

# Динамика роликонесущего экипажа с учетом инерции роликов и трения

К.В. Герасимов

Диссертация на соискание степени кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.02.01 – теоретическая механика

Научные руководители:  
д.ф.-м.н. И.И. Косенко  
к.ф.-м.н. А.А. Зобова

Кафедра теоретической механики и мехатроники  
Механико-математический факультет  
МГУ им. М.В. Ломоносова

Октябрь 2018

## Омни-колеса и экипажи



# Обзор литературы

- ▶ 2006 – А.А. Зобова, Я.В. Татаринов – Мобильные роботы и мехатронные системы; 2009 ПММ
- ▶ 2007 – Ю.Г. Мартыненко, А.М. Формальский – Изв. РАН. Теория сист. управл.
- ▶ 2011 – А.А. Зобова – Нелинейная динамика
- ▶ 2011 – А.В. Борисов, А.А. Килин, И.С. Мамаев – Нелинейная динамика
- ▶ 2014 – А.А. Килин, А.Д. Бобыкин – Нелинейная динамика
- ▶ 2018 – Б.И. Адамов, А.И. Кобрин – Мехатроника, автоматизация, управление

## Безынерционная модель

- ▶ Экипаж состоит только из платформы и  $N$  дисков колес.
- ▶ Количество твердых тел  $1 + N$ .
- ▶ Связи: для каждого колеса задан вектор  $\mathbf{e}_i$ , составляющий постоянный угол  $\psi$  с плоскостью колеса, и для точек  $C_i$  контакта:  
$$\mathbf{v}_{C_i} \cdot \mathbf{e}_i = 0$$

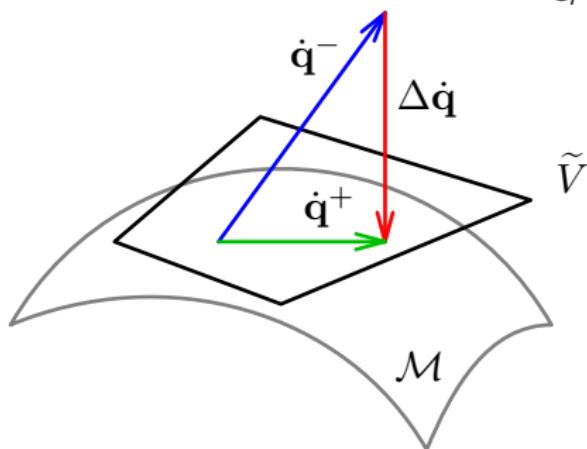


Рис.: Колесо

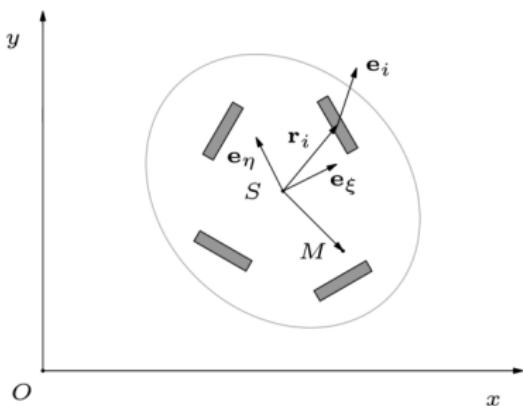


Рис.: Экипаж

## Исследуемая модель с учетом инерции роликов

- Экипаж состоит из платформы,  $N$  колес и  $n$  роликов, количество твердых тел:

$$1 + N(n + 1)$$

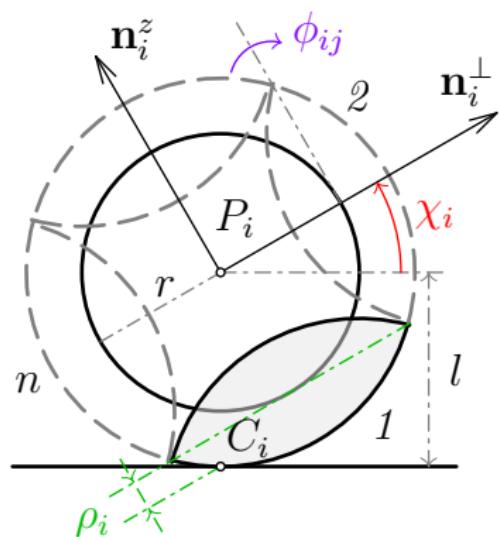


Рис.: Колесо

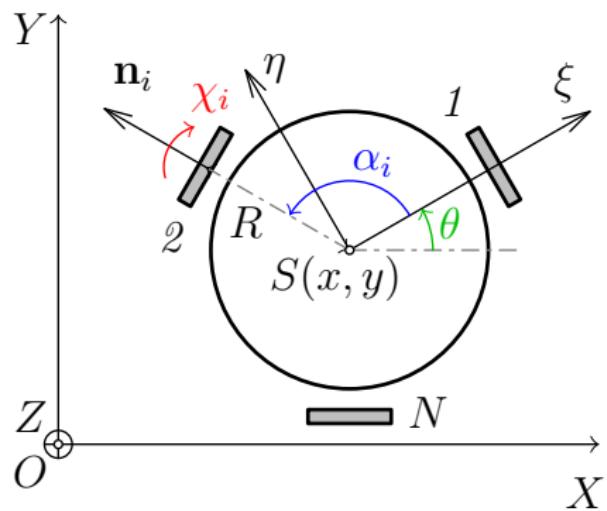


Рис.: Экипаж

# Модели контакта

- ▶ Главы 1 и 2. Абсолютно шероховатая плоскость
  - ▶ Скорости точек контакта равны нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, \quad i = 1 \dots N$$

- ▶ Количество степеней свободы

$$3 + N(n - 1)$$

- ▶ Глава 3. Плоскость с трением
  - ▶ Вязкое трение

$$\mathbf{F} = -\gamma \mathbf{v}_{C_i}$$

- ▶ Регуляризованное сухое трение

$$\mathbf{F} = -\mu N \mathbf{v}_{C_i} \begin{cases} \frac{1}{\delta}, & |\mathbf{v}_{C_i}| < \delta \ll 1 \\ \frac{1}{|\mathbf{v}_{C_i}|} & \text{иначе} \end{cases}$$

- ▶ Количество степеней свободы:  $3 + N(n + 1)$

# Глава 1. Постановка задачи

## Координаты, псевдоскорости, связи

- Обобщенные координаты:

$q = (x, y, \theta, \chi_i, \phi_k, \phi_s)$ , где  $i, k = 1 \dots N$ ,  
индекс  $s$  означает ролики вне контакта.

- Псевдоскорости:

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \quad \mathbf{v}_S = R\nu_1 \mathbf{e}_\xi + R\nu_2 \mathbf{e}_\eta, \quad \nu_3 = \dot{\Lambda\theta}, \quad \nu_s = \dot{\phi}_s$$

- Связи:

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos \theta - R\nu_2 \sin \theta, \quad \dot{y} = R\nu_1 \sin \theta + R\nu_2 \cos \theta,$$

$$\dot{\theta} = \frac{\nu_3}{\Lambda}, \quad \dot{\chi}_i = \frac{R}{I}(\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}),$$

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{I \cos \chi_k - r}(\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k), \quad \dot{\phi}_s = \nu_s$$

# Глава 1. Уравнения Я.В. Татаринова

- ▶ Лаконичная форма уравнений движения для систем с дифференциальными связями:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}, \quad (0.1)$$

$$\nu_\mu P_\mu = \dot{q}_i p_i, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

- ▶  $(\cdot)^*$  – подстановка выражений обобщенных скоростей  $\dot{q}$  через псевдоскорости  $\nu$

# Глава 1. Структура уравнений движения

Матрица  $\mathcal{M}^*$  и слагаемые  $\mathcal{P}_\alpha$  и  $\mathcal{M}_i^*$  зависят от  $\chi$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^* \dot{\nu} &= \frac{MR^2}{\Lambda} \begin{pmatrix} \nu_2 \nu_3 \\ -\nu_1 \nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{R}{2I} \nu^T \begin{pmatrix} -\sin \alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \cos \alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \Lambda^{-1} \mathcal{M}_i^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \nu \\ &\quad - BR^2 \nu^T \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \nu - B \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \cos \chi_{12} \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_1^* \\ \vdots \\ \cos \chi_{Nn} \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_N^* \end{pmatrix}\end{aligned}$$

# Глава 1. Структура уравнений

## Свойства

1. При  $B = 0$  уравнения движения совпадают с уравнениями безынерционной модели.
2. Интеграл  $m_{33}^* \nu_3 = \text{const}$  разрушается при  $B \neq 0$ .  $\dot{\nu}_3 \sim B$ .
3. Первые интегралы:

$$\nu_s + \frac{1}{\Lambda} \sin \chi_{ij} \nu_3 = \text{const.}$$

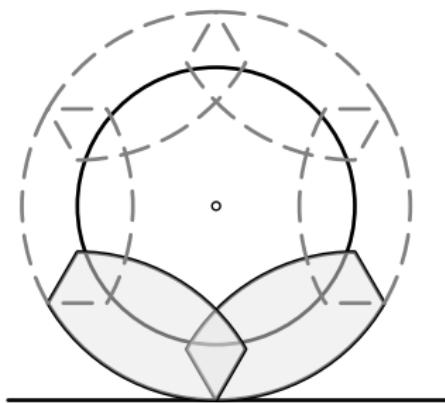
4. Интеграл энергии  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu} = h = \text{const}$   
(связи автономны, идеальны, силы консервативны)
5.  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0 \implies \nu_s = \text{const}$
6. Замена псевдоскоростей  $\boldsymbol{\nu} \rightarrow \lambda \boldsymbol{\nu}, \lambda \neq 0$  эквивалентна замене времени  $t \rightarrow \lambda t$ .

## Глава 2. Смена ролика в контакте

(1) Уравнения вырождаются на стыках роликов:

*разрыв 2ого рода в правой части из-за выражений ( $l \cos \chi_i - r$ ) в знаменателе.*

Исключим достижение острия ролика, усекая ролики и допуская пересечение их тел.



## Глава 2. Смена ролика в контакте

(2) Ролики входят и выходят из состояния контакта при  $t = t^*$ .

Происходит мгновенное снятие связи с одного ролика и наложение связи на другой.

Пусть:

- ▶  $\Delta t \ll 1, \quad \Delta q \sim \dot{q}\Delta t \ll 1, \quad \Delta \dot{q} < \infty,$
- ▶ к моменту окончания удара  $t^* + \Delta t$  уравнения связей выполнены ( $\dot{q}^+ = V(q)\nu^+$ )
- ▶ верно основное уравнение удара  $M(\dot{q}^+ - \dot{q}^-) = Q$
- ▶ связи идеальны  $Q^T \delta q^+ = 0$ , где  $\delta q^+$  – виртуальные перемещения, допустимые вновь наложенными связями

## Глава 2. Нахождение обобщенных скоростей после удара

В том числе, после кратного удара

$$\nu^+ = (\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}^-$$

Действительно, т.к.

$$\mathbf{M} \Delta \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}^+ = 0,$$

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \dot{\mathbf{q}}^- - \Delta \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V} \nu^+ \in \tilde{V},$$

то

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{M} \Delta \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{V}) \\ &= (\mathbf{M} (\mathbf{V} \nu^+ - \dot{\mathbf{q}}^-), \mathbf{V}) \\ &= (\mathbf{M} \mathbf{V} \nu^+ - \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}^-, \mathbf{V}) \\ &= \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \nu^+ - \mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}^-, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

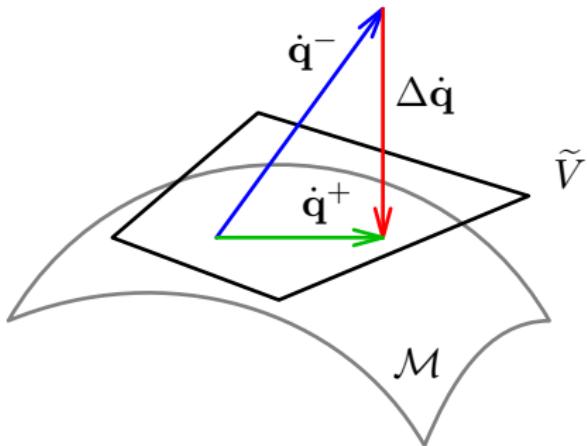


Рис.:  $\dot{\mathbf{q}}^+$  – проекция  $\dot{\mathbf{q}}^-$  на  $\tilde{V}$ ,  
ортогональная в метрике  $\mathbf{M}$

