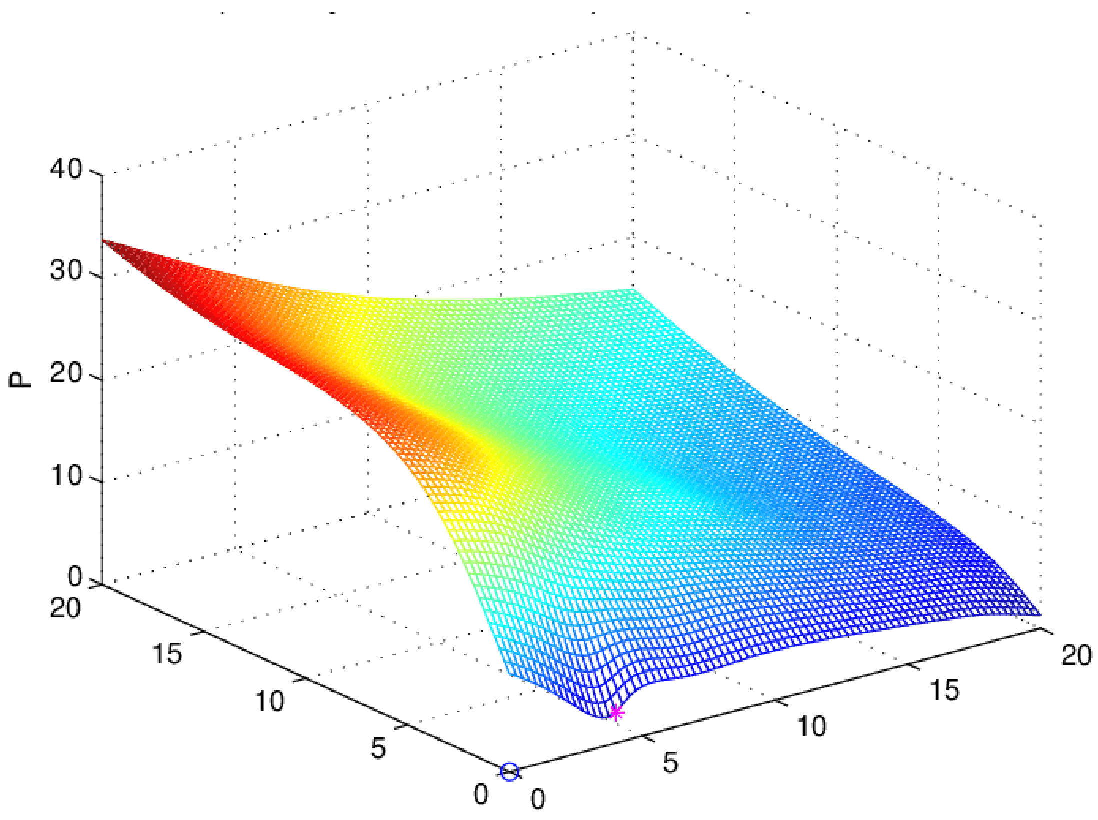
Calibration du modèle Vasicek : TP3



Adnane EL KASMI (ING3)
à l'attention de : Irina Kortchemski

Table des matières

I Partie I : Graphes Yield et limite en 0 et $+\infty$

Nous obtenons le graphique ci-dessous pour $r_0 = 0.01$, $r_0 = 0.027$ et $r_0 = 0.05$:

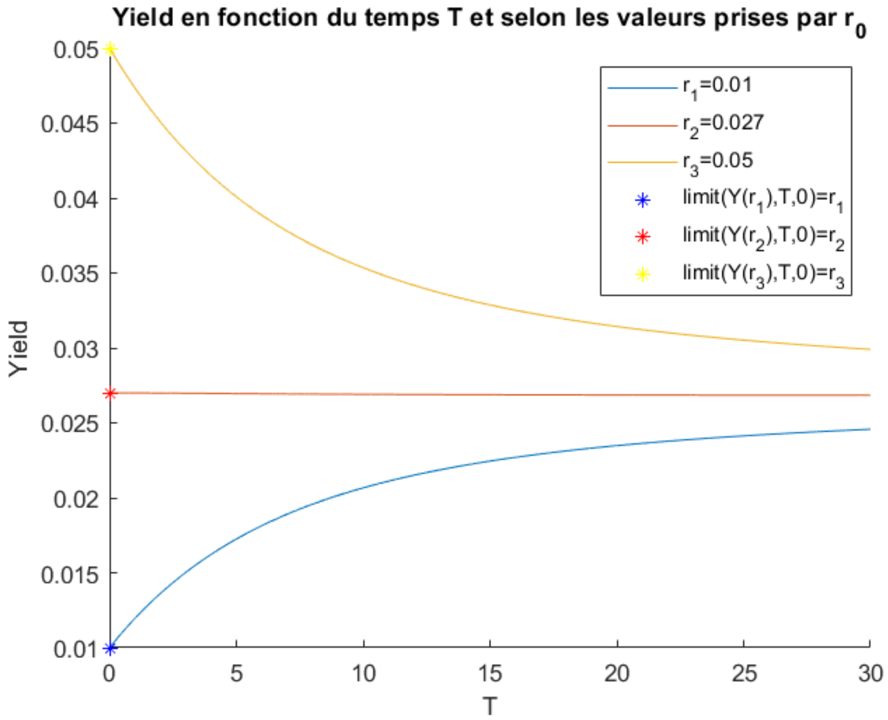


FIGURE 1 – Graphes Yield pour $r_0 = 0.01$, $r_0 = 0.027$ et $r_0 = 0.05$ (Zoom autour de 0).

