CYTECH (E.I.S.T.I.)

DEPARTEMENT MATHEMATIQUES. PARCOURS MATH-FINANCE.

Méthodes numériques avancées appliquées à la finance

TP 2: Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes par les méthodes de Monte-Carlo. Reduction de la variance.

Le but de ce TP 2 est la simulation numérique du prix de l'option Vanilla par la méthode de Monte-Carlo.

Partie I. Théorie

L'évolution de l'actif sous-jacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t=0) = S_0 \tag{1}$$

On note σ la volatilité de l'actif, r le taux d'intérêt.

La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

Le prix d'une option européenne au moment de temps $t = 0$ est donné par

$$V(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\max(S(T) - K, 0)/S(t=0) = S_0] \tag{2}$$

On utilise l'expression pour $S(T)$ et on obtient

$$V(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\max(S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W(T)) - K, 0)/S(t=0) = S_0] \tag{3}$$

$W(T)$ est la valeur du mouvement Brownien à l'instant $t = T$. C'est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathbb{N}(0, \sqrt{T})$. On peut donc modéliser la valeur finale du mouvement Brownien par la variable aléatoire:

$$W(T) = \mathbb{N}(0,1)\sqrt{T}$$

En conclusion le prix de l'option européenne au moment $t = 0$ au point $S = S_0$ est donné par la moyenne arithmt́ique

$$V(S_0, 0)_{estime} = e^{-rT} \sum_{n=1}^{N_{mc}} max(S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}^{(n)}(0,1)) - K, 0)/N_{mc}$$

Partie II. Implémentation.

- **Fonction pay-off du Call de l'option Européenne**

$$\begin{cases} \textbf{function[f]= Payoff-Europ-Call(S)} \\ f = max(S - K, 0) \\ endfunction \end{cases}$$

- **Fonction du prix du Call l'option Européenne pour S_0 fixe**

$$\begin{cases} \text{function[prix]= Prix-Europ-S0-fixe}(S0) \\ sum = 0 \\ Pour \quad n = 1...N_{mc} \\ S = S0\exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}rand(1, 1,' n')) \\ sum = sum + \text{Payoff-Europ-Call}(S) \\ Fin \quad Pour \\ prix = e^{-rT}sum/N_{mc} \\ endfunction \end{cases}$$

- Calculer le prix du Call pour $S_0 = 10$ et comparer avec celui obtenu par Différences Finies.
- **Fonction du prix du Call de l'option Européenne pour S_0 quelconque**

On crée la fonction qui calcule le prix de l'option Européene pour chaque valeur de $S_0 = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, ...20$.

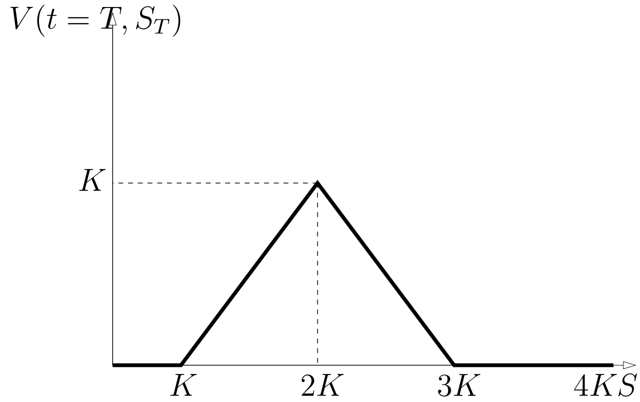
$$\begin{cases} \text{function [prix-option]=}\textbf{Graphe-Call-Europ}(\ ) \\ for \quad k = 1 : 41 \\ S0(k) = (k-1)\cdot 0.5 \\ \text{prix-option(k)= } \textbf{Prix-Europ-S0-fixe}\text{(S0(k))} \\ end \\ plot\text{(S0,prix-option)} \\ endfunction \end{cases}$$

- Tracer le graphe du prix du Call de l'option Europénne: $S_0 \to V(t = 0, S_0)$ pour $N_{mc} = 100$ et $N_{mc} = 1000$.

