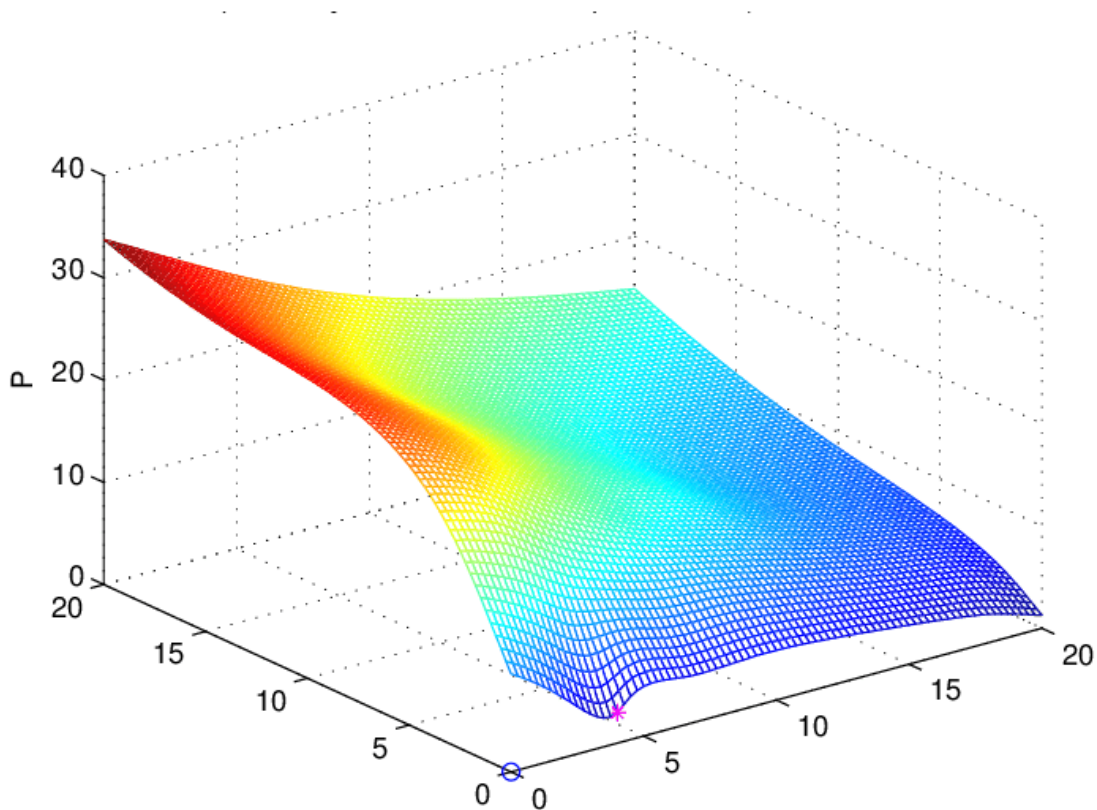


TP4 : Résolution numérique de l'équation de Dupire et calibration de la volatilité locale dans le modèle CEV et le modèle de Gatheral



Adnane EL KASMI (ING3)
à l'attention de : Irina Kortchemski

Table des matières

I	Partie 1 : L'équation de Dupire	2
1	Valeurs utilisées	2
2	Visualisation du prix V en 2D et 3D	2
3	Visualisation de la Vega de l'option en 2D et 3D	5
II	Partie 2 : Calibration et reconstruction de la volatilité locale dans le cadre du modèle CEV	7
1	Eléments théoriques	7
2	Valeurs utilisées	7
3	Visualisation des surfaces avant calibration	8
4	Valeurs des paramètres estimées	9
5	Visualisation des surfaces après calibration	9
6	Comparaison avant/après calibration	10
7	Graphiques annexes	11
III	Partie 3 : Calibration et reconstruction de la volatilité locale dans le cadre du modèle de Gatheral	12
1	Eléments théoriques	12
2	Valeurs utilisées	12
3	Visualisation des surfaces avant calibration	13
4	Valeurs des paramètres estimés et calibration de la volatilité locale	14
5	Visualisation des surfaces après calibration	15
6	Comparaison avant/après calibration	16

I Partie 1 : L'équation de Dupire

L'objectif de ce TP4 est d'une part, de résoudre l'équation de Dupire via l'algorithme de Crank-Nicolson et de déterminer le prix d'une option Européenne, puis d'autre part, de réaliser une calibration de la volatilité locale dans un modèle de "Constante Elasticity of Variance" et un modèle de Gatheral via l'algorithme de Levenberg-Marquardt afin d'obtenir les paramètres estimés.

Commençons par la résolution de l'équation de Dupire. Nous allons pour cette partie, visualiser :

- La solution de Crank-Nicolson V pour les maturités $T, \frac{T}{2}$ et $T = 0$ en 2 dimensions.
- La surface de la solution de Crank-Nicolson V en fonction de T et K .
- La Vega de l'option pour les maturités $T, \frac{T}{2}$ et $T = 0$ en 2 dimensions.
- La surface de la Vega de l'option en fonction de T et K .

Nous tracerons ces graphiques pour deux valeurs de volatilité locale :

- Volatilité fixe : $\sigma = 0.3$.
- Volatilité variable : $\sigma = \frac{\beta_1}{K_i^{\beta_2}}$.

1 Valeurs utilisées

Les valeurs utilisées dans cette partie sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{\max} = 20 \\ S(0) = 10 \\ r = 0.1 \\ T_{\max} = 0.5 \\ N = 199 \\ M = 49 \\ h = 0.01 \\ \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = 1 \end{array} \right.$$

2 Visualisation du prix V en 2D et 3D

Nous obtenons le graphique ci-dessous :

En 2D :

