МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет
Кафедра теоретической механики и мехатроники

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Модель динамики омниэкипажа

Omni-vehicle dynamical model

студента 521 группы

Герасимова Кирилла Вячеславовича

Научный руководитель:
д. ф.-м. н. профессор И. И. Косенко

Москва 2014

Содержание

1 Введение

В работе рассматривается подход к физически-ориентированному моделированию экипажа с омниколесами с использованием технологии Modelica.

Омниколесо - это колесо, на ободе которого расположены ролики. Имеются оси, закрепленные на колесе, а сами ролики свободно вращаются вокруг этих осей. В отечественной литературе такие системы называют также роликонесущими колесами.

Литература, в связи с тем, что рассматриваемый вид колес изобретен не столь давно, не слишком обширна. Теоретические исследования динамики ограничиваются модельными неголономными постановками, не учитывающими, в частности, динамику роликов [?,?,?,?]. Говоря точнее, эти подходы предлагают считать ролики бесконечно малыми и "распределять таким образом, неголономную связь "равномерно"по всему ободу колеса. В результате они приближенно описывают сложную систему - омниколесо - как идеализированный объект с меньшим количеством степеней свободы и иной геометрией масс и динамикой. Представлены [?, ?] практические работы, авторы которых рассматривают сконструированные ими же экипажи и исследуют вопросы управления их движением. Изучение физических моделей, принимающих во внимание динамику всех частей омни-экипажа (в том числе, роликов), затруднено резким ростом количества степеней свободы системы при увеличении количества роликов на колесе (см. раздел Модель экипажа).

Наша цель здесь - построить численную модель динамики омниколесного экипажа на горизонтальной плоскости, учитывающую динамику платформы экипажа, колес и роликов. Мы пренебрегаем трением в шарнирах и принимаем модель кулоновского трения в контакте с плоскостью. Мы используем и расширяем ранее представленную [?] библиотеку трехмерной динамики систем тел. Особое значение для данной реализации имеет применяемый способ представления односторонней связи.

2 Обзор

Об омниколесах, как таковых, существует немало работ, описывающих и кинематику и динамику. Существуют различные типы омниколес, отличающиеся конфигурацией роликов, количеством точек контакта. К примеру, интересный тип колес - меканум-колеса (см. рис. 1) - описан в [?]. Данная работа описывает различные варианты геометрической формы поверхности роликов,

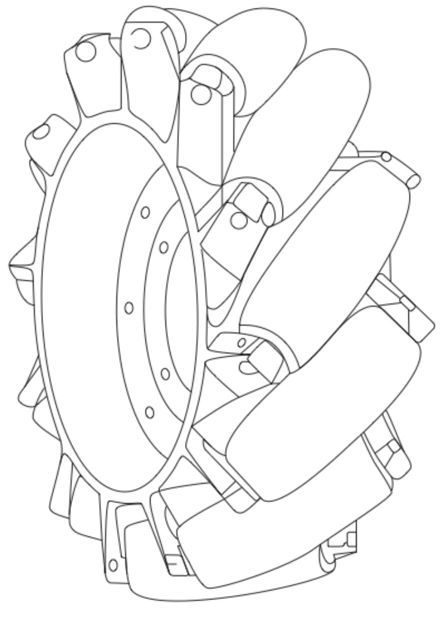


Рис. 1: Меканум-колесо

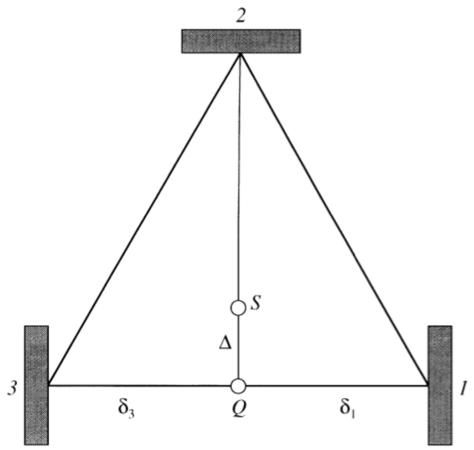


Рис. 2: Конфигурация из [?]

например, приближения ее сегментами тора, а также исследует прямую (даны скорости вращения колес, получить траекторию центра масс экипажа) и обратную (получить программные скорости вращения колес для заданной траектории) задачи кинематики для экипажа с тремя меканум-колесами в неголономной постановке.

Из работ, рассматривающих движение омниэкипажей в неголономной постановке, следует отметить [?, ?, ?]. Во всех трех работах колеса считаются твердыми дисками. В [?, ?] изучаются экипажи произвольной конфигурации, в то время как [?] принимает симметричную трехколесную. [?] проводит полный качественный анализ свободного движения экипажа, а также рассматривает, в частности, вопросы управления и устойчивости некоторых движений в конфигурации, приведенной на рис. 2. Вариант тележки из [?] имеет ролики в плоскостях соответствующих колес. Рассмотрено свободное движение и движение под действием трех постоянных управляющих моментов в осях колес. Исследуется вопрос об энергетической эффективности такого управляемого движения и находится оптимальное положение вектора скорости в теле платформы экипажа для прямолинейного движения. Также затрагивается проблема оценки координат робота при управлении. Работа [?] рассматривает свободное движение экипажа на плоскости и сфере, приводит, как и [?], свой вариант вывода общих уравнений движения. Находит некоторые интегралы приведенной (обезразмеренной) системы и исследует ее характерные неподвижные точки, периодические и асимптотические траектории, получая, в частности, явный вид абсолютного движения в этих случаях. Данная работа предлагает также использование омниэкипажа как транспортного средства путем помещения его в сферу и получает уравнения движения на сфере. Построенная модель для плоскости использована нами для верификации нашей объектно-ориентированной компьютерной модели, так как она является новейшим из предложенных неголономных вариантов и учитывает опыт авторов прошлых лет. Подробнее см. раздел Верификация.

Говоря о компьютерных моделях, выделим [?], использующую технологию объектно-ориентированного моделирования Modelica для построения физической модели омниэкипажа с нелинейной моделью трения в контакте. Она, однако, предполагает, что колесо не может создавать силу трения, ортогональную оси закрепления роликов. Производятся также расчеты управляемого движения для случаев тележки с четырьмя меканум-колесами и симметричной трехколесной конфигурации. Тот же автор исследует в [?] поведение экипажа при резком торможении - важный в технике случай - и демонстрирует с использованием своей численной модели появление заноса, возникающего из-за неравномерного распределения силы нормальной реакции при указанном управлении. [?] представляет краткое описание одной модели меканум-колеса, применяемой компанией Kuka [?]. С помощью Dymola авторы исследуют преодоление четырехколесной платформой вертикального препятствия и поведение нормальной силы реакции в этом случае. [?] подробно занимается вопросом навигации омниколесного экипажа и описывает использование фильтра частиц для решения задачи определения координат тележки в пространстве. Также автор представляет сконструированный им экипаж и систему управления.

3 Постановка задачи. Построение физически-ориентированной компьютерной модели

При построении модели омниэкипажа мы учитываем, что её основные параметры - количество роликов на каждом колесе и угол наклона оси симметрии ролика к плоскости колеса. Для простоты и наглядности рассмотрим омниколесо с четырьмя роликами. Кроме того, для простоты оси симметрии самих роликов расположим в плоскости колеса см. рис. 3. Эти основные параметры достаточно легко изменять. Будем считать также, что ролики рас-

