

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И МЕХАТРОНИКИ

Герасимов Кирилл Вячеславович

**Динамика роликонесущего экипажа  
с учетом инерции роликов и трения**

Диссертация на соискание степени кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.02.01 – теоретическая механика

Научные руководители:  
д.ф.-м.н. проф. Косенко И.И.  
к.ф.-м.н. доц. Зобова А.А.

Москва — 2018

# Оглавление

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Уравнения движения экипажа на омни-колесах с учетом динамики роликов</b>                   | <b>12</b> |
| 1        | Постановка задачи . . . . .   | 12        |
| 2        | Уравнения движения . . . . .  | 15        |
| 2.1      | Безынерционная модель . . . . .   | 21        |
| <b>2</b> | <b>Смена ролика в контакте с опорной плоскостью</b>   | <b>24</b> |
| 1        | Наложение связи при смене ролика в контакте . . . . .   | 25        |
| 1.1      | Основное уравнение теории удара . . . . .   | 26        |
| 1.2      | Разрешимость основного уравнения теории удара при наложении дифференциальных связей . . . . . | 28        |
| 1.3      | Изменение кинетической энергии . . . . .  | 31        |
| 2        | Примеры движений . . . . .  | 31        |
| <b>3</b> | <b>Динамика экипажа на омни-колесах с трением</b>   | <b>37</b> |
| 1        | Метод построения механической модели системы твердых тел .                                    | 38        |
| 2        | Отслеживание контакта роликов при движении омни-колеса . .                                    | 39        |
| 3        | Отслеживание контакта в случае <i>тесанит</i> колеса . . . . .                                | 43        |
| 4        | Моделирование трения в контакте . . . . .   | 47        |
| 5        | Результаты численного моделирования . . . . .   | 48        |
| 5.1      | Верификация модели с сухим трением . . . . .  | 48        |
| 5.2      | Качественное сравнение модели с вязким трением и безынерционной модели . . . . .              | 59        |

# Введение

Омни-колеса (в русской литературе также используется название роликоне-сущие колеса) – это колеса особой конструкции, позволяющей экипажу двигаться в произвольном направлении, вращая колеса вокруг их собственных осей и не поворачивая их вокруг вертикали. На ободе такого колеса располагаются ролики, которые могут свободно вращаться вокруг своих осей, жестко закрепленных в диске колеса. Существуют два варианта расположения осей роликов: первый (собственно омни-колеса [1]) – оси роликов являются касательными к ободу колеса и, следовательно, лежат в его плоскости; второй (*mesanite wheels* [2]) – оси роликов развернуты вокруг нормали к ободу колеса на постоянный угол, обычно  $\pi/4$ .

За счет своей конструкции омни-колесо может катиться вперед или назад, как обыкновенное колесо, кроме того, диск колеса может двигаться поступательно под углом к своей плоскости за счет вращения ролика, контактирующего с опорной поверхностью. Благодаря этому мобильные экипажи, оснащенные такими колесами, обладают повышенной маневренностью и применяются для выполнения различных работ в условиях стесненного пространства, например, для перемещения грузов. Свойства омни-колес мотивируют инженеров и ученых находить новые и новые их применения, подчас самые неожиданные. Сложность их устройства, обусловленная наличием роликов, на протяжении последних десятков лет делает системы с омни-колесами предметом исследований, в которых движение описывается все более точно.

Большинство известных моделей омниколесных экипажей построено в приближении, не учитывающем движение роликов. Как правило, это обусловлено двумя причинами. Во-первых, относительно большое количество твердых тел в полной системе затрудняет аналитическое исследование и замедляет численное. Во-вторых, при рассмотрении динамики роликов возникает необходимость моделировать переход колес экипажа с одного ролика на другой. Настоящая работа посвящена построению динамических моделей омни-колесного экипажа, учитывающих движение всех роликов. При построении таких моделей требуется описать движение большого количества твердых тел, важен способ задания контакта роликов и опорной поверхности, требуется моделирование перехода колеса экипажа с одного ролика на другой.

Поэтому обзор литературы построен следующим образом: сначала будут описаны работы, непосредственно посвященные исследованиям омни-экипажей; далее будут упомянуты работы по формализмам построения уравнений систем многих твердых тел, наиболее близко относящиеся к представленной работе; будут даны необходимые ссылки на работы по теории удара; в конце обзора обсуждаются работы по языку Modelica, используемому в последней главе работы.

## ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Одной из широких областей, в которых омни-колеса находят применение, является изучение мобильных роботов [3–6]. Экипажи с омни-колесами и колесами *tessalit* [7] подробно описаны в обзорных работах в этой области [8–12] как с точки зрения теоретической механики, так и с позиции технической реализации систем. Геометрия поверхности ролика отдельно рассмотрена в [2], где также выполнена аппроксимация последней поверхности тором и сформулировано условие корректности конфигурации омниколесного экипажа: оси всех роликов, контактирующих с опорной плоскостью, не должны проходить через одну точку или быть параллельны, иначе экипаж не способен совершать ряд движений.

Движение экипажа с омни-колесами по абсолютно шероховатой плоскости рассмотрено в [13–17]. Уравнения движения произвольной конфигурации экипажа получены, например, в [14], где также найдены их интегралы и инвариантная мера. Для конфигурации с тремя колесами в двух перпендикулярных плоскостях изучается устойчивость движений. Составлены уравнения управляемого движения методом Я.В.Татарина (уравнения в лаконичной форме) [18, 19]. В [20] этот метод получения уравнений движения проиллюстрирован на примере омниколесного экипажа, а также рояльного колеса и экипажа с дифференциальным приводом.

В работе [1, 21] рассмотрена симметричная конфигурация экипажа с омни-колесами, в которой центры колес расположены в углах правильного треугольника, а их плоскости вертикальны и перпендикулярны радиусам-векторам центров колес, выпущенным из центра треугольника. Описана ее кинематика, и рассматриваются движения по инерции и при постоянных напряжениях, подаваемых на моторы постоянного тока, установленные в осях колес. Дана

оценка мощности, потребляемой моторами, и показано, что она наименьшая при движении в направлении оси одного из колес. Строится алгоритм отслеживания направления движения экипажа. Развитием этой работы стало рассмотрение экипажа со смещенным центром масс [22, 23], где построены траектории свободного движения и изучены вопросы существования движений по прямой и по окружности.

Движение экипажа произвольной конфигурации по инерции по абсолютно шероховатой плоскости рассматривается и в [24], где также строятся различные примеры движения по инерции, в том числе, периодического; получены уравнения движения омниколесного экипажа на сфере. Позже в [25] изучена управляемость экипажа произвольной конфигурации на абсолютно шероховатой плоскости и осуществимость движения по любой наперед заданной траектории.

Кроме экипажей,двигающихся за счет взаимодействия колес и опорной поверхности, изучаются и другие конструкции, например, шарообразные роботы, управляемые изнутри симметричным омниколесным экипажем [26], либо двумя омниколесами, установленными на сфере меньшего радиуса, находящейся внутри внешней сферы [27]. Последняя статья содержит также более широкий обзор литературы о роботах-шарах. Кроме того, в ней найдены условия, при которых возможно движение робота-шара вдоль произвольной траектории. Работа выполнена в формализме алгебры кватернионов. Известны и конструкции шарообразных роботов, управляемых двумя обычными колесами [28], однако роботы, рассмотренные в [27], имеют преимущество в способности нести полезный груз. Омни-колеса можно применять не только для перемещения в пространстве, но и для изменения ориентации тел. К примеру, в [29, 30] предлагается использовать сферу, приводимую в движение омни-колесами, касающимися ее извне, в качестве корпуса тренажера для пилотов. В работе [30] рассматривается точечный контакт колес и сферы, в [29] их взаимодействие задается в контактной модели Герца.

Инерцией движения роликов в большинстве работ пренебрегают. Однако в работе [31], вышедшей летом 2018 года, рассматривающей движение экипажа с четырьмя колесами *tesanit*, учтено движение контактного ролика с учетом вязкого трения в осях колес и роликов. Строятся уравнения движе-

ния Апделя. При этом предполагается, что точка контакта всегда находится строго под центром колеса. Изучается структура управляющих моментов на примере движения экипажа по окружности, а также устойчивость движения в линейном приближении. Отдельной областью интересов является определение коэффициентов в уравнениях движения [32] в случаях, когда технические характеристики систем оказываются неизвестны, либо изменяются в процессе движения.

Отметим отдельно многочисленные работы по омни-роботам, содержащие описания практических реализаций экипажей. Такие экипажи часто используются на соревнованиях мобильных роботов. К примеру, в [33] описывается кинематика и строится управление симметричным омниколесным экипажем в условиях ограниченности моментов, прилагаемых двигателями. В [34] строится гибридный экипаж с двумя обычными колесами и двумя ролико-несущими. Весьма распространены работы, описывающие низкоуровневую техническую реализацию экипажей, такие как [35–37]. В практике мобильных роботов необходимой задачей является навигация. В [38] рассматривается способ навигации омни-колесных экипажей с помощью так называемого многочастичного фильтра [39], широко распространенного в робототехнике метода решения нелинейных задач оценивания [40]. Для омни-колес важен характер поверхности, по которой экипаж движется. Поэтому в работе [41] строится метод определения типа материала опорной поверхности с помощью оценивания вибраций при движении с целью адаптации управления: движение по мягким поверхностям естественным образом оказывается медленнее, а движение по жестким вызывает большие вибрации, что требуется компенсировать управлением. Предлагается также модель, в которой колеса экипажа подпружинены для компенсации неровности поверхности [42].

Следующие работы посвящены оптимальному управлению движением омни-экипажей. В работе [43] показано, что перемещение омни-экипажа между двумя точками на плоскости происходит быстрее всего не по прямой, а по дуге окружности. В [44] оптимальные по времени траектории рассмотрены существенно детальнее, их построение проводится с помощью принципа максимума Понтрягина, и строится минимальная полная классификация таких траекторий. Класс работ о построении управляемых движений весьма ши-

рок [45–48]. Встречаются работы, рассматривающие ситуацию частичного отказа приводов [27, 49].

Интересны работы, описывающие все стадии разработки робототехнической платформы с омни-колесами, от кинематики и уравнений движения до построения (оптимального) управления, включающие также технические реализации экипажей [50–52]. В [53] построено управление с объездом препятствий. В [54] рассматривается адаптивное управление с учетом переменных коэффициентов трения в точках контакта, а также массы платформы.

Перейдем теперь к обзору формализмов, используемых при построении динамических уравнений систем твердых тел.

Для описания систем многих тел, в том числе, систем, организованных иерархически, известны различные подходы [55–59]. Классические подходы основаны на теории графов [55, 59]. Разработаны рекурсивные методы для описания древовидных структур [56]. Весьма обширный обзор существующих методов для описания систем тел, в том числе, с замкнутыми кинематическими цепями, проведен в [57]. Работа [58], кроме непосредственно методов описания систем тел, уделяет отдельное внимание историческому контексту развития данной области, в частности, констатируя слабопреодолимые затруднения, возникающие в аналитическом исследовании из-за нелинейностей и количества тел в системах, а также подробно освещая их разрешение с помощью вычислительной техники, как основной метод их изучения и проектирования.

В отношении контактного взаимодействия твердых тел, при описании динамики омни-колес и экипажей можно либо идти по пути наложения дифференциальных связей отсутствия проскальзывания, либо вводить силу трения в контакте. Динамика систем с дифференциальными связями подробно описана, например, в [60, 61]. В [61] и [62], в частности, подробно обсуждается вопрос обоснованности подобных идеализаций. В главах 1 и 2 настоящей работы принимается модель точечного контакта ролика и опорной плоскости. Для получения уравнений движения таких систем часто пользуются методами Аппеля либо Лагранжа первого рода [63–65]. В силу объема требуемых выкладок в рассматриваемой системе мы применили метод получения уравнений движения в лаконичной форме Я.В. Татарина [18, 19].

В отсутствии проскальзывания отдельного рассмотрения требует смена ролика в контакте с опорной плоскостью. Явления, возникающие при подобных движениях, описываются теорией удара [65–67]. В [67] приведено формальное построение этой теории, и обсуждается ее физическая обоснованность. Всестороннее современное рассмотрение механики систем с односторонними связями с учетом их моделирования с помощью вычислительной техники содержится в [68], а также в серии работ [69–79]. Уравнения движения для систем с односторонними связями в интегральной форме построены в [80], и там же рассмотрены удары, в частности, о дифференциальные связи.

Постановка задачи с сухим трением в контакте между роликом и опорной плоскостью приводит к дальнейшему усложнению задачи. Методы исследования систем с сухим трением описаны в [81–87], а также [88]. Исследование омни-колесного экипажа с учетом динамики всех роликов и трения возможно лишь численно, и здесь, кроме понимания природы трения, требуется подходящий формализм для создания компьютерной модели экипажа. Нами был выбран формализм языка Modelica [89–91], примененный ранее к задачам динамики систем тел [92–95, 95–101]. Этот метод уже использовался и при изучении динамики омниэкипажей [102–105]. В этих работах рассматривается контакт с трением, но ролики имеют существенно упрощенную форму – считаются массивными цилиндрами либо конусами. Автор утверждает, что полученная им модель слишком медленна и сложна, и потому строит еще одну упрощенную модель, полностью пренебрегая инерцией роликов, но учитывая трение в направлении оси ролика. В [104] изучается вопрос заноса омни-колесных экипажей при торможении в упрощенной модели.

Первая глава представленной работы, где получены уравнения движения экипажа с массивными роликами без проскальзывания, принята к печати [106]. Вторая глава, содержащая модель перехода с одного ролика на другой с позиции теории удара, принята к печати [107]. В работах [108, 109] опубликованы результаты третьей главы, в которой экипаж моделируется в постановке с регуляризованным сухим трением в точечном контакте ролика и опорной плоскости. Эти результаты доложены на конференциях и опубликованы в их сборниках трудов [110–117].



## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Настоящая работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Во введении дано описание предметной области и цели данной работы, выполнен обзор литературы об омни-колесах и экипажах, оснащенных ими, о динамике систем тел, в том числе, с односторонними связями, ударами и трением, а также составлено краткое содержание работы.

Целью работы является изучение неуправляемого движения роликонесущего экипажа по горизонтальной плоскости с учетом инерции роликов и трения в двух постановках. В первой постановке опорная плоскость абсолютно шероховата, т.е. проскальзывание между роликом в контакте и плоскостью отсутствует. При этом предполагается, что при смене ролика в контакте происходит мгновенное согласование скоростей системы в соответствии с новыми связями (удар связями). Во второй между контактным роликом и опорной плоскостью действует сила сухого трения Кулона.

Экипаж состоит из несущей платформы и трех одинаковых омни-колес, центры которых расположены в вершинах правильного треугольника, а плоскости перпендикулярны биссектрисам соответствующих углов. Омни-колесо моделируется абсолютно твердым диском и некоторым количеством распределенных по его окружности весоных роликов, свободно вращающихся вокруг своих осей, направленных вдоль касательных к окружности.

В первой и второй главе работы рассматривается движение экипажа по абсолютно шероховатой плоскости, т.е. предполагается, что проскальзывание между опорным роликом и плоскостью отсутствует. Уравнения движения получены в явном виде с использованием формализма лаконичных уравнений Я.В. Татаринова. Изучена структура уравнений, найдены первые интегралы и проведено сравнение с уравнениями движения безынерционной модели. Показано, что если момент инерции ролика относительно его оси равен нулю, то уравнения совпадают с уравнениями безынерционной модели.

Во второй главе рассмотрена задача о смене ролика в контакте: при повороте колеса вокруг своей оси в контакт с плоскостью приходит новый ролик, скорость которого, вообще говоря, не согласована со связями, при этом возникает проскальзывание. Предполагается, что проскальзывание прекращается

за бесконечный малый промежуток времени. Составлены линейные алгебраические уравнения, определяющие обобщенные скорости после смены ролика в контакте в соответствии с теорией удара. Таким образом, численное моделирование движения экипажа состоит из решения задачи Коши уравнений, полученных в первой главе, пока в контакте находится один и тот же ролик, и решения линейных алгебраических уравнений при смене ролика для получения начальных условий для следующего гладкого участка. Получены и проанализированы численные решения для симметричной конфигурации экипажа.

В третьей главе построена динамическая модель экипажа на плоскости с сухим трением Кулона-Амонтона, регуляризованным в окрестности нуля по скоростям участком линейной функции насыщения с достаточно большим угловым коэффициентом. Особое внимание уделяется вопросу моделирования неудерживающей связи в контакте ролика и горизонтальной плоскости, отслеживанию точки контакта ролика и опорной плоскости, а также алгоритмической реализации процесса переключения контакта от ролика к ролику при качении омни-колеса. Динамическая модель построена в формализме объектно-ориентированного моделирования на языке Modelica. Выполнена верификация динамической модели с использованием безынерционной модели.

В заключении перечислены результаты работы.

По результатам работы опубликованы и приняты к печати в рецензируемых журналах, реферируемых в международных базах WebOfScience, Scopus, RSCI и входящих в список ВАК, следующие статьи [106–109, 112, 115]

Результаты докладывались аспирантом на ряде международных и всероссийских конференциях: Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам 2018, Суздаль, Россия, 6-11 июля 2018; 20-е Международное рабочее совещание по компьютерной алгебре (Дубна, 21-22 мая 2018), Дубна, Россия, 21-22 мая 2018; Ломоносовские Чтения - 2018, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 16-25 апреля 2018; Ломоносовские чтения - 2017, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 17-26 апреля 2017; 11th International Modelica Conference Versailles, France, September 21-23, 2015. Результаты также были представлены аспирантом на семинаре

Аналитическая механика и теория устойчивости (имени В.В. Румянцева) под руководством д.ф.-м.н. проф. А.В. Карапетяна в 2017 и 2018 г. и на семинаре Динамика относительного движения под руководством д.ф.-м.н. проф. В.Е. Павловского на механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова в 2018 г.

# Глава 1

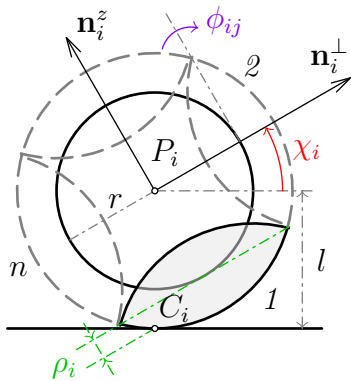
## Уравнения движения экипажа на омни-колесах с учетом динамики роликов

### 1 Постановка задачи

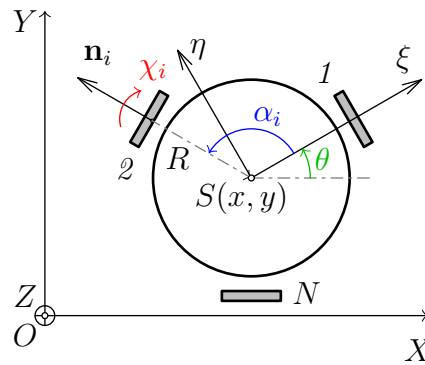
Рассмотрим экипаж с омни-колесами, движущийся по инерции по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Экипаж состоит из платформы и  $N$  одинаковых омни-колес, плоскости которых относительно платформы неподвижны. Каждое колесо может свободно вращаться относительно платформы вокруг собственной оси, расположенной горизонтально, и на каждом из них установлено  $n$  массивных роликов, так что оси роликов параллельны касательным к контурам дисков колес (см. левую часть фиг. 1.1). Ролики расположены по контуру дисков колес и показаны в виде затемненных областей, либо областей, ограниченных штриховой линией. Они пронумерованы от 1 до  $n$ . Таким образом, система состоит из  $N(n + 1) + 1$  абсолютно твердых тел.

Введем неподвижную систему отсчета так, что ось  $OZ$  направлена вверх, а плоскость  $OXY$  совпадает с опорной плоскостью. Введем также подвижную систему отсчета  $S\xi\eta Z$ , жестко связанную с платформой экипажа так, что плоскость  $S\xi\eta$  горизонтальна и содержит центры всех колес  $P_i$ . Будем считать, что оси колес лежат на лучах, соединяющих центр масс  $S$  плат-

формы и центры колес (см. правую часть фиг. 1.1), а расстояния от центров колес до  $S$  одинаковы и равны  $R$ . Геометрию установки колес на платформе зададим углами  $\alpha_i$  между осью  $S\xi$  и осями колес (см. левую часть фиг. 1.1). Будем считать, что центр масс всей системы совпадает с точкой  $S$  (отсюда следует, что  $\sum_k \cos \alpha_k = \sum_k \sin \alpha_k = 0$ ). Введем также три орта, жестко связанных с дисками колес: орт оси  $i$ -го колеса  $\mathbf{n}_i = \mathbf{SP}_i/|\mathbf{SP}_i|$  и орты  $\mathbf{n}_i^\perp$  и  $\mathbf{n}_i^z$ , лежащие в плоскости диска колеса, причем вектор  $\mathbf{n}_i^z$  вертикален при нулевом повороте колеса  $\chi_i$ . Положения центров роликов на колесе определим углами  $\kappa_j$  между ними и направлением, противоположным вектору  $\mathbf{n}_i^z$ .