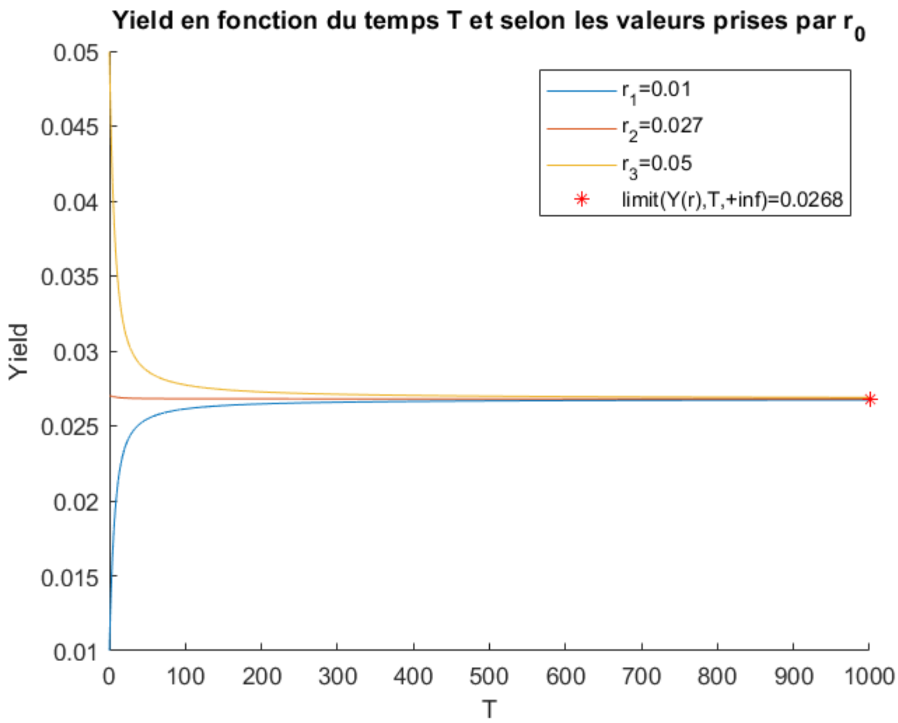


FIGURE 2 – Graphes Yield pour $r_0 = 0.01$, $r_0 = 0.027$ et $r_0 = 0.05$ (Zoom autour de $+\infty$).

On remarque que $\lim_{T\to 0} Y(0,T) = r_0, \lim_{T\to\infty} Y(0,T) = \frac{\eta}{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\gamma}\right)^2 = 0.0268.$

II Partie II : Simulation du modèle Vasicek

L'objectif de ce TP3 est d'une part, de simuler le modèle Vasicek par le tracé de divers graphiques en faisant varier les paramètres, et d'autre part, la calibration de ce modèle avec l'obtention des paramètres estimés. Commencons par la réalisation de la simulation du modèle, en étudiants différents cas.

1 Cas 1

Le premier cas d'étude consiste à représenter sur un graphique trois dimensions, le Yield en fonction du temps T et de r_0. Les valeurs utilisées sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} t = 0 \\ \sigma = 0.02 \\ \eta = 0.25 * 0.03 \\ \gamma = 0.25 \\ T \in [0, 30] \\ r_0 \in [0, 1] \end{cases}$$

Nous obtenons le graphique ci-dessous :