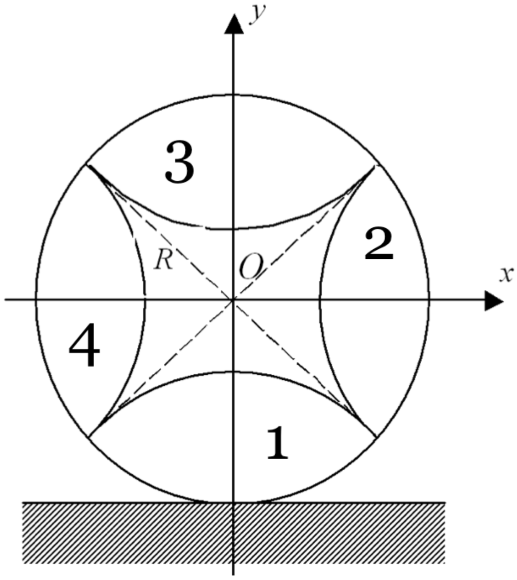


Рис. 3: Вертикально расположенное омниколесо

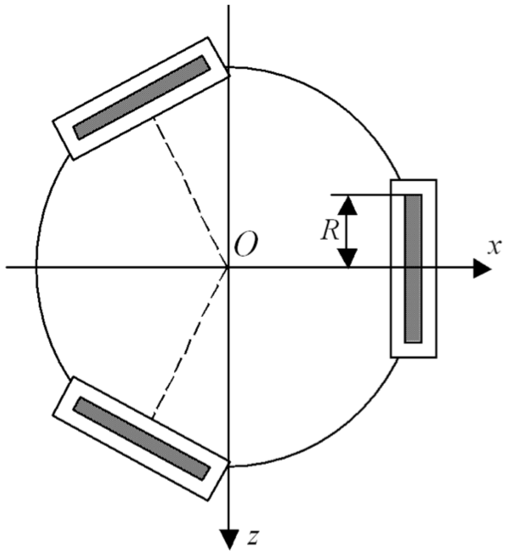


Рис. 4: Трехколесный экипаж, вид сверху

положены на колесе таким образом, что проекция кривой контакта - внешней границы колеса вместе с роликами - на плоскость колеса представляет собой последовательность неперекрывающихся сегментов, каждый из которых соответствует некоторому ролику. Эти сегменты связаны таким образом, например, что нормальная относительная скорость в контакте равна нулю в момент переключения роликов. Благодаря этому, нормальные удары отсутствуют. Касательная составляющая скорости относительного скольжения непрерывна при нулевом угле наклона осей роликов к плоскости колеса. Однако касательная сила трения может иметь разрыв в худшем случае первого рода, если ось симметрии ролика наклонена к плоскости колеса. Таким образом, линейная и угловая скорости колеса непрерывны в момент переключения контакта ролика. Аналогичное утверждение верно также и для роликов. Тогда касательные удары также отсутствуют.

Отметим дополнительно, что кривая, образуемая возможными точками контакта, в проекции на плоскость колеса является окружностью радиуса R, см. рис. 3. Таким образом, поступательное и вращательное движение непрерывны. Окончательно можем заключить, что движение остается невырожденным в момент переключения контакта с одного ролика на другой, по крайней мере, когда колесо вертикально.

Переходя на следующий структурный уровень, рассмотрим несколько омниколес, соединенных с движущейся платформой экипажа (см. рис. 4), посредством шарнирной связи. Эта последняя реализуется как класс в смысле языка Modelica, представленный ранее [?]. В нашем случае количество колес может быть три или больше. Они могут располагаться на платформе в разных конфигурациях. Мы рассматриваем здесь, для примера, систему с тремя колесами, расположенными в вершинах правильного треугольника, лежащего в плоскости платформы (см. рис. 4), параллельной координатной плоскости ZX. Ось Y полагаем вертикальной.

3.1 Динамическая модель ролика

Мы называем роликом осесимметричное твердое тело в форме веретена, поверхность которого задается в осях $Oxyz$, связанных с телом (см. рис. 5) уравнением

$$x^2 + (\sqrt{y^2+z^2} + R_1)^2 = R, \tag{1}$$

где R - внешний радиус омниколеса, $R_1 = R\cos\alpha$ - расстояние от центра ролика до центра колеса, $\alpha = \frac{\pi}{n}$ - половина угла с вершиной в центре колеса, опирающегося на дугу ролика, n - количество роликов на колесе.

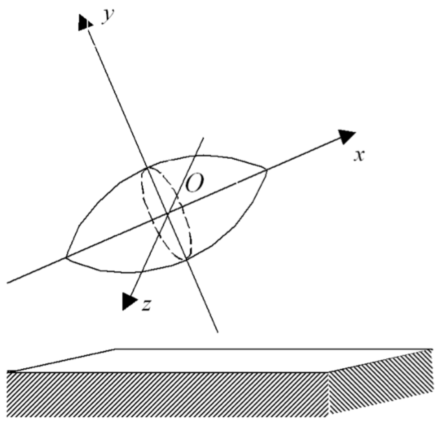


Рис. 5: Ролик на горизонтальной плоскости

Динамика поступательно-вращательного движения реализуется в численной модели с помощью уравнений Ньютона-Эйлера [?]. Ориентация ролика в пространстве представляется кватернионами [?].

3.2 Отслеживание контакта

Алгоритм отслеживания точки контакта играет важнейшую роль для точности и вычислительной эффективности компьютерной модели процесса контактирования ролика и горизонтальной плоскости. Для моделирования и симуляции динамики твердого тела с односторонней связью мы применяем технологию из [**?**]. Возможно применять систему известных неявных дифференциально-алгебраических уравнений при реализации объекта, отслеживающего контакт на Modelica. Однако эти уравнения вырождаются в вершинах роликов $x = \pm R \sin\alpha$ (в локальных для ролика координатах, см. рис. 3). Как правило, подобное вырождение приводит к аварийному завершению процесса симуляции.

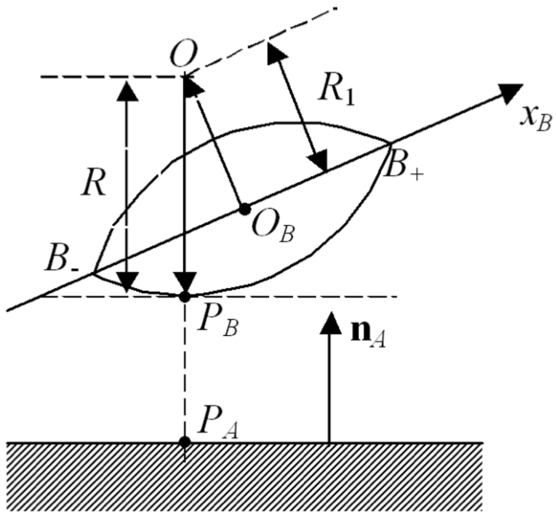


Рис. 6: Схема отслеживания контакта

В рассматриваемом случае ролика-веретена на горизонтальной плоскости оказывается возможно устроить процедуру отслеживания точки контакта достаточно простым способом. Можно указать явный способ вычисления ближайшей к горизонтальной плоскости точки ролика P_B (см. рис. 6). Ближайшая же к ролику точка плоскости P_A является, очевидно, вертикальной проекцией точки ролика P_B на плоскость.

Обозначим $\vec{i} = (1, 0, 0)^T$ единичный вектор вдоль оси $O_B x_B$ системы координат, связанной с роликом (рис. 6), записанный в осях $O_B x_B y_B z_B$. Пусть T_B - матрица поворота от инерциальной системы координат к осям ролика. Первая в нашем случае совпадает с неподвижными осями $O_A x_A y_A z_A$, связанными с плоскосью. Также, пусть $\vec{r_B}$ - координаты центра масс ролика в неподвижных осях, и $\vec{n_A} = (0, 1, 0)^T$ - вектор восходящей нормали к горизонтальной плоскости.

Примем обозначения для тел: A - для плоскости, B - для ролика. Пусть $\vec{d}$ - горизонтальный единичный вектор, определяемый как

$$\vec{d} = \frac{T_B\vec{i_B} \times \vec{n_A}}{|T_B\vec{i_B} \times \vec{n_A}|}.$$

Таким образом, вектор $\vec{O_BO}$ должен иметь длину R_1, и определяться как

$$\vec{O_BO} = R_1\vec{d} \times T_B\vec{i_B}.$$

Здесь O - центр кривизны дуги, образующей одну сторону вертикального сечения ролика (см. рис. 6). Этот вектор лежит в плоскости колеса и в вертикальной плоскости. Таким образом, из рис. 6 очевидно, что точка P_B поверхности ролика - это

$$\vec{r_{P_B}} = \vec{r_B} + R_1\vec{d} \times T_B\vec{i_B} - R\vec{n_a}, \tag{2}$$

поскольку P_B лежит на одной вертикальной прямой с точкой O. Координаты P_A тогда

$$\vec{r_{P_A}} = (x_{P_B}, 0, z_{P_B})^T. \tag{3}$$

Описанная процедура верна лишь если угол наклона $T_B\vec{i_B}$ к горизонтальной плоскости по величине не превосходит α. В противном случае надо полагать $P_B = B_-$, где B_- - левая (см. рис. 6) вершина ролика, в случае, если угол наклона больше α, либо $P_B = B_+$, где B_+ - правая вершина для угла наклона, меньшего $-\alpha$.

