Обзор

Омни-колеса и экипажи

Обзор литературы. Безынерционная модель.

Обзор литературы

- 2006 – А.А. Зобова, Я.В. Татаринов – Мобильные роботы и мехатронные системы; 2009 ПММ
- 2007 – Ю.Г. Мартыненко, А.М. Формальский – Изв. РАН. Теория сист. управл.
- 2011 – А.А. Зобова – Нелинейная динамика
- 2011 – А.В. Борисов, А.А. Килин, И.С. Мамаев – Нелинейная динамика
- 2014 – А.А. Килин, А.Д. Бобыкин – Нелинейная динамика
- 2018 – Б.И. Адамов, А.И. Кобрин – Мехатроника, автоматизация, управление

Безынерционная модель

- Экипаж состоит только из платформы и N дисков колес.
- Количество твердых тел $1 + N$.
- Связи: для каждого колеса задан вектор $\mathbf{e}_i$, составляющий постоянный угол ψ с плоскостью колеса, и для точек C_i контакта:

$$\mathbf{v}_{C_i} \cdot \mathbf{e}_i = 0$$

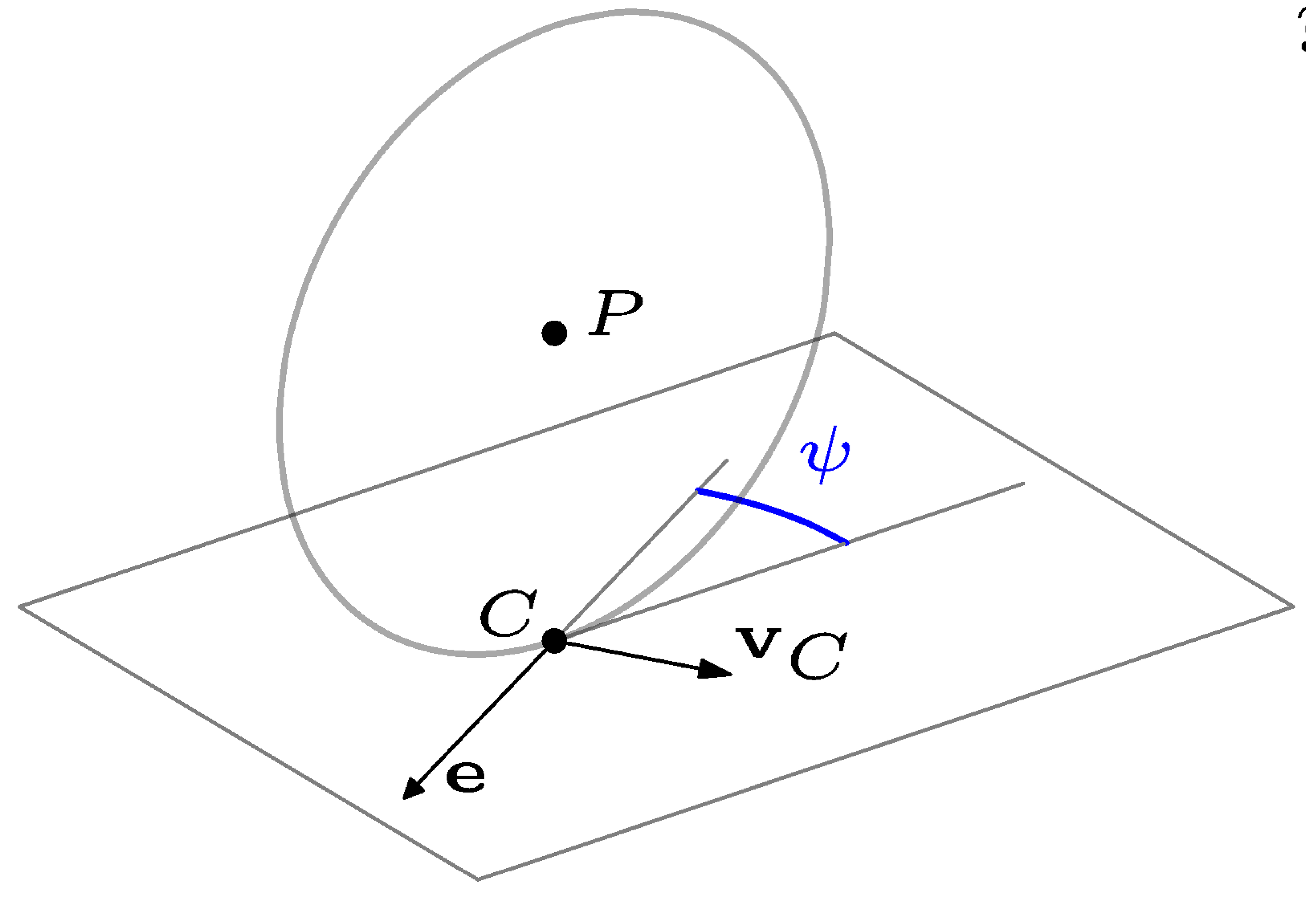


Рис. 1: Колесо

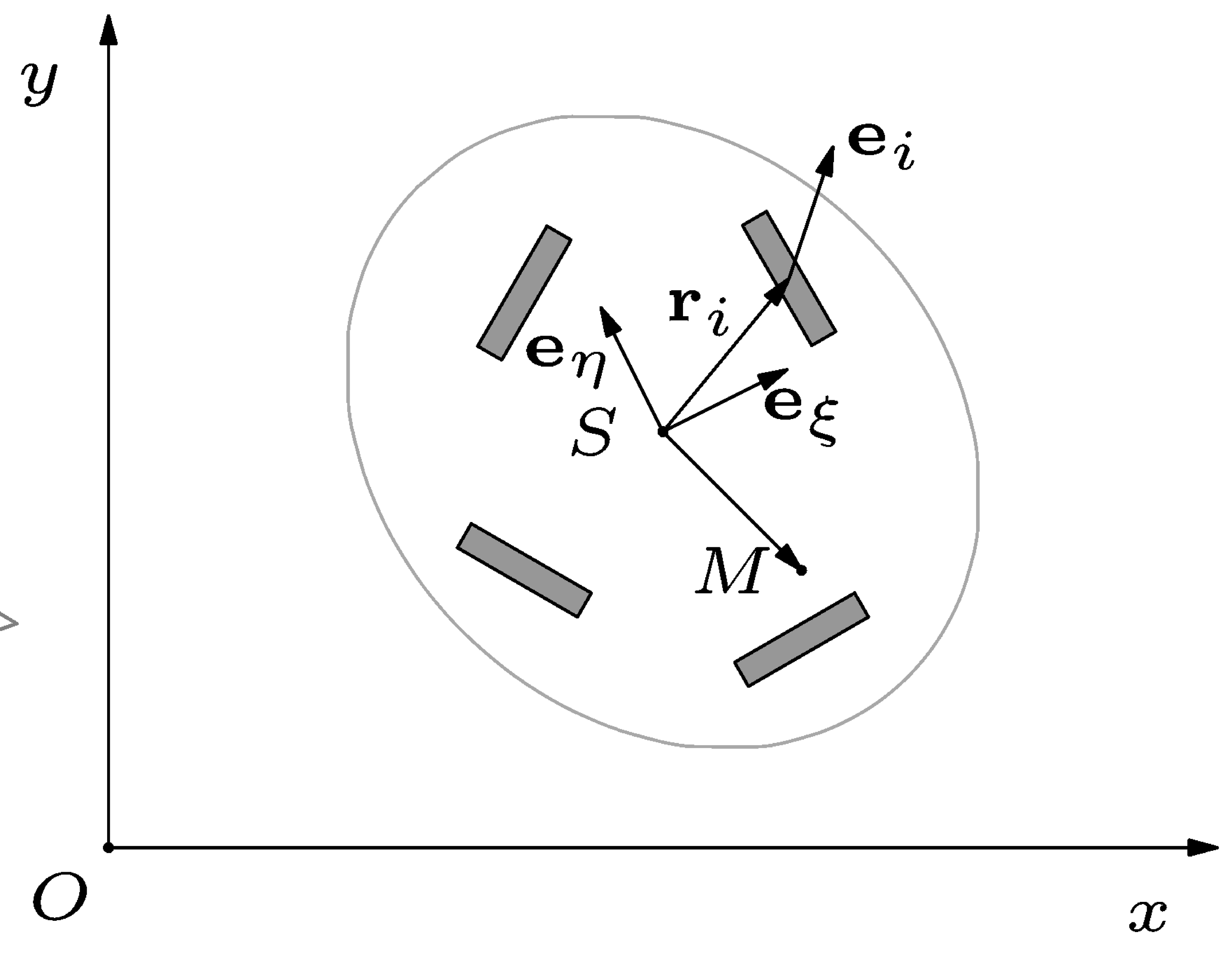
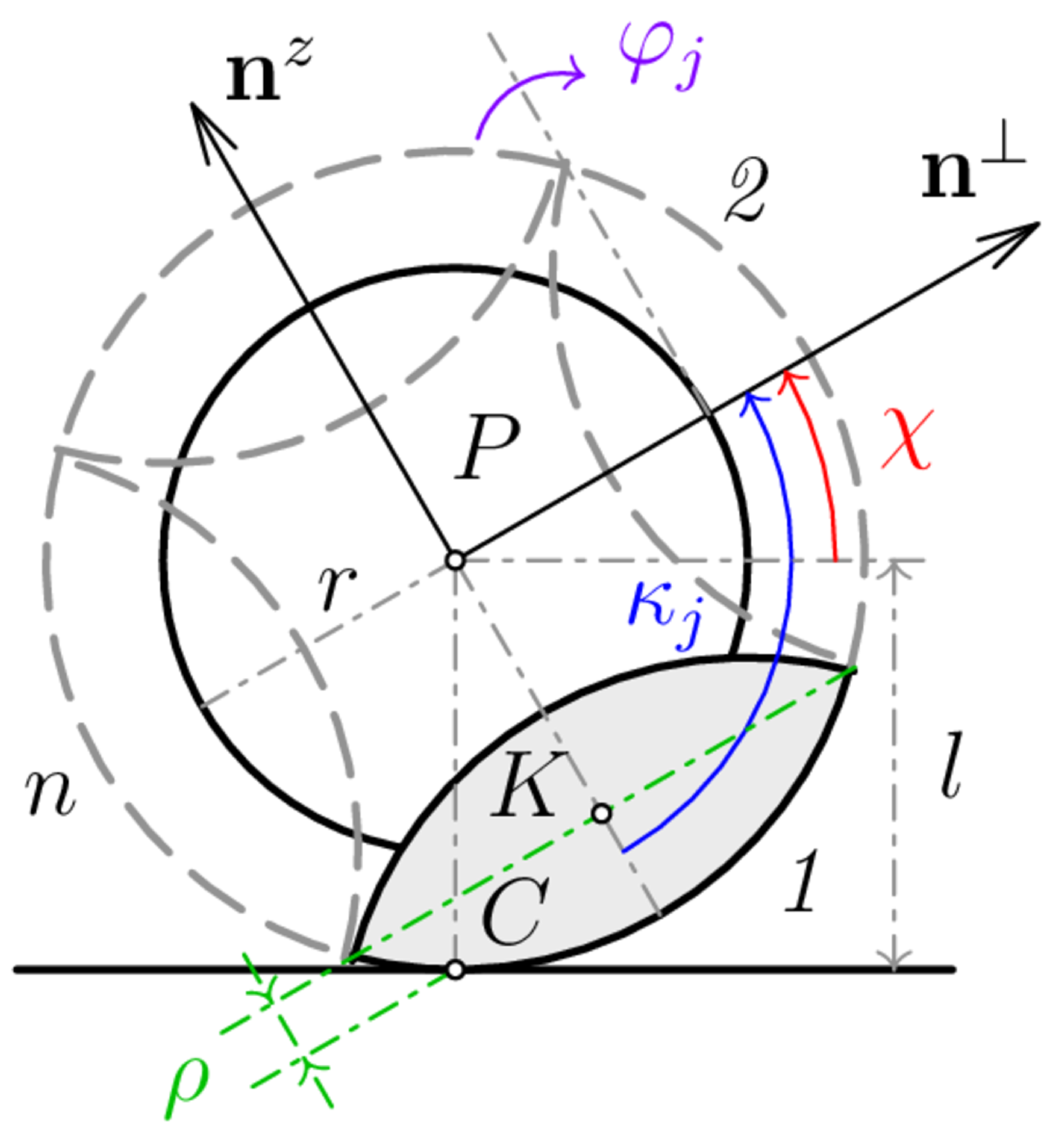
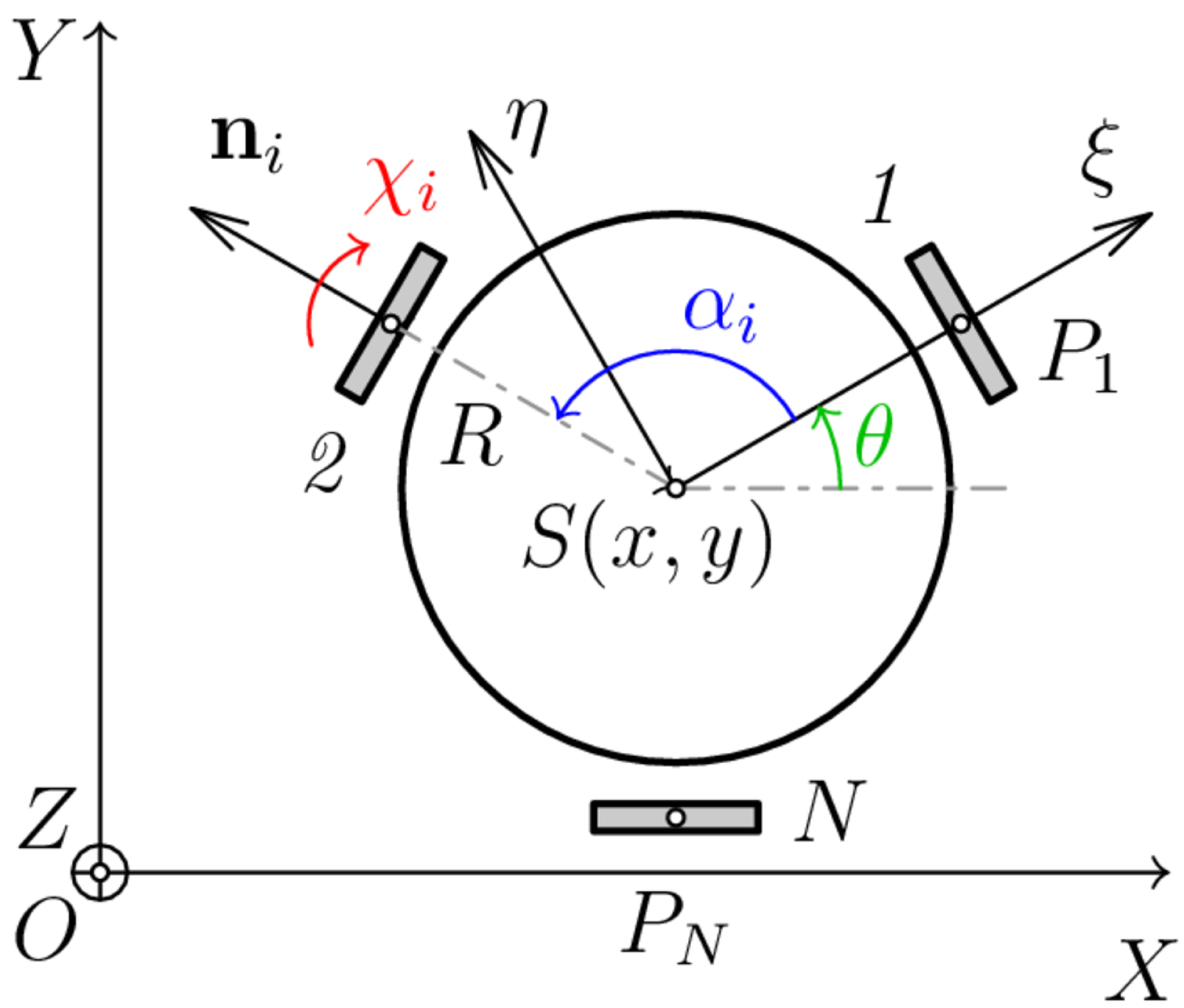