Фиг. 1.1. Колесо



Фиг. 1.2. Экипаж

Положение экипажа будем задавать следующими координатами:  $x, y$  — координаты точки  $S$  на плоскости  $OXY$ ,  $\theta$  — угол между осями  $OX$  и  $S\xi$  (угол курса),  $\chi_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) — углы поворота колес вокруг их осей, отсчитываемые против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $\mathbf{n}_i$ , и  $\phi_j$  — углы поворота роликов вокруг их собственных осей. Таким образом, вектор обобщенных координат имеет вид

$$\mathbf{q} = (x, y, \theta, \{\chi_i\}_{i=1}^N, \{\phi_k\}_{k=1}^N, \{\phi_s\}_{s=1}^{N(n-1)})^T \in \mathbb{R}^{N(n+1)+3}$$

где сначала указаны углы поворота  $\phi_k$  роликов, находящихся в данный момент в контакте с опорной плоскостью, а затем — остальных, “свободных”, роликов. Индекс  $s$  используется для сквозной нумерации свободных роликов и связан с номером колеса  $i$  и ролика на колесе  $j$  по формуле

$$s(i, j) = (n - 1)(i - 1) + j - 1 \quad (1.1)$$

Введем псевдоскорости

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s), \quad \mathbf{v}_S = R\nu_1 \mathbf{e}_\xi + R\nu_2 \mathbf{e}_\eta, \quad \nu_3 = \Lambda \dot{\theta}, \quad \nu_s = \dot{\phi}_s, \quad s = 1, \dots, N(n-1)$$

Их механический смысл таков:  $\nu_1, \nu_2$  — проекции скорости точки  $S$  на оси системы  $S\xi\eta$ , связанные с платформой,  $\nu_3$  — с точностью до множителя угловая скорость платформы,  $\nu_s$  — угловые скорости свободных роликов. Число независимых псевдоскоростей системы  $K = N(n-1) + 3$ . Таким образом, имеем

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos \theta - R\nu_2 \sin \theta, \quad \dot{y} = R\nu_1 \sin \theta + R\nu_2 \cos \theta$$

Будем считать, что проскальзывания между опорной плоскостью и роликами в контакте не происходит, т.е. скорости точек  $C_i$  контакта равны нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.2)$$

Выражая скорость точек контакта через введенные псевдоскорости и проектируя на оси системы  $S\xi\eta$ , получим:

$$\dot{\phi}_k = \frac{R}{\rho_k}(\nu_1 \cos \alpha_k + \nu_2 \sin \alpha_k); \quad \rho_k = l \cos \chi_k - r \quad (1.3)$$

$$\dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin \alpha_i - \nu_2 \cos \alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}) \quad (1.4)$$

Заметим, что знаменатель  $\rho_k$  в формуле (1.3) — расстояние от оси ролика до точки контакта, обращающееся в нуль на стыке роликов (см. левую часть фиг. 1.1). Это обстоятельство приводит к разрывам второго рода функций в правых частях уравнений движения и будет рассмотрено отдельно ниже. Уравнение (1.4) совпадает с уравнением связи в случае безынерционной модели роликов.

Таким образом, выражение обобщенных скоростей через псевдоскорости, учитывающее связи, наложенные на систему, можно записать в матричном виде:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}(\theta, \chi_i), \quad (1.5)$$

где компоненты матрицы  $\mathbf{V}$  имеют вид:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \tilde{V} & O_1 \\ O_2 & E \end{bmatrix}; \quad \tilde{V} = \begin{bmatrix} R \cos \theta & -R \sin \theta & 0 \\ R \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda} \\ \frac{R}{l} \sin \alpha_i & -\frac{R}{l} \cos \alpha_i & -\frac{R}{\Lambda l} \\ \frac{R}{\rho_k} \cos \alpha_k & \frac{R}{\rho_k} \sin \alpha_k & 0 \end{bmatrix}$$

Здесь  $O_1$  и  $O_2$  – нулевые  $(3 + 2n \times N(n - 1))$ - и  $(N(n - 1) \times 3)$ -матрицы,  $E$  – единичная матрица размерности  $N(n - 1)$ .

## 2 Уравнения движения

Воспользуемся лаконичным методом получения уравнений движения для систем с дифференциальными связями, предложенным Я.В. Татариновым [18]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \sum_{\mu=1}^K \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}, \quad \alpha = 1, \dots, K \quad (2.1)$$

Здесь  $L$  – лагранжиан,  $L^*$  – он же с учетом связей (здесь и далее верхний индекс  $*$  означает учет связей),  $P_\alpha$  – линейные комбинации формальных канонических импульсов  $p_i$ , определяемые из соотношения

$$\sum_{\mu=1}^K \nu_\mu P_\mu \equiv \sum_{i=1}^{N(n+1)+3} \dot{q}_i p_i$$

в котором  $\dot{q}_i$  выражены через псевдоскорости  $\nu_\mu$  в соответствии с формулами (1.5);  $\{\cdot, \cdot\}$  – скобка Пуассона по  $p_i, q_i$ , после ее вычисления выполняется подстановка

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

(Подробности см. в работах [18, 20].)

Так как потенциальная энергия системы во время движения не меняется, лагранжиан равен кинетической энергии:

$$2L = 2T = M\mathbf{v}_S^2 + I_S\dot{\theta}^2 + J \sum_i \dot{\chi}_i^2 + B \sum_{i,j} (\dot{\phi}_{ij}^2 + 2\dot{\theta} \sin(\kappa_j + \chi_i) \dot{\phi}_{ij}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.2)$$

Здесь  $M$ ,  $I_S$ ,  $J$  — массово-инерционные характеристики экипажа (его общая масса, момент инерции относительно оси  $SZ$  и инерции тела одного колеса относительно его оси вращения соответственно),  $B$  — момент инерции ролика относительно его оси вращения. Лагранжиан при учете связей определяется соотношением:

$$2L^* = \boldsymbol{\nu}^T V^T \mathcal{M} V \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i) \boldsymbol{\nu}$$

Матрица кинетической энергии имеет следующий вид:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{M}}_{11} & \widetilde{\mathcal{M}}_{12} & \widetilde{\mathcal{M}}_{13} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^T & \widetilde{\mathcal{M}}_{22} & \widetilde{\mathcal{M}}_{23} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{13}^T & \widetilde{\mathcal{M}}_{23}^T & \widetilde{\mathcal{M}}_{33} \end{bmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_{11} &= \text{diag}(M, M, I_S), \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{22} = J E_{N \times N}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{33} = B E_{Nn \times Nn} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12} &= O_{3 \times N}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ B \sin \chi_{11} & \cdots & B \sin \chi_{Nn} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{23} = O_{N \times Nn} \end{aligned}$$

Здесь  $O_{(\cdot)}$  и  $E_{(\cdot)}$  — нулевые и единичные матрицы, в индексах которых указаны их размерности. В третьей строке  $\widetilde{\mathcal{M}}_{13}$  сначала указаны элементы, соответствующие роликам, находящимся в контакте, а затем соответствующие “свободным” роликам; элементы упорядочены по возрастанию индексов, так что ролики одного колеса соседствуют.

Соответственно, структура симметрической матрицы  $\mathcal{M}^*$  кинетической энергии с учетом связей следующая:

$$\mathcal{M}^* = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{M}}_{11}^* & \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^* \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{12}^{*T} & \widetilde{\mathcal{M}}_{22}^* \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{11}^* = (m_{ij}^*)_{3 \times 3}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{22}^* = B E_{N(n-1) \times N(n-1)}$$



$$\widetilde{\mathcal{M}}_{12}^* = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ B\Lambda^{-1} \sin \chi_{12} & \dots & B\Lambda^{-1} \sin \chi_{Nn} \end{bmatrix}_{3 \times N(n-1)}$$

Здесь  $E_{N(n-1) \times N(n-1)}$  — единичная матрица,  $\chi_{kl} = \chi_k + \kappa_l$  — угол между вертикалью и осью ролика, где индекс  $k = 1, \dots, N$  означает номер колеса,  $l = 2, \dots, n$  — номер свободного ролика на колесе ( $l = 1$  — ролик, находящийся в контакте).

Элементы матрицы  $\widetilde{\mathcal{M}}_{11}^*$  зависят только от координат  $\chi_i$ , которые входят в отношения  $B/\rho_i^2$  и  $B \sin \chi_i/\rho_i$ , имеющие разрывы второго рода при смене роликов, т.е. при переходе с одного ролика на другой (см. равенство (1.3)). Явный вид элементов  $\widetilde{\mathcal{M}}_{11}^*$  таков:

$$\begin{aligned} m_{11}^* &= MR^2 + \sum_i \left( J \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \alpha_i + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \cos^2 \alpha_i \right) \quad (11 \leftrightarrow 22, \sin \alpha_i \leftrightarrow \cos \alpha_i) \\ m_{33}^* &= \frac{1}{\Lambda} \left( I_S + \sum_i J \frac{R^2}{l^2} \right), \quad m_{12}^* = \sum_i \left( -J \frac{R^2}{l^2} + B \frac{R^2}{\rho_i^2} \right) \sin \alpha_i \cos \alpha_i \\ m_{13}^* &= \frac{1}{\Lambda} \sum_i B \frac{R}{\rho_i} \sin \chi_i \cos \alpha_i, \quad m_{23}^* = \frac{1}{\Lambda} \sum_i B \frac{R}{\rho_i} \sin \chi_i \sin \alpha_i \end{aligned} \quad (2.3)$$

Первое слагаемое в левой части равенства (2.1) получается дифференцированием лагранжиана и подстановкой связей:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi) \boldsymbol{\nu}) = \mathcal{M}^*(\chi) \dot{\boldsymbol{\nu}} + \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^*(\chi)) \boldsymbol{\nu} = \mathcal{M}^*(\chi) \dot{\boldsymbol{\nu}} + \sum_{i=1}^N \dot{\chi}_i^* \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu} \quad (2.4)$$

где  $\mathcal{M}_i^* = \frac{\partial \mathcal{M}^*}{\partial \chi_i}$ . Обратим внимание, что компоненты векторов под знаком суммы, соответствующие свободным роликам, т.е. компоненты с номерами  $\alpha = 4, \dots, K$ , имеют вид  $\dot{\chi}_i^* \nu_3 B \Lambda^{-1} \cos \chi_{ij}$ , где индексы  $i, j$  связаны с индексом  $\alpha$  по формуле  $\alpha = 3 + s(i, j)$  (см. формулу (1.1)).

Имеем выражения:

$$\begin{aligned}
P_1 &= R \left( p_x \cos \theta + p_y \sin \theta + \sum_i \left( \frac{p_{\chi_i}}{l} \sin \alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \cos \alpha_i \right) \right) \\
P_2 &= R \left( -p_x \sin \theta + p_y \cos \theta + \sum_i \left( -\frac{p_{\chi_i}}{l} \cos \alpha_i + \frac{p_{\phi_{i1}}}{\rho_i} \sin \alpha_i \right) \right) \\
P_3 &= \frac{1}{\Lambda} \left( p_\theta - \sum_i \frac{R}{l} p_{\chi_i} \right) \\
P_s &= p_{\phi_s}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Поскольку коэффициенты лагранжиана  $L^*$  зависят только от координаты  $\chi_i$ , его скобки Пуассона с  $P_1, P_2, P_3$  — квадратичные формы псевдоскоростей, пропорциональные моменту инерции ролика  $B$  с коэффициентами, зависящими от  $\chi_i$ :

$$\begin{aligned}
\{P_1, L^*\} &= -\frac{\partial P_1}{\partial p_{\chi_i}} \frac{\partial L^*}{\partial \chi_i} = -\frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu} \sin \alpha_i, \\
\{P_2, L^*\} &= \frac{R}{2l} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu} \cos \alpha_i, \quad \{P_3, L^*\} = \frac{R}{2l\Lambda} \boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}_i^* \boldsymbol{\nu}, \quad \{P_s, L^*\} = 0, s > 3
\end{aligned}$$

Остается рассмотреть правую часть равенства (2.1): она отлична от нуля лишь при  $\alpha = 1, 2, 3$ .

Обозначая

$$\xi_{\pm}(\alpha) = \nu_1 \cos \alpha \pm \nu_2 \sin \alpha, \quad \eta_{\pm}(\alpha) = \nu_1 \sin \alpha \pm \nu_2 \cos \alpha$$

для импульсов  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$  получим

$$\begin{aligned}
p_x &= MR\xi_-(\theta), \quad p_y = MR\eta_+(\theta), \\
p_\theta &= BR \sum_i \frac{\sin \chi_i}{\rho_i} \xi_+(\alpha_i) + \frac{I_s}{\Lambda} \nu_3 + B \sum_s \sin \chi_s \nu_s \\
p_{\chi_i} &= J \frac{R}{l} (\eta_-(\alpha_i) - \frac{1}{\Lambda} \nu_3), \quad p_{\phi_{k1}} = \frac{BR}{\rho_k} \xi_+(\alpha_k) + \frac{B}{\Lambda} \sin \chi_k, \\
p_{\phi_s} &= \frac{B}{\Lambda} \nu_3 \sin \chi_s + B \nu_s
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Для упрощения записи правой части системы (2.1) введем обозначение для операции дискретной свертки произвольной функции  $f$ :

$$\sigma[f(\alpha, \chi)] = \sum_{k=1}^N f(\alpha_k, \chi_k) \frac{\sin \chi_k}{\rho_k^3}$$

Тогда скобки Пуассона в правой части системы (2.1) имеют вид (звездочкой обозначена подстановка импульсов  $p_i$ )

$$\begin{aligned}
(\{P_1, P_2\})^* &= \left( -\sum_{k=1}^N R^2 \tau_k p_{\phi_k} \right)^* \\
&= -BR^2(R\nu_1\sigma[\cos \alpha] + R\nu_2\sigma[\sin \alpha] + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho \sin \chi]) = \\
&= -BR^2\mathbf{p}_{12}\boldsymbol{\nu} \\
\mathbf{p}_{12} &= (\sigma[\cos \alpha], R\sigma[\sin \alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho \sin \chi], 0, \dots, 0) \\
(\{P_1, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left( -p_x \sin \theta + p_y \cos \theta - \sum_{k=1}^N R \cos \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* \\
&= MR^2\Lambda^{-1}\nu_2 - \\
&\quad - BR^2\Lambda^{-1}(R\nu_1\sigma[\cos^2 \alpha] + R\nu_2\sigma[\sin \alpha \cos \alpha] + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi]) = \\
&= MR^2\Lambda^{-1}\nu_2 - BR^2\mathbf{p}_{13}\boldsymbol{\nu} \\
\mathbf{p}_{13} &= \Lambda^{-1}(R\sigma[\cos^2 \alpha], R\sigma[\sin \alpha \cos \alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho \cos \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0) \\
(\{P_2, P_3\})^* &= R\Lambda^{-1} \left( -p_x \cos \theta - p_y \sin \theta - \sum_{k=1}^N R \sin \alpha_k \tau_k p_{\phi_k} \right)^* = -MR^2\Lambda^{-1}\nu_1 - \\
&\quad - BR^2\Lambda^{-1}(R\nu_1\sigma[\sin \alpha \cos \alpha] + R\nu_2\sigma[\sin^2 \alpha] + \Lambda^{-1}\nu_3\sigma[\rho \sin \alpha \sin \chi]) = \\
&= -MR^2\Lambda^{-1}\nu_1 - BR^2\mathbf{p}_{23}\boldsymbol{\nu} \\
\mathbf{p}_{23} &= \Lambda^{-1}(R\sigma[\sin \alpha \cos \alpha], R\sigma[\sin^2 \alpha], \Lambda^{-1}\sigma[\rho \sin \alpha \sin \chi], 0, \dots, 0)
\end{aligned}$$

Окончательно, объединяя выражения для всех слагаемых (2.1), получаем, что уравнения движения имеют следующую структуру:

$$\mathcal{M}^*\dot{\boldsymbol{\nu}} = MR^2\Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \nu_2\nu_3 \\ -\nu_1\nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{R}{2l} \begin{bmatrix} -\mathcal{M}_i^* \sin \alpha_i \\ \mathcal{M}_i^* \cos \alpha_i \\ \mathcal{M}_i^* \Lambda^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - BR^2 \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\nu} - B \begin{bmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_1^* \cos \chi_{12} \\ \vdots \\ \frac{\nu_3}{\Lambda} \dot{\chi}_N^* \cos \chi_{Nn} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Символ  $\star$  в последнем слагаемом правой части уравнений для  $\alpha = 1, 2, 3$  заменяет выражения под знаком суммы в равенствах (2.4). Матрицы  $\mathcal{P}_\alpha$  размера  $K \times K$  составлены из строк  $\mathbf{p}_{\alpha\beta}$ , определенных в Приложении и зависящих от геометрии экипажа и углов поворота колес  $\chi_i$ :

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{p}_{13} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_{13} \\ -\mathbf{p}_{23} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Поскольку матрицы  $\mathcal{M}_i^*$  и  $\mathcal{P}_\alpha$  зависят от углов поворота колес  $\chi_i$ , для замыкания системы к этим уравнениям надо добавить уравнения (1.4).

Структура уравнений позволяет выявить следующие свойства.

1. Система допускает интеграл энергии  $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^T \mathcal{M}^*(\chi_i)\boldsymbol{\nu} = h = \text{const}$  в силу общей теоремы об изменении полной механической энергии: так как система стеснена автономными идеальными связями, а силы консервативны, то полная энергия (в рассматриваемом здесь случае она равна кинетической энергии) сохраняется.

2. Если платформа экипажа неподвижна, т.е.  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$ , свободные ролики сохраняют свою начальную угловую скорость:  $\nu_s = \text{const}$ , чего и следовало ожидать.

3. При  $B = 0$  все слагаемые в правой части равенства (2.7), кроме первого, обращаются в нуль, как и все члены, соответствующие свободным роликам, в левой части (см. Приложение, равенства (2.3)). В этом случае существенными остаются первые три уравнения системы (2.1) относительно  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ , описывающие динамику безынерционной модели экипажа [16].

4. Существовавший в безынерционной модели линейный первый интеграл разрушается для модели с массивными роликами. При  $B = 0$  он имеет вид  $m_{33}^* \nu_3 = \text{const}$  (причем  $m_{33} = \text{const}$ ) и следует непосредственно из третьего уравнения системы (2.1). При  $B \neq 0$  скорость изменения  $\nu_3$  пропорциональна моменту инерции ролика  $B$ .

5. Поскольку скобки Пуассона в уравнениях для свободных роликов равны нулю, система допускает первые интегралы:

$$\nu_s + \frac{1}{\Lambda} \sin \chi_{ij} \nu_3 = \text{const} \quad (2.8)$$

Скорость вращения платформы  $\nu_3$  связана со скоростями собственного вращения свободных роликов. В частности, вращение экипажа вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр ( $\nu_1(0) = 0, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) \neq 0$ ), неравномерно, в отличие от выводов, основанных на безынерционной модели.

6. Одновременное изменение начальных значений всех псевдоскоростей  $\boldsymbol{\nu} \rightarrow \lambda \boldsymbol{\nu}$ ,  $\lambda \neq 0$  умножением на число, отличное от нуля, эквивалентно замене времени  $t \rightarrow \lambda t$ .

## 2.1 Безынерционная модель

На протяжении всей работы делаются ссылки на следующую модель экипажа с омни-колесами, широко представленную в литературе (например, в [1, 16, 24]). Для полноты изложения, опишем здесь эту модель и приведем ее уравнения движения.

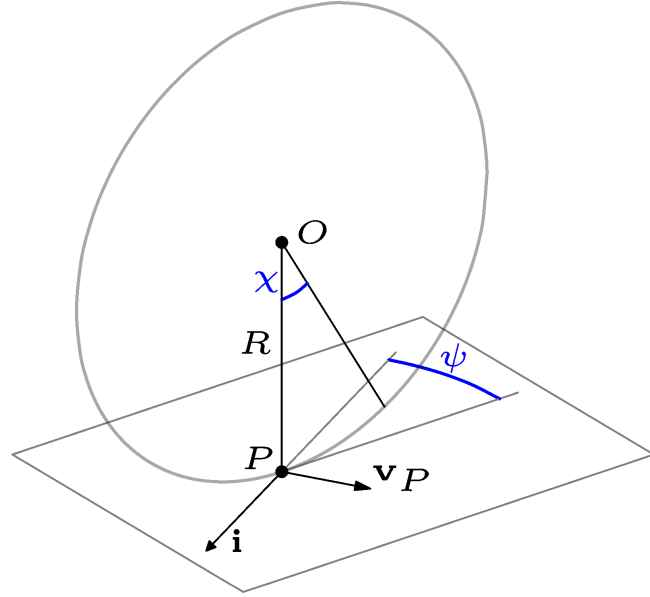
В данной модели омниколеса рассматриваются в предположении, что массой и инерцией роликов можно пренебречь. Поэтому будем называть эту модель безынерционной. На систему налагаются неголономные связи, ограничивающие направление скорости скольжения в точках контакта колес с опорной поверхностью, на которой стоит экипаж. Сила трения в контакте не вводится, т.е. скольжение дисков колес считается идеальным.

