Approximation du nombre π

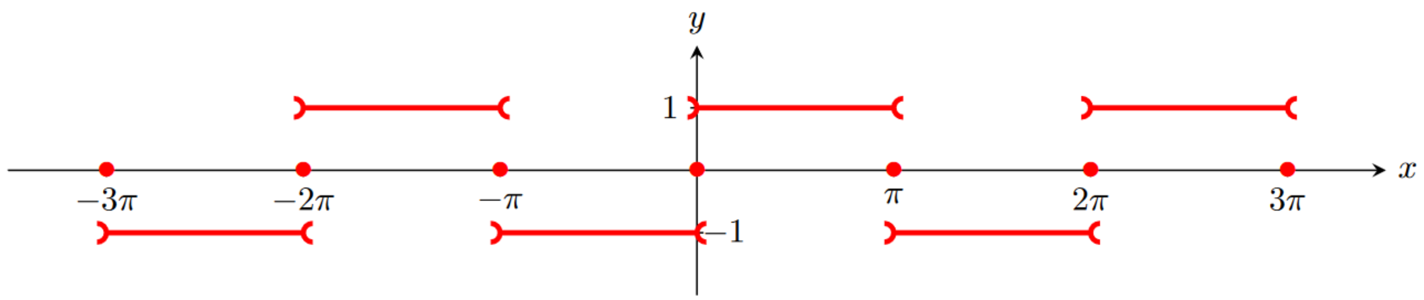
Le nombre π est un nombre qui a toujours fasciné les mathématiciens, notamment sa suite infine de décimales. C'est une des constantes les plus importantes en mathématiques, que l'on retrouve dans différentes formules qui régissent les lois de l'univers, en géométrie, probabilités, trigonométrie, intégration, physique, ingénierie, et bien sûr en informatique. Disposer d'une approximation numérique de ce nombre devient alors une nécessité pour les scientifiques, ingénieurs, enseignants et étudiants. Comme vu en cours et TD, certains nombres réels ne sont pas calculables par une Machine de Turing. Malheureusement, c'est le cas pour le nombre π.

Le but ce projet est de présenter quelques méthodes, basées sur deux principes mathématiques différents, pour calculer une approximation du nombre π. Certaines méthodes peuvent être plus ou moins efficaces (convergence, précision) en fonction du nombre d'itérations, et il pourrait être intéressant de pouvoir étudier ces différences.

Méthode des séries

Somme des inverses des carrés

Dans cette sous-section on s'intéresse à la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$, et on se propose de (re)démontrer que cette série converge vers $\frac{\pi^2}{6}$. Pour ce faire, on utilise le développement en série de Fourier d'une fonction f définie par le graphique suivant :



La fonction f est 2π-périodique, valant 1 sur l'intervalle $]0,\pi[$, -1 sur l'intervalle $]-\pi,0[$, et vérifiant $f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 0$.

Le développement en série de Fourier $S_N(f)$ de la fonction f est défini (dans sa variante réelle) par :

$$S_N(f) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nt)$$

avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$$

1. **Montrer que $a_0 = 0$, et que $\forall n \geqslant 1$, $a_n = 0$ et $b_n = \frac{4}{2\pi}\left(\frac{1-\cos(n\pi)}{n}\right)$**

1. **En étudiant la parité de n, en déduire que pour tout entier naturel p, $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)\pi}$**

1. **On rappelle le Théorème de Parseval :**

   Soit f une fonction continue par morceau, et 2π-périodique. Alors on a l'égalité suivante :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

   vec a_n et b_n désignant les coefficients de Fourier réels de f.

   En appliquant le théorème de Parseval à la fonction f, montrer que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

   Cette série sera appelée la *série impaire*.

1. En remarquant que

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} =$$

$$\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2}$$

$$+$$

$$\sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

, en simplifiant l'expression puis en passant à la limite en l'infini, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$+ \frac{\pi^2}{8}$$

1. **Finalement, en déduirela valeur de la *série paire***

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Implémentations

1. **Implémenter une fonction *SerieInvCarres(N)* renvoyant calculant les N premiers termes de la somme**

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$$

In [ ]:

```

```

1. **En utilisant l'équation *série paire*, implémenter une fonction *MethodeSerieInvCarres(N)* renvoyant une approximation du nombre π.**

In [ ]:

```

```

1. **Implémenter une fonction *SerieInvCarresImparis(N)* renvoyant calculant les N premiers termes de la somme**

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

In [ ]:

1. En utilisant l'équation *série impaire*, implémenter une fonction *MethodeSerieInvCarresImparis(N)* renvoyant une approximation du nombre π.

