CYTECH (E.I.S.T.I.)

PARCOURS MATH FINANCE

Méthodes Numériques Avancées pour les EDP en Finance

TP4 : Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes pour une option asiatique. Strike fixe. Call. Put.

Le but de ce TP est la réduction le l'équation multidimensionnelle à une équation 2 dimensionnelle, la simulation numérique du prix de l'option asiatique par la méthode explicite d'Euler. La méthode est basée sur l'article :

F. Dubois, T. Lelièvre. Efficient pricing of Asian options by the PDF approach. Journal of Computational Finance, 8(2) :55-64, 2005.

Partie I. Equation réduite

Le prix d'une options asiatiques $V(t, S, A)$ porte sur un actif S et sur la valeur moyenne de l'actif

$$A(t) = \frac{1}{t}\int_0^t S_\tau d\tau$$

Prix de l'option à la date T d'écheance $\quad V(T, S(T), A(T)) = max(A(T) - K, 0)$

L'équation de Black et Scholes en termes des variables

$$(t, \quad x = \frac{K - tA/T}{S})$$

et d'une fonction f telle que

$$V(t, S, A) = Sf(t, x)$$

s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} - (\frac{1}{T} + rx)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

Maintenant on résout par les Différences finies l'équation sur $[X_{min}, X_{max}]$ avec les conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} - (\frac{1}{T} + rx)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\ f(t = T, x) = max(-x, 0) \\ f(X_{min}, t) = \frac{1}{rT}(1 - e^{-r(T-t)}) - X_{min}e^{-r(T-t)}, \qquad X_{min} \leq 0 \\ f(X_{max}, t) = 0, \qquad X_{max} > 0 \end{cases}$$

Implémentation numérique.

Discrétisons les variables : spatiale et temporelle :
$x : x_0 = X_{min} = 0, ...x_i, ...x_{N+1} = X_{max}$.
$t : t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.
Donc

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, ...N+1 \\ n = 0, 1, 2, ...M+1 \\ \Delta x = \frac{L}{N+1} \\ \Delta t = \frac{T}{M+1} \\ f(t_n, x_i) \equiv f_i^n \end{cases} \tag{1}$$

Conditions aux limites :

$$\begin{cases} f_0^n = \frac{1}{rT}(1 - e^{-r(T-n\Delta t)}) \\ f_{N+1}^n = 0 \\ n = M, ..., 1, 0. \end{cases} \tag{2}$$

Conditions finales :

$$\{ \ f_i^{M+1} = max(x(i), 0), i = 0, 1, 2..., N+1 \tag{3}$$

Pour discrétiser l'équation (1) on utilise :
pour $\frac{\partial f}{\partial t}$ la dérivée retrograde,
pour $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ la seconde dérivée, centrée,
pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ la dérivée centrée.

Méthode d'Euler Explicite

Discrétisons l'équation par la méthode d'Euler explicite :

$$\frac{f_i^n - f_i^{n-1}}{\Delta t} - (\frac{1}{T} + rx(i))\frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{\sigma^2(x(i))^2}{2(\Delta x)^2}(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n) = 0$$

Dans le programme principale utiliser (Matlab)

for n = M+2 : -1 : 1
for i = 1 : N+1

$$f_i^{n-1} = f_i^n - \Delta t(\frac{1}{T} + rx(i))\frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{\sigma^2(x(i))^2\Delta t}{2(\Delta x)^2}(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n)$$

end
end
Pour cette méthode prendre M=999 (si non l'équation diverge).

Travail à faire

Pour la suite utiliser les valeurs suivantes

$$\begin{cases} S_0 = 10 \\ r = 0.4 \\ \sigma = 0.3 \\ T = 1 \\ K = 10 \\ \Delta t = T/(M+1) \\ \Delta x = L/(N+1) \\ N = 100 \\ M = 999 \end{cases} \tag{4}$$

1) Résolvez numériquement l'équation réduite par la méthode d'Euler explicite.

2) Visualisez la fonction $f(x,t)$ aux instants $t = 0$ et$t = T/2$.

3) Visualisez la surface de f.

Partie II. Prix de l'option originale à t=0

Pour déterminer le prix de l'option on revient aux variables originales : t, S, A.
Le prix en $t = 0$ est donné par

$$V(t=0,S,A) = S(0)\cdot f(t=0,x(0)) = S(0)\cdot f(t=0,\frac{K-tA/T}{S(0)}) = S(0)\cdot f(t=0,\frac{K}{S(0)})$$

4) Calculer le prix le l'option Asiatique à $t = 0, S(0) = 10$

5) Tracer pour $t = 0$ le graphe $S_0 \to V(t = 0, S_0)$

Pour cela on tient compte que l'équation est résolue par la méthode aux Différences Finies.
On connait la matrice f_i^n pour chaque indice n et chaque indice i.