## Глава 2. Параметры численных экспериментов

- ▶ отношение радиуса колеса к радиусу платформы  $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$ ,
- ▶ отношение массы колеса к массе платформы  $\frac{M_k}{M_{\text{пл}}} = 0.15$ ,
- ▶ отношение массы ролика к массе платформы  $\frac{m_{\text{рол}}}{M_{\text{пл}}} = 0.05$ ,
- ▶  $\omega_0 = 1$ ,  $v_0 = 1$

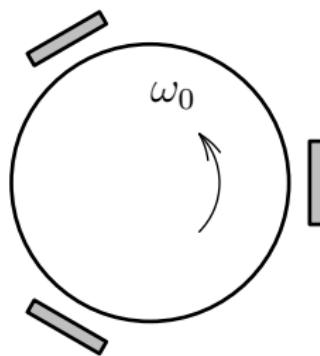


Рис.: Движение 1

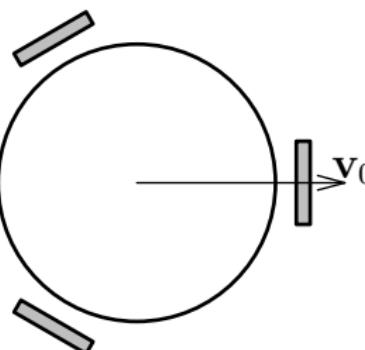


Рис.: Движение 2

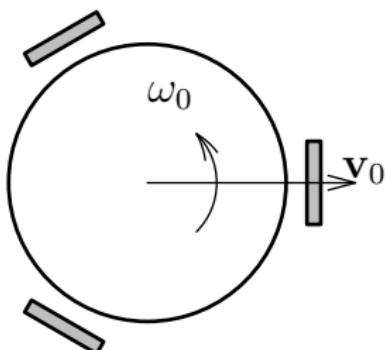


Рис.: Движение 3

Движение 1 ( $\nu_{1,2}(0) = 0, \nu_3 = 1$ ).

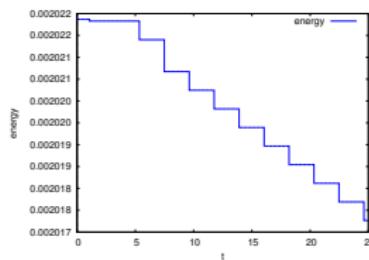


Рис.: Кинетическая  
энергия

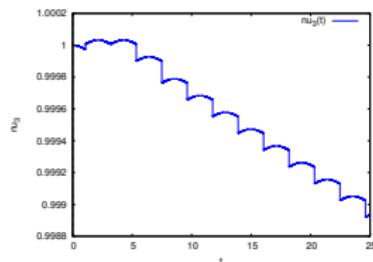


Рис.: Угловая  
скорость экипажа

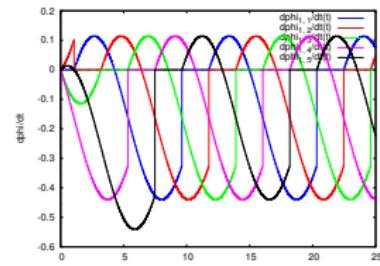
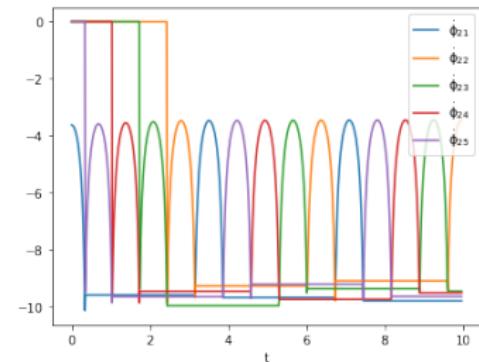
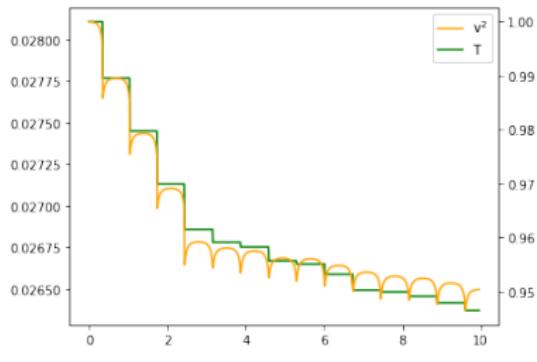
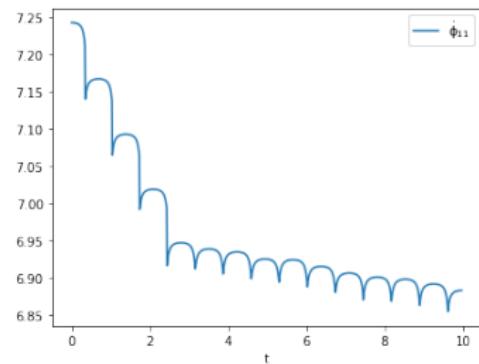
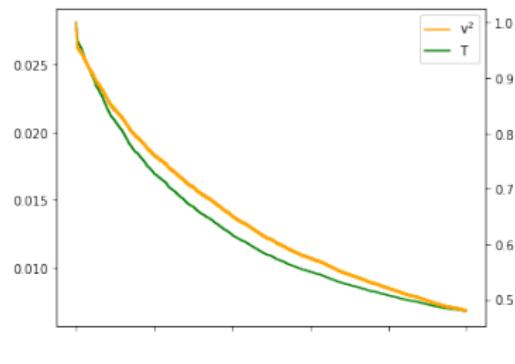
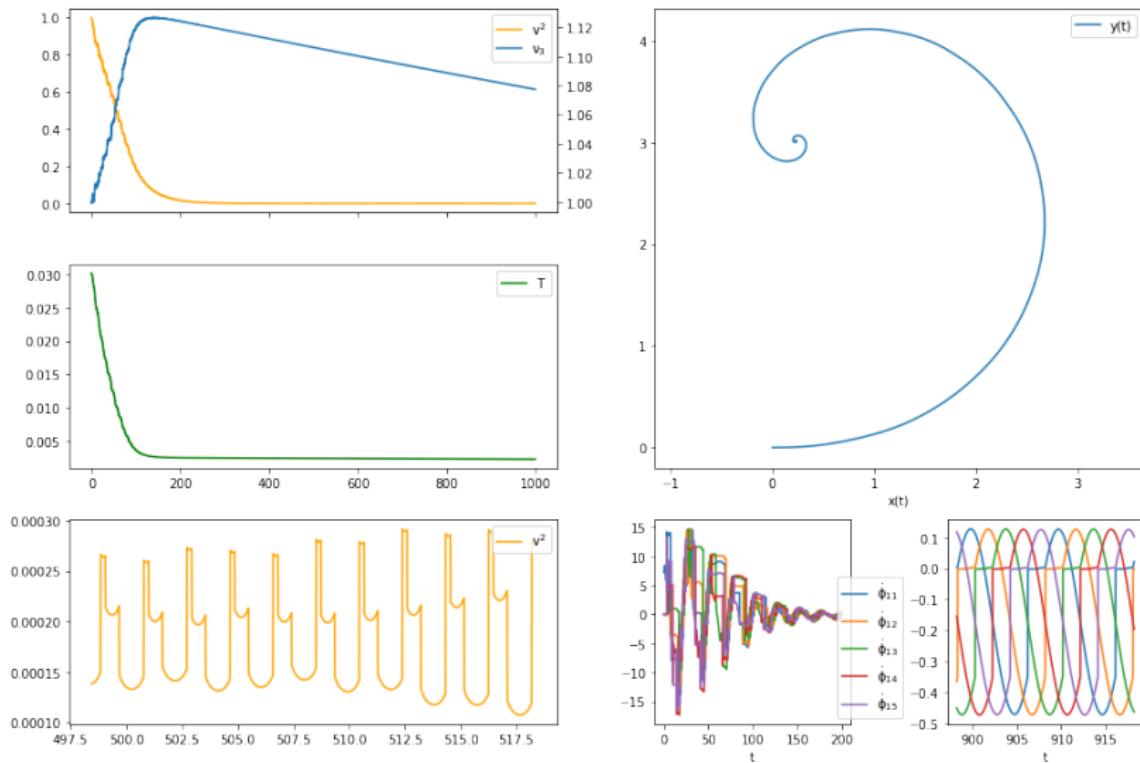


Рис.: Угловые  
скорости роликов

Движение 2 ( $\nu_1(0) = 1, \nu_{2,3} = 0$ ).



Движение 3 ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ ).



## Глава 3. Экипаж на плоскости с трением

- ▶ Построим семейство моделей с разными законами контактного взаимодействия.
  - ▶ Вязкое трение

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\gamma \mathbf{v}_{C_i}$$

- ▶ Регуляризованное сухое трение

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\mu N \mathbf{v}_{C_i} \begin{cases} \frac{1}{\delta}, & |\mathbf{v}_{C_i}| < \delta \ll 1 \\ \frac{1}{|\mathbf{v}_{C_i}|} & \text{иначе} \end{cases}$$

- ▶ Количество степеней свободы:

$$3 + N(n + 1)$$

## Глава 3. Подход к моделированию динамики систем тел

- ▶ Введем избыточные координаты. Для каждого твердого тела системы:  $\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}$
- ▶ Для каждого твердого тела – уравнения Ньютона-Эйлера:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$$

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, J\boldsymbol{\omega}] = \mathbf{M} + \mathbf{L}, \quad \dot{\mathbf{q}} = (0, \boldsymbol{\omega})$$

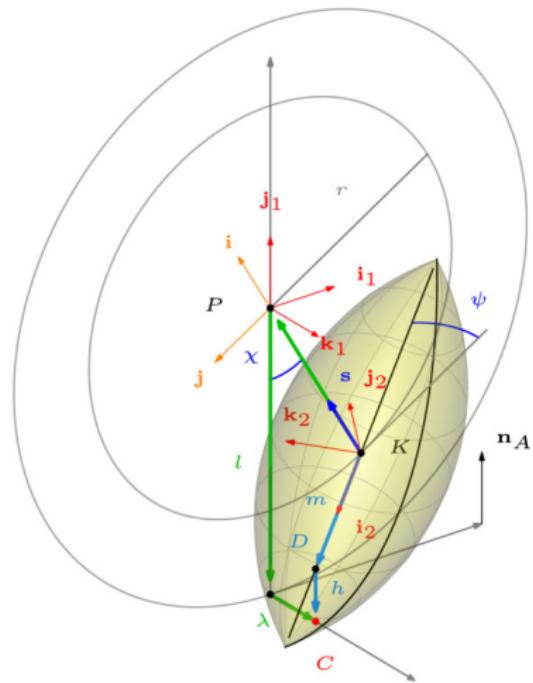
- ▶ Уравнения связей

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) = 0$$

- ▶ Модель реакций связей

$$g(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{L}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) = 0$$

## Глава 3. Модель контактного взаимодействия



$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_K + r\mathbf{s} - l\mathbf{e}_z + \lambda\mathbf{k}_1$$

$$\lambda = \frac{(r\mathbf{s} - l\mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{k}_2}{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_K + [\omega_{\text{пол}}, \overrightarrow{KC}]$$

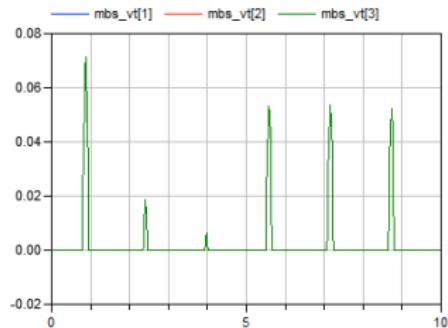
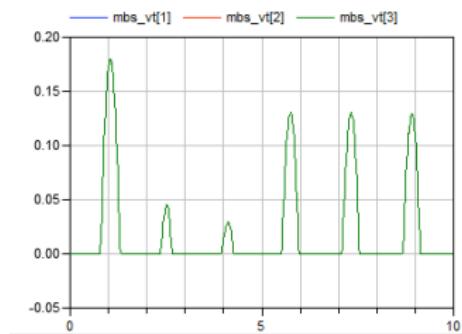
Ролик находится в контакте  
 $\Leftrightarrow \mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_z < \cos \frac{\pi}{n}$  и  $z_C < l$ .  
Тогда используются уравнения:

$$\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{e}_z = 0$$

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{F}_{\text{tp}} + N\mathbf{e}_z$$