Рис. 2: Экипаж

Исследуемые модели

Исследуемая модель с учетом инерции роликов





Модели контакта

- Главы 1 и 2. Абсолютно шероховатая плоскость
  - Скорости точек контакта равны нулю:

$$\mathbf{v}_{C_i} = 0, \quad i = 1 \dots N$$

  - Количество степеней свободы

$$3 + N(n-1)$$

- Глава 3. Плоскость с трением
  - Вязкое трение

$$\mathbf{F} = -\gamma \mathbf{v}_{C_i}$$

  - Регуляризованное сухое трение

$$\mathbf{F} = -\mu N \mathbf{v}_{C_i} \begin{cases} \dfrac{1}{\delta}, & |\mathbf{v}_{C_i}| < \delta \ll 1 \\ \dfrac{1}{|\mathbf{v}_{C_i}|} & \textbf{иначе} \end{cases}$$

  - Количество степеней свободы:

$$3 + N(n+1)$$

Глава 1. Постановка задачи. Уравнения Я.В.Татаринова

Глава 1. Постановка задачи.

- **Обобщенные координаты:**
  $q = (x, y, \theta, \chi_i, \varphi_k, \varphi_s)$, **где** $i, k = 1 \ldots N$,
  индекс s **означает ролики вне контакта.**
- **Псевдоскорости:**
  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_s)$, $\mathbf{v}_S = R\nu_1 \mathbf{e}_\xi + R\nu_2 \mathbf{e}_\eta$, $\nu_3 = \Lambda\dot{\theta}$, $\nu_s = \dot{\varphi}_s$
- **Связи:**

$$\dot{x} = R\nu_1 \cos\theta - R\nu_2 \sin\theta, \quad \dot{y} = R\nu_1 \sin\theta + R\nu_2 \cos\theta,$$

$$\dot{\theta} = \frac{\nu_3}{\Lambda}, \quad \dot{\chi}_i = \frac{R}{l}(\nu_1 \sin\alpha_i - \nu_2 \cos\alpha_i - \frac{\nu_3}{\Lambda}),$$

$$\dot{\varphi}_k = \frac{R}{l\cos\chi_k - r}(\nu_1 \cos\alpha_k + \nu_2 \sin\alpha_k), \quad \dot{\varphi}_s = \nu_s$$

Уравнения Я.В.Татаринова

- **Лаконичная форма уравнений движения для систем с дифференциальными связями:**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}, \tag{1}$$

$$\nu_\mu P_\mu = \dot{q}_i p_i, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

- $(\cdot)^*$ – **подстановка выражений обобщенных скоростей** $\dot{\mathbf{q}}$ **через псевдоскорости** $\boldsymbol{\nu}$

Глава 1. Структура уравнений движения

$$\mathcal{M}^*\dot{\boldsymbol{\nu}} = \frac{MR^2}{\Lambda}\begin{pmatrix}\nu_2\nu_3\\ -\nu_1\nu_3\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} + \frac{R}{2l}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}-\sin\alpha_i\mathcal{M}_i^*\\ \cos\alpha_i\mathcal{M}_i^*\\ \Lambda^{-1}\mathcal{M}_i^*\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\boldsymbol{\nu}$$

$$- BR^2\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\mathcal{P}_1\\ \mathcal{P}_2\\ \mathcal{P}_3\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\boldsymbol{\nu} - B\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\\ \cos\chi_{12}\dfrac{\nu_3}{\Lambda}\dot{\chi}_1^*\\ \vdots\\ \cos\chi_{Nn}\dfrac{\nu_3}{\Lambda}\dot{\chi}_N^*\end{pmatrix}$$

Глава 1. Свойства уравнений движения

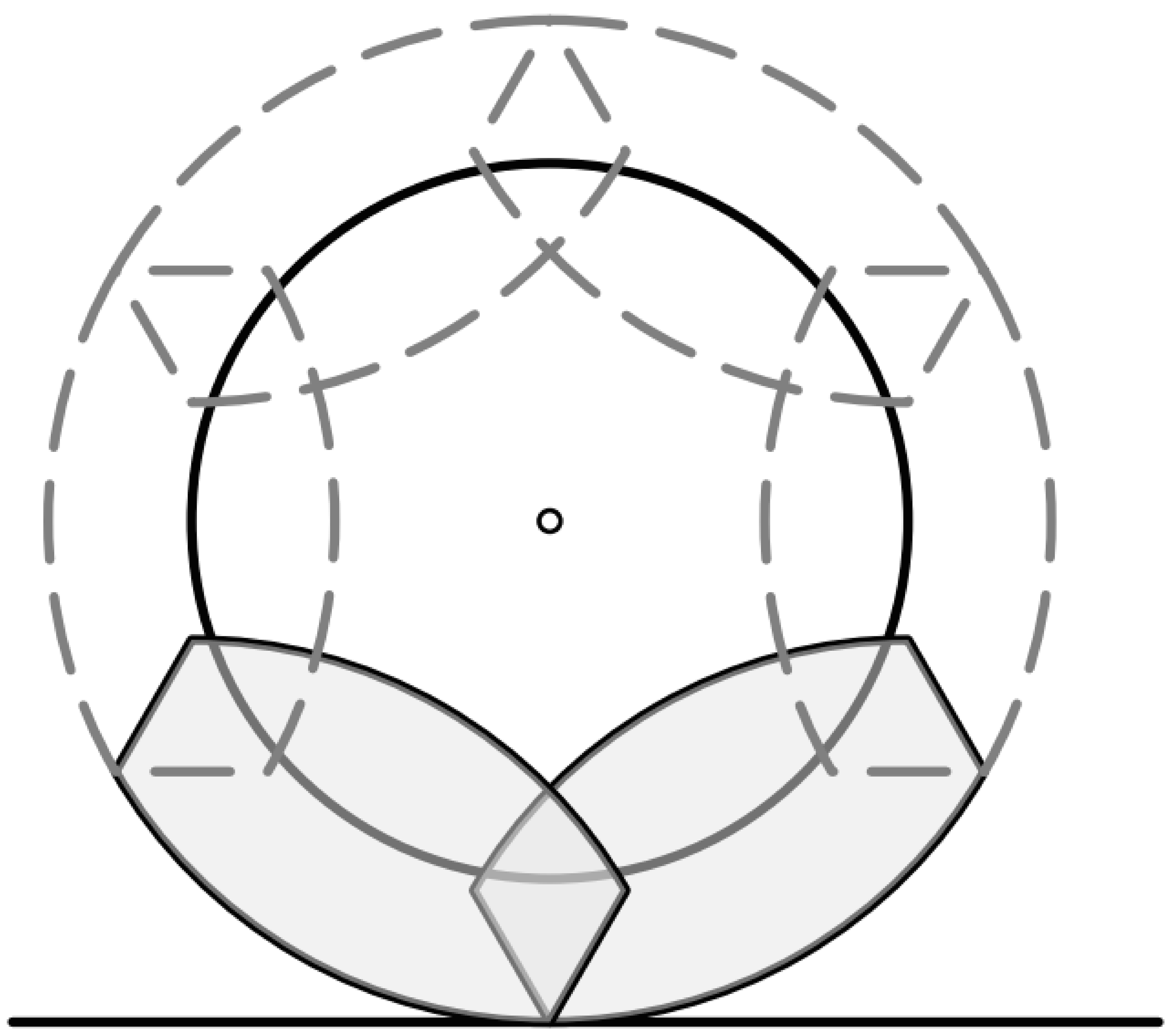
1. При $B = 0$ уравнения движения совпадают с уравнениями безынерционной модели.
2. Интеграл $m_{33}^*\nu_3 = \mathrm{const}$ разрушается при $B \neq 0$. $\dot{\nu}_3 \sim B$.
3. Первые интегралы:
$$\nu_s + \frac{1}{\Lambda}\sin\chi_{ij}\nu_3 = \mathrm{const}.$$
4. Интеграл энергии $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\mathcal{M}^*(\chi_i)\boldsymbol{\nu} = h = \mathrm{const}$ (связи автономны, идеальны, силы консервативны)
5. $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu_s = \mathrm{const}$
6. Замена псевдоскоростей $\boldsymbol{\nu} \to \lambda\boldsymbol{\nu}, \lambda \neq 0$ эквивалентна замене времени $t \to \lambda t$.

Глава 2. Смена ролика в контакте с опорной плоскостью

Уравнения движения вырождаются на стыках роликов

Разрыв второго рода в правой части из-за выражений $(l\cos\chi_i - r)$ в знаменателе.

Исключим достижение острия ролика, усекая ролики и допуская пересечение их тел.



Ролики входят и выходят из состояния контакта при $t = t^*$

Происходит мгновенное снятие связи с одного ролика и наложение связи на другой.

Пусть:

- $\Delta t \ll 1, \quad \Delta \mathbf{q} \sim \dot{\mathbf{q}}\Delta t \ll 1, \quad \Delta\dot{\mathbf{q}} < \infty,$
- к моменту окончания удара $t^* + \Delta t$ уравнения связей выполнены ($\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{V}(\mathbf{q})\boldsymbol{\nu}^+$)
- верно основное уравнение удара $\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{Q}$
- связи идеальны $\mathbf{Q}^T\delta\mathbf{q}^+ = 0$, где $\delta\mathbf{q}^+$ – виртуальные перемещения, допустимые вновь наложенными связями

Глава 2. Решение задачи теории удара.

$$\boldsymbol{\nu}^+ = \left(\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V}\right)^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-$$

Действительно, т.к.

$$\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q}^T\delta\mathbf{q}^+ = 0,$$

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \dot{\mathbf{q}}^- - \Delta\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ \in \widetilde{V},$$

то

$$0 = (\mathbf{M}\Delta\dot{\mathbf{q}},\ \mathbf{V})$$
$$= \left(\mathbf{M}\left(\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-\right),\ \mathbf{V}\right)$$
$$= \left(\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-,\ \mathbf{V}\right)$$
$$= \mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\nu}^+ - \mathbf{V}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}^-, \quad \text{ч.т.д.}$$