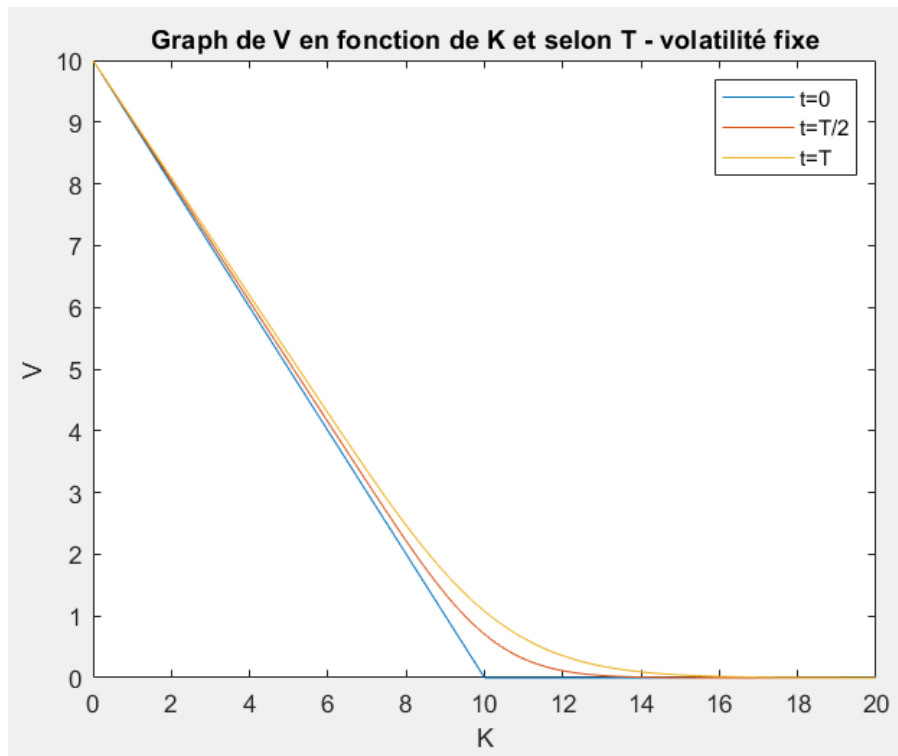


FIGURE 1 – Evolution de V en fonction de K pour différentes valeurs de T à Volatilité fixe

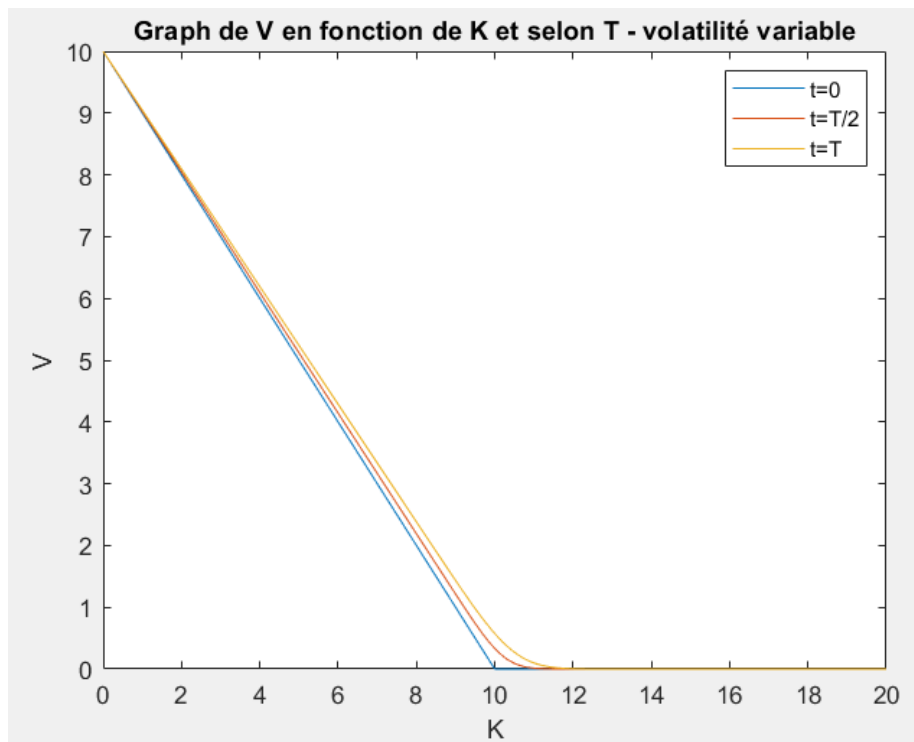


FIGURE 2 – Evolution de V en fonction de K pour différentes valeurs de T à Volatilité variable

TP4: Adnane EL KASMI

En 3D :

