МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И
МЕХАТРОНИКИ

На правах рукописи

Герасимов Кирилл Вячеславович

Динамика роликонесущего экипажа с учетом инерции роликов и трения

Автореферат диссертации на соискание степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.02.01 – теоретическая механика

Научные руководители:
д.ф.-м.н. проф. Косенко И.И.
к.ф.-м.н. доц. Зобова А.А.

Москва — 2018

Работа выполнена на кафедре
теоретической механики и мехатроники механико-
математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова

Научные руководители:	— Косенко Иван Иванович, доктор физико-математических наук, — Зобова Александра Александровна, кандидат физико-математических наук
Официальные оппоненты:	— Кобрин Александр Исаакович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт энергомашиностроения и механики, кафедра робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин НИУ МЭИ, профессор — Холостова Ольга Владимировна, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра “мехатроника и теоретическая механика” НИУ МАИ, профессор — Никонов Василий Иванович, кандидат физико-математических наук, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, научный сотрудник

Защита диссертации состоится «14» декабря 2018 г. в 17 часов на заседании диссертационного совета МГУ.01.10 Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

E-mail: msu.01.1@mech.math.msu.su

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова и на сайте ИАС «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/154204063/

Автореферат разослан «_____»________________ 20____г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.10
кандидат физико-математических наук А.А. Зобова

Общая характеристика работы

Цель работы

Целью работы является изучение неуправляемого движения роликонесущего экипажа по горизонтальной плоскости с учетом инерции роликов и трения в двух постановках. В первой постановке опорная плоскость абсолютно шероховата, т.е. проскальзывание между роликом в контакте и плоскостью отсутствует. При этом предполагается, что при смене ролика в контакте происходит мгновенное согласование скоростей системы в соответствии с новыми связями (удар связями). Во второй между контактным роликом и опорной плоскостью действует сила сухого трения Кулона, либо сила вязкого трения.

Актуальность темы

Роликонесущие колеса – это колеса особой конструкции, позволяющей экипажу двигаться в произвольном направлении, не поворачиваясь вокруг вертикальной оси. Колеса при этом вращаются лишь вокруг их собственных осей и не поворачиваются вокруг вертикали. Экипажи с такими колесами обладают повышенной маневренностью и используются, например, в качестве погрузочных платформ в авиастроении. Ранее была рассмотрена динамика роликонесущих экипажей с использованием упрощенной модели омни-колес без учета инерции и формы роликов (безынерционная модель). В этой модели колеса представляют собой жесткие диски, которые могут скользить в одном направлении и катиться без проскальзывания в другом. Динамические эффекты, порождаемые вращением роликов, не учитываются. В другой части работ по динамике роликонесущего экипажа используются алгоритмы для построения численных моделей систем твердых тел. При этом явный вид уравнений движения оказывается скрытым, что делает невозможным непосредственный анализ уравнений и затрудняет оценку влияния разных факторов на динамику системы. В этом случае авторами также применяются существенные упрощения геометрии роликов, либо их динамика также не учитывается.В настоящей работе динамические эффекты, возникающие из-за собственного вращения роликов, учитываются, и форма роликов приближена к применяемой на практике.

Научная новизна

Все основные результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми. Впервые получены уравнения движения экипажа на омни-колесах по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции всех роликов. Построен способ расчета изменения обобщенных скоростей при смене ролика в контакте согласно теории удара. Проведено численное моделирование движений экипажа. Построена динамическая модель экипажа на плоскости с регуляризованным сухим трением с учетом геометрии роликов, приближенной к применяемой на практике, показаны отличия движений этой модели от движений безынерционной модели.

Научная и практическая значимость

Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применения при проведении исследований в МГУ имени М.В. Ломоносова, Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН и научно-исследовательских центрах, занимающихся проектированием и исследованием колесных систем различного назначения.

Методы исследования

Для получения уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости используется метод, предложенный Я.В. Татариновым. Рассмотрение перехода колеса с одного ролика на другой проведено с точки зрения теории удара. Решения составленной системы уравнений получены для случая трех колес и пяти роликов на каждом с помощью системы компьютерной алгебры `Maxima`. При построении модели экипажа на плоскости с сухим трением кинематика вращательного движения твердых тел описывается в алгебре кватернионов. Сила сухого трения Кулона в точечном твердотельном контакте роликов и опорной плоскости регуляризуется, основываясь на теории И.В. Новожилова. Компьютерная модель экипажа с трением построена с помощью технологии объектно-ориентированного моделирования `Modelica`.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Построены модели экипажа с омни-колесами, движущегося по горизонтальной плоскости по инерции: неголономная с идеальными связями и голономная с неидеальными. Обе модели учитывают инерцию роликов омни-колес.

