CY TECH (E.I.S.T.I.)

PARCOUR MATHEMATIQIUES FINANCIERES

Méthodes numériques avancées pour les EDP en Finance

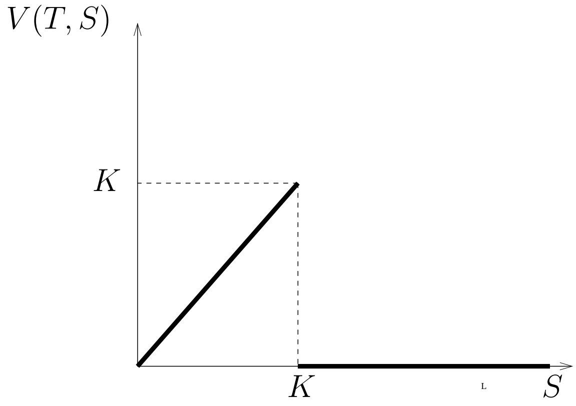
EXAMEN. 2020-2021. 8 Avril. 14h00-17h15

- Tous les documents sont autorisés.
- Pendant l'examen vous allumez les cameras.
- Le dépôt est sur TEAMS.
- L'heure limite du depot d'un dossier est 17.15.
  - 45 min sont donnés pour preparer le dossier et effectuer le depot.
  - Le dossier vous convertissez en zip.
- Déposez le dossier contenant le rapport PDF (obligatoirement PDF) et les codes - source.
  - Commentez les codes
  - **Le rapport PDF est obligatoire. Sans rapport l'examen ne sera pas corrigé.**
  - Le rapport PDF contient **une copie des codes et des graphes** expliqués et des valeurs demandés.
- Vous déposez votre dossier sur TEAMS si et seulement si vous certifiez sur l'honneur que vous avez fait les problèmes de l'examen de facon autonome, sans aucune communication avec le monde extérieur.
- Touts suspicion de triche (du type réponse brusque non justifiée, raisonnement (code) faux repéré sur plusieurs fichiers pdf, des codes identiques, etc) conduira automatiquement à un zéro.
- Uniquement en cas de problème de dépôt vous pouvez envoyer le dossier par e-mail.

Problème 1. Résolution par la méthode aux Différences Finies de l'équation de Black et Scholes pour l'option ASSET or NOTHING. Calcul des Grecques.

La fonction Pay-off de l' option ASSET or NOTHING est montré sur la figure, elle est aussi donnée par la formule suivante :

$$Pay\_off\_Asset(S,K) = \begin{cases} S, & S < K \\ 0, & S \geq K \end{cases}$$



Partie I Conditions aux limites de Dirichlet.

L'équation de Black-Scholes avec la condition finale et les conditions aux limites de Dirichlet s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(t=T,S) = Pay\_off\_Asset(S,K) \\ V(t,S=0) = 0 \\ V(t,S=L) = 0 \end{cases}$$

- Discrétiser l'équation par la méthode d'Euler explicite et utilisez les paramétres suivants :

$$\begin{cases} N = 99 & (discrtisation\,de\ l'interval,\ [0,L]) \\ M = 4999 & (discrtisation\,de\ l'interval,\ [0,T]) \end{cases}$$

Pour la suite utiliser les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} L = 30 \\ T = 0.5 \\ r = 0.4 \\ \sigma = 0.5 \\ K = 10 \end{cases}$$

1) Tracer en deux dimensions les courbes de prix : $V(t,S)$ à $t=0$ et $t=T$ dans le même système des coordonnées

2) Tracer la surface des prix $V(t,S)$ en 3 dimensions.

3) Calculer $V(t=T/3, S=6)$

$\star$ Copier les graphes et les codes sur votre fichier pdf.

Partie II Conditions aux limites de Neumann.

4) Imposer et discrétiser les conditions aux limites de Neumann. Résoudre l'équation.

5) Tracer le graphe du prix $S_0 \to V(t=0,S_0)$ en 2 dimensions et comparer avec celle de la Partie I.

$\star$ Copier les graphes et les codes sur votre fichier pdf.

Partie III Calcul du Grecque Delta.

On définie la sensibilité de l'option par rapport à l'actif et on vous propose d'utiliser la discrétisation suivante

$$\left\{ \Delta(t,S) = \frac{\partial V}{\partial S}(t,S) \qquad \Delta(n,i) = \frac{V_{i+1}^n - V_i^n}{\Delta S} \right.$$

6. Calculer la fonction discrete de Delta $\Delta(n,i)$ et tracer le graphe $S_0 \to \Delta(t=0,S_0)$

7. Tracer la surface de Delta pour $\mathbf{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{T}/\mathbf{2}]$.

$\star$ Copier les graphes et les codes sur votre fichier pdf.

Problem 2 : Prix de l'option ASSET or NOTHING par Monte-Carlo.

Partie I Volatilité est constante.

1. Tracer le graphe de ASSET or NOTHING à $t = 0$:

$$S_0 -> V(0, S_0)$$

et comparer avec celle du Problème 1 (Partie I).

2. Calculer le prix de l'option ASSET or NOTHING à $t = T/3$ pour $S_t = 6$ par la méthode de Monte-Carlo.

3. Tracer la surface des prix $(t, S) \to V(t, S)$ en 3 dimensions

$$\begin{cases} K = 10 \\ T = 0.5 \\ r = 0.4 \\ \sigma = 0.5 \end{cases}$$

⋆ Copier les graphes et les codes sur votre fichier pdf.