Иначе  $\mathbf{R}_k = 0$

## Глава 3. Движение 1

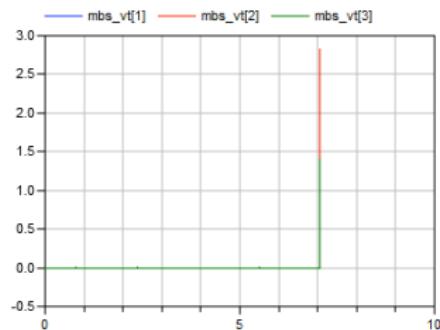
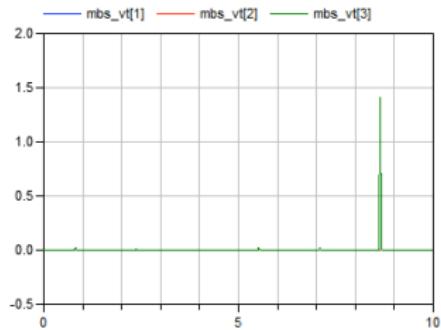


$$\frac{m_{\text{пол}}}{m_{\kappa}} = 10^{-1}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

$$\frac{m_{\text{пол}}}{m_{\kappa}} = 10^{-2}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

Рис.: Абсолютные величины скоростей скольжения

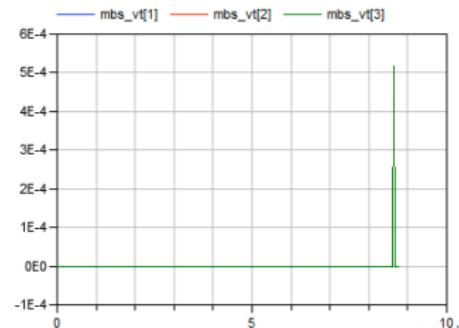
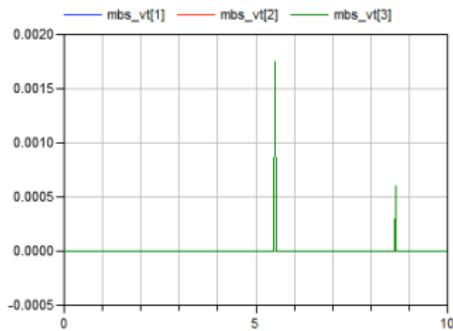
## Глава 3. Движение 1



$$\frac{m_{\text{пол}}}{m_K} = 10^{-3}, v_0 = 0, \omega_0 = 1 \quad \frac{m_{\text{пол}}}{m_K} = 10^{-4}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

Рис.: Абсолютные величины скоростей скольжения

## Глава 3. Движение 1

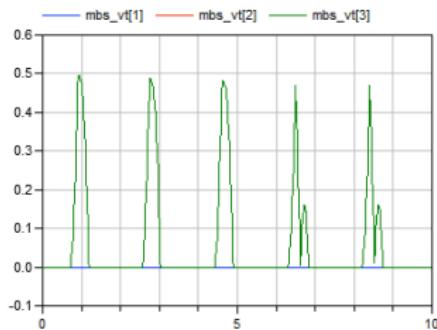
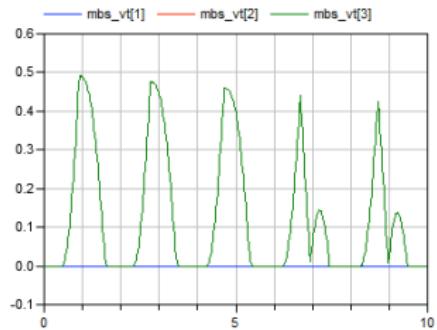


$$\frac{m_{\text{пол}}}{m_K} = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

$$\frac{m_{\text{пол}}}{m_K} = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

Рис.: Абсолютные величины скоростей скольжения

## Глава 3. Движение 2

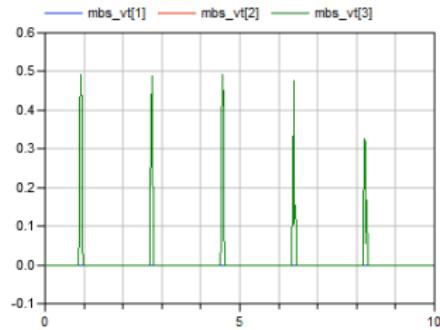
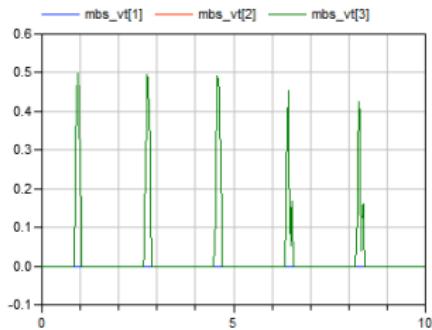


$$\frac{m_{\text{пол}}}{m_K} = 10^{-1}, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

$$\frac{m_{\text{пол}}}{m_K} = 10^{-2}, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

Рис.: Абсолютные величины скоростей скольжения

## Глава 3. Движение 2



$$\frac{m_{\text{пол}}}{m_K} = 10^{-3}, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

$$\frac{m_{\text{пол}}}{m_K} = 10^{-4}, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

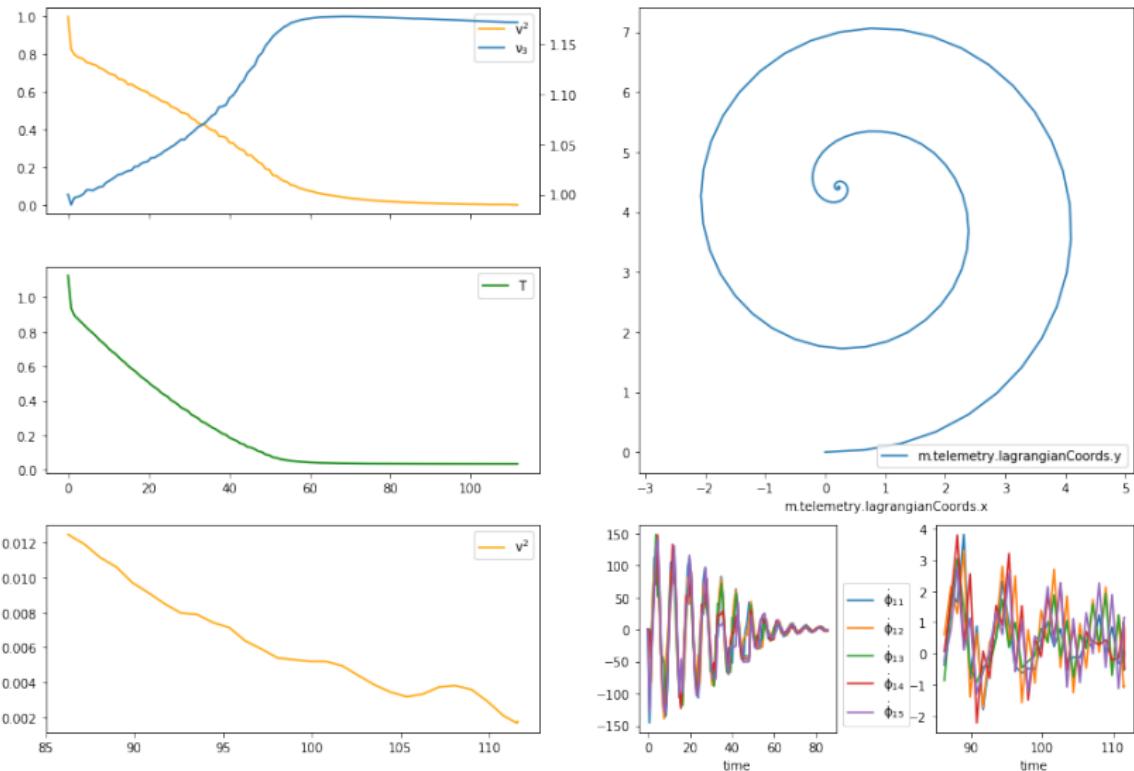
Рис.: Абсолютные величины скоростей скольжения

## Глава 3. Сравнение с безынерционной моделью

Проведено сравнение движений безынерционной модели экипажа и модели экипажа на плоскости с сухим трением. В таблице приведены величины отличий угла курса  $\theta$  экипажа и координат центра масс  $x, y$  к моменту безразмерного времени  $t = 10$ . Отличия уменьшаются с уменьшением порядка величины отношения массы одного ролика  $m_{\text{рол}}$  к суммарной массе колеса  $m_k$ .

	Движение 1	Движение 2
$\frac{m_{\text{рол}}}{m_k}$	$\Delta\theta$	$\max( \Delta x ,  \Delta y )$
$10^{-1}$	$\approx 1$	$\approx 1$
$10^{-2}$	$\approx 10^{-1}$	$\approx 0.5$
$10^{-3}$	$\approx 10^{-2}$	$\approx 10^{-1}$
$10^{-4}$	$\approx 10^{-3}$	$\approx 10^{-2}$
$10^{-5}$	$\approx 10^{-3}$	
$10^{-6}$	$\approx 10^{-4}$	

## Глава 3. Вязкое трение: Движение 3



## Результаты, выносимые на защиту I

- ▶ Построены модели экипажа с омни-колесами, движущегося по горизонтальной плоскости по инерции: неголономная с идеальными связями и голономная с неидеальными. Обе модели учитывают инерцию роликов омни-колес.
- ▶ Первая модель получена в предположении, что ролик омни-колеса не проскальзывает относительно плоскости (связи идеальны). Уравнения движения на гладких участках (т.е. между сменой ролика в контакте) получены аналитически в псевдоскоростях и представляют собой уравнения 33 порядка для экипажа с 3 колесами и 5 роликами на каждом колесе. С помощью теории удара расчет изменения обобщенных скоростей при смене ролика в контакте сведен к решению системы линейных алгебраических уравнений, имеющей единственное решение в т.ч. при кратном ударе.

## Результаты, выносимые на защиту II

- ▶ Аналитически показано, что при равенстве осевого момента инерции ролика нулю, её уравнения движения совпадают с уравнениями движения безынерционной модели.
- ▶ Показано, что линейный первый интеграл, существующий в безынерционной модели, разрушается при осевом моменте инерции, отличном от нуля. При этом скорость изменения значения этого интеграла пропорциональна осевому моменту инерции ролика. Найдены линейные интегралы, связывающие угловую скорость платформы экипажа и скорости собственного вращения роликов, не находящихся в контакте.
- ▶ В ходе численных экспериментов обнаружен эффект быстрого убывания скорости центра масс по сравнению с угловой скоростью платформы экипажа.

## Результаты, выносимые на защиту III

- ▶ Модель с неидеальными гидравлическими связями реализована в системе автоматического построения численных динамических моделей для вязкого трения и для регуляризованного сухого трения. Для этого найдены геометрические условия контакта роликов омни- и месапит-колес и опорной плоскости.
- ▶ Численно показано, что при стремлении осевого момента инерции ролика к нулю, движения системы с трением стремятся к движениям безынерционной модели. Обнаружено качественное сходство траекторий системы с вязким трением с достаточно большим коэффициентом трения с движениями модели, рассмотренной в главах 1 и 2.

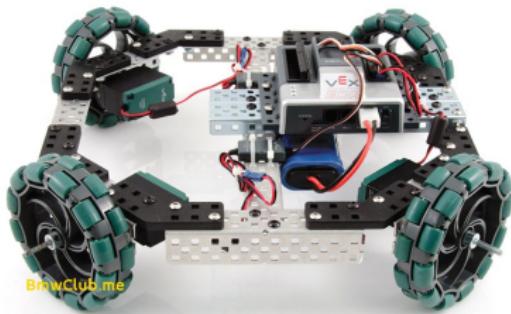
## Результаты, выносимые на защиту IV

- ▶ Численные эксперименты показали, что проскальзывание между роликом в контакте и опорной плоскостью заканчивается за время, существенно меньшее, чем время нахождения ролика в контакте. Это служит обоснованием применимости теории удара в неголономной модели. Также обнаружено, что время проскальзывания тем меньше, чем меньше осевой момент инерции ролика.

Спасибо за внимание!

