

# Обзор

## Омни-колеса и экипажи





# Обзор литературы. Безынерционная модель.

## Обзор литературы

- 2006 – А.А. Зобова, Я.В. Татаринов – Мобильные роботы и мехатронные системы; 2009 ПММ
- 2007 – Ю.Г. Мартыненко, А.М. Формальский – Изв. РАН. Теория сист. управл.
- 2011 – А.А. Зобова – Нелинейная динамика
- 2011 – А.В. Борисов, А.А. Килин, И.С. Мамаев – Нелинейная динамика
- 2014 – А.А. Килин, А.Д. Бобыкин – Нелинейная динамика
- 2018 – Б.И. Адамов, А.И. Кобрин – Мехатроника, автоматизация, управление

## Безынерционная модель

- Экипаж состоит только из платформы и  $N$  дисков колес.
- Количество твердых тел  $1 + N$ .
- Связи: для каждого колеса задан вектор  $\mathbf{e}_i$ , составляющий постоянный угол  $\psi$  с плоскостью колеса, и для точек  $C_i$  контакта:

$$\mathbf{v}_{C_i} \cdot \mathbf{e}_i = 0$$

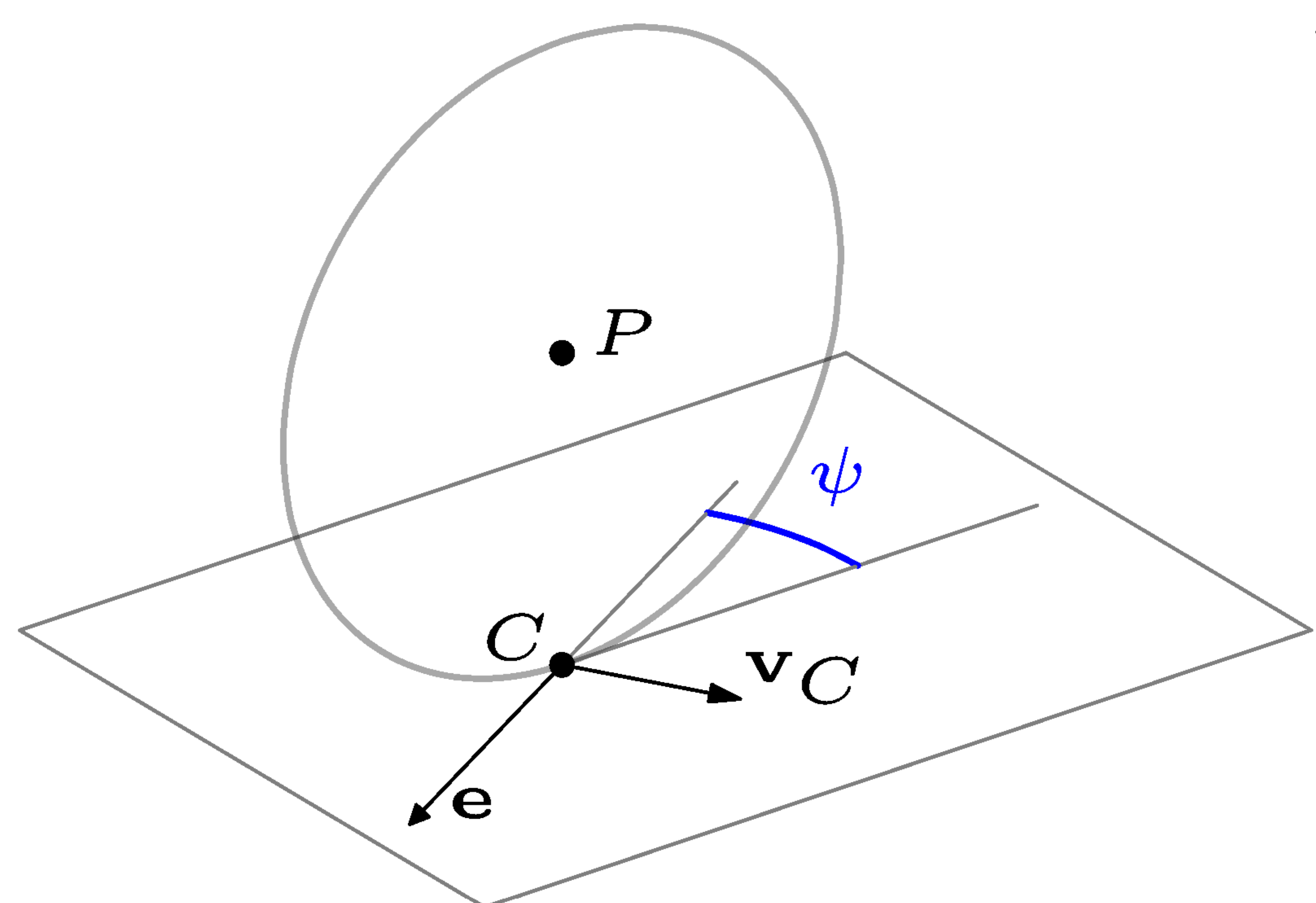


Рис. 1: Колесо

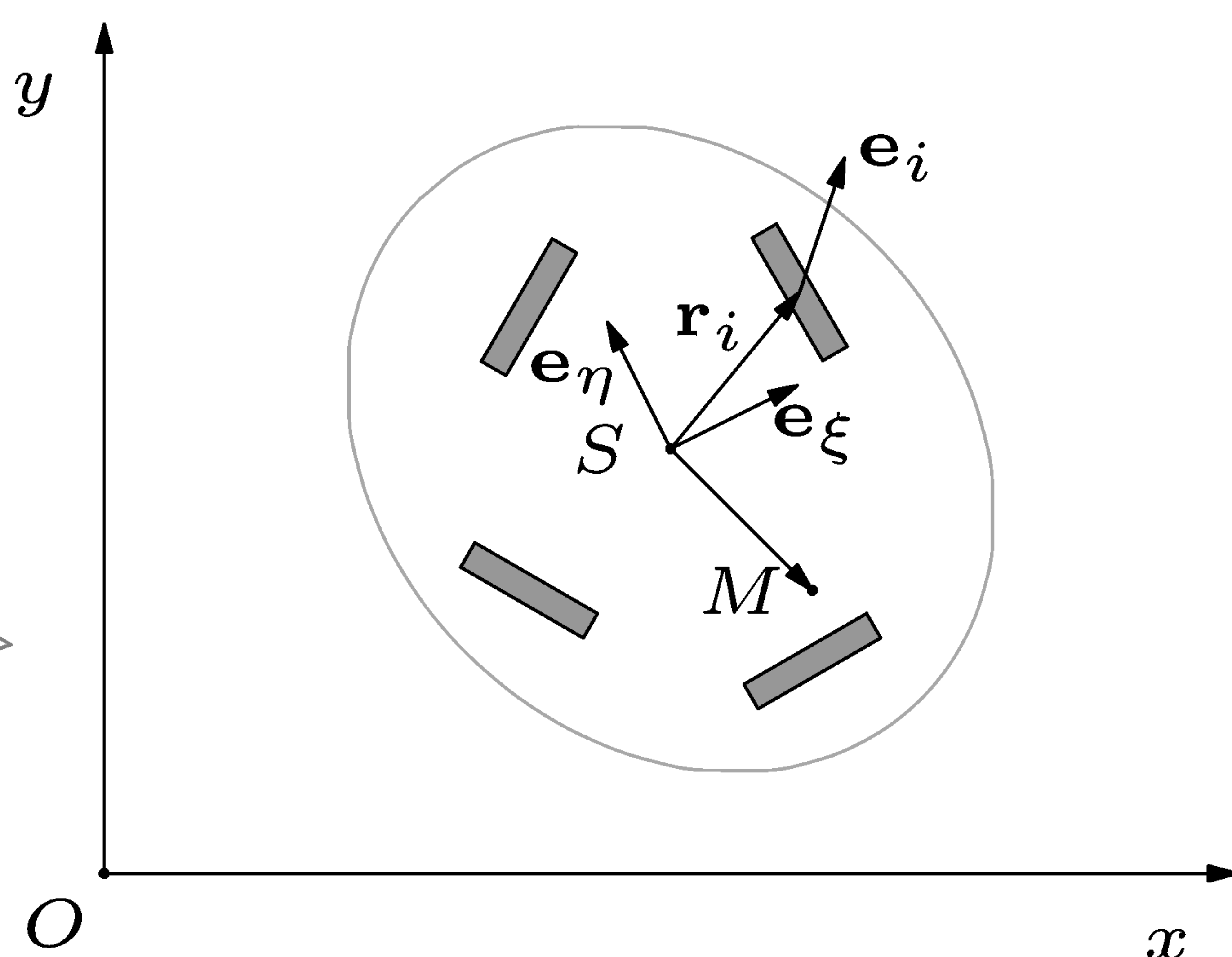
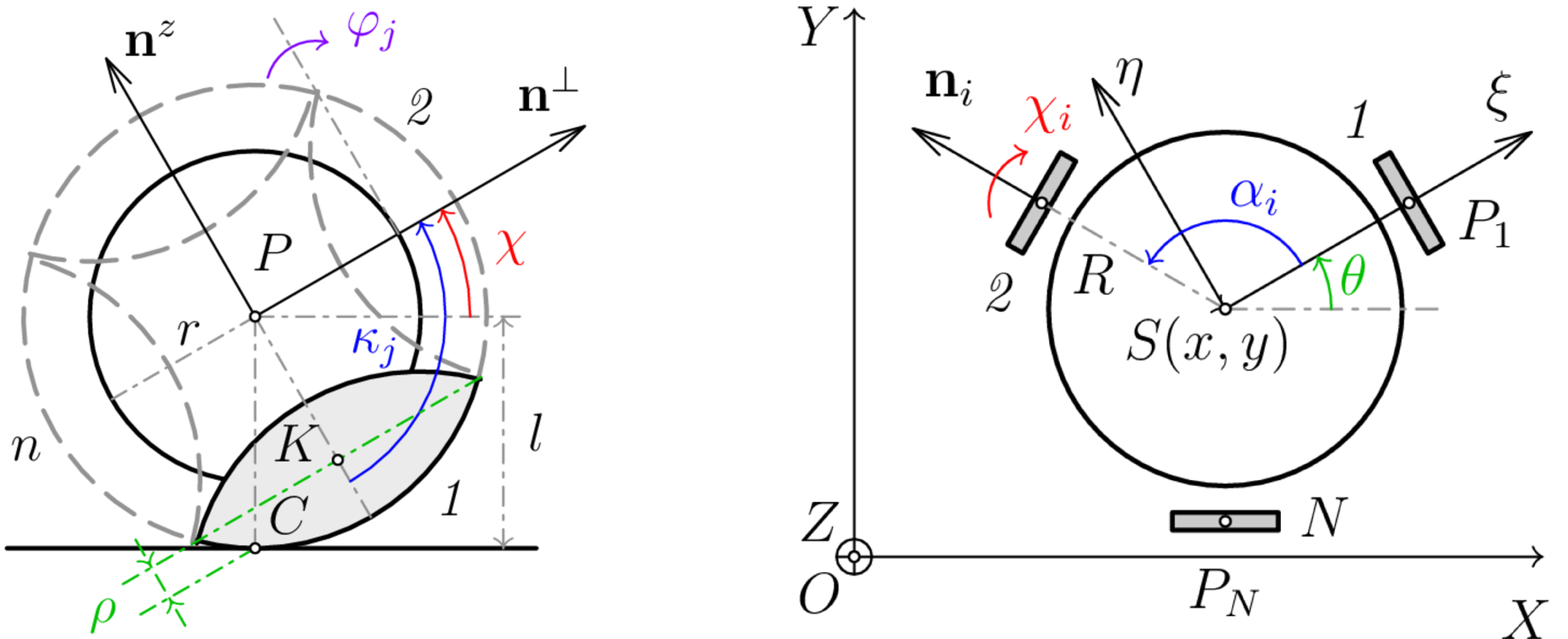


Рис. 2: Экипаж

# Исследуемые модели

## Исследуемая модель с учетом инерции роликов



## Модели контакта

- Главы 1 и 2. Абсолютно шероховатая плоскость

- Скорости точек контакта равны нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, \quad i = 1 \dots N$$

- Количество степеней свободы

$$3 + N(n - 1)$$

- Глава 3. Плоскость с трением

- Вязкое трение

$$\mathbf{F} = -\gamma \mathbf{v}_{C_i}$$

- Регуляризованное сухое трение

$$\mathbf{F} = -\mu N \mathbf{v}_{C_i} \begin{cases} \frac{1}{\delta}, & |\mathbf{v}_{C_i}| < \delta \ll 1 \\ \frac{1}{|\mathbf{v}_{C_i}|} & \text{иначе} \end{cases}$$

- Количество степеней свободы:

$$3 + N(n + 1)$$



# Глава 1. Постановка задачи. Уравнения Я.В.Татаринова

## Глава 1. Постановка задачи.

- **Обобщенные координаты:**

$q = (x, y, \theta, \chi_i, \varphi_k, \varphi_s)$ , где  $i, k = 1 \dots N$ ,  
индекс  $s$  означает ролики вне контакта.

- **Псевдоскорости:**

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \quad \mathbf{v}_S = R\nu_1 \mathbf{e}_\xi + R\nu_2 \mathbf{e}_\eta, \quad \nu_3 = \Lambda \dot{\theta}, \quad \nu_s = \dot{\varphi}_s$$

- **Связи:**

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos \theta - R\nu_2 \sin \theta, \quad \dot{y} = R\nu_1 \sin \theta + R\nu_2 \cos \theta,$$

$$\dot{\theta} = \frac{\nu_3}{\Lambda}, \quad \dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}),$$

$$\dot{\varphi}_k = \frac{R}{l \cos \chi_k - r}(\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k), \quad \dot{\varphi}_s = \nu_s$$

## Уравнения Я.В.Татаринова

- **Лаконичная форма уравнений движения для систем с дифференциальными связями:**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}, \quad (1)$$

$$\nu_\mu P_\mu = \dot{q}_i p_i, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

- $(\cdot)^*$  – подстановка выражений обобщенных скоростей  $\dot{q}$  через псевдоскорости  $\nu$

# Глава 1. Уравнения движения и их свойства

## Глава 1. Структура уравнений движения

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^* \dot{\boldsymbol{\nu}} = & \frac{MR^2}{\Lambda} \begin{pmatrix} \nu_2 \nu_3 \\ -\nu_1 \nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{R}{2I} \boldsymbol{\nu}^T \begin{pmatrix} -\sin \alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \cos \alpha_i \mathcal{M}_i^* \\ \Lambda^{-1} \mathcal{M}_i^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ & - BR^2 \boldsymbol{\nu}^T \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu} - B \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \cos \chi_{12} \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_1^* \\ \vdots \\ \cos \chi_{Nn} \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_N^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Глава 1. Свойства уравнений движения

1. При  $B = 0$  уравнения движения совпадают с уравнениями безынерционной модели.
2. Интеграл  $m_{33}^* \nu_3 = \text{const}$  разрушается при  $B \neq 0$ .  $\dot{\nu}_3 \sim B$ .
3. Первые интегралы:
$$\nu_s + \frac{1}{\Lambda} \sin \chi_{ij} \nu_3 = \text{const}.$$
4. Интеграл энергии  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu} = h = \text{const}$   
(связи автономны, идеальны, силы консервативны)
5.  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0 \implies \nu_s = \text{const}$
6. Замена псевдоскоростей  $\boldsymbol{\nu} \rightarrow \lambda \boldsymbol{\nu}$ ,  $\lambda \neq 0$  эквивалентна замене времени  $t \rightarrow \lambda t$ .