2. Первая модель получена в предположении, что ролик омни-колеса не проскальзывает относительно плоскости (связи идеальны). Уравнения движения на гладких участках (т.е. между сменой ролика в контакте) получены аналитически в псевдоскоростях и представляют собой уравнения 33 порядка для экипажа с 3 колесами и 5 роликами на каждом колесе. С помощью теории удара расчет изменения обобщенных скоростей при смене ролика в контакте сведен к решению системы линейных алгебраических уравнений, имеющей единственное решение в т.ч. при кратном ударе.

3. Аналитически показано, что при равенстве осевого момента инерции ролика нулю, её уравнения движения совпадают с уравнениями движения безынерционной модели.

4. Показано, что линейный первый интеграл, существующий в безынерционной модели, разрушается при осевом моменте инерции, отличном от нуля. При этом скорость изменения значения этого интеграла пропорциональна осевому моменту инерции ролика. Найдены линейные интегралы, связывающие угловую скорость платформы экипажа и скорости собственного вращения роликов, не находящихся в контакте.

5. В ходе численных экспериментов обнаружен эффект быстрого убывания скорости центра масс по сравнению с угловой скоростью платформы экипажа.

6. Модель с неидеальными голономными связями реализована в системе автоматического построения численных динамических моделей для вязкого трения и для регуляризованного сухого трения. Для этого найдены геометрические условия контакта роликов омни- и mecanum-колес и опорной плоскости.

7. Численно показано, что при стремлении осевого момента инерции ролика к нулю, движения системы с трением стремятся к движениям безынерционной модели. Обнаружено качественное сходство траекторий системы с вязким трением с достаточно большим коэффициентом трения с движениями модели, рассмотренной в главах 1 и 2.

8. Для различных моделей экипажа с омни-колесами, рассмот-

ренных в работе – безынерционной модели и модели экипажа с массивными роликами на плоскости с регуляризованным сухим трением, а также для моделей экипажа с массивными роликами на абсолютно шероховатой плоскости и на плоскости с вязким трением – показана их взаимная согласованность при стремлении параметров – момента инерции ролика и коэффициента вязкого трения – к нулю или к бесконечности, соответственно.

Достоверность и обоснованность результатов

Все основные результаты первой и второй главы диссертации получены строгими аналитическими методами и базируются на основных положениях механики систем тел и теории удара. Решения уравнений движения из первой и второй главы, а также результаты третьей главы получены при помощи численных методов. Численные решения верифицируются с использованием хорошо изученных аналитических моделей, либо свойств моделируемых систем, выявленных аналитически. Аналитические результаты подтверждены и проиллюстрированы с помощью численного анализа.

Апробация работы

Результаты докладывались соискателем на ряде международных и всероссийских конференциях:

1. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам 2018, Суздаль, Россия, 6-11 июля 2018

2. Двадцатое международное рабочее совещание по компьютерной алгебре, Дубна, Россия, 21-22 мая 2018

3. Ломоносовские Чтения - 2018, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 16-25 апреля 2018

4. Ломоносовские чтения - 2017, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 17-26 апреля 2017

5. 11th International Modelica Conference, Версаль, Франция, 21-23 сентября 2015

Результаты также были представлены диссертантом на следующих научных семинарах механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова:

1. Семинар по аналитической механике и теории устойчивости имени В.В. Румянцева под руководством д.ф.-м.н. проф. А.В. Карапетяна (2017, 2018 г.)

2. Семинар имени В.В.Белецкого по динамике относительного движения под руководством д.ф.-м.н. проф. Ю.Ф. Голубева, д.ф.-м.н. проф. В.Е.Павловского, к.ф.-м.н. доц. К.Е. Якимовой, к.ф.-м.н. доц. Е.В. Мелкумовой в 2018 г.

Публикации

Основные результаты диссертационной работы изложены в семи печатных работах, три из которых опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах WebOfScience, Scopus и RSCI, одна статья опубликована в журнале, входящем в список ВАК, а также три статьи опубликованы в сборниках трудов международных конференций, включенных в международные базы Scopus либо Web Of Science. Список работ приведен в конце автореферата.

Личный вклад

Научные руководители предложили постановку всех задач и указали методы их исследования. Все представленные в диссертации результаты получены лично соискателем.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации 103 страницы текста с 24 рисунками. Список литературы содержит 112 наименований.

Содержание работы

Во **введении** описана предметная область, обоснована актуальность работы и сформулирована ее цель, описана научная новизна и практическая значимость работы. Приведен обзор работ, посвященных изучению экипажей с омни-колесами в различных постановках, а также обзор фундаментальных результатов, используемых в настоящей работе при построении моделей экипажей с омни-колесами. Также приведено краткое содержание диссертации.