Приведем результаты работы [24] как новейшей из неголономных моделей динамики свободной тележки с омниколесами на плоскости на момент выполнения работы.

Авторы [24] принимают простейшую модель омниколеса как плоского диска, для которого скорость точки контакта с опорной поверхностью направлена вдоль прямой, составляющей некоторый угол  $\psi$  с плоскостью колеса (см. рис. 1.3). Связь, наложенная на колесо в таком случае имеет вид

$$\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{i} = 0,$$

где  $\mathbf{v}_C$  – скорость точки контакта  $C$ ,  $\mathbf{i}$  – единичный вектор, направленный вдоль “оси ролика”. Хотя сами тела роликов исключены из рассмотрения, эффекты от их кинематики все же моделируются данными связями.



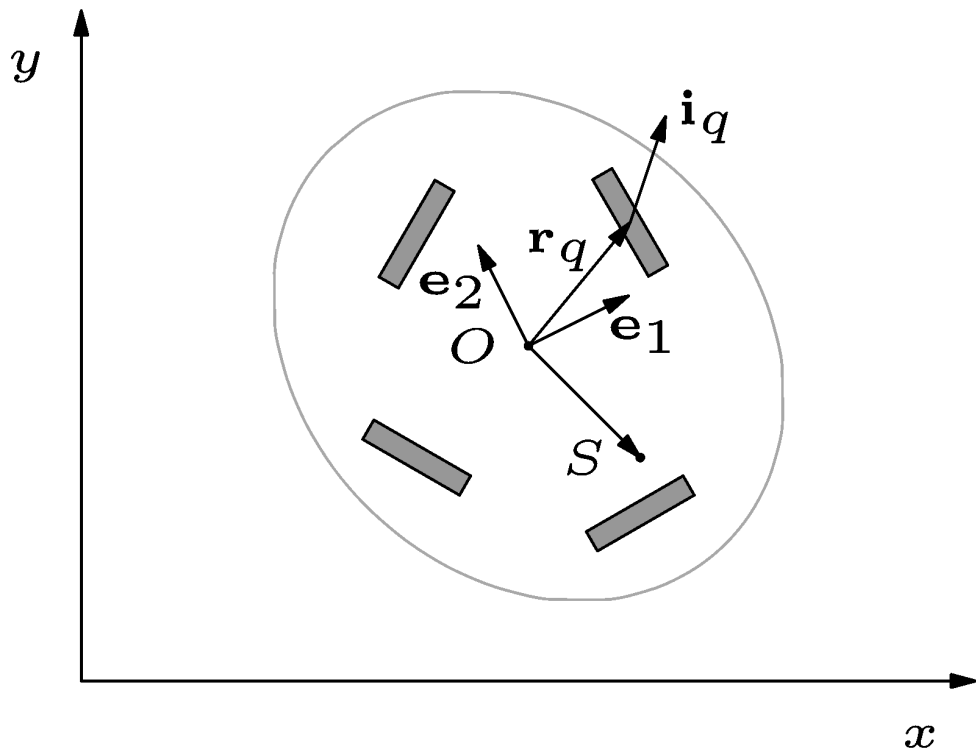
Фиг. 1.3. Безынерционная модель колеса

Авторы [24] получают уравнения движения для экипажа с произвольным количеством и расположением колес, закрепленных так, что их оси неподвижны относительно платформы, а оси роликов повернуты на произвольные углы относительно плоскостей соответствующих колес (см. фиг. 1.4).

Вводится подвижная система отсчета  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ , связанная с платформой экипажа. В качестве уравнений движения используются уравнения Феррерса. Уравнения движения по инерции имеют вид:

$$\begin{aligned}
 (\Gamma + mE)\dot{\mathbf{v}}_O + m\dot{\omega}(J\mathbf{r}_S + \mathbf{R}_O) + m\omega J(\mathbf{v}_O + \omega J\mathbf{r}_S) &= 0, \\
 \hat{I}\dot{\omega} + m(J\mathbf{r}_S + \mathbf{R}_O) \cdot \dot{\mathbf{v}}_O + m\omega \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{r}_S &= 0, \\
 \dot{x} = v_1 \cos \theta - v_2 \sin \theta, \quad \dot{y} = v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta, \quad \dot{\theta} = \omega, \\
 \Gamma_{kl} = \sum_q \frac{I_q}{s_q^2 l_q^2} \mathbf{i}_q^k \mathbf{i}_q^l, \quad \mathbf{R}_O = m^{-1} \sum_q \frac{I_q}{s_q^2 l_q^2} (J\mathbf{r}_q \cdot \mathbf{i}_q) \mathbf{i}_q, \\
 \hat{I} = I + \sum_q \frac{I_q}{s_q^2 r_q^2} (J\mathbf{r}_q \cdot \mathbf{i}_q)^2,
 \end{aligned}$$

где  $\hat{I}$  – суммарный момент инерции системы относительно вертикальной



Фиг. 1.4. Безынерционная модель экипажа

оси, проходящей через начало  $O$  подвижной системы отсчета,

$I$  - момент инерции платформы относительно той же прямой,

$I_i$  - моменты инерции колес относительно их диаметров,

$s_q = \sin(\frac{\pi}{2} - \psi_q)$ ,  $l_q$  - радиусы колес,

$\mathbf{r}_q$  - точки закрепления осей колес в подвижной системе,

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E$  - единичная матрица

$x, y, \theta$  - координаты точки  $O$  и угол поворота платформы экипажа вокруг вертикальной оси,

$\mathbf{v}_O, \omega$  - вектор скорости точки  $O$  и скорость поворота платформы,

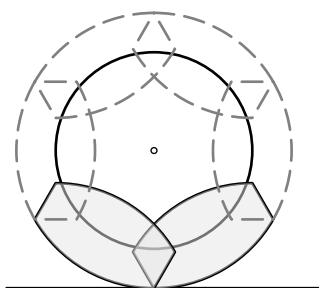
$\mathbf{r}_s$  - координаты центра масс экипажа в подвижных осях.

## Глава 2

# Смена ролика в контакте с опорной плоскостью

При рассмотрении динамики роликов отдельного внимания заслуживает момент перехода колеса с одного ролика на другой, поскольку вращение ролика, входящего в контакт, может не быть согласовано с условием отсутствия скольжения в контакте.

В тех интервалах времени, когда ролик в контакте с опорной плоскостью не меняется, динамика системы описывается уравнениями движения системы (см. [106]). Смена контакта на  $i$ -том колесе происходит при значении угла  $\chi_i = \frac{2\pi}{n}$ . При этом, во-первых, правая часть уравнений движения терпит разрыв второго рода из-за равенства нулю выражений  $\rho_i = l \cos \chi_i - r$  в знаменателе. Во-вторых, происходит мгновенное снятие и наложение связей: условие отсутствия проскальзывания для ролика, выходящего из контакта, снимается, и аналогичное ему мгновенно налагается на вновь входящий в



Фиг. 2.1. Перекрытие

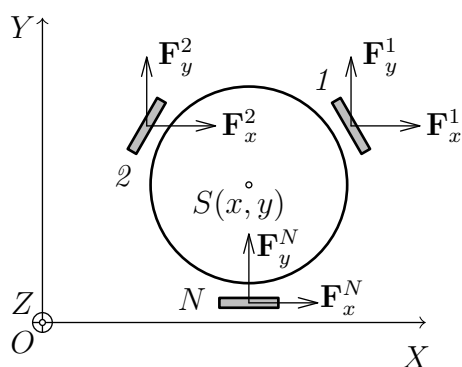


контакт ролик.

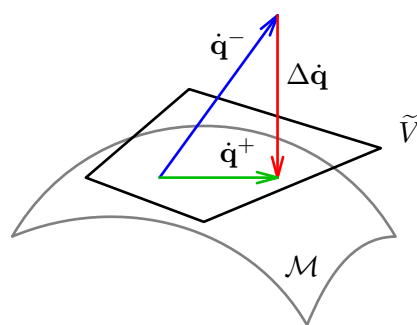
На практике первое обстоятельство никогда не реализуется, поскольку оси роликов в реальных системах имеют ненулевую толщину, а значит, концы роликов усекаются. При этом ролики располагают рядами в двух и более плоскостях, чтобы в каждый момент гладкая сторона хотя бы одного ролика была в контакте с плоскостью. В данной работе рассматриваются усеченные ролики (см. фиг. 2.1), но их оси расположены в одной плоскости, и допускается пересечение тел роликов в пространстве. Ось ролика находится на расстоянии  $r = l \cos \frac{\pi}{n-1}$  от центра колеса. Ролик представляет собой тело вращения относительно этой оси дуги окружности радиуса  $l$  с углом раствора  $\frac{2\pi}{n}$ .

В данной главе проведено детальное рассмотрение момента смены ролика в контакте с учетом ударного характера взаимодействия с опорной плоскостью. Также, получены численные решения, состоящие из участков, определяемых уравнениями движения, и моментов смены контакта, моделируемых с точки зрения теории удара.

## 1 Наложение связи при смене ролика в контакте



Фиг. 2.2. Реакции



Фиг. 2.3. Проекция

В реальной системе при смене контакта имеет место скольжение роликов относительно плоскости, и при этом полная энергия системы рассеивается. В данной работе будем считать, что трение достаточно велико, и прекращение

проскальзывания вновь вошедшего в контакт ролика происходит мгновенно. Это взаимодействие будет рассматриваться как абсолютно неупругий удар, происходящий при мгновенном наложении связи. Освободившийся ролик начинает свободно вращаться вокруг своей оси. Будем предполагать следующее:

- удар происходит за бесконечно малый интервал времени  $\Delta t \ll 1$ , так что изменения обобщенных координат пренебрежимо малы  $\Delta \mathbf{q} \sim \dot{\mathbf{q}} \Delta t \ll 1$ , а изменения обобщенных скоростей конечны  $\Delta \dot{\mathbf{q}} < \infty$ ;
- взаимодействие экипажа с опорной полоскостью во время удара сводится к действию в точках контакта нормальных и касательных реакций  $\mathbf{R}_i = \mathbf{N}_i + \mathbf{F}_i$ , где индекс  $i$  равен номеру колеса;
- к моменту окончания удара  $t^* + \Delta t$  уравнения связей выполнены  $\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}^+$ , т.е. за время  $\Delta t$  проскальзывание вошедшего в контакт ролика заканчивается.

Исходя из этих предположений, в следующих разделах получим системы алгебраических уравнений, связывающих значения обобщенных скоростей непосредственно перед ударом  $\dot{\mathbf{q}}^-$  и значения псевдоскоростей сразу после удара  $\boldsymbol{\nu}^+$  двумя разными способами: в первом случае, будем вводить ударные реакции, действующие в точках контакта, а во втором, будем рассматривать неупругий удар как проецирование вектора обобщенных скоростей на плоскость, задаваемую уравнениями вновь налагаемых связей.

Таким образом, моделирование системы состоит в решении задачи Коши системы обыкновенных дифференциальных уравнений в интервалах между моментами смены роликов в контактах и решения систем алгебраических уравнений в эти моменты для получения начальных условий для следующего безударного интервала.

## 1.1 Основное уравнение теории удара

Составим алгебраические уравнения, связывающие значения псевдоскоростей после удара и величины ударных импульсов. В течение бесконечно малого времени  $\Delta t$  наложены только геометрические связи, так что скорости  $\dot{\mathbf{q}}$

независимы. Запишем уравнение удара в обобщенных координатах [66]:

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{Q}, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{M}$  – матрица кинетической энергии без учета связей (так что  $\mathcal{M}^* = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}$ ), а  $\mathbf{Q}$  – вектор импульсов ударных реакций в обобщенных координатах:

$$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_\theta, Q_{\chi_i}|_{i=1}^N, Q_{\phi_i}|_{i=1}^N, Q_s)^T$$

Исходя из геометрии системы (см. фиг. 2.2), получаем, что компоненты этого вектора связаны с касательными составляющими ударных реакций следующим образом (верхний индекс в  $F_i^{\cdot}$  означает проекцию на соответствующую ось неподвижной системы отсчета):

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sum_{i=1}^N F_i^x \\ Q_2 &= \sum_{i=1}^N F_i^y \\ Q_\theta &= \sum_{i=1}^N Q_\theta^i = \sum_{i=1}^N R(-F_i^x \sin(\theta + \alpha_i) + F_i^y \cos(\theta + \alpha_i)) \\ Q_{\chi_i} &= \frac{l}{R} Q_\theta^i \\ Q_{\phi_i} &= -\rho_i (F_i^x \cos(\theta + \alpha_i) + F_i^y \sin(\theta + \alpha_i)) \\ Q_s &= 0 \end{aligned}$$

В матричном виде:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K} \mathbf{F}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ -R \sin(\theta + \alpha_1) & R \cos(\theta + \alpha_1) & \dots & -R \sin(\theta + \alpha_N) & R \cos(\theta + \alpha_N) \\ -l \sin(\theta + \alpha_1) & l \cos(\theta + \alpha_1) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -l \sin(\theta + \alpha_N) & l \cos(\theta + \alpha_N) \\ -\rho_1 \cos(\theta + \alpha_1) & -\rho_1 \sin(\theta + \alpha_1) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\rho_N \cos(\theta + \alpha_N) & -\rho_N \sin(\theta + \alpha_N) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Размерность матрицы  $\mathbf{K}$  равна  $(3 + N(n + 1)) \times 2N$ , её ранг максимален и равен  $(3 + N(n + 1))$ , что можно показать непосредственным вычислением.

Непосредственно перед ударом связи, запрещающие проскальзывание роликов, выходящих из контакта, снимаются. К моменту окончания удара аналогичные связи налагаются на вновь входящие в контакт ролики.

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+$$

Отсюда уравнение (1.1) принимает вид:

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{K}\mathbf{F} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^- \quad (1.2)$$

В следующем пункте будет доказано, что полученная линейная система алгебраических уравнений относительно  $\boldsymbol{\nu}^+$  и  $\mathbf{F}$  допускает единственное решение.

## 1.2 Разрешимость основного уравнения теории удара при наложении дифференциальных связей

Покажем существование и единственность решения уравнения (1.2) в более общем виде. Рассмотрим натуральную систему с обобщенными координатами  $\mathbf{q}$  и кинетической энергией  $T = \frac{1}{2}(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ , на которую в момент времени  $t^*$  мгновенно налагаются дифференциальные связи вида  $\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} = 0$ . При этом

верно основное уравнение удара (1.1). Будем считать также, что выполнено условие идеальности связей:

$$\mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}^+ = 0, \quad (1.3)$$

где  $\delta \mathbf{q}^+$  – виртуальные перемещения системы после наложения связей.

Обобщенные скорости системы после наложения связей  $\dot{\mathbf{q}}^+$  находятся в линейном подпространстве  $\tilde{V} = \ker \mathbf{A}$  пространства виртуальных перемещений  $T_{\mathbf{q}}\mathcal{M}$ . В этом подпространстве можно выбрать базис, и таким образом ввести псевдоскорости на интервале после наложения связей:  $\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+$ , где столбцы матрицы  $\mathbf{V}$  есть векторы базиса в  $\tilde{V}$ . При этом для матрицы оператора  $\mathbf{A}$  и матрицы  $\mathbf{V}$  будет выполнено:

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = 0. \quad (1.4)$$

Условие идеальности связей (1.3) означает, в частности, что вектор импульса ударных реакций  $\mathbf{Q}$  лежит в подпространстве  $T_{\mathbf{q}}\mathcal{M}$ , дополнительном к  $\tilde{V} = \ker \mathbf{A}$ , и таким образом, по лемме о множителях Лагранжа [63] представляется в базисе, составленном из строк матрицы  $\mathbf{A}$ :  $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}$ , где  $\boldsymbol{\lambda}$  – множители Лагранжа.

Уравнение удара (1.1) тогда можно представить в виде:

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-, \quad (1.5)$$

где вместо матрицы  $\mathbf{K}$ , приведенной в разделе 1.1, стоит любая матрица оператора связей  $\mathbf{A}$ .

Равенство (1.5) есть система алгебраических уравнений относительно вектора неизвестных  $(\boldsymbol{\nu}^+, \boldsymbol{\lambda})^T$ . Матрица  $(\mathbf{M}\mathbf{V}; -\mathbf{A}^T)$  этой системы – квадратная размерности  $\dim \mathbf{q} \times \dim \mathbf{q}$ , поскольку столбцы  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{A}^T$  образуют базисы в дополнительных подпространствах  $T_{\mathbf{q}}\mathcal{M} = \mathbb{R}^{\dim \mathbf{q}}$ . Невырожденна она по той же причине, доказательство чего носит технический характер и проведено в Приложении. Таким образом, задача теории удара в рассматриваемом случае всегда имеет решение, решение единственно и доставляет одновременно значения обобщенных скоростей после удара  $\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+$  и импульсов ударных реакций  $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}$ .

Отметим также, в силу основного уравнения удара (1.1) и условия идеальности (1.3), мгновенное наложение связей можно рассматривать как абсолютно неупругий удар при котором теряется компонента  $\Delta \dot{\mathbf{q}}$  вектора обобщенных скоростей  $\dot{\mathbf{q}}^-$ , ортогональная подпространству  $\tilde{V}$  в кинетической метрике:

$$\Delta \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \delta \mathbf{q} = 0.$$

Тогда вектор обобщенных скоростей после удара  $\tilde{V} \ni \dot{\mathbf{q}}^+ = \dot{\mathbf{q}}^- - \Delta \dot{\mathbf{q}}$  вычисляется непосредственно как проекция вектора  $\dot{\mathbf{q}}^-$  на подпространство  $\tilde{V}$ , минуя получение импульсов ударных реакций  $\mathbf{Q}$ . Явный вид матрицы  $\mathbf{A}$  также не требуется, достаточно ввести псевдоскорости:  $\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V} \boldsymbol{\nu}^+$ . Выражение для  $\boldsymbol{\nu}^+$  тогда может быть получено следующим образом:

$$0 = \mathbf{V}^T \mathbf{Q} = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \Delta \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}^T \mathbf{M} (\mathbf{V} \boldsymbol{\nu}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}^-,$$

откуда:

$$\boldsymbol{\nu}^+ = (\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}^-.$$

Эту же формулу можно получить и из уравнения (1.5), домножая его слева на  $\mathbf{V}^T$  и пользуясь равенством (1.4). Симметрично, при умножении (1.5) слева на  $\mathbf{A} \mathbf{M}^{-1}$ , имеем выражение для множителей Лагранжа  $\boldsymbol{\lambda}$ :

$$\boldsymbol{\lambda} = -(\mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}^-,$$

не включающее явно матрицу связей  $\mathbf{V}$ .

Возвращаясь к рассмотрению экипажа с омни-колесами, покажем связь матрицы  $\mathbf{K}$  и вектора ударных реакций  $\mathbf{F}$  с изложенными общими утверждениями. Рассмотрим вектор  $\mathbf{r} = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)^T$ , составленный из координат точек колес, находящихся в контакте с опорной плоскостью  $C_i$  в неподвижной системе отсчета  $OXYZ$ . Матрица оператора  $\mathbf{A}$  связей (1.2) может быть получена, в частности, как якобиан зависимости вектора  $\mathbf{r}$  от обобщенных координат  $\mathbf{q}$ :  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \left. \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{x,y}$ . Непосредственный подсчет показывает, что столбцы якобиана, соответствующие оси  $OZ$ , оказываются нулевыми, и потому их следует исключить. При этом матрица  $\mathbf{A}^T$  в точности совпадает с матрицей  $\mathbf{K}$  из раздела 1.1, и таким образом, множители Лагранжа  $\boldsymbol{\lambda}$  оказываются компонентами вектора реакций  $\mathbf{F}$ .

