CYTECH (E.I.S.T.I.)

DEPARTEMENT MATHEMATIQUES. PARCOURS MATH-FINANCE.

Méthodes Numériques Avancées pour les équations aux dériveés partielles en Finance

TP3: Pricing de l'Option Asiatique par la Méthode de Monte-Carlo. Strike fixe. Call.

Prix d'une options asiatiques $V(t, S_t, A_t)$ porte sur un actif S_t et sur la valeur moyenne de l'actif

$$A_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau d\tau.$$

Prix de l'option à la date T d'écheance

$$V(T, S(T), A(T)) = max(A(T) - K, 0), \quad A(T) = \frac{1}{T} \int_0^T S_\tau d\tau$$

Le but de ce TP est la simulation numérique du prix de l'option Asiatique par la méthode de Monte-Carlo

PARTIE I. SIMULATION D'ÉVOLUTION DU PRIX DE L'ACTIF

L'évolution de l'actif sous-jacent S est un processus stochastique $S_t,\ t \in [0, T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t = 0) = S_0 \tag{1}$$

On note σ la volatilité de l'action, r le taux d'intérêt.

La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

Discrétisons l'intervalle $[0, T]$ sur K parties: $(\Delta t = T/N, \quad t_n = n\,\Delta t)$.

$$S_{t_0} = S_0, \quad S_{t_n} = S_n, \quad S_{t_N} = S(T)$$

On peut écrir pour $S_{t_{n+1}}$:

$$S_{n+1} = S_n \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sigma(W(t_{n+1}) - W(t_n)))$$

Le processus stochastique $W(t_{n+1}) - W(t_n)$ suit la loi $\mathbb{N}(0, t_{n+1} - t_n) \equiv \mathbb{N}(0, \Delta t)$.

On peut donc coder $W(t_{n+1}) - W(t_n)$ par la variable aléatoire :

$$W(t_{n+1}) - W(t_n) = \sqrt{\Delta t}\,\mathbb{N}(0,1)$$

Pour la suite utiliser les valeurs suivantes

$$\begin{cases} S_0 = 10 \\ r = 0.4 \\ \sigma = 0.3 \\ T = 1 \\ K = 10 \\ \Delta t = T/N \\ N = 100 \end{cases} \tag{2}$$

Travail à faire

1. Simuler un schéma d'evolution de l'actif.
2. Simuler N_{mc} schémas d'evolution d'actif.

Partie II. Prix de l'option Asiatique à $t = 0$

Grace au Théorème de Feynmann-Kac le prix de l'option Asiatique au moment $t = 0$ est donné par l'ésperance conditionnelle

$$V(S_0, t) = e^{-rT}\mathbb{E}[max(A(T) - K, 0)/S(t = 0) = S_0] \tag{3}$$

Partie II.1 Fonction payoff de l'option Asiatique pour S_0 fixe

- Fixer S_0.
- Simuler premier schéma d'évolution $S_n^{(1)}$

Pour $n = 1...N$

$$S_{n+1} = S_n \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\mathbb{N}(0,1))$$

Fin Pour

- Réaliser le graphe du $S_t^{(1)}$: $\quad t_n -> S_{t_n}^{(1)}$ en partant de S_0.

- Approximer l'intégrale par une somme et calculer la valeur moyenne de $A(T)$

$$A^{(1)}(T) = \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{N} S_n^{(1)} \Delta t$$

Penser à faire un simple code:

$sum = 0$

$sum = sum + S_n^{(1)} \Delta t$

- Calculer le gain pour ce schéma

$$max(A^{(1)}(T) - K, 0)$$

- Simuler un grand nombre N_{mc} de schéma d'évolution de l'actif $S_n^{(k)}$ sur l'intervalle du temps $[0, T]$, en partant toujours de S_0. Pour chaque chemin on cherche la valeur moyenne $A^{(k)}(T)$.

Travail à faire

3. Simuler le pay- off de l'option asiatique:

$$\left\{\begin{array}{c}
\textbf{function[res]= Payoff_asiatique(S0)} \\
S_1 = S0 \\
sum = 0 \\
Pour \quad n = 1...N \\
S_{n+1} = S_n \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\mathbb{N}(0,1)) \\
sum = sum + S_n \Delta t \\
Fin \quad Pour \\
res = max(sum/T - K, 0) \\
endfunction
\end{array}\right.$$

Partie II.2 Le prix de l'option Asiatique pour S_0 fixe

Le prix de l'option européenne au moment $t = 0$ est donné par

$$e^{-rT} \sum_{k=1}^{N_{mc}} max(A^{(k)}(T) - K, 0)/N_{mc}$$

Travail à faire

4. Calculer le prix de l'option Asiatique pour une S_0 fixe

• Voici le programme:

$$\begin{cases} \text{function[res]= Prix\_Asiatique\_S0\_fixe}(S_0) \\ sum = 0 \\ Pour \quad k = 1...N_{mc} \\ sum = sum + \text{Payoff\_asiatique}(S_0) \\ Fin \quad Pour \\ res = e^{-rT} sum/N_{mc} \\ endfunction \end{cases}$$