Utiliser **plot (S0,prix-option)**.

• Tracer sur le même système de coordonnées les graphes de l'option Europénne obtenue par la méthode aux Différences Finies et par Monte-Carlo.

• Calculer le prix de l'option de Butterfly par Monte-Carlo à $t = 0$. sachant la fonction pay-off predenté sur la figure:



Partie III. Le prix de l'option Europééne pour une valeur S_t et un temps t quelconques.

• On programme la fonction qui calcule le prix de l'option Européenne pour S_t fixe et t fixe. A cette date **on connaît le prix de l'actif** S_t. On simule donc un grand nombre N_{mc} de chemins d'évolution de l'actif sur l'intervalle du temps $[t, T]$, en partant toujours de S_t. Pour chaque chemin on cherche la valeur finale S_T. Comment? Le prix de l'option européenne à un moment t est donné par l'espérance conditionnelle

$$V(t, St) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[\max(St \cdot \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma W(T-t)) - K, 0)/S(t) = St] \tag{4}$$

soit

$$V(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \sum_{k=1}^{N_{mc}} \max(S_T - K, 0)/N_{mc}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{function[prix]= Prix-Europ-St-fixe-t-fixe}(t, St) \\ ... \\ ... \\ endfunction \end{array} \right.$$

Tracer en 2 dimension le graphe $\quad St \to V(t = T/2, St)$.

• On programme la fonction qui calcule le prix de l'option pour chaque S_t et chaque t indépendants.

On discrétise St: $St = \Delta S \cdot (k-1)$, $\quad \Delta S = L/40$.

On discrétise t: $t = \Delta t \cdot (j-1)$, $\quad \Delta t = T/10$.

• Voici le programme:

$$\left\{\begin{array}{c} \text{function [price]=}\textbf{SURFACE-CALL-EUROP}(\ ) \\ for \quad k = 1:41 \\ for \quad j = 1:11 \\ St(k) = (k-1)\cdot 0.5 \\ t(j) = (j-1)\cdot 0.05 \\ \text{price}(j,k) = \textbf{Prix-Europ-St-fixe-t-fixe}(t(j), St(k)) \\ end \\ end \\ \text{surf}(St, t, \text{price}) \\ endfunction \end{array}\right.$$

• Tracer la surface de prix de l'option surf(St, t,price) et comparer avec celle obtenue par Différences Finies.

Utilisez les valeurs suivantes:

$$\left\{\begin{array}{c} N_{mc} = 1000 \\ L = 20 \\ K = 10 \\ T = 0.5 \\ r = 0.1 \\ \sigma = 0.5 \\ N = 99 \end{array}\right.$$

Partie IV. Variance. Intérvalle de confiance

Introduisons une fonction $\Phi(W_T)$ qui représente un des prix actualisé du Call à la maturité.

$$\Phi(W_T) = e^{-rT} max(S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W(T)) - K, 0).$$

Le prix de l'option est donnée par la formule:

$$V(S_0, 0) = \mathbb{E}[\Phi(W_T)]$$

• **Premier estimateur de l'option:**

$$V(S_0, 0)_{estime1} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} (\Phi(W_T^{(n)}))$$

- Calculons la variance de Φ:

$$Var[\Phi] = \mathbb{E}[\Phi^2] - (\mathbb{E}[\Phi])^2$$

$$Var[\Phi]_{estime} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} (\Phi(W_T^{(n)}))^2 - (\frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} \Phi(W_T^{(n)}))^2.$$

- Le vrai prix du Call se trouve dans l'intervalle de confiance

$$V(S_0, 0) \in [\sum_{n=1}^{N_{mc}} \Phi(W_T^{(n)})/N_{mc} - \frac{1.96 \cdot \sqrt{Var[\Phi]}}{\sqrt{N_{mc}}}, \quad \sum_{n=1}^{N_{mc}} \Phi(W_T^{(n)})/N_{mc} + \frac{1.96 \cdot \sqrt{Var[\Phi]}}{\sqrt{N_{mc}}}]$$

avec la probabilité 0.95. Ici

$$\sum_{n=1}^{N_{mc}} \Phi(W_T^{(n)})/N_{mc} = V(S_0, 0)_{estime}$$

est le prix du Call qu'on a estimé par la méthode de Monté-Carlo. On ne connait pas la vraie variance donc on la remplace par la variance estimée.