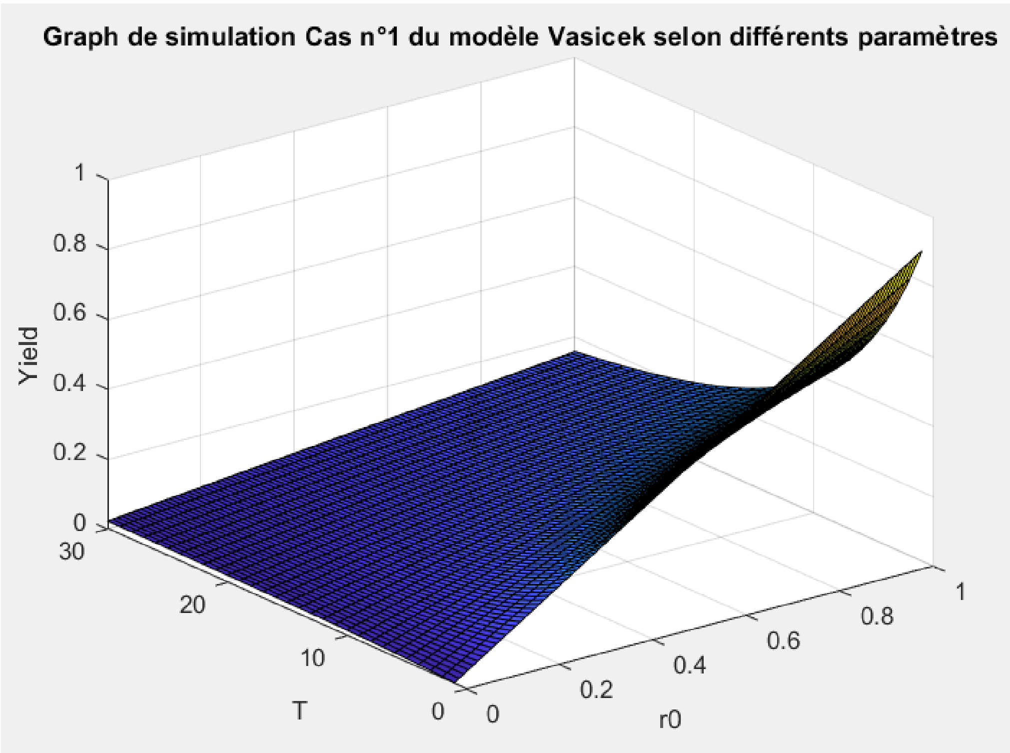


FIGURE 3 – Cas 1 Simulation du modèle Vasicek avec variation des valeurs de T et r_0.

2 Cas 2

Le second cas d'étude consiste à représenter sur un graphique trois dimensions, le Yield en fonction de et γ de η. Les valeurs utilisées sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} t = 0 \\ \sigma = 0.02 \\ r_0 = 0.1 \\ T = 10 \\ \gamma \in [0.01, 0.5] \\ \eta \in [0, 0.1] \end{cases}$$

Nous obtenons le graphique ci-dessous :

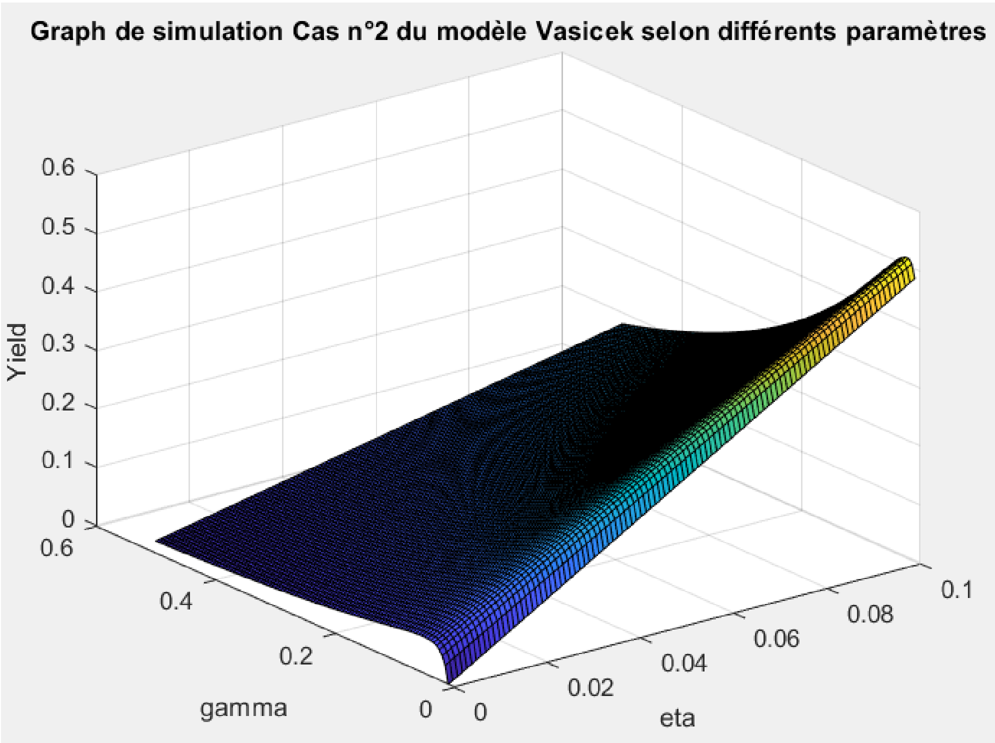


FIGURE 4 – Cas 2 Simulation du modèle Vasicek avec variation des valeurs de γ et η.

3 Cas 3

Le troisième cas d'étude consiste à représenter sur un graphique trois dimensions, le Yield en fonction de γ et de σ . Les valeurs utilisées sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} t = 0 \\ \eta = 0.02 \\ r_0 = 0.1 \\ T = 10 \\ \gamma \in [0.01, 0.5] \\ \sigma \in [0, 0.1] \end{cases}$$

Nous obtenons le graphique ci-dessous :