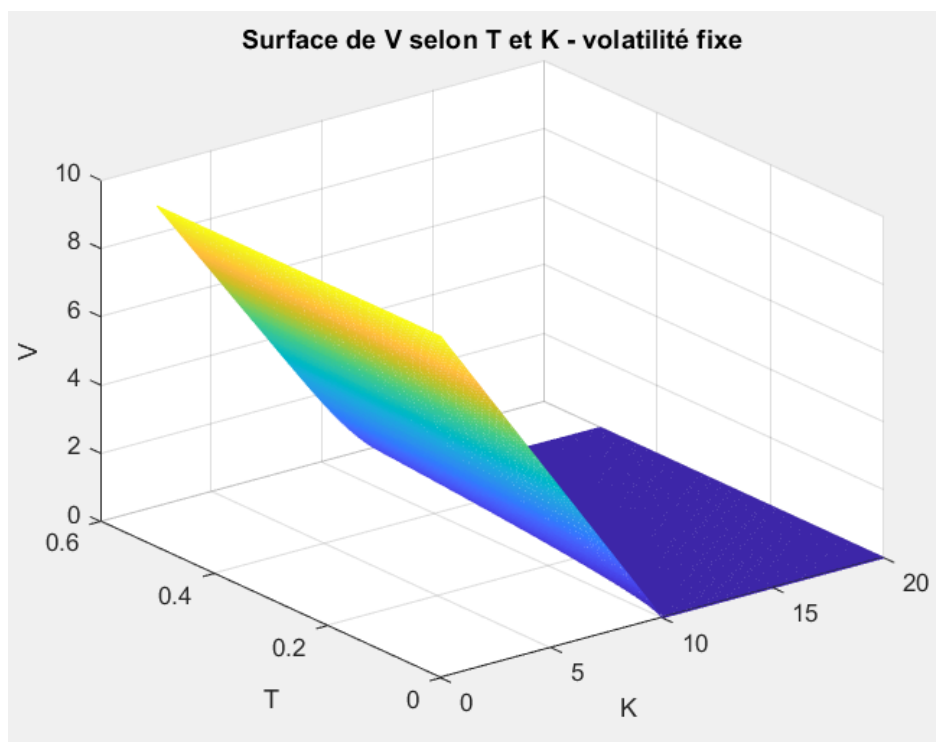


FIGURE 3 – Surface de V en fonction de K et T à Volatilité fixe

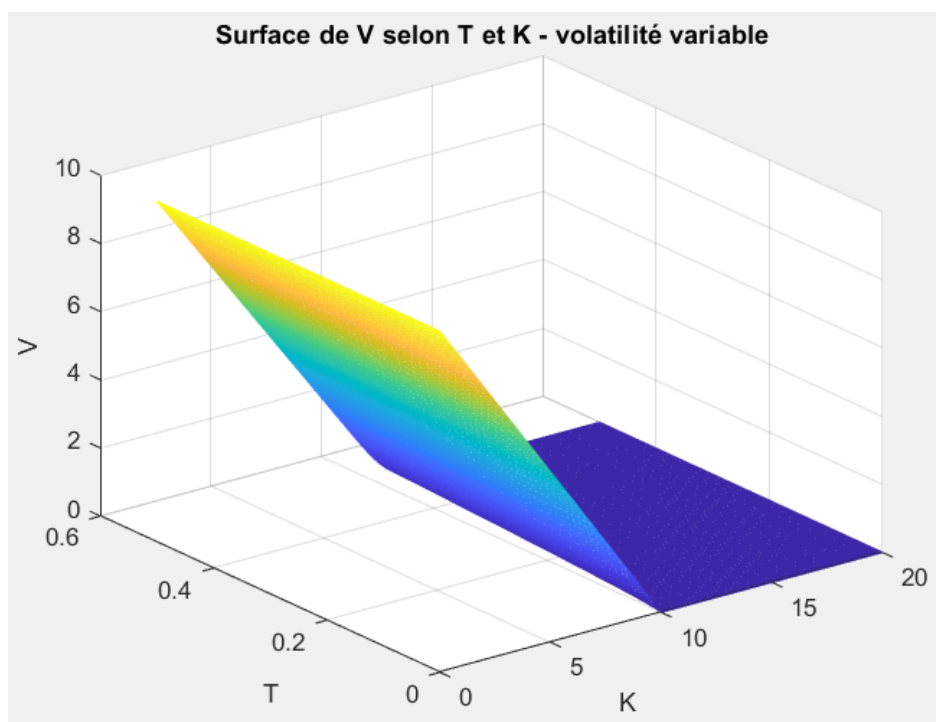


FIGURE 4 – Surface de V en fonction de K et T à Volatilité variable

3 Visualisation de la Vega de l'option en 2D et 3D

Nous obtenons le graphique ci-dessous :

En 2D :

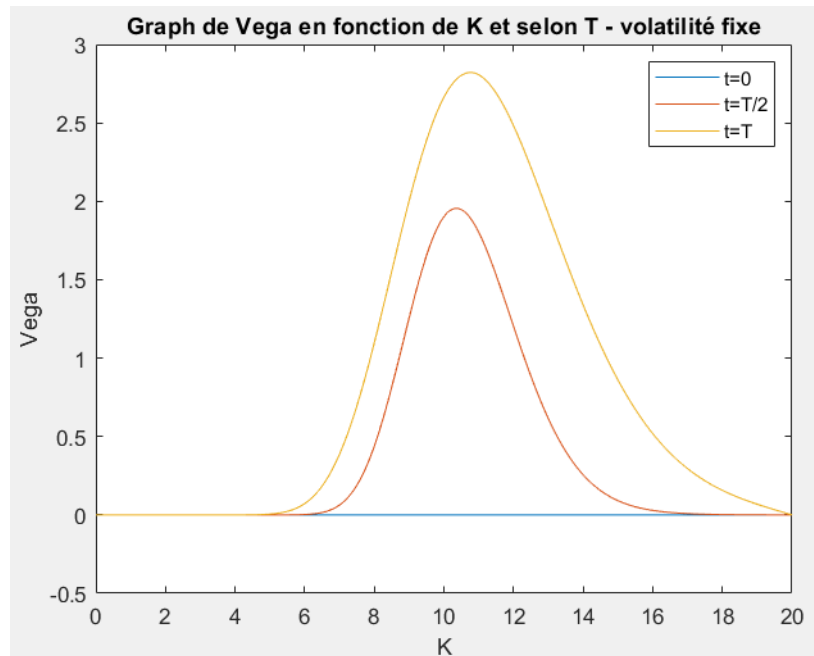


FIGURE 5 – Evolution de Vega en fonction de K pour différentes valeurs de T à Volatilité fixe

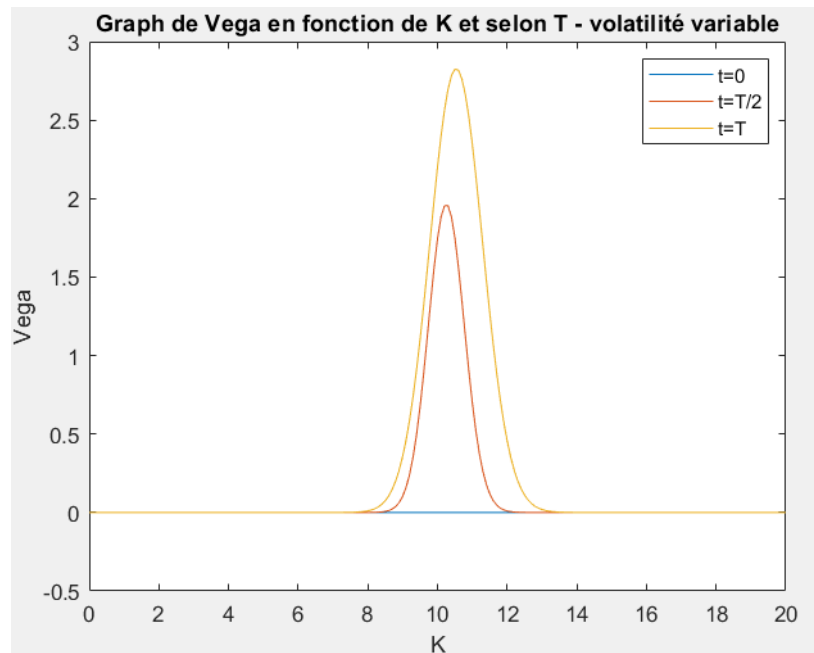


FIGURE 6 – Evolution de Vega en fonction de K pour différentes valeurs de T à Volatilité variable

En 3D :