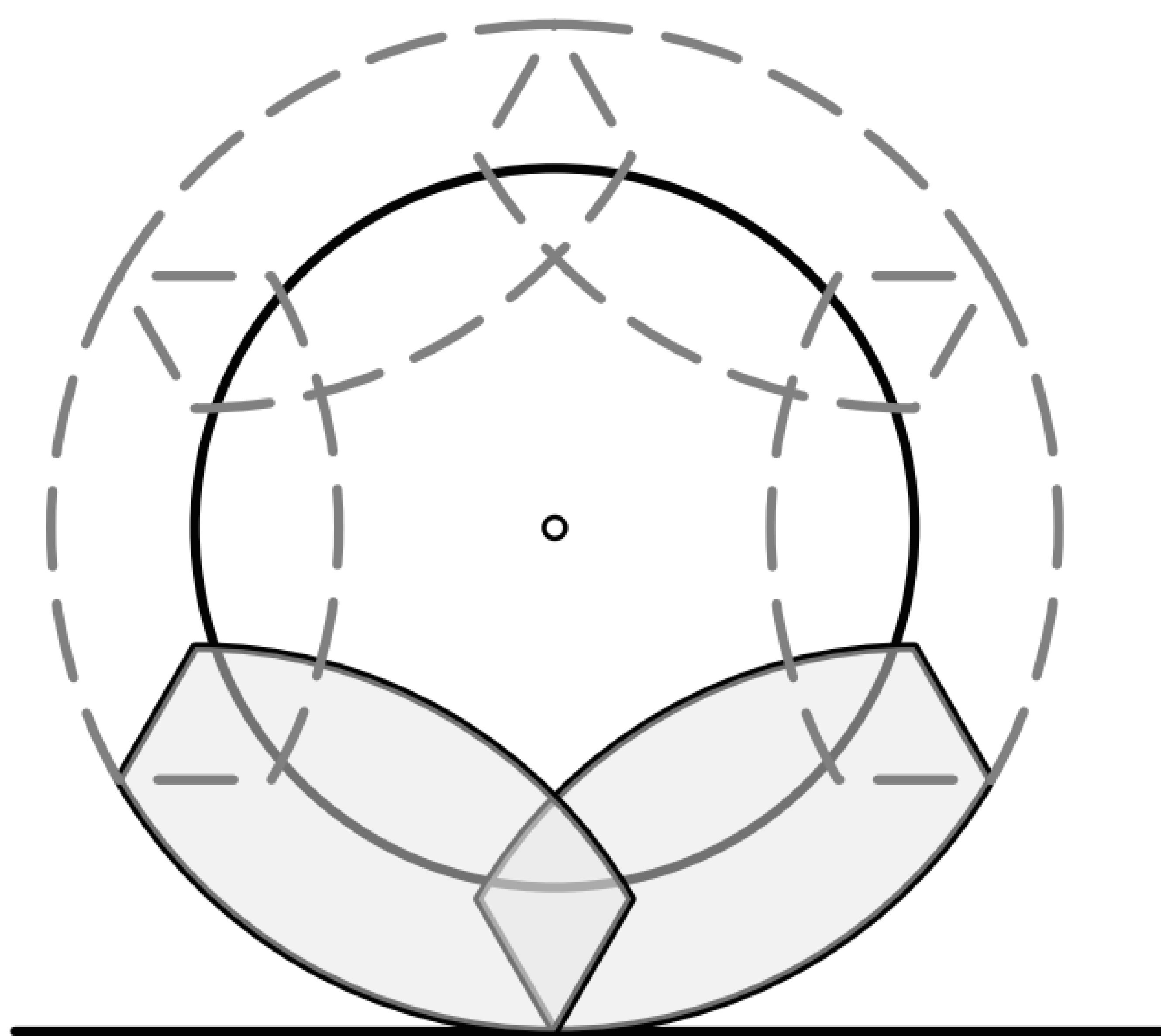


## Глава 2. Смена ролика в контакте с опорной плоскостью

Уравнения движения вырождаются на стыках роликов

Разрыв второго рода в правой части из-за выражений  $(l \cos \chi_i - r)$  в знаменателе.

Исключим достижение острия ролика, усекая ролики и допуская пересечение их тел.



Ролики входят и выходят из состояния контакта при  $t = t^*$

Происходит мгновенное снятие связи с одного ролика и наложение связи на другой.

Пусть:

- $\Delta t \ll 1$ ,  $\Delta \mathbf{q} \sim \dot{\mathbf{q}} \Delta t \ll 1$ ,  $\Delta \dot{\mathbf{q}} < \infty$ ,
- к моменту окончания удара  $t^* + \Delta t$  уравнения связей выполнены ( $\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\nu}^+$ )
- верно основное уравнение удара  $\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{Q}$
- связи идеальны  $\mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}^+ = 0$ , где  $\delta \mathbf{q}^+$  – виртуальные перемещения, допустимые вновь наложенными связями

## Глава 2. Решение задачи теории удара. Начальные условия для расчетов.

### Глава 2. Решение задачи теории удара.

$$\boldsymbol{\nu}^+ = (\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}^-$$

Действительно, т.к.

$$\mathbf{M} \Delta \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}^+ = 0,$$

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \dot{\mathbf{q}}^- - \Delta \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V} \boldsymbol{\nu}^+ \in \tilde{\mathbf{V}},$$

то

$$0 = (\mathbf{M} \Delta \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{V})$$

$$= (\mathbf{M} (\mathbf{V} \boldsymbol{\nu}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-), \mathbf{V})$$

$$= (\mathbf{M} \mathbf{V} \boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}^-, \mathbf{V})$$

$$= \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}^-, \quad \text{ч.т.д.}$$

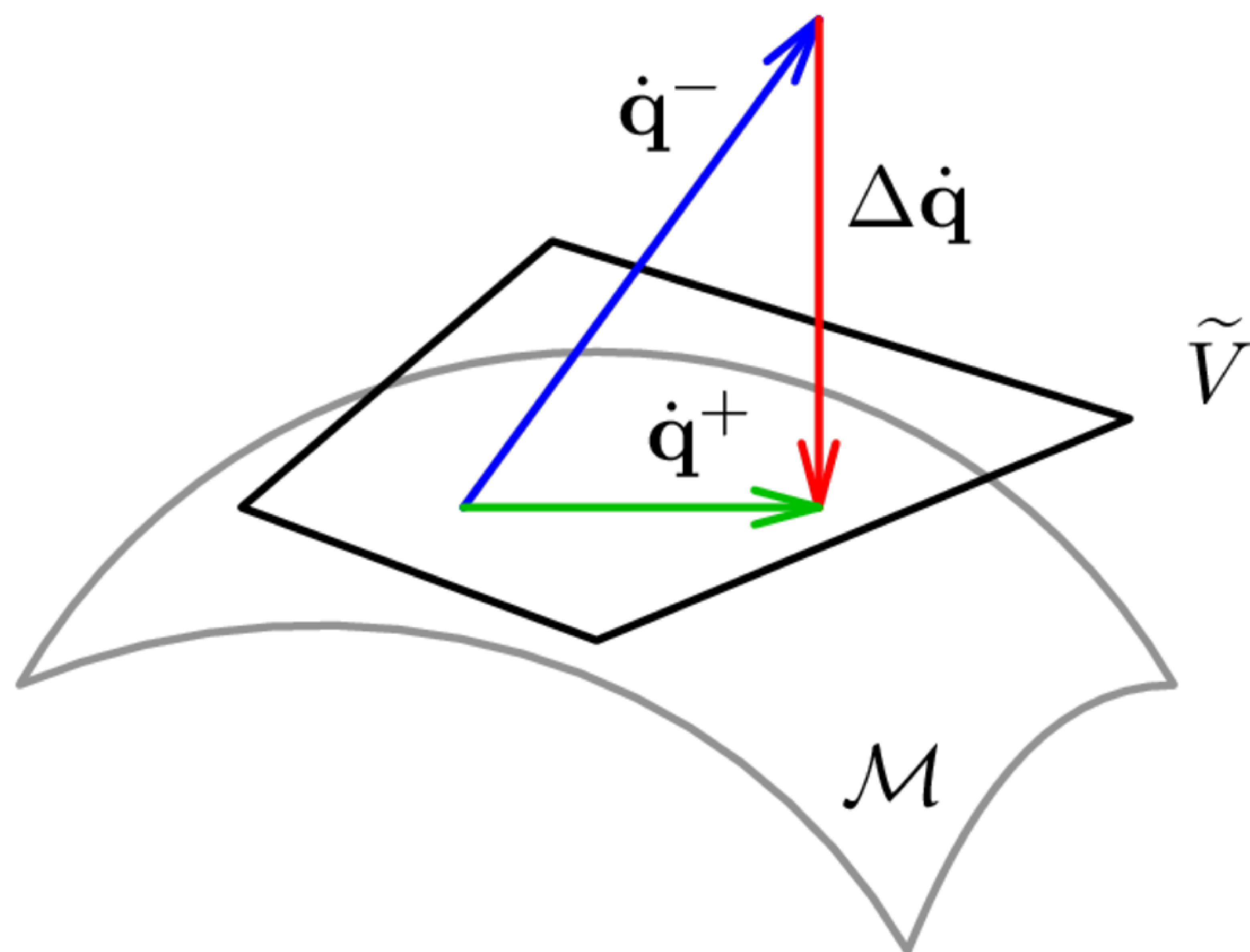


Рис. 3:  $\dot{\mathbf{q}}^+$  – проекция  $\dot{\mathbf{q}}^-$  на  $\tilde{\mathbf{V}}$ , ортогональная в метрике  $\mathbf{M}$

### Начальные условия для расчетов.

- отношение радиуса колеса к радиусу платформы  $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$ ,
- отношение массы колеса к массе платформы  $\frac{M_{\text{к}}}{M_{\text{пл}}} = 0.15$ ,
- отношение массы ролика к массе платформы  $\frac{m_{\text{рол}}}{M_{\text{пл}}} = 0.05$ ,
- $\omega_0 = 1, \mathbf{v}_0 = 1$