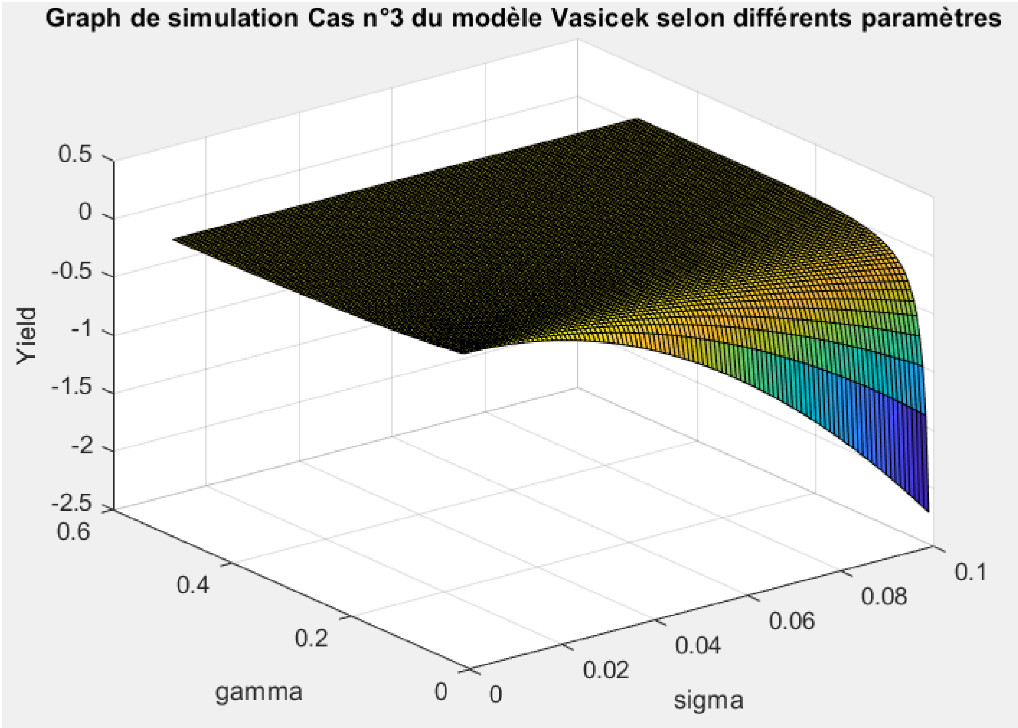


FIGURE 5 – Cas 3 Simulation du modèle Vasicek avec variation des valeurs de γ et σ.

4 Cas 4

Le dernier cas d'étude consiste à simuler l'évolution du Yield en fonction du temps. Nous allons observer les variations de ces évolutions en faisant varier le paramètre r_0.

Pour cela, nous utilisons les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} t = 0 \\ \gamma = 0.25 \\ \eta = 0.25 * 0.03 \\ \sigma = 0.02 \\ T \in [0, 30] \end{cases}$$

Nous obtenons le graphique ci-dessous :

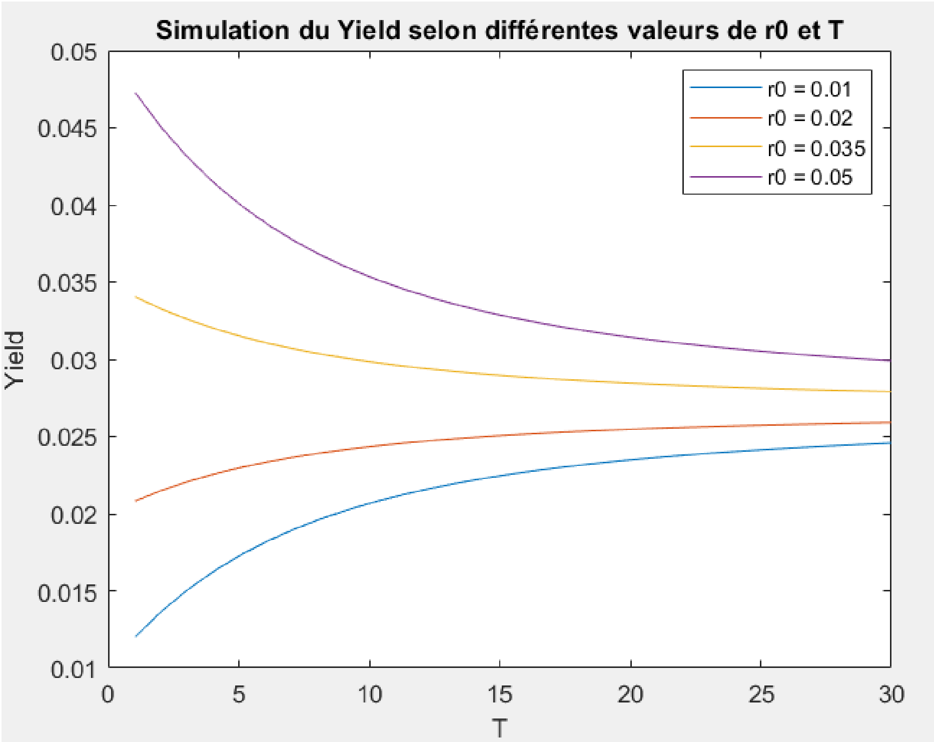


FIGURE 6 – Cas 4 Simulation du Yield en fonction du temps T et selon les valeurs prises par r_0.

III Partie III : Utilisation de l'algorithme Levenberg-Marquart

Dans cette partie, nous détaillerons les résultats obtenus de la calibration du Yield par l'utilisation de l'algorithme Levenberg-Marquart :

- Graphique résultant de la calibration avec les points du Yield du marché et la courbe de taux calibrée.
- Valeurs des paramètres estimés obtenus à l'issu de cette calibration.

Nous allons réaliser deux calibrations :

- à t=0.
- à t=1.

