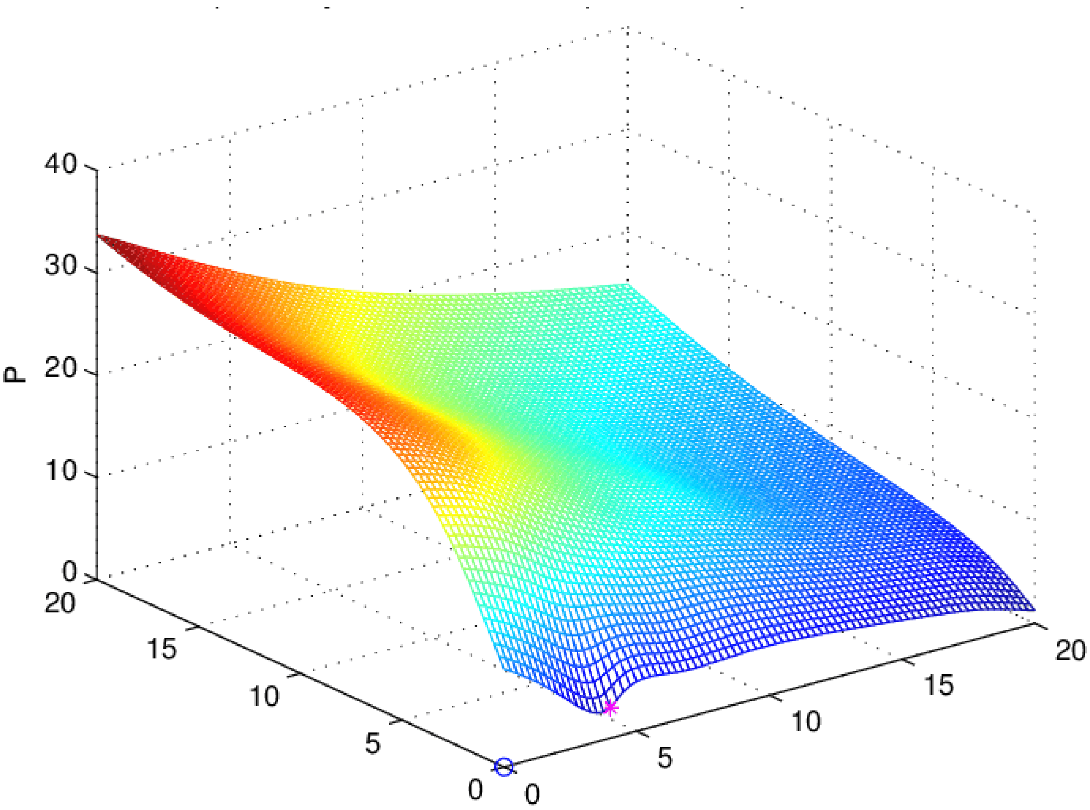
# TP5 : Calibration du modèle de Heston





Adnane EL KASMI (ING3)
à l'attention de : Irina Kortchemski

# Table des matières

# I Partie 1 : Simulation du modèle de Heston

Dans cette partie ainsi que les autres, nous utiliserons la discrètisation d'Euler de l'actif $S$ et de la volatilité $v$ qui sont des processus stochastiques :

$$S_{i+1} = S_i e^{\left(r-\frac{v_i}{2}\right)dt+\sqrt{v_i}\left(\rho\sqrt{\Delta t}N_1+\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{\Delta t}N_2\right)}$$
$$v_{i+1} = v_i + k\left(\theta - v_i\right)\Delta t + \eta\sqrt{v_i}\sqrt{\Delta t}N_1 + \frac{\eta^2}{4}\Delta t\left(\left(N_1\right)^2 - 1\right)$$

Ici les nombres $N_1$ et $N_2$ sont indépendants et suivent la loi normale centrée réduite.

## 1 Log return

Nous allons pour cette partie, visualiser :

— 4 courbes d'évolution/chemins de volatilité v dans le modèle de Heston.
— 4 courbes d'évolution/chemins de l'actif $S$ dans le modèle de Heston.
— La fonction de densité de la variable aléatoire R tel que :

$$R = \ln\left(\frac{S(T)}{S_0}\right)$$

appelé le Log return, et ce selon 3 valeurs de $\rho$ : $\rho = 0, \rho = 0.9, \rho = -0.9$

## 2 Valeurs utilisées

Les valeurs utilisées dans cette partie sont les suivantes :

$$\begin{cases} N_{mc} = 10000 \\ T = 0.5 \\ K = 1 \\ S(0) = 1 \\ r = 0.01 \\ k = 2 \\ \rho = 0, 0.9, -0.9 \\ \theta = 0.04 \\ \eta = 0.3 \\ v_0 = 1 \\ \Delta\text{t} \;= T/100 \end{cases}$$