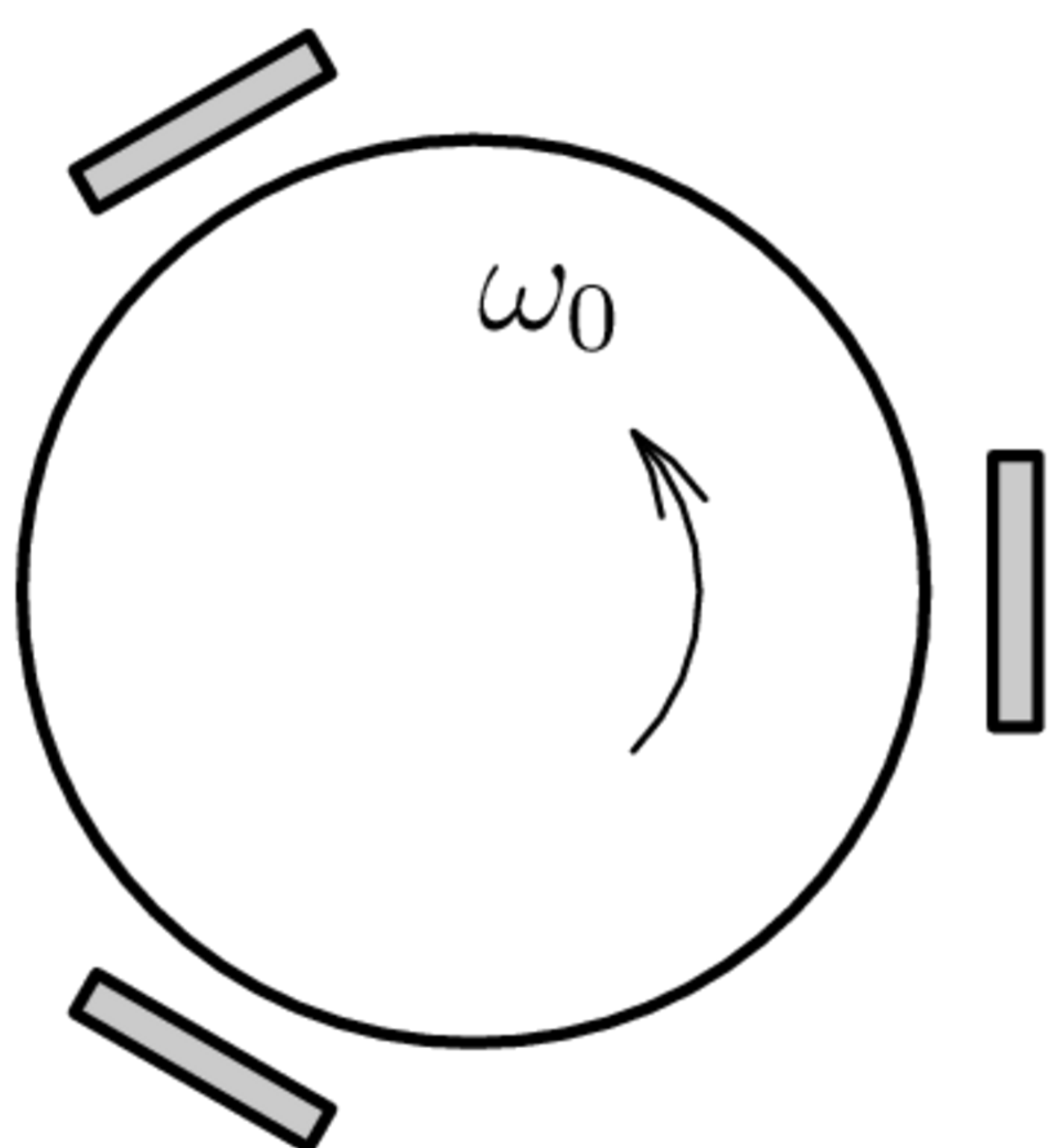


Рис. 4: Движение 1

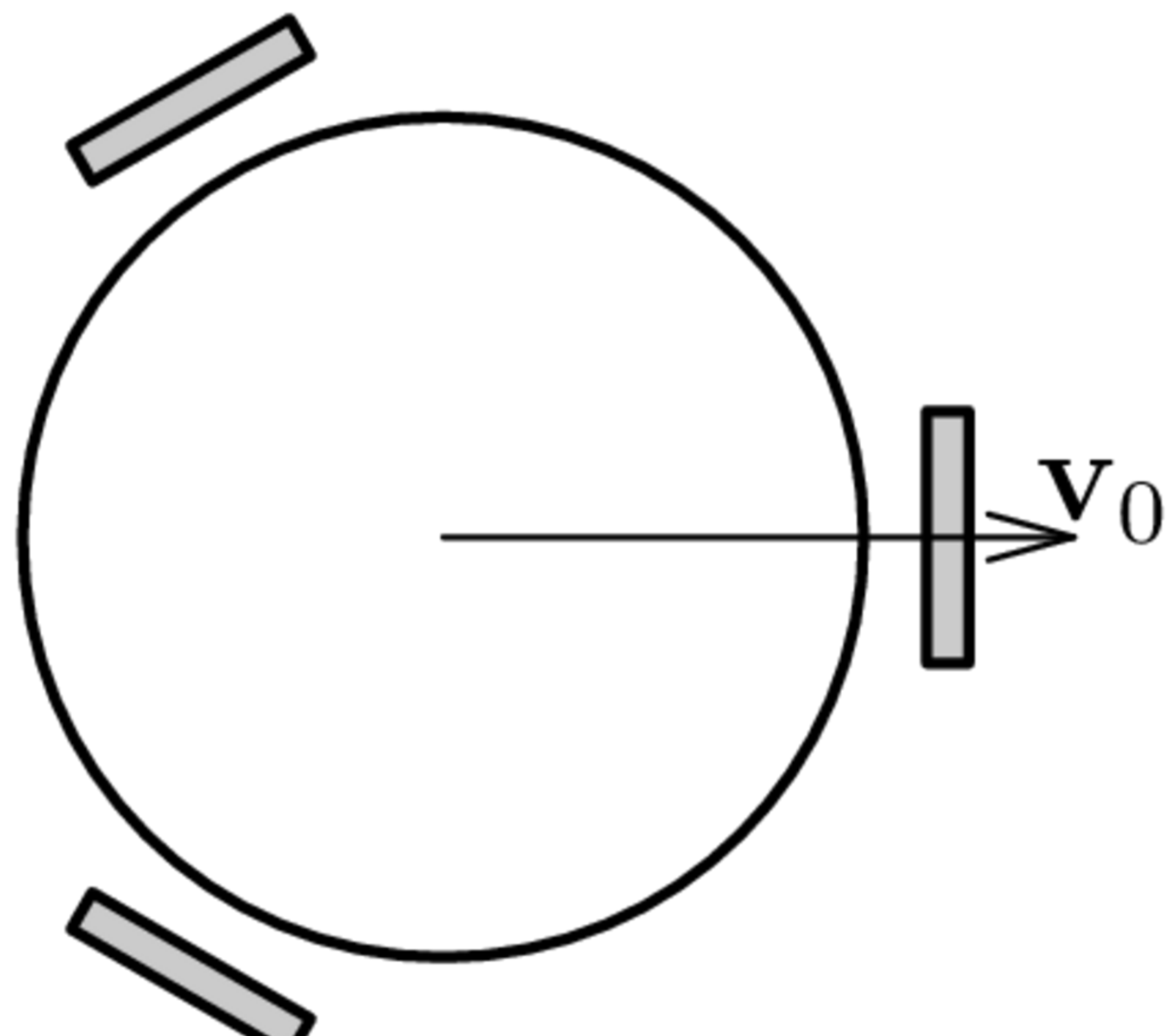


Рис. 5: Движение 2

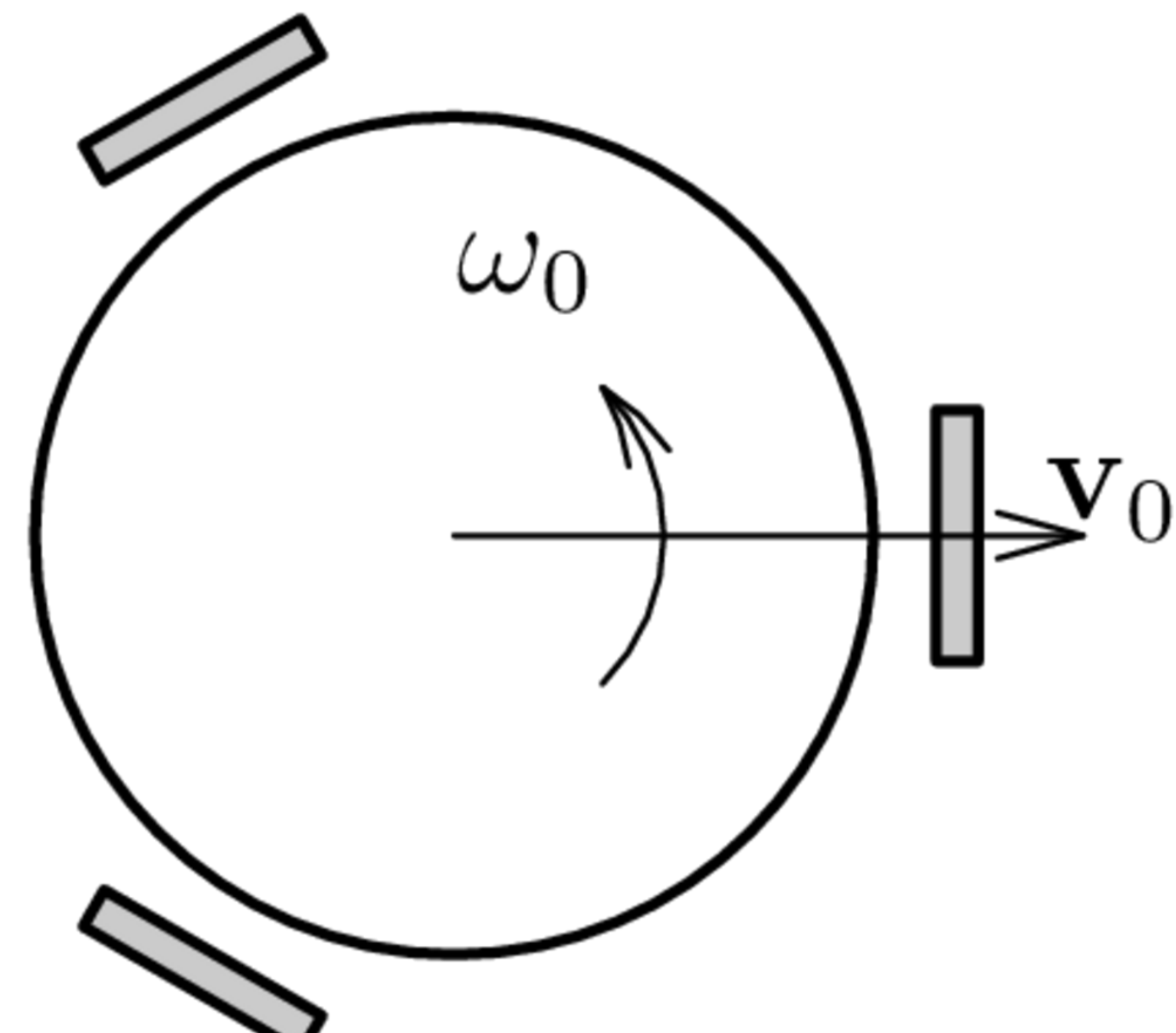


Рис. 6: Движение 3



# Глава 2. Результаты расчетов. Движения 1 и 2.

## Движение 1 ( $\nu_{1,2}(0) = 0, \nu_3 = 1$ )

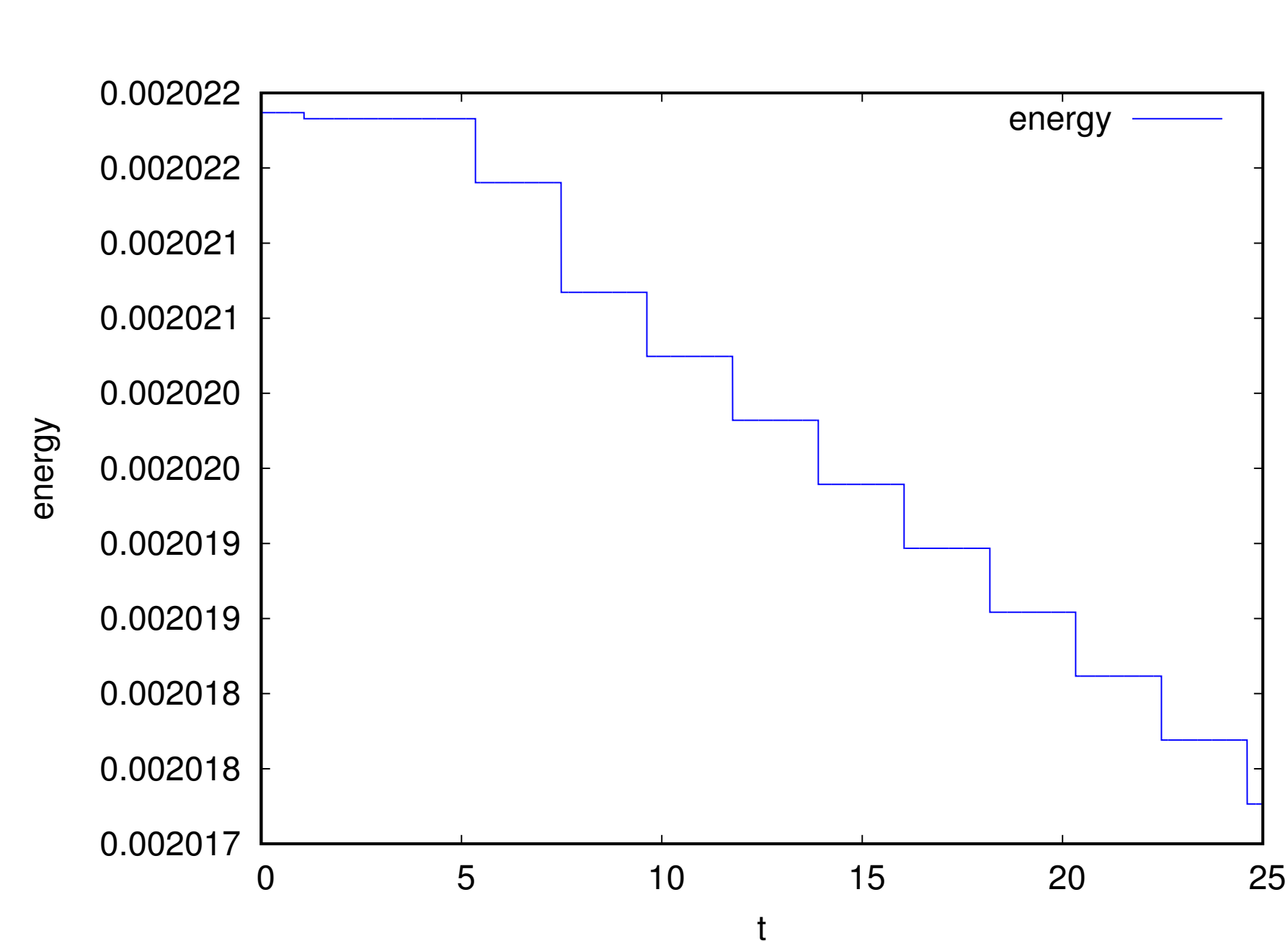