И наконец, условие, при котором имеет место контакт между роликом и плоскостью, может быть записано как

$$|T_B\vec{i_B} \cdot \vec{n_A}| \leq \sin\alpha. \tag{4}$$

Это условие, однако, выполняется и для самого нижнего, и для самого верхнего ролика одновременно. Чтобы отбросить верхний случай, нужно добавить ещё одно условие:

$$y_B < R, \tag{5}$$

где y_B - высота центра масс ролика над горизонтальной плоскостью.

Таким образом, совокупность условий (4) и (5) эквивалентна случаю контакта. В ином случае нужно рассматривать условие равенства силы реакции нулю. Действительно, по принципу Синьорини, для каждого ролика верно одно из двух утверждений: а) ролик в контакте, относительная скорость по нормали равна нулю; и б) контакта нет, реакция (и нормальная, и касательная) равна нулю.

Условие а) можно записать различными способами. Например, с геометрической точки зрения, наличие контакта равносильно равенству

$$y_{P_B} = 0. \tag{6}$$

Отсутствие же его эквивалентно

$$F_n = 0,$$

где F_n - нормальная составляющая силы реакции, действующей на ролик в точке P_B.

Практика вычислений показывает, что уравнение контакта в форме (6) вызывает, как правило, аварийное завершение расчета динамической модели ролика. Подобный исход получаем и при использовании формы

$$v_n = 0,$$

условия а). Здесь v_n - нормальная составляющая относительной скорости в точке контакта. И только уравнение вида

$$\dot{\vec{v_n}} = 0$$

приводит к искомому результату: объект, реализующий контактное взаимодействие работает правильно в течение всего процесса симуляции. Напомним, что реализация всего процесса контактирования полагает контакт точечным.

Для каждого ролика омниэкипажа модель силы трения "включается"на период, когда он находится в контакте. В разработанной модели использован закон трения Кулона-Амонтона. Мы используем известное кусочно-заданное приближение [?] точного закона сухого трения. В целом, реализация односторонней связи основана на результатах, представленных в [?].

Если угол наклона оси симметрии ролика к плоскости колеса ненулевой, то некоторые соотношения, указанные выше необходимо уточнить. В таком случае форма роликов должна быть растянута вдоль обода колеса. Обозначим положение центра O колеса как $\vec{r_O} \in \Re^3$ (см. рис. 6). Введем вспомогательный базис

$$\vec{i}' = T_B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j}' = \frac{\vec{r_O} - \vec{r_{O_B}}}{|\vec{r_O} - \vec{r_{O_B}}|}, \quad \vec{k}' = \vec{i}' \times \vec{j}'.$$

Соответствующая матрица перехода имеет вид $T' = (\vec{i}'\vec{j}'\vec{k}')$, где $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ полагаются векторами-столбцами. Эта матрица определяет замену координат от системы отсчета, связанной с телом А, к системе, определяемой базисом $B' = \left\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\right\}$ как

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = T' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Чтобы свести анализ к уже рассмотренному выше случаю $\beta = 0$, необходимо повернуть базис B' вокруг оси $\vec{j}'$ на угол $-\beta$ так, что после поворота новый базис $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ будет ориентирован по плоскости колеса, т.е. его векторы $\vec{i}, \vec{j}$ будут лежать в этой плоскости. Этому повороту соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

в базисе B'. Затем в базисе тела A поворот единичного вектора $\vec{i}'$ представляется как $\vec{i} = T'S(1,0,0)^T$. Положим также $\vec{j} = \vec{j}', \vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$. Очевидно, $\vec{k} = \vec{d}$, где $\vec{d}$ - единичный вектор, определенный выше.

Таким образом, основываясь на выражении (2) и принимая во внимание рис. 6, можно заключить, что для случая $\beta \neq 0$ имеет место следующий результат:

$$\vec{r_{P_B}} = \vec{r_B} + R_1\vec{j} - R\vec{n_A} - \frac{R_1 \tan\beta \sin\gamma}{\sqrt{1 - \sin^2\gamma}} \vec{j} \times \vec{i}, \tag{7}$$

где угол γ удовлетворяет уравнению

$$\sin\gamma = \vec{i} \cdot \vec{n_A}.$$

3.3 Модель экипажа

Процесс сборки модели экипажа производится в два этапа: а) сборка модели одного омниколеса, содержащего ступицу и ролики; б) сборка всего экипажа посредством создания экземпляров класса омниколеса из п. а) в модели-контейнере, соответствующей экипажу (вместе с остальными необходимыми компонентами).

Для соединения роликов, а точнее, объектов класса ролик, со ступицей колеса мы используем модель шарнирной связи, разработанную ранее и представленную в [?]. Это класс, представляющий вращение вокруг некоторой наперед заданной оси. Исходный код всех классов и моделей для данной задачи реализован в виде библиотеки языка Modelica. Визуальное представление модели колеса см. на рис. 7. В этом примере мы приняли, для простоты и ясности $n = 4$.

Модель, представляющая основной интерес - это модель всего экипажа, создаваемая на второй стадии описанного процесса. Соединения между колесами и платформой также реализованы в виде класса шарнира из п. а). Эти шарниры допускают вращение без сопротивления вокруг заданной оси и не допускают сдвиг. Визуальное представление модели экипажа - на рис. 8. Здесь для ясности изображения объекты даны в виде отдельных экземпляров. На деле же, создаются массивы роликов, колес и шарниров для произвольного n и произвольного количества колес. Таким образом, экипаж имеет $nN + 3$ степеней свободы, где N - количество колес, а 3 соответствует степеням свободы платформы.

Моделирование производилось в среде Dymola [?]. Перед вычислениями Dymola производит редукцию индекса системы дифференциально-алгебраических уравнений. Модель экипажа до редукции состоит из: а) одного твердого тела - платформы; б) N (трех в рассматриваемом случае) твердых тел - ступиц колес; в) $N \cdot n$ (двенадцати) твердых тел роликов, расположенных на колесах. В соответствии, например, с [?], для каждого объекта твердого тела мы задаем шесть обыкновенных дифференциальных уравнений Нютона движения центра масс и семь ОДУ Эйлера для вращательного движения тела вокруг центра масс. Последние суть четыре кинематических уравнения Эйлера для кватерниона ориентации твердого тела и три уравнения динамики с угловой скоростью. То есть модель экипажа включает систему ОДУ $n(N + 1) \cdot (6 + 7)$ ($16{\cdot}13 = 208$) порядка. Кроме этого, объекты связей могут порождать дополнительные дифференциальные уравнения.

Колеса, являющиеся частью экипажа, неизбежно сохраняют вертикальное положение. Благодаря этому свойству алгоритм отслеживания контакта, описанный выше, работает правильно.