## 3 Visualisation des graphiques

### Courbes d'évolution de la volatilité $v$

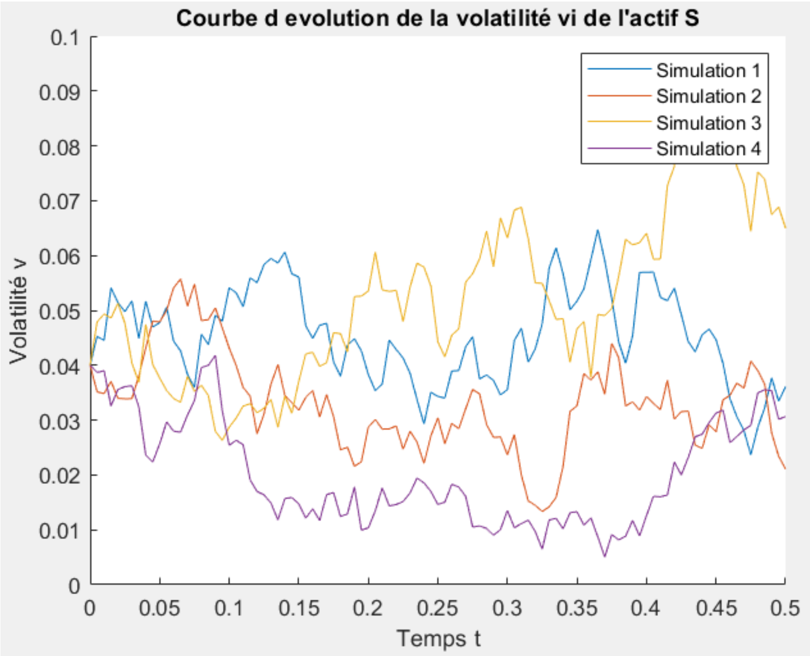



FIGURE 1 – Évolution de la volatilité $v$ en fonction du temps $t$.

### Courbes d'évolution de l'actif S

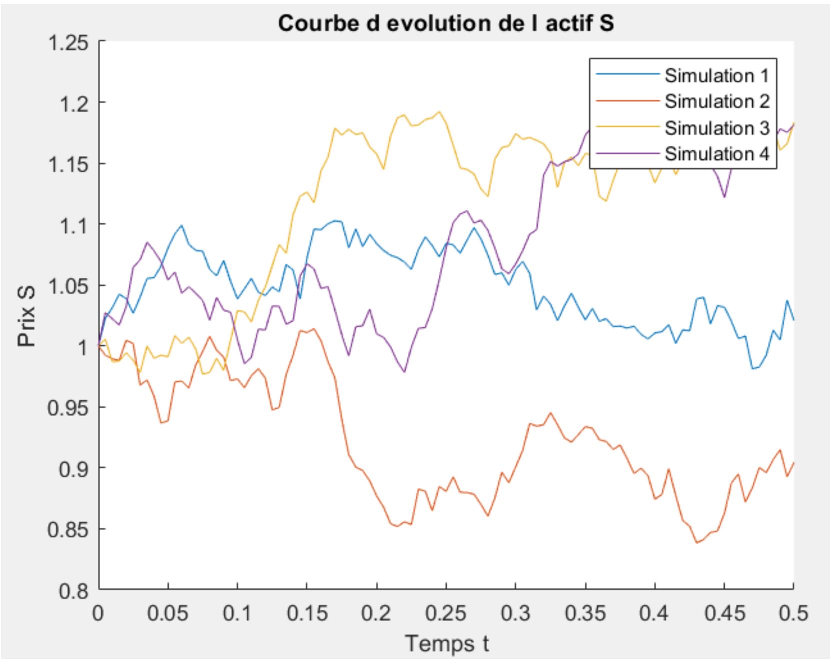



FIGURE 2 – Évolution de l'actif $S$ en fonction du temps $t$.

**Fonction de densité du Log return**

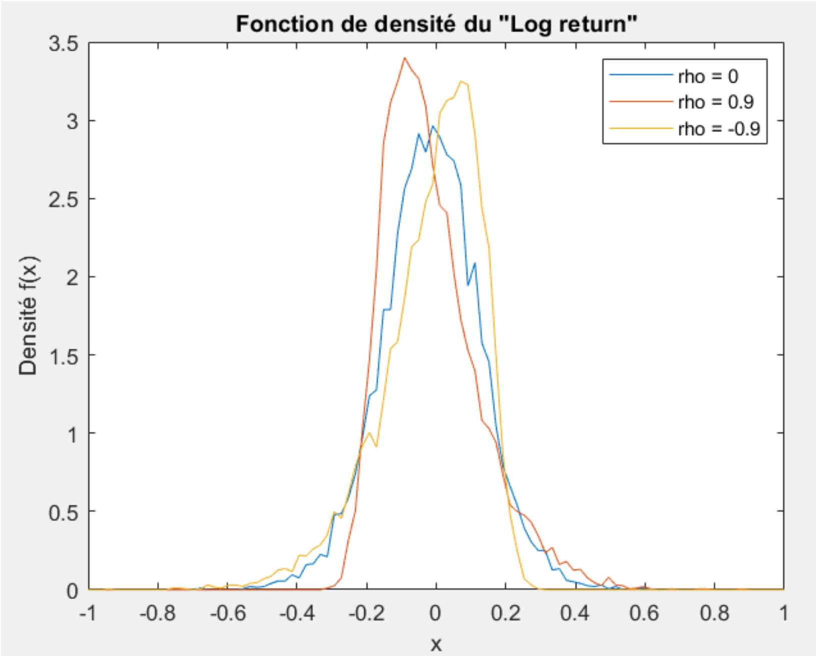



FIGURE 3 – Fonction de densité du log return selon les valeurs de $\rho$

On remarque que selon la valeur de $\rho$, la distribution du log Return est diffèrente pour le modèle de Heston. Intuitivement, nous pouvons dire que, si $\rho > 0 >$, alors la volatilité augmente à mesure que le prix ou le rendement des actifs augmente. La queue de distribution à droite est plus large alors que la queue gauche de la distribution est plus serrée, créant donc une grosse distribution à droite.Inversement, si $\rho < 0$, la volatilité augmente lorsque le prix ou le rendement de l'actif diminue. La queue de distribution à gauche est plus large alors que la queue droite de la distribution est plus serrée, créant donc une grosse distribution à gauche. Nous pouvons donc dire que le coefficient $\rho$ affecte l'asymétrie de la distribution (asymétrie décrite par le coefficient de Skewness).