- Le vrai prix du Call se trouve dans l'intervalle de confiance

$$V(S_0, 0) \in [\sum_{n=1}^{N_{mc}} \Phi(W_T^{(n)})/N_{mc} - \frac{1.96 \cdot \sqrt{Var[\Phi]_{estime}}}{\sqrt{N_{mc}}}, \quad \sum_{n=1}^{N_{mc}} \Phi(W_T^{(n)})/N_{mc} + \frac{1.96 \cdot \sqrt{Var[\Phi]_{estime}}}{\sqrt{N_{mc}}}]$$

avec la probabilité 0.95.

Travail à faire

1. Calculez la variance de la fonction pay-off actualisée pour $S_0 = 10$
2. Calculer l'intervalle de confiance pour Call à $S_0 = 10$.

Pour diminuer l'intérvalle de confiance soit on augmente le nombre N_{mc} soit on diminue la variance $Var[\Phi]$.

Partie V. Réduction de la variance. Variables Antithétiques.

Idée des Variables Antithétiques.

L'idée du contrôle antithétique est très simple. Elle est basée sur la proprieté de symétrie du mouvement brouwnien W_t et $-W_t$. Donc pour une fonction F on a

$$\mathbb{E}[\frac{F(W_t) + F(-W_t)}{2}] = \mathbb{E}[F(W_t)].$$

On utilise l'identité

$$Var[\frac{F(W_t) + F(-W_t)}{2}] = \frac{1}{4}(Var[F(W_t)] + Var[F(-W_t)] + 2Cov(F(W_t), F(-W_t))$$

on obtient

$$Var[\frac{F(W_t) + F(-W_t)}{2}] = \frac{1}{2}(Var[F(W_t)] + Cov(F(W_t), F(-W_t)))$$

On peut montrer que si $F: \quad x \to F(x)$ et $G: \quad x \to G(x)$ sont monotones (toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes) alors

$$Cov(F(W_t), G(W_t)) > 0.$$

Réduction de la variance. Application à l'evaluation du prix d'une Option

Dans notre cas prenons:

$$F(W_t) = \Phi(W_T), \quad G(W_t) = -\Phi(-W_T)$$

Donc

$$Cov(\Phi(W_T), \Phi(-W_T)) < 0$$
$$Var[\frac{\Phi(W_T) + \Phi(-W_T)}{2}] <= \frac{1}{2}Var[\Phi(W_T)]$$

et on a réduit la variance de $\Phi(W_T)$.

- Nous avons montré que

$$V(S_0, 0) = \mathbb{E}[\Phi(W_T)] = \mathbb{E}[\Phi(-W_T)]$$

On peut donc presenter le prix de l'option par la formule:

$$V(S_0, 0) = \mathbb{E}[\frac{\Phi(W_T) + \Phi(-W_T)}{2}]$$

- **Deuxieme estimateur de l'option:** Le prix de l'option européenne avec la variance réduite est donné alors par la formule:

$$V(S_0, 0)_{estime2} = \frac{1}{2N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} (\Phi(W_T^{(n)}) + \Phi(-W_T^{(n)}))$$

Travail à faire utilisant Deuxieme estimateur

1) Calculez le prix pour $S_0 = 10$

2) Calculez la variance de

$$\frac{1}{2}(\Phi(W_T) + \Phi(-W_T))$$

Dans quel intérvalle de confiance se trouve le prix exacte du Call maintenant?