### 1.3 Изменение кинетической энергии

Выясним, как меняется кинетическая энергия при смене ролика в контакте:

$$\begin{aligned} 2\Delta T &= 2(\mathbf{T}^+ - \mathbf{T}^-) = (\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^+, \dot{\mathbf{q}}^+) - (\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-, \dot{\mathbf{q}}^-) = \\ &= (\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \Delta\dot{\mathbf{q}}) + 2(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-, \Delta\dot{\mathbf{q}}) = -(\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \Delta\dot{\mathbf{q}}) + 2(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^+, \Delta\dot{\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

Последнее слагаемое равно нулю в силу идеальности связей (1.3) и основного уравнения удара (1.1), т.е. равенства нулю мощности ударных импульсов на перемещениях, допускаемых связями

$$(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^+, \Delta\dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}^+) = (\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{q}}^+) = 0.$$

Таким образом, потеря кинетической энергии системы равна энергии потерянных скоростей  $\Delta\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-$ :

$$\Delta T = -\frac{1}{2}(\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}}, \Delta\dot{\mathbf{q}}) \leq 0,$$

что соответствует теореме Карно [66].

## 2 Примеры движений

Рассмотрим результаты расчетов для трех вариантов начальных условий.

1. Вращение вокруг своей оси ( $\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ ) (фиг. 2).
2. Движение по прямой в направлении оси  $S\xi$  ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = \nu_3(0) = 0$ ) (фиг. 2).
3. Движение с ненулевой скоростью центра масс и, одновременно, с ненулевой угловой скоростью платформы ( $\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1$ ) (фиг. 2).

Такие же варианты рассмотрены в [106] при интегрировании уравнений движения на гладких участках с упрощенной моделью изменения обобщенных скоростей при смене контакта.

Расчеты выполнены для симметричного трехколесного экипажа ( $\alpha_i = \frac{2\pi}{N}(i-1), N=3$ ) с  $n=5$  роликами на колесе. Все величины безразмерны, так

что радиусы платформы и колеса  $R = 0.15$  и  $r = 0.05$ , массы платформы, колеса и ролика 1, 0.15 и 0.05. При этом момент инерции ролика  $B \approx 1.6 \cdot 10^{-5}$ .

Во всех трех случаях наблюдается убывание кинетической энергии скачками в моменты смены контакта. В промежутки времени между сменами энергия остается постоянной.

В вариантах 1 и 2 заметны переходные режимы вращения роликов в начале движения, когда колесо совершает первый оборот, и каждый ролик проходит полный круг, выходя из контакта и возвращаясь в него снова.

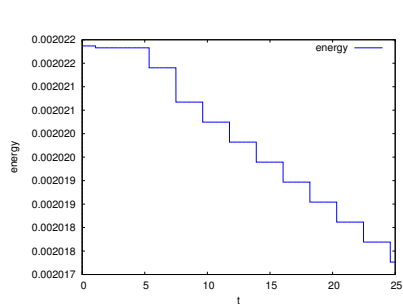
В случае 1 вращения вокруг вертикали угловая скорость платформы  $\nu_3$  в среднем медленно убывает (немонотонно): уменьшается на 5% за первые  $10^3$  с. Кинетическая энергия системы также медленно убывает. Центр масс покоится. На фиг. 2 приведены скорости собственного вращения роликов на первом колесе  $\dot{\phi}_{1j}$ . Находящийся в контакте ролик неподвижен относительно колеса (в силу связи со скоростью центра масс, см. (1.3) при  $\nu_1 = \nu_2 = 0$ , чему соответствуют участки графиков, лежащие на оси абсцисс. Когда контакт этого ролика с опорной плоскостью прекращается, он начинает вращаться за счёт вращения экипажа в целом вокруг вертикальной оси (см. первый интеграл (2.8), существующий на гладких участках). После полного оборота колеса ролик приобретает некоторую скорость вращения, которую мгновенно теряет при следующем входе в контакт. В результате вся система теряет часть энергии, испытывая удар связями непроскальзывания. Скорость  $\nu_3$  вращения экипажа вокруг вертикальной оси при этом изменяется скачком (см. например  $t = 1, 3, 5, 7.5$  с на графиках).

При поступательном движении экипажа (вариант 2) угловая скорость тождественно равна нулю. Зависимости скорости центра масс экипажа  $v = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$  и кинетической энергии  $T$  от времени показаны на фиг. 2. Обе величины убывают (энергия – монотонно, скачками, с каждой сменой контакта; скорость центра масс – в среднем). Переднее колесо не вращается вокруг своей оси и движется с опорой на один и тот же ролик. Скорость вращения этого ролика связана со скоростью центра масс согласно связи (1.3). Остальные ролики переднего колеса покоятся относительно экипажа. На задних колесах все ролики раскручиваются, скорости вращения показаны на фиг. 2.5с. После того как все ролики побывают в контакте, их движение становится квазипе-

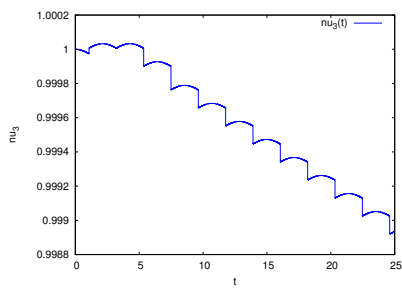


риодичным.

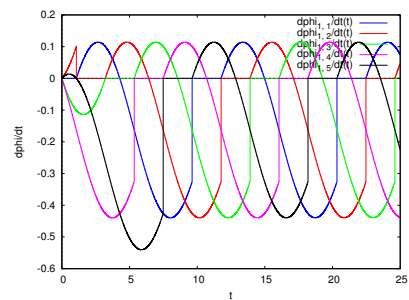
При комбинации поступательного и вращательного движений экипажа (случай 3), кинетическая энергия его центра масс убывает, переходя в кинетическую энергию платформы в осях Кёнига. Угловая скорость экипажа  $\omega_3$  растет и достигает максимума (фиг. 2.6с) в момент  $t_1^* \approx 150$ с, после чего почти монотонно убывает (с точностью до влияния первых интегралов (2.8)), скорость центра  $S$  экипажа  $v$  становится исчезающе малой к моменту  $t_2^* \approx 300$ с (фиг. 2.6b), а кинетическая энергия (фиг. 2.6a) убывает при каждой смене контакта. Центр платформы  $S$  описывает спираль (фиг. 2.6d). После почти полной остановки центра масс при  $t > t_2^*$  экипаж вращается вокруг вертикальной оси  $Sz$ , постепенно замедляясь. Угловые скорости роликов представляют собой квазипериодические функции времени (характерный участок представлен на фиг. 2.6f).



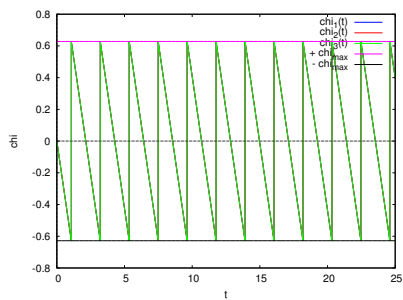
(a) Кинетическая энергия



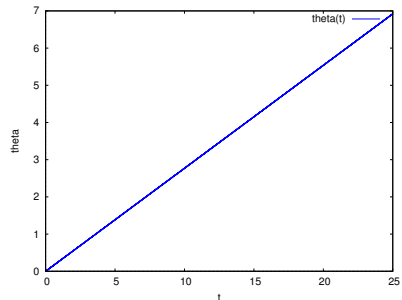
(b) Угловая скорость экипажа



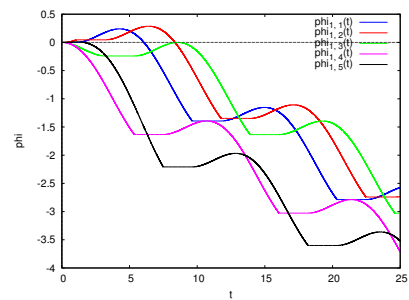
(c) Угловые скорости роликов



(d) Углы поворота колес

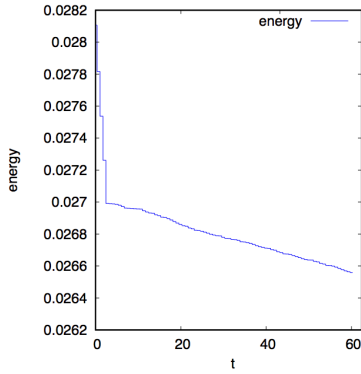


(e) Угол поворота экипажа

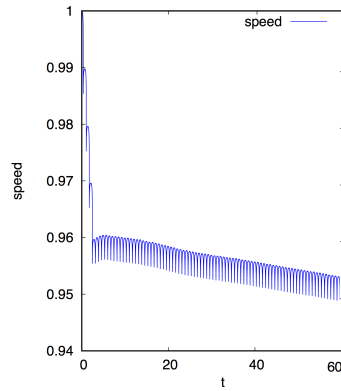


(f) Углы поворота роликов

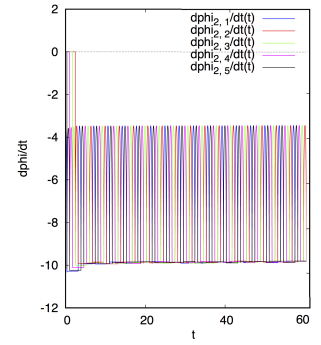
Фиг. 2.4. Вращение экипажа вокруг своей оси



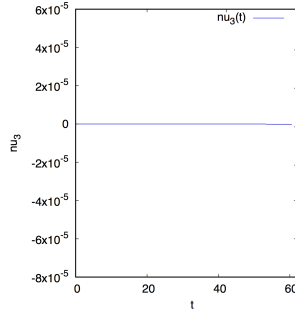
(a) Кинетическая энергия



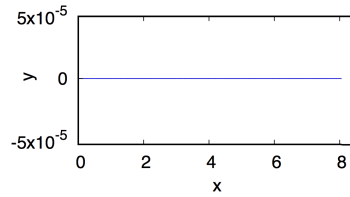
(b) Скорость центра масс



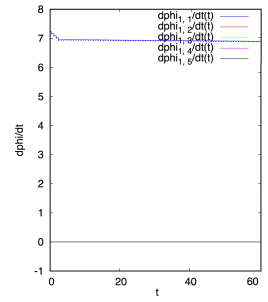
(c) Угловые скорости роликов на заднем колесе



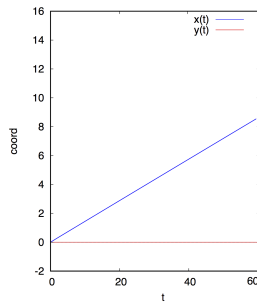
(d) Угловая скорость экипажа



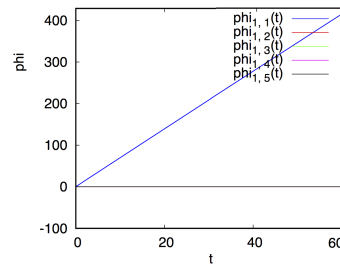
(e) Траектория



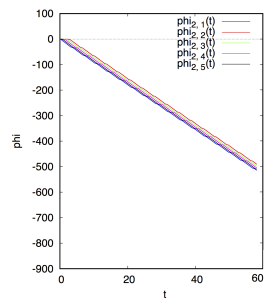
(f) Угловые скорости роликов на переднем колесе



(g) Координаты центра масс

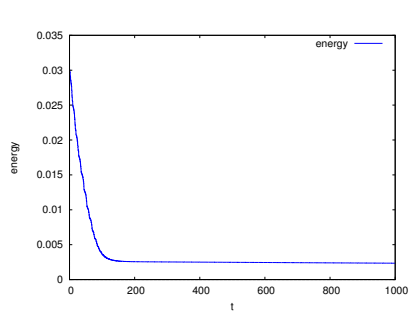


(h) Углы поворота роликов на переднем колесе

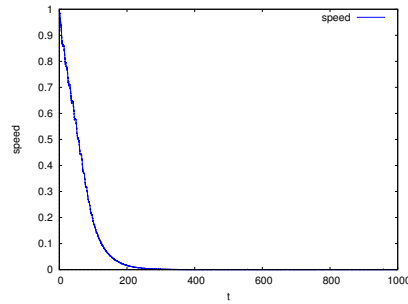


(i) Углы поворота роликов на заднем колесе

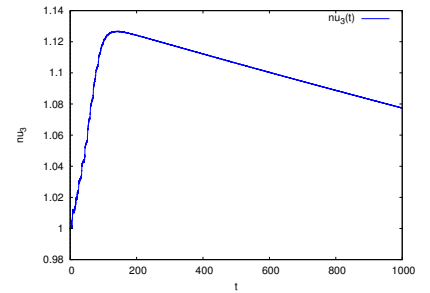
Фиг. 2.5. Движение экипажа по прямой



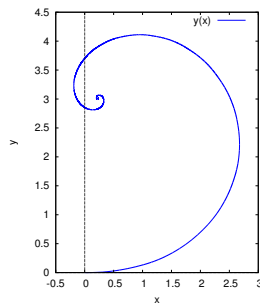
(a) Кинетическая энергия



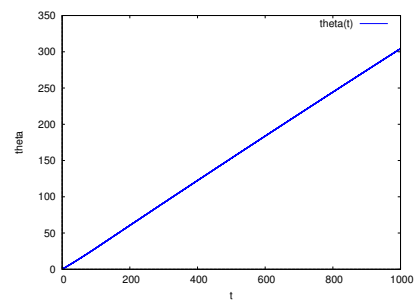
(b) Скорость центра масс



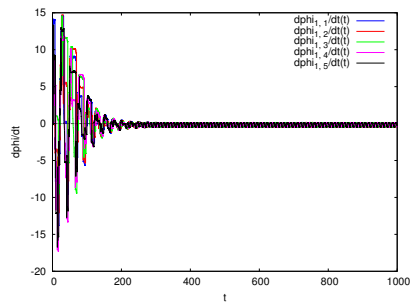
(c) Угловая скорость экипажа



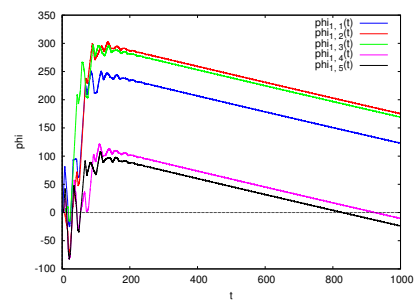
(d) Траектория центра масс



(e) Угол поворота экипажа



(f) Угловые скорости роликов на переднем колесе



(g) Углы поворота роликов на переднем колесе

Фиг. 2.6. Движение экипажа с закруткой

## Глава 3

# Динамика экипажа на ОМНИ-КОЛЕСАХ с трением

В предыдущих главах рассмотрена динамика омни-колесного экипажа на абсолютно шероховатой плоскости. Однако, как было показано ранее, в этом случае на интервалах движения без смены ролика в контакте полная механическая энергия сохраняется, что никогда не происходит в реальных системах. Отдельного рассмотрения заслуживает вопрос о том, как возникает и прекращается в реальных системах скольжение вновь вошедшего в контакт ролика, либо ролика, уже находящегося в контакте. Таким образом, интерес представляет изучение динамики экипажа по плоскости с трением.

В данной главе вместо идеальных неголомных связей отсутствия проскальзывания используются голономные неидеальные неудерживающие связи. Для касательных составляющих реакций опорной плоскости используются две модели: сухое трение Амонтона – Кулона, регуляризованное в окрестности нуля по скорости проскальзывания линейной функцией насыщения; а также, вязкое трение.

Построение модели выполнено таким образом, что изменение в ней модели контактного взаимодействия требует изменения всего одного алгебраического выражения. Также подробно рассмотрен вопрос отслеживания контакта роликов и горизонтальной плоскости и алгоритмической реализации процесса переключения контакта от ролика к ролику при качении роликонесущего колеса.

Динамические свойства построенной модели экипажа проиллюстрированы при помощи численных экспериментов. Проведена верификация построенной модели с сухим трением в сравнении с безынерционной моделью при стремлении суммарной массы роликов к нулю. Модель с вязким трением представлена в сравнении с неголономной моделью, построенной в главах 1 и 2.

# 1 Метод построения механической модели системы твердых тел

Для описания динамики системы воспользуемся следующим формализмом [93,95,96]. Положение каждого твердого тела будем задавать радиусом-вектором центра масс тела  $\mathbf{r}$  в неподвижной системе отсчета  $OXYZ$ , введенной в главе 1, и кватернионом  $\mathbf{q}$ , задающим ориентацию тела; распределение скоростей описывается скоростью центра масс  $\mathbf{v}$  и угловой скоростью тела  $\boldsymbol{\omega}$ . Динамика этого твердого тела описывается уравнениями Ньютона-Эйлера:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$$

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, J\boldsymbol{\omega}] = \mathbf{M} + \mathbf{L}, \quad \dot{\mathbf{q}} = (0, \boldsymbol{\omega}),$$

где  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{R}$  – главные векторы активных сил и реакций,  $J$  – тензор инерции в подвижной системе отсчета, связанной с телом, в  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  производная по времени берется в подвижной системе отсчета,  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{L}$  – главные векторы моментов, приложенных к телу, и реактивных моментов.

Для получения замкнутой системы уравнений требуется ввести также уравнения связей

$$f(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{q}}, \underline{\boldsymbol{\omega}}) = 0, \tag{1.1}$$

и модель реакций связей, в частности, контактного взаимодействия:

$$g(\underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{L}}, \underline{\mathbf{q}}, \underline{\boldsymbol{\omega}}) = 0, \tag{1.2}$$

где левые части зависят, вообще говоря, от величин, описывающих движение всех тел. Выражения в левых частях (1.1) и (1.2) также могут быть кусочно-заданными, что и имеет место в задаче о движении омни-колеса, поскольку ролики входят и выходят из контакта с опорной поверхностью.

Отметим, что при необходимости изменения закона контактного взаимодействия достаточно изменить только уравнения (1.2).

В построенной системе дифференциально-алгебраических уравнений используются избыточные координаты, а дифференциальные уравнения, вообще говоря, не разрешены относительно первых производных фазовых переменных. Для эффективного численного интегрирования такой системы требуется представить ее в виде

$$A(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, t),$$

где вектор  $\mathbf{x}$  составлен из фазовых переменных и множителей Лагранжа, матрица  $A$  – квадратная. Это может быть сделано в полуавтоматическом режиме с помощью инструментов инфраструктуры языка `Modelica`. Эти инструменты (см., например, [91]) выполняют редукцию индекса построенной системы дифференциально-алгебраических уравнений и строят разностную схему численного решения.

Рассматриваемая в этой главе система голономна, но ее связи не идеальны. Количество степеней свободы системы равно

$$3 + N(n + 1),$$

а количество дифференциальных уравнений движения твердых тел, поступающих на вход алгоритмам инструментов `Modelica` –  $(3 + N(n + 1)) \cdot 7$ , что для экипажа с тремя колесами и четырьмя роликами на каждом составляет 208. Кроме этого, алгебраические уравнения связей также приводятся к дифференциальному виду.

Далее в разделах 2 и 3 подробно описаны геометрические построения для вывода уравнений (??) в задаче о движении экипажа с омни- и *тесанит*-колесами.

## 2 Отслеживание контакта роликов при движении омни-колеса

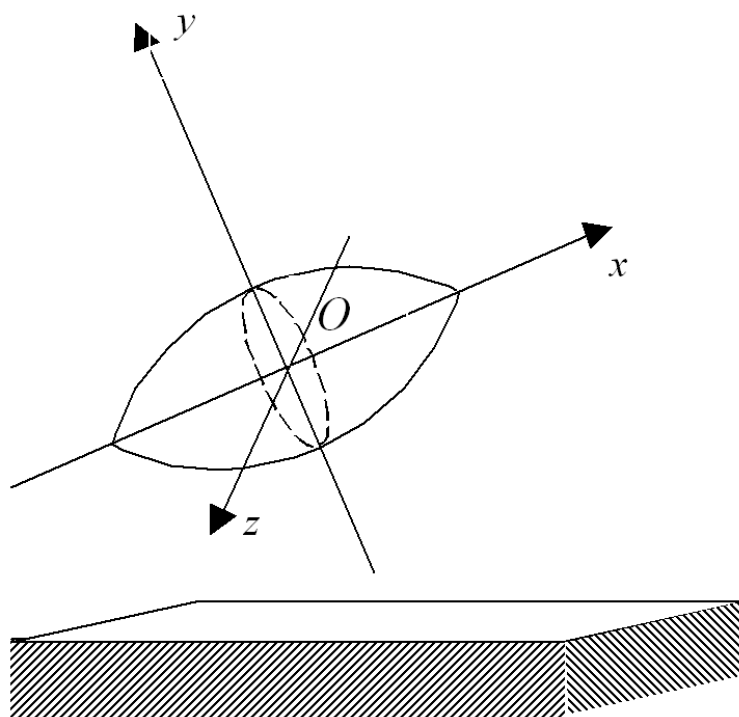
Чтобы задать уравнение (1.1), выражающее условие контактирования двух поверхностей, требуется найти радиусы-векторы ближайших точек этих по-

верхностей и записать условия равенства проекций скоростей этих точек на общую нормаль поверхностей в этих точках.