## 4 Calcul du prix du Call par Monte Carlo

Nous allons pour cette partie, visualiser :
- La courbe du Call Européeen dans le cadre du modèle de Heston.
- La valeur du prix du Call Européeen pour la valeur $K = 10$.

Et ce pour un certain nombre de simulations Monte-Carlo :
- $N_{mc} = 100$.
- $N_{mc} = 1000$.

De plus, nous calculons le prix du Call Européen par utilisation de différents estimateurs :

**Estimateur 1 :**

$$V\left(S_0, 0\right)_{\text{estime 1}}^{\text{heston}} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{me}} \max\left(S_T^{(n)} - K, 0\right)$$

**Estimateur 2 (Réduction de la variance) :**

$$V\left(S_0,0\right)^{\text{heston}}_{\text{estime 2}} = \frac{1}{2N_{me}}\sum_{n=1}^{N_{me}}\left(\max\left(S_T^{(n)}-K,0\right)+\left(\max\left(S^{(n)}_{T-S_{ymetrique}}-K,0\right)\right)\right)$$

## 5 Valeurs utilisées

Les valeurs utilisées dans cette partie sont les suivantes :

$$\begin{cases} N_{mc} \in \{100, 1000\} \\ T = 0.5 \\ K = 10 \\ r = 0.01 \\ k = 2 \\ \rho = 0 \\ \theta = 0.04 \\ \eta = 0.3 \\ v_0 = 1 \\ \Delta\text{t} = T/100 \end{cases}$$

## 6 Visualisation des graphiques

Nous obtenons le graphique ci-dessous :
**Pour $N_{mc} = 100$ :**

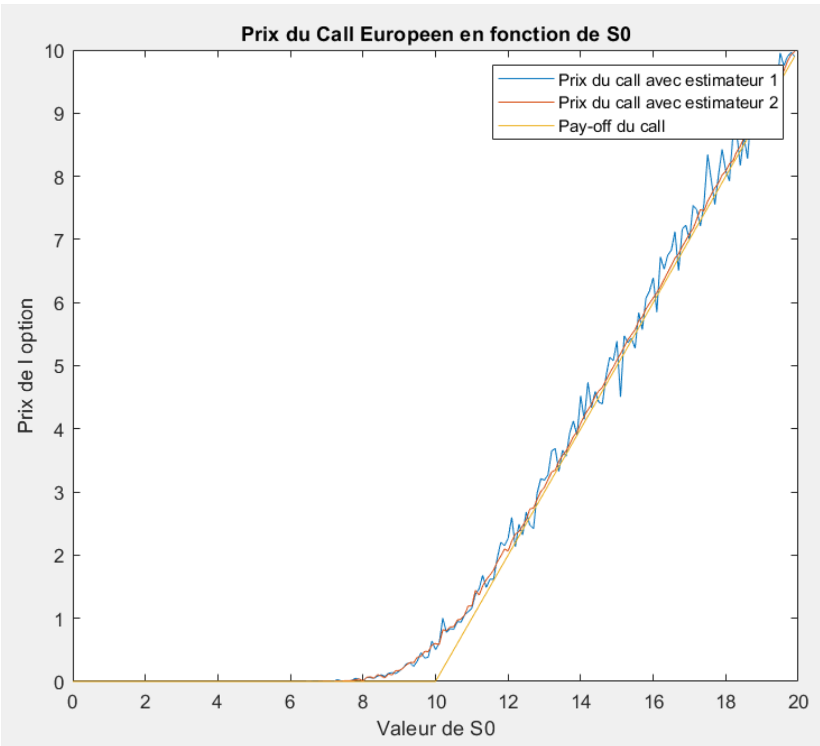



FIGURE 4 – Courbe du prix du Call Européen selon l'estimateur choisi dans le cadre du modèle de Heston $N_{mc} = 100$

```
Prix du Call Européen avec Monte-Carlo pour K = 10 :
    0.5835
```

FIGURE 5 – Prix du Call Européeen pour K = 10 dans le cadre du modèle de Heston $N_{mc} = 100$

Nous remarquons que la courbe rouge est plus lisse que la courbe bleu qui présente des variations. En effet, l'estimateur 2 correspond à la méthode de réduction de variance. Cette réduction s'observe donc bien sur le graphique ci-dessus :

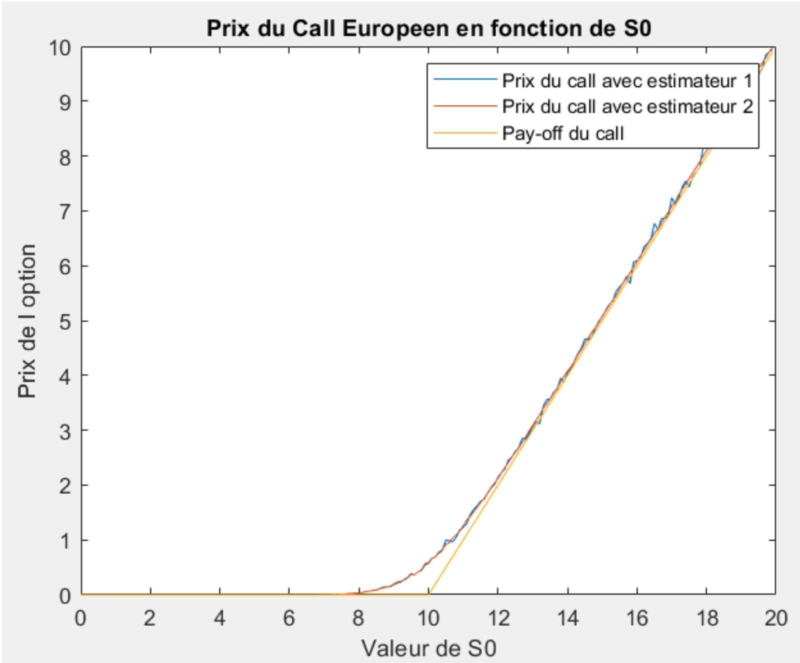



FIGURE 6 – Courbe du prix du Call Européen selon l'estimateur choisi dans le cadre du modèle de Heston $N_{mc} = 1000$

```
Prix du Call Européen avec Monte-Carlo pour K = 10 :
    0.5955
```