1 Calibration du Yield Curve pour $t = 0$ et $r = 0,04$

Valeurs utilisées Pour cela, les valeurs utilisées sont les suivantes :

$$\begin{cases} T = [3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30] \\ Yield_{\text{Market}} = [0.035, 0.041, 0.0439, 0.046, 0.0484, 0.0494, 0.0507, 0.0514, 0.052, 0.0523] \\ \lambda = 0.01 \\ \epsilon = 10^{-9} \\ r_0 = 0.04 \\ t = 0 \end{cases}$$

Tracé de la courbe de Yield calibrée Nous obtenons le graphique suivant :

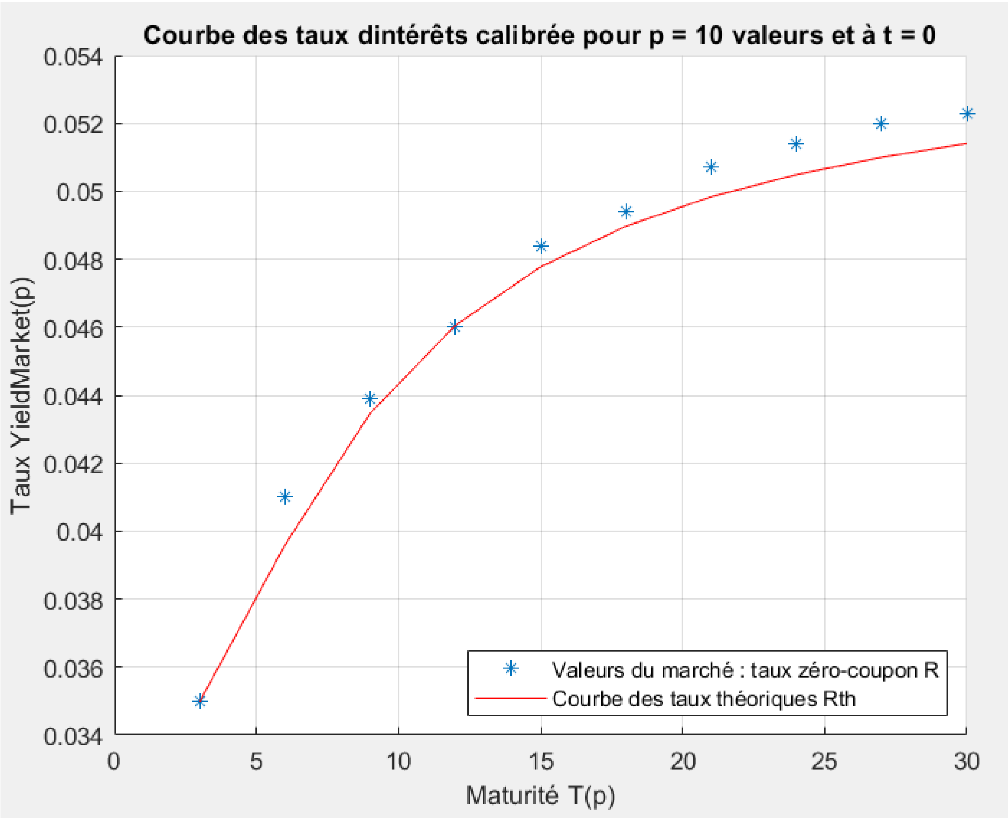


FIGURE 7 – Courbe de Yield calibrée pour 10 valeurs, avec $r_0 = 0,04$ et à $t = 0$.

Valeurs des paramètres estimés Les valeurs obtenues des paramètres aprés calibration sont :

```
Affichage des différentes valeurs du vecteur Beta pour t = 0
La valeur de eta (après calibration) est 5.1177e-59
La valeur de sigmacarre (après calibration) est -0.016544
La valeur de gamma (après calibration) est 0.38758
La valeur de k est 2726
```

FIGURE 8 – Valeurs des paramètres estimés aprés calibration pour $r_0 = 0,04$ et $t = 0$.

avec k qui représente le pas jusqu'à la meilleure calibration possible.

Si nous prenons $r = 0,025$, nous remarquons que la calibration est meilleure et plus précise :