Помимо этого, необходимо вычислить касательную составляющую скорости точки одного тела относительно другого для задания модели касательной составляющей реакции (1.2) в случае неидеальных связей.

Для начала составим формулы, задающие геометрическую одностороннюю связь контакта одного неусеченного ролика колеса с  $n$  роликами и плоскости. Введем систему отсчета  $Kxyz$ , жестко связанную с роликом, следующим образом. Точку  $K$  поместим в центр ролика, ось  $x$  направим по продольной оси ролика, оси  $y$  и  $z$  расположим в плоскости, перпендикулярной оси  $x$  и содержащей  $K$ . Напомним, что ролик ограничен поверхностью вращения дуги окружности радиуса  $l$  вокруг ее хорды, отстоящей от центра  $P$  на расстояние  $r$  (обозначения см. на рис. (1.1)), так что уравнение поверхности ролика в указанных осях имеет вид (см. фиг. 3.1):

$$x^2 + \left( \sqrt{y^2 + z^2} + r \right)^2 = l^2. \quad (2.1)$$



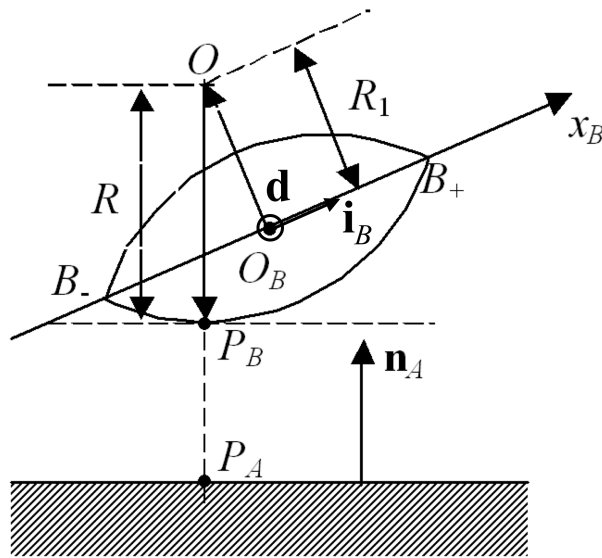
Фиг. 3.1. Ролик над горизонтальной плоскостью.

Заметим, что эта поверхность имеет в точках  $x = \pm \sqrt{l^2 - r^2}$  особенность,



что в численных алгоритмах обычно приводит к аварийному завершению вычислительного процесса моделирования, так как требуется непрерывно вычислять градиент к поверхности ролика.

В задаче о движении экипажа с омни-колесами конфигурация системы твердых тел такова, что плоскости омни-колес остаются вертикальными во все время движения, и касательная плоскость к поверхности ролика определена при любом допустимом расположении тел. При этом условии можно указать явную формулу, позволяющую вычислить ближайшую к плоскости точку  $C$  ролика. Ближайшая к  $C$  точка плоскости – всегда ее вертикальная проекция на плоскость.



Фиг. 3.2. Схема отслеживания контакта: вид сбоку отдельного ролика.

Найдем координаты точки  $C$  (см. рис. 3.2). Обозначим  $\mathbf{i}$  – единичный направляющий вектор оси ролика,  $\mathbf{r}_K$  – радиус-вектор геометрического центра ролика в текущий момент времени и  $\boldsymbol{\gamma}$  – орт нормали к плоскости, в рассматриваемой задаче являющийся единичным вектором восходящей вертикали. Введем горизонтальный единичный вектор  $\mathbf{d}$ , перпендикулярный плоскости колеса следующим образом:

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{i} \times \boldsymbol{\gamma}}{|\mathbf{i} \times \boldsymbol{\gamma}|}.$$

Пусть  $P$  – центр окружности, вращением дуги которой образована поверхность ролика (заметим, что эта же точка является центром омни-колеса).

Тогда, очевидно, отрезок  $\overrightarrow{KP}$ , расположенный в вертикальной плоскости, будет иметь длину  $r$  и задаваться формулой

$$\overrightarrow{KP} = r\mathbf{d} \times \mathbf{i}.$$

Так что самая нижняя точка  $C$  внешней поверхности ролика будет задаваться по формуле

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_K + r\mathbf{d} \times \mathbf{i} - l\boldsymbol{\gamma}, \quad (2.2)$$

поскольку точка  $K$  лежит на упоминавшейся выше окружности на общей вертикали с точкой  $P$ .

Вся описанная выше вычислительная процедура справедлива только, если вектор  $\mathbf{i}$  имеет направление, составляющее с вертикалью  $\boldsymbol{\gamma}$  угол, ограниченный значениями  $\pm \frac{\pi}{n}$ . В противном случае следует положить  $C = B_{\pm}$ , где  $B_{-}$  и  $B_{+}$  – левая и правая концевые точки ролика соответственно (см. рис. 3.2).

В конечном итоге условие контактирования ролика и плоскости можно записать в виде

$$|\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\gamma}| \leq \sin \frac{\pi}{n}. \quad (2.3)$$

Это условие, однако, позволяет из всего множества роликов колеса выделить два: нижний (контактирующий) и верхний. Чтобы отбросить последний случай, можно к полученному неравенству присоединить также требование

$$Z_K < 0 \quad (2.4)$$

где  $Z_C$  – расстояние от центра ролика до опорной плоскости.

Таким образом, конъюнкция условий (2.3) и (2.4) означает наличие контакта. Реализация контакта геометрически означает выполнение скалярного условия

$$Z_C = 0, \quad (2.5)$$

позволяющего, вместе с уравнениями динамики твердого тела, вычислить величину нормальной реакции  $F_n$ , приложенной в точке  $C$ . Отсутствие контакта доставляет выполнение альтернативного, также скалярного, условия равенства нормальной реакции нулю

$$F_n = 0.$$

Вычислительная практика показала, что условие контакта в форме (2.5) стабильно приводит к аварийному завершению процесса симуляции динамической модели ролика. Аналогичный результат получается, если в качестве уравнения контактирования использовать уравнение, требующее равенства нулю нормальной составляющей скорости  $v_n$  точки контакта:

$$v_n := \mathbf{v}_C \cdot \boldsymbol{\gamma} = \left( \mathbf{r}_C + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{K\vec{C}} \right) \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0. \quad (2.6)$$

И только уравнение вида

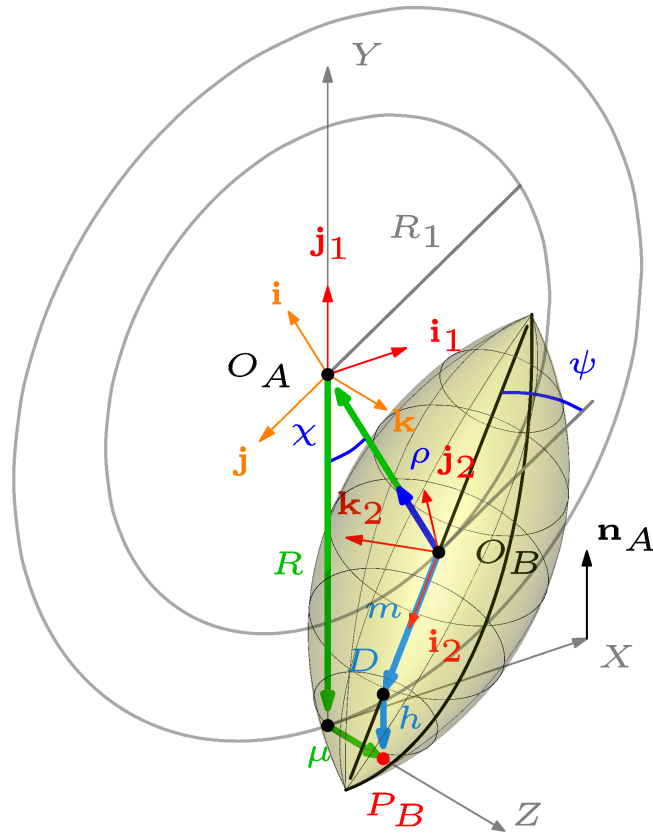
$$\dot{v}_n = 0 \quad (2.7)$$

приводит к требуемому результату – корректной отработке процесса численного решения (выполняемого в данном случае инструментами языка *Modelica* [91]).

Этим завершается рассмотрение алгоритма отслеживания контакта в ролика омни-колеса и опорной плоскости. В следующем разделе построим аналогичный алгоритм для ролика *tesaput*-колеса, где ось ролика расположена под углом к плоскости колеса.

### 3 Отслеживание контакта в случае *tesaput* колеса

Обозначим угол наклона оси ролика к плоскости колеса  $\psi$ . В предыдущей конфигурации этот угол равен нулю. Расширим алгоритм отслеживания контакта, описанный выше для случая  $\psi = 0$  на конфигурацию *tesaput*,  $\psi > 0$ . В этом случае, в первую очередь, отметим отличия в геометрической форме роликов. Каждый ролик – это твердое тело, ограниченное поверхностью вращения некоторой кривой вокруг его оси. В случае  $\psi = 0$  эта кривая – дуга окружности, но при  $\psi > 0$ , для того, чтобы проекция внешней границы колеса на его плоскость оставалась окружностью, форма роликов должна быть более сложной – образующая кривая становится алгебраической кривой четвертого порядка [2].



Фиг. 3.3. Отслеживание контакта для колеса *месанит*

### Неявный алгоритм отслеживания контакта

Для решения задачи отслеживания контакта снова требуется указать два выражения: формулу для нахождения координат точки контакта и условие наличия контакта как такового. В случае *месанит*, в отличие от случая омни-колеса, точка контакта  $C$ , вообще говоря, не лежит в плоскости, содержащей диск колеса. Способ нахождения радиуса-вектора  $\mathbf{r}_C$  точки контакта, предлагаемый в настоящем разделе, основан на вычислении расстояния  $\lambda$  от этой плоскости до  $C$ . Условие наличия контакта аналогично полученному в предыдущем разделе, но для его проверки требуется учесть отличия в геометрии ролика:  $\psi \neq 0$ .

Как и в случае  $\psi = 0$ , определим направление “на центр колеса” от центра ролика, т.е. вектор

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_K}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_K|}.$$

Таким образом, ролик находится в контакте, если только если

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_z < \cos \frac{\pi}{n} \text{ и } z_C < l.$$

Также определим вектор  $\mathbf{k}$ , направленный вдоль оси колеса (т.е. перпендикулярно плоскости колеса). Тогда радиус-вектор  $\mathbf{r}_C$  точки контакта  $C$  можно выразить следующим образом через введенные векторы и радиус-вектор  $\mathbf{r}_K$  центра ролика  $K$ :

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_K + r\mathbf{s} - l\mathbf{e}_z + \lambda\mathbf{k}. \quad (3.1)$$

Компоненты векторов  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{k}$ , а также расстояние от плоскости колеса до точки контакта  $\lambda$  требуется вычислить. Для этого введем три вспомогательные системы отсчета и, пользуясь ими, дадим необходимые выражения.

Введем систему отсчета  $Pijk$ , жестко связанную с колесом (см. фиг. 3.3), с началом в его центре  $P$ . Пусть вектор  $\mathbf{k}$  направлен вдоль оси колеса,  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  лежат в его плоскости. Дополнительно введем также системы отсчета  $Pi_1j_1k_1$  и  $Ki_2j_2k_2$ , где  $K$  – центр ролика.

Вектор  $\mathbf{i}_1$  направим вдоль линии пересечения плоскости колеса и горизонтальной плоскости. Пусть вектор  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$  совпадает с вектором  $\mathbf{k}$  базиса, связанного с колесом, ортогонален плоскости колеса и всегда горизонтален.  $\mathbf{j}_1$  положим совпадающим с вектором восходящей вертикали  $\boldsymbol{\gamma}$ . Тогда  $\mathbf{i}_1$  определим как  $\mathbf{i}_1 = \mathbf{j}_1 \times \mathbf{k}_1$ .

Вектор  $\mathbf{i}_2$  направим вдоль оси собственного вращения ролика, см. фиг. 3.3. Этот вектор по определению не может принять вертикальное положение при  $\psi = 0$ , если ролик находится в контакте с опорной плоскостью, а, в случае *тесанит* ролик повернут на постоянный угол  $\psi > 0$  относительно оси  $PK$ , и потому соотношение  $\mathbf{i}_2 \neq \boldsymbol{\gamma}$  верно во все время движения. Это обстоятельство позволяет определить вектор  $\mathbf{c} = \mathbf{i}_2 \times \boldsymbol{\gamma}$ , всегда отличный от нуля. Положим  $\mathbf{k}_2 = \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}$ . Вектор  $\mathbf{j}_2$  положим ортогональным  $\mathbf{i}_2$  и лежащим в вертикальной плоскости как  $\mathbf{j}_2 = \mathbf{k}_2 \times \mathbf{i}_2$ .

Для определения компонент вектора  $\mathbf{s}$  теперь воспользуемся кинематическими соотношениями, условиями ортогональности векторов, следующими из определений введенных систем отсчета:

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{i}_2 = 0, \quad \mathbf{s} \cdot \mathbf{k}_1 = 0,$$

а точнее, их дифференциальными вариантами:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{s} \cdot \mathbf{i}_2 + \mathbf{s} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{i}_2 = 0, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{s} \cdot \mathbf{k}_1 + \mathbf{s} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{k}_1 = 0.$$

Итак, окончательно, чтобы получить число  $\lambda$ , умножим уравнение (3.1) скалярно на  $\mathbf{k}_2$ . Поскольку  $\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_K$  лежит в вертикальном сечении осесимметричной поверхности ролика, и вектор  $\mathbf{k}_2$  по построению ортогонален этому сечению, расстояние  $\lambda$  от плоскости колеса до точки контакта  $C$  определяется однозначно как

$$\lambda = \frac{(\mathbf{r}_S - l\mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{k}_2}{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2},$$

а вместе с ним, и весь радиус-вектор  $\mathbf{r}_C$ . Для завершения алгоритма отслеживания контакта, аналогично предыдущему разделу, связь представляется в виде (??).

### Явный алгоритм отслеживания контакта

Для полноты изложения, приведем еще один способ вычисления компонент радиуса-вектора  $\mathbf{r}_C$  точки контакта  $C$  или, точнее, точки ролика, ближайшей к опорной плоскости, предложенный С.Я.Степановым [115]. Способ заключается в применении следующего набора равенств (см. фиг. 3.3):

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_K + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{KB} = -a\mathbf{i}_2, \quad \overrightarrow{DC} = -h\mathbf{j}_1,$$

где  $a = r \frac{\sin \chi}{\cos \chi \cos \psi}$ ,  $h = l - \frac{r}{\cos \chi}$ . Здесь  $\chi$  – текущее значение угла отклонения вектора  $\mathbf{s}$  из предыдущего раздела от вертикали. Таким образом,

$$\cos \chi = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad \sin \chi = (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{s}) \cdot \mathbf{k}_1.$$

Кривая, образующая поверхность ролика, пересекает его ось в окрестности острия и переходит на противоположную сторону (параметризация образующей кривой, поверхности ролика и сечения этой поверхности плоскостью, содержащей ось ролика, приведены в [2]), в связи с чем необходимо ограничить длины роликов величиной

$$L = 2l \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \psi},$$

где  $\frac{\pi}{n}$  – половина угла раствора дуги окружности, ограничивающей проекцию ролика на плоскость колеса. При такой конструкции переход колеса с одного ролика на другой происходит мгновенно. Отметим, что при этом след

колеса на плоскости имеет разрыв, поскольку точка контакта мгновенно переходит на противоположный «борт» колеса. Это обстоятельство, впрочем, не препятствует эффективному численному решению.

## 4 Моделирование трения в контакте

Конструкция омни-колеса такова, что в каждый момент времени имеется только один ролик, контактирующий с опорной поверхностью. Для остальных роликов при этом во время расчета алгоритм отслеживания контакта продолжает работать, генерируя в нулевые реакции.

В случае фактического выполнения контакта помимо нормальной реакции вычисляется также её касательная составляющая, симулирующая силу трения. Для касательного контактного усилия имеется (как и для нормального) множество различных моделей. Мы остановились на реализации двух случаев при одноточечном твердотельном контакте:

1. регуляризованное сухое трение

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\mu N \mathbf{v}_C \begin{cases} \frac{1}{\delta}, & |\mathbf{v}_C| < \delta \ll 1 \\ \frac{1}{|\mathbf{v}_C|} & \text{иначе} \end{cases}$$

2. вязкое трение

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\gamma \mathbf{v}_C$$

При этом, как известно, идеальный «сухой» случай реализовать не удастся, поэтому вместо разрывной функции от касательной скорости относительного скольжения контактирующих поверхностей, в первом случае используется её регуляризованный в нуле вариант. Вместо функции *sign* применяется функция насыщения, представляющая собой линейный участок с достаточно большим угловым коэффициентом в окрестности нуля. Для таких функций известен результат [88] о близости аппроксимирующего движения и движения, соответствующего точному случаю разрывной функции *sign*. В целом, реализация модели неударживающей связи основана на результатах [94].

## 5 Результаты численного моделирования

В настоящем разделе описаны результаты двух видов расчетов. Во-первых, проведенной верификации модели экипажа на плоскости с регуляризованным сухим трением в сравнении с безынерционной моделью. Сравнение устроено при стремлении доли массы ролика в общей массе омни-колеса к нулю. Во-вторых, качественно сравнивается движение экипажа на плоскости с вязким трением с достаточно большим коэффициентом и движение модели, построенной в главах 1 и 2.

### 5.1 Верификация модели с сухим трением

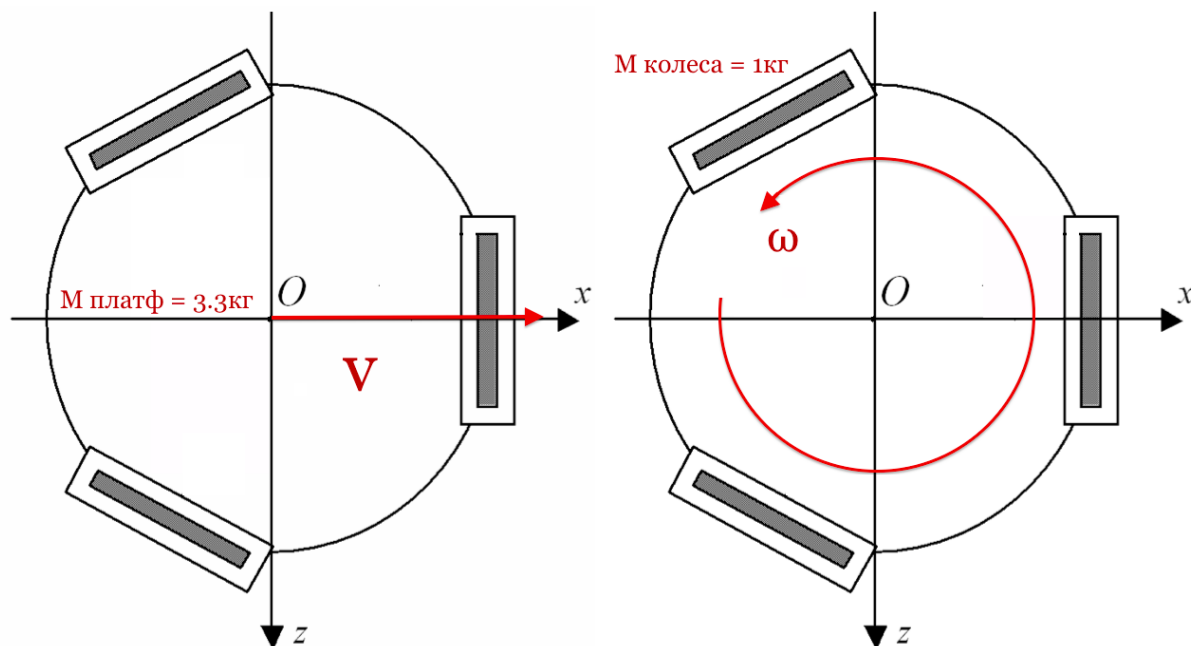
Для проверки взаимной корректности безынерционной модели и модели с сухим трением проведены численные испытания, в которых, при прочих равных, изменялась величина  $\frac{m_{\text{рол}}}{m_k}$  – отношение массы одного ролика к массе колеса в целом. В этом случае оказалось, что при уменьшении данного параметра движение экипажа и омни-колес неограниченно приближаются к соответствующим функциям решения задачи Коши, получаемым в силу дифференциальных уравнений движения, используемых в работе [24], в которых динамика роликов не учитывается. При этом остальные параметры экипажа, такие как массы его частей, их моменты инерции, геометрические размеры, положения, а также начальные данные – скорость центра масс и угловая скорость платформы, задавались согласованными между двумя моделями. Как и в главах 1 и 2, рассматривается симметричная конфигурация экипажа. Однако концы роликов в данном рассмотрении не усекаются: в силу выбора модели контактных сил и построенного явного алгоритма отслеживания контакта, особенность на острии ролика не препятствует проведению расчетов. Количество роликов  $n$  равно 4. Рассмотрены два типа начальных условий  $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)^T, \omega(0) = \omega_0$  (см. рис. 3.4):

1. экипаж имеет начальную линейную скорость в направлении одного из колес и не закручен (ожидаемый результат - центр масс экипажа движется вдоль оси  $Ox$ , экипаж не вращается),
2. экипаж закручен вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр



масс, скорость центра масс равна нулю (ожидаемый результат - экипаж вращается вокруг своей вертикальной оси симметрии, и центр масс покоится).