FIGURE 7 – Prix du Call Européeen pour K = 10 dans le cadre du modèle de Heston $N_{mc} = 1000$

## 7 Calcul des Grecques par Monte Carlo

Nous allons pour cette partie, visualiser :

— La courbe d'évolution de l'option Grecque "Theta" en fontion de K dans le cadre du modèle de Heston.

— La courbe d'évolution de l'option Grecque "Eta" en fontion de K dans le cadre du modèle de Heston.

Et ce pour un certain nombre de simulations Monte-Carlo :

— $N_{mc} = 100$.
— $N_{mc} = 1000$.
— $N_{mc} = 10000$.

Nous allons calculer le prix des Grecques par les formules suivantes :

**Grecque "Theta" :**

$$\frac{\partial V_p^{\text{hestom}}}{\partial 0} = \frac{V_{\text{estime 2}}^{\text{healon}}(t=0, S_0, K, N_1, N_2, \theta + h_1) - V_{\text{esetime 2}}^{\text{heoton}}(t=0, S_0, K, N_1, N_2, \theta - h_1)}{2h_1}$$

**Grecque "Eta" :**

$$\frac{\partial V_p^{\text{heston}}}{\partial \eta} = \frac{V(t=0, S_0, K, \eta + h_2)_{\text{estime 2}}^{\text{hcalon}} - V_{\text{estime 2}}^{\text{healon}}(t=0, S_0, K, \eta - h_2)}{2h_2}$$

## 8 Valeurs utilisées

Les valeurs utilisées dans cette partie sont les suivantes :

$$\begin{cases} N_{mc} \in \{100, 1000, 10000\} \\ T = 0.5 \\ h_1 = h_2 = 0.1 \\ S_0 = 10 \\ K \in [0, 20] \\ r = 0.1 \\ k = 3 \\ \rho = 0.5 \\ \theta = 0.2 \\ \eta = 0.5 \\ v_0 = 0.04 \\ \Delta\text{t} = T/100 \end{cases}$$

## 9 Visualisation des graphiques

Nous faisons varier $K \in [0, 20]$ et nous obtenons les graphiques ci-dessous :

**Pour $N_{mc} = 100$ :**

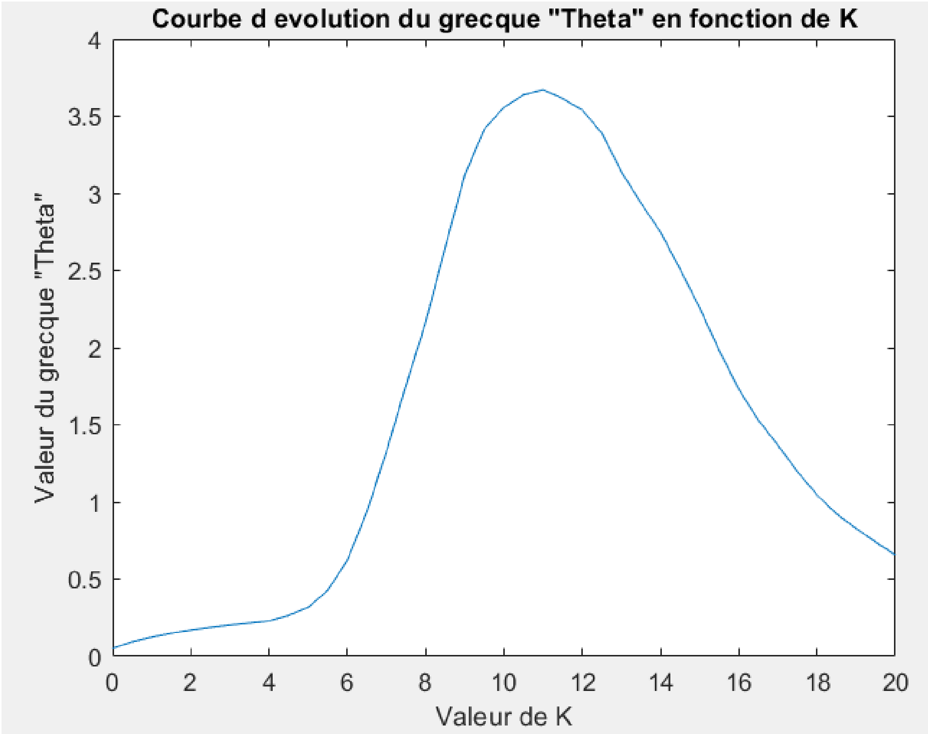



FIGURE 8 – Courbe d'évolution de l'option Grecque "Theta" en fontion de K dans le cadre du modèle de Heston $N_{mc} = 100$