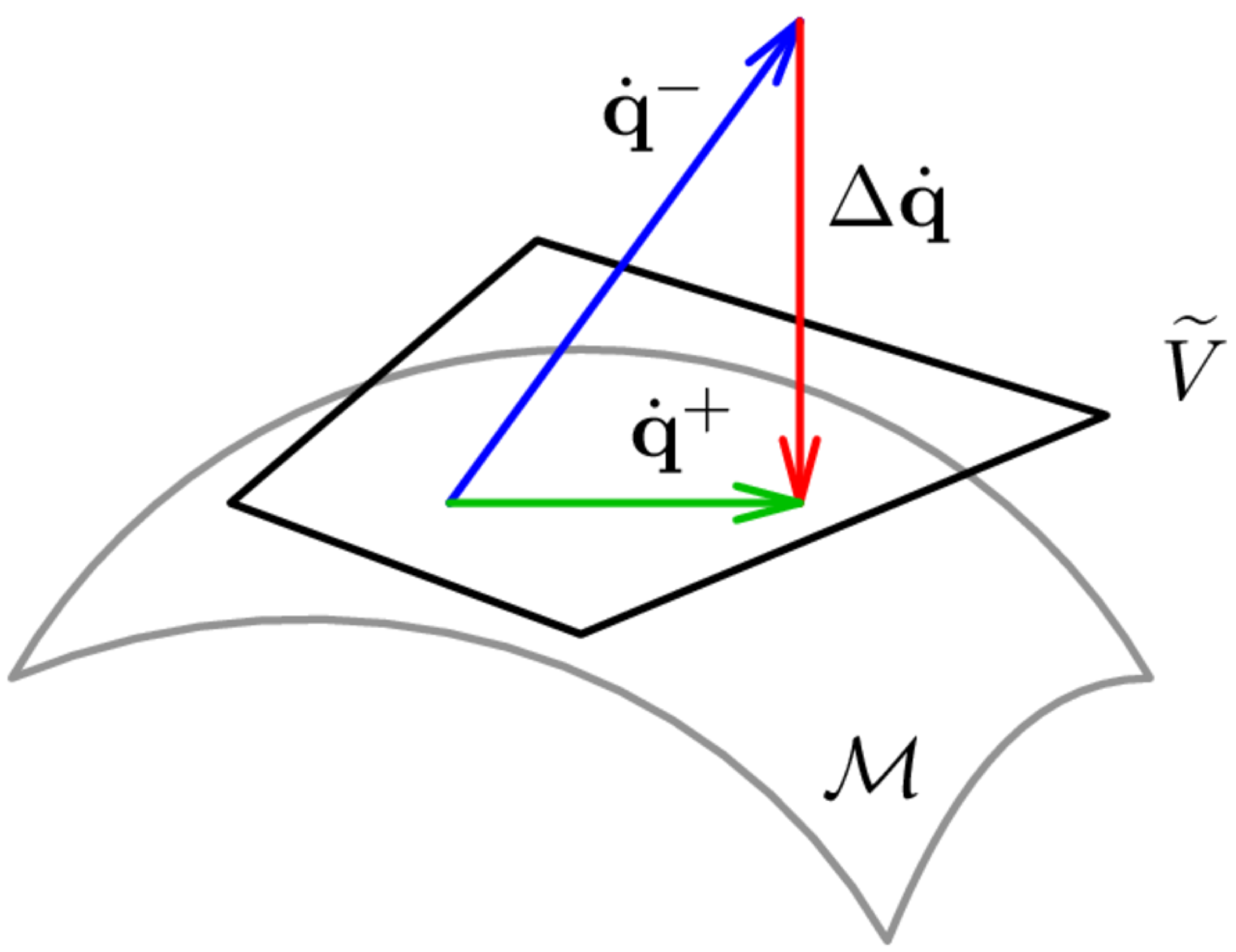


Рис. 3: $\dot{\mathbf{q}}^+$ – проекция $\dot{\mathbf{q}}^-$ на $\widetilde{V}$, ортогональная в метрике $\mathbf{M}$

Начальные условия для расчетов.

- **отношение радиуса колеса к радиусу платформы** $\dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{3}$,
- **отношение массы колеса к массе платформы** $\dfrac{M_{\text{к}}}{M_{\text{пл}}} = 0.15$,
- **отношение массы ролика к массе платформы** $\dfrac{m_{\text{рол}}}{M_{\text{пл}}} = 0.05$,
- $\boldsymbol{\omega}_0 = 1$, $\mathbf{v}_0 = 1$

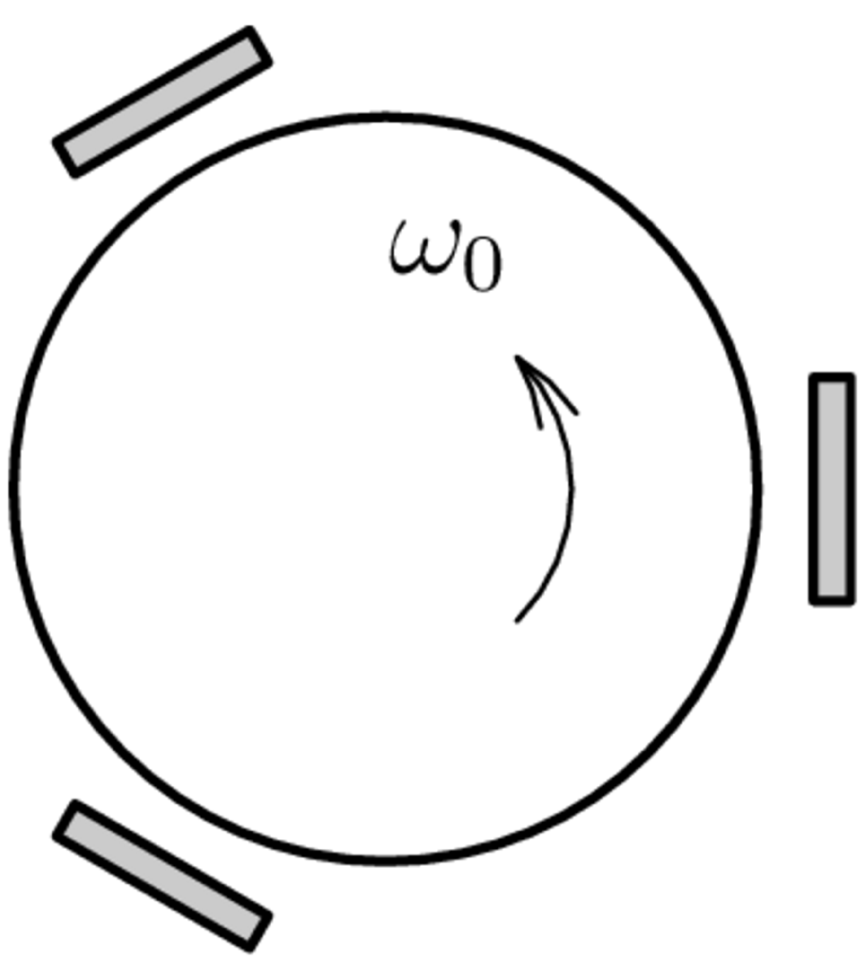


Рис. 4: Движение 1

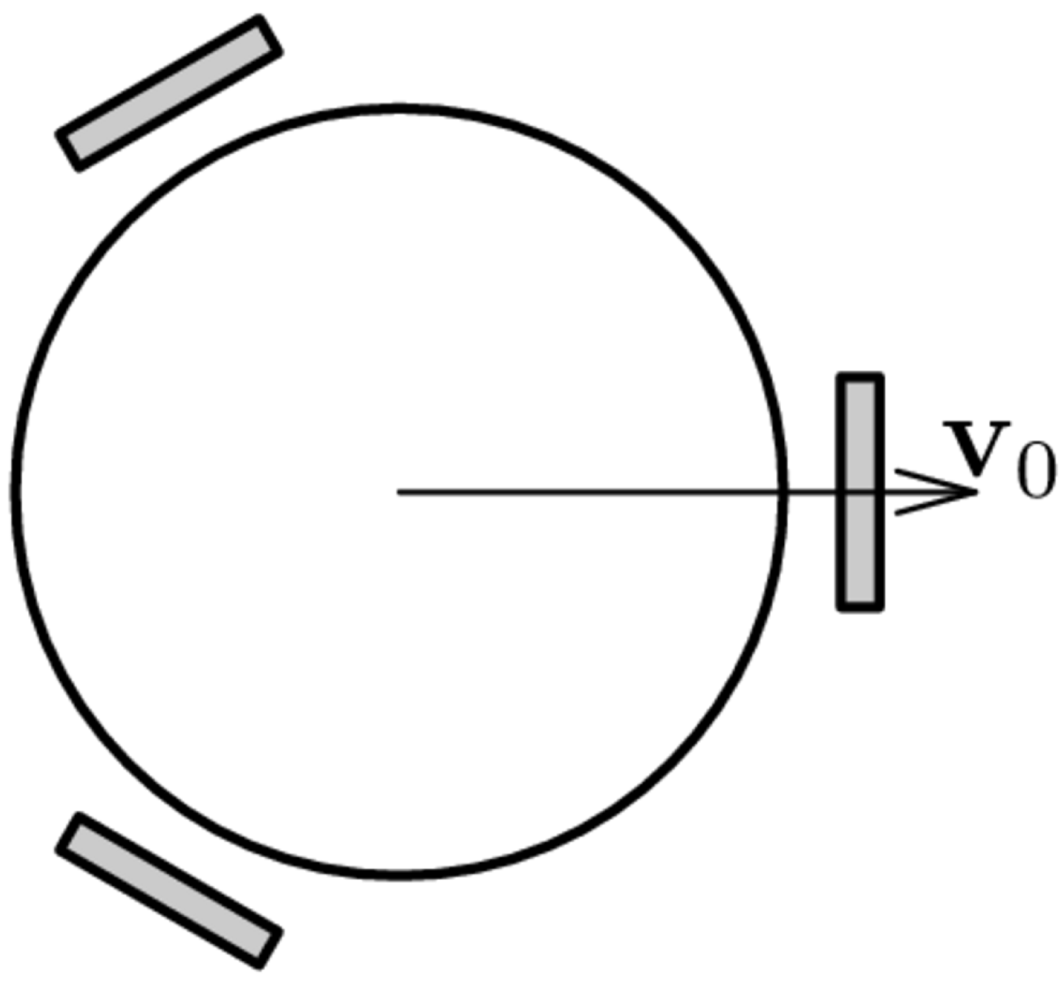


Рис. 5: Движение 2

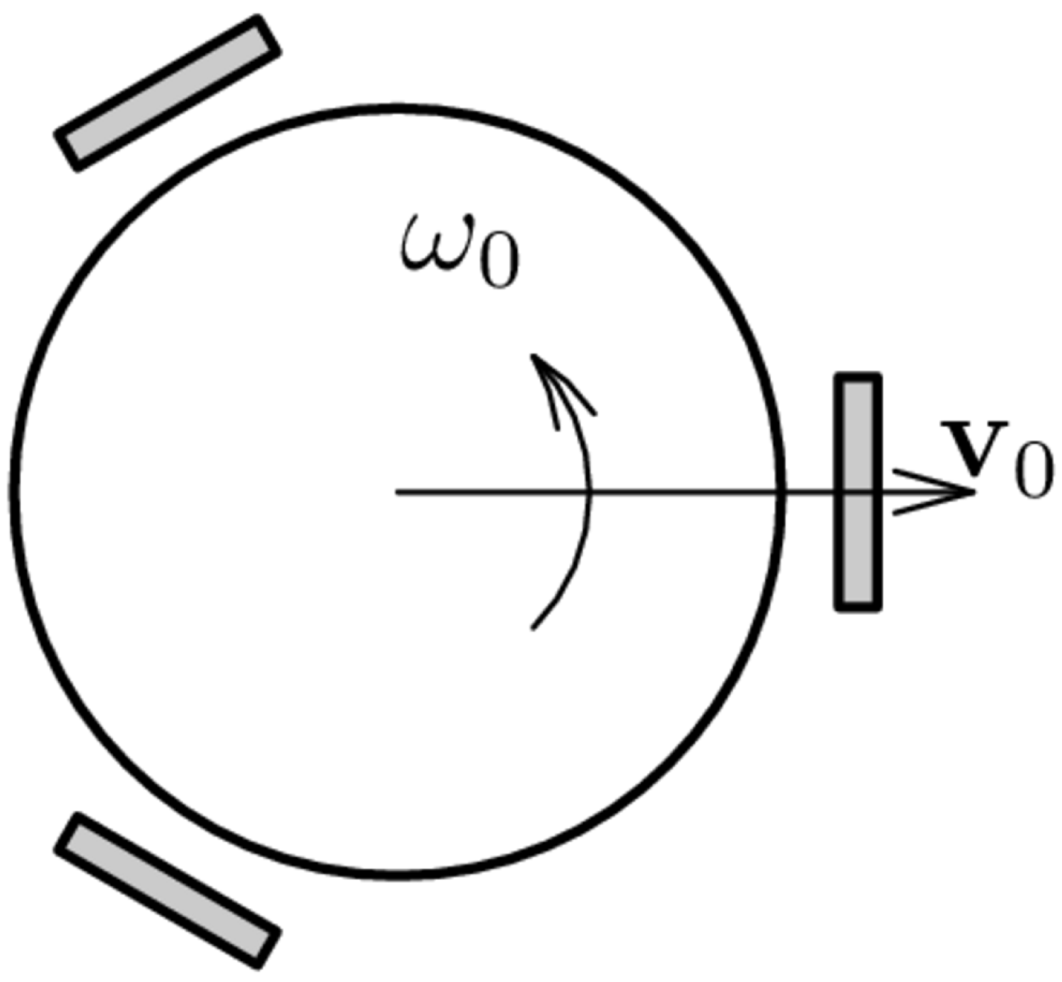


Рис. 6: Движение 3

Глава 2. Результаты расчетов. Движения 1 и 2.