- Pour $t = 0$ le prix ne dépend pas de $A = S_0$.
- Pour chaque $S_0 = 1 : 20$ on calcule la valeur $\frac{K}{S_0}$.
- La valeur $x = \frac{K}{S_0}$ correspond à l'indice i suivant :

$$i = [\frac{x}{\Delta x}] + 1 = [\frac{K}{S_0}\frac{1}{\Delta x}] + 1$$

Ici on a utilisé la partie entière : $[\cdot]$ et la définition des points discrets :

$$x(i) = (i-1)\Delta x \quad \Leftrightarrow \quad i = \frac{x(i)}{\Delta x} + 1$$

- On trace le graphe

$$S_0 \to V(0,S_0) = S_0 \cdot f_i^1 \quad où \quad i = [\frac{K}{S_0}\frac{1}{\Delta x}] + 1$$

- Si on ne connaît pas la valeur de f_i^1 pour un indice i

soit on recalcule f_i^n par DF en utilisant la discrétisation plus fine, soit on donne au prix la valeur zero :

- Si $[\frac{K}{S_0}\frac{1}{\Delta x}] > N+1$ alors $V_i^n = 0$

Partie III. Prix de l'option originale $V(t, S, A)$ à $t = T/2$

Le prix en t quelconque est donné par

$$V(t, S, A) = S \cdot f(t, x) = S \cdot f(t, \frac{K - tA/T}{S})$$

1. Tracer la surface du prix $V(t = T/2, S, A)$ en 3 dim.
Indications :

- Discrétiser indépendamment S et A.
- Pour chaque couple discrete (S_k, A_j) calculer l'indice i et l'indice n de la matrice f_i^n.

$$i = \frac{K - tA_j/T}{S_k} \cdot \frac{1}{\Delta x} + 1 = \frac{K - A_j/2}{S_k} \cdot \frac{1}{\Delta x} + 1$$

$$n = [\frac{t}{\Delta t}] + 1 = [\frac{T}{2\Delta t}] + 1$$

- On trace la surface

$$(S_k, A_j) \to V(T/2, S_k, A_j) = S_k \cdot f_i^n \quad où \quad i = [\frac{K - A_j/2}{S_k} \cdot \frac{1}{\Delta x}] + 1$$

2) On vous propose d'augmenter le domaine du maillage et prendre $X_{min} = -2$. Poue cela il faut résoudre de nouveau l'EDP pour la fonction réduite f. On calcule x_i de la facon suivante :

$$x_i = X_{min} + \Delta x\,(i-1).$$

Rétrouver la valeur

$$V(t = 0, S_0 = 10, A) = S(0) \cdot f(0, 1)$$

Partie IV. Put.

Programmer l'option asiatique. Strike fixe. Put.
1) Montrer théoriquement les conditions aux limites et la condition finale :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} - (\frac{1}{T} + rx)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\ f(t = T, x) = max(x, 0) \\ f(0, t) = 0, \\ f(X_{max}, t) = \frac{1}{rT}(e^{-r(T-t)} - 1) + X_{max}e^{-r(T-t)}, \qquad X_{max} > 0 \end{cases}$$

2) Choisir $X_{min} = 0, X_{max} = 2$ et résoudre numériquement le problème.

3) Visualisez la fonction $f(x,t)$ aux instants t différents.
4) Pour déterminer le prix de l'option on revient aux variables t, S, A.
Le prix en $t = 0$ est donné par

$$V(t=0,S,A) = S(0)(t=0, \frac{K}{S(0)}).$$

a) Calculer cette valeur pour $S(0) = 10$.
b) Tracer en 2 dim le prix $V(0,S)$.

$$S(0) \to V(t=0,S(0)) = S(0) \cdot f(t=0, \frac{K}{S(0)})$$

d) Le prix en t quelconque est donné par

$$V(t,S,A) = Sf(t,x) = Sf(t, \frac{K - tA/T}{S})$$

Tracer le graphe du prix $V(T/2,S,A)$ en 3 dim.

Reference.

F. Dubois, T. Lelièvre. Efficient pricing of Asian options by the PDF approach. Journal of Computational Finance, 8(2) :55-64, 2005.