В **первой главе** рассматривается движение экипажа по абсолютно шероховатой плоскости, т.е. предполагается, что проскальзывание между опорным роликом и плоскостью отсутствует. Получены уравнения движения экипажа с омни-колесами как системы абсолютно твердых тел — платформы, колес и всех роликов — в явном виде с использованием формализма лаконичных уравнений Я.В. Татаринова. Изучена структура уравнений, найдены первые интегралы и проведено сравнение с уравнениями движения безынерционной модели. Показано, что если момент инерции ролика относительно его оси равен нулю, то уравнения совпадают с уравнениями модели экипажа с дифференциальными связями, не учитывающей инерцию роликов – безынерционной модели.

Рассматривается экипаж с омни-колесами с массивными роликами, движущийся по инерции по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной опорной плоскости в поле силы тяжести.

Омни-колесо в рассматриваемой постановке – это система абсолютно твердых тел, включающая в себя плоский диск колеса и n массивных роликов. Схема колеса приведена на фиг. 1; ролики на ней показаны в виде затемненной области и областей, ограниченных штриховой линией. Плоскость, содержащую диск колеса, будем называть плоскостью колеса. Каждый ролик может свободно вращаться вокруг оси, неподвижной относительно диска колеса. Оси роликов – это прямые, лежащие в плоскости колеса и касательные к его окружности радиуса r. Поверхность ролика является поверхностью вращения дуги окружности радиуса $l > r$, лежащей в плоскости колеса с центром в центре диска вокруг хорды, лежащей на оси ролика. Экипаж состоит из платформы и N одинаковых омни-колес. Платформа экипажа – это плоский диск радиуса R. Таким образом, система состоит из $N(n+1)+1$ абсолютно твердых тел.

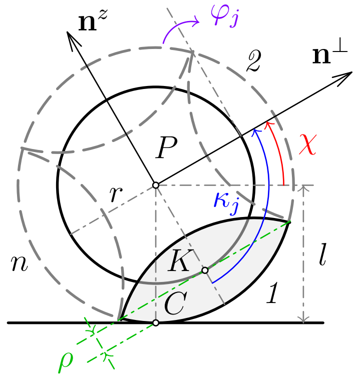


Рис. 1. Колесо

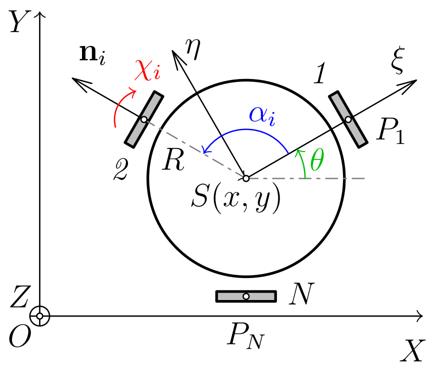


Рис. 2. Экипаж

Положение экипажа задается следующими обобщенными координатами: x, y — координаты точки S на плоскости OXY, θ – угол между осями OX и $S\xi$ (будем называть θ углом курса), χ_i

$(i = 1, \ldots, N)$ – углы поворота колес вокруг их осей, и φ_j – углы поворота роликов вокруг их собственных осей. Таким образом, вектор обобщенных координат имеет вид

$$\mathbf{q} = (x, y, \theta, \{\chi_i\}\,|_{i=1}^{N}, \{\varphi_k\}\,|_{k=1}^{N}, \{\varphi_s\}\,|_{s=N+1}^{Nn})^T \in \mathbb{R}^{N(n+1)+3}, \qquad (1)$$

где координаты φ сгруппированы таким образом, что сначала указаны углы поворота φ_k роликов, находящихся в данный момент в контакте с опорной плоскостью, а затем – остальных, "свободных", роликов. Индекс s используется для сквозной нумерации свободных роликов.

Вводятся псевдоскорости

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \{\nu_s\}),$$

$$\mathbf{v}_S = R\nu_1\mathbf{e}_\xi + R\nu_2\mathbf{e}_\eta, \quad \nu_3 = \Lambda\dot{\theta}, \qquad (2)$$

$$\nu_s = \dot{\varphi}_s, \quad s = N+1, \ldots, Nn \qquad (3)$$

Их механический смысл таков: ν_1, ν_2 — проекции скорости точки S на оси системы $S\xi$ и $S\eta$, связанные с платформой, ν_3 — проекция угловой скорости платформы на вертикальную ось SZ с точностью до безразмерного множителя Λ, ν_s — угловые скорости свободных роликов. Число независимых псевдоскоростей системы равно $K = N(n-1) + 3$.

Предполагается, что проскальзывания между опорной плоскостью и роликами в контакте не происходит, т.е. скорости точек роликов C_i, находящихся в контакте (см. фиг. 1) равны нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, N \qquad (4)$$

Отсюда получены уравнения связей:

$$\dot{\varphi}_k = \frac{R}{\rho_k}(\nu_1 \cos\alpha_k + \nu_2 \sin\alpha_k); \quad \rho_k = l\cos\chi_k - r \tag{5}$$

$$\dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin\alpha_i - \nu_2 \cos\alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}) \tag{6}$$

Заметим, что знаменатель ρ_k в формуле (5) – расстояние от оси ролика до точки контакта, обращающееся в нуль на стыке роликов, то есть в случае, когда точка контакта C_i оказывается на оси ролика (см. левую часть фиг. 1). Данное обстоятельство может приводить к разрывам второго рода функций в правых частях уравнений движения. Эта проблема рассмотрена отдельно ниже.

