

Proporții

Def: numim proporție o egalitate între două rapoarte.

Ex: $\frac{8}{4} = \frac{12}{6}$ (A) deoarece $8:4=2$ $12:6=2$

Comparație: $\frac{8}{4} = \frac{3}{2}$ (F) deoarece $8:4=2$ $3:2=1,5$

În general: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow \begin{cases} \text{extremi: } a \text{ și } n \\ \text{mezii: } b \text{ și } m \end{cases}$
 $(b \neq 0, n \neq 0)$

Proprietatea fundamentală a proporției: în orice proporție produsul mezilor este egal cu produsul extremilor.

Ex: $\frac{\underline{3}}{4} = \frac{\underline{9}}{\underline{12}}$ (A) pt. că $3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$ $\begin{matrix} \text{extremi: } 3 \text{ și } 12 \\ \text{mezii: } 4 \text{ și } 9 \end{matrix}$

Aflarea unui termen necunoscut al unei proporții

$$\frac{x}{2} = \frac{3}{8} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 3}{8} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$
 un extrem = $\frac{\text{produsul mezilor}}{\text{celălalt extrem}}$

Probă: $\frac{\underline{3}}{4} = \frac{\underline{3}}{\underline{8}} (?) \quad \begin{cases} \frac{3}{x_1} \cdot x_2^2 = 6 \\ 2 \cdot 3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot 8 = 2 \cdot 3$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 4}{1} \Rightarrow x = 12 \quad \text{Probă: } \frac{1}{3} = \frac{4}{12} \text{ (A) pt. că } 1 \cdot 12 = 3 \cdot 4$$

$$\frac{5}{6} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 12}{6} \Rightarrow x = 10 \quad \text{un mez} = \frac{\text{produsul extremlor}}{\text{celălalt mez}}$$

Probă: $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$ (A) pt. că $5 \cdot 12 = 6 \cdot 10$

$$\frac{7}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 3}{2} \Rightarrow x = \frac{21}{2} \Rightarrow \frac{\frac{7}{21}}{\frac{21}{2}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{2}{2}}$$

Probă: $\frac{7 \cdot 3}{21} = \frac{21}{2} \quad \left\{ \Rightarrow 7 \cdot 3 = \frac{21}{2} \cdot 2 \right.$
 $\frac{21}{2} \cdot 2 = 21$

Proportii derivate: dintr-o proportie data putem obtine mai multe proportii prin urmatoarele procedee, cu conditia ca numitorii sa fie diferiti de zero (nenuli):

$$\text{Consideram proportia } \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \quad \frac{8}{4} = \frac{6}{3}$$

$$1. \text{ Schimbarea mezilor intre ei: } \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a}{m} = \frac{b}{n} \quad \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$2. \text{ Schimbarea extremilor intre ei: } \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{n}{b} = \frac{m}{a} \quad \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

$$3. \text{ Schimbarea ordinii rapoartelor: } \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \quad \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{8}{3}$$

$$4. \text{ Inversarea rapoartelor: } \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n}{m} \quad \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{3}{6}$$

5. Adunarea la numitori a numaratorilor:

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{m+n}{n} \quad \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{8+4}{4} = \frac{6+3}{3} \quad \frac{12}{4} = \frac{9}{3} \text{ (A) pt. ca } 8+4 = 12 \cdot 4$$

6. Adunarea la numaratorilor a numitorilor:

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{m+n}{n} \quad \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{8+4}{4} = \frac{6+3}{3} \quad \frac{12}{4} = \frac{9}{3} \text{ (A) pt. ca } 4 \cdot 3 = 12 \cdot 1$$

7. Scaderea din numitori a numaratorilor:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{c-d} \text{ sau } \frac{b-a}{b} = \frac{d-c}{d} \quad \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{4-8} = \frac{6}{3-6} \Rightarrow \frac{8}{-4} = \frac{6}{-3} \\ \frac{4-8}{4} = \frac{3-6}{3} \Rightarrow \frac{-4}{4} = \frac{-3}{3} \end{cases}$$

8. Scaderea din numaratori a numitorilor:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \text{ sau } \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8-4}{4} = \frac{6-3}{3} \Rightarrow \frac{4}{4} = \frac{3}{3} \\ \frac{8-4}{8-4} = \frac{6-3}{6-3} \Rightarrow \frac{4}{4} = \frac{3}{3} \end{cases}$$

9. Amplificarea/simplificarea rapoartelor ($m \neq 0$)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{am}{bm} = \frac{c}{d} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m \cdot c}{m \cdot d}$$

$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{40}{20} = \frac{6}{3} \quad \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{12}{6}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{c}{d} \text{ sau } \frac{a}{b} = \frac{c \cdot m}{d \cdot m} \quad (\text{putem efectua împărțiri, nu neapărat simplificare})$$

$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{6}{3} \quad \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{40}{20} = \frac{6}{3} \\ \frac{8}{4} = \frac{6 \cdot 2}{3 \cdot 2} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{15} \end{cases}$$

10. Înmulțirea numărătorilor sau a numitorilor cu un număr nenul: ($m \neq 0$)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \cdot m}{b} = \frac{c \cdot m}{d} \text{ sau } \frac{a}{b \cdot m} = \frac{c}{d \cdot m}$$

$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8 \cdot 7}{4} = \frac{6 \cdot 7}{3} \Rightarrow \frac{56}{4} = \frac{42}{3} \\ \frac{8}{4 \cdot 10} = \frac{6}{3 \cdot 10} \Rightarrow \frac{8}{40} = \frac{6}{30} \end{cases}$$

11. Alte procedee:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{8+4}{8-4} = \frac{6+3}{6-3} \quad \frac{12}{4} = \frac{9}{3}$$

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d} \quad \frac{8+4}{6+3} = \frac{8-4}{6-3} \quad \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{c-d}{c+d} = \frac{a-b}{a+b} \quad \frac{6-3}{6+3} = \frac{8-4}{8+4} \quad \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$$

etc.

...