Движение 1 $(\nu_{1,2}(0) = 0, \nu_3 = 1)$

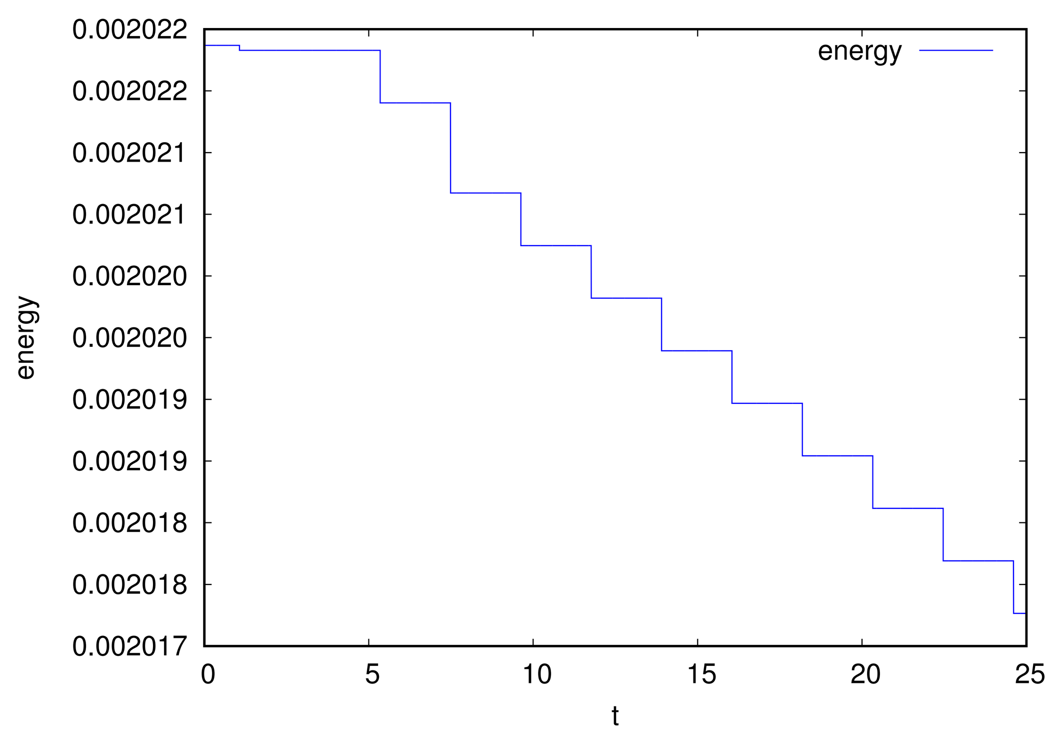


Рис. 7: Кинетическая энергия T

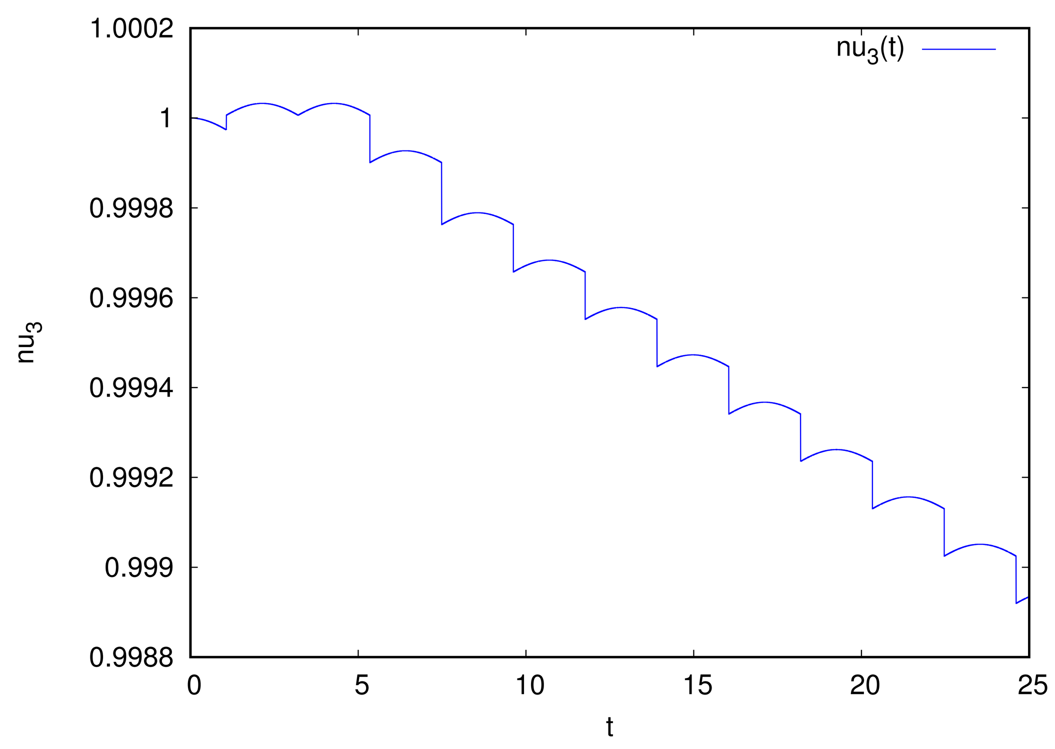


Рис. 8: Угловая скорость ν_3 платформы

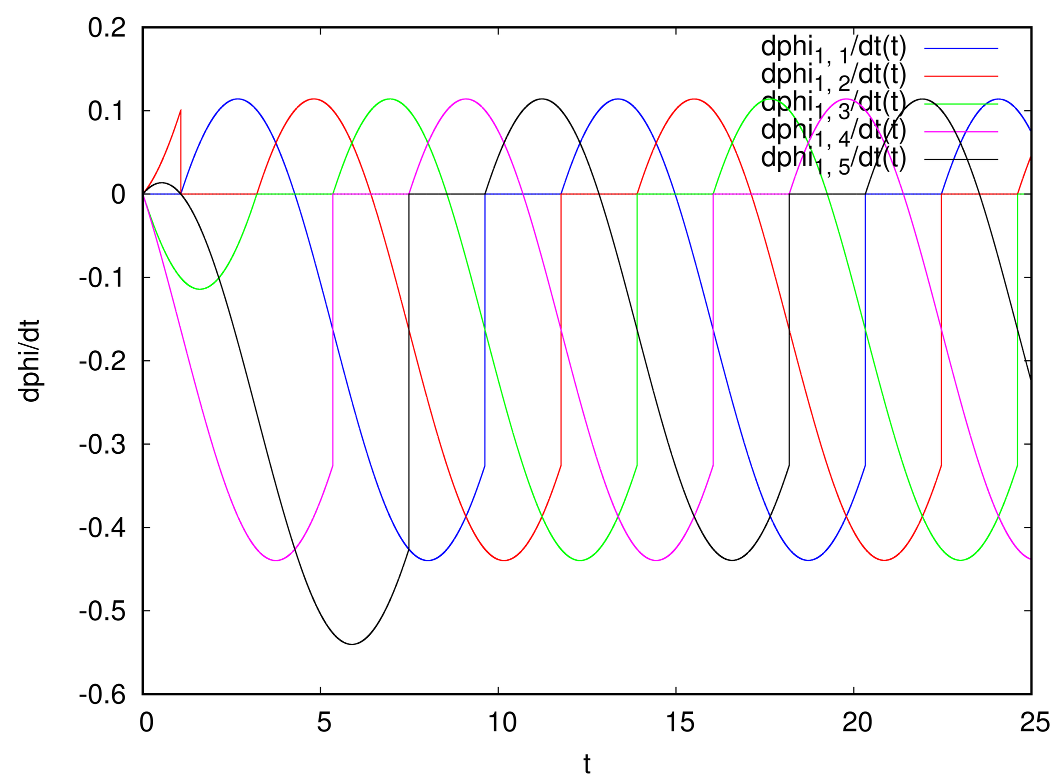
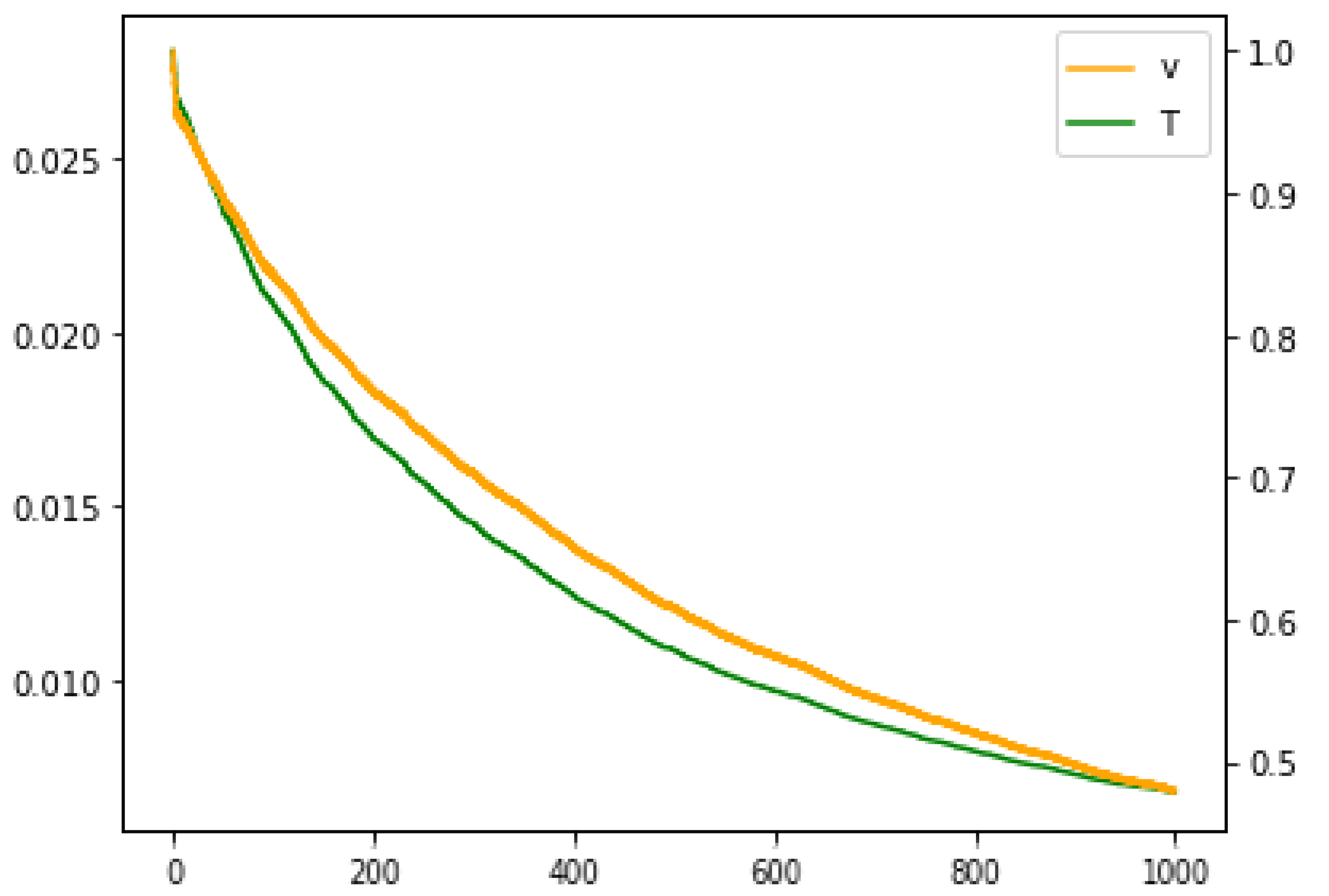
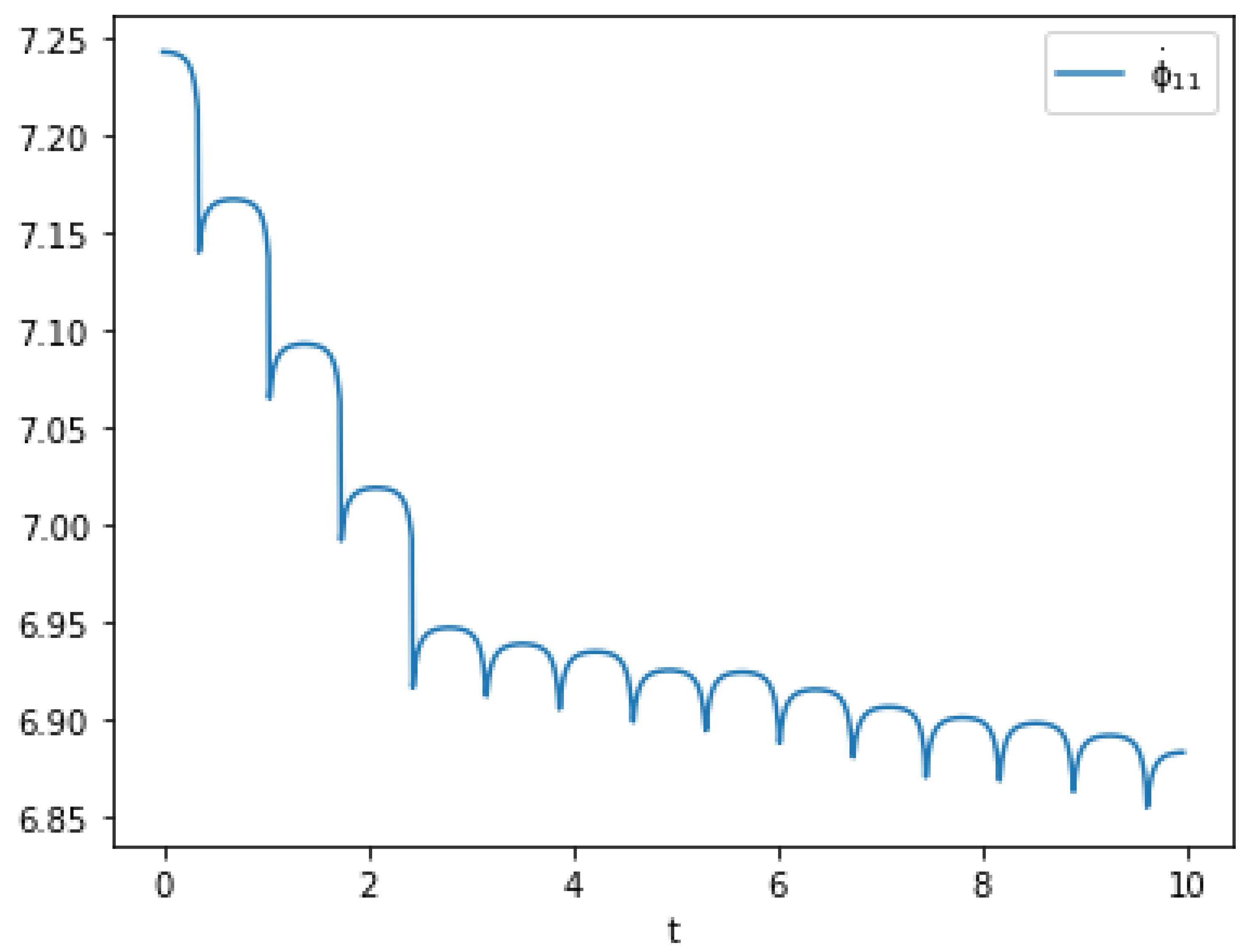
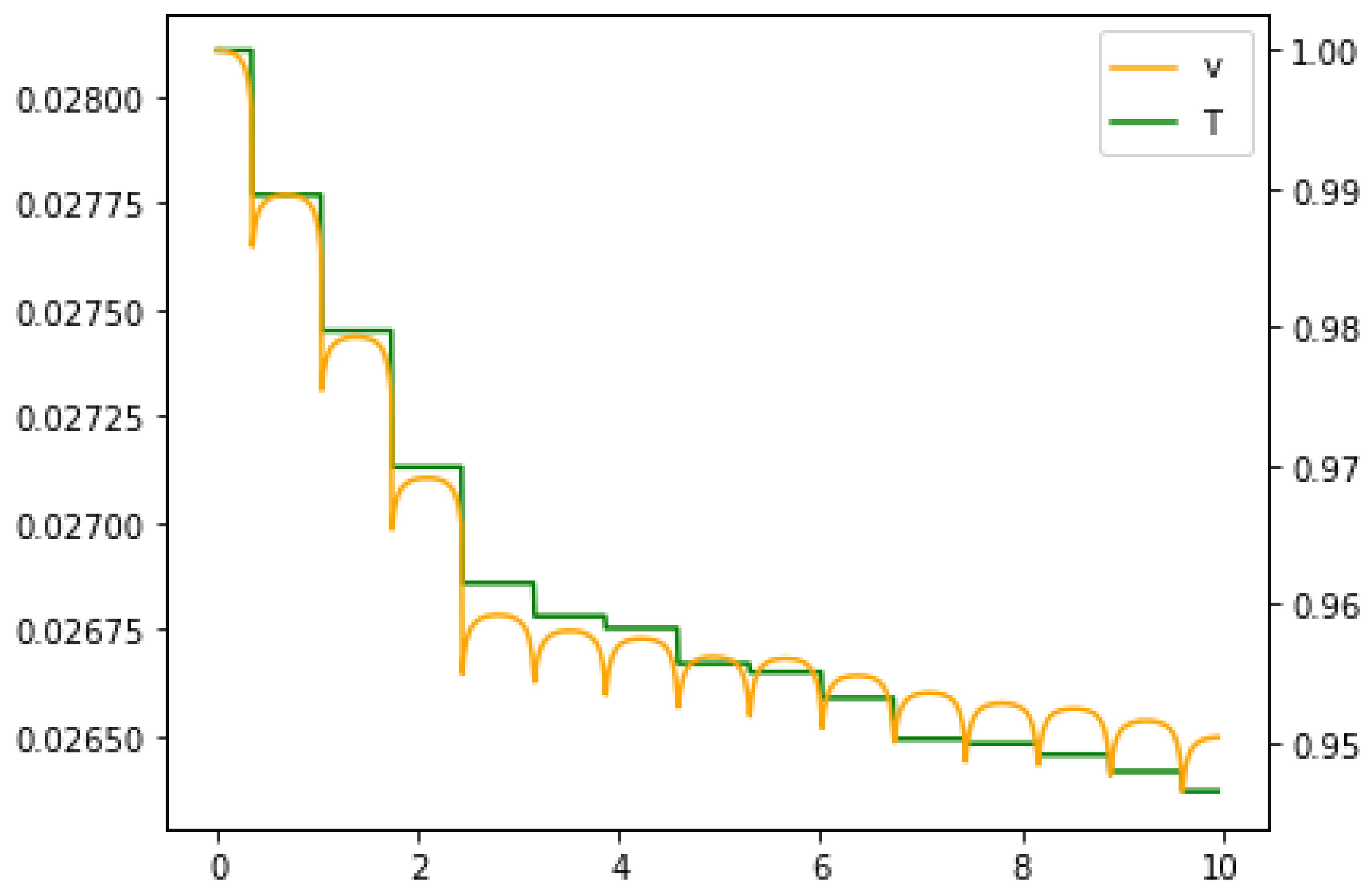