Уравнение (6) совпадает с уравнением связи в случае безынерционной модели роликов.

В работе используется лаконичный метод получения уравнений движения для систем с дифференциальными связями, предложенным Я.В. Татариновым:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \nu_\beta} + \{P_\beta, L^*\} = \sum_{\mu=1}^{K}\{P_\beta, \nu_\mu P_\mu\}, \quad \beta = 1, \ldots, K \tag{7}$$

Здесь L – лагранжиан, L^* – он же с учетом связей (здесь и далее верхний индекс $*$ означает учет связей, то есть подстановку выражений обобщенных скоростей через псевдоскорости), P_β – линейные комбинации формальных канонических импульсов p_i, определяемые из соотношения

$$\sum_{\mu=1}^{K} \nu_\mu P_\mu \equiv \sum_{i=1}^{N(n+1)+3} \dot{q}_i p_i \tag{8}$$

в котором $\dot{q}_i$ выражены через псевдоскорости ν_μ в соответствии с формулами связей; $\{\cdot,\cdot\}$ – скобка Пуассона по p_i, q_i, после ее вычисления выполняется подстановка

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

В силу симметрии системы и однородности всех тел, потенциальная энергия системы во время движения не меняется, и лагранжиан равен кинетической энергии:

$$2L = 2T = M\mathbf{v}_S^2 + I_S\dot{\theta}^2 + J\sum_i \dot{\chi}_i^2 + B\sum_{i,j}(\dot{\varphi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta}\sin(\kappa_j + \chi_i)\dot{\varphi}_{ij}) = \dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathcal{M}\dot{\mathbf{q}} \tag{9}$$

Здесь $M,\ I_S,\ J$ — массово-инерционные характеристики экипажа (его общая масса, суммарный момент инерции системы относительно оси SZ и момент инерции колеса относительно его оси вращения соответственно), B — момент инерции ролика относительно его оси вращения. Уравнения движения системы имеют следующую структуру:

$$\mathcal{M}^*\dot{\boldsymbol{\nu}} = \frac{MR^2}{\Lambda}\begin{bmatrix}\nu_2\nu_3\\ -\nu_1\nu_3\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} + \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\frac{R}{2l}\begin{bmatrix}-\mathcal{M}_i^*\sin\alpha_i\\ \mathcal{M}_i^*\cos\alpha_i\\ \mathcal{M}_i^*\Lambda^{-1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} - BR^2\begin{bmatrix}\mathcal{P}_1\\ \mathcal{P}_2\\ \mathcal{P}_3\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{\nu} - B\begin{bmatrix}\star\\ \star\\ \star\\ \dfrac{\nu_3}{\Lambda}\dot{\chi}_1^*\cos\chi_{12}\\ \vdots\\ \dfrac{\nu_3}{\Lambda}\dot{\chi}_N^*\cos\chi_{Nn}\end{bmatrix} \tag{10}$$

Показано, что уравнения движения имеют следующие свойства:

1. Система допускает интеграл энергии $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathcal{M}^*(\chi_i)\boldsymbol{\nu} = h = \mathrm{const}$: так как система стеснена автономными идеальными связями, а силы консервативны, то полная энергия (в рассматриваемом здесь случае она равна кинетической энергии) сохраняется.

2. Если платформа экипажа неподвижна, т.е. $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$, то свободные ролики сохраняют свою начальную угловую скорость: $\nu_s = \mathrm{const}$, чего и следовало ожидать.

3. При $B = 0$ (ролики не имеют инерции) все слагаемые в правой части равенства (10), кроме первого, обращаются в нуль, как и все члены, соответствующие свободным роликам, в его левой части. В этом случае существенными остаются лишь первые три уравнения системы относительно $\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3$. Важно отметить, что оставшиеся нетривиальные уравнения в точности совпадают с уравнениями движения безынерционной модели экипажа.

4. Существовавший в безынерционной модели линейный первый интеграл разрушается для модели с массивными роликами. При $B = 0$ он имеет вид $m^*_{33}\nu_3 = \mathrm{const}$ (причем $m^*_{33} = \mathrm{const}$) и получается непосредственно из третьего уравнения системы (10). Из вида интеграла следует, что $\nu_3 = \mathrm{const}$. При $B \neq 0$ скорость изменения ν_3 пропорциональна моменту инерции ролика B.