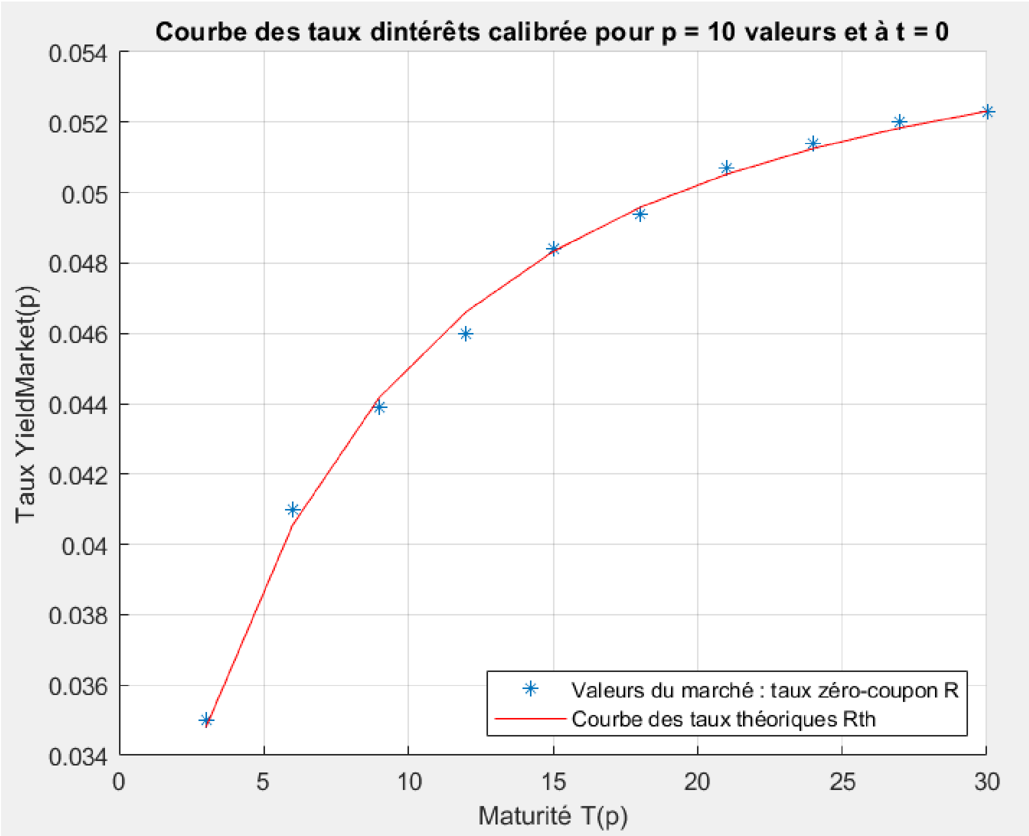


FIGURE 9 – Courbe de Yield calibrée pour 10 valeurs, avec $r_0 = 0,025$ et à $t = 0$.

Avec des paramètres estimés de valeurs :

```
Affichage des différentes valeurs du vecteur Beta pour t = 0
La valeur de eta (après calibration) est 0.013333
La valeur de sigmacarre (après calibration) est 0.00099764
La valeur de gamma (après calibration) est 0.18865
La valeur de k est 5883
```

FIGURE 10 – Valeurs des paramètres estimés aprés calibration pour $r_0 = 0,025$ et $t = 0$.

avec k qui représente le pas jusqu'à la meilleure calibration possible.

2 Calibration du Yield Curve pour $t = 1$ et $r = 0,04$

Valeurs utilisées Pour cela, les valeurs utilisées sont les suivantes :

$$\begin{cases} T = [3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30] \\ Yield_{\text{Market}} = [0.056, 0.064, 0.074, 0.081, 0.082, 0.09, 0.087, 0.092, 0.0895, 0.091] \\ \lambda = 0.01 \\ \epsilon = 10^{-9} \\ r_0 = 0.04 \\ t = 1 \end{cases}$$

Tracé de la courbe de Yield calibrée Nous obtenons le graphique suivant :

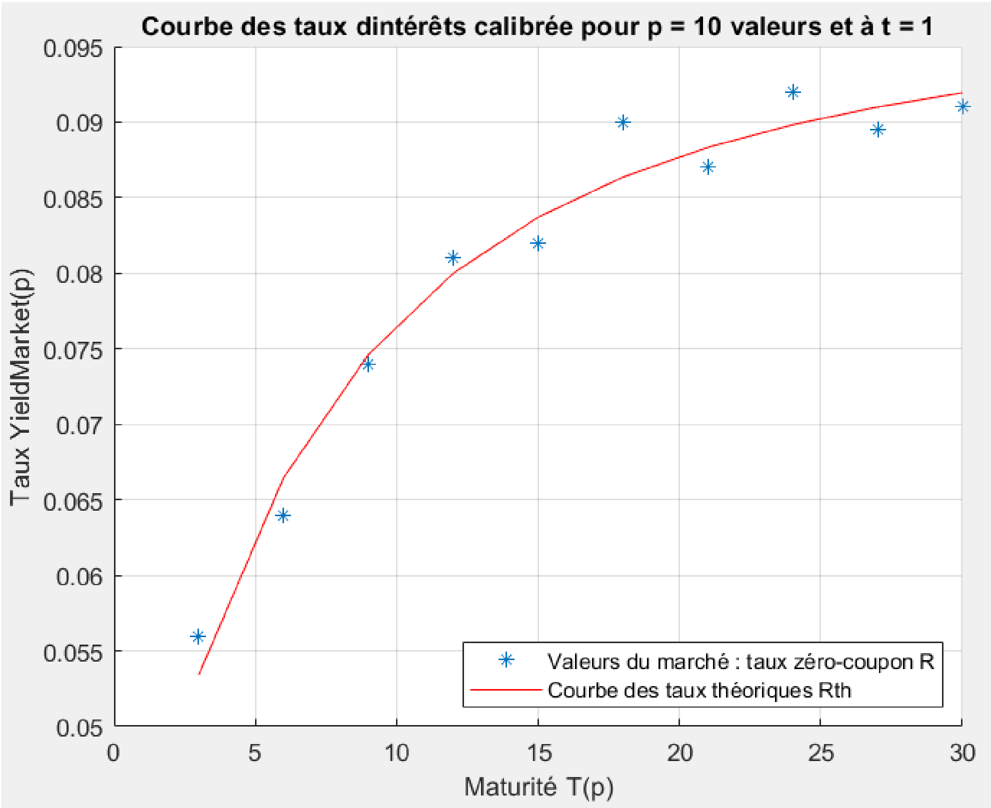


FIGURE 11 – Courbe de Yield calibrée pour 10 valeurs, avec $r_0 = 0,04$ et à $t = 1$.