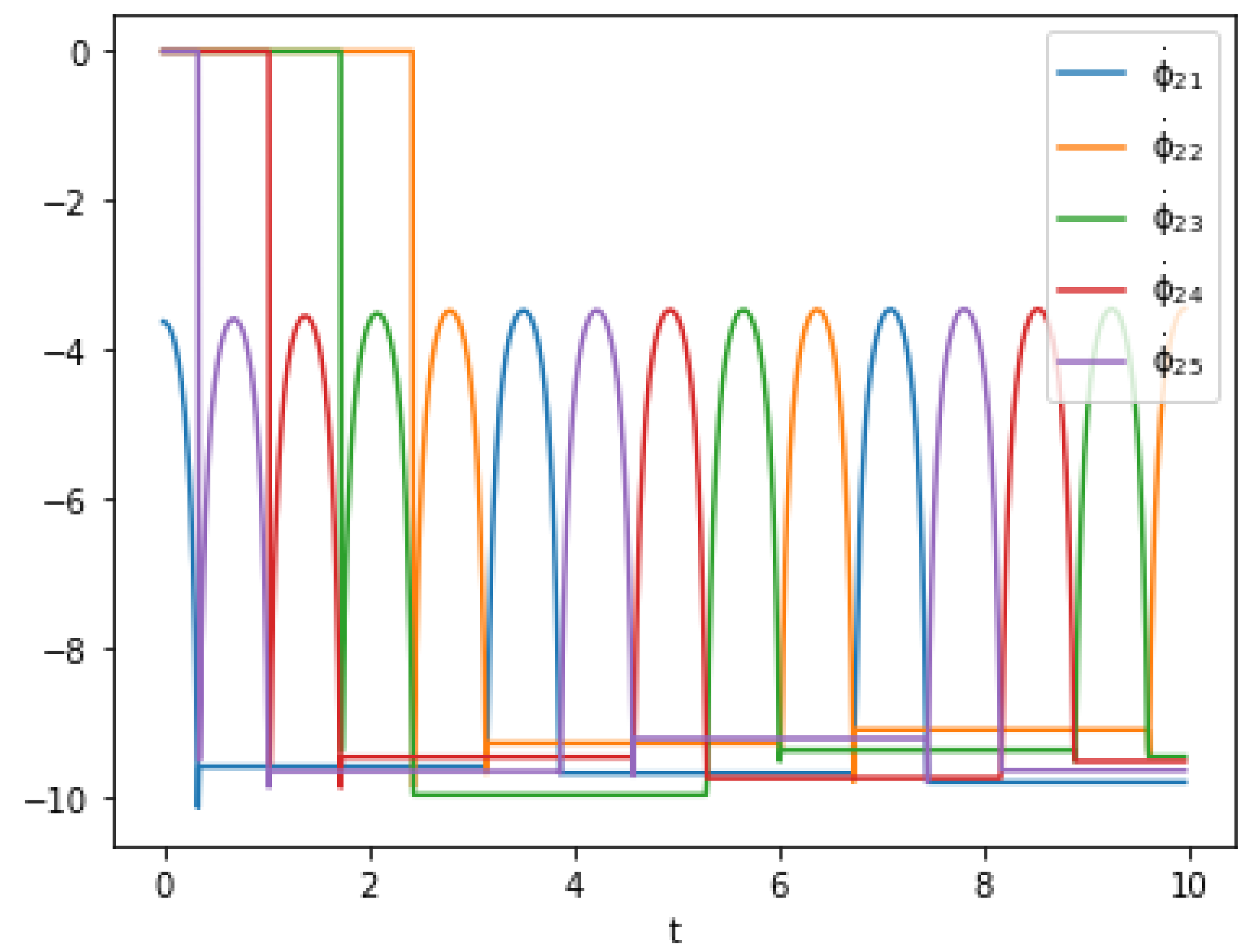
Рис. 9: Угловые скорости роликов $\dot{\varphi}_1$.

Движение 2 $(\nu_1(0) = 1, \nu_{2,3} = 0)$





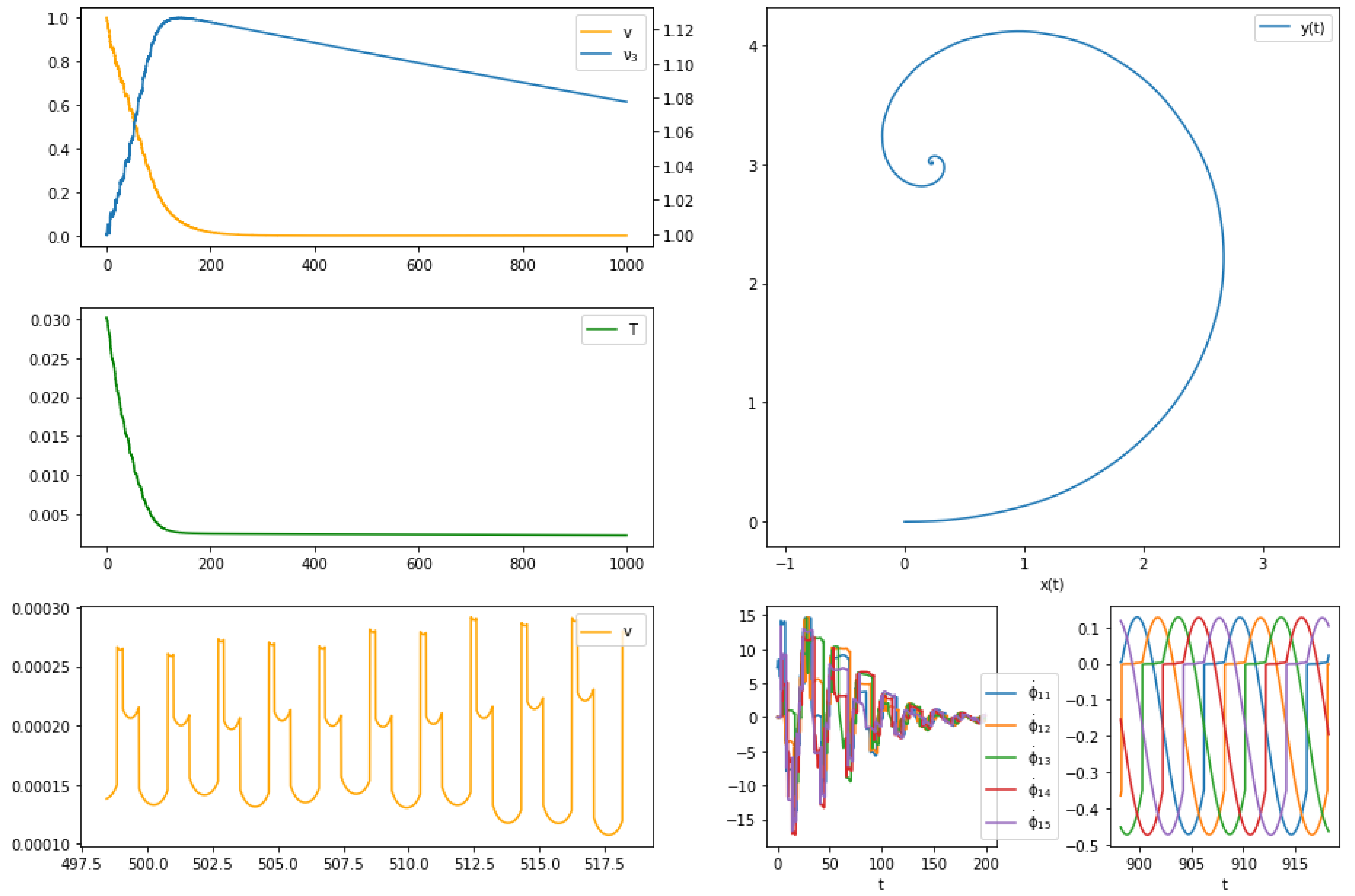




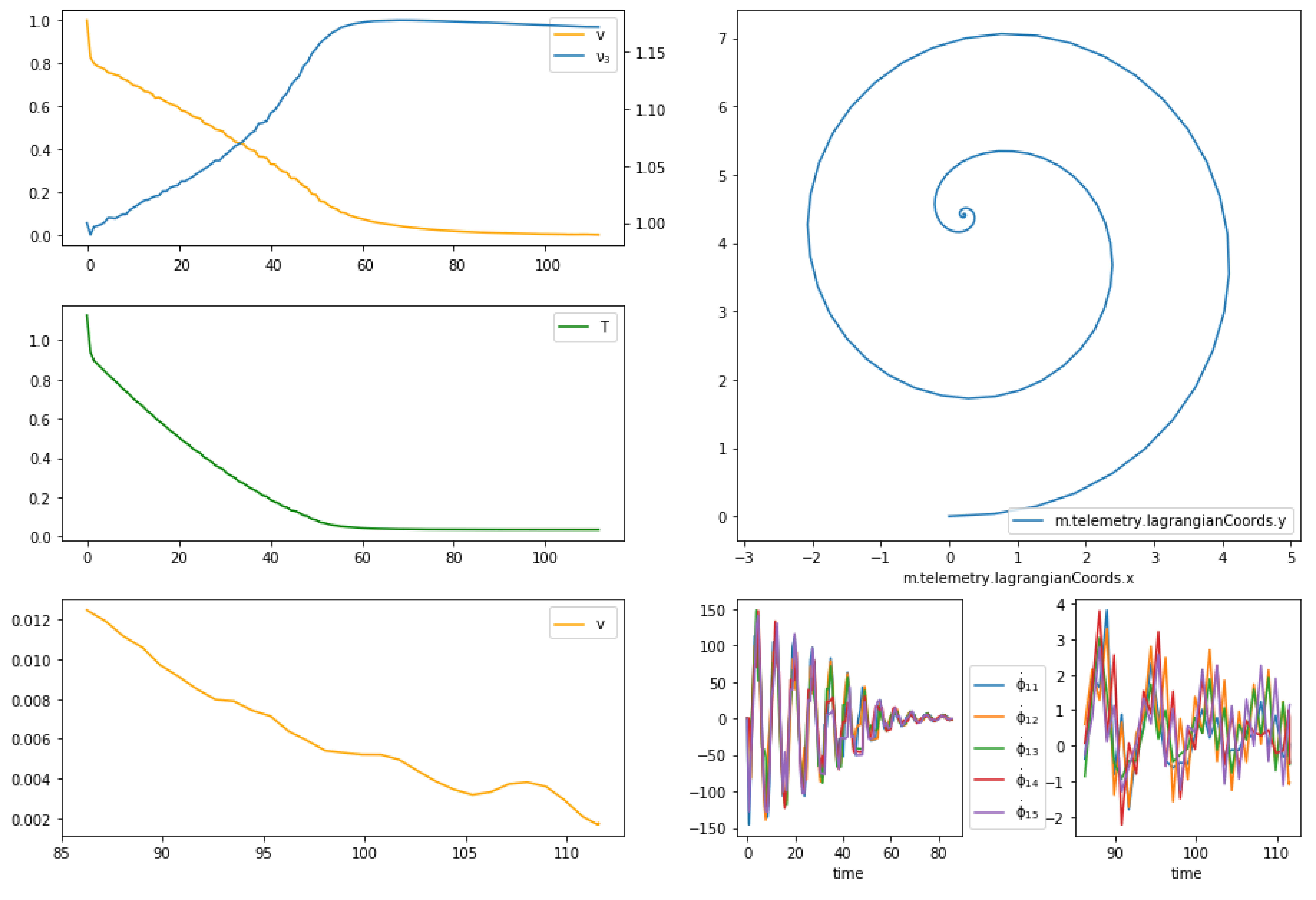
Кинетическая энергия T и скорость v центра масс

Угловые скорости роликов $\dot{\varphi}_1$.