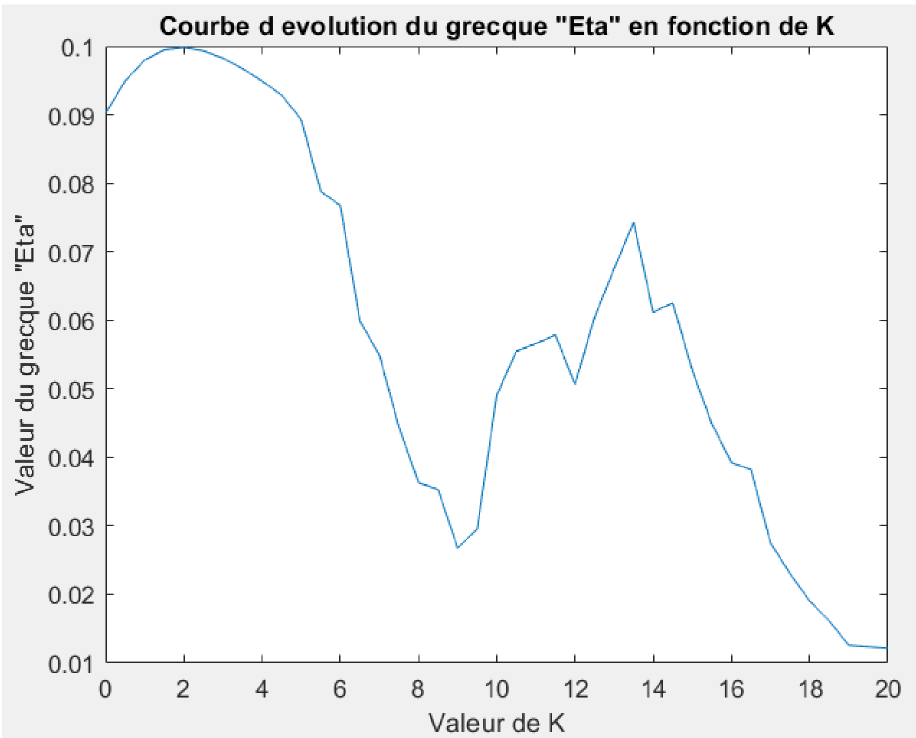



FIGURE 9 – Courbe d'évolution de l'option Grecque "Eta" en fontion de K dans le cadre du modèle de Heston $N_{mc} = 100$

**Pour** $N_{mc} = 1000$ **:**

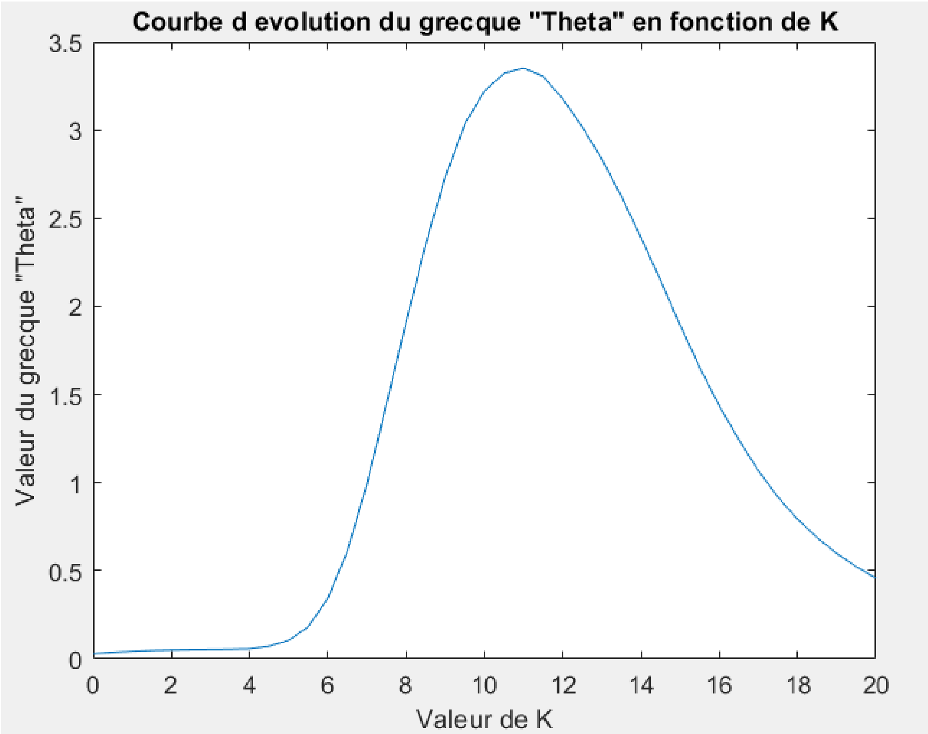



FIGURE 10 – Courbe d'évolution de l'option Grecque "Theta" en fontion de K dans le cadre du modèle de Heston $N_{mc} = 1000$