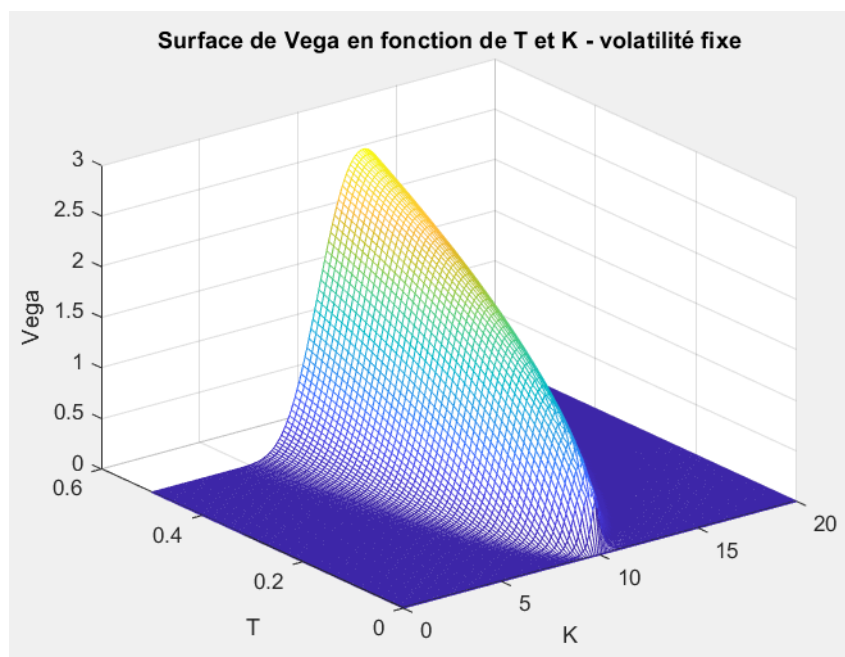


FIGURE 7 – Surface de Vega en fonction de K et T à Volatilité fixe

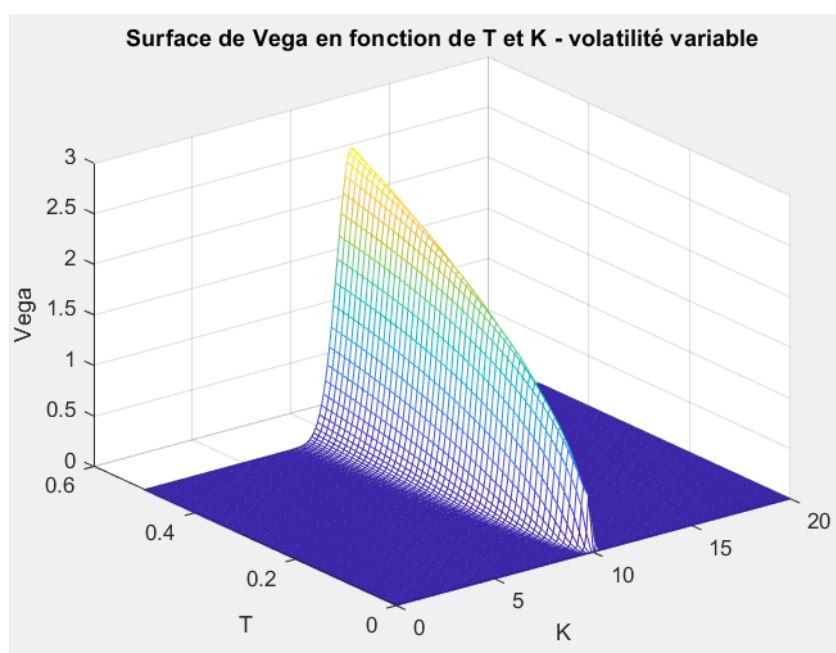


FIGURE 8 – Surface de Vega en fonction de K et T à Volatilité variable

II Partie 2 : Calibration et reconstruction de la volatilité locale dans le cadre du modèle CEV

Dans cette partie, nous allons calibrer la volatilité locale dans le cadre du modèle CEV via l'algorithme de Levenberg-Marquardt.

1 Eléments théoriques

Dans le cadre du modèle CEV, la volatilité locale est définie par l'expression suivante :

$$\sigma_{\text{locale}}(K, t) = \frac{\beta_1}{K^{\beta_2}}$$

Pour implémenter l'algorithme de Levenberg-Marquardt dans ce cadre, nous avons besoin de la Jacobienne $J_{pq}(\beta) = \frac{\partial r_p}{\partial \beta_q}$, et donc de l'expression des dérivées de r_p où

$$r_p = V^{\text{marche}}(T_p, \mathcal{K}_p) - V^{\text{dupire}}(T_p, \mathcal{K}_p, \beta_1, \beta_2)$$

par rapport à β_1 et β_2 . Nous avons donc :

$$\frac{\partial r_p}{\partial \beta_1} = -\frac{\partial V_p^{\text{dupire}}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \beta_1} = -\text{Vega}(T_p, \mathcal{K}_p, \beta_1, \beta_2) \frac{1}{\mathcal{K}_p^{\beta_2}}$$

$$\frac{\partial r_p}{\partial \beta_2} = -\frac{\partial V_p^{\text{dupire}}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \beta_2} = \text{Vega}(T_p, \mathcal{K}_p, \beta_1, \beta_2) \frac{\ln \mathcal{K}_p * \beta_1}{\mathcal{K}_p^{\beta_2}}$$

où

$$\frac{\partial V_p^{\text{dupire}}}{\partial \sigma} = \text{Vega}(T_p, \mathcal{K}_p, \beta_1, \beta_2)$$

2 Valeurs utilisées

Pour réaliser cette calibration, nous utiliserons les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{\max} = 20 \\ S(0) = 10 \\ r = 0.1 \\ T_{\max} = 0.5 \\ N = 199 \\ M = 49 \\ \beta_1(0) = 1 \\ \beta_2(0) = 1 \\ \epsilon = 10^{-5} \\ \lambda = 0.001 \\ h = 0.01 \\ \mathcal{K}_p = [7, 7.5, 8, 8.5, 9, 9.5, 10, 10.5, 11, 11.5, 12, 12.5, 13, 13.5, 14] \\ V_p^{\text{marche}} = [3.3634, 2.9092, 2.4703, 2.0536, 1.6666, 1.3167, 1.0100, 0.7504, 0.5389, 0.3733, \\ 0.2491, 0.1599, 0.0986, 0.0584, 0.0332] \end{array} \right.$$

3 Visualisation des surfaces avant calibration

Pour $[\beta_1, \beta_2] = [1, 1]$, nous obtenons les surfaces de V et Vega suivantes :