Значения отношения  $\frac{m_{\text{рол}}}{m_k}$  массы ролика к общей массе колеса принимали в обоих случаях значения от  $10^{-6}$  до  $10^{-1}$  с шагом 1 по порядку малости.



Фиг. 3.4. Параметры экспериментов

В таблице (??) приведены величины отличий угла курса  $\theta$  экипажа и координат центра масс  $x, y$  к моменту безразмерного времени  $t = 10$ . Отличия уменьшаются с уменьшением порядка величины отношения массы одного ролика  $m_{\text{рол}}$  к суммарной массе колеса  $m_k$ .

На рис. 3.5 приведены примеры траектории центра масс  $y(x)$  и зависимости  $\psi(t)$  угла поворота  $\psi$  платформы вокруг вертикальной оси, проходящей через её центр, для случаев 1) и 2). Кривые  $y(x)$ , изображающие траектории центра масс, соответствуют, в сущности, точке – началу координат – в случае  $v_0 = 0, \omega_0 = 1$ , и отрезку прямой, совпадающей с осью  $x$ , в случае  $v_0 = 1, \omega_0 = 0$ , т.к. масштаб отображения таков, чтобы были видны отклонения от точных значений, возникающие в силу вычислительной погрешности, но сами эти отклонения имеют порядок малости, позволяющий считать их нулевыми. Аналогичное утверждение верно и для зависимости угла поворота

|                                       | Движение 1        | Движение 2                     |
|---------------------------------------|-------------------|--------------------------------|
| $\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}}$ | $\Delta\theta$    | $\max( \Delta x ,  \Delta y )$ |
| $10^{-1}$                             | $\approx 1$       | $\approx 1$                    |
| $10^{-2}$                             | $\approx 10^{-1}$ | $\approx 0.5$                  |
| $10^{-3}$                             | $\approx 10^{-2}$ | $\approx 10^{-1}$              |
| $10^{-4}$                             | $\approx 10^{-3}$ | $\approx 10^{-2}$              |
| $10^{-5}$                             | $\approx 10^{-3}$ |                                |
| $10^{-6}$                             | $\approx 10^{-4}$ |                                |

Таблица 3.1. Порядок различий в значениях угла курса платформы  $\theta$  и координат центра масс  $x, y$  экипажа при движениях 1 и 2 и уменьшении  $\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}}$

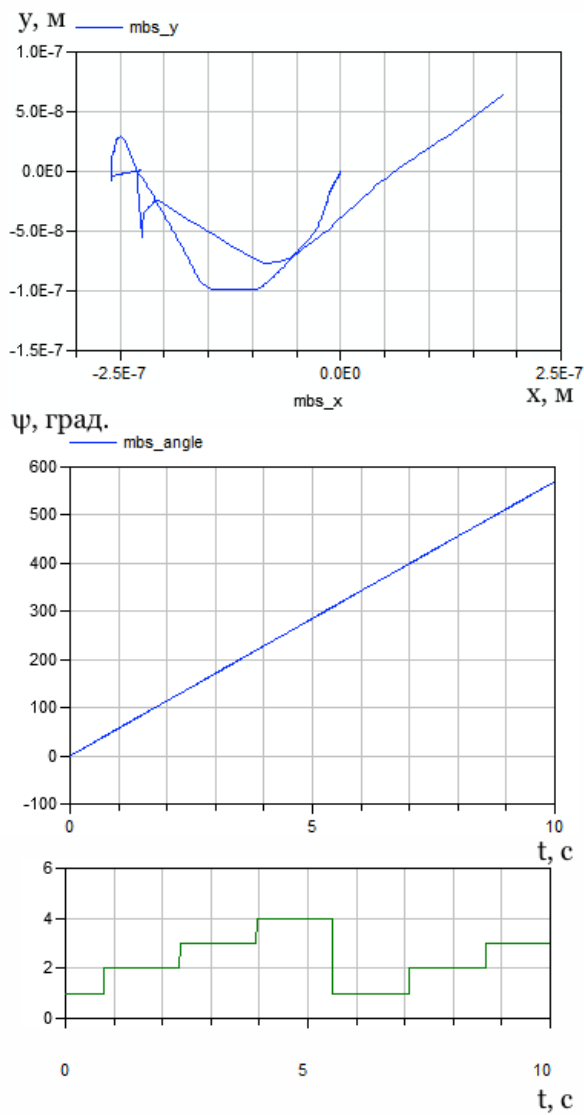
платформы  $\psi$  от времени в случае поступательного движения - полученная зависимость близка к постоянной.

Ниже представлены результаты нескольких численных экспериментов. Во всех случаях величины, изображенные на рис. 3.5, демонстрируют поведение, не различимое в масштабе рис. 3.5, и поэтому приведены лишь расхождения между построенной нами моделью и верификационной идеализацией, которые и представляют интерес. Также представлена абсолютная величина скорости скольжения в точке контакта в физической модели.

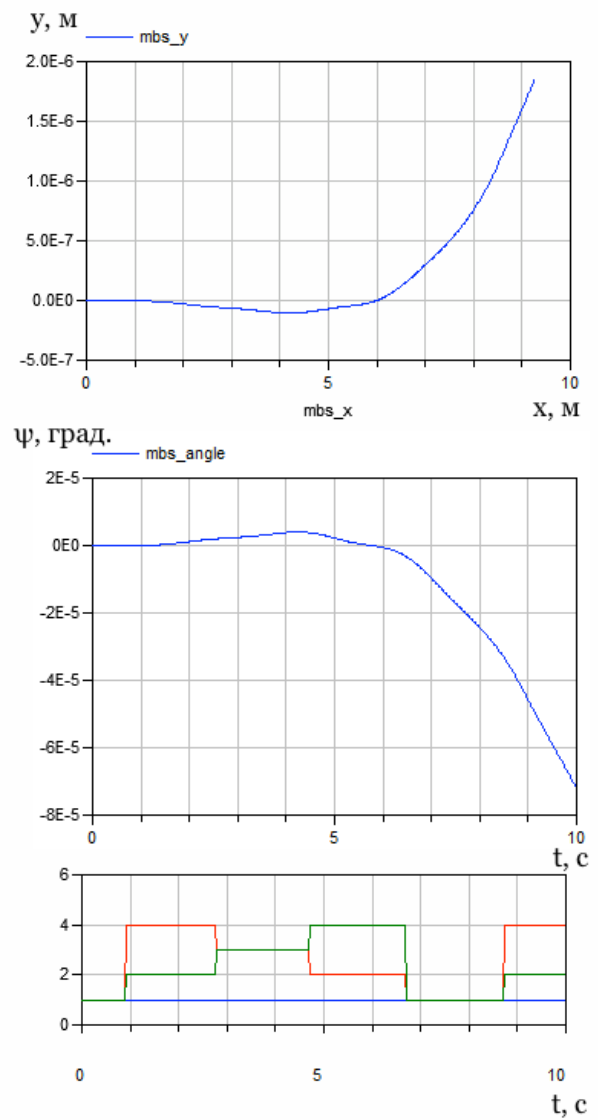
Графики зависимости скорости скольжения от времени показывают, что скольжение имеет место в окрестности момента смены роликов. Для вращательного движения это объясняется наличием того же динамического эффекта раскручивания роликов, что был обнаружен в главах 1 и 2: скользят именно вновь входящие в контакт ролики, но не ролики, уже находящиеся в контакте достаточное время. В случае поступательного движения платформы экипажа дополнительно возникает раскручивание роликов задних колес, находящихся в контакте, поскольку для идеального качения при подходе к острию, ролику необходима бесконечная угловая скорость собственного вращения, т.к. его радиус вблизи острия стремится к нулю.

Видно, что с ростом доли массы роликов в общей массе колеса скольжение в контакте становится существеннее, изменяясь от пренебрежимо малого при  $\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-6}$  до весьма существенного уже при  $\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-3}$ . Тем не менее,

расхождения траектории и угла поворота платформы малы, а скольжение наблюдается лишь в точках колеса, которые в промышленных конструкциях не присутствуют (см. Обзор), что и позволяет считать верификацию проведенной.

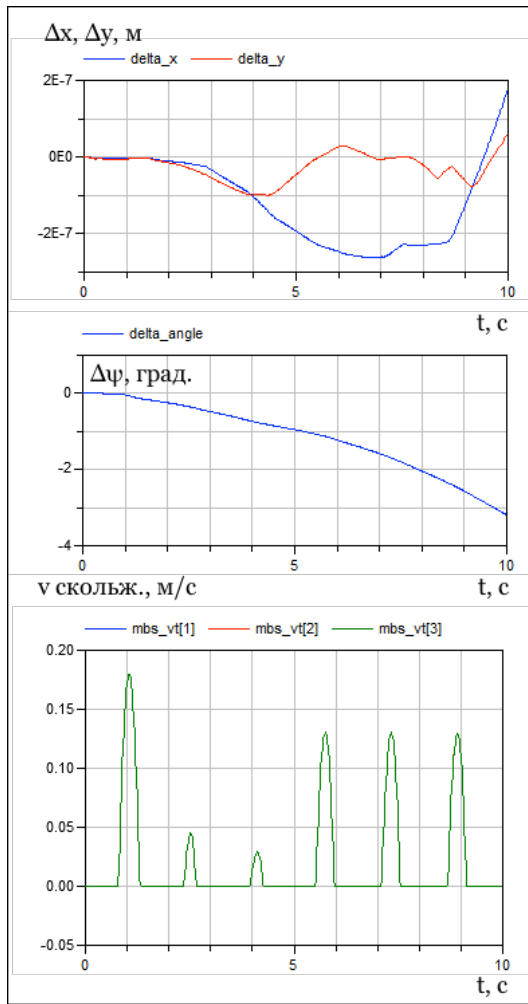


(a)  $\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 0, 1, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

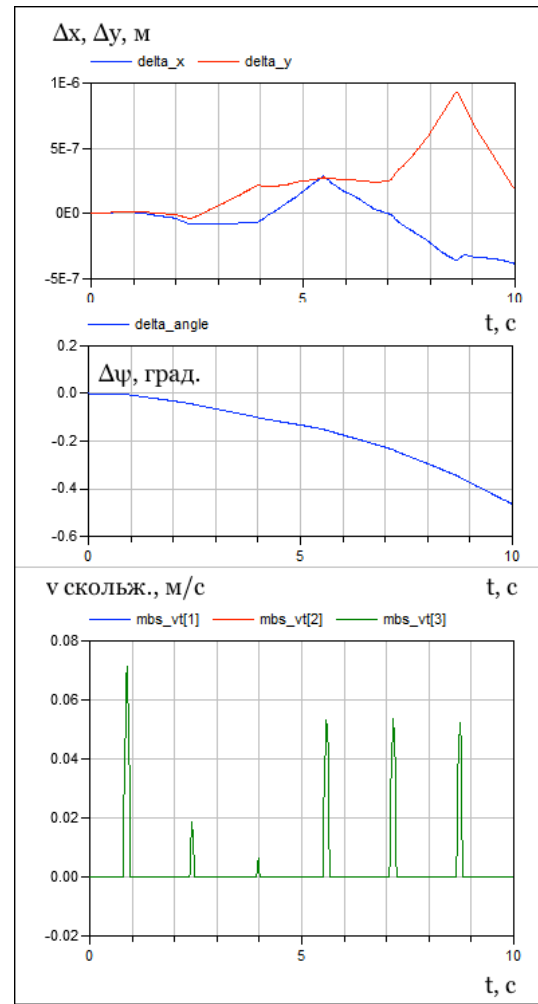


(b)  $\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 0, 1, v_0 = 1, \omega_0 = 0$

Фиг. 3.5. Примеры траекторий, характера изменения угла и смены номеров роликов в контакте для двух типов начальных условий. На нижнем графике - номер ролика в контакте, см. рис. ??

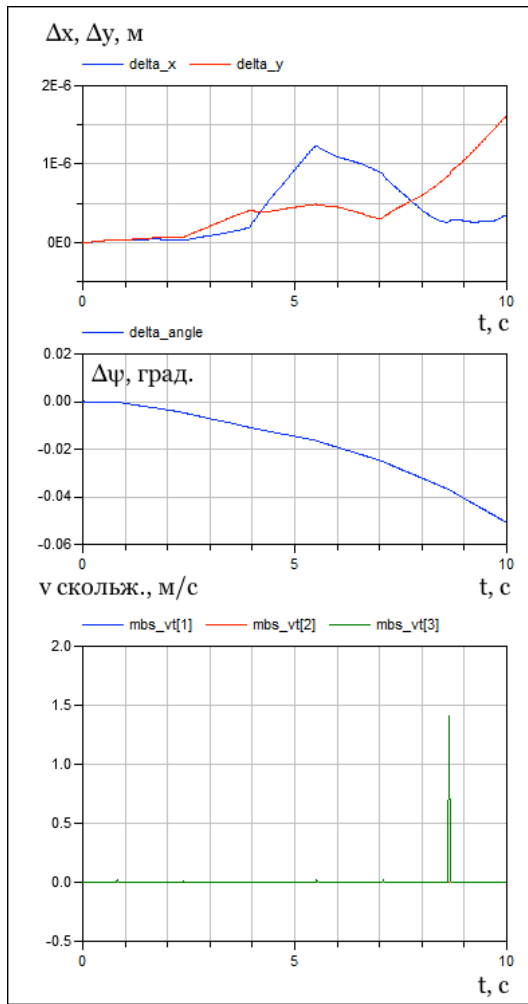


$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-1}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

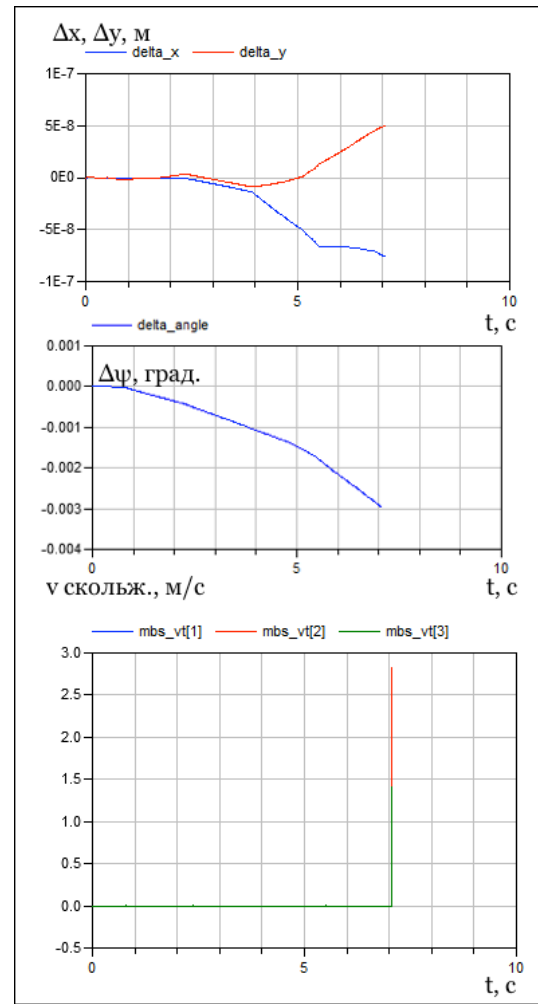


$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-2}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

Фиг. 3.6. Движение 1 экипажа на плоскости с сухим трением,  $\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-1}, 10^{-2}$

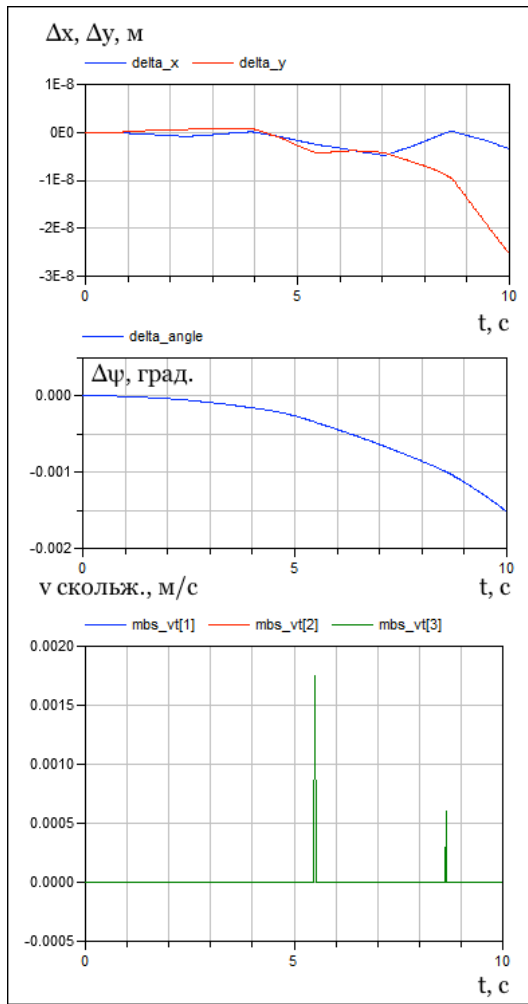


$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-3}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

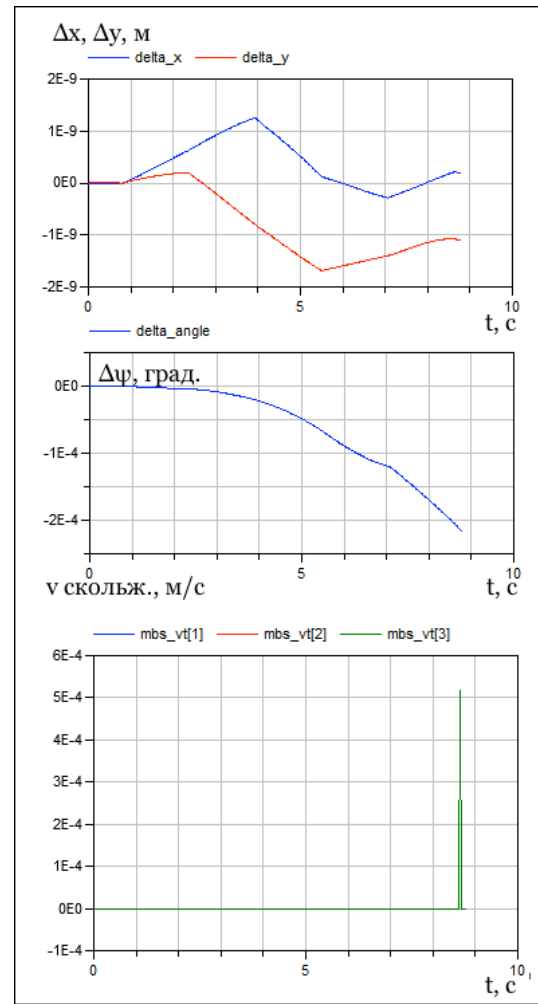


$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-4}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

Фиг. 3.7. Движение 1 экипажа на плоскости с сухим трением,  $\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-3}, 10^{-4}$