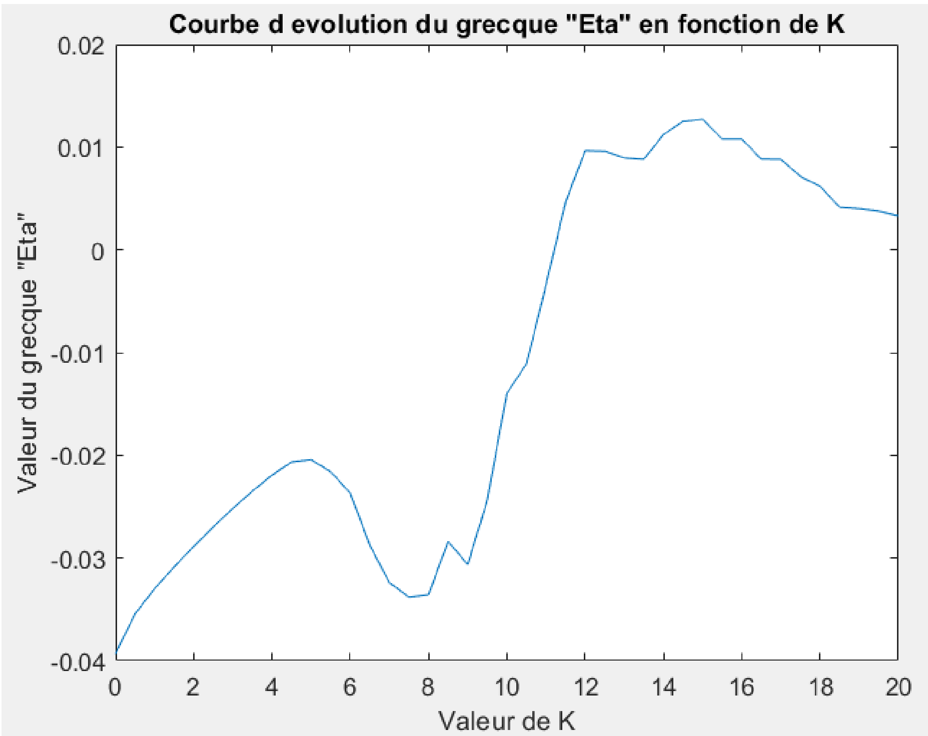



FIGURE 11 – Courbe d'évolution de l'option Grecque "Eta" en fontion de K dans le cadre du modèle de Heston $N_{mc} = 1000$

**Pour** $N_{mc} = 10000$ **:**

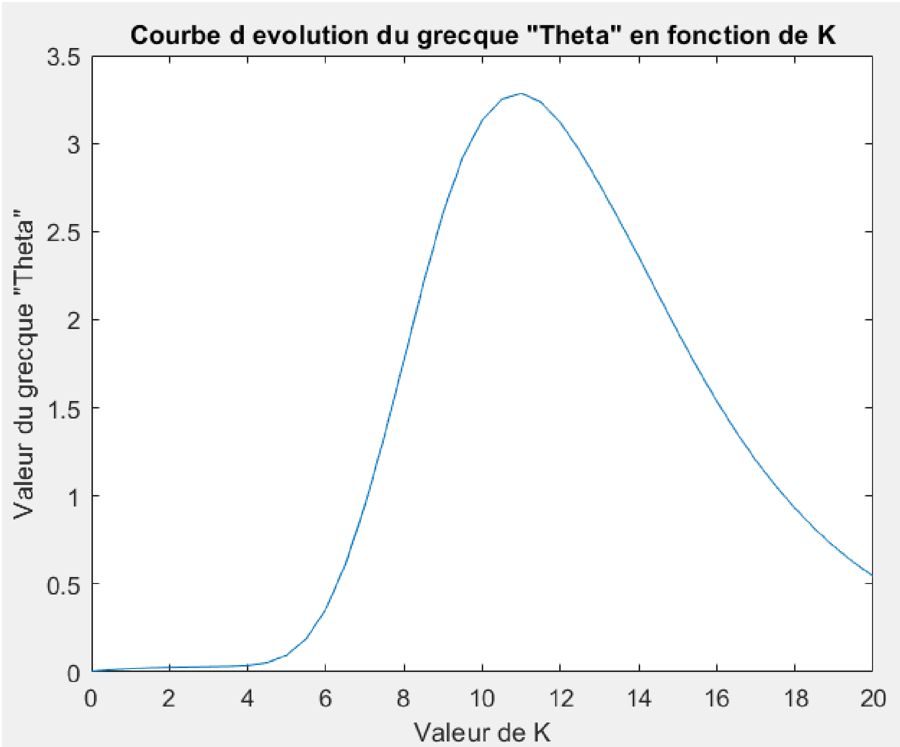



FIGURE 12 – Courbe d'évolution de l'option Grecque "Theta" en fontion de K dans le cadre du modèle de Heston $N_{mc} = 10000$

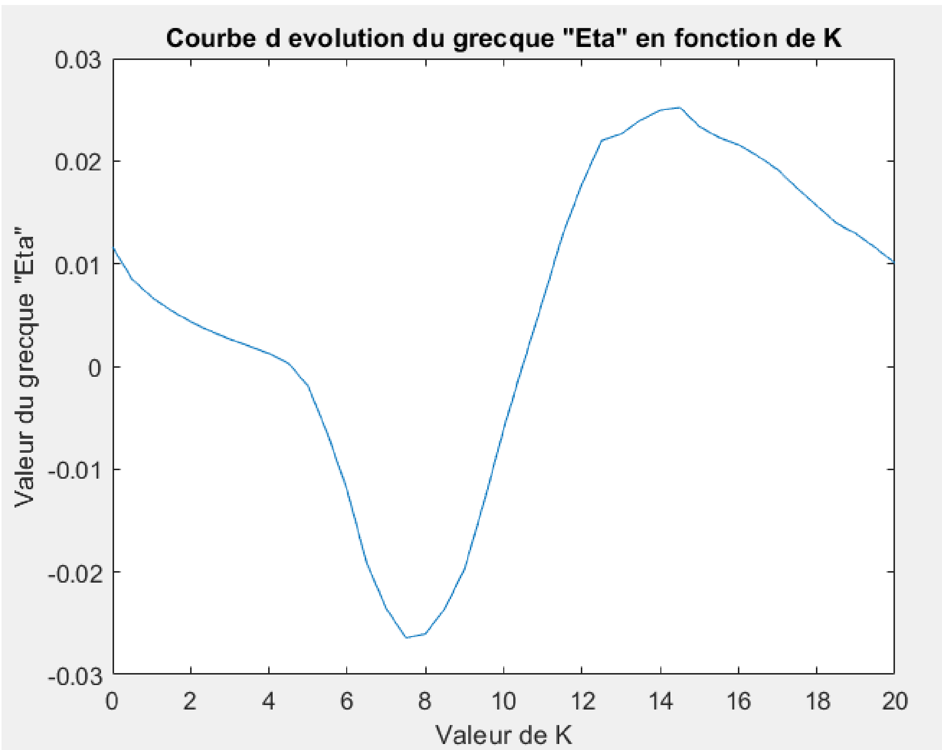



FIGURE 13 – Courbe d'évolution de l'option Grecque "Eta" en fontion de K dans le cadre du modèle de Heston $N_{mc} = 10000$

# II Calibration du modèle de Heston

Dans cette partie, nous allons effectuer calibrer du modèle de Heston par estimation des paramètres $\theta$ et $\eta$ via l'algorithme de Levenberg-Marquardt.