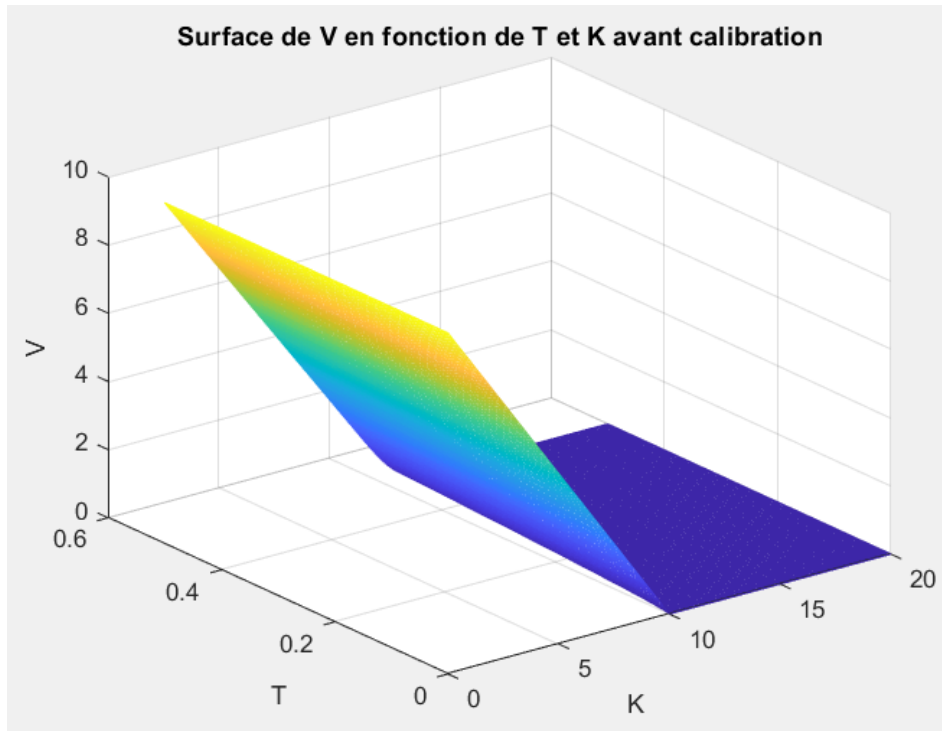


FIGURE 9 – Surface de V en fonction de K et T - Modèle CEV - Avant calibration

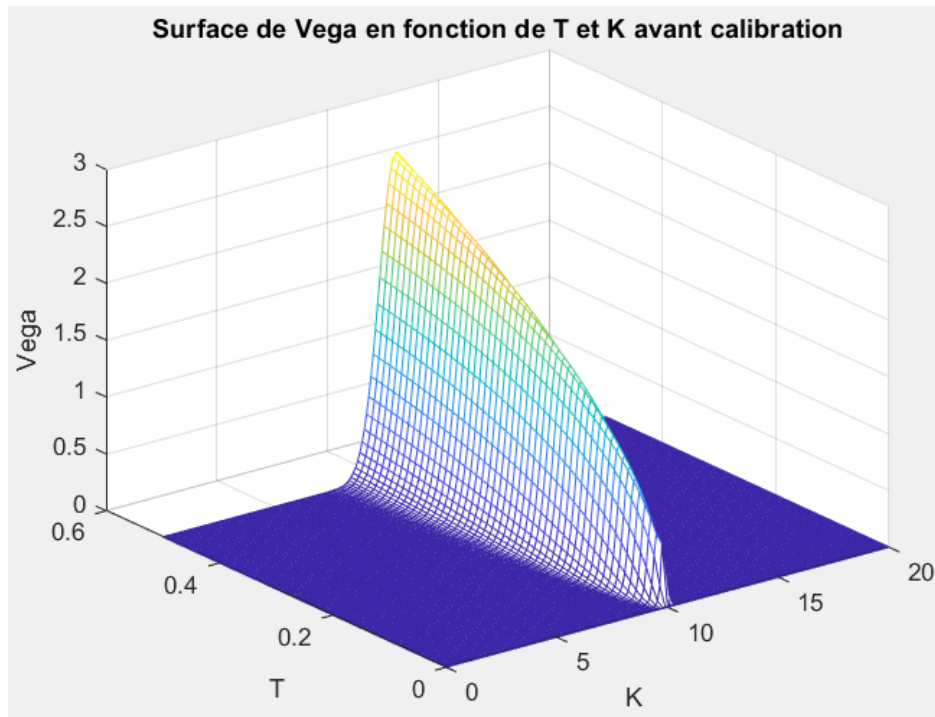


FIGURE 10 – Surface de Vega en fonction de K et T - Modèle CEV - Avant calibration

4 Valeurs des paramètres estimées

Une fois l'algorithme de calibration réalisé, nous obtenons les paramètres estimés suivants :

```
La valeur de d est :  
1.0e-05 *  
  
0.8627  
0.2121
```

FIGURE 11 – Valeur du paramètre estimé d par calibration - Modèle CEV

```
La valeur du paramètre beta1 après calibration est : 1.7583  
La valeur du paramètre beta2 après calibration est : 0.83112
```

FIGURE 12 – Valeur des paramètres estimés β_1 et β_2 par calibration - Modèle CEV

5 Visualisation des surfaces après calibration

En prenant les valeurs des paramètres estimés par la calibration données précédemment, nous obtenons les surfaces de V et Vega suivantes :