Глава 2. Движение 3 $(\nu_1(0) = 1, \nu_2(0) = 0, \nu_3(0) = 1)$



Глава 3. Случай вязкого трения. Движение 3



Глава 3. Построение динамической модели экипажа на плоскости с трением

Глава 3. Подход к моделированию динамики систем тел

- Введем избыточные координаты. Для каждого твердого тела системы: $\mathbf{r},\ \ \mathbf{v},\ \ \mathbf{q},\ \ \boldsymbol{\omega}$
- Для каждого твердого тела – уравнения Ньютона-Эйлера:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \qquad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$$

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, J\boldsymbol{\omega}] = \mathbf{M} + \mathbf{L}, \qquad \dot{\mathbf{q}} = (0,\ \ \boldsymbol{\omega})$$

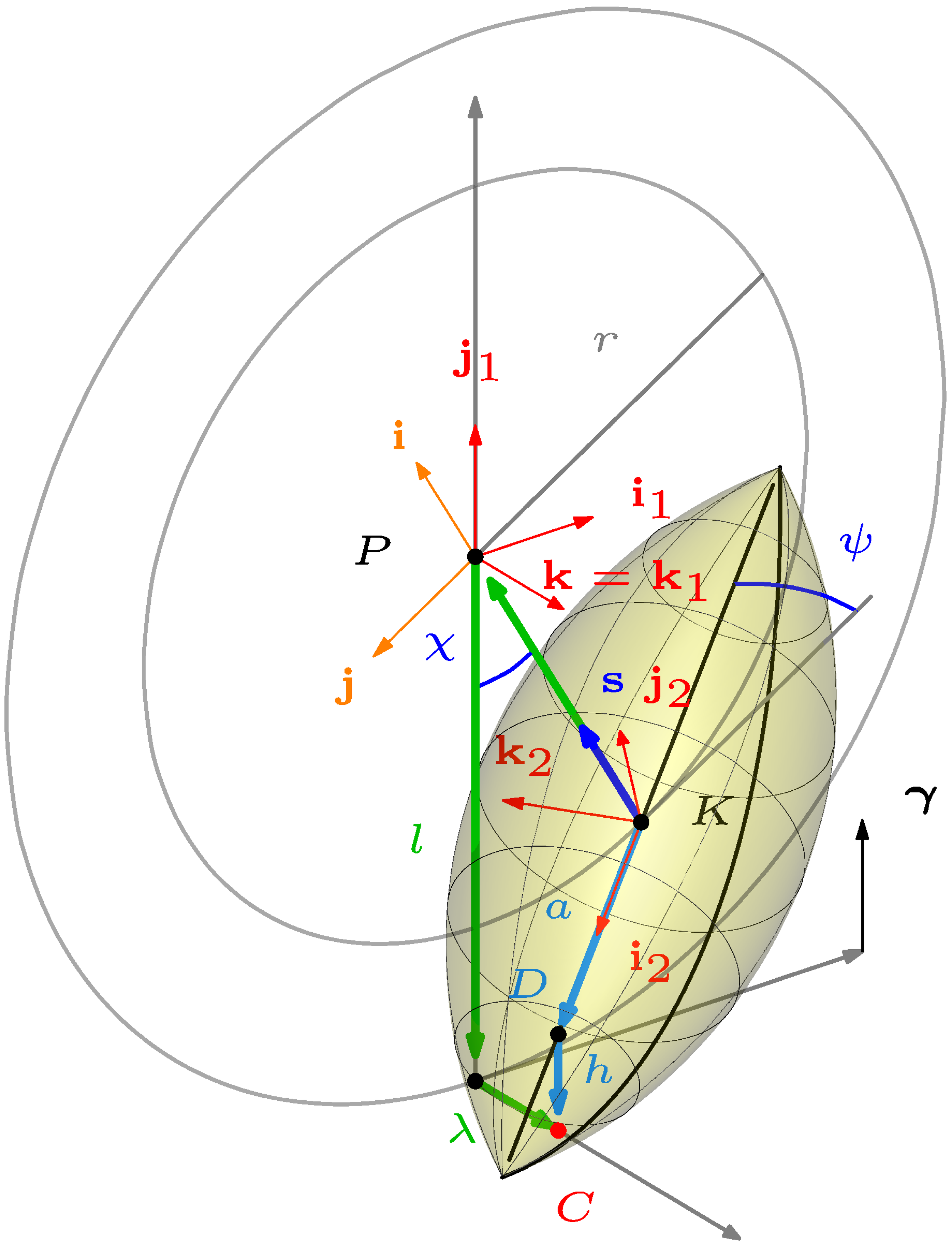
- Уравнения связей

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) = 0$$

- Модель реакций связей

$$g(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{L}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) = 0$$

Глава 3. Модель контактного взаимодействия



$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_K + r\mathbf{s} - l\mathbf{e}_z + \lambda\mathbf{k}_1$$

$$\lambda = \frac{(r\mathbf{s} - l\mathbf{e}_z)\cdot\mathbf{k}_2}{\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2}$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_K + [\boldsymbol{\omega}_{\text{рол}}, \overrightarrow{KC}]$$

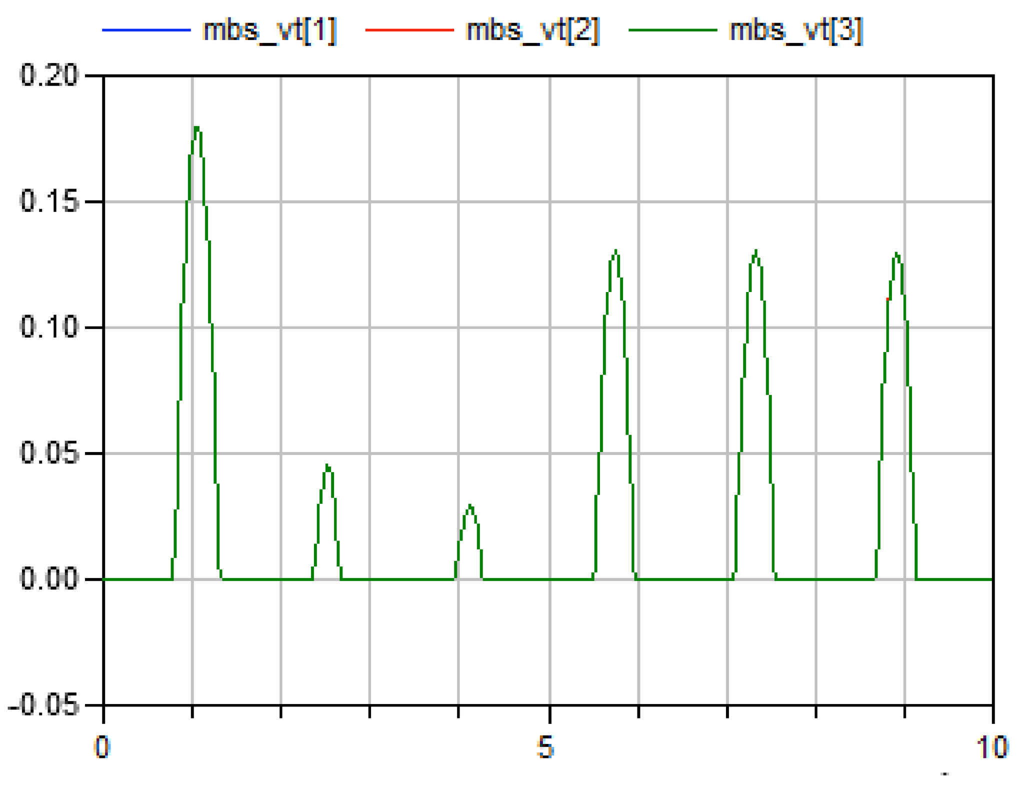
Ролик находится в контакте $\iff$ $\mathbf{s}\cdot\mathbf{e}_z < \cos\dfrac{\pi}{n}$ и $z_C < l$. Тогда используются уравнения:

$$\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{e}_z = 0$$

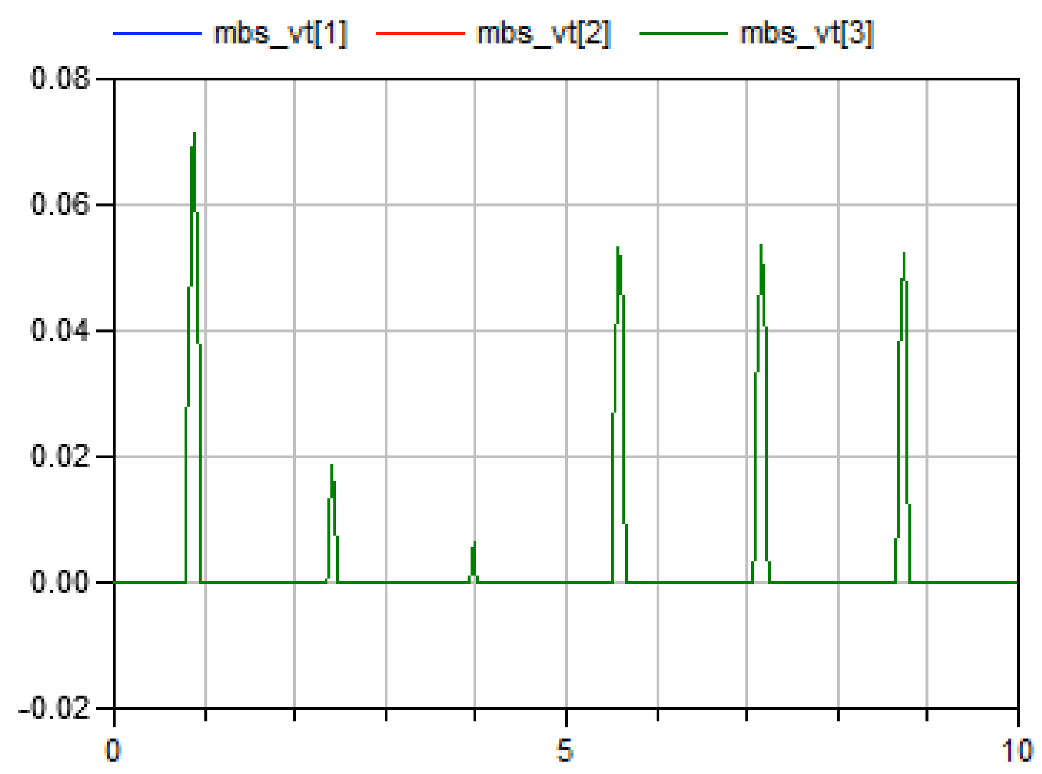
$$\mathbf{R}_{\text{к}} = \mathbf{F}_{\text{тр}} + N\mathbf{e}_z$$