5. Система допускает первые интегралы:

$$\nu_s + \frac{\nu_3}{\Lambda}\sin\chi_{ij} = \mathrm{const} \qquad (11)$$

Механический смысл этих интегралов заключается в сохранении проекций угловых скоростей роликов на их оси вращения.

6. При одновременном умножении начальных значений всех псевдоскоростей на отличное от нуля число λ получаются такие же уравнения движения, как при умножении времени t на λ:

$$\boldsymbol{\nu} \mapsto \lambda\boldsymbol{\nu},\ \ \lambda \neq 0\ \ \sim\ \ t \mapsto \lambda t.$$

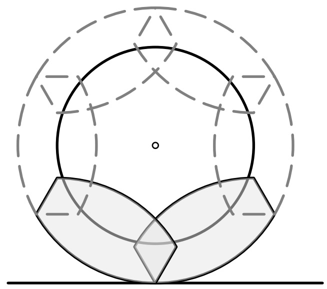


Рис. 3. Омни-колесо в рассматриваемой конфигурации. Концы роликов усечены. Имеется пренебрежимое пересечение тел роликов.

Во **второй главе** рассмотрена задача о смене ролика в контакте с опорной плоскостью. При повороте колеса вокруг своей оси на достаточно большой угол находящийся в контакте с опорной плоскостью ролик перестает с ней контактировать. В контакт с плоскостью приходит новый ролик, скорость которого, вообще говоря, не согласована со связями. При этом возникает переходный процесс, во время которого возможно скольжение ролика относительно опорной плоскости. В данной главе предполагается, что скольжение ролика прекращается за бесконечно малый промежуток времени. Составлены линейные алгебраические уравнения, определяющие обобщенные скорости после смены ролика в контакте в соответствии с теорией удара. Таким образом, для получения движений экипажа требуется найти решения задачи Коши уравнений, полученных в первой главе, на интервалах, где в контакте находится один и тот же ролик, и решения линейных алгебраических уравнений при сменах роликов для получения начальных условий для следующих гладких участков. Получены и проанализированы численные решения для симметричной конфигурации экипажа.

Смена контакта на i-том колесе происходит при значениях угла $\chi_i = \pm\dfrac{\pi}{n}$. При этом, во-первых, правая часть уравнений движения терпит разрыв второго рода из-за равенства нулю выражений $\rho_i = l\cos\chi_i - r$ в знаменателе. Во-вторых, происходит мгновенное снятие и наложение связей: условие отсутствия проскальзывания для ролика, выходящего из контакта, снимается, и аналогичное ему мгновенно налагается на вновь входящий в контакт ролик.

На практике первое обстоятельство никогда не реализуется, поскольку для закрепления роликов на колесах в реальных системах их концы усекаются. В данной главе рассматриваются усеченные ролики (см. рис. 3), но их оси расположены в плоскости колеса. Пересечением тел роликов в пространстве, возникающим в такой конфигурации, пренебрегается.

В реальной системе при смене контакта имеет место скольжение роликов относительно плоскости, и при этом полная энергия системы рассеивается. В данной главе будем считать, что трение при проскальзывании достаточно велико, и прекращение проскальзывания вошедшего в контакт ролика происходит достаточно быстро. Это взаимодействие будет рассматриваться как абсолютно неупругий удар, происходящий при мгновенном снятии и наложении связи. Освободившийся ролик на том же колесе начинает свободно вращаться вокруг своей оси.

Вводятся следующие предположения:

- ударное взаимодействие происходит за бесконечно малый интервал времени $\Delta t \ll 1$, так что изменения обобщенных координат пренебрежимо малы $|\Delta\mathbf{q}| \sim |\dot{\mathbf{q}}\Delta t| \ll 1$, а изменения обобщенных скоростей конечны $|\Delta\dot{\mathbf{q}}| < \infty$;

- взаимодействие экипажа с опорной плоскостью во время удара сводится к действию на экипаж в точках контакта нормальных и касательных реакций $\mathbf{R}_i = \mathbf{N}_i + \mathbf{F}_i$, где индекс i

равен номеру колеса;

- сразу после удара уравнения связей, запрещающих проскальзывание, выполнены: $\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}^+$, т.е. за время Δt проскальзывание вошедшего в контакт ролика заканчивается.

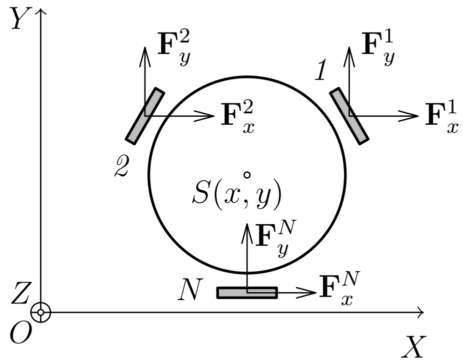


Рис. 4. Импульсы ударных реакций, приложенные к роликам, входящим в контакт с опорной плоскостью.