## 1 Eléments théoriques

Pour implémenter l'algortihme de Levenberg-Marquardt dans ce cadre, nous avons besoin de la Jacobienne $J_{pi}(\beta) = \frac{\partial r_p}{\partial \beta_1}$, et donc de l'expression des dérivées de $r_p$ où

$$r_p = V^{\text{marche}}\ (T_p, \mathcal{K}_p) - V^{\text{heston}}\ (T_p, \mathcal{K}_p, \beta_1, \beta_2)$$

par rapport à $\beta_1$ et $\beta_2$. Nous avons donc :

$$\frac{\partial r_p}{\partial \beta_i} = -\frac{\partial V_p^{heston}}{\partial \beta_i}$$

## 2 Valeurs utilisées

Pour réaliser cette calibration, nous utiliserons les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} N_{mc} = 1000 \\ S(0) = 10 \\ r = 0.01 \\ T = 0.5 \\ \beta_1(0) = \theta^{(0)} = 0.2 \\ \beta_2(0) = \eta^{(0)} = 0.5 \\ \epsilon = 10^{-4} \\ \lambda = 0.01 \\ \mathcal{K}_p = [8, 8.4, 8.8, 9.2, 9.6, 10, 10.4, 10.8, 11.2, 11.6, 12, 12.4, 12.8, 13.2, 13.6, 14, 14.4 \\ 14.8, 15.2, 15.6, 16] \\ V_p^{\text{marche}} = [2.0944, 1.7488, 1.4266, 1.1456, 0.8919, 0.7068, 0.5461, 0.4187, 0.3166, 0.2425 \\ 0.1860, 0.1370, 0.0967, 0.0715, 0.0547, 0.0381, 0.0306, 0.0239, 0.0163, 0.0139, 0.0086] \end{cases}$$

## 3 Calibration du modèle de Heston - Graphique

Pour $[\beta_1; \beta_2] = [0.2, 0.5]$, nous obtenons le graphique de $V_{heston}$ et $V_{marche}$ en fonction de $K_{marche}$ suivant :

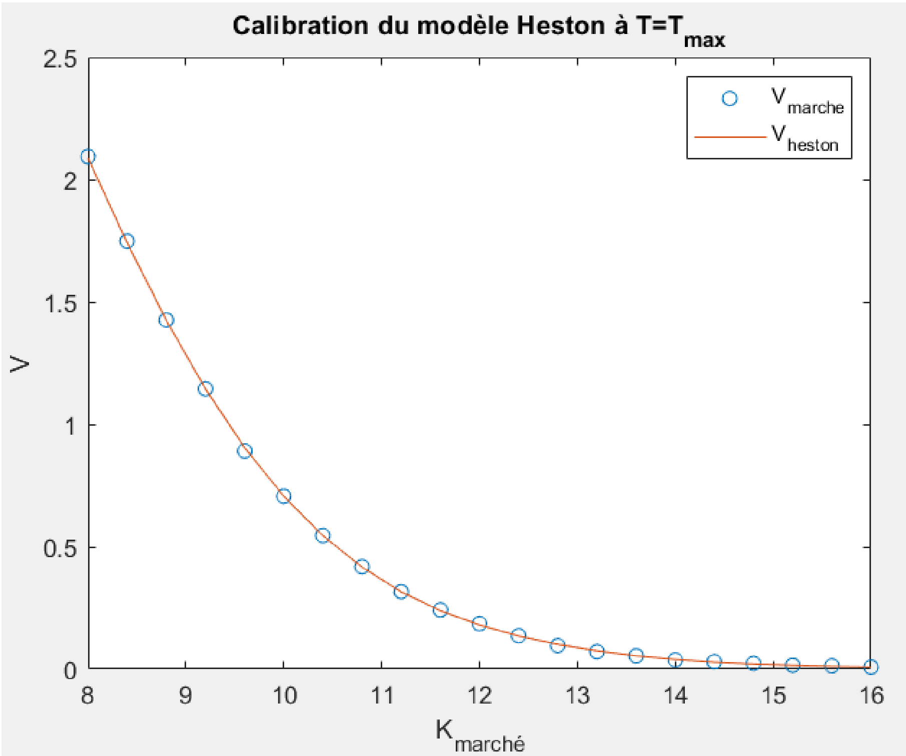



FIGURE 14 – Graphique représentant $V$ en fonction de $K$ - Aprés calibration

## 4 Valeurs des paramètres estimés

Une fois l'algorithme de calibration réalisé, nous obtenons les paramètres estimés suivants :

```
Valeur du paramètre estimé theta =
    0.0897

Valeur du paramètre estimé eta =
    0.2843
```

FIGURE 15 – Valeur des paramètres estimés $\beta_1$ et $\beta_2$ par calibration - Modèle Heston

# III Smile de volatilité

Dans cette partie, nous allons tracer :
- Le smile de volatilité implicite, en fonction de K.
- Le graphique représentant le prix de l'option dans le cadre du modèle Heston $V_{\text{heston},}$, t dans le cadre de la théorie de Black-Scholes $V_{BS}$ afin de comparer et de conclure sur la différence de ces deux théories.