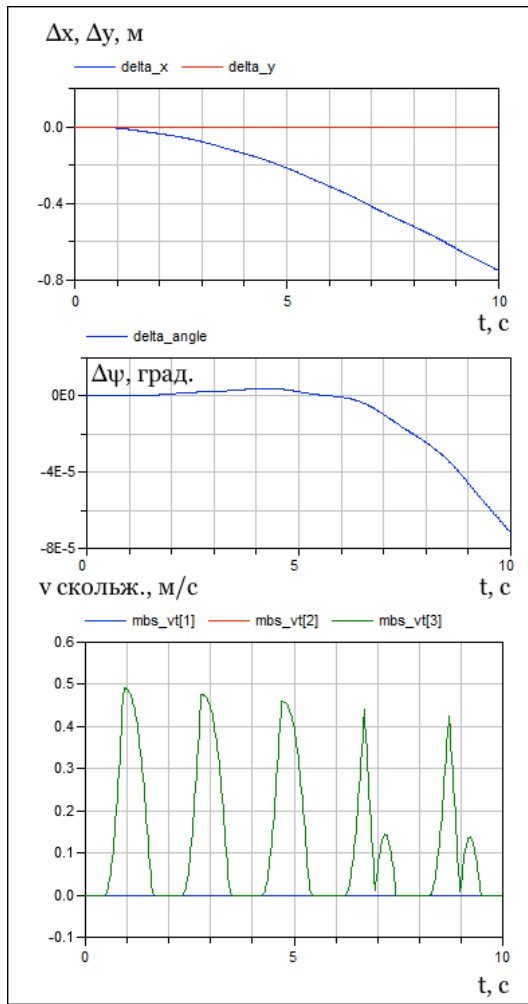


$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

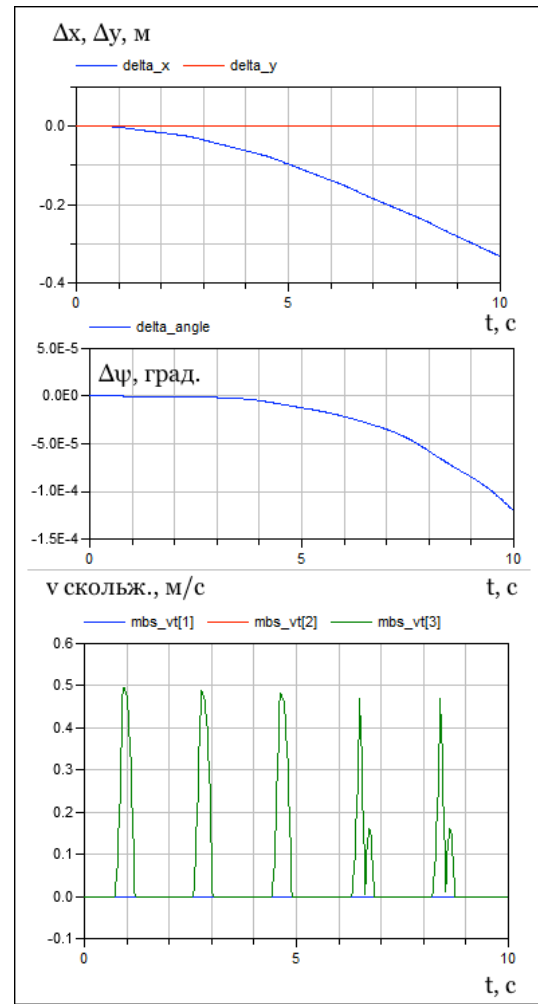


$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$$

Фиг. 3.8. Движение 1 экипажа на плоскости с сухим трением,  $\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-5}, 10^{-6}$



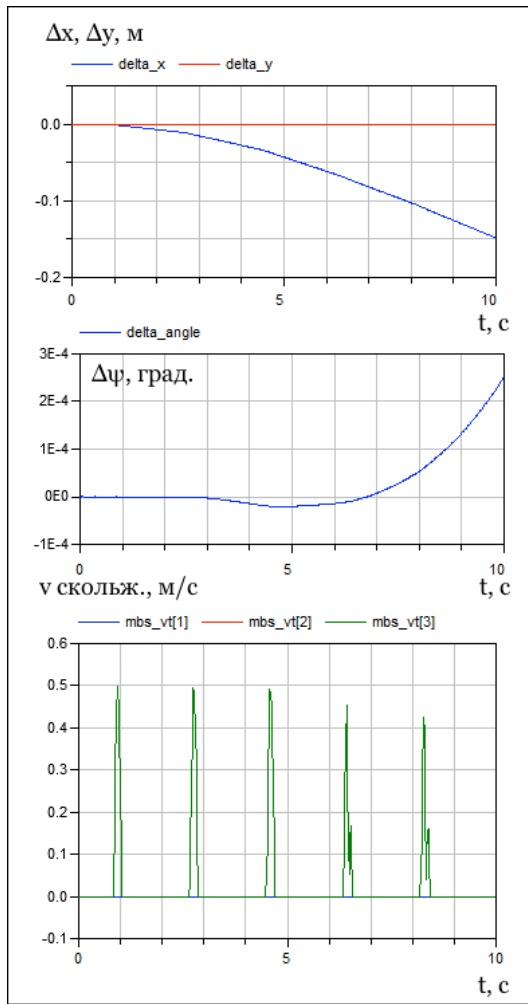
$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-1}, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$



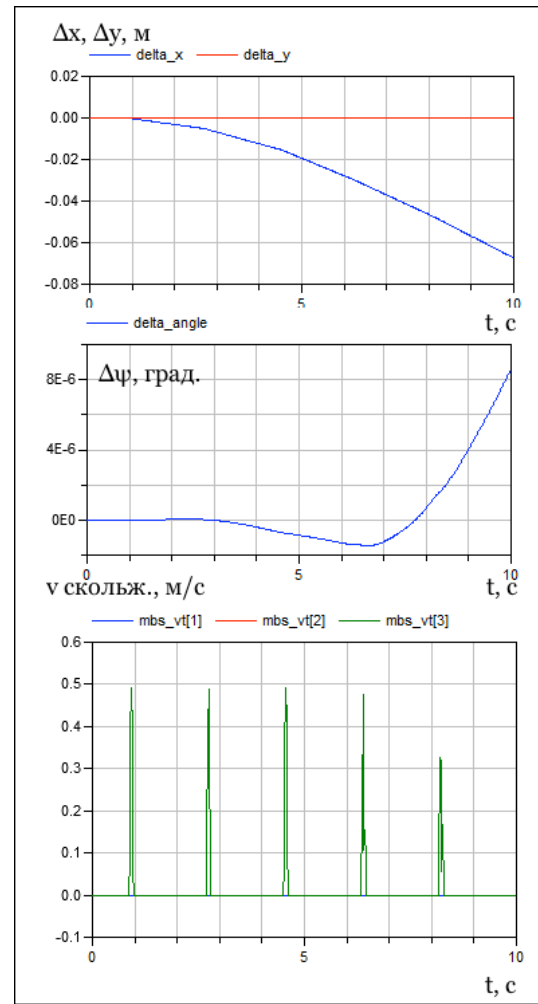
$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-2}, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

Фиг. 3.9. Движение 2 экипажа на плоскости с сухим трением,  $\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-1}, 10^{-2}$





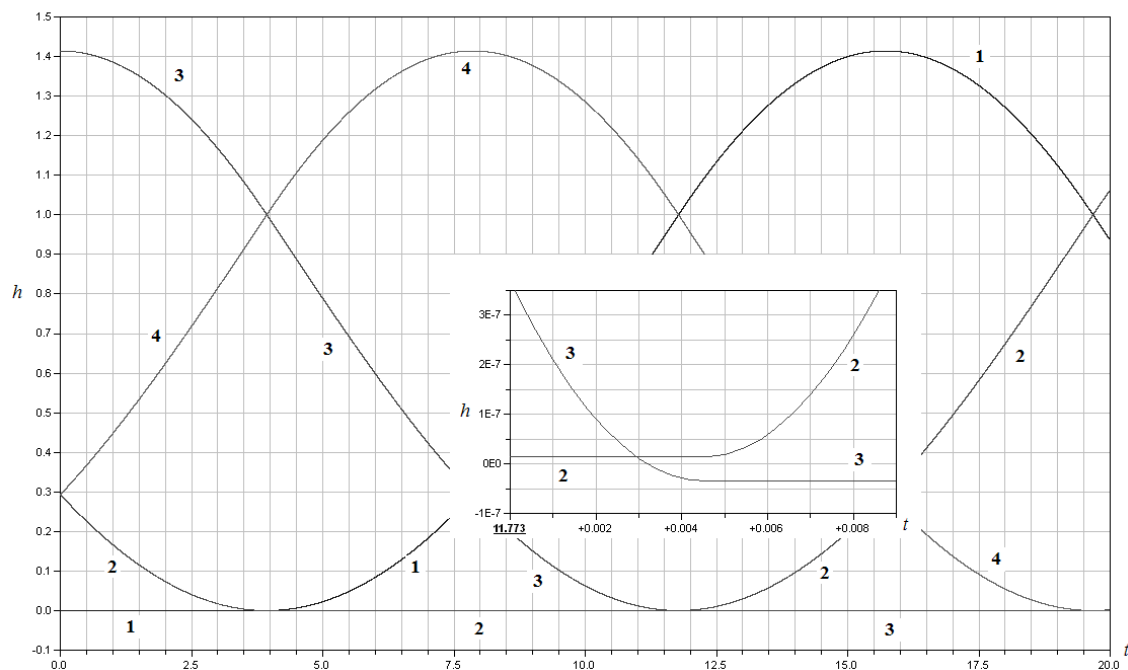
$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-3}, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$



$$\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-4}, v_0 = 1, \omega_0 = 0$$

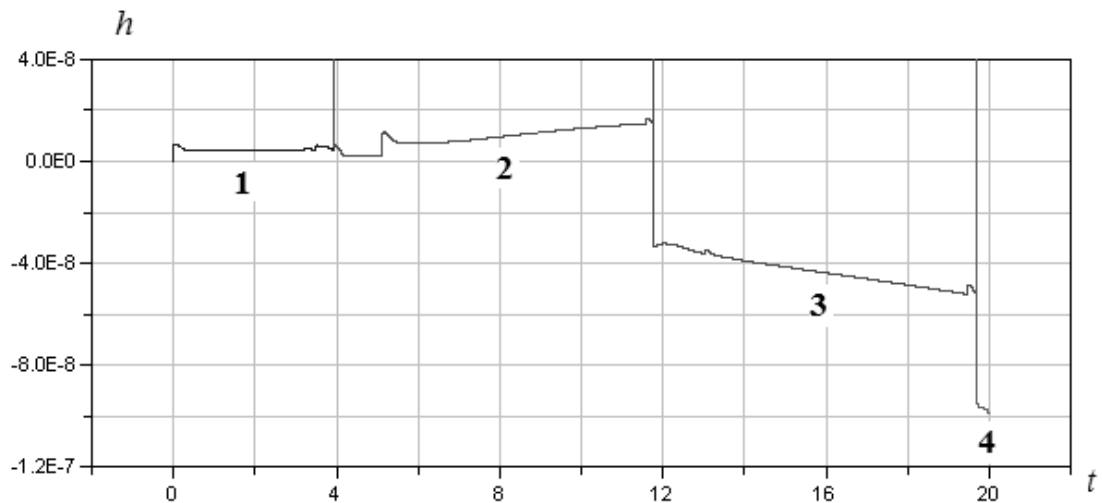
Фиг. 3.10. Движение 1 экипажа на плоскости с сухим трением,  $\frac{m_{\text{рол}}}{m_k} = 10^{-3}, 10^{-4}$

Эволюция процесса контактирования для отдельного катящегося омни-колеса показана на Рис. 3.11, где представлены зависимости расстояний  $h$  между горизонтальной плоскостью и роликами одного и того же колеса, находящимися в разных фазах (перед контактом, в контакте, после контакта). Номер кривой соответствует номеру ролика на колесе. В увеличенном масштабе показан момент безударного гладкого переключения поверхностей контактирования роликов и горизонтальной плоскости.



Фиг. 3.11. Процесс смены роликов в контакте в численной модели.

Одновременно можно наблюдать точность соблюдения неуклоняющей связи (Рис. 3.13). Здесь обнаруживается процесс постепенного увеличения вычислительной ошибки – расстояние между контактирующими телами медленно, для каждого последующего ролика в контакте, увеличивается. В то же время, абсолютная величина ошибки остается пренебрежимо малой – около  $10^{-7}$  от единицы длины.



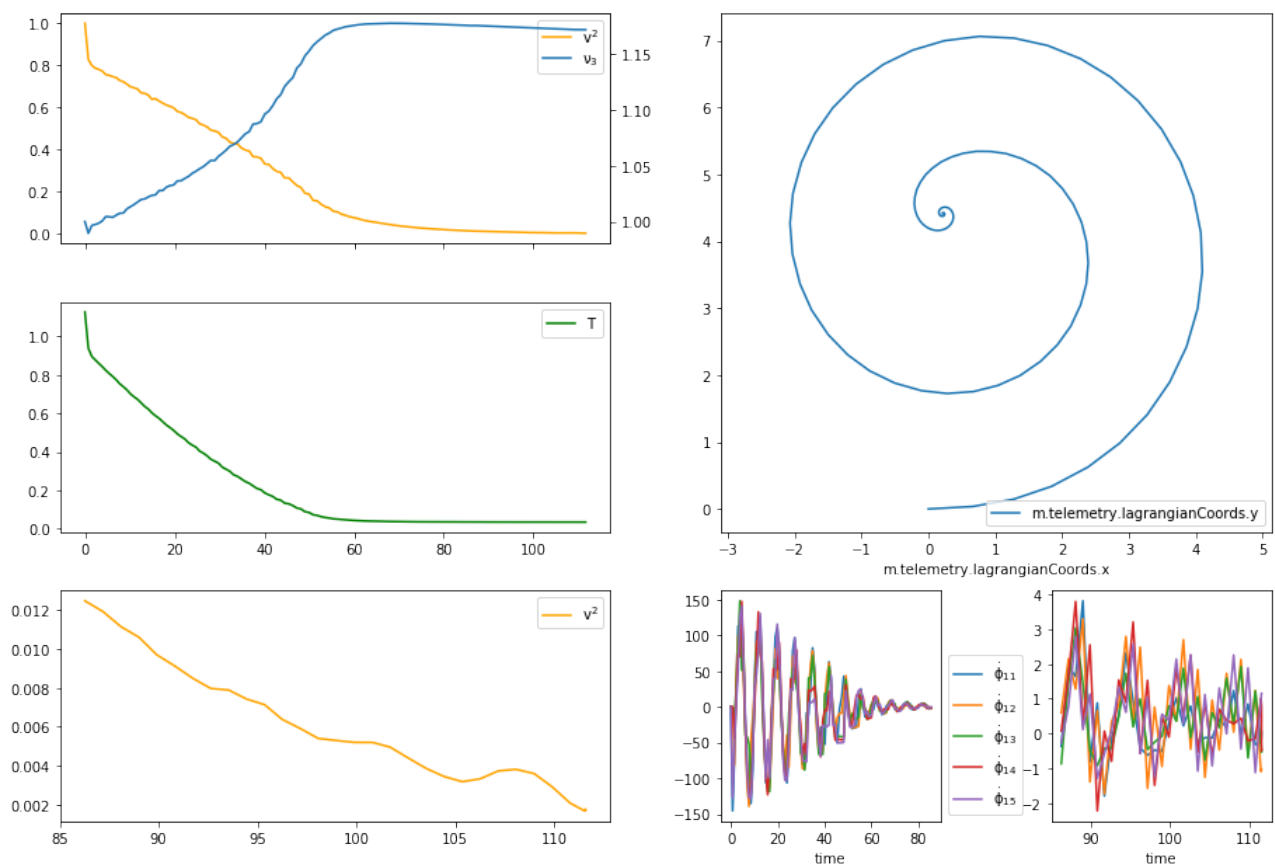
Фиг. 3.12. Точность сохранения неударивающей связи.

## 5.2 Качественное сравнение модели с вязким трением и безынерционной модели

Для модели с вязким трением были проведены расчеты, аналогичные движению 3 из главы 2. Конфигурация экипажа также симметрична, ролики усечены, на каждом колесе пять роликов.

Обнаружены динамические эффекты, аналогичные показанным в главе 2: характерный спиральный вид траектории центра масс на опорной плоскости возникает и в данной модели; видно раскручивание роликов; возрастание угловой скорости платформы экипажа, одновременное с убыванием поступательной скорости её центра; последующее медленное убывание угловой скорости; убывание кинетической энергии экипажа.

В данном расчете коэффициент вязкого трения принимался достаточно большим:  $10^5$ . Такое значение позволило моделировать ударный характер переходных процессов при смене ролика в контакте. На гладких участках движения сходство с движением неголономной модели соответствует результату [62].



Фиг. 3.13. Характер движения системы с вязким трением при комбинации начальных условий движений 1 и 2. По оси абсцисс всюду, кроме правого верхнего графика отложено время

# Результаты, выносимые на защиту

1. Построены модели экипажа с омни-колесами, движущегося по горизонтальной плоскости по инерции: неголономная с идеальными связями и голономная с неидеальными. Обе модели учитывают инерцию роликов омни-колес.
2. Первая модель получена в предположении, что ролик омни-колеса не проскальзывает относительно плоскости (связи идеальны). Уравнения движения на гладких участках (т.е. между сменой ролика в контакте) получены аналитически в псевдоскоростях и представляют собой уравнения 33 порядка для экипажа с 3 колесами и 5 роликами на каждом колесе. С помощью теории удара расчет изменения обобщенных скоростей при смене ролика в контакте сведен к решению системы линейных алгебраических уравнений, имеющей единственное решение в т.ч. при кратном ударе.
3. Аналитически показано, что при равенстве осевого момента инерции ролика нулю, её уравнения движения совпадают с уравнениями движения безынерционной модели [20].
4. Показано, что линейный первый интеграл, существующий в безынерционной модели, разрушается при осевом моменте инерции, отличном от нуля. При этом скорость изменения значения этого интеграла пропорциональна осевому моменту инерции ролика. Найдены линейные интегралы, связывающие угловую скорость платформы экипажа и скорости собственного вращения роликов, не находящихся в контакте.

5. В ходе численных экспериментов обнаружен эффект быстрого убывания скорости центра масс по сравнению с угловой скоростью платформы экипажа.
6. Модель с неидеальными голономными связями реализована в системе автоматического построения численных динамических моделей для вязкого трения и для регуляризованного сухого трения. Для этого найдены геометрические условия контакта роликов омни- и месапит-колес и опорной плоскости.
7. Численно показано, что при стремлении осевого момента инерции ролика к нулю, движения системы с трением стремятся к движениям безынерционной модели. Обнаружено качественное сходство траекторий системы с вязким трением с достаточно большим коэффициентом трения с движениями модели, рассмотренной в главах 1 и 2.
8. Как-то красиво – о единстве трех разных моделей экипажа: с ударами, с сухим трением и с вязким трением.

# Литература

1. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Изв. РАН. Теория сист. управл. 2007. 2007. № 6. С. 142–149.
2. Gferrer A. Geometry and Kinematics of the Mecanum Wheel // Computer Aided Geometric Design. 2008. Т. 25. С. 784–791. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cagd.2008.07.008>.
3. Seeni Aravind, Schäfer Bernd, Hirzinger Gerd. Robot Mobility Systems for Planetary Surface Exploration – State-of-the-Art and Future Outlook : A Literature Survey // Aerospace Technologies Advancements. 2010. № January. С. 189–208.
4. Мартыненко Ю.Г. Управление движением мобильных колёсных роботов // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11, № 8. С. 29–80.
5. Martynenko Yu G. Motion control of mobile wheeled robots // Journal of Mathematical Sciences. 2007. Т. 147, № 2. С. 6569–6606.
6. Голубев Ю.Ф. Построение движений робота-снейкбордиста // препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 2004.
7. Ilon B. E. Wheels for a Course Stable Selfpropelling Vehicle Movable in Any Desired Direction on the Ground or Some Other Base. 1972.
8. Campion Guy, Bastin Georges, Dandrea-Novel B. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 1996. Т. 12, № 1. С. 47–62. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/481750/>.
9. Zimmermann Klaus, Zeidis Igor, Behn Carsten. Mechanics of Terrestrial Locomotion. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. С. 289. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-540-88841-3>.

10. Chung Woojin, Iagnemma Karl. Wheeled Robots // Springer Handbook of Robotics. Cham: Springer, 2016. С. 575–594.
11. Kanjanawanishkul Kiattisin. Omnidirectional wheeled mobile robots: wheel types and practical applications // International Journal of Advanced Mechatronic Systems. 2015. Т. 6, № 6. С. 289. URL: <http://www.inderscience.com/link.php?id=74788>.
12. Adascalitei Florentina, Doroftei Ioan. Practical Applications for Mobile Robots based on Mecanum Wheels - a Systematic Survey // Proceedings of International Conference On Innovations, Recent Trends And Challenges In Mechatronics, Mechanical Engineering And New High-Tech Products Development – МЕКАНITECH'11. Т. 3. 2011. С. 112–123.
13. Зобова А.А., Татаринов Я.В. Математические аспекты динамики движения экипажа с тремя окольцованными колесами // Мобильные роботы и мехатронные системы. 2006. С. 61–67.
14. Zobova A.A., Tatarinov Ya.V. The dynamics of an omni-mobile vehicle // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2009. Т. 73. С. 8–15.
15. Зобова А.А., Татаринов Я.В. Свободные и управляемые движения некоторой модели экипажа с роликонесущими колесами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. М., 2008. № 6. С. 62–65.
16. Зобова А.А., Татаринов Я.В. Динамика экипажа с роликонесущими колесами // ПММ. 2009. Т. 73, № 1. С. 13–22.
17. Zobova A. A. Application of laconic forms of the equations of motion in the dynamics of nonholonomic mobile robots // Nelineinaya Dinamika. 2011. Т. 7, № 4. С. 771–783. URL: <http://nd.ics.org.ru/nd1104003/>.
18. Татаринов Я.В. Уравнения классической механики в новой форме // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. 2003. Т. 3. С. 67–76.
19. Татаринов Я.В. Уравнения классической механики в лаконичных формах. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005. С. 88.