Valeurs des paramètres estimés Les valeurs obtenues des paramètres aprés calibration sont :

```
Affichage des différentes valeurs du vecteur Beta pour t = 1
La valeur de eta (après calibration) est 0.02544
La valeur de sigmacarre (après calibration) est 0.00096628
La valeur de gamma (après calibration) est 0.23328
La valeur de k est 650
```

FIGURE 12 – Valeurs des paramètres estimés aprés calibration pour $r_0 = 0,04$ et $t = 1$.

avec k qui représente le pas jusqu'à la meilleure calibration possible.

IV Partie IV : Calibration to historical dates

Dans cette partie, nous réalisons une calibration selon la méthode "historical dates", différente de l'algorithme de Lebenberg-Marquart.

TP3: Calibration du modèle Vasicek

Les valeurs utilisées pour cette partie sont les suivantes :

$$\begin{cases} \eta = 0.6 \\ \sigma = 0.08 \\ \gamma = 4 \\ T = 5 \\ N = 1000 \end{cases}$$

1 Évolution de r en fonction du temps

Dans un premier temps, traçons le graphique représentant l'évolution de r en fonction du temps. Nous obtenons :

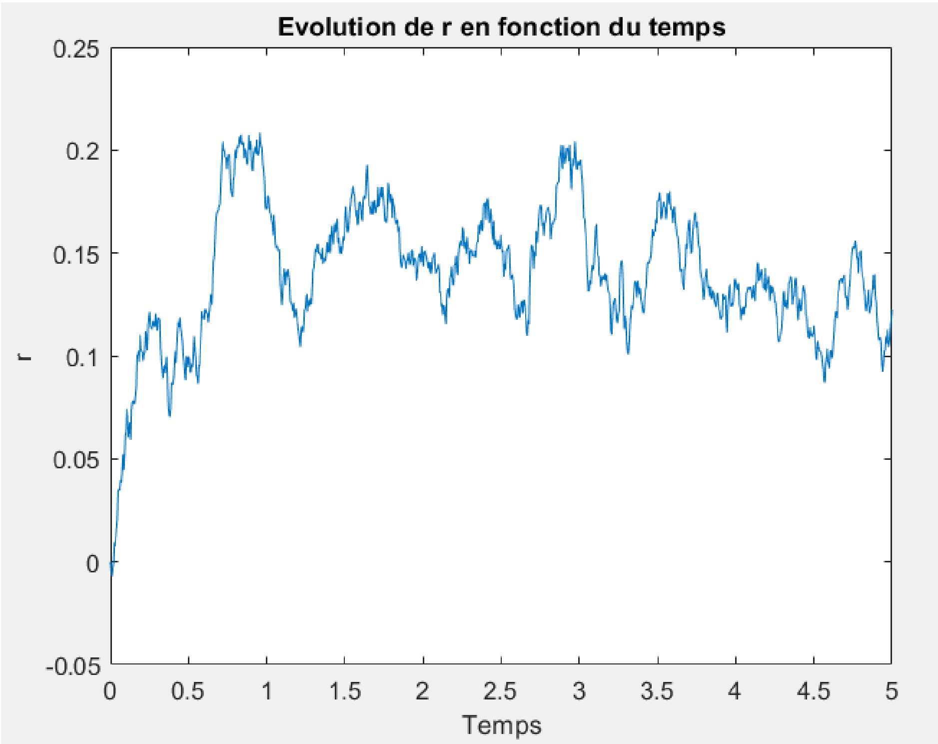


FIGURE 13 – Evolution de r en fonction du temps.

2 Graphique représentant les points $[r(i), r(i+1)]$

Dans un second temps, nous traçons le graphique représentant les points $x_i = r_i$ et $y_i = f(x_i) = r_{i+1}$.

Nous obtenons le graphique suivant :

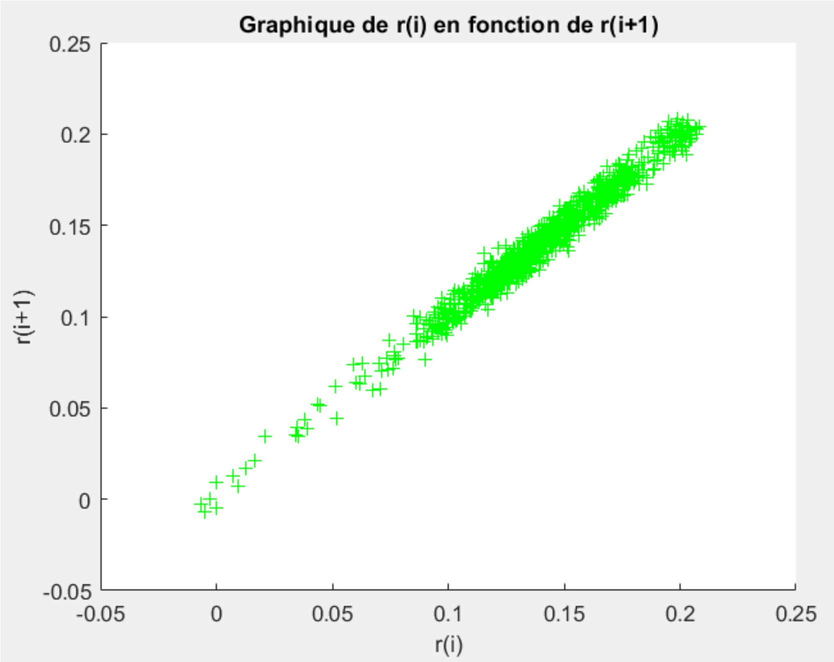


FIGURE 14 – Tracé des points $[r_i; r_{i+1}]$.