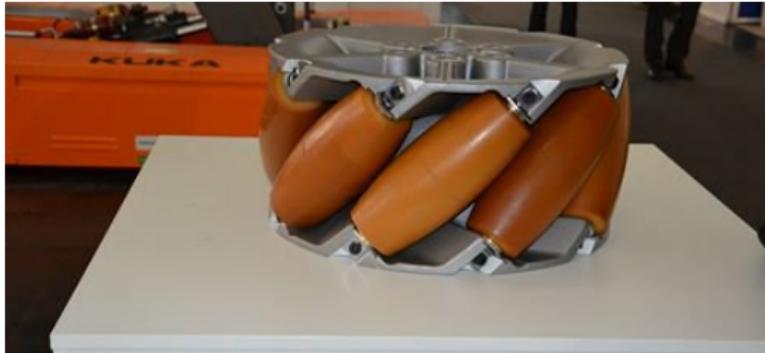
# Об омни-колесах

Оси роликов параллельны плоскости колеса



# Об омни-колесах

Оси роликов под углом к плоскости колеса (Mecanum)



## 1. Уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов

Постановка задачи

Уравнения движения в форме Я.В. Татаринова

Свойства и сравнение с безынерционной моделью

## 2. Смена ролика в контакте колеса и опорной плоскости

Основное уравнение теории удара

Изменение энергии

Численное решение

## 3. Динамика экипажа с трением

Построение и верификация модели

# 1. Уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов

Постановка задачи

Уравнения движения в форме Я.В. Татаринова

Свойства и сравнение с безынерционной моделью

## 2. Смена ролика в контакте колеса и опорной плоскости

Основное уравнение теории удара

Изменение энергии

Численное решение

## 3. Динамика экипажа с трением

Построение и верификация модели

# Постановка задачи

## Рисунки

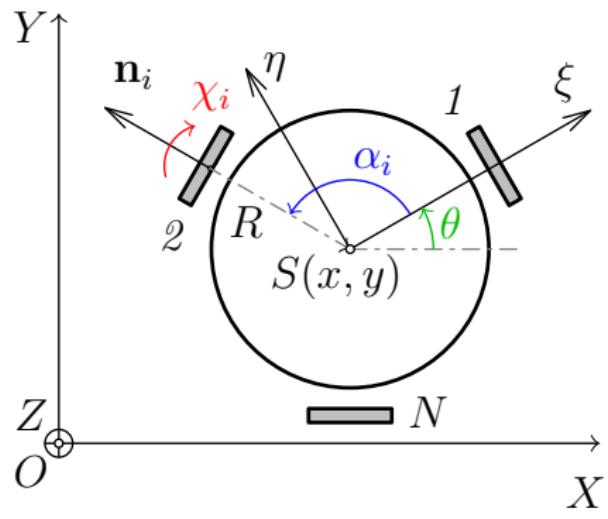


Рис.: Экипаж

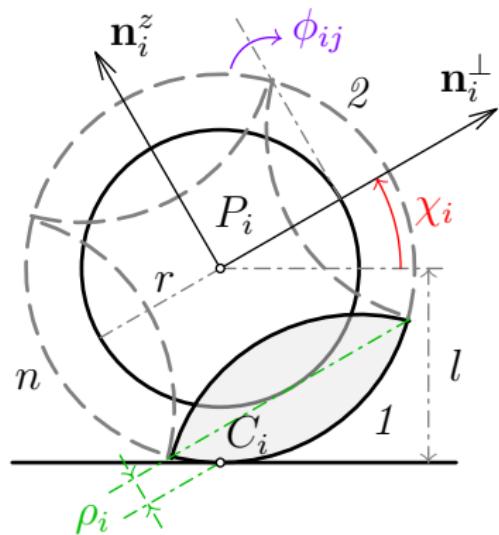


Рис.: Колесо

## Постановка задачи

Тела, связи, степени свободы

- ▶ Экипаж состоит из платформы,  $N$  колес и  $n$  роликов, количество твердых тел:

$$1 + N(n + 1)$$

- ▶ Оси и центры колес и роликов неподвижны относительно платформы и колес соответственно
- ▶ Скорость точек контакта равна нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, i = 1 \dots N$$

- ▶ Количество степеней свободы:

$$3 + N(n - 1)$$

# Постановка задачи

## Координаты, псевдоскорости, связи

- Обобщенные координаты:

$q = (x, y, \theta, \chi_i, \phi_k, \phi_s)$ , где  $i, k = 1 \dots N$ ,  $s$  – ролики вне контакта.

- Псевдоскорости:

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \mathbf{v}_S = R\nu_1 \mathbf{e}_\xi + R\nu_2 \mathbf{e}_\eta, \nu_3 = \dot{\Lambda\theta}, \nu_s = \dot{\phi}_s$$

- Связи:

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos \theta - R\nu_2 \sin \theta, \quad \dot{y} = R\nu_1 \sin \theta + R\nu_2 \cos \theta,$$

$$\dot{\theta} = \frac{\nu_3}{\Lambda}, \quad \dot{\chi}_i = \frac{R}{I}(\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}),$$

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{I \cos \chi_k - r}(\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k), \quad \dot{\phi}_s = \nu_s$$

## Кинетическая энергия и лагранжиан

- ▶ Присутствует слагаемое, пропорциональное  $B$  – моменту инерции ролика относительно его оси собственного вращения:

$$2T = 2L = M\mathbf{v}_S^2 + I_S\dot{\theta}^2 + J \sum_i \dot{\chi}_i^2 +$$

$$+ B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}),$$

$$M = \mathring{M} + Nnm$$

$$I_S = \mathring{I}_S + N \cdot n \left( \frac{A+B}{2} + mR^2 + \frac{mr^2}{2} \right),$$

$$J = \mathring{J} + n(A + mr^2)$$

# Кинетическая энергия и лагранжиан

- ▶ С учетом связей:

$$\begin{aligned} 2L^* = & \dot{\nu}^T \mathring{V}^T \mathring{M} \mathring{V} \dot{\nu} + \\ & + \textcolor{red}{B} \sum_i \left( \frac{(\nu_2 \sin \alpha_i + \nu_1 \cos \alpha_i)^2 R^2}{\rho_i^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2R\nu_3(\nu_2 \sin \alpha_i + \nu_1 \cos \alpha_i) \sin \chi_i}{\rho_i \Lambda} \right) \\ & + \textcolor{red}{B} \sum_{i,j} \left( \frac{2\nu_3 \nu_{ni+j} \sin(\kappa_j + \chi_i)}{\Lambda} + \nu_{ni+j}^2 \right) \end{aligned}$$

где  $\frac{1}{2} \dot{\nu}^T \mathring{V}^T \mathring{M} \mathring{V} \dot{\nu}$  – лагранжиан системы без роликов,  
 $\rho_i = l \cos \chi_i - r$

# Кинетическая энергия и лагранжиан

Матрицы кинетической энергии и связей для системы без роликов

$$\mathring{M} = \text{diag}(M, M, I_S, J \dots J),$$

$$\mathring{V} = \begin{bmatrix} R \cos \theta & -R \sin \theta & 0 \\ R \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} \\ \frac{R}{I} \sin \alpha_i & -\frac{R}{I} \cos \alpha_i & -\frac{R}{I\Lambda} \end{bmatrix}$$

# 1. Уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов

Постановка задачи

Уравнения движения в форме Я.В. Татаринова

Свойства и сравнение с безынерционной моделью

# 2. Смена ролика в контакте колеса и опорной плоскости

Основное уравнение теории удара

Изменение энергии

Численное решение

# 3. Динамика экипажа с трением

Построение и верификация модели

# Структура уравнений

Отличие от случая без роликов

- ▶ Уравнения Я.В. Татаринова:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}, \quad (1.2)$$

$$\nu_\mu P_\mu = \dot{q}_i p_i, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

- ▶ Лагранжиан и “импульсы” отличаются аддитивными членами:

$$L^* = \mathring{L}^* + BL_{\Delta}^*(\nu, \chi)$$

$$P_\alpha = \mathring{P}_\alpha(\theta, p_x, p_y, p_\chi) + P_\Delta(p_{\phi_i}, \chi)$$

# Структура уравнений

## Матрица лагранжиана

Лагранжиан с учетом связей имеет вид:

$$2L^* = \boldsymbol{\nu}^T V^T \mathcal{M} V \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu}$$

Структура симметричной матрицы  $\mathcal{M}^*$  следующая:

$$\mathcal{M}^* = \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} m_{ij}^* \\ \end{array} \right)_{3 \times 3} & \left( \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ B\Lambda^{-1} \sin \chi_{12} & \dots & B\Lambda^{-1} \sin \chi_{nN} \end{array} \right) \\ * & \ddots \\ & B \end{bmatrix}$$

# Структура уравнений

## Слагаемые для свободных роликов

Первое слагаемое (1.2) получается дифференцированием лагранжиана и подстановкой связей (ниже  $\mathcal{M}_i^* = \frac{\partial \mathcal{M}^*}{\partial \dot{\chi}_i}$ ):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} = \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi) \nu_\alpha) = \mathcal{M}^*(\chi_i) \dot{\nu}_\alpha + \left( \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i^*(V\nu)_{3+i} \nu \right)_\alpha ,$$

Слагаемые, соответствующие свободным роликам:

$$\frac{\cos \chi_{ij} \nu_3 B \left( -\frac{\nu_3 R}{I\Lambda} - \frac{\cos \alpha_i \nu_2 R}{I} + \frac{\sin \alpha_i \nu_1 R}{I} \right)}{\Lambda} = \frac{B}{\Lambda} \cos \chi_{ij} (\dot{\chi}_i)^* \nu_3.$$

# Структура уравнений

## Детали

Формальные импульсы  $P_\alpha$  и скобки Пуассона  $L^*$  с ними:

$$P_1 = R \left( p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_i \left( \frac{\sin \alpha_i p_{\chi_i}}{I} + \frac{\cos \alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \right) \right),$$
$$P_2 = R \left( -p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_i \left( -\frac{\cos \alpha_i p_{\chi_i}}{I} + \frac{\sin \alpha_i p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \right) \right),$$

$$P_3 = \frac{1}{\Lambda} \left( p_\theta - \sum_i \frac{R}{I} p_{\chi_i} \right), \quad P_s p_{\phi_s},$$

$$\{P_1, L^*\} = -\frac{\partial P_1}{\partial p_{\chi_i}} \frac{\partial L^*}{\partial \chi_i} = -\frac{R}{2I} \boldsymbol{\nu}^T \sin \alpha_i \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu},$$

$$\{P_2, L^*\} = \frac{R}{2I} \boldsymbol{\nu}^T \cos \alpha_i \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}, \quad \{P_3, L^*\} = \frac{R}{2\Lambda} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}, \quad \{P_s, L^*\} = 0,$$

Суммы  $\{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\} \neq 0$  лишь для первых трех уравнений.

# Уравнения движения

в форме Я.В. Татаринова

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}$$

$$\nu_\mu P_\mu = \dot{q}_i p_i, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$L^* = \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \boldsymbol{\nu} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_{11} & O_{3 \times N} & \tilde{\mathbf{M}}_{13} \\ & JE_{N \times N} & O_{N \times Nn} \\ * & & BE_{Nn \times Nn} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{11} = \text{diag}(M, M, I_S)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ B \sin \chi_{11} & \dots & B \sin \chi_{Nn} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} R \cos \theta & -R \sin \theta & 0 \\ R \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} \\ \frac{R}{I} \sin \alpha_i & -\frac{R}{I} \cos \alpha_i & -\frac{R}{I\Lambda} \end{bmatrix}$$

## 1. Уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов

Постановка задачи

Уравнения движения в форме Я.В. Татаринова

Свойства и сравнение с безынерционной моделью

## 2. Смена ролика в контакте колеса и опорной плоскости

Основное уравнение теории удара

Изменение энергии

Численное решение

## 3. Динамика экипажа с трением

Построение и верификация модели

# Структура уравнений

Новые слагаемые ( $\mathcal{P}_\alpha$  и  $\mathcal{M}_i^*$  зависят от  $\chi$ )

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^* \dot{\nu} &= \frac{MR^2}{\Lambda} \begin{pmatrix} \nu_2 \nu_3 \\ -\nu_1 \nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{R}{2I} \nu^T \begin{pmatrix} -\sin \alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \cos \alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \Lambda^{-1} \mathcal{M}_i^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \nu \\ &- BR^2 \nu^T \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \nu - B \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \cos \chi_{12} \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_1^* \\ \vdots \\ \cos \chi_{Nn} \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_N^* \end{pmatrix}\end{aligned}$$

# Структура уравнений

## Свойства

1. Интеграл энергии  $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i)\boldsymbol{\nu} = h = \text{const}$   
(связи автономны, идеальны, силы консервативны)
2.  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0 \implies \nu_s = \text{const}$
3.  $B = 0 \implies$  уравнения как в безынерционной модели.
4. Интеграл  $m_{33}^*\nu_3 = \text{const}$  разрушается при  $B \neq 0$ .  $\dot{\nu}_3 \sim B$ .
5. Первые интегралы:

$$\nu_s + \frac{1}{\Lambda} \sin \chi_{ij} \nu_3 = \text{const.}$$

Вращение  $\nu_1(0) = 0, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) \neq 0$  неравномерно.