Partie II Volatilité est locale

La volatilité locale depend de la valeur de l'actif S de facon suivante :

$$\sigma(S) = \begin{cases} \sigma + \frac{K-S}{K} \quad si \quad S < K \\ \sigma \quad si \quad S \geq K \end{cases}$$

4. Tracer le graphe de ASSET or NOTHING à $t = 0$:

$$S_0 -> V(0, S_0)$$

et comparer avec celle de la Partie 1 de même Problème.

⋆ Copier les graphes et les codes sur votre fichier pdf.

Problem 3 : Prix de l'option ASSET or NOTHING avec des sauts

L'evolution de l'actif vérifie l'equation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t + J \cdot dN_t), \quad t \in [0, T], \quad S(t = 0) = S_0$$

J est une constante qui caractérise la taille de chaque saut.

Le prix de l'option ASSET or NOTHING avec des sauts de même taille J est donné par l'expression :

$$V(t = 0, S_0) = e^{-rT}\mathbb{E}[Pay\_off\_Asset(S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T + N_T \cdot J},\ K)/S(0) = S_0].$$

- N_T est le nombre des sauts sur la période $[O, T]$ de la vie de l'option.
- λ est une constante qui caractérise la fréquence des sauts.
- Tenez compte de la relation

$$\mu = r - \lambda(e^J - 1)$$

et du fait qu'un saut arrive avec la fréquence indépendante du mouvement Brownien.

1.Tracer le graphe de ASSET or NOTHING à $t = 0$:

$$S_0 -> V(t = 0, S_0)$$

et comparer avec celle de la Partie I du Problème 1.

Utiliser les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} N_{mc} = 1000 \\ L = 30 \\ T = 0.5 \\ r = 0.4 \\ \sigma = 0.5 \\ K = 10 \\ J = 0.17 \\ \lambda = 25 \end{cases}$$

$\star$ Copier les graphes et les codes sur votre fichier pdf.

Problème 4. Prix de l'option Asiatique par Monté-Carlo. Strike Fixe. Put.

Prix d'une option Asiatique $V(t, S, A)$ porte sur un actif S et sur la valeur moyenne **géometrique** de l'actif. Prix de l'option à la date T d'écheance

$$V(T, S(T), A(T)) = max(K - A(T), 0)$$

Au lieu de la valeur moyenne de l'actif définie par $A(T) = \frac{1}{T}\int_0^T S_\tau d\tau$ définisons la valeur moyenne **géometrique** de l'actif de facon suivante :

$$A(T) = (\Pi_{i=1}^N S(t_i))^{1/N},$$

où N est le nombre de discrétisation de l'intervalle $[0, T]$.

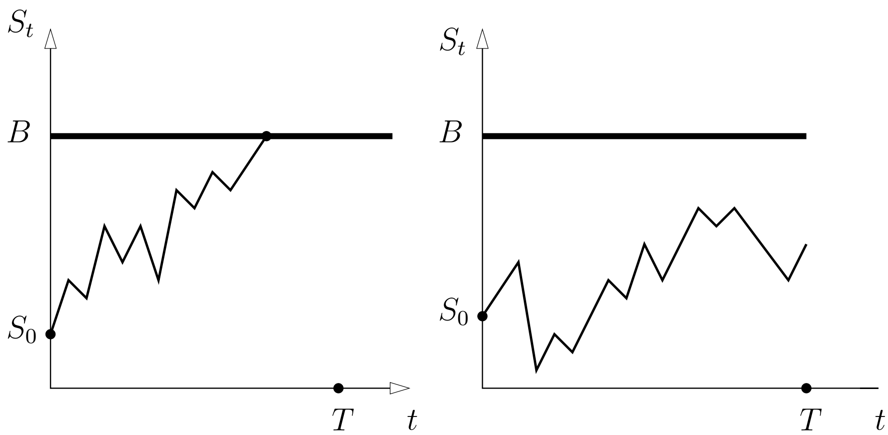
1. Calculer le prix de cette option Asiatique à $t = 0$ pour $S_0 = 9$.
2. Tracer le graphe $S_0 \longrightarrow V(t = 0, S_0)$

$$\begin{cases} K = 10 \\ T = 0.5 \\ r = 0.4 \\ \sigma = 0.5 \\ N = 100 \\ N_{mc} = 1000 \end{cases}$$

3. On vous propose maintenant de prendre $N_{mc} = 10$ et tacer le graphe $S_0 \longrightarrow V(t = 0, S_0)$ en utilisant la technique de la **réduction de la variance.**

Problem 5 : Prix de l'option barrière via Monte-Carlo. Un and Out ASSET or NOTHING option.

Le prix d'une option Barrière $V(t, S)$ dépend d'un schéma d'évolution de l'actif. Si la barrière B est supérieure à la valeur initiale de l'actif, nous avons une option **"Up"**. Si l'actif sous-jacent atteint la barrière alors le contrat devient sans valeur. Si la barrière est atteinte, on dit que l'option est "knocked **Out"**.



$Pay\_off\_Asset = 0$

Le prix de l'option à l'échéance T si la barrière n'est pas atteinte :

$$V(T, S(T)) = \begin{cases} S, & S < K \\ 0, & S \geq K \end{cases}$$

1. Calculer le prix de l'Option Barrier Up and Out ASSET or NOTHING à $t = 0$, $S_0 = 6$

2. Tracer le graphe du prix de l'option à $t = 0$

$$S_0 - > V(t = 0, S_0)$$

3. Tracer la surface des prix $(t, S) \to V(t, S)$ en 3 dimensions
Utiliser les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} N_{mc} = 1000 \\ L = 30 \\ T = 0.5 \\ r = 0.4 \\ \sigma = 0.5 \\ K = 10 \\ B = 12 \\ N = 100 \quad (discretisation\, de\ l'intervale,\ [0, T]) \end{cases}$$

$\star$ Copier les graphes et les codes sur votre fichier pdf.