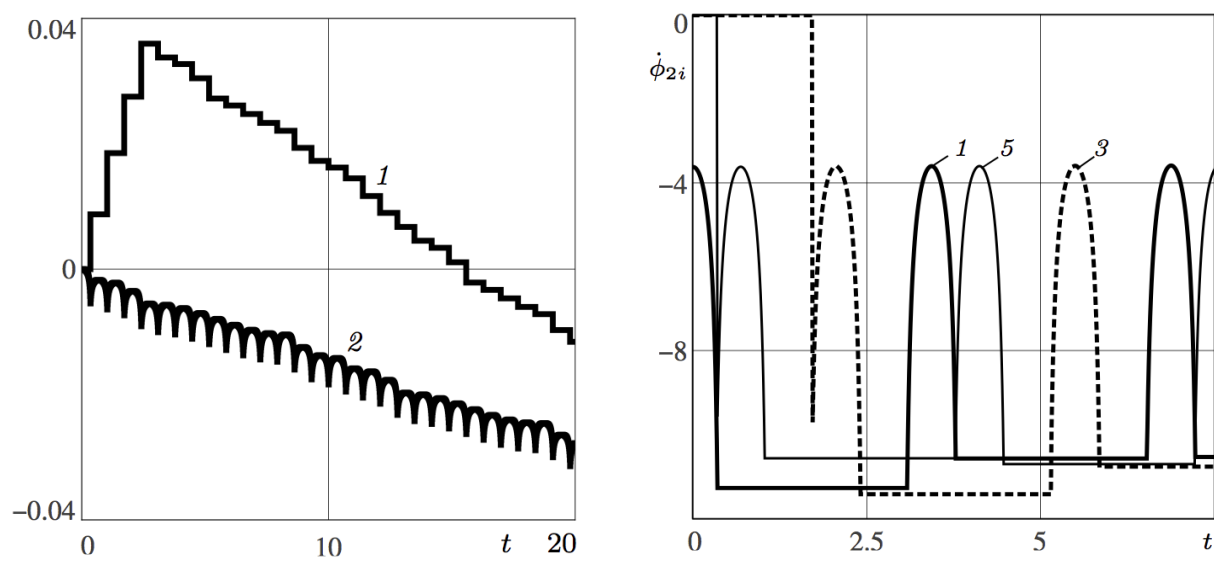
Фиг. 1.



Фиг. 2.

