



## UNIVERSITÉ PARIS - CERGY

CY Tech.      Département Mathématiques

Option INGÉNIERIE FINANCIÈRE. Option ACTUARIAT.

### MODEL CALIBRATION AND SIMULATION

#### TP1      Calibration de volatilité implicite dans le modèle de Black et Scholes. Smile de volatilité

##### Partie I

$\sigma^{implicite}(K, T)$  est une volatilité qui introduite dans la formule de BS donne comme prix celui du Call observé sur le marché.

Calibrer signifie de trouver  $\sigma^{implicite}$  telle que

$$V^{BS}(S_0, t_0; K_i, T_i, r, \sigma^{implicite}) = V_i^{marche}(T_i, K_i)$$

A chaque couple  $(T_i, K_i)$  correspond une volatilité implicite  $\sigma_i^{implicite}$

Pour calculer  $\sigma_i^{implicite}$  on applique l'algorithme de Newton: on cherche le zero d'une fonction

$$F = V^{BS}(T_i, K_i, \sigma_i^{implicite}) - V_i^{marche}(T_i, K_i)$$

On simplifie les notations:

$$F(\sigma) = V^{BS}(\sigma) - V^{marche}$$

$V^{BS}(\sigma)$  est le prix le l'option Call en  $t = 0$ .

$$V^{BS}(S_0, 0) = S_0 N(d_1(S_0, 0)) - K e^{-rT} N(d_2(S_0, 0))$$

$$d_1(S_0, 0) = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad d_2(S_0, 0) = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

L'algorithme de Newton est itératif:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{F(\sigma_n)}{F'(\sigma_n)}$$

$$F'(\sigma) = \frac{\partial V^{BS}}{\partial \sigma} = S_0 \sqrt{\frac{T}{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

Avant de commencer le calcul, vérifiez que le prix tombe bien dans l'intervalle défini par les contraintes d'arbitrage:

$$\max(S_0 - Ke^{-rT}, 0) < V^{marche} < S_0.$$

Pour le point du départ utiliser

$$\sigma_0 = \sqrt{2 \left| \frac{\ln(S_0/K) + rT}{T} \right|}$$

Pour chaque strike  $K_i$  calculer la volatilité implicite  $\sigma_i^{implicite}$ .

Utiliser les données pour les options cotées en London International Financial Futures and Option Exchange (LIFFE) le 22 Aout 2001.

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
Strike $K_i$	5125	5225	5325	5425	5525	5625	5725	5825
Prix d'option	475	405	340	280.5	226	179.5	139	105

Utiliser aussi

$$S_0 = 5430.3, \quad T = 4/12, \quad r = 0.05$$