6. Замена псевдоскоростей  $\boldsymbol{\nu} \rightarrow \lambda \boldsymbol{\nu}, \lambda \neq 0$  эквивалентна замене времени  $t \rightarrow \lambda t$ .

## Смена ролика

(1) Уравнения вырождаются на стыках роликов:

*разрыв 2ого рода в правой части из-за выражений ( $l \cos \chi_i - r$ ) в знаменателе.*

Пусть переход на следующий ролик будет раньше стыка.

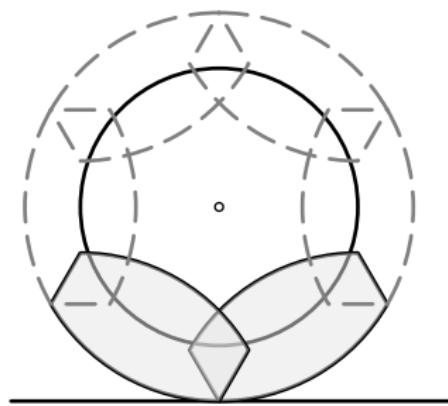


Рис.: Ролики перекрываются

## Смена ролика

(2) Ролики входят и выходят из состояния контакта при  $t = t^*$ .

Происходит мгновенное снятие связи с одного ролика и наложение связи на другой.

Пусть:

- ▶  $\Delta t \ll 1, \quad \Delta \mathbf{q} \sim \dot{\mathbf{q}} \Delta t \ll 1, \quad \Delta \dot{\mathbf{q}} < \infty,$
- ▶ в точках контакта:  $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{F},$
- ▶ к моменту окончания удара  $t^* + \Delta t$  уравнения связей выполнены ( $\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}^+$ )
- ▶ верно основное уравнение удара  $\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{Q}$
- ▶ связи идеальны  $\mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}^+ = 0$

## 1. Уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов

Постановка задачи

Уравнения движения в форме Я.В. Татаринова

Свойства и сравнение с безынерционной моделью

## 2. Смена ролика в контакте колеса и опорной плоскости

Основное уравнение теории удара

Изменение энергии

Численное решение

## 3. Динамика экипажа с трением

Построение и верификация модели

# Основное уравнение теории удара

Линейная система алгебраических уравнений на реакции и скорости после удара

$$M(\dot{q}^+ - \dot{q}^-) = Q$$

$$A\dot{q}^+ = 0, \quad Q^T \delta q^+ = 0$$

$$Q = A^T F, \quad \dot{q}^+ = V \nu^+, \quad AV = 0$$

$$MV\nu^+ - A^T F = M\dot{q}^-$$

$$(\nu^+; F)^T = (MV; -A^T)^{-1} M\dot{q}^-$$

$$\dim MV = \dim q \times \dim \nu$$

$$\dim A^T = \dim q \times \dim F$$

$$\dim q = 3 + N(n + 1)$$

$$\dim \nu = 3 + N(n - 1)$$

$$\dim F = 2N$$

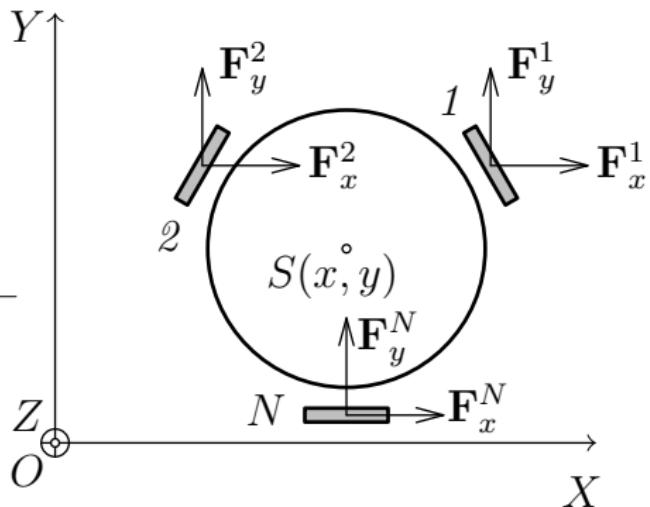


Рис.: Касательные реакции в точках контакта

# Основное уравнение теории удара

Ударные обобщенные импульсы и реакции

$$\mathbf{Q} = \left( Q_1, Q_2, Q_\theta, Q_{\chi_i}|_{i=1}^N, Q_{\phi_i}|_{i=1}^N, Q_s \right)^T$$

$$Q_1 = \sum_{i=1}^N F_i^x$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^N F_i^y$$

$$Q_\theta = \sum_{i=1}^N Q_\theta^i = \sum_{i=1}^N R (-F_i^x \sin(\theta + \alpha_i) + F_i^y \cos(\theta + \alpha_i))$$

$$Q_{\chi_i} = \frac{l}{R} Q_\theta^i$$

$$Q_{\phi_i} = -\rho_i (F_i^x \cos(\theta + \alpha_i) + F_i^y \sin(\theta + \alpha_i))$$

$$Q_s = 0$$

## Независимое нахождение обобщенных скоростей

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \dot{\mathbf{q}}^- - \Delta\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ \in \tilde{V}$$

$$\begin{aligned}0 &= (\Delta\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{M}\mathbf{V}) \\&= (\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-, \mathbf{M}\mathbf{V}) \\&= (\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-, \mathbf{V}) \\&= \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}^-\end{aligned}$$

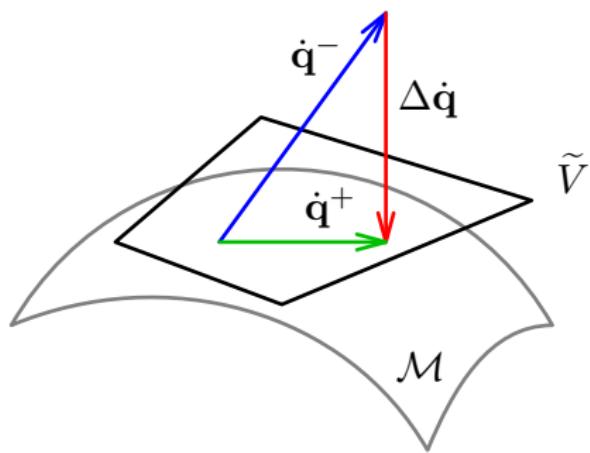


Рис.:  $\dot{\mathbf{q}}^+$  – проекция  $\dot{\mathbf{q}}^-$  на  $\tilde{V}$ ,  
ортогональная в метрике  $\mathbf{M}$

$$\boldsymbol{\nu}^+ = \left( \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \right)^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}^-$$

# Нахождение обобщенных скоростей и ударных реакций

Основное уравнение удара

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{Q}$$

Дифференциальные связи

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}^+ = 0$$

Условие идеальности связей

$$\mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}^+ = 0$$

Система разрешима относительно  $(\boldsymbol{\nu}^+; \mathbf{F})^T$

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{A}^T \mathbf{F} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-$$

Скорости находятся независимо от сил  $(\mathbf{V}^T \cdot)$

$$\boldsymbol{\nu}^+ = (\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}^-$$

Скорости находятся независимо от сил  $(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1} \cdot)$

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}^-$$

## 1. Уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов

Постановка задачи

Уравнения движения в форме Я.В. Татаринова

Свойства и сравнение с безынерционной моделью

## 2. Смена ролика в контакте колеса и опорной плоскости

Основное уравнение теории удара

Изменение энергии

Численное решение

## 3. Динамика экипажа с трением

Построение и верификация модели

# Изменение энергии

Соответствует теореме Карно

$$T = \frac{1}{2} (M\dot{q}, \dot{q}), \quad \dot{q}^+ = V\nu^+$$

В силу идеальности связей:

$$(M\dot{q}^+, \Delta\dot{q}) = (M\Delta\dot{q}, \dot{q}^+) = (Q, \dot{q}^+) = 0$$

Поэтому:

$$\Delta T = -\frac{1}{2} (M\Delta\dot{q}, \Delta\dot{q}) \leq 0$$

$$\begin{aligned} 2\Delta T &= 2(T^+ - T^-) = (M\dot{q}^+, \dot{q}^+) - (M\dot{q}^-, \dot{q}^-) \\ &= (M\Delta\dot{q}, \Delta\dot{q}) + 2(M\dot{q}^-, \Delta\dot{q}) \\ &= -(M\Delta\dot{q}, \Delta\dot{q}) + 2(M\dot{q}^+, \Delta\dot{q}) = -(M\Delta\dot{q}, \Delta\dot{q}) \end{aligned}$$

## 1. Уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов

Постановка задачи

Уравнения движения в форме Я.В. Татаринова

Свойства и сравнение с безынерционной моделью

## 2. Смена ролика в контакте колеса и опорной плоскости

Основное уравнение теории удара

Изменение энергии

Численное решение

## 3. Динамика экипажа с трением

Построение и верификация модели

## Значения параметров

- ▶ радиус колеса  $r = 0.05$ ,
- ▶ масса колеса  $M_k = 0.15$ ,
- ▶ масса ролика  $m_{\text{рол}} = 0.05$ ,
- ▶ радиус платформы  $R = 0.15$ ,
- ▶ масса платформы  $M_{\text{пл}} = 1$ .

Вращение вокруг своей оси ( $\nu_{1,2}(0) = 0, \nu_3 = 1$ ).

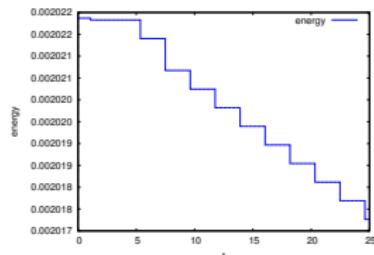


Рис.: Кинетическая  
энергия

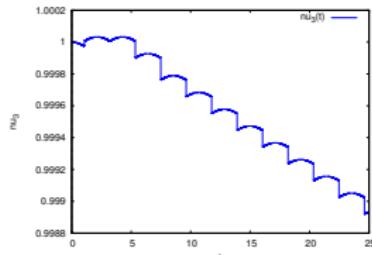


Рис.: Угловая  
скорость экипажа

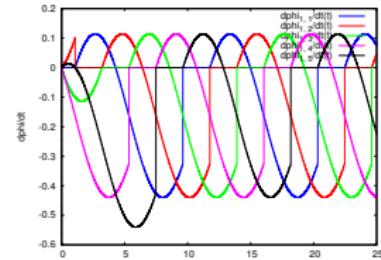


Рис.: Угловые  
скорости роликов

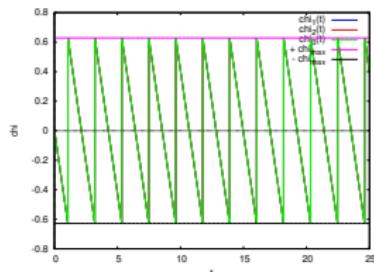


Рис.: Углы поворота  
колес

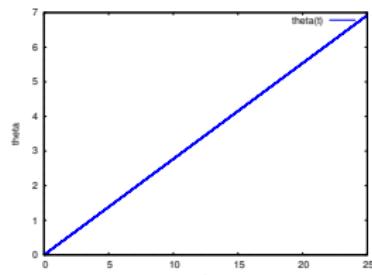


Рис.: Угол поворота  
экипажа

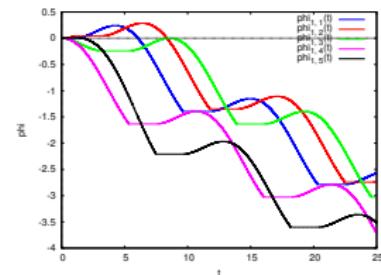


Рис.: Углы поворота  
роликов

Движение по прямой ( $\nu_1(0) = 1, \nu_{2,3} = 0$ ).