Иначе $\mathbf{R}_{\text{к}} = \mathbf{0}$

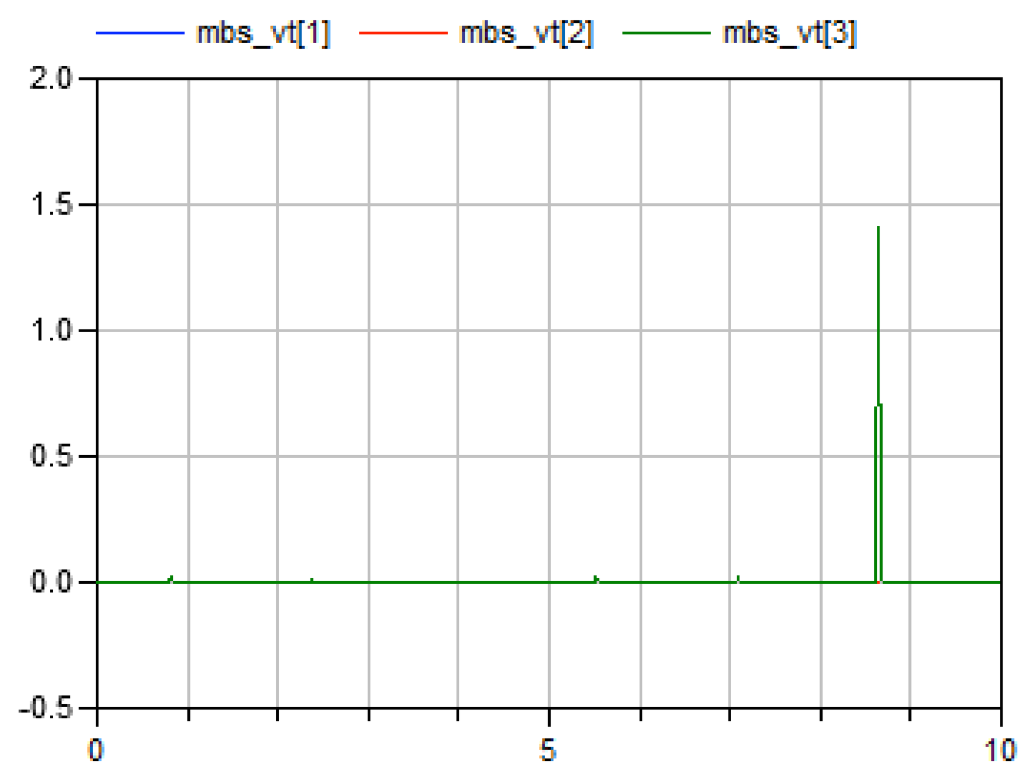
Глава 3. Движение 1



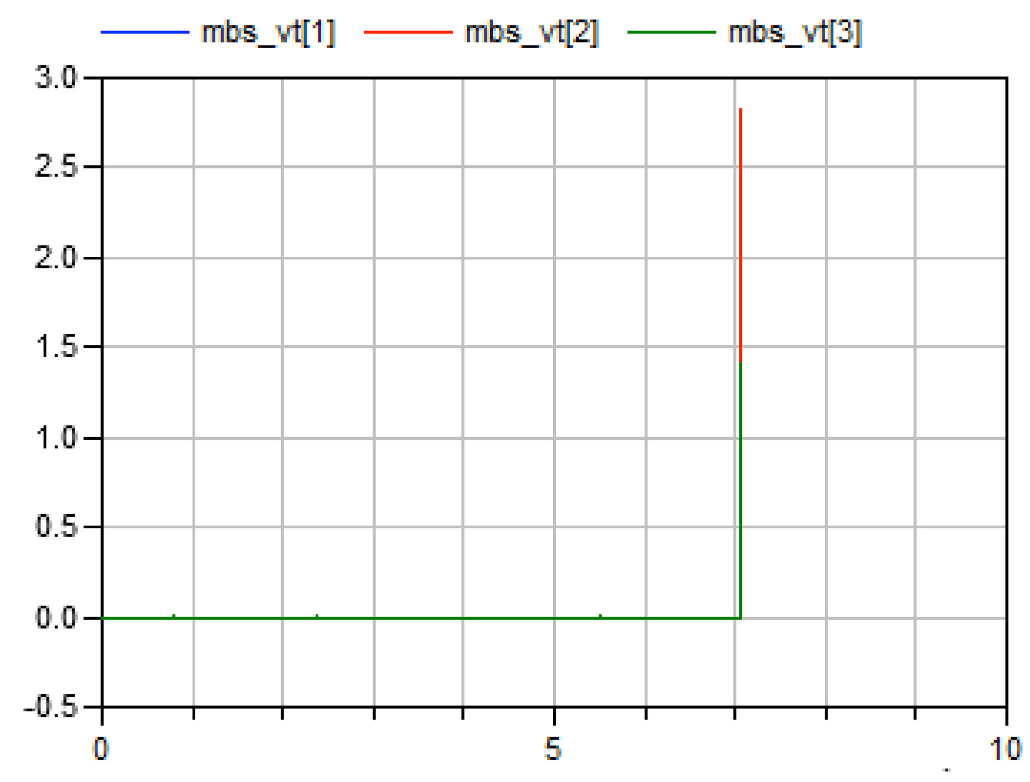
$\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-1}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$



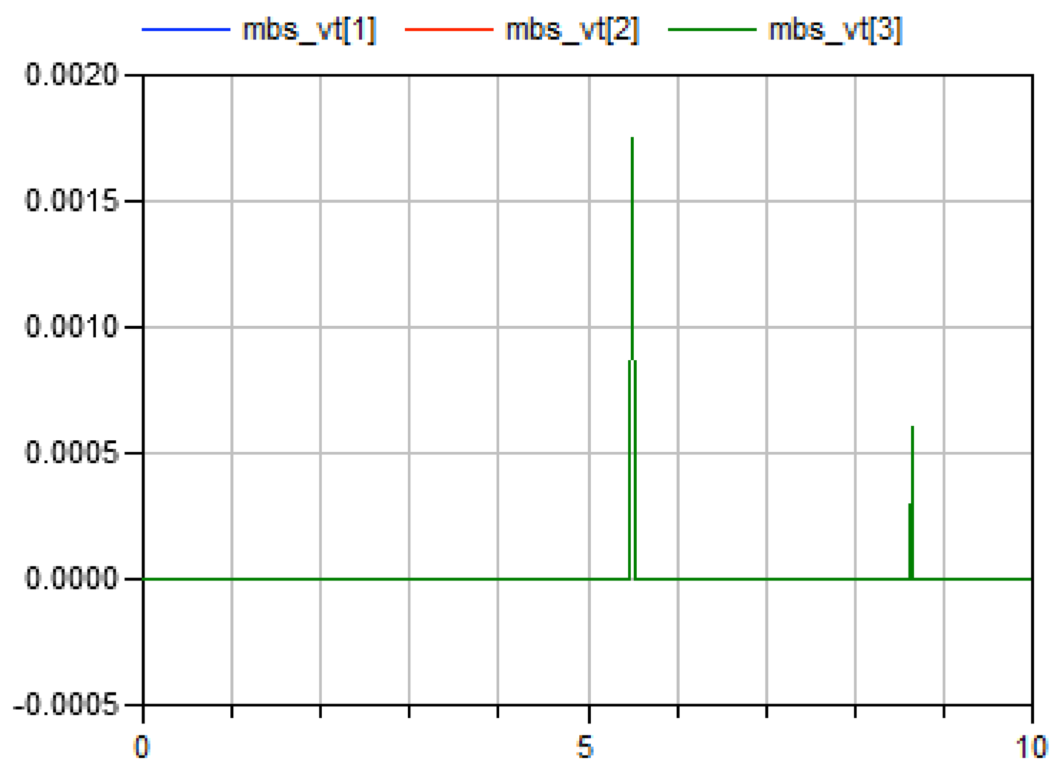
$\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-2}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$



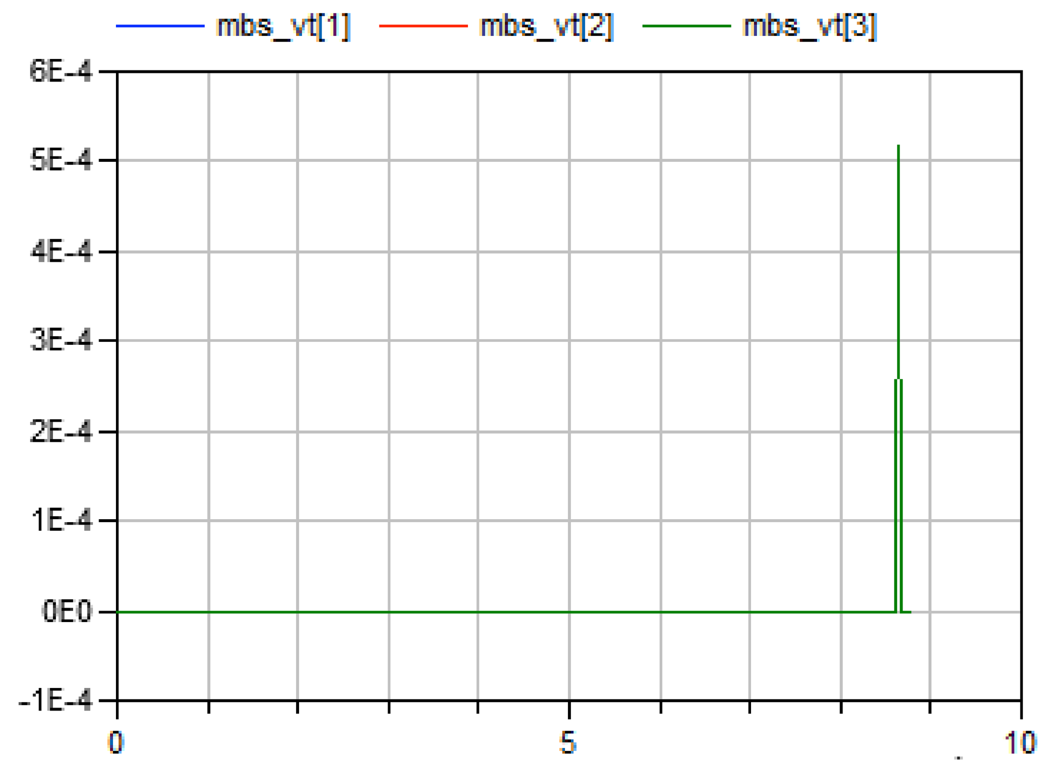
$\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-3}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$



$\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-4}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

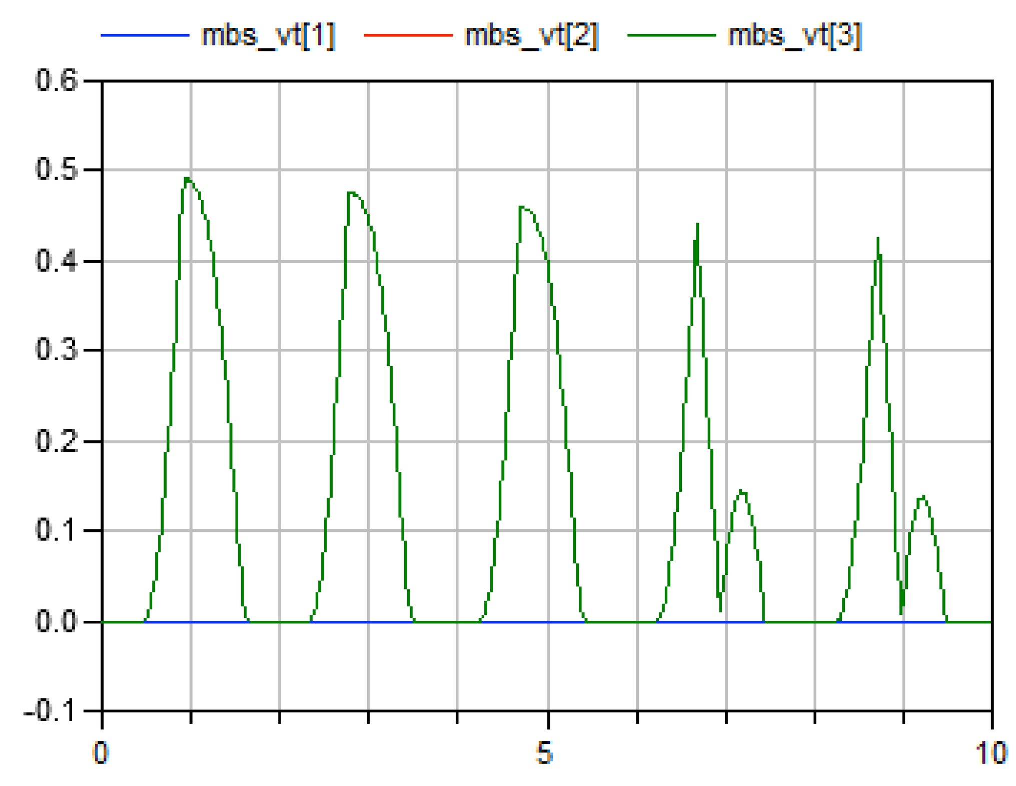


$\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-5}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

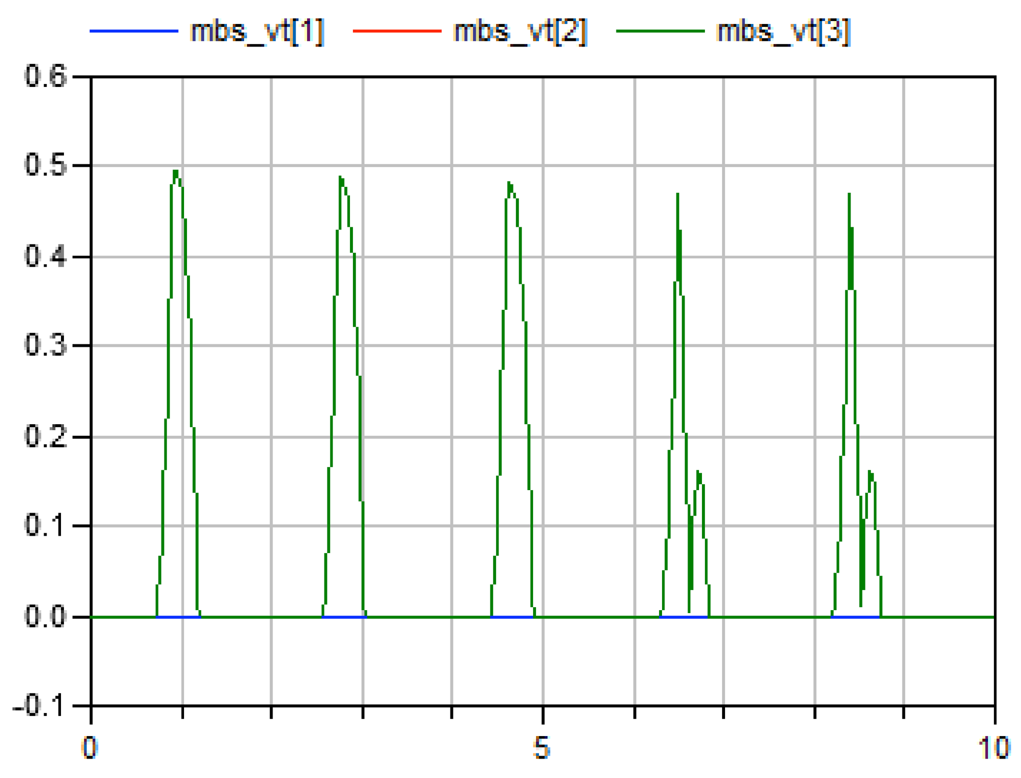


$\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-6}, v_0 = 0, \omega_0 = 1$