Рис. 7: Кинетическая энергия  $T$

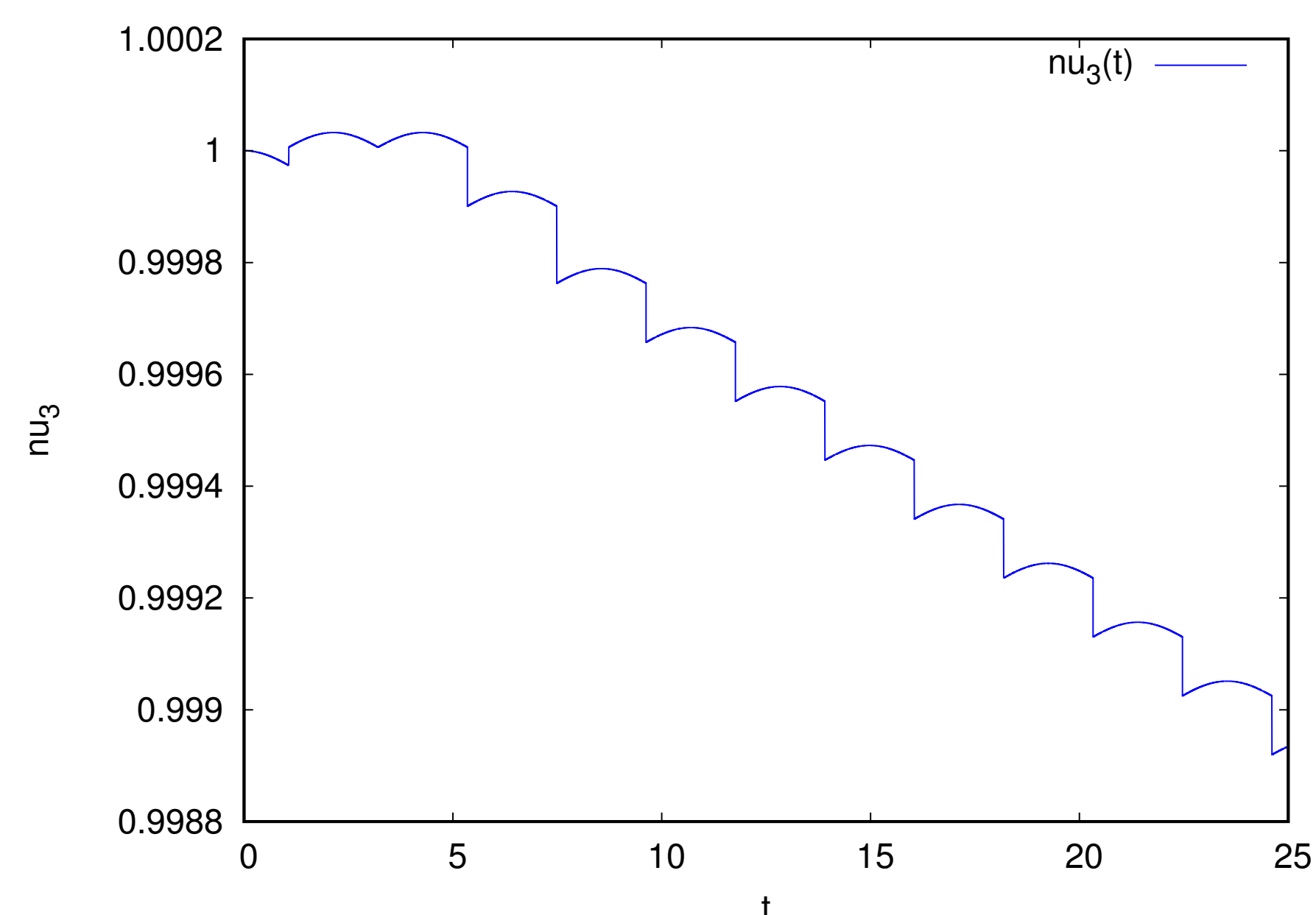


Рис. 8: Угловая скорость  $\nu_3$  платформы

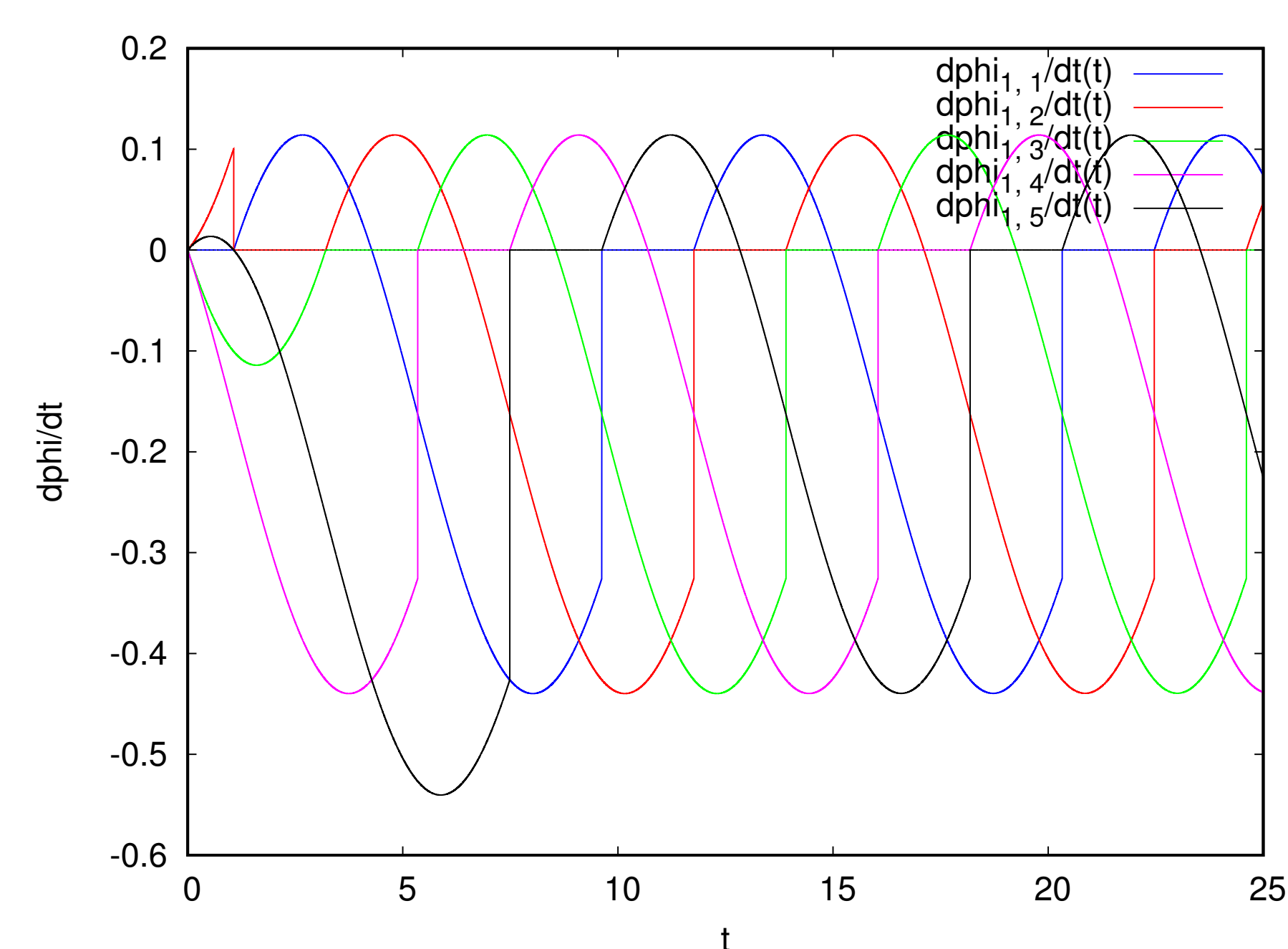
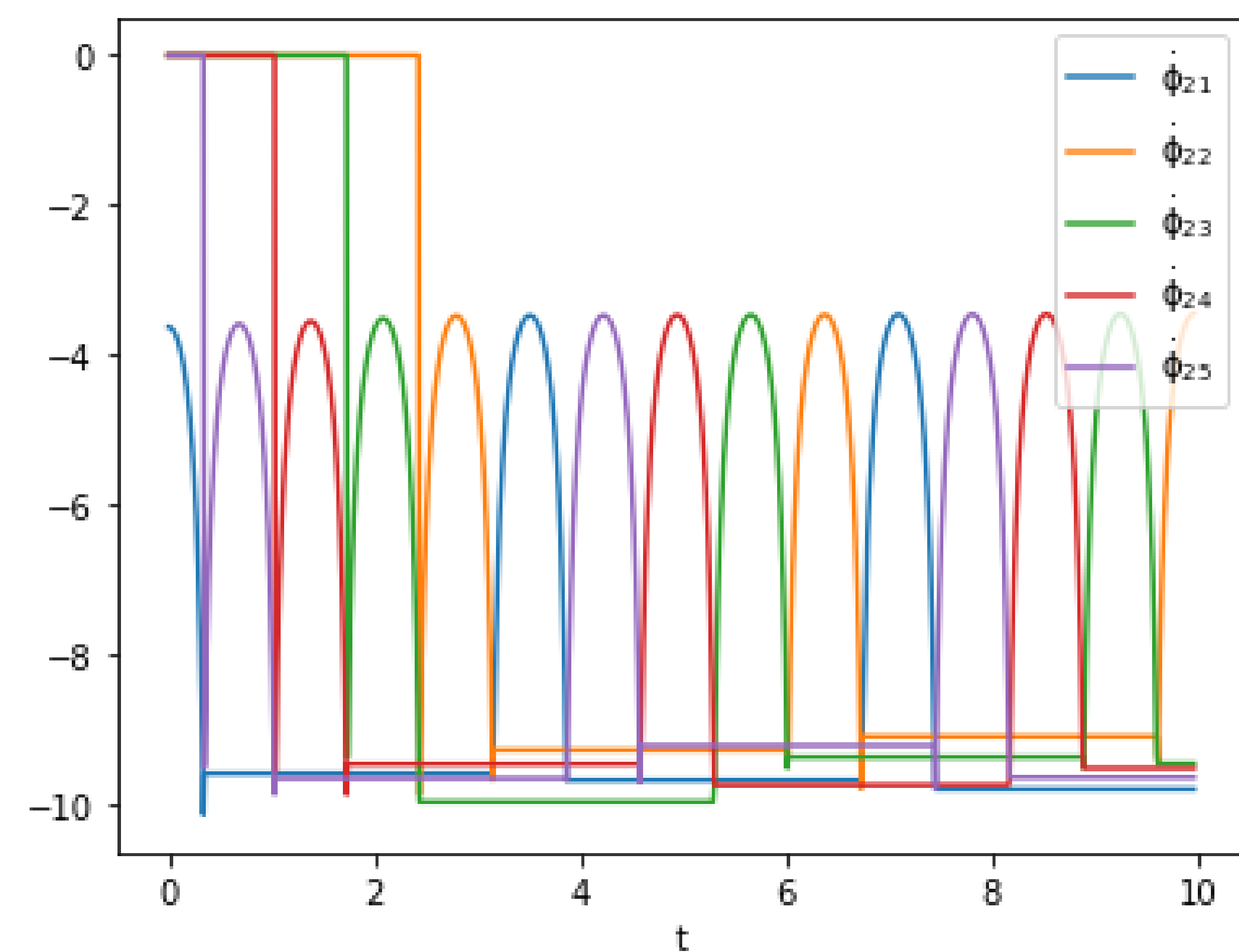
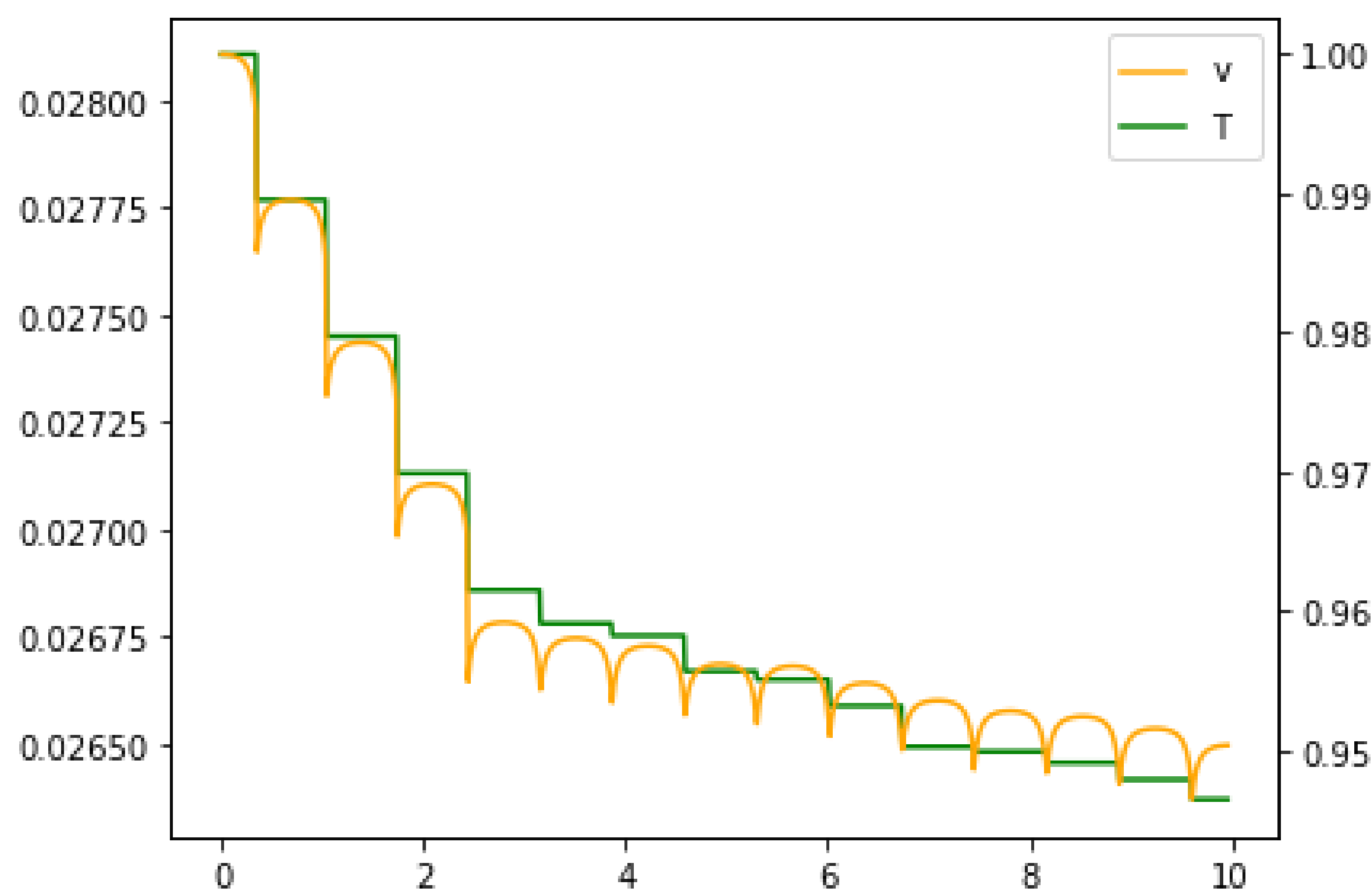
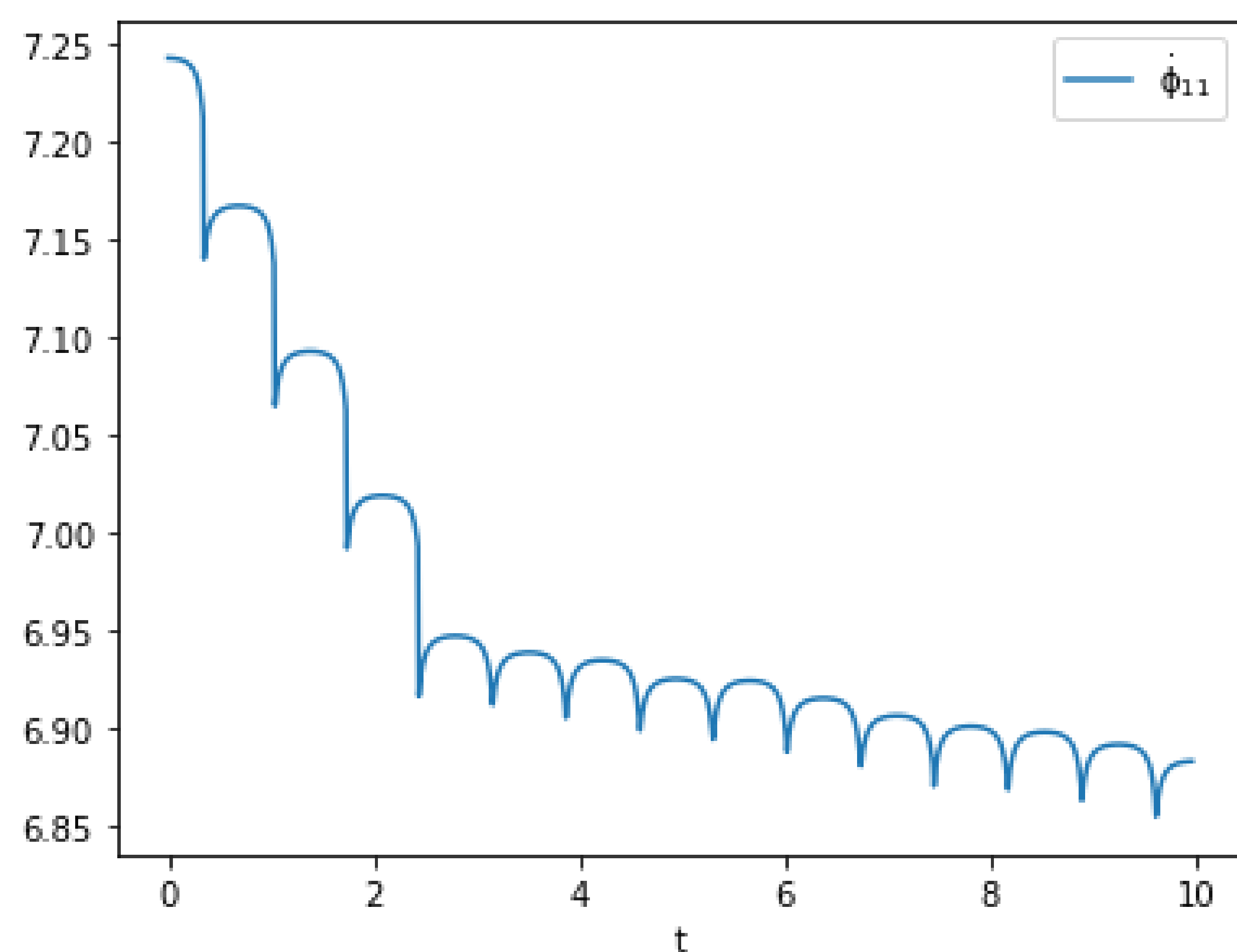
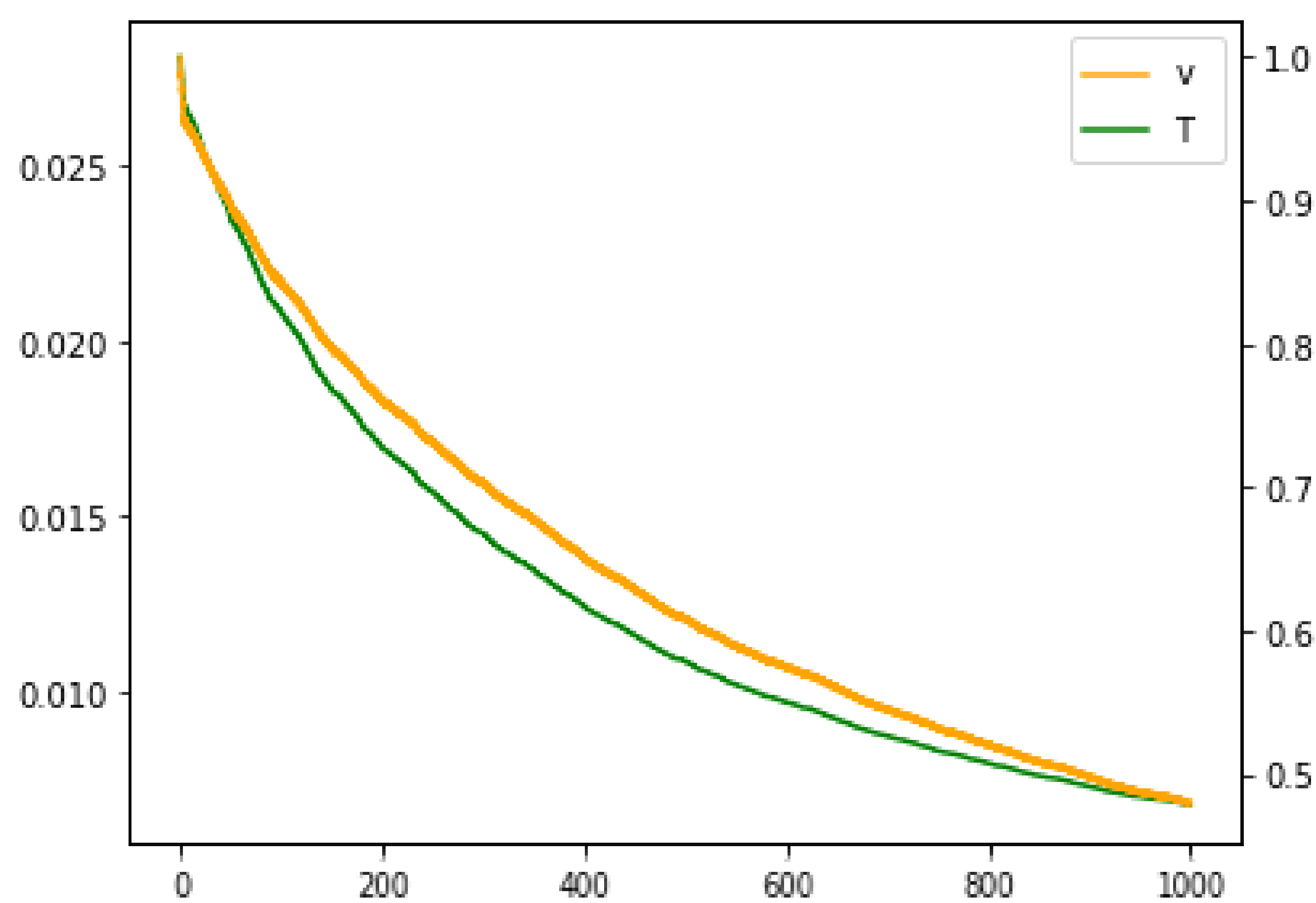