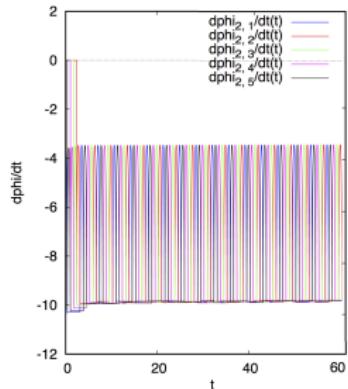
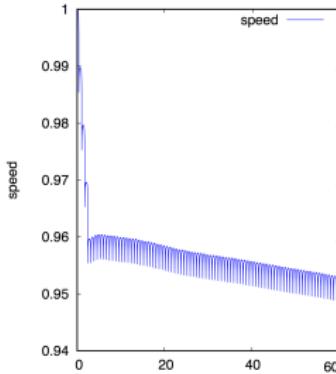
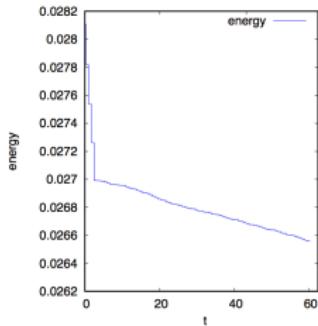


Рис.: Кинетическая  
энергия

Рис.: Скорость центра  
масс

Рис.:  $\dot{\phi}$  на заднем колесе

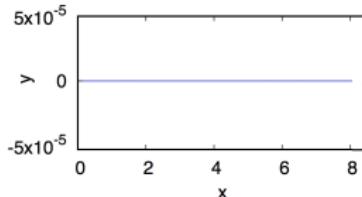


Рис.: Траектория

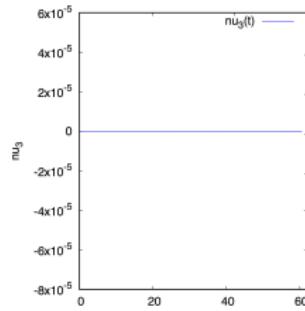


Рис.: Угловая

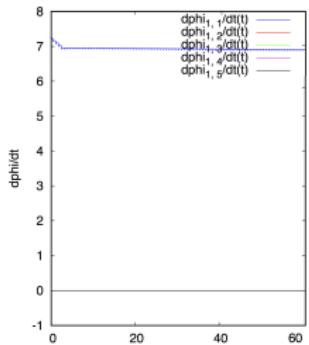


Рис.:  $\dot{\phi}$  на переднем

Движение с закруткой ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ ).

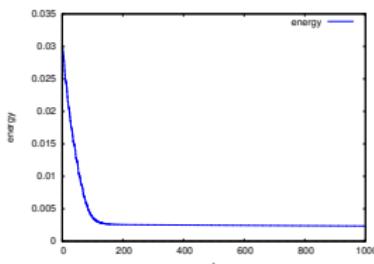


Рис.: Кинетическая  
энергия

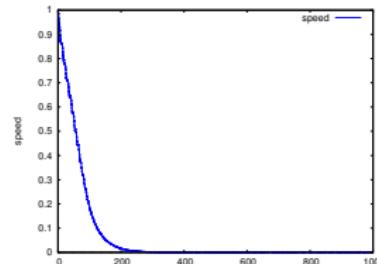


Рис.: Скорость центра  
масс

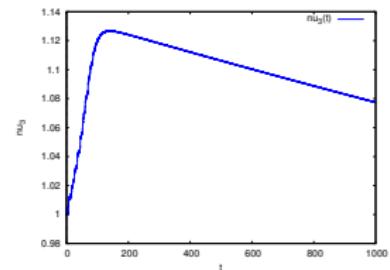


Рис.: Угловая  
скорость экипажа

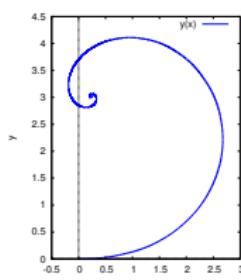


Рис.: Траектория

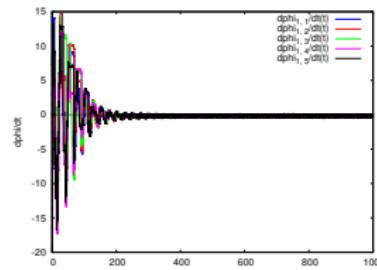


Рис.:  $\phi$  на первом  
колесе

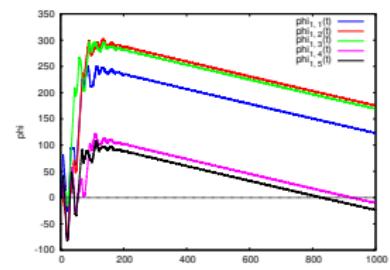


Рис.: углы  $\phi$  на первом  
колесе

## 1. Уравнения движения экипажа по абсолютно шероховатой плоскости с учетом инерции роликов

Постановка задачи

Уравнения движения в форме Я.В. Татаринова

Свойства и сравнение с безынерционной моделью

## 2. Смена ролика в контакте колеса и опорной плоскости

Основное уравнение теории удара

Изменение энергии

Численное решение

## 3. Динамика экипажа с трением

Построение и верификация модели

# Динамика отдельного ролика

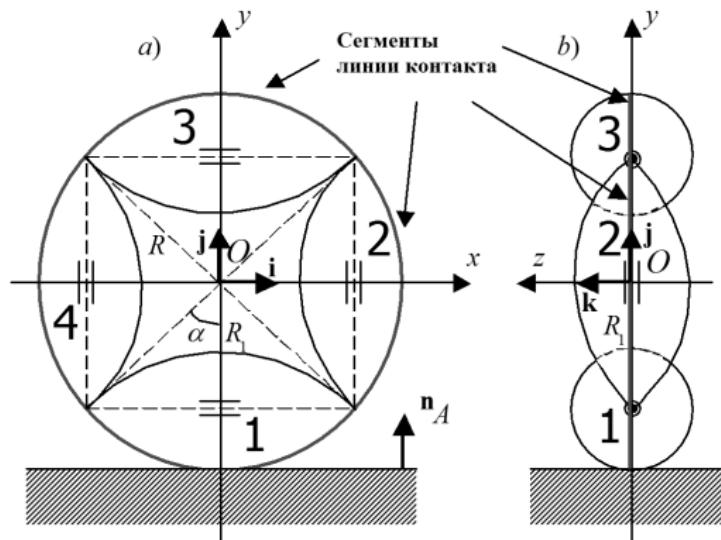
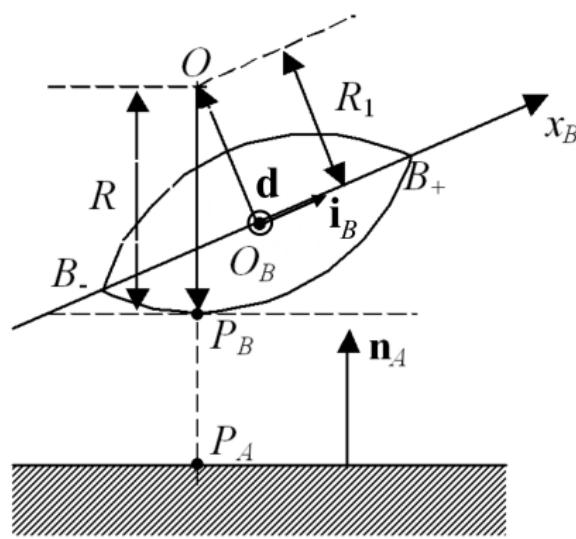


Рис.: Омни-колесо в вертикальном положении: а) вид сбоку; б) вид спереди.

$$x^2 + \left( \sqrt{y^2 + z^2} + R_1 \right)^2 = R^2$$

## Отслеживание контакта



$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{T}_B \mathbf{i}_B \times \mathbf{n}_A}{|\mathbf{T}_B \mathbf{i}_B \times \mathbf{n}_A|}$$

$$\overrightarrow{O_B O} = R_1 \mathbf{d} \times \mathbf{T}_B \mathbf{i}_B$$

$$\mathbf{r}_{P_B} = \mathbf{r}_B + R_1 \mathbf{d} \times \mathbf{T}_B \mathbf{i}_B - R \mathbf{n}_A$$

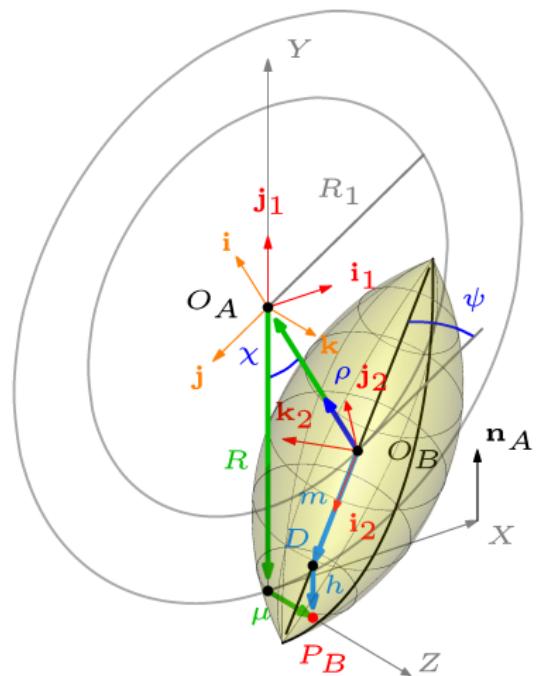
$$\mathbf{r}_{P_A} = (x_{P_B}, 0, z_{P_B})^T$$

$$|\mathbf{T}_B \mathbf{i}_B \cdot \mathbf{n}_A| \leq \sin \alpha$$

$$y_B < R, \quad y_{P_B} = 0, \quad F_n = 0$$

Рис.: Схема отслеживания контакта: вид сбоку отдельного ролика.

## Отслеживание контакта – *metacaput*



Неявный алгоритм

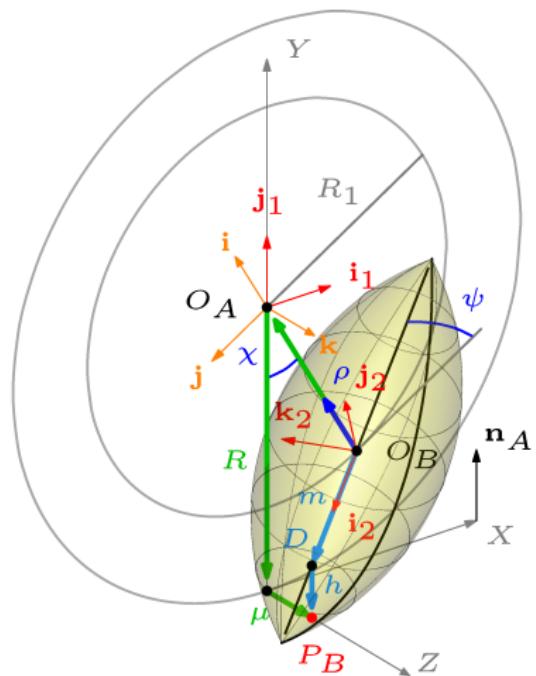
$$\mu = [R\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - R_1 \mathbf{c} \cdot \mathbf{k}_2] / \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2,$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{i}_2 = 0, \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{k}_1 = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{c} \cdot \mathbf{i}_2 + \mathbf{c} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{i}_2 = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{c} \cdot \mathbf{k}_1 + \mathbf{c} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{k}_1 = 0,$$

# Отслеживание контакта – *mechanism*



Явный алгоритм

$$\mathbf{r}_{P_B} = \mathbf{r}_{O_B} + R_1 \mathbf{c} - R_1 \mathbf{j}_1 + \mu \mathbf{k}_1,$$

$$\mathbf{r}_{P_B} = \mathbf{r}_{O_B} + \overrightarrow{O_B D} + \overrightarrow{D P_B}$$

$$\overrightarrow{O_B D} = -m \mathbf{i}_2, \quad \overrightarrow{D P_B} = -h \mathbf{j}_1,$$

$$m = R_1 \sin \chi / \cos \chi / \cos \psi$$

$$h = R - R_1 / \cos \chi$$

$$\cos \chi = \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_A, \quad \sin \chi = (\mathbf{n}_A \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{k}_1.$$