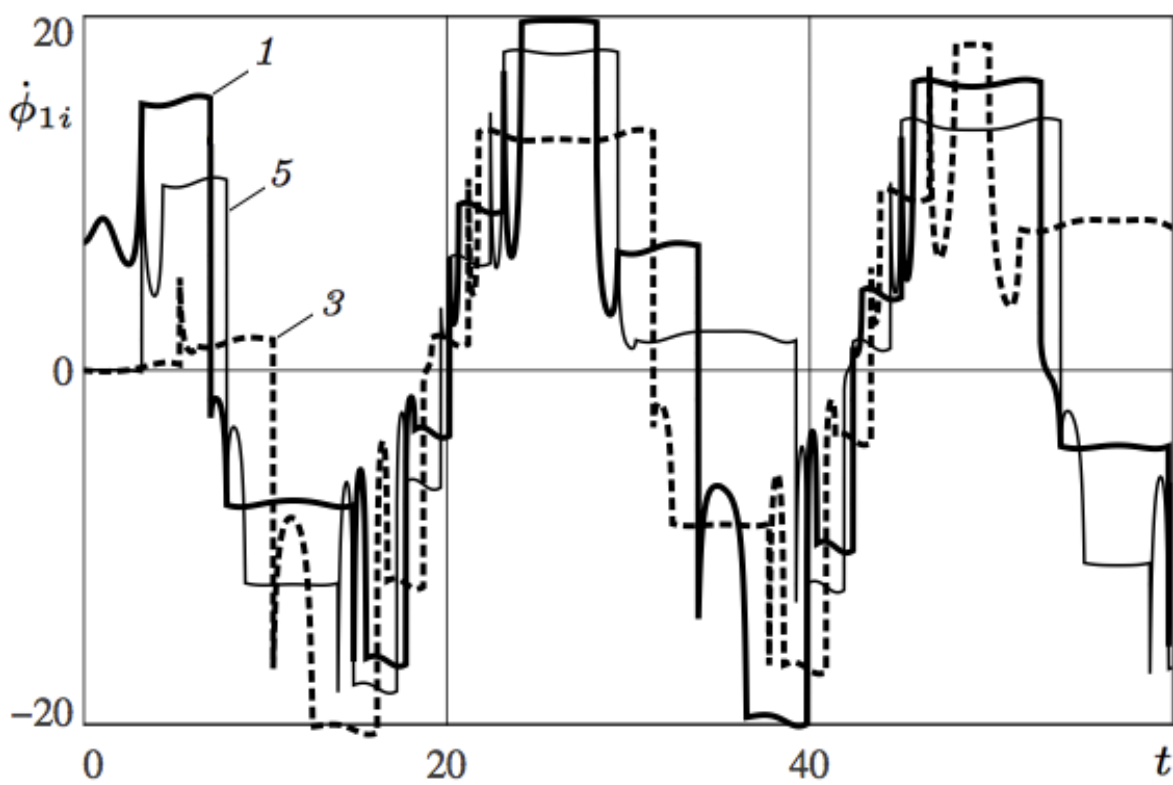
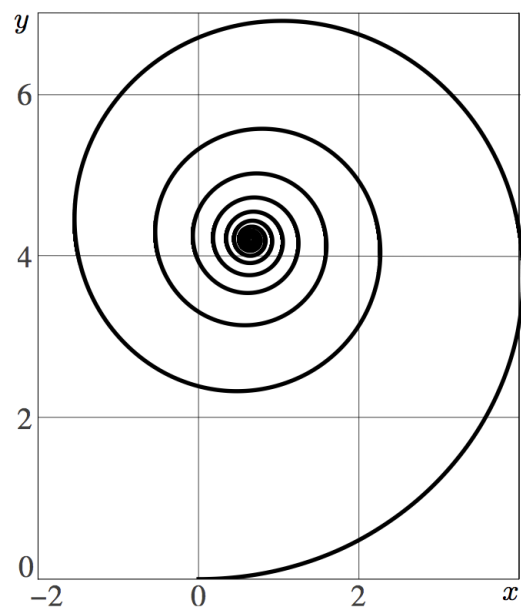
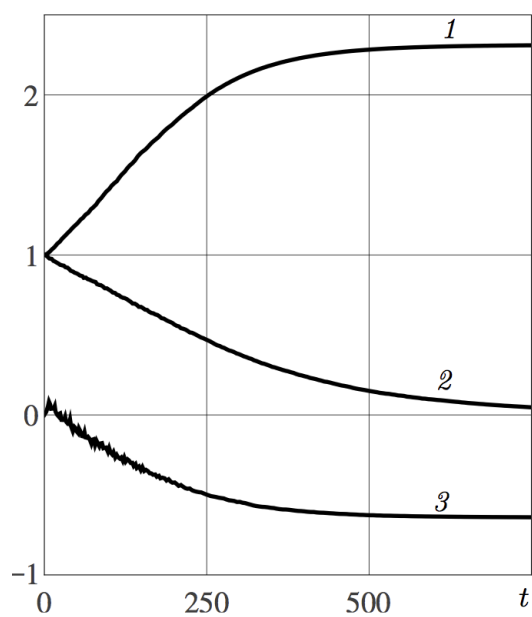


Фиг. 3.



Фиг. 4.

Оставить  
линию  
зубчатой



Фиг. 5.

# ON THE MOTION OF A SYMMETRICAL VEHICLE WITH OMNIWHEELS WITH MASSIVE ROLLERS

© 2018 г. K. Gerasimov\*, A. Zobova\*\*

*Lomonosov Moscow State University*

\*e-mail: [kiriger@gmail.com](mailto:kiriger@gmail.com), \*\*e-mail: [azobova@mech.math.msu.su](mailto:azobova@mech.math.msu.su)