

Proporții

Def: numim proporție o egalitate între două rapoarte.

Ex: $\frac{8}{4} = \frac{12}{6}$ (A) deoarece $8:4=2$ $12:6=2$

Contraex: $\frac{8}{4} = \frac{3}{2}$ (F) deoarece $8:4=2$ $3:2=1.5$

În general: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow \begin{cases} \text{extremi: } a \text{ și } n \\ \text{mezi: } b \text{ și } m \end{cases}$
($b \neq 0, n \neq 0$)

Proprietatea fundamentală a proporției: în orice proporție produsul mezilor este egal cu produsul extremilor.

Ex: $\frac{\overset{\text{I}}{3}}{\underset{\text{III}}{4}} = \frac{\overset{\text{II}}{9}}{\underset{\text{II}}{12}}$ (A) pt. că $3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$ extremi: 3 și 12
mezi: 4 și 9

Aflarea unui termen necunoscut al unei proporții

$$\frac{x}{2} = \frac{3}{8} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 3}{8} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$\text{un extrem} = \frac{\text{produsul mezilor}}{\text{celălalt extrem}}$$

Probă: $\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ (?) $\left\{ \begin{array}{l} \frac{3 \cdot 8}{4} = 6 \\ 2 \cdot 3 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 4}{1} \Rightarrow x = 12 \quad \text{Probă: } \frac{1}{3} = \frac{4}{12} \text{ (A) pt. că } 1 \cdot 12 = 3 \cdot 4$$

$$\frac{5}{6} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 12}{6} \Rightarrow x = 10$$

$$\text{un mez} = \frac{\text{produsul extremilor}}{\text{celălalt mez}}$$

Probă $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$ (A) pt. că $5 \cdot 12 = 6 \cdot 10$

$$\frac{7}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 3}{2} \Rightarrow x = \frac{21}{2} \Rightarrow \frac{\overset{\text{I}}{7}}{\underset{\text{III}}{\frac{21}{2}}} = \frac{\overset{\text{II}}{2}}{\underset{\text{II}}{3}}$$

Probă: $\left\{ \begin{array}{l} 7 \cdot 3 = 21 \\ \frac{21}{2} \cdot 2 = 21 \end{array} \right\} \Rightarrow 7 \cdot 3 = \frac{21}{2} \cdot 2$

Proporții derivate: dintr-o proporție dată putem obține mai multe proporții prin următoarele procedee, cu condiția ca numitorii să fie diferiți de zero (nenuli):

Considerăm proporție $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$

1. Schimbarea mezilor între ei: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a}{m} = \frac{b}{n}$ $\frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

2. Schimbarea extremilor între ei: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{n}{b} = \frac{m}{a}$ $\frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

3. Schimbarea ordinii rapoartelor: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{a}{b}$ $\frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

4. Inversarea rapoartelor: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n}{m}$ $\frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{3}{6}$

5. Adunarea la numitori a numărătorilor: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{m}{m+n}$ $\frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{8}{8+4} = \frac{6}{6+3}$ $\frac{8}{12} = \frac{6}{9}$ (A) pt. că $8 \cdot 9 = 12 \cdot 6$

6. Adunarea la numărătorilor a numitorilor: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{m+n}{n}$ $\frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{8+4}{4} = \frac{6+3}{3}$ $\frac{12}{4} = \frac{9}{3}$ (A) pt. că $12 \cdot 3 = 4 \cdot 9$

7. Scăderea din numitori a numărătorilor: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{c-d}$ sau $\frac{b-a}{b} = \frac{d-c}{d}$ $\frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{4-8} = \frac{6}{3-6} \Rightarrow \frac{8}{-4} = \frac{6}{-3} \\ \frac{4-8}{4} = \frac{3-6}{3} \Rightarrow \frac{-4}{4} = \frac{-3}{3} \end{cases}$

8. Scăderea din numărători a numitorilor: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ sau $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8-4}{4} = \frac{6-3}{3} \Rightarrow \frac{4}{4} = \frac{3}{3} \\ \frac{8}{8-4} = \frac{6}{6-3} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \end{cases}$

9. Amplificarea/simplificarea rapoartelor ($m \neq 0$)

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{c}{d}$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m \cdot c}{m \cdot d}$

$$5) \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{40}{20} = \frac{6}{3} \quad \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{12}{6}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a:m}{b:m} = \frac{c}{d} \text{ sau } \frac{a}{b} = \frac{c:m}{d:m} \quad (\text{putem efectua împărțiri, nu neapărat simplificări})$$

$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{6}{3} \quad \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8:5}{4:5} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{1,6}{0,8} = \frac{6}{3} \\ \frac{8}{4} = \frac{6:2}{3:2} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{3}{1,5} \end{cases}$$

10. Înmulțirea numărătorilor sau a numitorilor cu un număr nenul: ($m \neq 0$)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \cdot m}{b} = \frac{c \cdot m}{d} \text{ sau } \frac{a}{b \cdot m} = \frac{c}{d \cdot m}$$

$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8 \cdot 7}{4} = \frac{6 \cdot 7}{3} \Rightarrow \frac{56}{4} = \frac{42}{3} \\ \frac{8}{4 \cdot 10} = \frac{6}{3 \cdot 10} \Rightarrow \frac{8}{40} = \frac{6}{30} \end{cases}$$

11. Alte procedee:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{8+4}{8-4} = \frac{6+3}{6-3} \quad \frac{12}{4} = \frac{9}{3}$$

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$$

$$\frac{8+4}{6+3} = \frac{8-4}{6-3}$$

$$\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{c-d}{c+d} = \frac{a-b}{a+b}$$

$$\frac{6-3}{6+3} = \frac{8-4}{8+4}$$

$$\frac{3}{9} = \frac{4}{12}$$

etc.