In [ ]:

1. Pour chacune des deux méthodes ci-dessus, tracer la courbe représentant l'évolution de $|MethodeSerieXXX(N) - \pi|$ en fonction de N

In [ ]:

1. Pour chacune des deux méthodes ci-dessus, combien faut-il de termes N dans la somme pour obtenir une approximation de π avec une précision de l'ordre de 10^{-4} ?

In [ ]:

1. Le célèbre mathématicien Ramanujan proposa, de manière quasi-magique, un certain nombre de formules permettant d'approximer le nombre π. Une des formules proposées peut s'énoncer comme suit :
$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4} \times \frac{1103 + 26390n}{(4 \times 99)^{4n}}$$
Implémenter une fonction *MethodeSerieRamanujan(N)*, basée sur cette équation, renvoyant une approximation du nombre π.

In [ ]:

1. Déterminer combien cette méthode fournit de décimales supplémentaires à π à chaque nouveau terme de la série.

In [ ]:

1. Discuter et comparer l'efficacité des trois méthodes présentées ci-dessus. Quels peuvent être les avantages et les inconvénients de chacune ?

Méthode de Monte-Carlo

\"Le terme \"méthode de Monte-Carlo\", ou \"méthode Monte-Carlo\", désigne une famille de méthodes algorithmiques visant à calculer une valeur numérique approchée en utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes. Le nom de ces méthodes, qui fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo, a été inventé en 1947 par Nicholas Metropolis.\"

On se propose d'utiliser cette méthode pour obtenir une approximation du nombre π. Considérons $\mathcal{D}$ la portion de disque définie par :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

Le principe de la méthode est de choisir aléatoirement un grand nombre de points dans le carré $[0,1] \times [0,1]$ et d'observer combien de ces points se situent dans le quart de disque $\mathcal{D}$. On notera n le nombre de points tirés, et k_n le nombre de ces points qui se situent dans $\mathcal{D}$.

1. Déterminer l'aire de la portion de disque $\mathcal{D}$. En se basant sur le calcul précédent, quel à votre avis la valeur de $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n}$?

1. Implémenter une fonction ***Tirage(n)*** permettant de tirer n points dans $[0,1] \times [0,1]$ et de calculer $\frac{k_n}{n}$.

In [ ]:

1. Représenter le carré $[0,1] \times [0,1]$, le disque $\mathcal{D}$ (ou seulement le cercle associé), et le tirage des n points, en colorant de manière différente les points à l'intérieur et à l'extérieur du disque $\mathcal{D}$.

In [ ]:

1. Implémenter une fonction ***MonteCarlo(n)*** renvoyant une approximation de π.

In [ ]:

1. Représenter sous forme de nuage de points la quantité $|MonteCarlo(n) - \pi|$ en fonction de n. La méthode converge-t-elle ? Dans quel sens ?

In [ ]:

1. Combien faut-il tirer de points n (en moyenne) pour obtenir une approximation de π avec une précision de l'ordre de 10^{-4} ?

In [ ]:

1. Quels sont les inconvénients et les avantages de cette méthode par rapport aux méthodes des séries ?

Ouverture

- Citer au moins une autre méthode (basée sur un principe mathématique différent) permettant d'approximer le nombre π et expliquer brièvement son principe.

- (Bonus -- Pour les plus passionnés) Imaginer une nouvelle méthode permettant d'obtenir une approximation du nombre π.

Rendu du projet

Le travail sur ce projet est à faire par binôme (2 personnes maximum). Le travail sera restitué sous la forme d'un Notebook. Le projet est à rendre sur Moodle.

Le Notebook doit répondre à toutes les questions posées dans l'énoncé, implémenter les algorithmes demandés, et si cela s'avère nécessaire expliquer comment ces algorithmes ont été implémentés en pratique. Le Notebook se terminera par une discussion des résultats et une conclusion. La qualité, propreté et clarté de la rédaction seront pris en compte.