3 Régression linéaire

A partir de ce graphique, nous réalisons une régression linéaire afin de déterminer les coéfficients a et b de l'équation de droite $y = ax + b$. Nous obtenons la régression linéaire suivante :

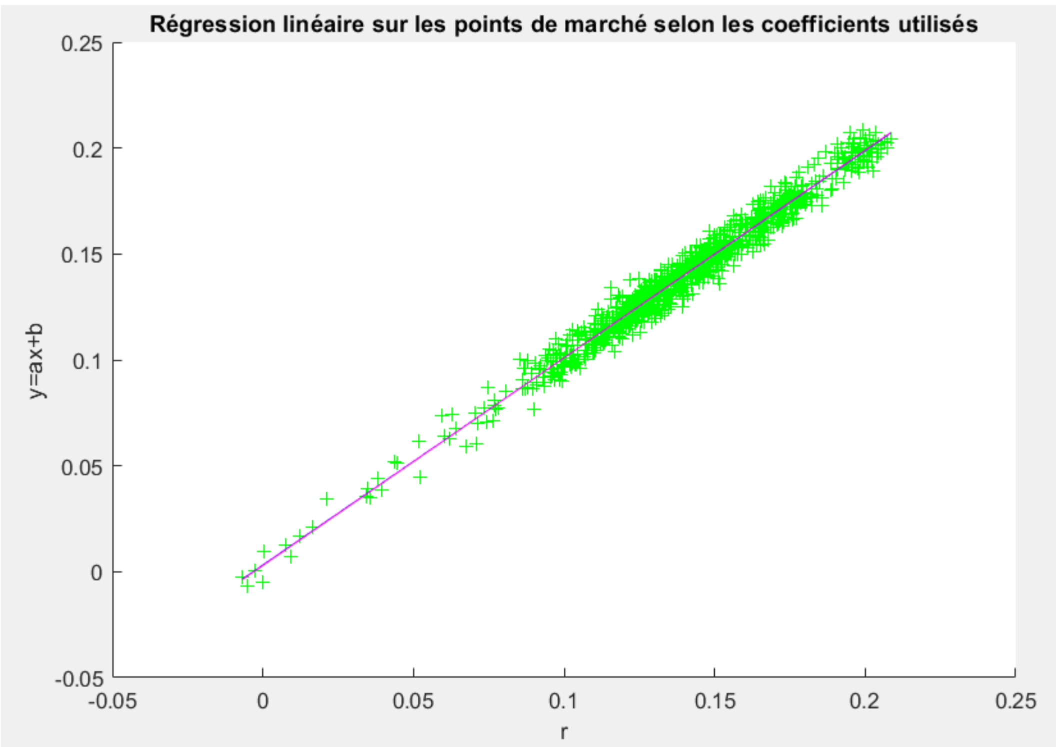


FIGURE 15 – Réalisation d'une régression linéaire.

La droite théorique, tracée en fonction des valeurs de a et b théoriques, est de couleur magenta. La droite estimée, tracée en fonction des valeurs de a et b estimé, est de couleur bleu. Cette distinction n'est pas visible car les deux droites se superposent.

Cela se remarque notamment avec la similitude entre les valeurs trouvées des paramètres estimées et les valeurs des paramètres théoriques.

4 Comparaison des valeurs des paramètres théoriques et estimés

Nous savons que les paramètres a, b et D sont définis par les formules suivantes :

$$a = \exp(-\gamma t)$$
$$b = \frac{\eta}{\gamma}(1 - \exp(-\gamma t))$$
$$D = \sigma\sqrt{\frac{(1-e^{-2\gamma t})}{2\gamma}}$$

En déduisant les valeurs de a et b de la régression linéaire avec les droites théorique et estimée, nous pouvons déterminer les valeurs de η, γ et σ en utilisant ces formules.

Nous pouvons donc comparer les valeurs des paramètres estimés et théoriques :

```
-----------------------------------------
La valeur de a théorique pour la régression linéaire y=ax+b = 0.98018
La valeur de a estimée de la régression linéaire y=ax+b = 0.97831
-----------------------------------------
La valeur de b théorique pour la régression linéaire y=ax+b = 0.0029731
La valeur de b estimée de la régression linéaire y=ax+b = 0.0031581
-----------------------------------------
La valeur de la variance D^2 est : 2.8114e-05
-----------------------------------------
Gamma théorique = 4
Gamma estimé = 4.3806
-----------------------------------------
Eta théorique = 0.6
Eta estimé = 0.63792
-----------------------------------------
Sigma théorique = 0.08
Sigma estimé = 0.075771
-----------------------------------------
```

FIGURE 16 – Comparaison des valeurs des paramètres estimés et théoriques.

Nous remarquons que les valeurs des paramètres estimés et théoriques sont proches.