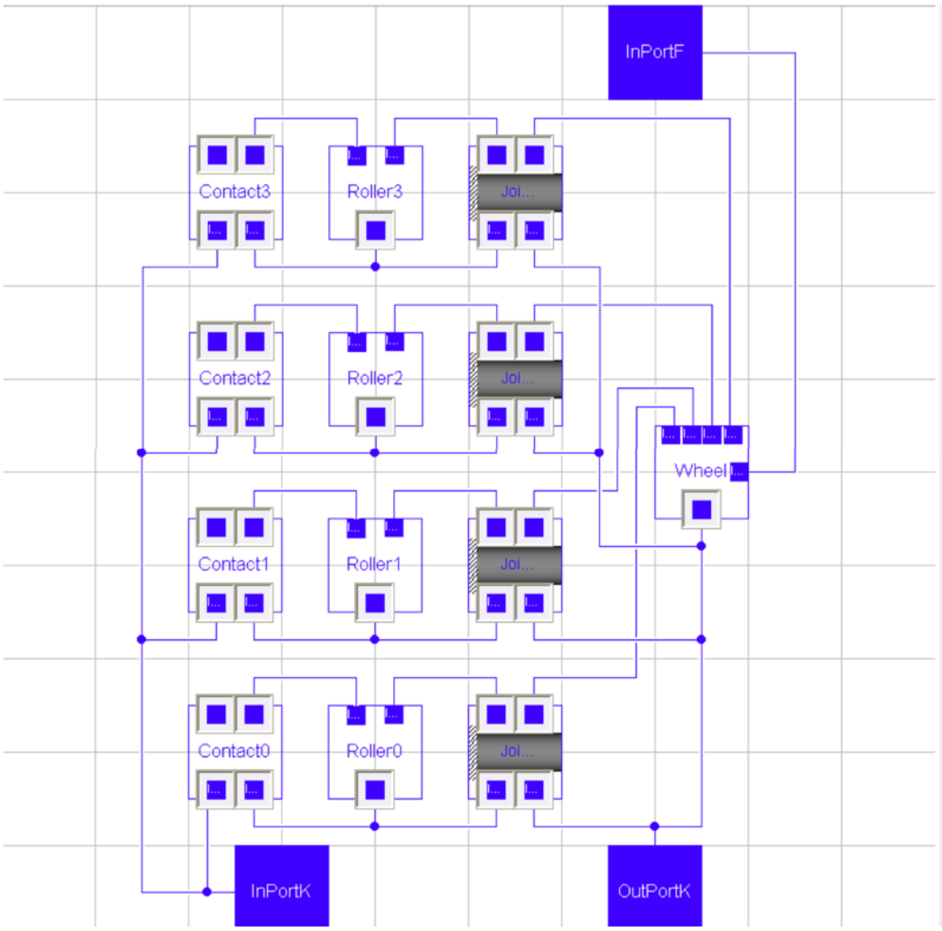


Рис. 7: Визуальная модель омниколеса

4 Верификация

4.1 Гипотеза о близости решений

В литературе представлены [?, ?, ?] работы, рассматривающие омниколеса в предположении, что массой и инерцией роликов можно пренебречь, налагающие на систему неголономные связи, ограничивающие направление скорости скольжения в точках контакта колес с поверхностью, на которой стоит экипаж, и не вводящие силу трения в контакте, т.е. считающие скольжение идеальным. Эти идеализированные модели имеют существенно меньше степеней свободы, чем "реальный"омниэкипаж, и легче поддаются аналитическому исследованию.

Описанные модели можно использовать для верификации построенной

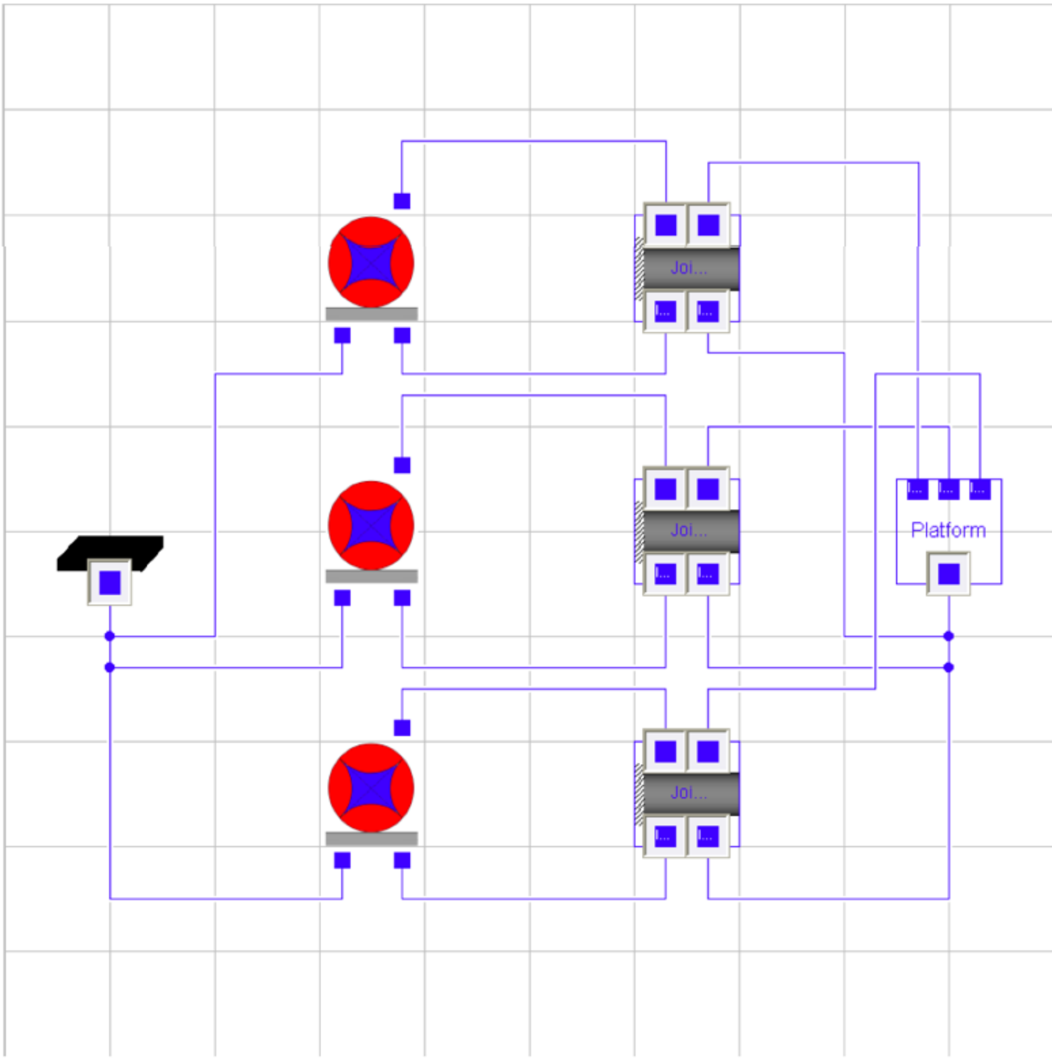


Рис. 8: Визуальная модель экипажа

физически-ориентированной модели, рассматривая некоторые элементарные виды движений. Максимальное соответствие построенной модели упомянутым неголономным может быть достигнуто при уменьшении вляиния массы роликов на динамику колеса, а именно, при уменьшении их массы с сохранением общей массы колеса с роликами. На этом предположении и основан наш подход к верификации.

4.2 Проверочная модель

Для верификации использованы результаты работы [?] как новейшей из неголономных моделей динамики свободной тележки с омниколесами на плоскости.

Авторы [?] принимают простейшую модель омниколеса как плоского диска, для которого скорость точки контакта с опорной поверхностью направлена вдоль прямой, составляющей некоторый угол δ с плоскостью колеса (см. рис. 9). Связь, наложенная на колесо в таком случае имеет вид

$$\vec{v_Q} \cdot \vec{\alpha} = 0,$$

где $\vec{v_Q}$ - скорость точки контакта, $\vec{\alpha}$ - единичный вектор вдоль оси закрепления роликов.

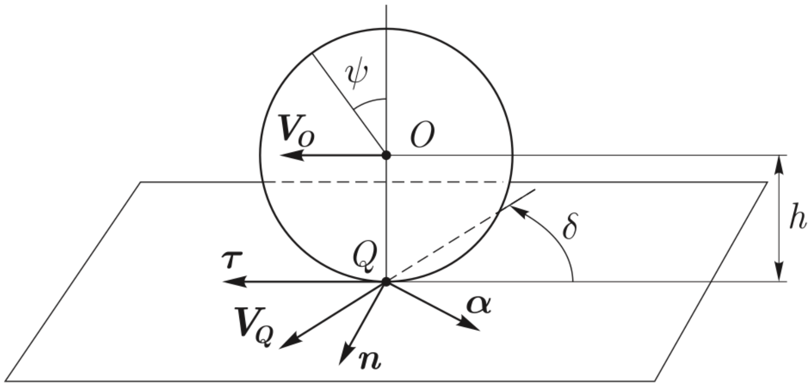


Рис. 9: Неголономная модель колеса

Авторы [?] получают уравнения движения для экипажа с произвольным количеством колес, закрепленных так, что их оси неподвижны относительно платформы, а оси роликов повернуты на произвольные углы относительно плоскостей соответствующих колес (см.рис. 10).