3) Tracer le graphe

$$S_0 -> V(S_0, 0)_{estime1}$$

pour N_{mc}=10 et 100.

4) Tracer le graphe

$$S_0 -> V(S_0, 0)_{estime2}$$

du Call avec la variance réduite pour N_{mc}=10 et 100. Comparer ces graphes sur le même système de coordonnées.

Indication: **Donner 500 valeurs à S_0.** Par exemple:
for $j = 1 : 500$
$S_0(j) = 0.04(j-1)$
...
end

Votre observation?

Partie VI (Optionnelle). Réduction de la variance. Variables de Control.

Idée des Variables de Control.

Au lieu de calculer l'ésperance de la variable aléatoire X on va calculer l'ésperance de la variable aléatoire

$$Z = X - b(Y - \mathbb{E}[Y])$$

Ici b est un nombre, Y est une variable aléatoire dont l'ésperance est connue. On va montrer que $Var[Z] < Var[X]$.

Il est évidente que

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Z]$$

Calculons la variance de Z

$$Var[Z] = \mathbb{E}[(Z - \mathbb{E}[Z])^2] = \mathbb{E}[(X - b(Y - \mathbb{E}[Y]) - \mathbb{E}[X])^2] =$$

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] - 2b\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] + b^2\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2] =$$

$$Var[X] - 2bCov[XY] + b^2Var[Y]$$

La variance de Z est minimale si $\frac{\partial Z}{\partial b} = 0$. Donc

$$b = \frac{Cov[XY]}{Var[Y]}, \qquad Var[Z] = Var[X] - \frac{(Cov[XY])^2}{Var[Y]}$$

Variables de Control. Application à l'evaluation du prix d'une Option.

On applique maintenant cette idée au calcul du prix de l'option Européenne. Choisissons pour X et Y les variables aléatoirs suivantes:

$$X = e^{-rT} max(S_T - K, 0), \qquad Y = S_T, \qquad \mathbb{E}[Y] = S_0 e^{rT}$$

Le prix de l'option est égale à

$$V(S_0, 0) = \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X - b(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

- **Troizièrme estimateur du prix d'une option.**

$$V(S_0, 0)_{estime3} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} [e^{-rT} max(S_T^{(n)} - K, 0) - b \cdot (S_T^{(n)} - S_0 e^{rT})]$$

Travail à faire utilisant Troizième estimateur

Pour calculer le prix de l'option on va procèder de la facon suivante:
1. On calcule b indépendamment de $V(S_0, 0)_{estime}$.
Pour cela:
- On simule N_{mc} nombres d'un ensemble $\mathfrak{M}$ qui suivent la loi normale.
- On estime $\mathbb{E}[X]$ avec l'ensemble $\mathfrak{M}$

$$\mathbb{E}[X]_{estime} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} [e^{-rT} max(S_T^{(n)} - K, 0)$$

- Puis on calcule

$$b = \frac{\sum_{n=1}^{N_{mc}} (e^{-rT} max(S_T^{(n)} - K, 0) - \mathbb{E}[X]_{estime})(S_T^{(n)} - S_0 e^{rT})}{\sum_{n=1}^{N_{mc}} (S_T^{(n)} - S_0 e^{rT})^2}$$

avec le même ensemble $\mathfrak{M}$.

Attention: le nombre b depend de S_0.

2. Finalement on calcule le prix du Call

$$V(S_0, 0)_{estime3} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} [e^{-rT} max(S_T^{(n)} - K, 0) - b \cdot (S_T^{(n)} - S_0 e^{rT})]$$

soit avec un autre ensemble des nombres qui suivent la loi normale soit avec le même ensemble $\mathfrak{M}$.

3. Tracer le graphe

$$S_0 -> \hat{V}(S_0, 0)_{estime3}$$

du Call avec la variance réduite pour N_{mc}=100 et 100. Quelle est votre observation?