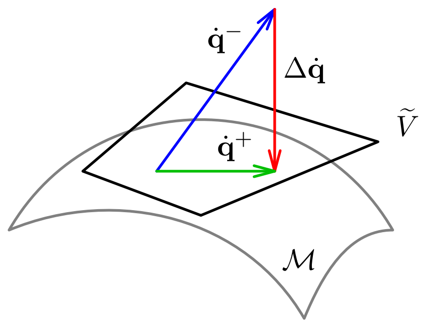
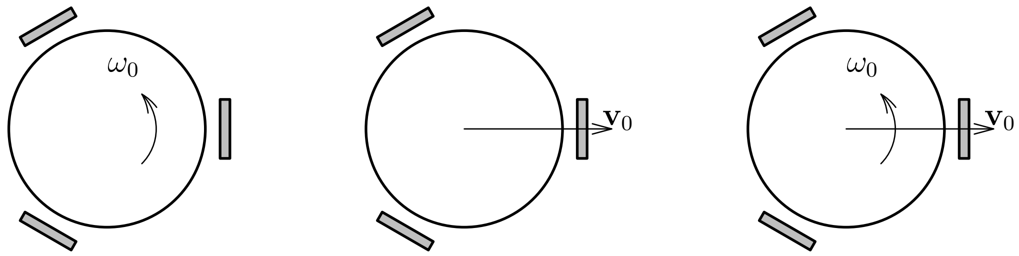


Рис. 5. Вектор $\dot{\mathbf{q}}^+$ обобщенных скоростей после удара как ортогональная проекция в кинетической метрике вектора $\dot{\mathbf{q}}^-$ обобщенных скоростей до удара на пространство $\widetilde{V}$ виртуальных перемещений, допустимых мгновенно налагаемыми связями

Составим алгебраические уравнения, связывающие значения псевдоскоростей после удара и величины ударных импульсов.

При рассматриваемом абсолютно неупругом ударе теряется компонента $\Delta\dot{\mathbf{q}}$ вектора обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}^-$, ортогональная пространству $\widetilde{V}$ виртуальных перемещений, допустимых налагаемыми



(a) Движение 1 (b) Движение 2 (c) Движение 3

Рис. 6. Рассмотренные варианты начальных условий

связями, в кинетической метрике. Пользуясь основным уравнением удара

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}^{+} - \dot{\mathbf{q}}^{-}) = \mathbf{Q} \tag{12}$$

и условием идеальности связей $\mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}^+ = 0$, возможно найти значения псевдоскоростей после удара следующим образом:

$$\boldsymbol{\nu}^{+} = \left(\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}\right)^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}^{-}.$$

Потеря кинетической энергии системы при таком ударе равна энергии потерянных скоростей по теореме Карно.

Проведены численные эксперименты, моделирующие движение экипажа по инерции для трех вариантов начальных условий (см. рис. 6).

1. Платформа экипажа имеет ненулевую угловую скорость относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс экипажа; центр масс платформы покоится ($\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$) (рис. 6a).

2. Центр масс платформы имеет ненулевую скорость в направлении от центра экипажа к центру первого колеса, угловая скорость платформы равна нулю ($\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = \nu_3(0) = 0$) (рис. 6b).

3. Платформа экипажа имеет ненулевую угловую скорость относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс экипажа, и центр масс платформы имеет ненулевую скорость в направлении от центра экипажа к центру первого колеса ($\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$) (рис. 6c).

Во всех трех случаях наблюдается убывание кинетической энергии скачками в моменты смены контакта. В промежутки времени между сменами энергия остается постоянной. Свободные ролики раскручиваются на всех рассмотренных движениях в силу наличия интегралов (11).

В вариантах 1 и 2 заметны переходные режимы вращения роликов в начале движения, когда колесо совершает первый оборот, и каждый ролик проходит полный круг, выходя из контакта и возвращаясь в него снова.

При комбинации поступательного и вращательного движений экипажа (случай 3), кинетическая энергия его центра масс убывает, переходя в кинетическую энергию платформы в осях Кёнига. Центр платформы S описывает спираль. После почти полной остановки центра масс платформа экипажа продолжает вращаться вокруг вертикальной оси Sz, постепенно замедляясь.

В **третьей главе** построены две динамические модели экипажа на плоскости с трением. В одной модели используется сухое трение Амонтона – Кулона, регуляризованное в окрестности нуля по скоростям участком линейной функции насыщения с достаточно большим угловым коэффициентом. В другой модели используется вязкое трение. Рассматриваются две конструкции колеса: обыкновенное омни-колесо, оси роликов которого лежат в плоскости, содержащей диск колеса, и колесо *mecanum*, оси роликов которого находятся под углом к плоскости диска колеса. Особое внимание уделяется вопросу моделирования связи в контакте ролика и горизонтальной плоскости, отслеживанию точки контакта ролика и опорной плоскости, а также алгоритмической реализации процесса переключения контакта от ролика к ролику при качении омниколеса. Динамические модели построены в формализме объектно-ориентированного моделирования на языке `Modelica`. Выполнена верификация динамической модели с использованием безынерционной модели.