Вводится подвижная система отсчета, связанная с платформой экипажа

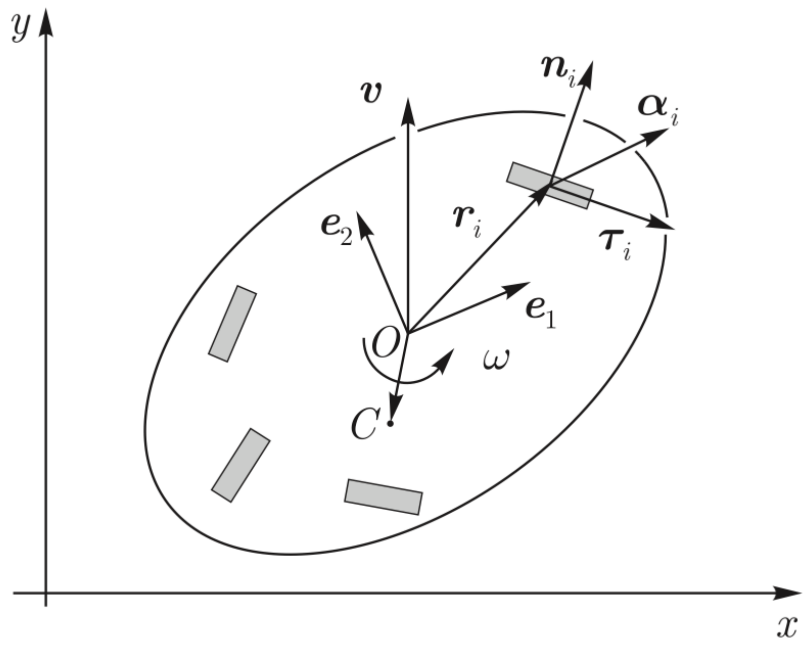


Рис. 10: Неголономная модель экипажа

(см.рис. 10). Уравнения свободного движения имеют вид:

$$
\begin{aligned}
(\Gamma + mE)\dot{\vec{v}} + m\dot{\omega}(J\vec{r_C} + R) + m\omega J(\vec{v} + \omega J\vec{r_C}) = 0, \\
\hat{I}\dot{\omega} + m(J\vec{r_C} + \vec{r}) \cdot \dot{\vec{v}} + m\omega\vec{v} \cdot \vec{r_C} = 0, \\
\dot{x} = v_1 \cos\phi - v_2 \sin\phi, \dot{x} = v_1 \sin\phi + v_2 \cos\phi, \dot{\phi} = \omega, \\
\Gamma_{kl} = \sum_i \frac{I_i}{s_i^2 h_i^2}\alpha_i^k \alpha_i^l, R = m^{-1}\sum_i \frac{I_i}{s_i^2 h_i^2}(J\vec{r_i} \cdot \alpha_i)\alpha_i, \\
\hat{I} = I + \sum_i \frac{I_i}{s_i^2 h_i}(J\vec{r_i} \cdot \alpha_i)^2,
\end{aligned}
$$

где $\hat{I}$ - суммарный момент инерции системы относительно вертикальной оси, проходящей через начало O подвижной системы отсчета,
I - момент инерции платформы относительно той же прямой,
I_i - моменты инерции колес относительно их диаметров,
$s_i = \sin\delta_i$, h_i - радиусы колес,
$\vec{r_i}$ - точки закрепления осей колес в подвижной системе,
$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,
x, y, ϕ - координаты точки O и угол поворота платвормы экипажа вокруг вер-

тикальной оси,
$\vec{v}, \omega$ - вектор скорости точки O и скорость поворота платформы,
$\vec{r_C}$ - координаты центра масс экипажа в подвижных осях, E - единичная матрица.

Данная неголономная модель экипажа также реализована на языке Modelica [?] как часть упомянутой библиотеки [?]. Таким образом, возможно проведение сравнительного анализа физически-ориентированной и идеализированной моделей и верифкация.

4.3 Два типа движений

Задавая параметры экипажа, такие как массы его частей, их моменты инерции, геометрические размеры, положения, а также начальные данные - скорость центра масс и угловую скорость платформы, - и выполняя согласованные расчеты для двух реализаций - физической и идеальной - можно получить достаточно близкие движения при достаточно малой доле массы роликов.

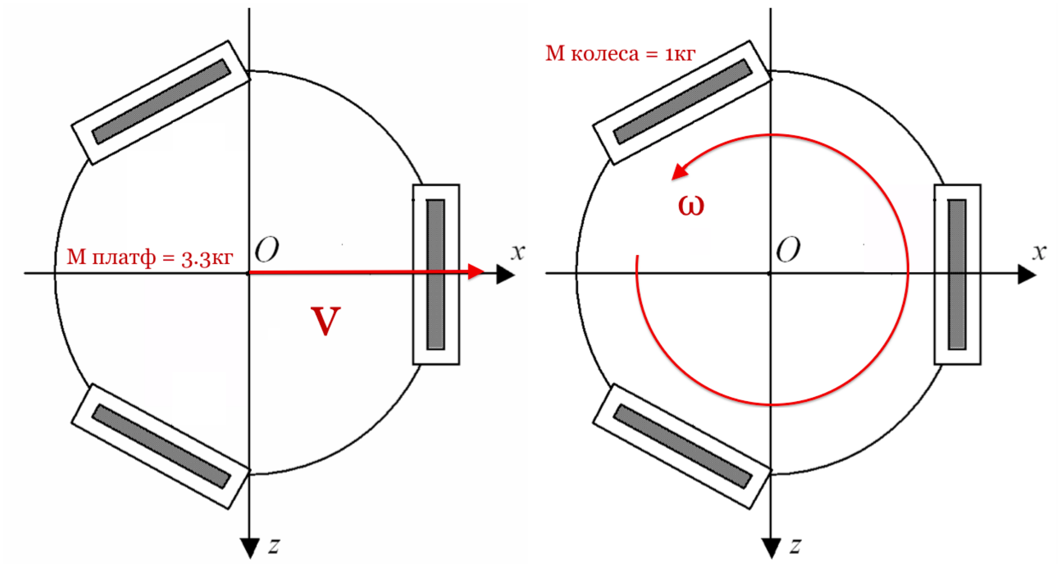


Рис. 11: Параметры экспериментов

При выполнении численных экспериментов массы платформы и колес, количество колес, количество роликов, геометрия системы были фиксированы (см. рис. 11). Изменялись начальные данные и доля массы роликов.

Рассмотрены два типа начальных условий $\vec{v}(0) = (v_0, 0, 0)^T, \omega(0) = \omega_0$ (см. рис. 11):

1. экипаж закручен вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр масс, скорость центра масс равна нулю (ожидаемый результат - экипаж вращается вокруг своей вертикальной оси симметрии, и центр масс покоится),