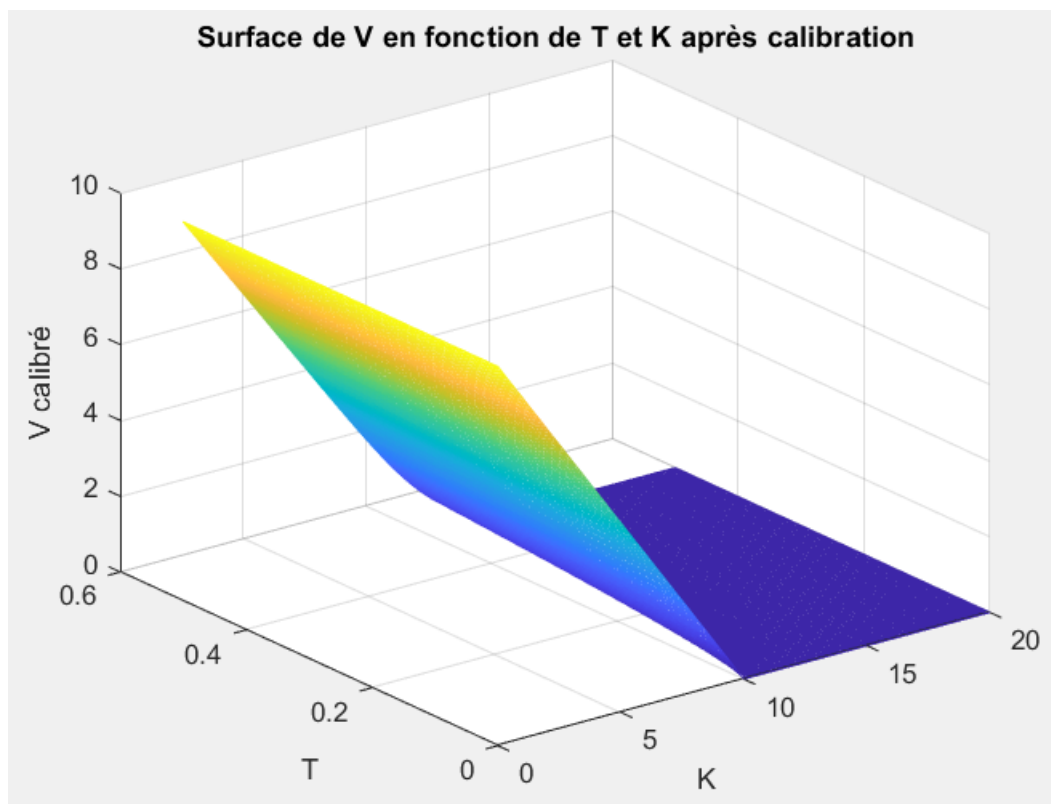


FIGURE 13 – Surface de V en fonction de K et T - Modèle CEV - Après calibration

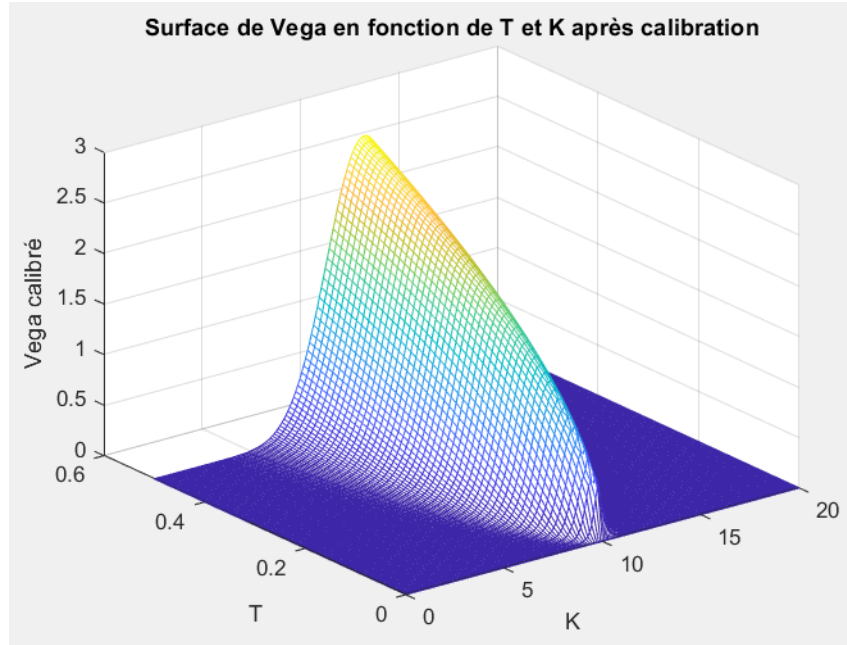


FIGURE 14 – Surface de Vega en fonction de K et T - Modèle CEV - Après calibration

6 Comparaison avant/après calibration

Représentons les graphiques des surfaces de V et Vega avant et après calibration, afin de visualiser correctement l'impact de la calibration sur celles-ci :

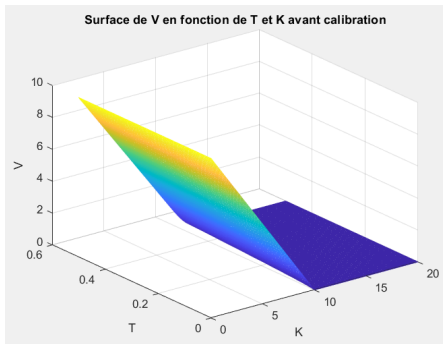


FIGURE 15 – Surface de V - Modèle CEV - Avant calibration

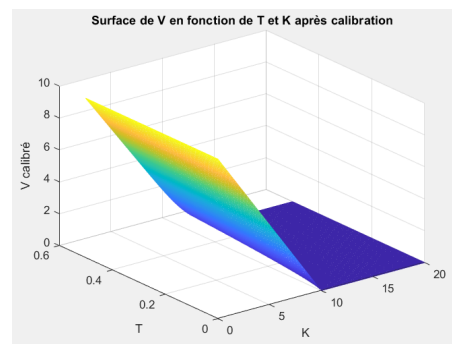


FIGURE 16 – Surface de V - Modèle CEV - Après calibration

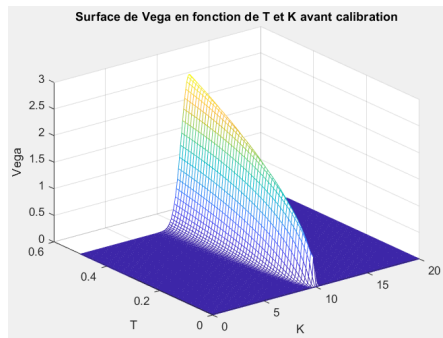


FIGURE 17 – Surface de Vega - Modèle CEV - Avant calibration

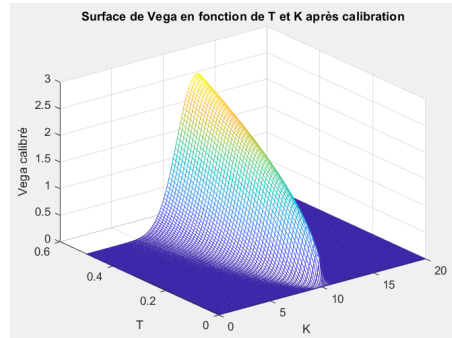


FIGURE 18 – Surface de Vega - Modèle CEV - Après calibration

7 Graphiques annexes

Enfin, voici des graphiques annexes, permettant de visualiser l'impact de la calibration sur le prix V ainsi que la valeur de Vega en fonction de K après calibration :