В начале главы описан формализм для описания динамики систем тел, использованный для построения моделей экипажа. Положение каждого твердого тела задается радиусом-вектором центра масс тела $\mathbf{r}$ в неподвижной системе отсчета и кватернионом $\mathbf{q}$, задающим ориентацию тела; распределение скоростей описывается скоростью центра масс $\mathbf{v}$ и угловой скоростью тела $\boldsymbol{\omega}$. Динамика этого твердого тела описывается уравнениями Ньютона-Эйлера. Для получения замкнутой системы уравнений вводятся также уравнения связей

$$f(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{q}}, \underline{\boldsymbol{\omega}}) = 0, \tag{13}$$

и модель реакций связей, в частности, контактного взаимодействия:

$$g(\underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{L}}, \underline{\mathbf{q}}, \underline{\boldsymbol{\omega}}) = 0, \tag{14}$$

где левые части зависят, вообще говоря, от величин, описывающих движение всех тел, что обозначено нижней чертой. $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$ – главные векторы моментов, приложенных к телу, и реактивных моментов.

В отличие от глав 1 и 2, рассматриваемая в этой главе система голономна. Она имеет древовидную структуру, в которой тела связаны друг с другом идеальными цилиндрическами шарнирами.

Требуется задать уравнения шарнирных связей и уравнения, описывающие взаимодействие роликов и опорной плоскости. Последние – не идеальны. Количество степеней свободы системы равно $3 + N(n+1)$.

Чтобы получить явный вид уравнения (13) в задаче о движении экипажа с омни-колесами, можно указать явную формулу, позволяющую найти ближайшую к опорной плоскости точку C ролика. Точка C – это вертикальная проекция центра колеса P на опорную плоскость (см. рис. 7):

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_K + r\mathbf{d} \times \mathbf{i} - l\boldsymbol{\gamma}, \tag{15}$$

где $\mathbf{i}$ – единичный вектор, направленный вдоль оси ролика, $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор восходящей вертикали.

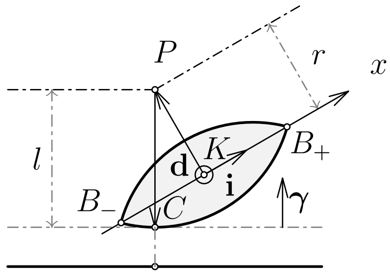


Рис. 7. Схема отслеживания контакта: вид сбоку отдельного ролика.

Контакт между роликом и опорной плоскостью имеет место, если и только если

$$|\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\gamma}| \leq \sin\frac{\pi}{n}, \quad Z_K < l \tag{16}$$

где Z_K – расстояние от центра ролика до опорной плоскости.

Реализация контакта геометрически означает выполнение скалярного условия

$$Z_C = 0, \tag{17}$$

позволяющего, вместе с уравнениями динамики твердого тела, вычислить величину нормальной реакции F_n, приложенной в точке C. Отсутствие контакта доставляет выполнение альтернативного, также скалярного, условия равенства нормальной реакции нулю

$$F_n = 0.$$

В разделе об **отслеживании контакта в случае *mecanum* колеса** строится аналогичный алгоритм для нахождения координат точки контакта в случае, если ось ролика составляет ненулевой угол ψ с плоскостью диска колеса.

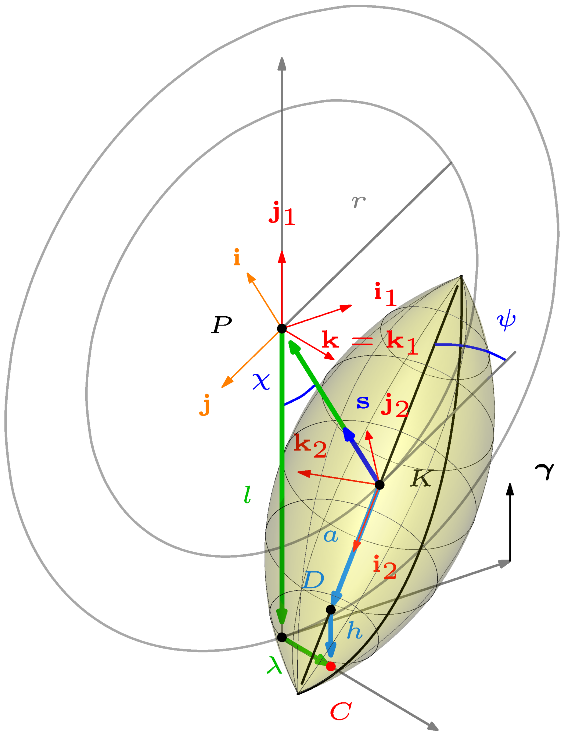


Рис. 8. Отслеживание контакта для колеса *mecanum*

Алгоритм отслеживания контакта основан на наблюдении, что точка контакта находится всегда в пересечении вертикальной плоскости, содержащей ось колеса, и горизонтальной опорной плоскости. Координаты проекции центра колеса на опорную плоскость могут быть вычислены явно, и остается получить лишь расстояние μ от этой проекции до точки контакта вдоль отрезка линии пересечения плоскостей, соединяющего их, см. фиг. 8. Это делается из геометрических соображений и изложено в данном разделе.