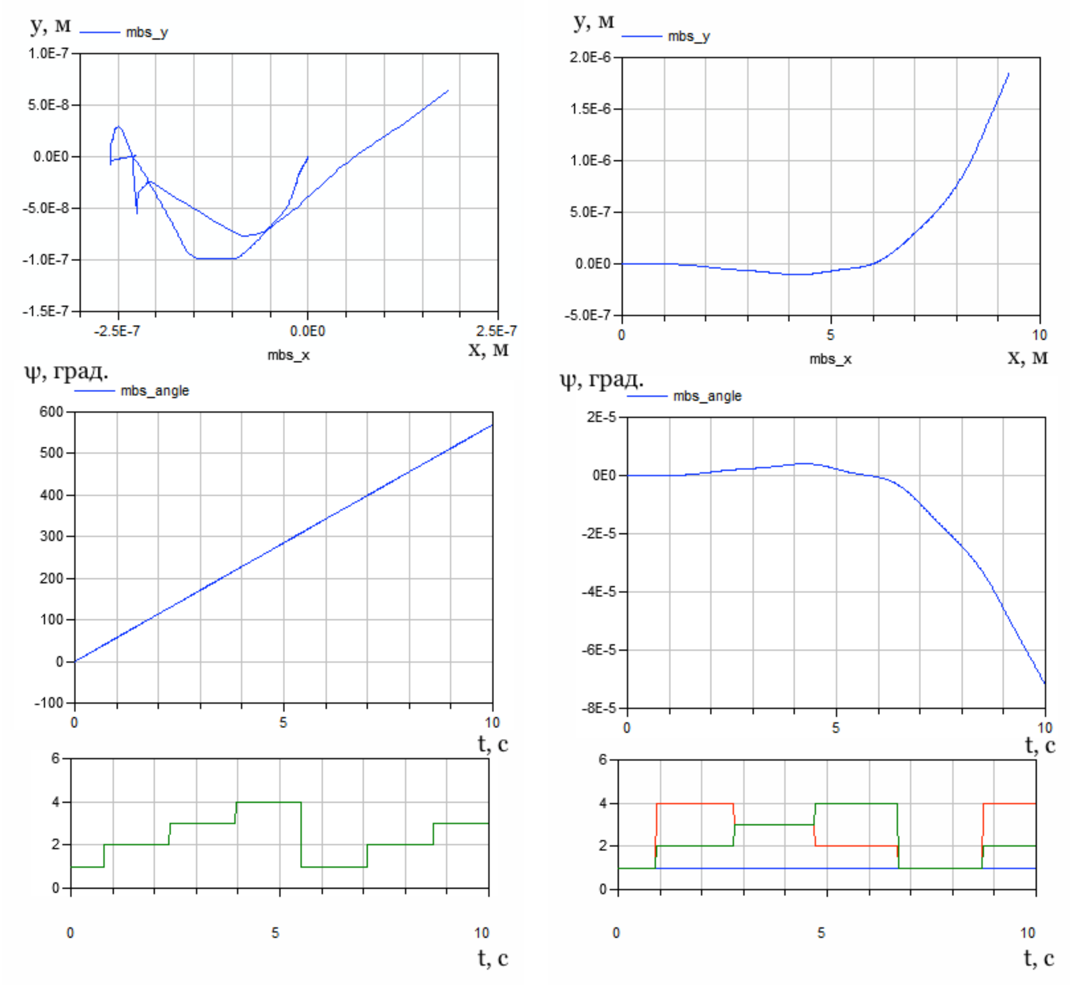
2. экипаж имеет начальную линейную скорость в направлении одного из колес и не закручен (ожидаемый результат - центр масс экипажа движется вдоль оси Ox, экипаж не вращается).

Значения отношения η массы ролика к общей массе колеса принимали в обоих случаях значения от $10^{-6}n^{-1}$ до $10^{-1}n^{-1}$ с шагом 1 по порядку малости (здесь n - фиксированное количество роликов).

На рис. 12 приведены примеры траектории центра масс $y(x)$ и зависимости $\psi(t)$ угла поворота ψ платформы вокруг вертикальной оси, проходящей через её центр, для случаев 1) и 2). Кривые $y(x)$, изображающие траектории центра масс, соответствуют, в сущности, точке - началу координат - в случае $v_0 = 0, \omega_0 = 1$, и отрезку прямой, совпадающей с осью x, в случае $v_0 = 1, \omega_0 = 0$, ибо масштаб отображения таков, чтобы были видны отклонения от точных значений, возникающие в силу вычислительной погрешности, но сами эти отклонения имеют порядок малости, позволяющий считать их нулевыми. Аналогичное утверждение верно и для зависимости угла поворота платформы ψ от времени в случае поступательного движения - полученная зависимость близка к постоянной.

Ниже представлены результаты нескольких численных экспериментов. Во всех случаях величины, изображенные на рис. 12, демонстрируют поведение, не различимое в масштабе рис. 12, и поэтому приведены лишь расхождения между построенной нами моделью и верификационной идеализацией, которые и представляют интерес. Также представлена абсолютная величина скорости скольжения в точке контакта в физической модели.

Графики зависимости скорости скольжения от времени показывают, что скольжение имеет место в окрестности момента смены роликов. Это объясняется тем, что для идеального качения в эти моменты ролику необходима бесконечная угловая скорость собственного вращения, ибо его размер вблизи вершины стремится к нулю. Видно, что с ростом доли массы роликов в общей массе колеса скольжение в контакте становится существеннее, изменяясь от пренебрежимо малого при $\eta = 10^{-6}$ до весьма существенного уже при $\eta = 10^{-3}$. Тем не менее, расхождения траектории и угла поворота платформы малы, а скольжение наблюдается лишь в точках колеса, которые в промышленных конструкциях не присутствуют (см. Обзор), что и позволяет считать верификацию проведенной.



(a) $\eta = 0,1, v_0 = 0, \omega_0 = 1$ (b) $\eta = 0,1, v_0 = 1, \omega_0 = 0$

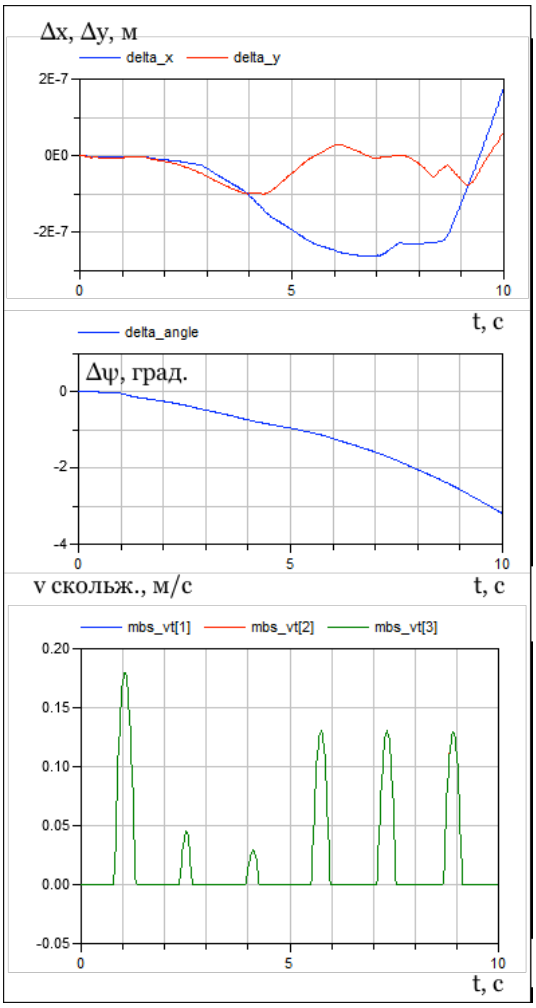
Рис. 12: Примеры траекторий, характера изменения угла и смены номеров роликов в контакте для двух типов начальных условий. На нижнем графике - номер ролика в контакте, см. рис. 3

5 Выводы и дальнейшая работа

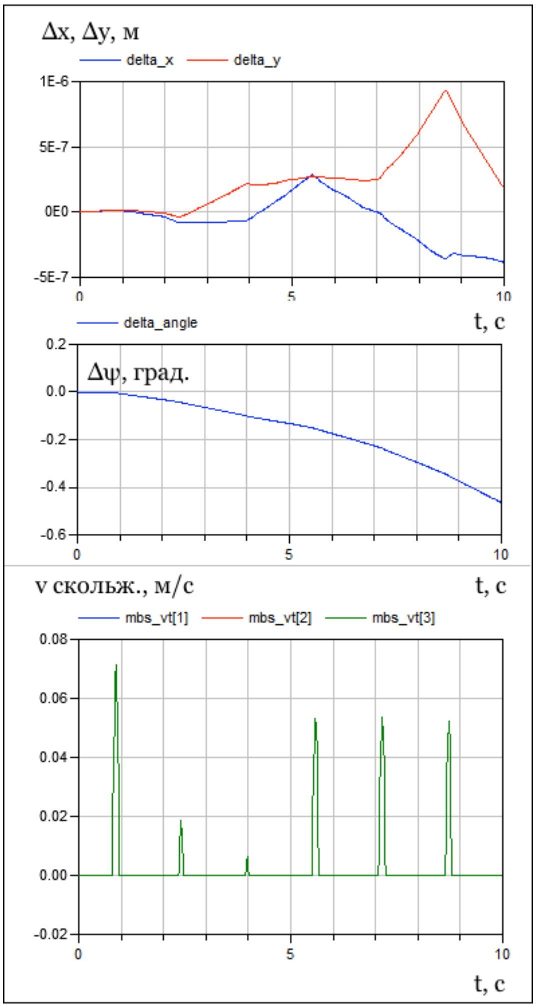
Построена объектная физически-ориентированная модель экипажа с омниколесами, проведена верификация - сравнение с неголономной моделью экипажа, также реализованной в рамках подхода объектно-ориентированного моделирования.