Рис. 9: Угловые скорости роликов  $\dot{\varphi}_1$ .

## Движение 2 ( $\nu_1(0) = 1, \nu_{2,3} = 0$ )

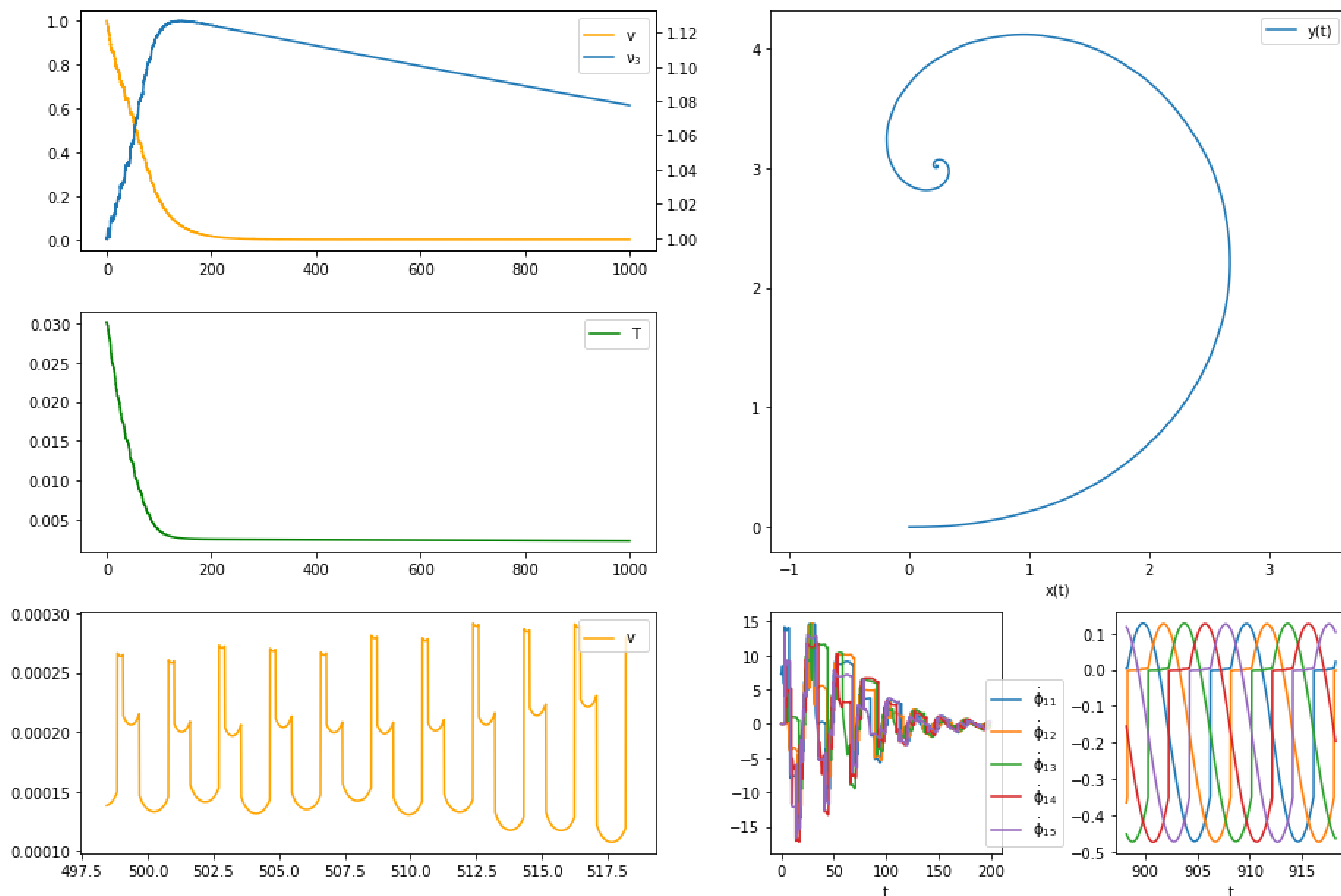


Кинетическая энергия  $T$  и скорость  $v$  центра масс

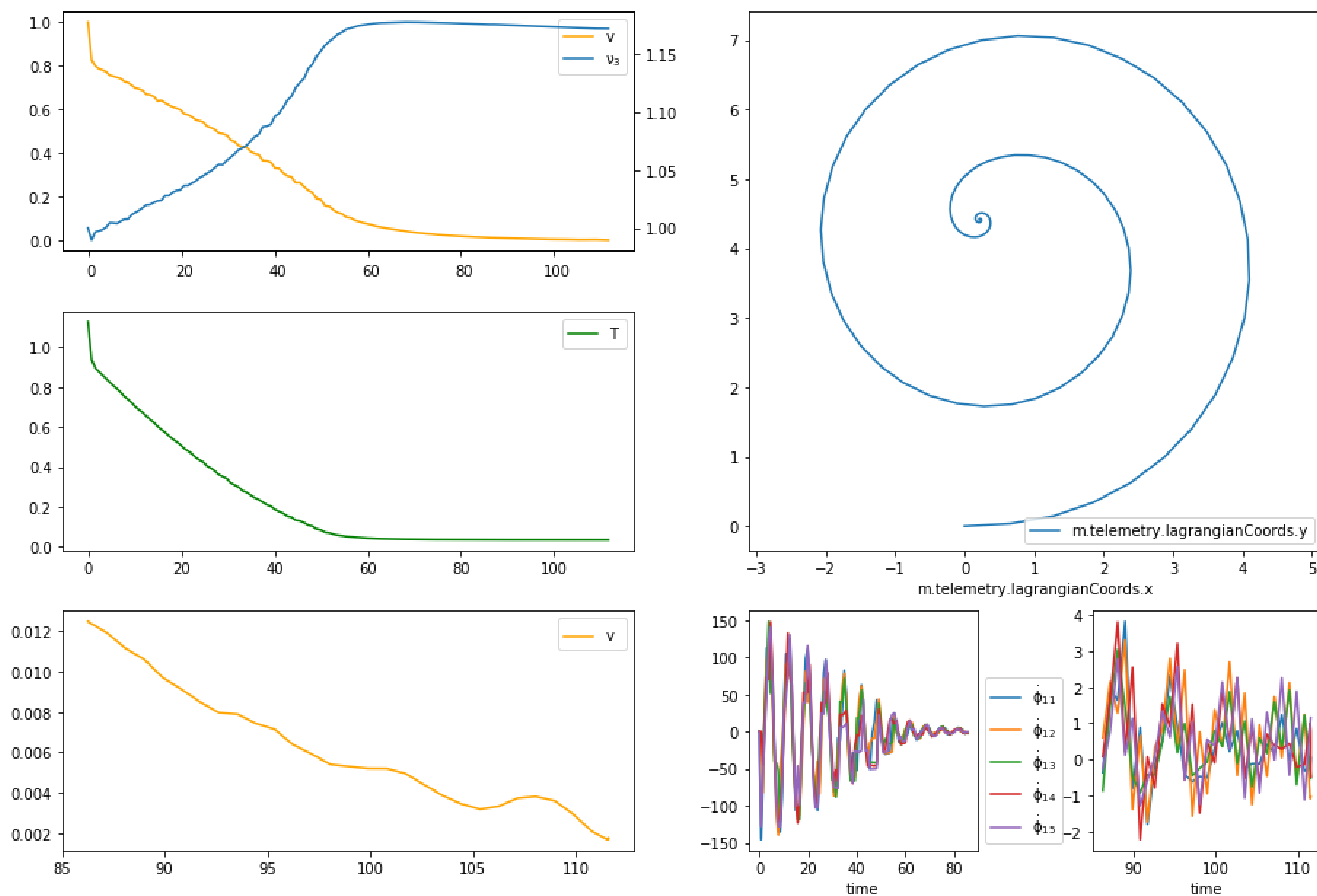
Угловые скорости роликов  $\dot{\varphi}_1$ .