5. Trouver le prix de l'option pour $S_0 = 10$.

Partie II.3 Graphe de l'option Asiatique

6. Discrétiser l'intervalle $[0, L = 20]$ sur $I = 10$ parties et calculer le prix $V(0, S_0)$ pour chaque valeur $S = S_0$. Tracer le graphe

$$S_0 -> V(0, S_0)$$

$$\begin{cases} \text{function [prix\_option]=}\textbf{Prix\_Asiatique}(\ ) \\ for \quad k = 1 : 21 \\ S0(k) = (k-1) \\ \text{prix\_option(k)= }\textbf{Prix\_Asiatique\_S0\_fixe}\text{(S0(k))} \\ end \\ plot\text{(S0,prix\_option)} \\ endfunction \end{cases}$$

7. Tracer sur le même système de coordonnées les graphes de l'option Européenne et l'option Asiatique.

Partie III . Le prix de l'option Asiatique et la variance reduite. Optionnelle.

Tracer sur le même système de coordonnées les graphes des options Asiatiques en utilisant l'estimateur classique et l'estimateur antithétique.

Partie IV. Le prix de l'option Asiatique pour des valeurs S_t, A_t à un temps t quelconque

On commence par les simulations d'un chemin d'évolution de l'actif à partir d'un S_t arbitraire.

Partie IV.1 Le PAY-OFF de l'option Asiatique pour S_t fixe, A_t fixe et un t fixe

On programme d'abord la fonction qui calcule la fonction pay-off de l'option asiatique à un t fixe. A cette date on connait le prix de l'actif S_t et la valeur moyenne de l'actif A_t.

• On fixe S_t.

• On fixe A_t.

Il sont indépendantes maintenant.

• On simule un chémin d'évolution S_n avec $\Delta t = (T-t)/N$ à partir de S_t

• On calcule la valeur moyenne $A(T)$ de l'actif pour **le chemin complet:**

$$A(T) = \frac{1}{T}\int_0^T S_\tau d\tau$$

On cherche donc d'abord l'intégrale $\int_t^T S_\tau d\tau$ sur le chemin $[t, T]$ à l'aide des simulations de MC, on y ajoute aussi la valeur $A_t \cdot t$ connue à l'instant t. Puis on normalise l'expression.

$$\int_0^T S_\tau d\tau = \int_0^t S_\tau d\tau + \int_t^T S_\tau d\tau = A_t \cdot t + \int_t^T S_\tau d\tau$$

Finalement

$$A(T) = \frac{1}{T}(A_t \cdot t + \sum_{n=1}^{N} S_n \Delta t)$$

• On calcule le gain pour ce chémin

Partie IV.2 Le prix de l'option Asiatique pour S_t fixe, A_t fixe et un t fixe

On programme la fonction qui calcule **le prix de l'option asiatique pour S_t fixe et A_t fixe.**

• On simuler un grand nombre N_{mc} de chemins d'évolution de l'actif $S_n^{(k)}$ sur l'intervalle du temps $[t, T]$, en partant toujours de S_t. Pour chaque chemin on cherche l'intégrale $\int_t^T S_\tau d\tau$ sur le chemin $[t, T]$, on ajoute aussi la valeur $A_t \cdot t$ qui est égale en réalité $\int_0^t S_\tau d\tau$. Puis on normalise l'expression.

• Le prix de l'option européenne au moment t est donné par

$$V(t, S_t, A_t) = e^{-r(T-t)} \sum_{k=1}^{N_{mc}} max(A^{(k)}(T) - K, 0)/N_{mc}$$

Partie IV.3 Surface des prix de l'option Asiatique

On programme la fonction qui calcule le prix de l'option asiatique pour chaque S_t et chaque A_t indépendantes.

• On discrétise S_t et A_t et on calculer le prix $V(S_t, A_t, t)$ pour chaque valeur S_t et A_t et on obtient une surface des prix

$$(S_t, A_t) -> V(t, S_t, A_t)$$

• Voici le programme:

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\text{function [prix\_option]=}\textbf{Prix\_asiatique}(\ )\\
for \quad k=1:21\\
for \quad j=1:21\\
St(k)=k-1\\
At(j)=j-1\\
\text{price\_option}(k,j)=\textbf{option\_asiatique\_St\_fixe\_At\_fixe}(St(k),At(j),t)\\
end\\
end\\
\text{surf}(St,At,\text{price-option})\\
endfunction
\end{array}
\right.
$$

Travail à faire

8. Tracer les surfaces des prix de l'option asiatique pour $t = T/2, T/3, 2T/3$
9. Tracer la surface des prix de l'option asiatique

$$(t, S_t) -> V(t, S_t, A_t)$$

pour $A_t = 10$.

10. Tracer la surface des prix de l'option asiatique

$$(t, A_t) -> V(t, S_t, A_t)$$

pour $S_t = 10$.