## Структура динамической модели

- ▶ сухое трение, регуляризованное в окрестности  $v = 0$  линейной функцией насыщения
- ▶ твердое тело платформы, 3 твердых тела колес, 12 твердых тел роликов
- ▶ для каждого твердого тела 6 ОДУ Ньютона для ц.м. и 7 ОДУ Эйлера (4 кин.ур. для кватерниона и 3 дин.ур. для  $\omega$ )
- ▶ всего 208 ОДУ плюс дополнительные дифференциальные уравнения, задаваемые связями

# Верификация

Модель для сравнения

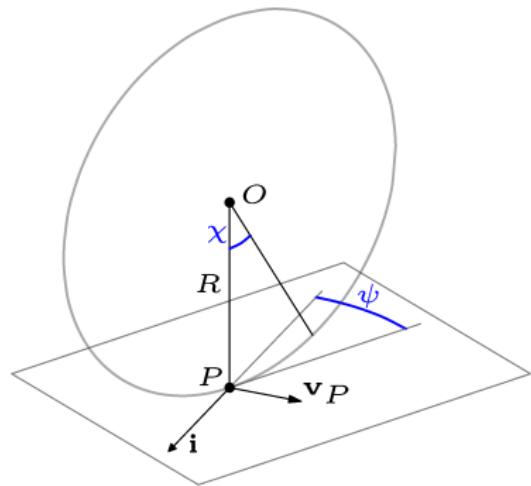


Рис.: Безынерционная модель колеса

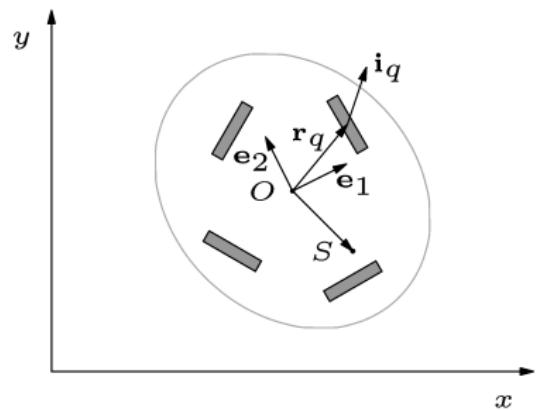


Рис.: Безынерционная модель экипажа

# Верификация

## Варианты движений

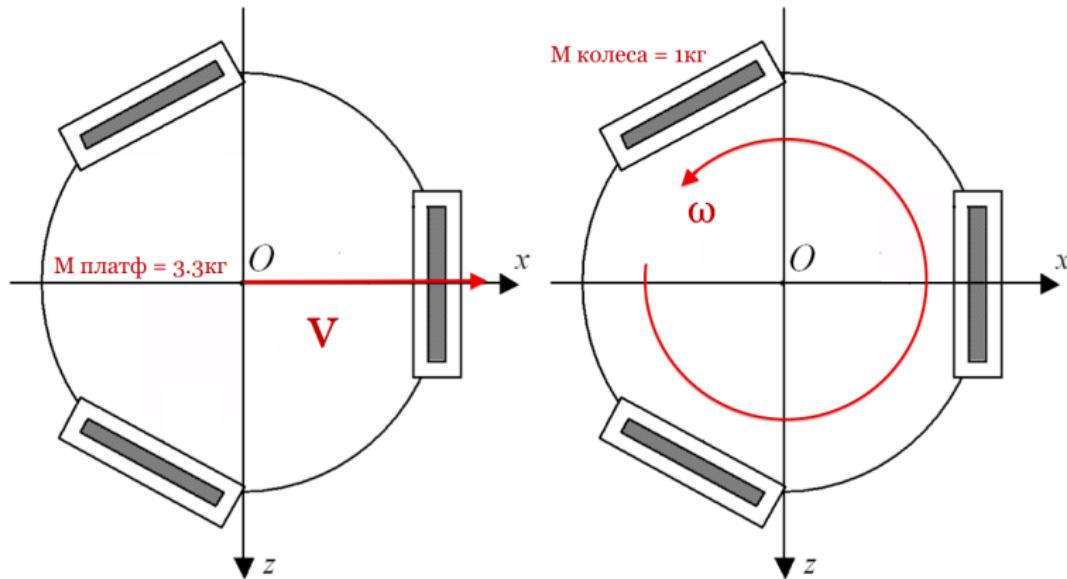
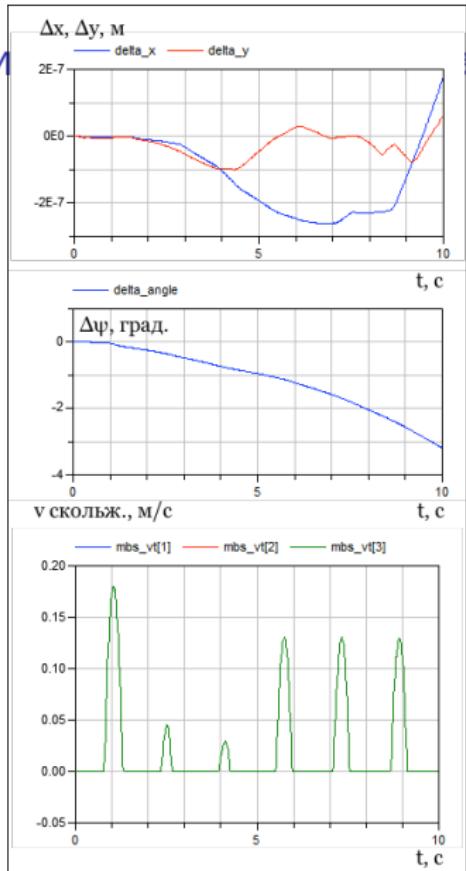