## Глава 2. Движение 3 ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ )



## Глава 3. Случай вязкого трения. Движение 3





# Глава 3. Построение динамической модели экипажа на плоскости с трением

## Глава 3. Подход к моделированию динамики систем тел

- Введем избыточные координаты. Для каждого твердого тела системы:  $\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}$
- Для каждого твердого тела – уравнения Ньютона-Эйлера:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$$

$$J\dot{\omega} + [\omega, J\omega] = \mathbf{M} + \mathbf{L}, \quad \dot{\mathbf{q}} = (0, \quad \omega)$$

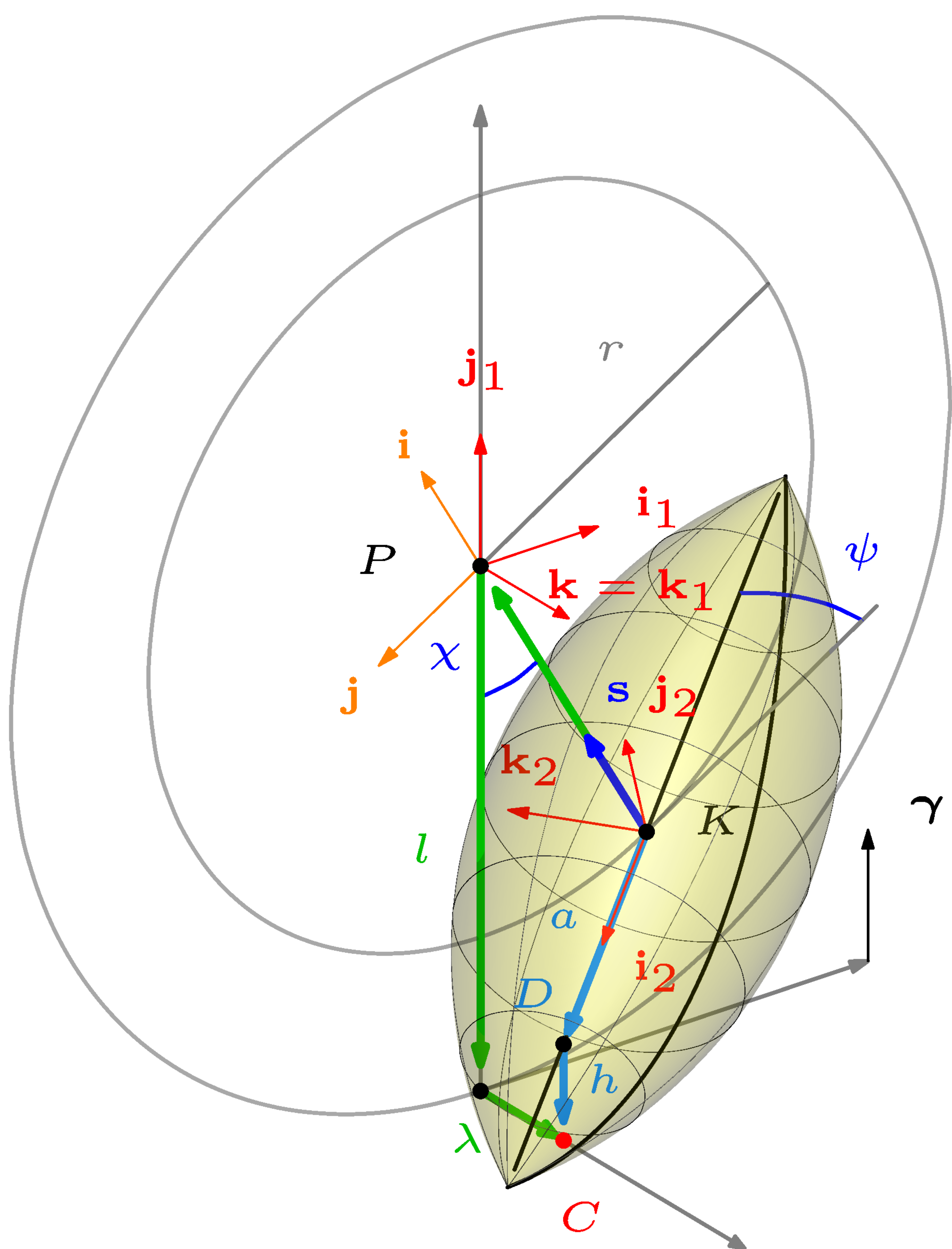
- ## ● Уравнения связей

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{q}, \omega) = 0$$

- ## ● Модель реакций связей

$$g(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{L}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) = 0$$

## Глава 3. Модель контактного взаимодействия



$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_K + r\mathbf{s} - l\mathbf{e}_z + \lambda\mathbf{k}_1$$

$$\lambda = \frac{(r\mathbf{s} - l\mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{k}_2}{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_K + [\omega_{\text{пол}}, \overrightarrow{KC}]$$

Ролик находится в контакте  $\Longleftrightarrow$   
 $\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_z < \cos \frac{\pi}{n}$  и  $z_C < l$ . Тогда исполь-  
 зуются уравнения:

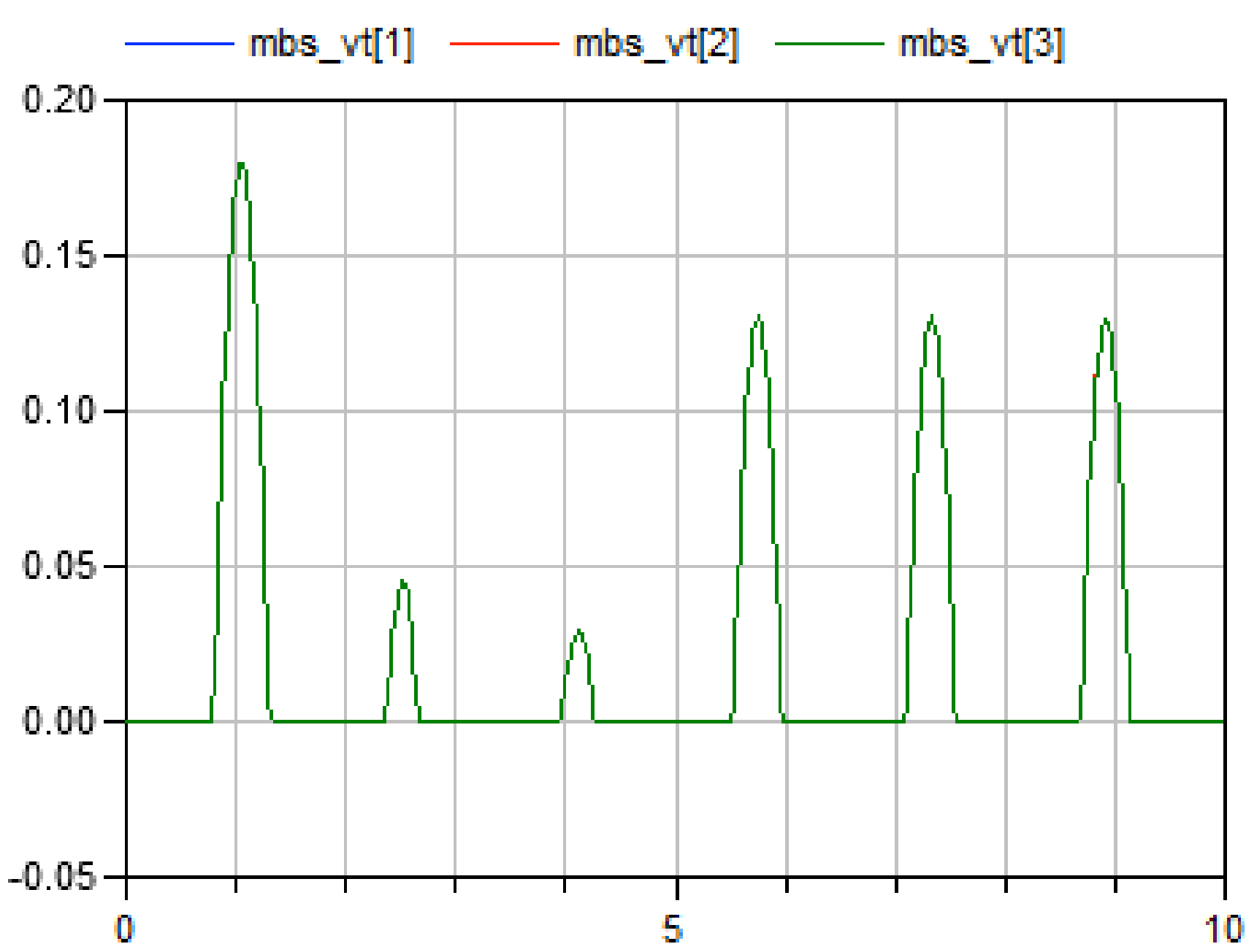
$$\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{e}_z = 0$$