Верификация показывает близость решений в указанных моделях на основных примерах начальных данных и практически полное совпадение при соответствующем уменьшении доли массы роликов в общей массе колеса, при использовании модели трения Кулона-Амонтона и симметричной трехколесной конфигурации экипажа.

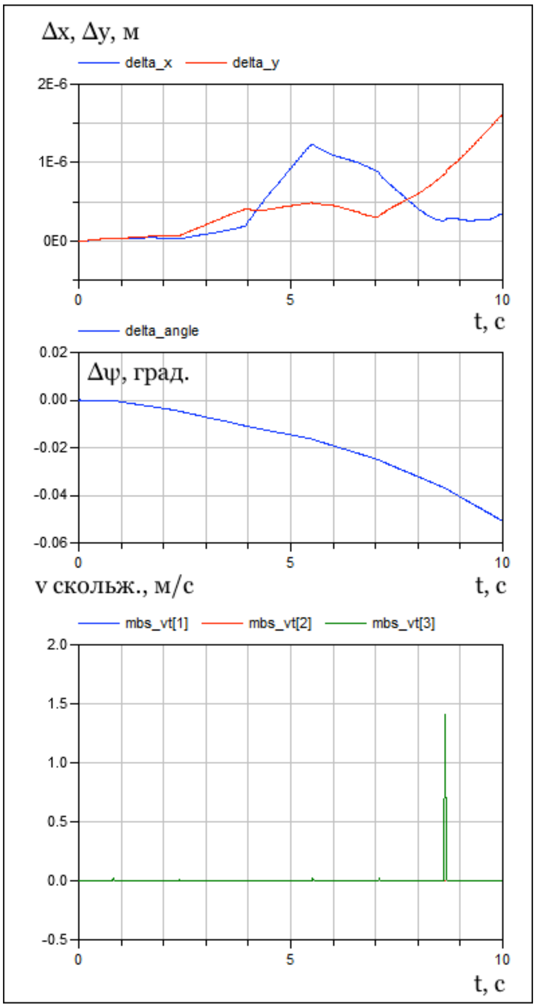
Представляет интерес реализация иных, более точных моделей контакта (например, модели Герца) и проведение численных экспериментов для иных конфигураций экипажа (например, с четырьмя меканум-колесами). Конечным применением моделей, основанных на данной, может стать использование их для управления реальными экипажами.