В разделе **Моделирование трения в контакте** даются определения использованных моделей трения:

1. регуляризованное сухое трение

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\mu N \mathbf{v}_C \begin{cases} \dfrac{1}{\delta}, & |\mathbf{v}_C| < \delta \ll 1 \\ \dfrac{1}{|\mathbf{v}_C|} & \text{иначе} \end{cases}$$

2. вязкое трение

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\gamma \mathbf{v}_C$$

В разделе о **результатах численного моделирования** описаны результаты двух типов проведенных численных экспериментов.

Для сравнения модели экипажа на плоскости с сухим трением и безынерционной модели с неголономными связями проведены эксперименты для различных значений отношения $\dfrac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{k}}}$ массы одного ролика к полной массе колеса. Показано, что с уменьшением этой величины, отличия угла курса θ экипажа и координат центра масс x, y уменьшаются и становятся несущественными. Показано, что между роликами и опорной плоскостью может возникать скольжение при нахождении точки контакта в окрестности острого конца ролика, и скорость скольжения тем больше, чем тяжелее ролики.

Проведено качественное сравнение модели экипажа на плоскости с вязким трением и модели экипажа на абсолютно шероховатой плоскости, построенной в первых двух главах, на движении 3 из главы 2. Обнаружены динамические эффекты, аналогичные полученным в главе 2: характерный спиральный вид траектории центра масс, раскручивание роликов, возрастание угловой скорости платформы экипажа, одновременное с убыванием поступательной скорости её центра, последующее медленное убывание угловой скорости, убывание кинетической энергии экипажа. При расчетах коэффициент вязкого трения принимался достаточно большим: 10^5. Такое значение позволило моделировать ударный характер переходных процессов при смене ролика в контакте. На гладких участках движения сходство с движением неголономной модели соответствует результату о близости движений неголономных систем и систем с вязким трением с достаточно большим коэффициентом.

В **заключении** перечислены основные положения, выносимые на защиту.

В **списке литературы** приведены работы, на которые делаются ссылки в основном тексте.

Публикации

По результатам работы опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах WebOfScience, Scopus и RSCI, следующие статьи:

1. Косенко И.И., Герасимов К.В. Физически-ориентированное моделирование динамики омнитележки // Нелин. дин. 2016. Т. 12, No 2. С. 251–262 (и.-ф. РИНЦ 0,394)

2. Герасимов К.В., Зобова А.А. Движение симметричного экипажа на омни-колесах с массивными роликами // ПММ. 2018. Т. 82, No 4., стр. 427–440 (и.-ф. РИНЦ 0,831)

3. Kosenko I.I., Gerasimov K.V. Object-oriented approach to the construction of an omni vehicle dynamical model // Journal of Mechanical Science and Technology. — 2015. — Vol. 29, No. 7. — P. 2593–2599 (SJR 0,55)

Опубликована статья в журнале, входящем в список ВАК:

4. Герасимов К.В., Зобова А.А. Динамика экипажа на омни-колесах с массивными роликами с учетом смены ролика в контакте с опорной плоскостью // Труды МАИ. 2018. No 101. (и.-ф. РИНЦ 0,445)

Также опубликованы статьи в сборниках трудов международных конференций, включенных в международные базы Scopus либо Web Of Science:

5. Kosenko I.I., Stepanov S.Y., Gerasimov K.V. Improved contact tracking algorithm for the omni wheel in general case of roller orientation // The Proceedings of the Asian Conference on Multibody Dynamics. 2016.8. The Japan Society of Mechanical Engineers. — 2017. — no. July 01 — P. 2424-2985
6. Kosenko I.I., Gerasimov K.V. Omni vehicle dynamics model: Object-oriented implementation and verification // Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2014 (ICNAAM-2014), volume 1648 of AIP Conference Proceedings, College Park, Md., United States — 2015 — P. 1–4.
7. Kosenko I. I., Gerasimov K. V., Stavrovskiy M. E. Contact types hierarchy and its object-oriented implementation // B. Schrefler, E. Onate and M. Papadrakakis (Eds), Proceedings of the VI International Conference on Coupled Problems in Science and

Engineering, San Servolo, Venice, Italy, May 18–20, 2015. — 2015. — P. 191–202.