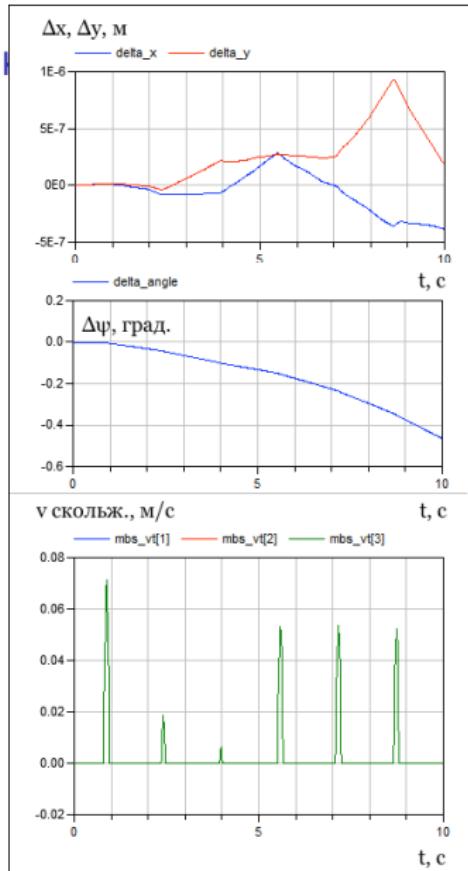
Рис.: Параметры экспериментов

испытания – при  $\sum m_{\text{рол}} \rightarrow 0$

Верифи

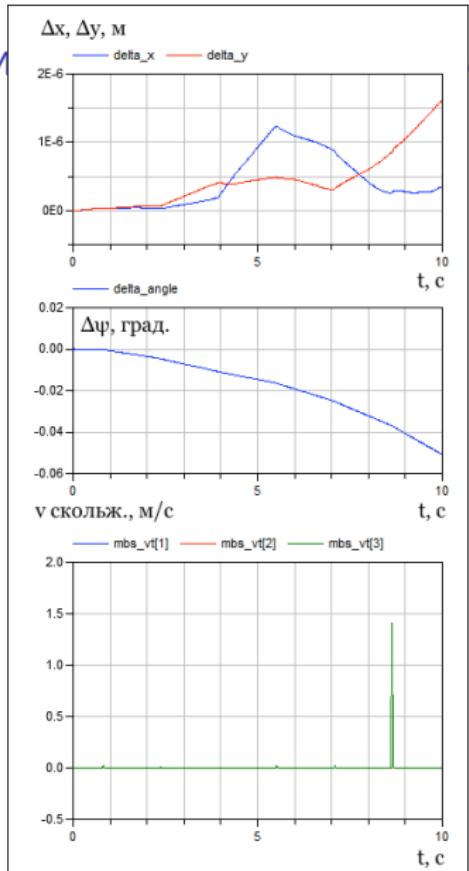


$$\eta = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

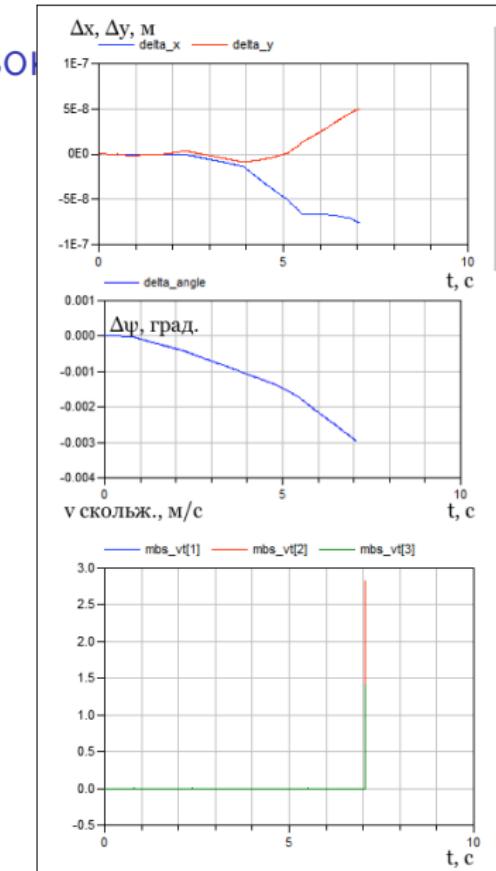


$$\eta = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

# Верифи

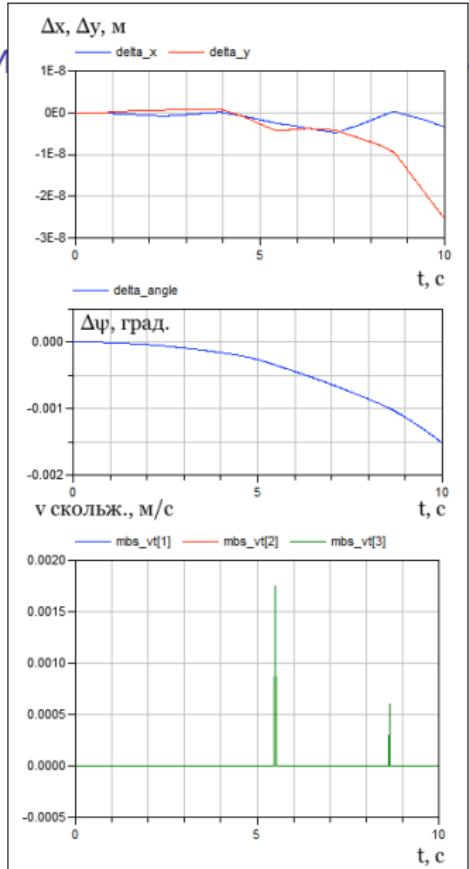


$$\eta = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

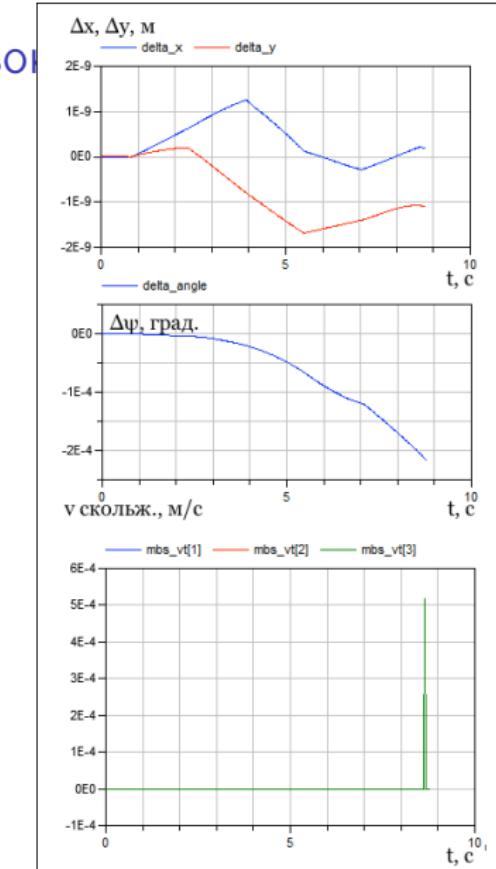


$$\eta = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

# Верифи

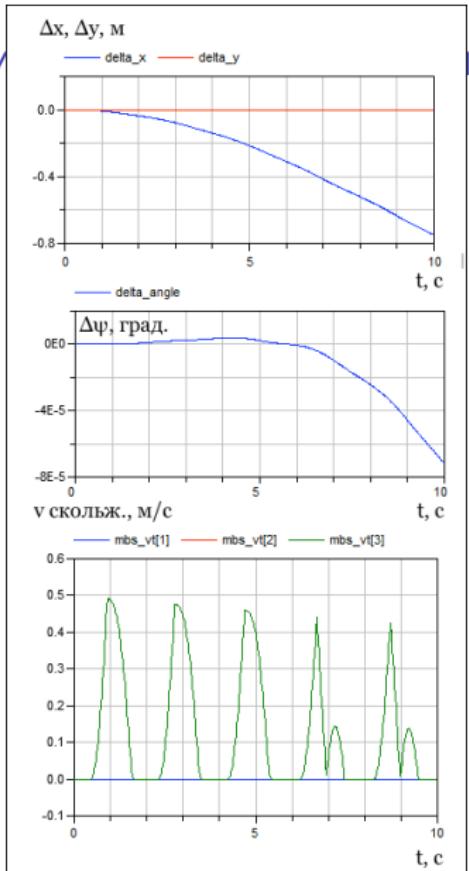


$$\eta = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

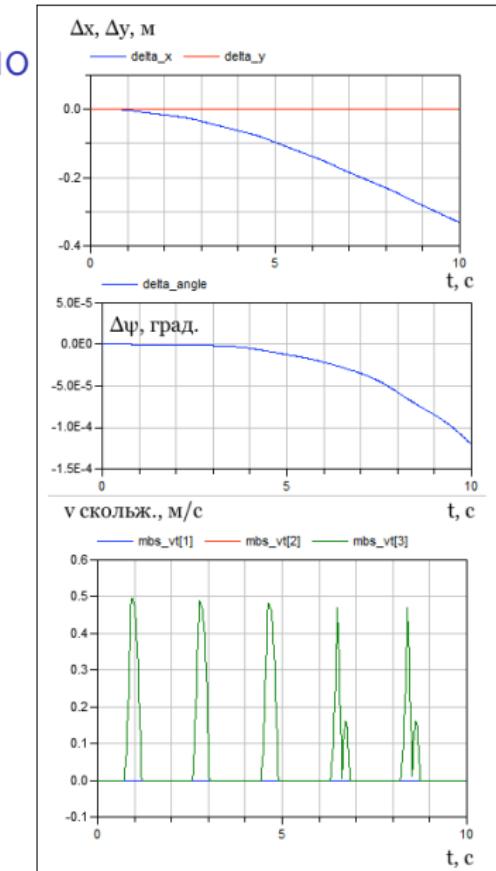


$$\eta = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

# Верифи

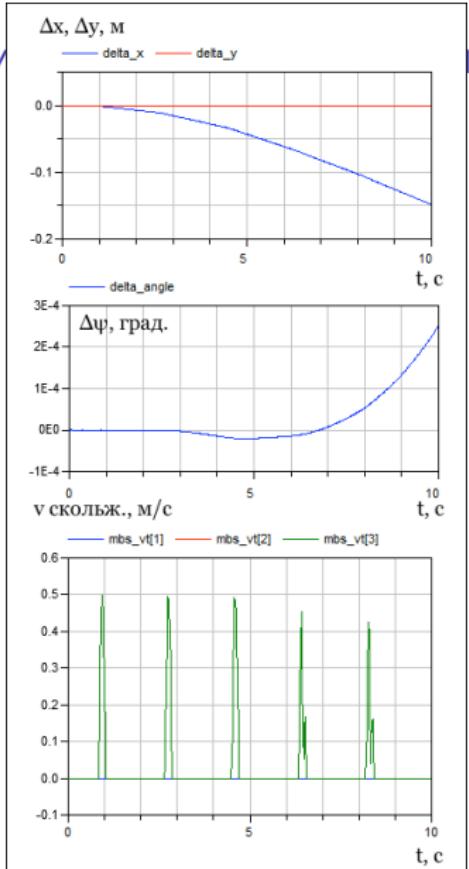


$$\eta = 0,001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

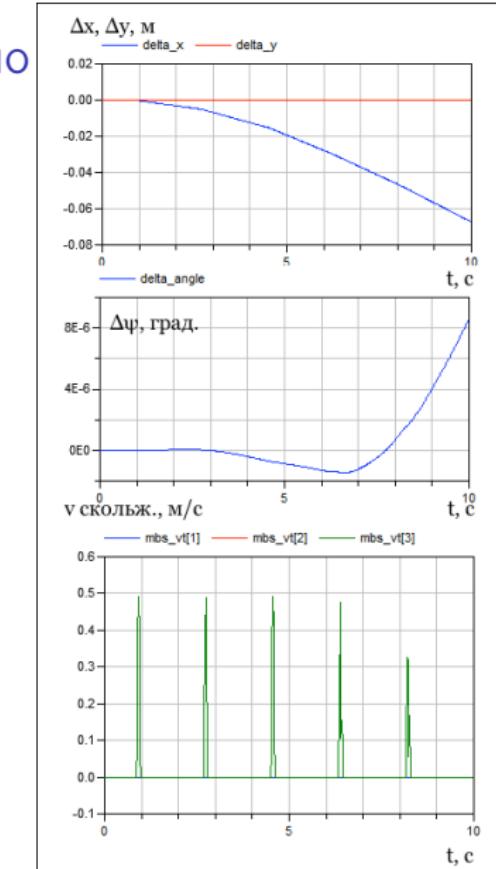


$$\eta = 0,0001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

# Верифи



$$\eta = 0,001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$



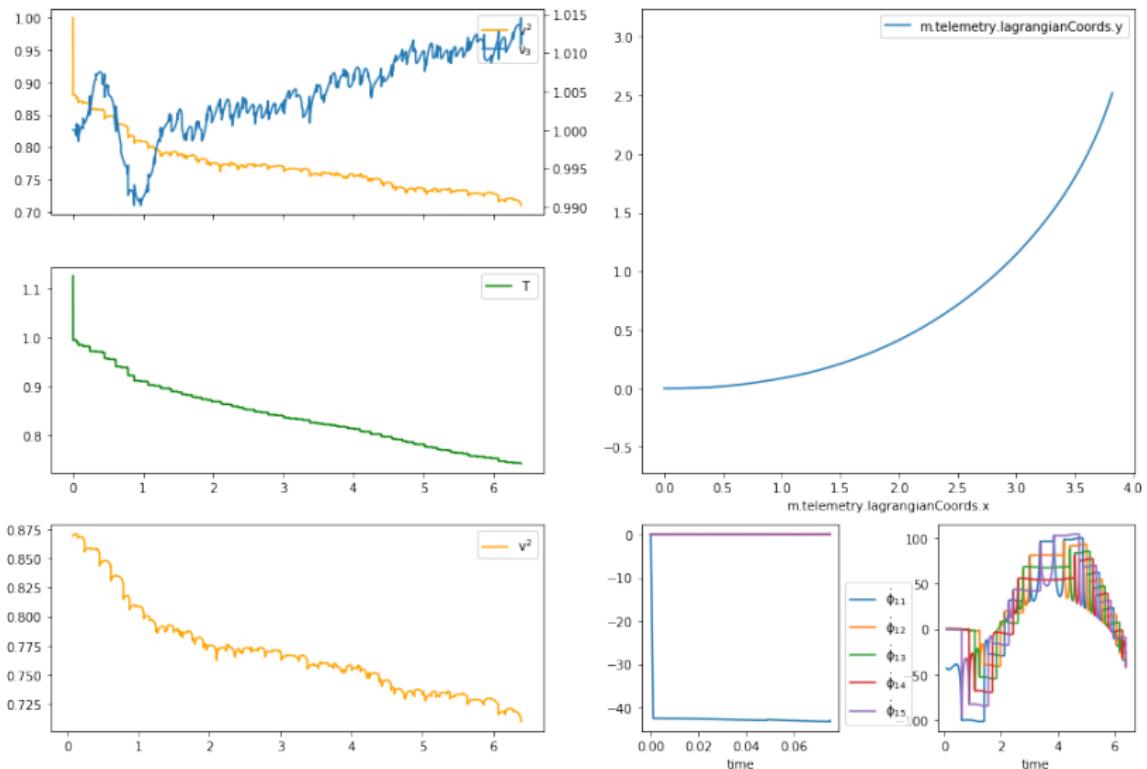
$$\eta = 0,0001, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

# Результаты

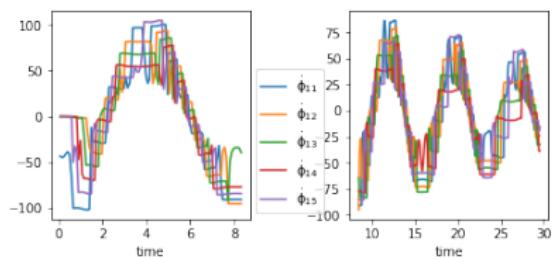
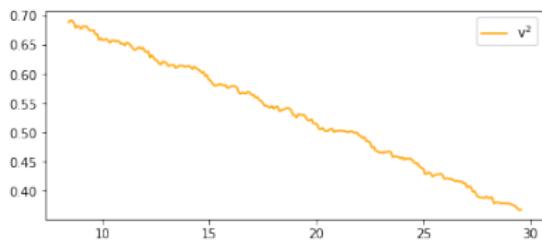
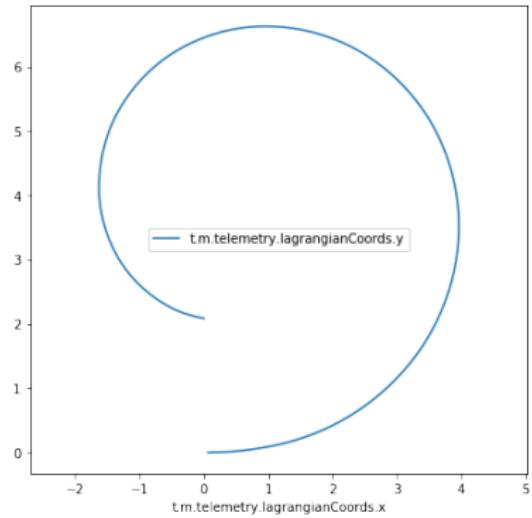
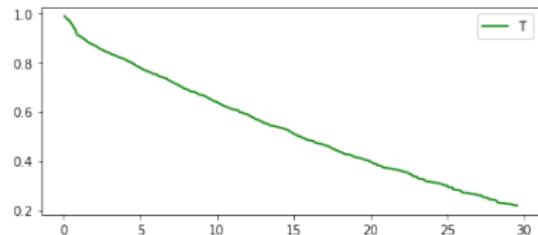
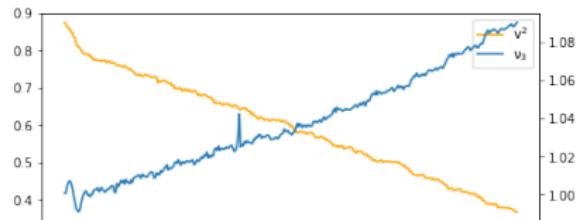
1. Получены уравнения движения экипажа на омни-колесах по абр. шероховатой плоскости с учетом инерции роликов
2. Изучены их свойства и проведено сравнение с уравнениями движения безынерционной модели
3. Построен способ расчета изменения обобщенных скоростей при смене ролика в контакте с точки зрения теории удара
4. Получены численные решения для симметричной конфигурации экипажа
5. Построена динамическая модель на плоскости с регуляризованным сухим трением
6. Выполнена верификация динамической с использованием безынерционной модели

Спасибо за внимание!

## Глава 3. Вязкое трение: Движение 3



# Глава 3. Вязкое трение: Движение 3



## Глава 3. Вязкое трение: Движение 1