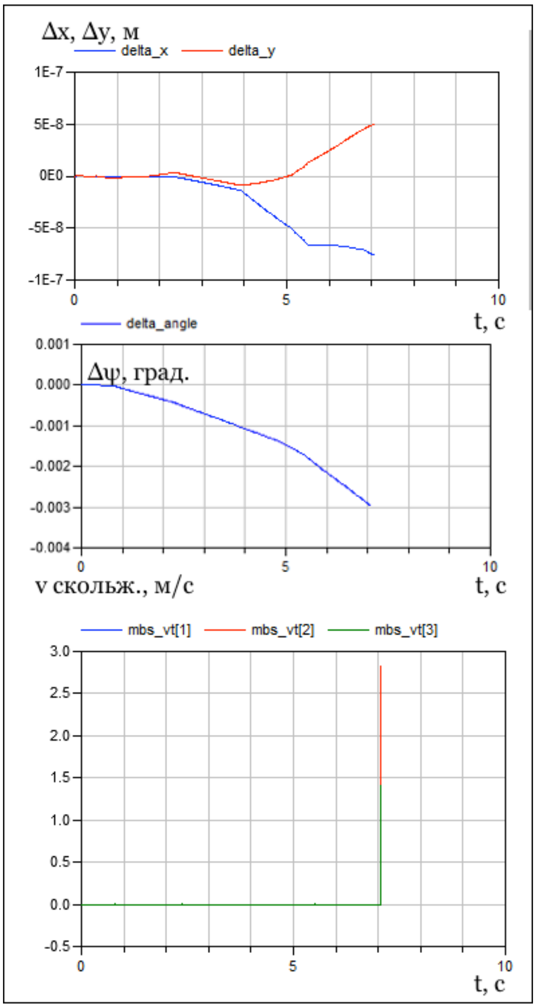
$\eta = 0,1, v_0 = 0, \omega_0 = 1$



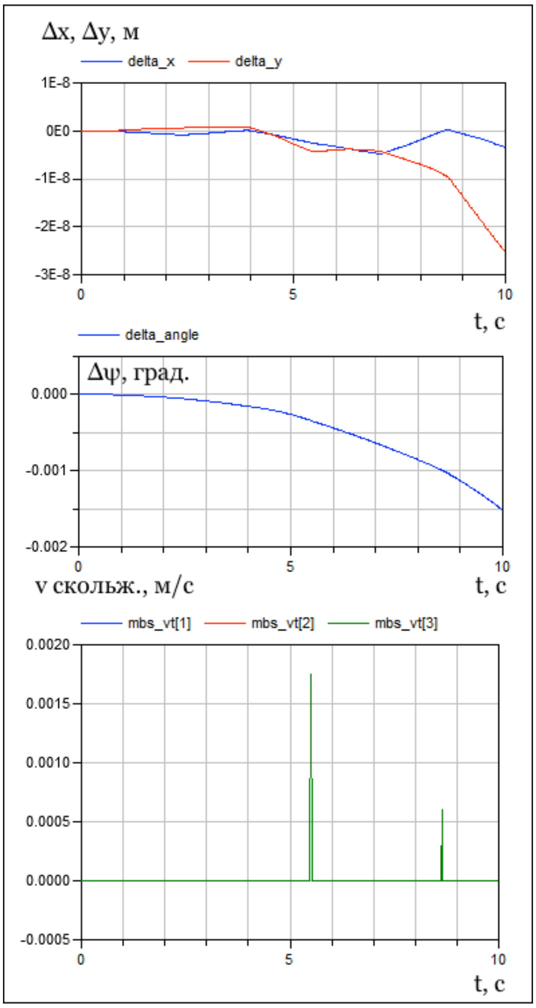
$\eta = 0,01, v_0 = 0, \omega_0 = 1$



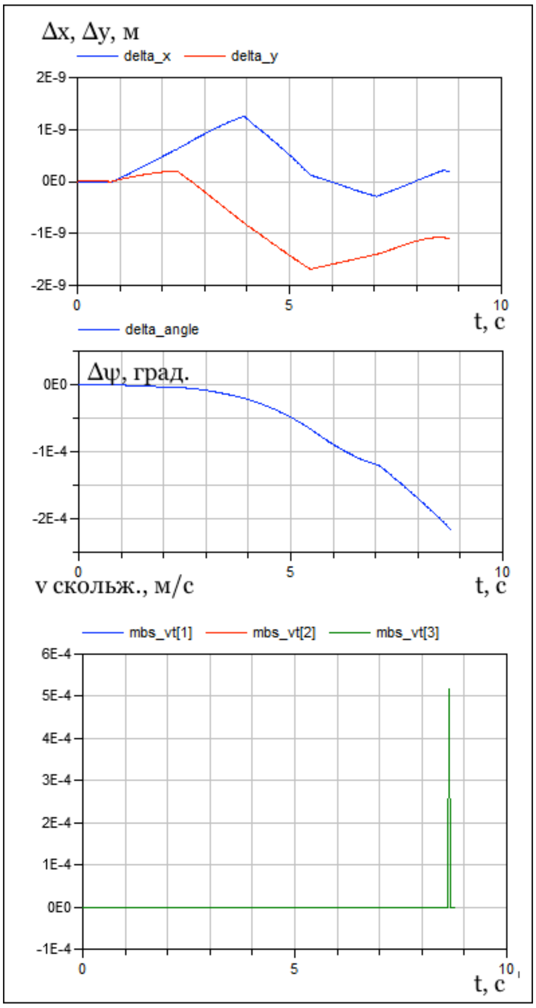
$\eta = 0,001, v_0 = 0, \omega_0 = 1$



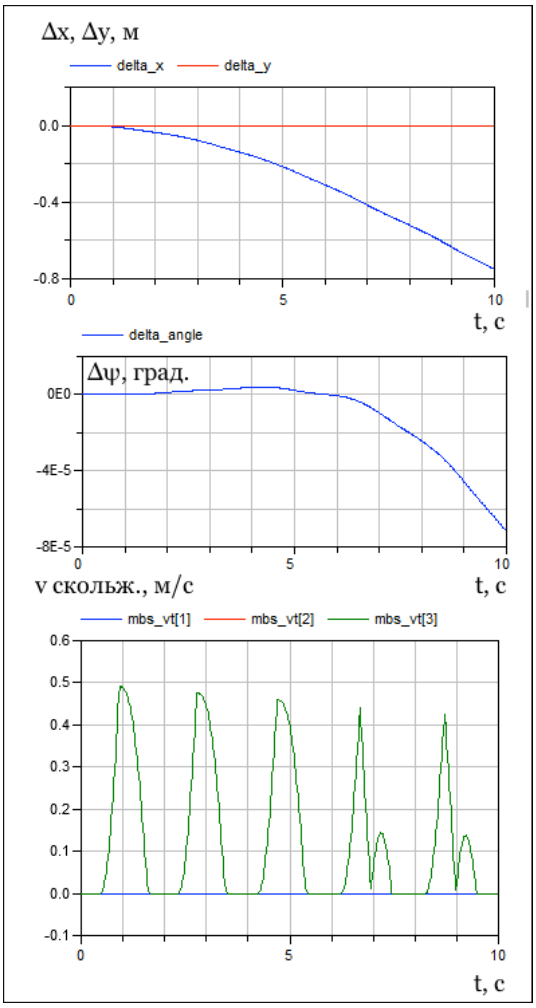
$\eta = 0,0001, v_0 = 0, \omega_0 = 1$



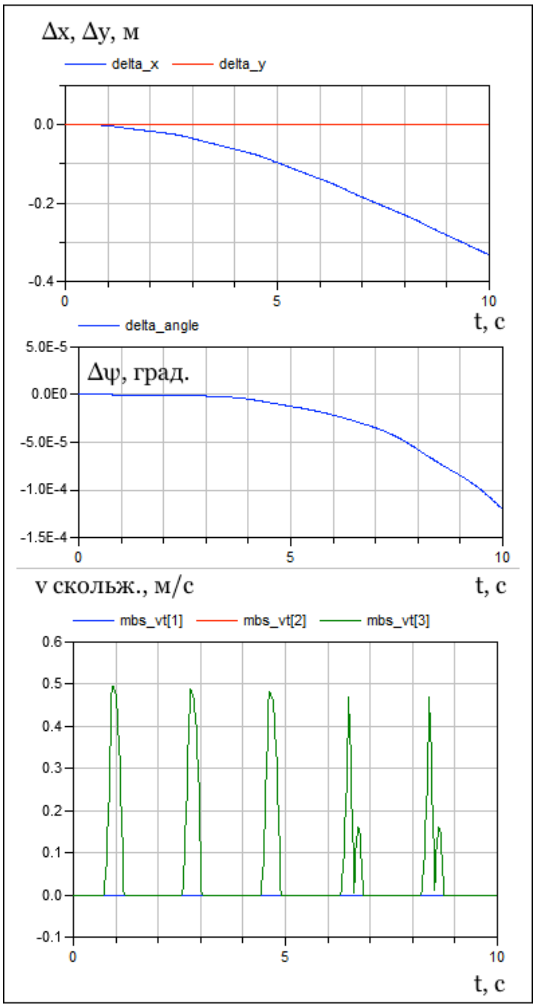
$\eta = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$



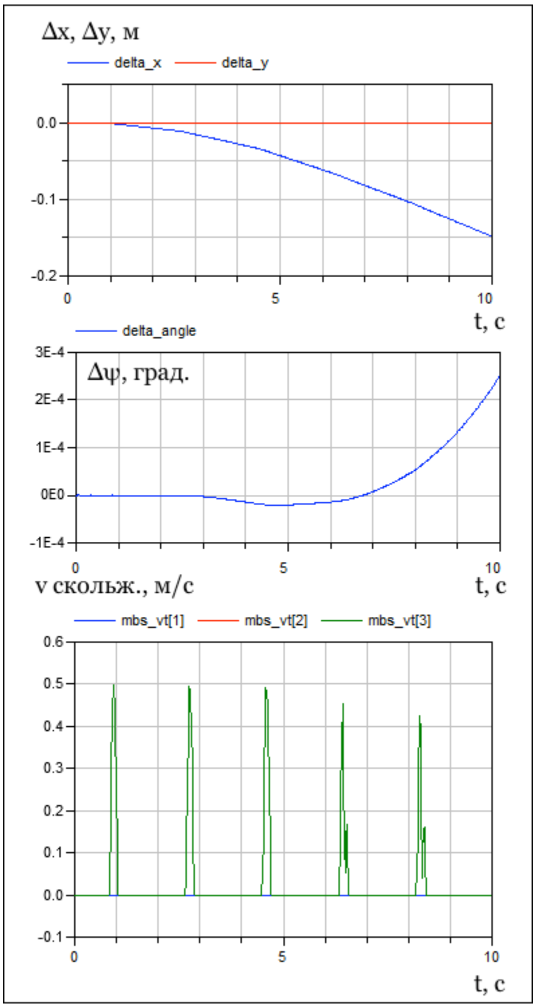
$\eta = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$



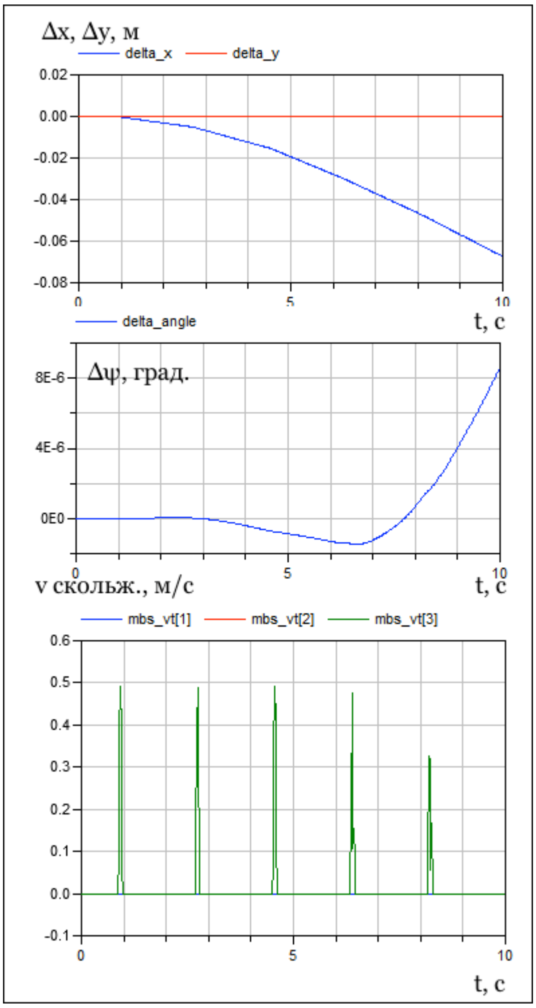
$\eta = 0,1, v_0 = 1, \omega_0 = 0$



$\eta = 0,01, v_0 = 1, \omega_0 = 0$



$\eta = 0,001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$



$\eta = 0,0001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$