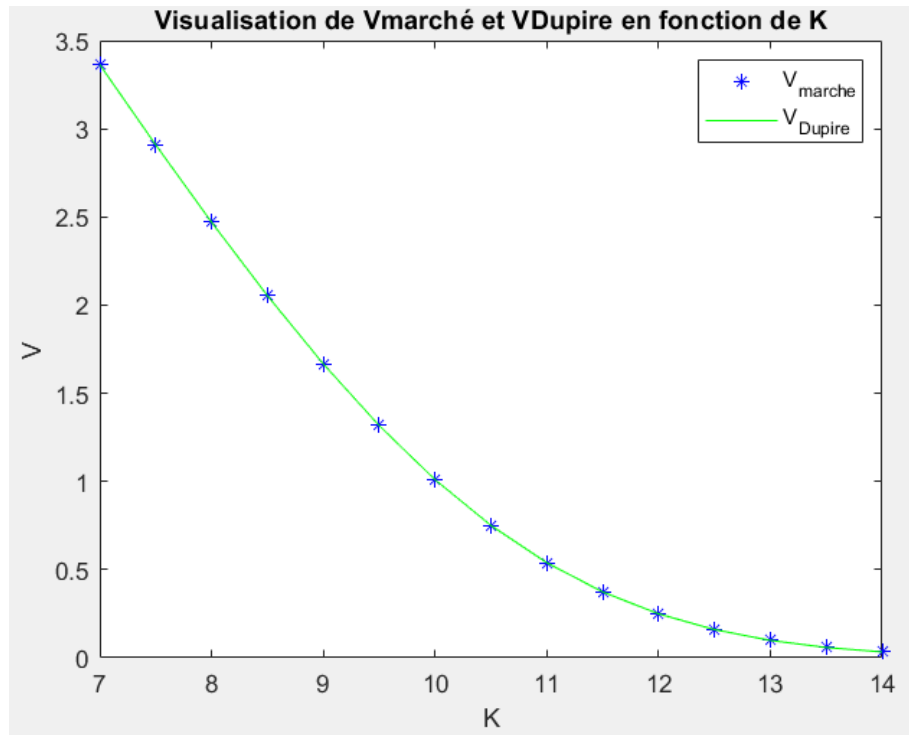


FIGURE 19 – Calibration de V_{Dupire}

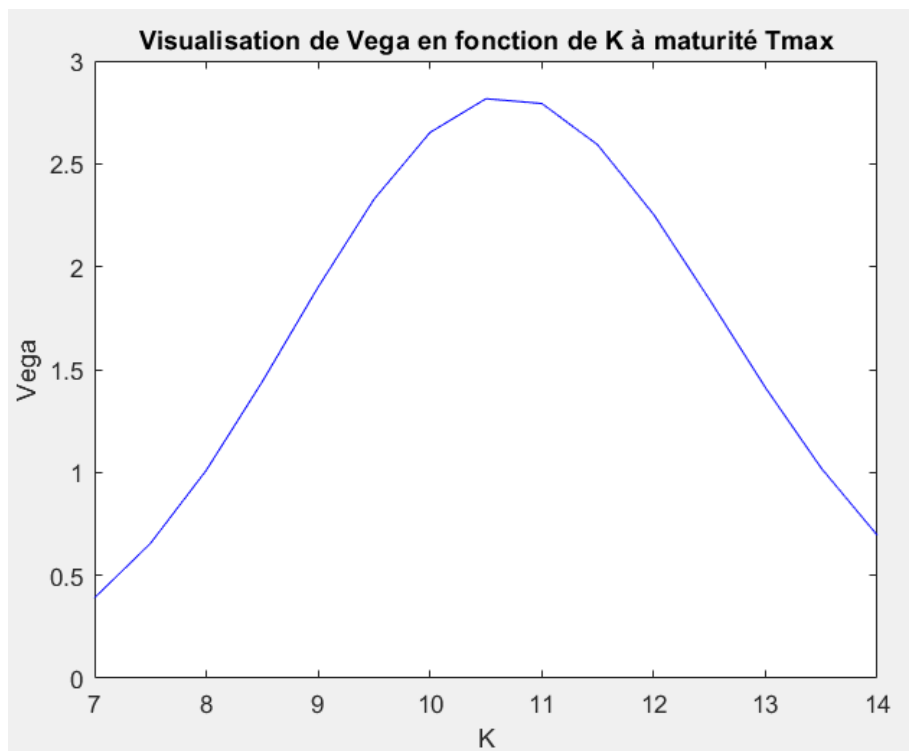


FIGURE 20 – Evolution de Vega en fonction de K après calibration

III Partie 3 : Calibration et reconstruction de la volatilité locale dans le cadre du modèle de Gatheral

Dans cette partie, nous allons calibrer la volatilité locale dans le cadre du modèle de Gatheral via l'algorithme de Levenberg-Marquardt.

1 Éléments théoriques

Dans le cadre du modèle Gatheral, la volatilité locale est définie par l'expression suivante :

$$\sigma_{\text{locale}}(K, t) = b \left(\rho(K - \beta_2) + \sqrt{(S - \beta_2)^2 + \beta_1^2} \right)$$

Pour implémenter l'algorithme de Levenberg-Marquardt dans ce cadre, nous avons besoin de la Jacobienne $J_{pq}(\beta) = \frac{\partial r_p}{\partial \beta_q}$, et donc de l'expression des dérivées de r_p où

$$r_p = V^{\text{marche}}(T_p, \mathcal{K}_p) - V^{\text{dupire}}(T_p, \mathcal{K}_p, \beta_1, \beta_2)$$

par rapport à β_1 et β_2 . Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_p}{\partial \beta_1} &= -\frac{\partial V_p^{\text{dupire}}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \beta_1} = -\text{Vega}(T_p, \mathcal{K}_p, \beta_1, \beta_2) \frac{b\beta_1}{\sqrt{(\mathcal{K}_p - \beta_2)^2 + \beta_1^2}} \\ \frac{\partial r_p}{\partial \beta_2} &= -\frac{\partial V_p^{\text{dupire}}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \beta_2} = \text{Vega}(T_p, \mathcal{K}_p, \beta_1, \beta_2) * b \left(\rho + \frac{\mathcal{K}_p - \beta_2}{\sqrt{(\mathcal{K}_p - \beta_2)^2 + \beta_1^2}} \right). \end{aligned}$$

où

$$\frac{\partial V_p^{\text{dupire}}}{\partial \sigma} = \text{Vega}(T_p, \mathcal{K}_p, \beta_1, \beta_2)$$

2 Valeurs utilisées

Pour réaliser cette calibration, nous utiliserons les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{\max} = 20 \\ S(0) = 10 \\ r = 0.1 \\ T_{\max} = 0.5 \\ N = 199 \\ M = 49 \\ \beta_1(0) = 1 \\ \beta_2(0) = 1 \\ \epsilon = 10^{-5} \\ \lambda = 0.001 \\ h = 0.01 \\ b = 0.05 \\ \rho = 0.1 \\ \mathcal{K}_p = [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18] \\ V_p^{\text{marche}} = [5.2705, 4.3783, 3.5510, 2.8138, 2.1833, 1.6651, 1.2541, 0.9374, 0.6983, 0.5195, 0.3851, \\ 0.2817, 0.1987, 0.1277] \end{array} \right.$$

3 Visualisation des surfaces avant calibration

Pour $[\beta_1, \beta_2] = [5, 5]$, nous obtenons les surfaces de V et Vega suivantes :

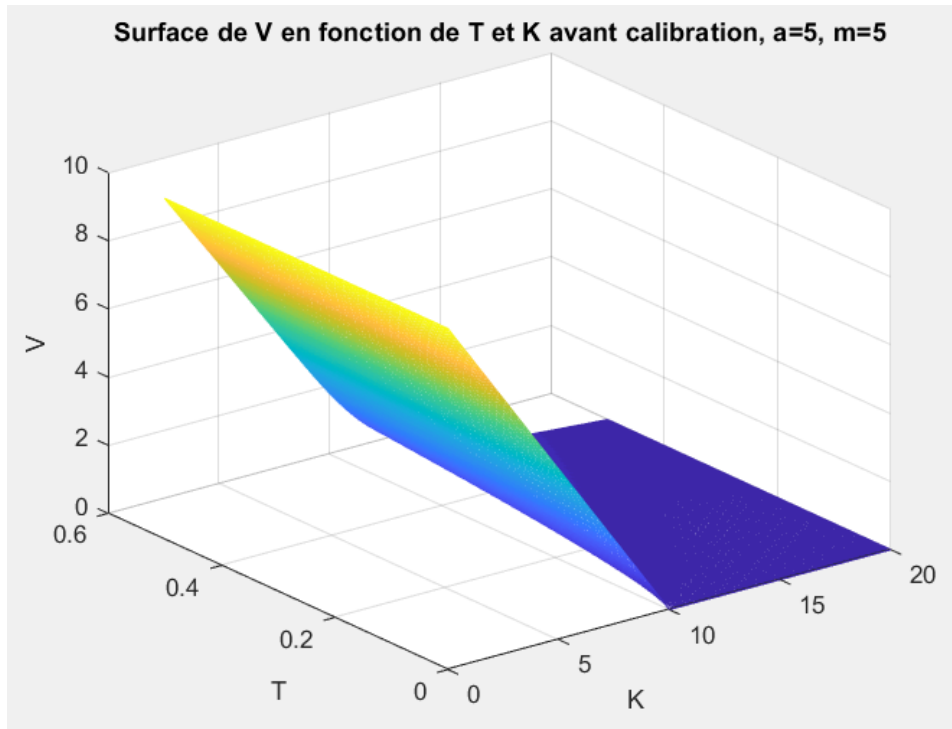


FIGURE 21 – Surface de V en fonction de K et T - Modèle de Gatheral - Avant calibration