## 1 Valeurs utilisées

Pour réaliser cette calibration, nous utiliserons les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} N_{mc} \in \{100, 1000, 10000\} \\ T = 0.5 \\ L = 20 \\ S_0 = 10 \\ K = 10 \\ r = 0.1 \\ k = 0.3 \\ \rho = 0.7 \\ \theta = 0.3 \\ \eta = 0.4 \\ v_0 = 0.03 \\ \Delta \text{t} \;\; = T/100 \end{cases}$$

## 2 Smile de volatilité

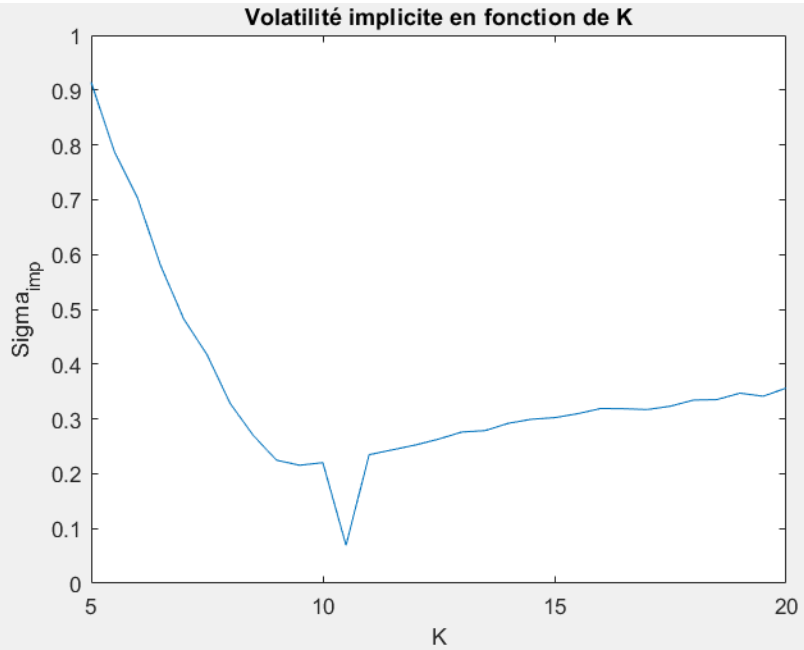



FIGURE 16 – Smile de volatilité - Volatilité implicite en fonction de K

Nous obtenons bien le Smile de volatilité.

## 3 Comparaison de la théorie BS et du modèle de Heston

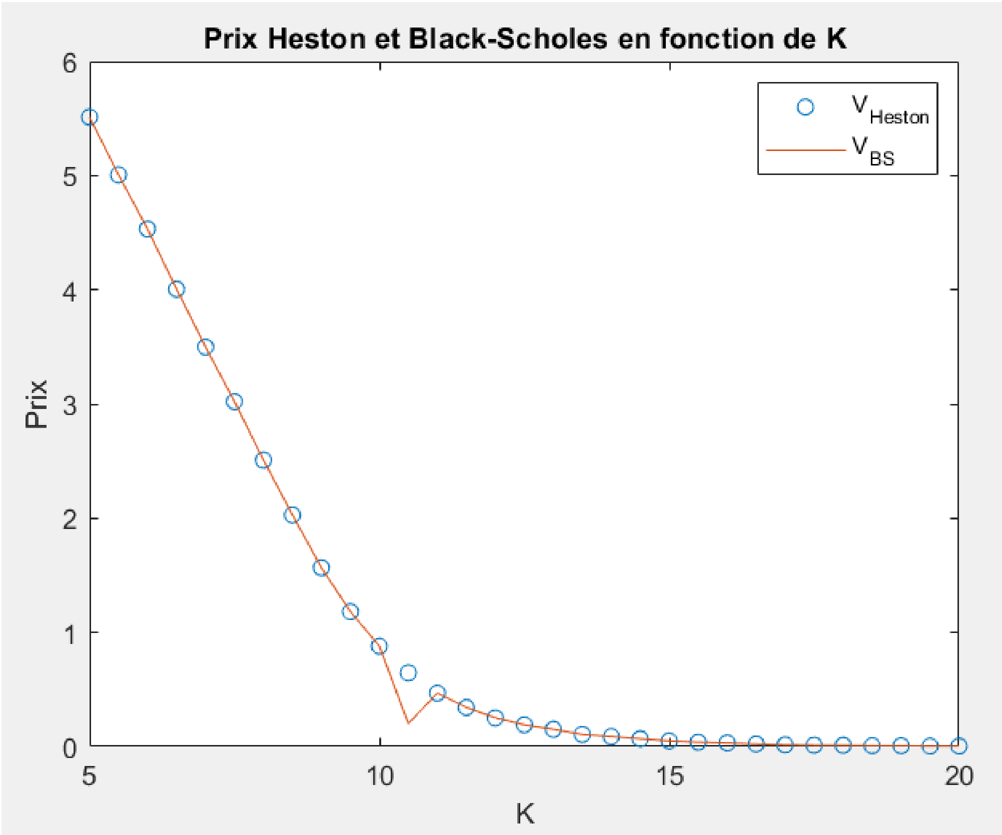



FIGURE 17 – $V_{Heston}$ et $V_{BS}$ en fonction de K - Comparaison des théories

**Remarque :** Le modèle de Heston prend en compte un phénomène anormal et donc la volatilité implicite est plus adaptée grâce à l'utilisation du modèle de Heston plutôt que son utilisation dans la théorie de Black-Scholes.