20. Зобова А.А. Применение лаконичных форм уравнений движения в динамике неголономных мобильных роботов // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4. С. 771–783.
21. Martynenko Yu.G., Formal'skii A.M. On the Motion of a Mobile Robot with Roller-Carrying Wheels // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2007. Т. 46, № 6. С. 976–983.
22. Мартыненко Ю.Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // ПММ. 2010. Т. 74, № 4. С. 610–619.
23. Martynenko Yu G. Stability of steady motions of a mobile robot with roller-carrying wheels and a displaced centre of mass // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2010. jan. Т. 74, № 4. С. 436–442. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.09.009>  
<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0021892810001139>.
24. Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С. Тележка с омниколесами на плоскости и сфере // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4. С. 785–801.
25. Килин А.А., Бобыкин А.Д. Управление тележкой с омниколесами на плоскости // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 4. С. 473–481.
26. Karavaev Yury L., Kilin Alexander A. The dynamics and control of a spherical robot with an internal omniwheel platform // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. mar. Т. 20, № 2. С. 134–152. URL: <http://link.springer.com/10.1134/S1560354715020033>.
27. Ivanov Alexander P. On the control of a robot ball using two omniwheels // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. jul. Т. 20, № 4. С. 441–448. URL: <http://link.springer.com/10.1134/S1560354715040036>.
28. Qiang Zhan, Yao Cai, Caixia Yan. Design, analysis and experiments of an omni-directional spherical robot // 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 2011. may. С. 4921–4926. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/5980491/>.

29. Weiss A., Langlois R. G., Hayes M.J.D. Dynamics and vibration analysis of the interface between a non-rigid sphere and omnidirectional wheel actuators // Robotica. 2015. T. 33. C. 1850–1868.
30. Atlas Motion Platform Mecanum Wheel Jacobian In The Velocity And Static Force Domains / Jonathan J. Plumpton, M. John D. Hayes, Robert G. Langlois [и др.] // Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering. 2014. jun. T. 38, № 2. C. 251–261. URL: <http://www.nrcresearchpress.com/doi/10.1139/tcsme-2014-0018>.
31. Adamov B.I. A Study of the Controlled Motion of a Four-wheeled Mecanum Platform // Nelineinaya Dinamika. 2018. T. 14, № 2. C. 265–290. URL: <http://nd.ics.org.ru/nd180209/>.
32. Adamov B. I., Kobrin A. I. Parametric Identification of the Mathematical Model of the Omnidirectional Mobile Robot KUKA youBot // Mehatronika, Avtomatizacia, Upravlenie. 2018. apr. T. 19, № 4. C. 251–258. URL: <http://www.novtex.ru/mech/eng/doi/mau.19.251-258.html>.
33. Indiveri Giovanni, Paulus Jan, Plöger P. RoboCup 2006: Robot Soccer World Cup X // RoboCup 2006: Robot Soccer World Cup X / под ред. Gerhard Lakemeyer, Elizabeth Sklar, Domenico G. Sorrenti [и др.]. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007. C. 35–46. URL: <http://www.springerlink.com/index/K28874139801055W.pdf>  
<http://link.springer.com/10.1007/978-3-540-74024-7>.
34. Wada Masayoshi. Holonomic and omnidirectional wheelchairs with synchronized 4WD mechanism // IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2007. C. 1196–1202.
35. Development of mobile robot drive system using mecanum wheels / Taha Bin Mohamed, Norsehah Abd Karim, Norazlin Ibrahim [и др.] // 2016 International Conference on Advances in Electrical, Electronic and Systems Engineering (ICAEEES). IEEE, 2016. nov. C. 582–585. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/7888113/>.

36. A Mecanum Wheel Based Robot Platform for Warehouse Automation / J. Krishnaraj, K. Sangeetha, M.V. Tanneru Babu [и др.] // International Journal of Mechanical Engineering and Technology. 2017. Т. 8, № 7. С. 181–189.
37. Salam Al-Ammri A, Ahmed Iman. Control of Omni-Directional Mobile Robot Motion // Al-Khwarizmi Engineering Journal. 2010. Т. 6, № 4. С. 1–9. URL: <https://www.iasj.net/iasj?func=fulltext&aId=2195>.
38. Eng Donald. State Estimation for a Holonomic Omniwheel Robot Using a Particle Filter. Ph.D. thesis: Massachusetts Institute of Technology. 2010. С. 106.
39. Gordon N.J., Salmond D.J., Smith A.F.M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation // IEE Proceedings F Radar and Signal Processing. 1993. Т. 140, № 2. С. 107. URL: <http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/ip-f-2.1993.0015>.
40. Del Moral Pierre. Nonlinear filtering: Interacting particle resolution // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics. 1997. sep. Т. 325, № 6. С. 653–658. URL: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0764444297847787>.
41. Vicente Alexandre, Liu Jindong, Yang Guang-zhong. Surface classification based on vibration on omni-wheel mobile base // International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 2015. С. 916–921.
42. Ман Нгуен Ньы. Разработка математической модели погрузочно-разгрузочного устройства с всенаправленными колесами // Труды МАИ. 2012. Т. 58.
43. Ashmore Mark, Barnes Nick. Omni-drive robot motion on curved paths: The fastest path between two points is not a straight-line // AI 2002: Advances in Artificial Intelligence. 2002. С. 225–236. URL: <http://www.springerlink.com/index/q7cuajlf1xbu653d.pdf>.
44. Balkcom Devin J., Kavathekar Paritosh A., Mason Matthew T. Time-optimal Trajectories for an Omni-directional Vehicle // The International

- Journal of Robotics Research. 2006. oct. T. 25, № 10. C. 985–999. URL: <http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/0278364906069166>.
45. Huang Jeng-tze, Van Hung Tran, Tseng Ming-lei. Smooth Switching Robust Adaptive Control for Omnidirectional Mobile Robots // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2015. sep. T. 23, № 5. C. 1986–1993. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/7021920/>.
46. Bramanta Andra, Virgono Agus, Saputra Randy Erfa. Control system implementation and analysis for omniwheel vehicle // 2017 International Conference on Control, Electronics, Renewable Energy and Communications (ICCREC). IEEE, 2017. C. 265–270. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/8226711/>.
47. Kalmár-Nagy Tamás. Real-time trajectory generation for omni-directional vehicles by constrained dynamic inversion // Mechatronics. 2016. may. T. 35. C. 44–53. URL: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0957415815002202>.
48. Feasible utilization of the inherent characteristics of holonomic mobile robots / Géza Szayer, Bence Kovács, Ferenc Tajti [и др.] // Robotics and Autonomous Systems. 2017. aug. T. 94. C. 12–24. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.robot.2017.04.002> <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0921889016306327>.
49. Field Jennifer R, Salman Mishah U. Kinematic motion studies of an OmniDirectional mobile robot // 2017 IEEE International Symposium on Robotics and Intelligent Sensors (IRIS). IEEE, 2017. C. 318–323. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/8250141/>.
50. Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots / R.L. Williams, B.E. Carter, P Gallina [и др.] // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2002. jun. T. 18, № 3. C. 285–293. URL: <https://doi.org/10.1109/tra.2002.1019459> <http://ieeexplore.ieee.org/document/1019459/>.

51. Purwin Oliver, D'Andrea Raffaello. Trajectory generation and control for four wheeled omnidirectional vehicles // Robotics and Autonomous Systems. 2006. jan. T. 54, № 1. C. 13–22. URL: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0921889005001673>.
52. Li Xiang, Zell Andreas. Motion Control of an Omnidirectional Mobile Robot // Informatics in Control, Automation and Robotics. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. C. 181–193. URL: [http://link.springer.com/10.1007/978-3-540-85640-5\\_14](http://link.springer.com/10.1007/978-3-540-85640-5_14).
53. Galicki Mirosław. Collision-free control of an omni-directional vehicle // Robotics and Autonomous Systems. 2009. T. 57. C. 889–900. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.robot.2009.06.005>.
54. Lin Lih-Chang, Shih Hao-Yin. Modeling and Adaptive Control of an Omni-Mecanum-Wheeled Robot // Intelligent Control and Automation. 2013. T. 4. C. 166–179. URL: <http://dx.doi.org/10.4236/ica.2013.42021>  
<http://www.scirp.org/journal/ica>  
<http://www.scirp.org/journal/doi.aspx?DOI=10.4236/ica.2013.42021>.
55. Wittenburg Jens. Dynamics of multibody systems. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
56. Schiehlen Werner, Eberhard Peter. Applied Dynamics. Heidelberg: Springer, 2014. C. 215.
57. Jain Abhinandan. Robot and Multibody Dynamics. Dordrecht: Springer, 2011. C. 510.
58. Roberson Robert E., Schwertassek Richard. Dynamics Of Multibody Systems. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1988.
59. Jerkovsky W. The Structure of Multi-Body dynamics equations: Tech. Rep.: Los Angeles: Space and Missile Systems Organization, Air Force Systems Command, 1977.
60. Чаплыгин С.А. Исследования по динамике неголономных систем. Ленинград: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1949. С. 111.

61. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. Москва: Наука, 1967. С. 520.
62. Карапетян А.В. О реализации неголономных связей и устойчивости кельтских камней // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 45, № 1. С. 42–51.
63. Теоретическая механика / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев [и др.]. Москва: Академия, 2010. С. 432.
64. Аппель П. Теоретическая механика. Том первый. Статика. Динамика точки. Москва: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960. С. 515.
65. Аппель П. Теоретическая механика. Том второй. Динамика системы. Аналитическая механика. Москва: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960. С. 487.
66. Вильке В.Г. Теоретическая механика. СПб.: Лань, 2003. С. 304.
67. Козлов В.В., Трещев Д.В. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. Москва: Изд. Моск. Ун., 1991. С. 168.
68. Brogliato Bernard. Nonsmooth Mechanics Models. Dynamics and Control. London: Springer-Verlag London, 1999. С. 396.
69. Pfeiffer Friedrich, Glocker Christoph. Multibody Dynamics With Unilateral Constraints / под ред. Weinheim. Wiley-VCH, 1995. С. 317.
70. Pfeiffer Friedrich, Glocker Christoph. Multiple Impacts with Friction in rigid multibody systems // Nonlinear Dynamics. 1995. Т. 7. С. 471–497.
71. Pfeiffer Friedrich. Unilateral Multibody Dynamics // Meccanica. 1999. Т. 34, № 6. С. 435–449. URL: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1004724313496%5Cnhttp://www.springerlink.com/content>
72. Pfeiffer Friedrich, Glocker Christoph. Iutam Symposium on Unilateral Multibody Contacts. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1999.

73. Pfeiffer Friedrich, Wosle M. Dynamics of multibody systems with unilateral constraints // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1999. T. 9, № 3. C. 473–478.
74. Glocker Christoph. Formulation of spatial contact situations in rigid multibody systems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1999. T. 177, № 3-4. C. 199–214.
75. Pfeiffer Friedrich. Multibody systems with unilateral constraints // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2001. T. 65, № 4. C. 665–670.
76. Numerical simulation of finite dimensional multibody nonsmooth mechanical systems / B. Brogliato, A.A. ten Dam, L. Paoli [и др.] // Applied Mechanics Reviews. 2002. T. 55, № 2. URL: <http://appliedmechanicsreviews.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=>
77. Pfeiffer Friedrich. Unilateral Multibody Dynamics // International Journal for Multiscale Computational Engineering. 2003. T. 1, № 2-3. C. 311–326.
78. Flores Paulo, Leine Remco, Glocker Christoph. Modeling and Analysis of Rigid Multibody Systems with Translational Clearance Joints Based on the Nonsmooth Dynamics Approach // Multibody Dynamics. Computational Methods and Applications. Dordrecht: Springer, 2011. T. 23. C. 107–130. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-90-481-9971-6>.
79. Zbiciak Artur, Kozyra Zofia. Dynamics of Multi-body Mechanical Systems with Unilateral Constraints and Impacts // Procedia Engineering. 2014. T. 91. C. 112–117. URL: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1877705814030422>.
80. Березинская С.Н., Сорокина О.В., Кугушев Е.И. Об односторонних неголономных связях // препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. Москва, 2003.
81. Pfeiffer Friedrich, Glocker Christoph. Complementarity problems in multibody systems with planar friction // Applied Mechanics. 1993. T. 64. C. 452–463.

82. Pfeiffer Friedrich, Wosle M. Dynamics of Multibody Systems Containing Dependent Unilateral Constraints with Friction // Journal of Vibration and Control. 1996. T. 2, № 2. C. 161–192. URL: <http://jvc.sagepub.com/cgi/doi/10.1177/107754639600200203>.
83. Anitescu M., Potra F. Formulating Multi-rigid-body Contact Problems with Friction as Solvable Linear Complementarity Problems // Nonlinear Dynamics. 1997. T. 14, № 3. C. 231–247. URL: <http://citeseer.ist.psu.edu/anitescu97formulating.html>.
84. Lacoursière Claude, Servin Martin. Regularized multibody dynamics with dry frictional contacts // Euromech Colloquium: Nonsmooth contact and impact laws in mechanics. 2011. URL: <http://umu.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2:475660>.
85. Charles Alexandre, Ballard Patrick. Multibody dynamics with unilateral constraints and friction // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. 2014. dec. T. 14. C. 63–64. URL: <http://doi.wiley.com/10.1002/pamm.201410019>.
86. Paoli Laetitia. Multibody Dynamics with Unilateral Constraints: Computational Modeling of Soft Contact and Dry Friction Laetitia Paoli // System Modeling and Optimization. Cham: Springer International Publishing, 2015. C. 420—429.
87. Moreau J. J. Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics // Nonsmooth Mechanics and Applications. Vienna: Springer Vienna, 1988. C. 1–82. URL: [http://link.springer.com/10.1007/978-3-7091-2624-0\\_1](http://link.springer.com/10.1007/978-3-7091-2624-0_1).
88. Новожилов И.В. Фракционный анализ. Москва: Изд. Моск. Ун., 1991. C. 190.
89. Association Modelica. Modelica® - A Unified Object-Oriented Language for Systems Modeling, Language Specification, Version 3.3. 2012.
90. ПО {Dymola}. \url{http://www.3ds.com/products-services/catia/products/dymola}.



91. Fritzson P. Principles of Object–Oriented Modeling and Simulation with Modelica 2.1. Piscataway, New Jersey: IEEE Press, 2004. С. 898.
92. Kosenko I. I. Integration of the equations of a rotational motion of a rigid body in quaternion algebra. The Euler case // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1998. Т. 62, № 2. С. 193–200.
93. Косенко И.И. Интегрирование уравнений вращательного движения твердого тела в алгебре кватернионов. Случай Эйлера // ПММ. 1998. Т. 62, № 2. С. 206–214.
94. Косенко И.И. Реализация компьютерной модели динамики систем твердых тел с освобождающими связями // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 2. С. 95–106.
95. Multibody Systems Dynamics: Modelica Implementation and Bond Graph Representation / Ivan Kosenko, Maria Loginova, Yaroslav Obraztsov [и др.] // Proceedings of the 5th International Modelica Conference. 2006. С. 213–223. URL: <https://modelica.org/events/modelica2006/Proceedings/sessions/Session2d2.pdf>.
96. Kosenko Ivan. Physically Oriented Approach To Construct Multibody System Dynamics Models Using Modelica Language // MULTIBODY DYNAMICS 2007, ECCOMAS Thematic Conference. Milano: 2007.
97. Косенко И.И. Графовые представления моделей динамики систем тел // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, № 9. С. 80–88.
98. Косенко И.И., Гусев И.К. Компьютерная модель динамики прямозубого эвольвентного зацепления в редукторах // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 4. С. 713–734.
99. Kossenko I I, Stavrovskaja M S. How One Can Simulate Dynamics of Rolling Bodies via Dymola: Approach to Model Multibody System Dynamics Using Modelica // Proceedings of the 3rd International Modelica Conference. Linköping, Sweden: Linköpings universitet, 2003. С. 299–309.

100. Косенко И.И., Александров Е.Б. Реализация модели Контенсу-Эрисмана касательных сил в контактной задаче Герца // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 4. С. 499–517.
101. Косенко И.И., Al. Et. Моделирование и виртуальное прототипирование. М.: Альфа-М, 2012. С. 176.
102. Kálmán Viktor, Vajta László. Designing and tuning a brake assistant for omnidirectional wheels // Electrical Engineering and Computer Science. 2012. Т. 56, № 4. С. 105–111. URL: <https://pp.bme.hu/eecs/article/view/7164>.
103. Kálmán Viktor. On modeling and control of omnidirectional wheels. Ph.D. thesis: Budapest University of Technology and Economics. 2013. С. 94. URL: [http://www.omikk.bme.hu/collections/phd/Villamosmernoki\\_es\\_Informatikai\\_Kar/](http://www.omikk.bme.hu/collections/phd/Villamosmernoki_es_Informatikai_Kar/)
104. Kálmán Viktor. Controlled Braking for Omnidirectional Wheels // International Journal of Control Science and Engineering. 2013. Т. 3, № 2. С. 48–57. URL: <http://article.sapub.org/10.5923.j.control.20130302.03.html>.
105. Kálmán Viktor. Omnidirectional Wheel Simulation - a Practical Approach // Acta Technica Jaurinensis. 2013. Т. 6, № 2. С. 73–90.
106. Герасимов К.В., Зобова А.А. Движение симметричного экипажа на омни-колесах с массивными роликами // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, № 4. С. гот. к публ.
107. Герасимов К.В., Зобова А.А. Динамика экипажа на омни-колесах с массивными роликами с учетом смены ролика в контакте с опорной плоскостью // Труды МАИ. 2018. С. принята к печати.
108. Косенко И.И., Герасимов К.В. Физически-ориентированное моделирование динамики омнитеlejки // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12, № 2. С. 251–262. URL: <http://nd.ics.org.ru/nd1602007/>.
109. I. Kosenko Ivan, Ya. Stepanov Sergey, V. Gerasimov Kirill. Improved Contact Tracking Algorithm for the Omni Wheel in General Case of Roller Orientation // The Proceedings of the Asian Conference

- on Multibody Dynamics. 2016. T. 2016.8. C. 10\_1289244. URL: [https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsmeacmd/2016.8/0/2016.8\\_10\\_1289244/\\_article\\_char/ja/](https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsmeacmd/2016.8/0/2016.8_10_1289244/_article_char/ja/).
110. Kosenko I., Gerasimov K. Object-oriented implementation of a unilateral point-contact constraint model with friction in frame of the omni vehicle multibody system // 11th World Congress on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference on Computational Mechanics, ECCM 2014 and 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECFD 2014. 2014.
  111. Kosenko Ivan, Gerasimov Kirill. Implementation of the Omni Vehicle Dynamics on Modelica // Proceedings of the 10th International Modelica Conference. Lund: 2014. C. 1143–1150. URL: [http://www.ep.liu.se/ecp\\_article/index.en.aspx?issue=63;article=35](http://www.ep.liu.se/ecp_article/index.en.aspx?issue=63;article=35).
  112. Kosenko I., Gerasimov K. Object-oriented approach to the construction of an omni vehicle dynamical model // Journal of Mechanical Science and Technology. 2015. T. 29, № 7.
  113. Kosenko I., Gerasimov K. Omni vehicle dynamics model: Object-oriented implementation and verification // AIP Conference Proceedings. T. 1648. 2015.
  114. Kosenko I.I., Gerasimov K.V., Stavrovskiy M.E. Contact types hierarchy and its object-oriented implementation // COUPLED PROBLEMS 2015 - Proceedings of the 6th International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. 2015.
  115. Dynamical Model of a Vehicle with Omni Wheels: Improved and Generalized Contact Tracking Algorithm / Ivan Kosenko, Sergey Stepanov, Kirill Gerasimov [и др.] // Proceedings of the 11h International Modelica Conference. Versailles: 2015.
  116. Virtual testbench for the omni wheel dynamics simulation: New contact tracking algorithm / I. Kosenko, S. Stepanov, K. Gerasimov [и др.] // ECCOMAS Congress 2016 - Proceedings of the 7th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. T. 3. 2016.

117. Kosenko I.I., Gerasimov K.V. Physically oriented simulation of the omnivehicle dynamics // Nelineinaya Dinamika. 2016. T. 12, № 2.