Partie VII. Le lien entre les méthodes déterministes (Différences Finies) et stochastiques (Monte-Carlo)

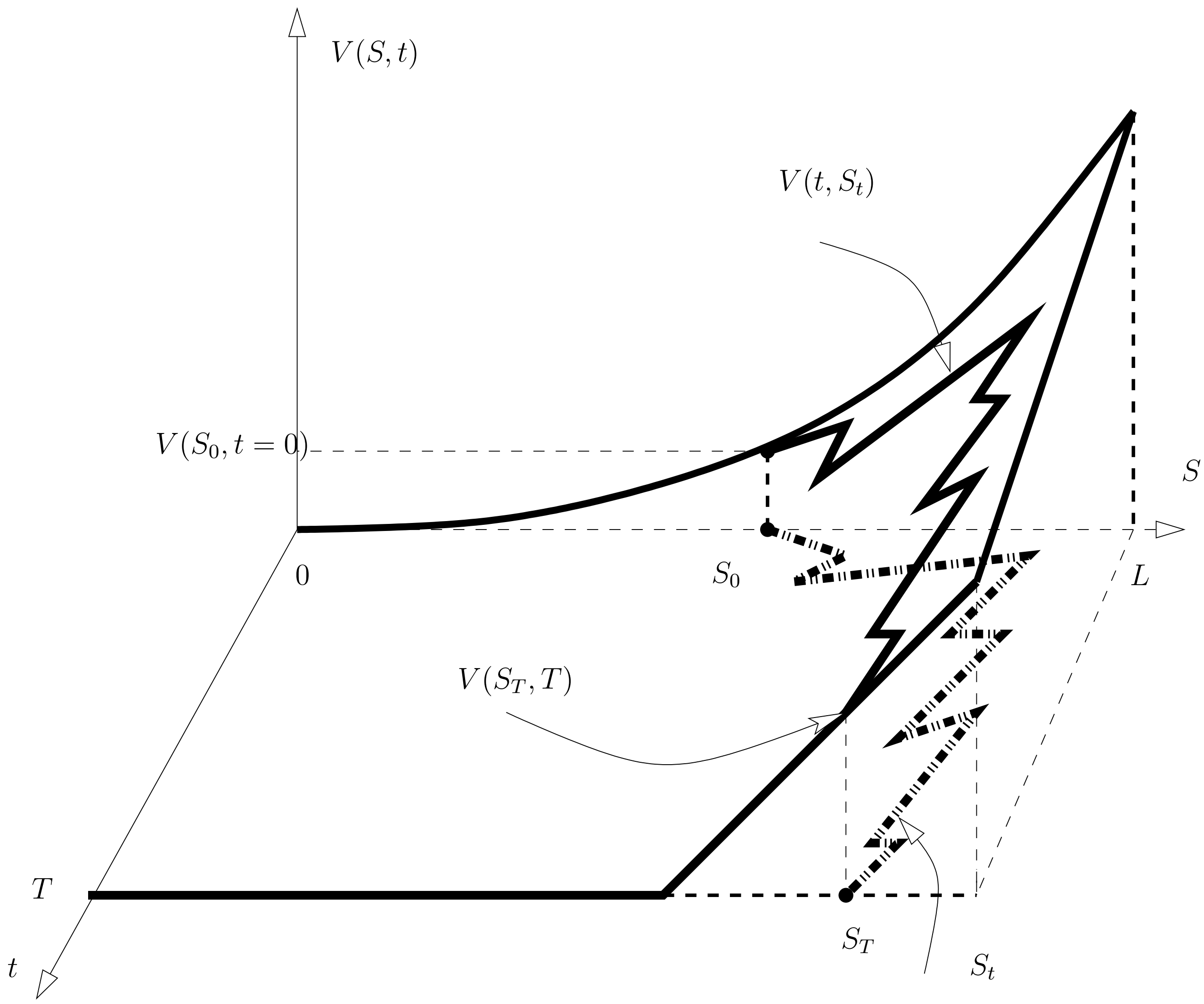


Figure 1: Evolutions de l'action et du prix de l'option