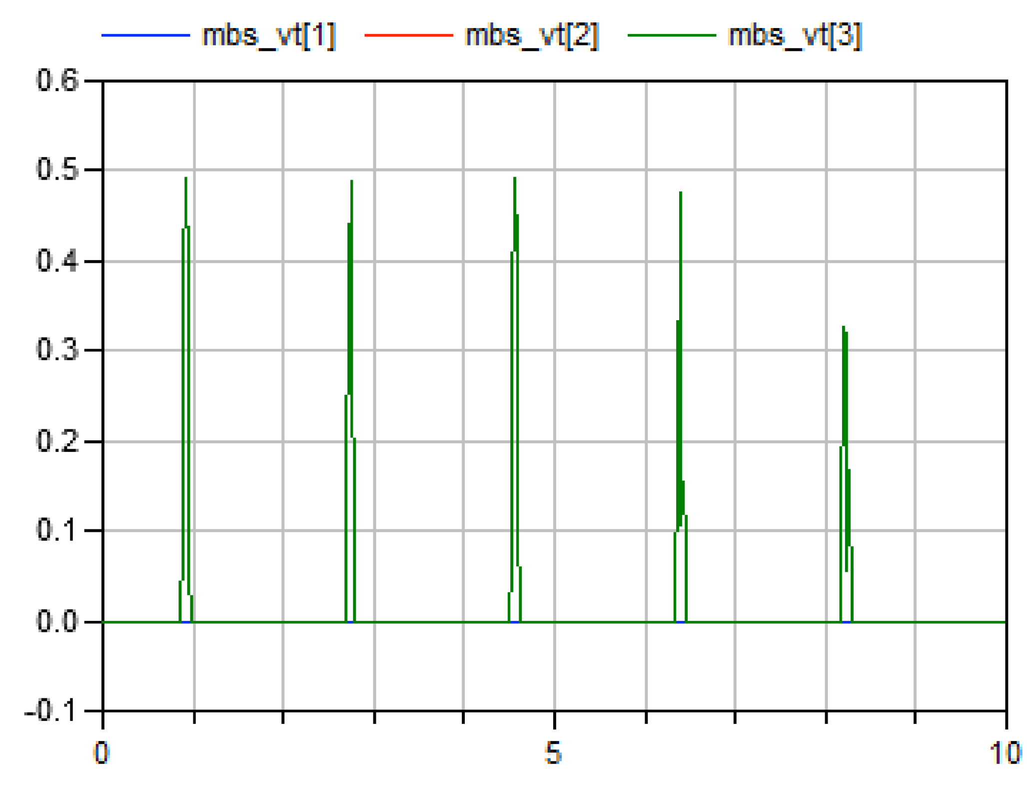
Глава 3. Движение 2



$\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-1}, v_0 = 1, \omega_0 = 0$



$\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-2}, v_0 = 1, \omega_0 = 0$



$\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}} = 10^{-4}, v_0 = 1, \omega_0 = 0$

Глава 3. Сравнение с безынерционной моделью

	Движение 1	**Движение** 2
$\frac{m_{\text{рол}}}{m_{\text{к}}}$	$\Delta\theta$	$\max(\lvert\Delta x\rvert, \lvert\Delta y\rvert)$
10^{-1}	≈ 1	≈ 1
10^{-2}	$\approx 10^{-1}$	≈ 0.5
10^{-3}	$\approx 10^{-2}$	$\approx 10^{-1}$
10^{-4}	$\approx 10^{-3}$	$\approx 10^{-2}$
10^{-5}	$\approx 10^{-3}$	
10^{-6}	$\approx 10^{-4}$	

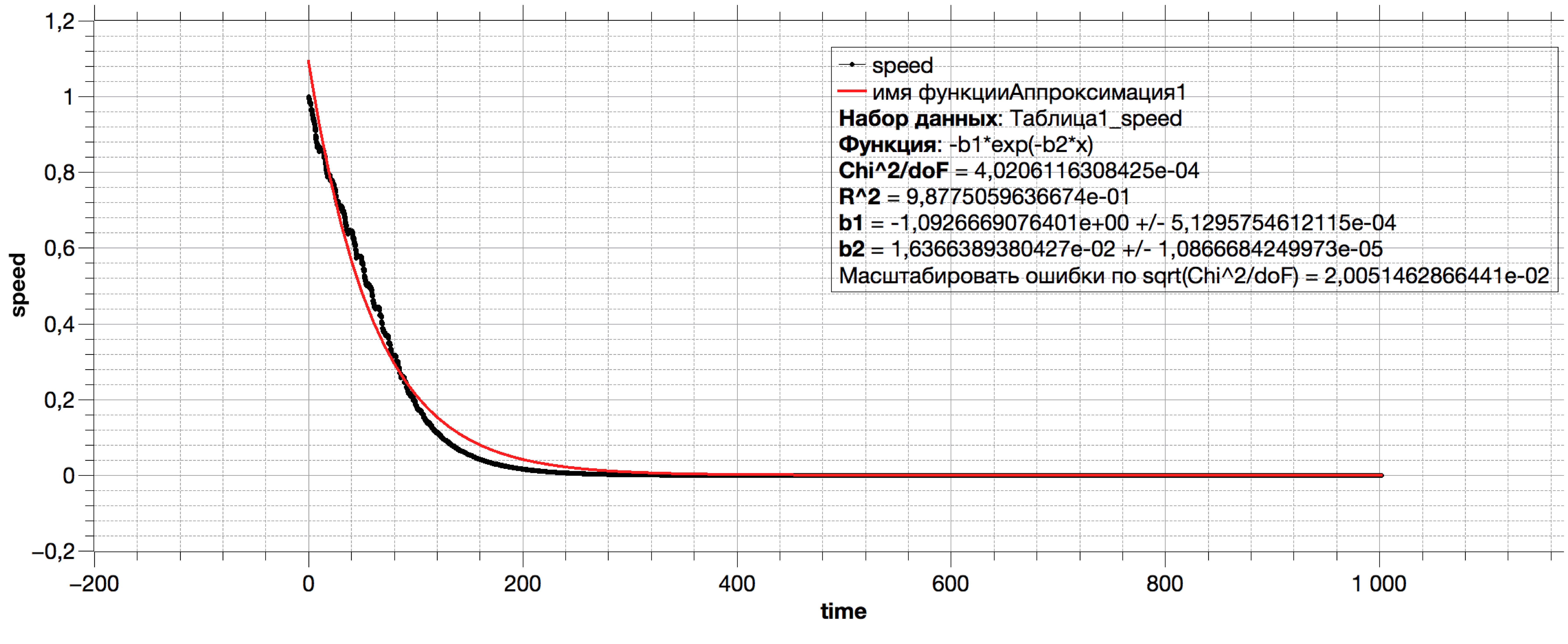
Проведено сравнение движений безынерционной модели экипажа и модели экипажа на плоскости с сухим трением. В таблице приведены величины отличий угла курса θ экипажа и координат центра масс x, y к моменту безразмерного времени $t = 10$. Отличия уменьшаются с уменьшением порядка величины отношения массы одного ролика $m_{\text{рол}}$ к суммарной массе колеса $m_{\text{к}}$.

Результаты, выносимые на защиту

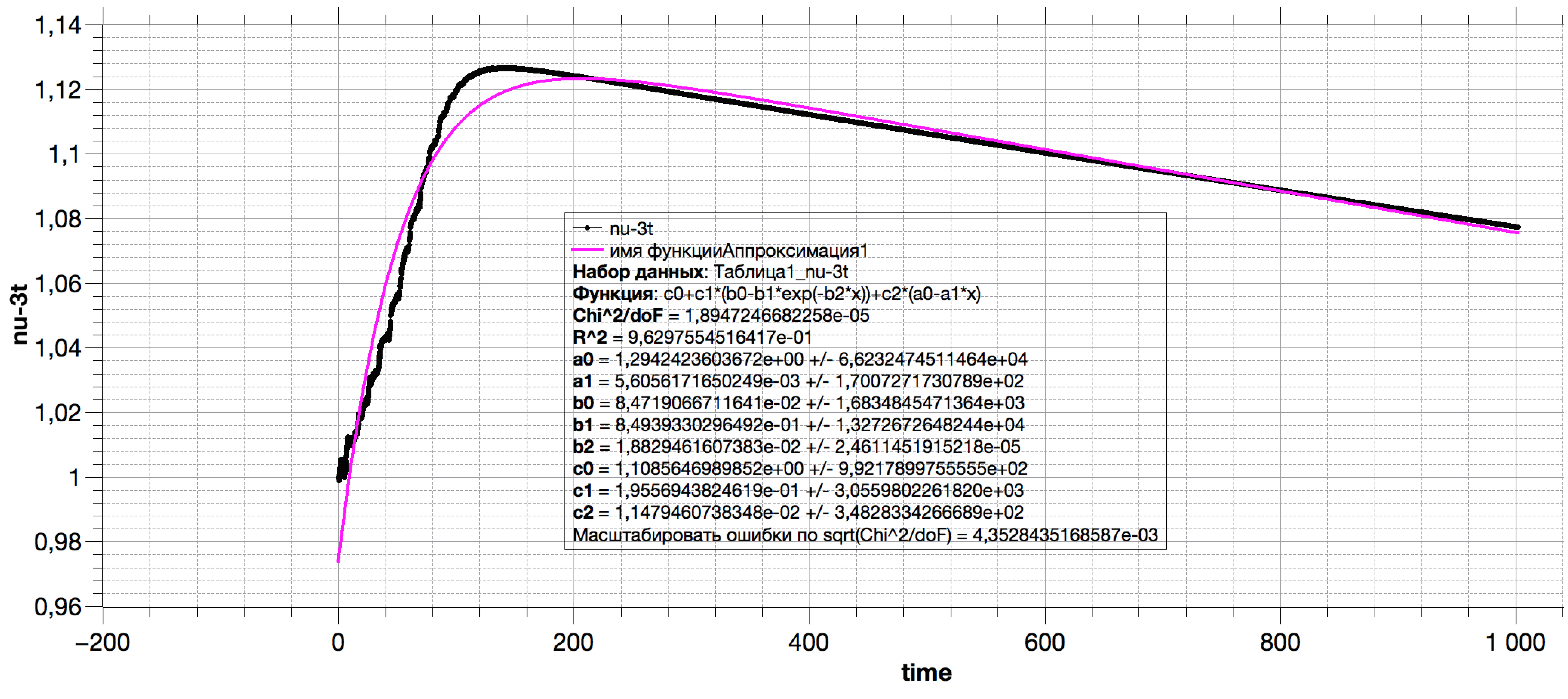
.

1. Построены модели экипажа с омни-колесами, движущегося по горизонтальной плоскости по инерции: неголономная с идеальными связями и голономная с неидеальными. Обе модели учитывают инерцию роликов омни-колес.
2. Первая модель получена в предположении, что ролик омни-колеса не проскальзывает относительно плоскости (связи идеальны). Уравнения движения на гладких участках (т.е. между сменой ролика в контакте) получены аналитически в псевдоскоростях и представляют собой уравнения 33 порядка для экипажа с 3 колесами и 5 роликами на каждом колесе. С помощью теории удара расчет изменения обобщенных скоростей при смене ролика в контакте сведен к решению системы линейных алгебраических уравнений, имеющей единственное решение в т.ч. при кратном ударе.
3. Аналитически показано, что при равенстве осевого момента инерции ролика нулю, её уравнения движения совпадают с уравнениями движения безынерционной модели.
4. Показано, что линейный первый интеграл, существующий в безынерционной модели, разрушается при осевом моменте инерции, отличном от нуля. При этом скорость изменения значения этого интеграла пропорциональна осевому моменту инерции ролика. Найдены линейные интегралы, связывающие угловую скорость платформы экипажа и скорости собственного вращения роликов, не находящихся в контакте.
5. В ходе численных экспериментов обнаружен эффект быстрого убывания скорости центра масс по сравнению с угловой скоростью платформы экипажа.
6. Модель с неидеальными голономными связями реализована в системе автоматического построения численных динамических моделей для вязкого трения и для регуляризованного сухого трения. Для этого найдены геометрические условия контакта роликов омни- и mecanum-колес и опорной плоскости.
7. Для различных моделей экипажа с омни-колесами, рассмотренных в работе – безынерционной модели и модели экипажа с массивными роликами на плоскости с регуляризованным сухим трением, а также для моделей экипажа с массивными роликами на абсолютно шероховатой плоскости и на плоскости с вязким трением – показана их взаимная согласованность при стремлении параметров – момента инерции ролика и коэффициента вязкого трения – к нулю или к бесконечности, соответственно.

Скорость центра платформы $v(t) \approx \hat{v} = b_1 e^{-b_2 x}$



Угловая скорость $\nu_3(t) \approx \hat{\nu_3} = c_0 + c_1(b_0 - b_1 e^{-b_2 x}) + c_2(a_0 - a_1 x)$



Кинетическая энергия системы $T(t) \approx \hat{T} = d_0 + d_1 \hat{v} + d_2 \hat{\nu_3}$