$$\mathbf{R}_K = \mathbf{F}_{\text{Tp}} + N\mathbf{e}_z$$

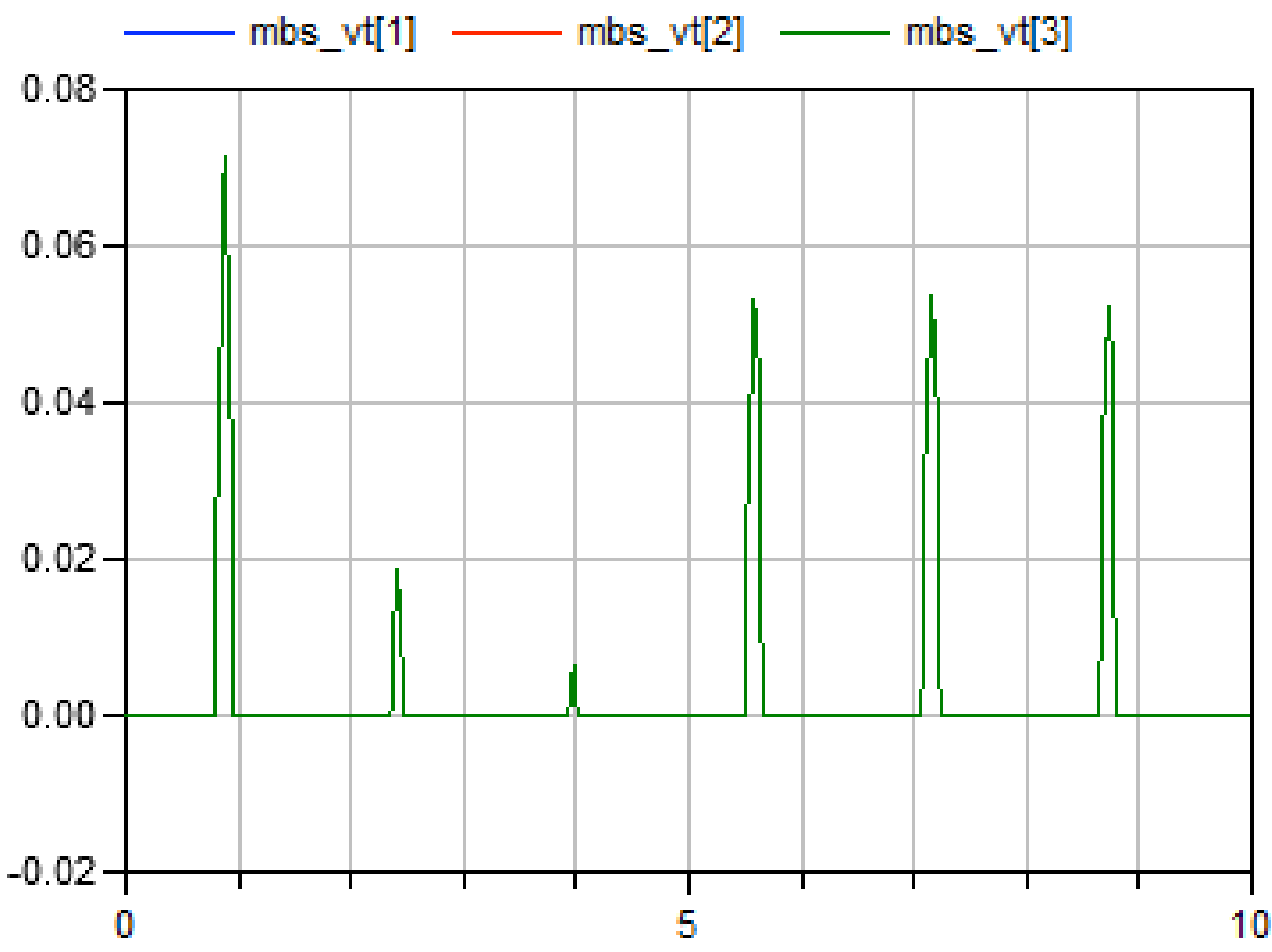
Иначе  $R_k = 0$



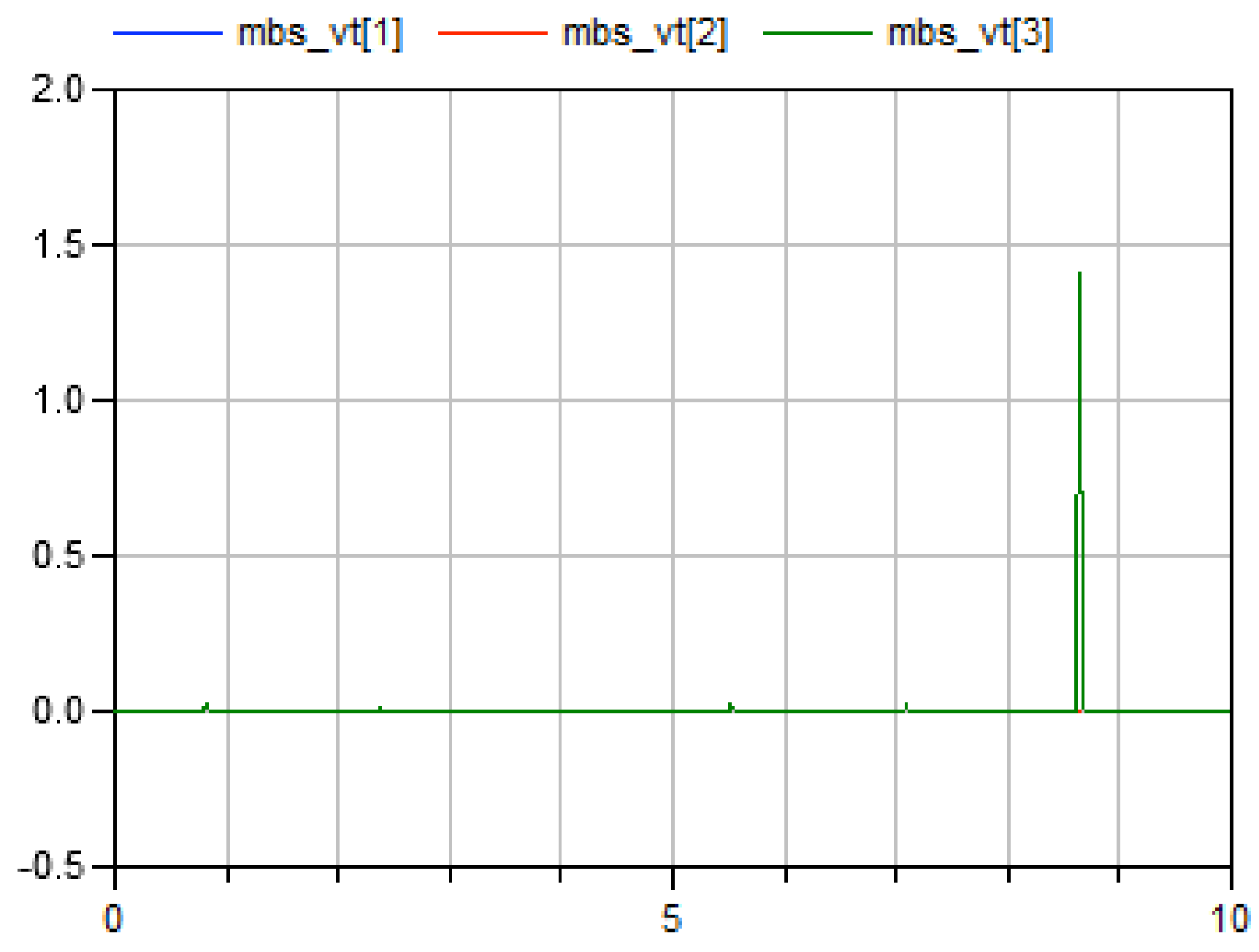
# Глава 3. Движение 1



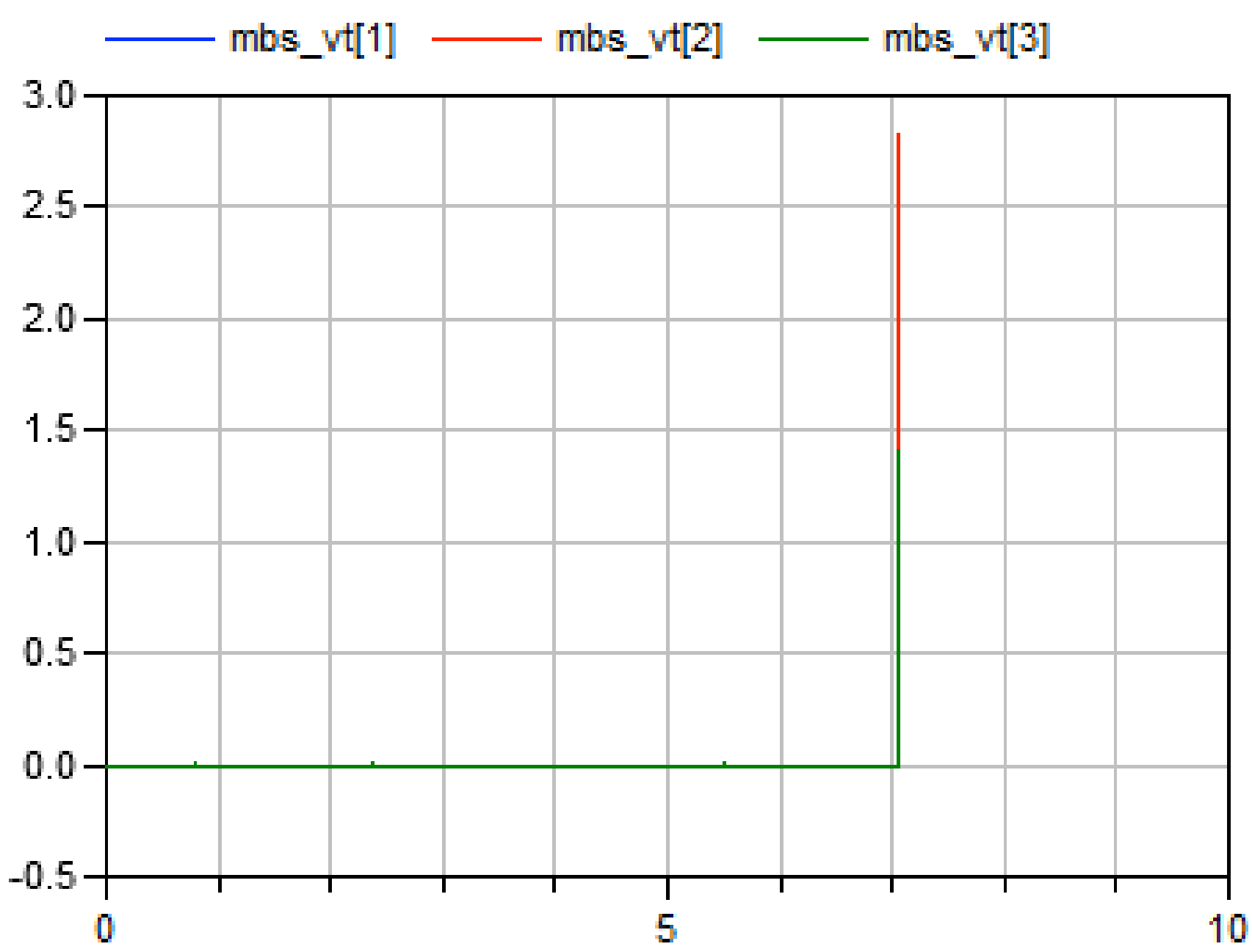
$\frac{m_{\text{ролл}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-1}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$



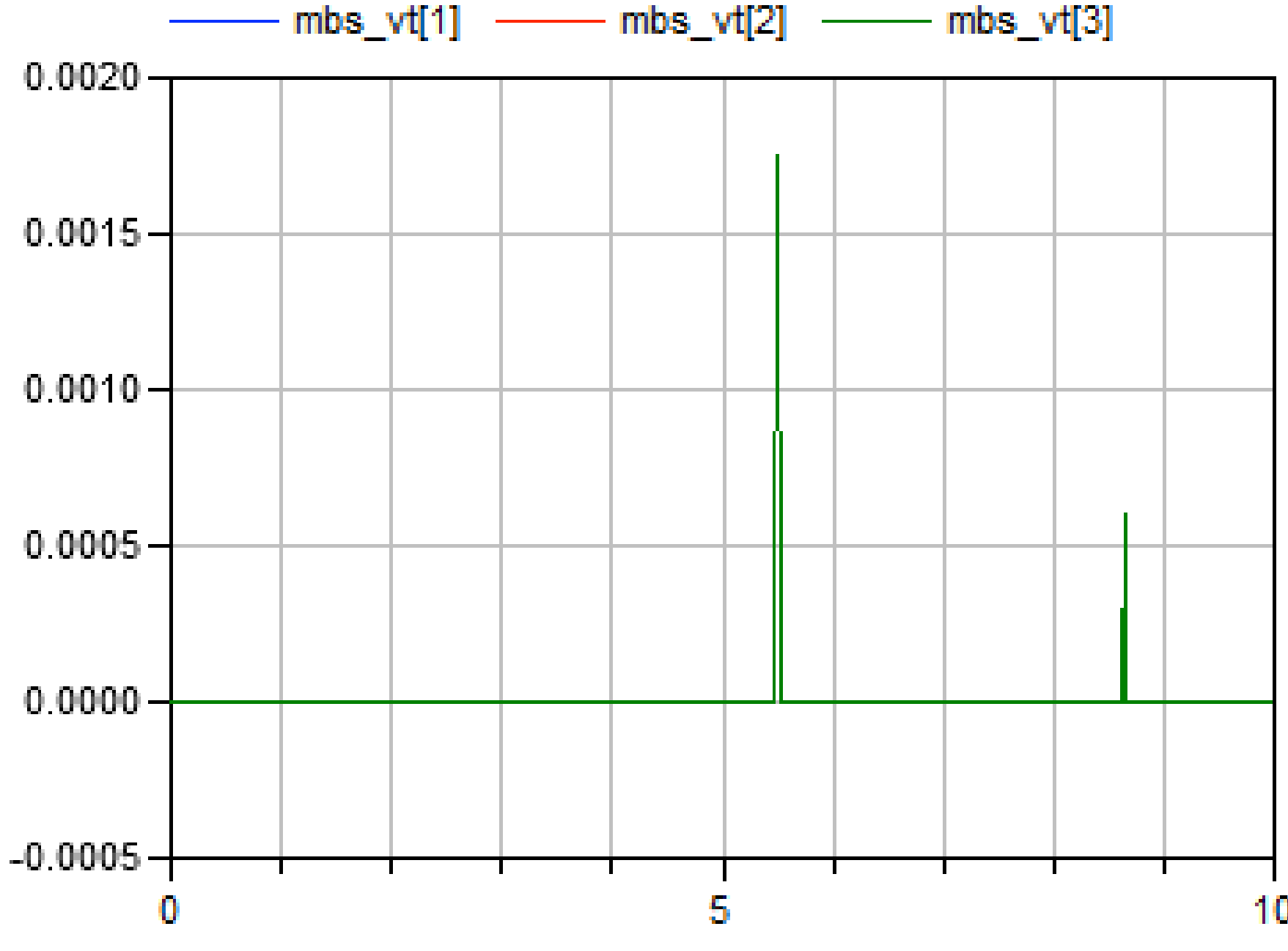
$\frac{m_{\text{ролл}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-2}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$



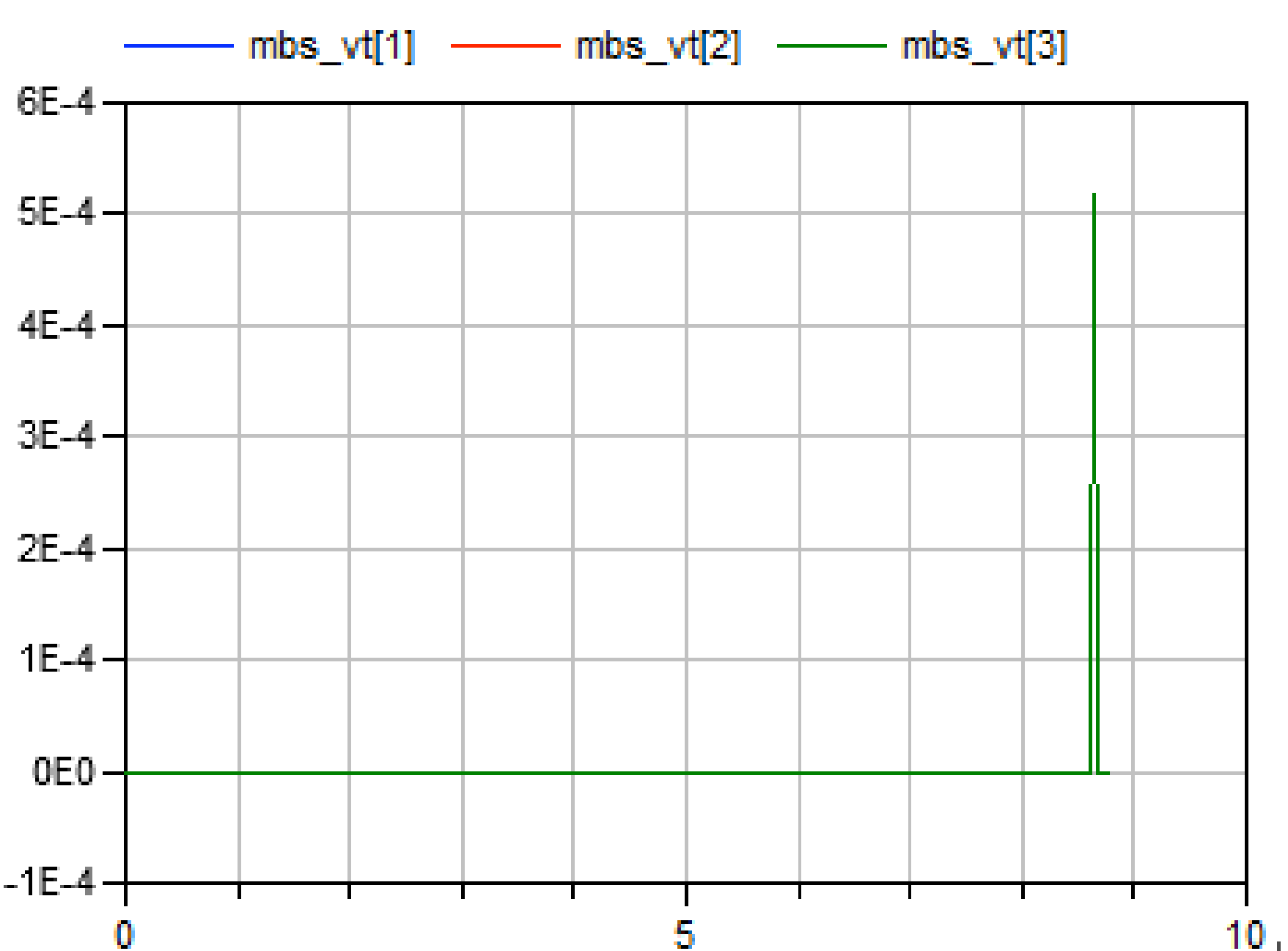
$\frac{m_{\text{ролл}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-3}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$



$\frac{m_{\text{ролл}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-4}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

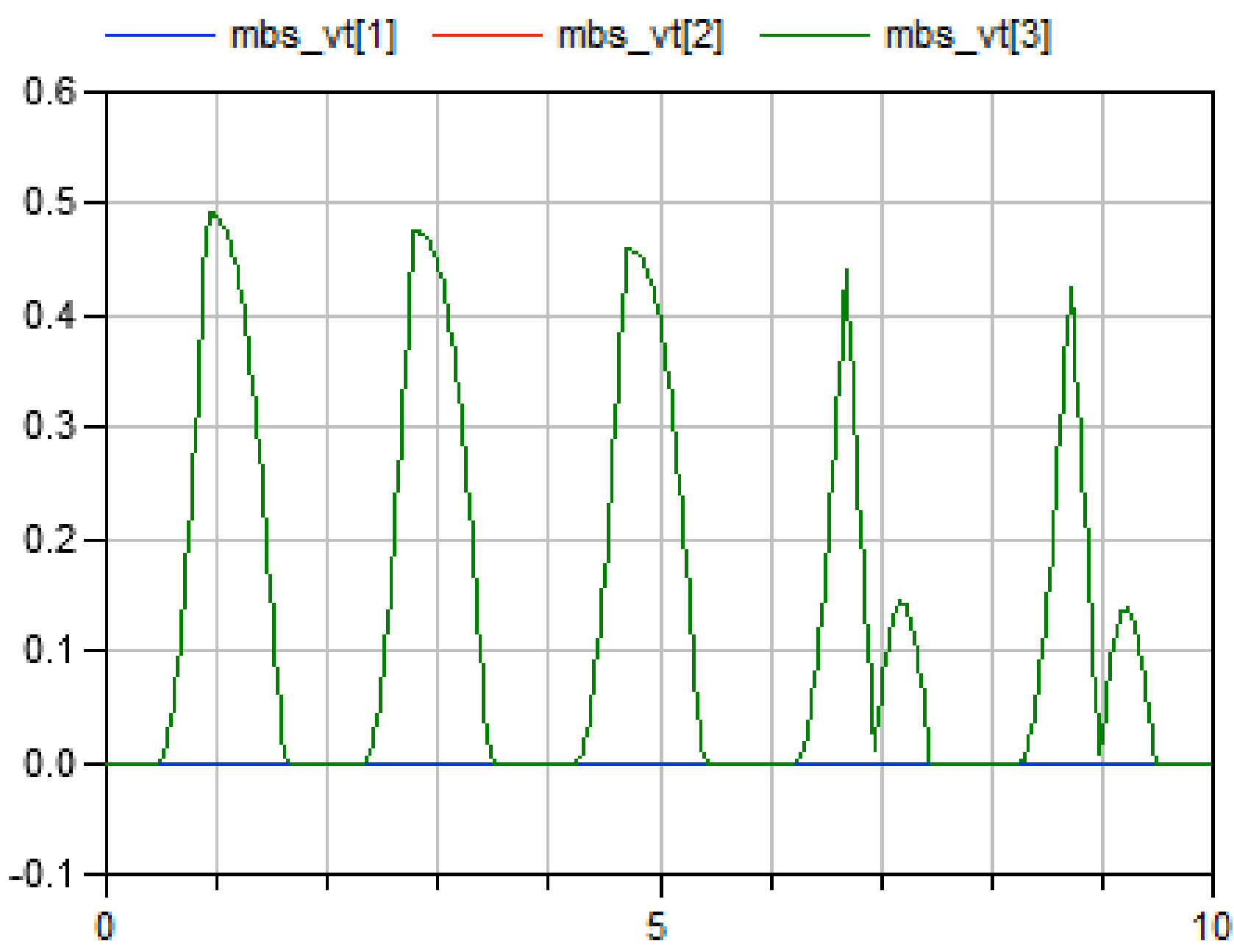


$\frac{m_{\text{ролл}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

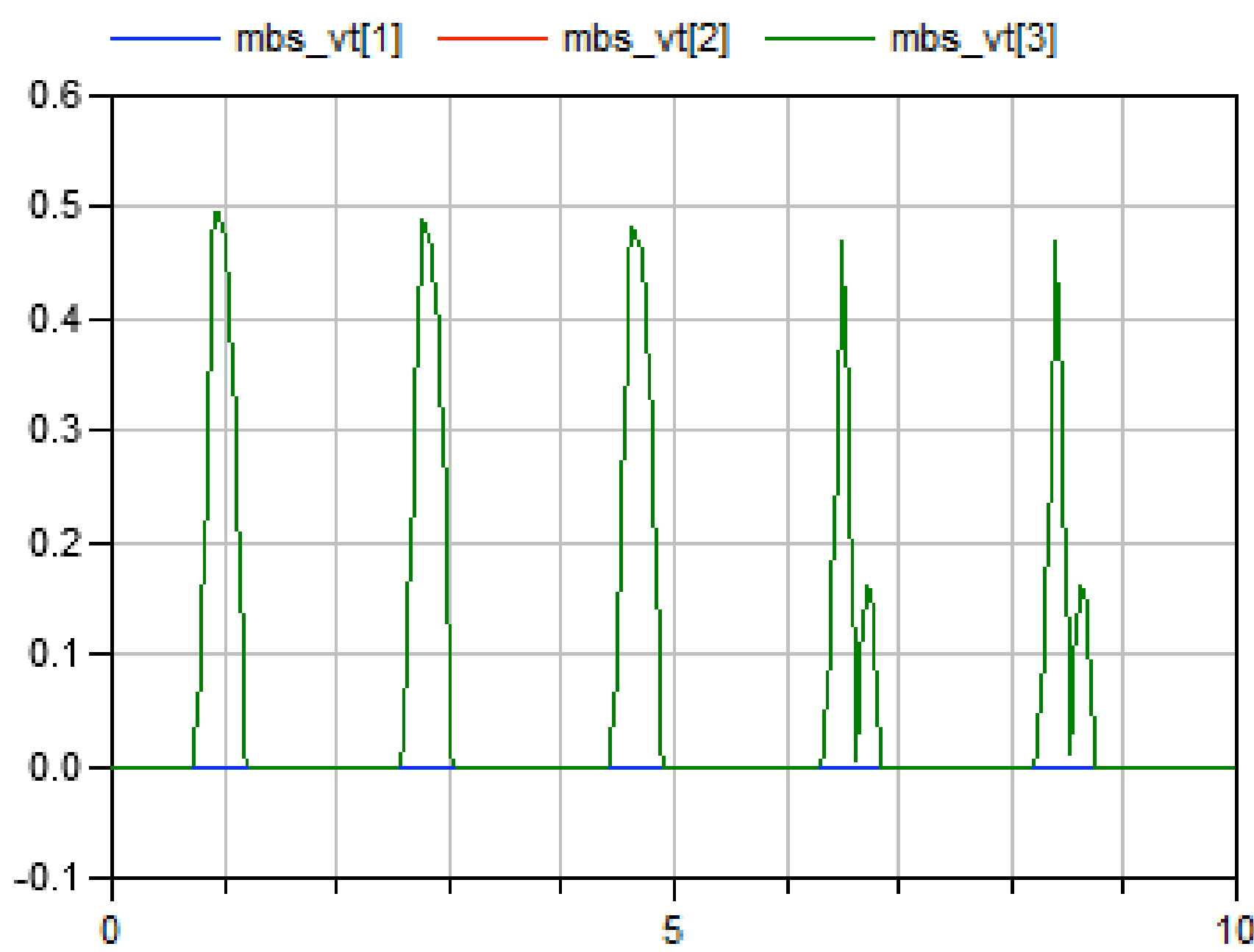


$\frac{m_{\text{ролл}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

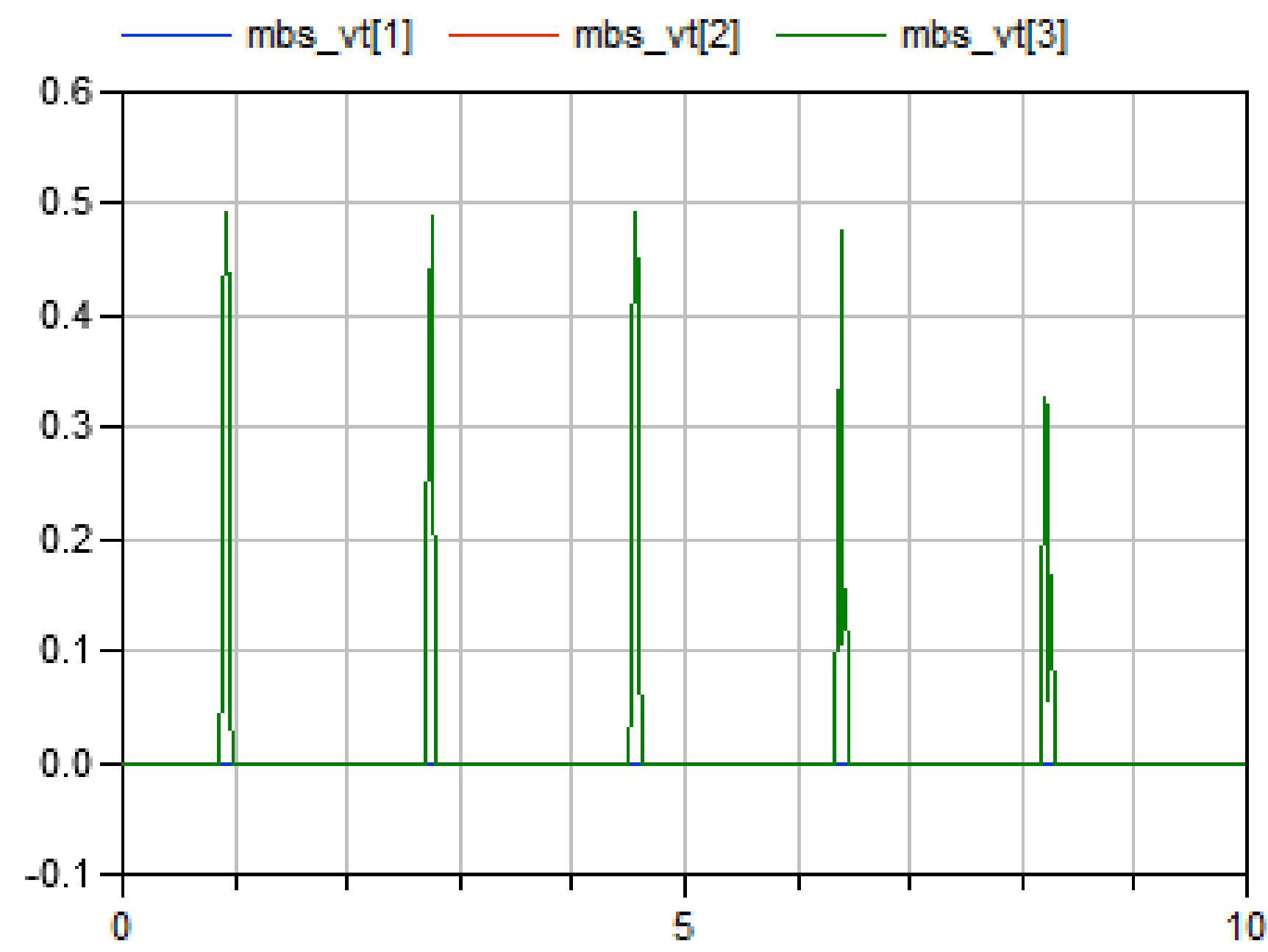
# Глава 3. Движение 2



$\frac{m_{\text{ролл}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-1}, v_0 = 1, \omega_0 = 0$



$\frac{m_{\text{ролл}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-2}, v_0 = 1, \omega_0 = 0$



$\frac{m_{\text{ролл}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-4}, v_0 = 1, \omega_0 = 0$

# Глава 3. Сравнение с безынерционной моделью

	Движение 1	Движение 2
$\frac{m_{\text{ролл}}}{m_{\text{к}}}$	$\Delta\theta$	$\max( \Delta x ,  \Delta y )$
$10^{-1}$	$\approx 1$	$\approx 1$
$10^{-2}$	$\approx 10^{-1}$	$\approx 0.5$
$10^{-3}$	$\approx 10^{-2}$	$\approx 10^{-1}$
$10^{-4}$	$\approx 10^{-3}$	$\approx 10^{-2}$
$10^{-5}$	$\approx 10^{-3}$	
$10^{-6}$	$\approx 10^{-4}$	

Проведено сравнение движений безынерционной модели экипажа и модели экипажа на плоскости с сухим трением. В таблице приведены величины отличий угла курса  $\theta$  экипажа и координат центра масс  $x, y$  к моменту безразмерного времени  $t = 10$ . Отличия уменьшаются с уменьшением порядка величины отношения массы одного ролика  $m_{\text{ролл}}$  к суммарной массе колеса  $m_{\text{к}}$ .



## Результаты, выносимые на защиту

1. Построены модели экипажа с омни-колесами, движущегося по горизонтальной плоскости по инерции: неголономная с идеальными связями и голономная с неидеальными. Обе модели учитывают инерцию роликов омни-колес.
2. Первая модель получена в предположении, что ролик омни-колеса не проскальзывает относительно плоскости (связи идеальны). Уравнения движения на гладких участках (т.е. между сменой ролика в контакте) получены аналитически в псевдоскоростях и представляют собой уравнения 33 порядка для экипажа с 3 колесами и 5 роликами на каждом колесе. С помощью теории удара расчет изменения обобщенных скоростей при смене ролика в контакте сведен к решению системы линейных алгебраических уравнений, имеющей единственное решение в т.ч. при кратном ударе.
3. Аналитически показано, что при равенстве осевого момента инерции ролика нулю, её уравнения движения совпадают с уравнениями движения безынерционной модели.
4. Показано, что линейный первый интеграл, существующий в безынерционной модели, разрушается при осевом моменте инерции, отличном от нуля. При этом скорость изменения значения этого интеграла пропорциональна осевому моменту инерции ролика. Найдены линейные интегралы, связывающие угловую скорость платформы экипажа и скорости собственного вращения роликов, не находящихся в контакте.
5. В ходе численных экспериментов обнаружен эффект быстрого убывания скорости центра масс по сравнению с угловой скоростью платформы экипажа.
6. Модель с неидеальными голономными связями реализована в системе автоматического построения численных динамических моделей для вязкого трения и для регуляризованного сухого трения. Для этого найдены геометрические условия контакта роликов омни- и тесанит-колес и опорной плоскости.
7. Для различных моделей экипажа с омни-колесами, рассмотренных в работе – безынерционной модели и модели экипажа с массивными роликами на плоскости с регуляризованным сухим трением, а также для моделей экипажа с массивными роликами на абсолютно шероховатой плоскости и на плоскости с вязким трением – показана их взаимная согласованность при стремлении параметров – момента инерции ролика и коэффициента вязкого трения – к нулю или к бесконечности, соответственно.