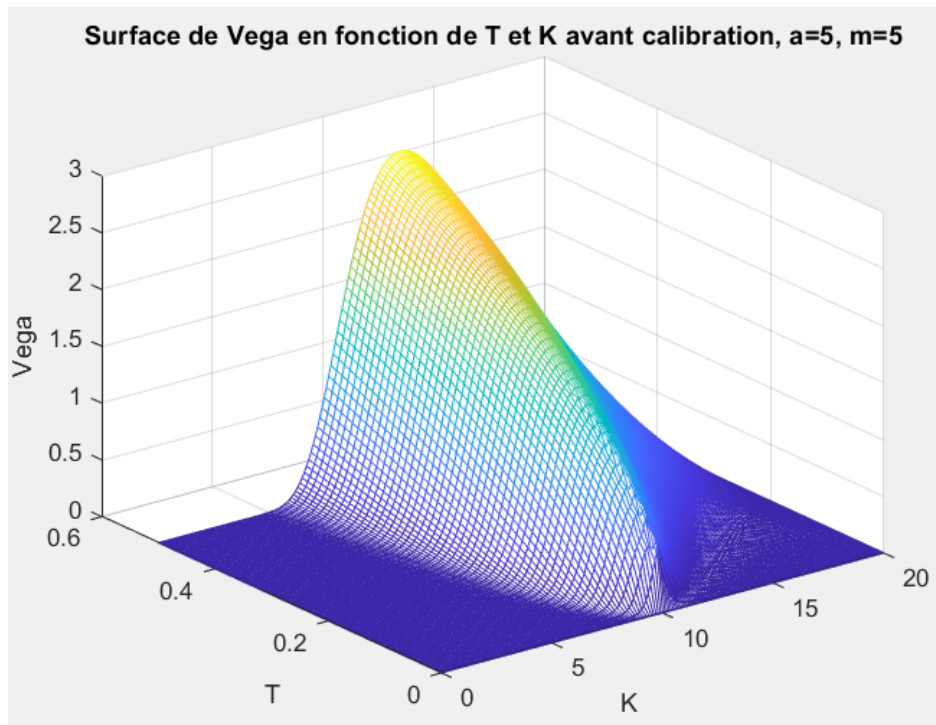


FIGURE 22 – Surface de Vega en fonction de K et T - Modèle de Gatheral - Avant calibration

4 Valeurs des paramètres estimés et calibration de la volatilité locale

La valeur du paramètre β_1 après calibration est : 9.9977

La valeur du paramètre β_2 après calibration est : 11.9938

FIGURE 23 – Valeur des paramètres estimés β_1 et β_2 par calibration - Modèle de Gatheral

De plus, voici le graphique représentant l'évolution de la volatilité locale (évaluée avec les nouveaux paramètres estimés et non les valeurs initiales des betas) en fonction de K :

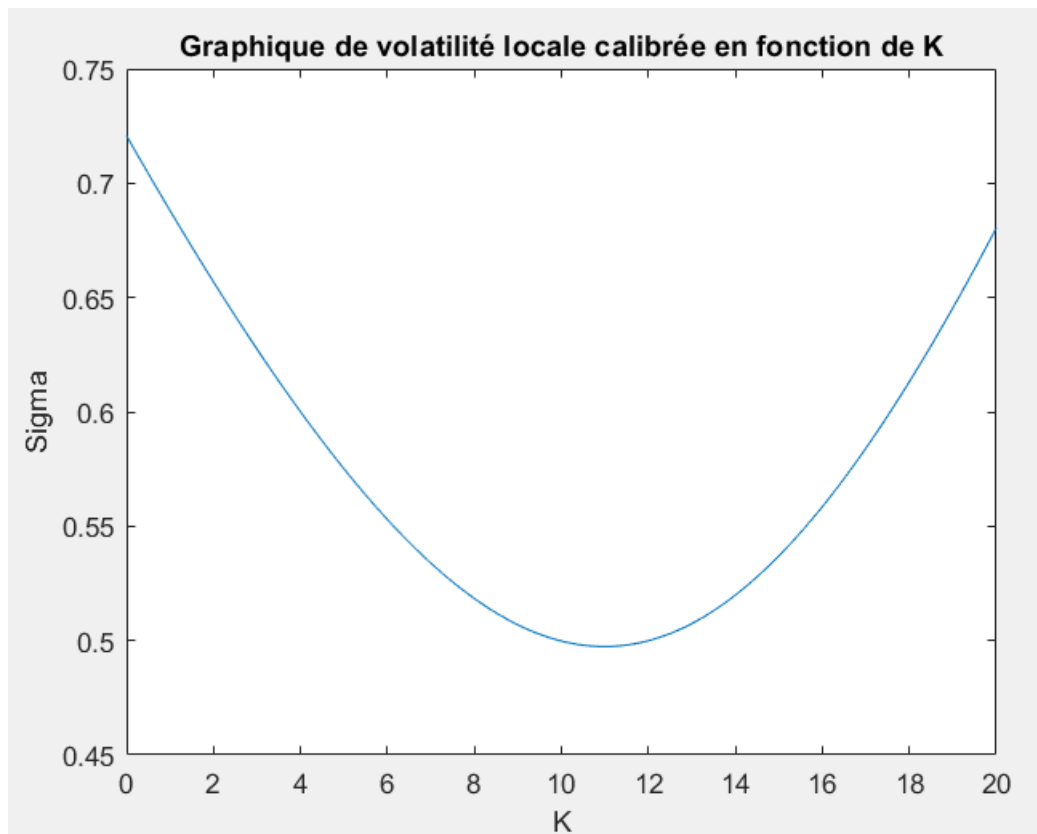


FIGURE 24 – Calibration de la volatilité locale σ_{locale} - Modèle de Gatheral

Commentaire : Nous obtenons bien le Smile de volatilité !

5 Visualisation des surfaces après calibration

En prenant les valeurs des paramètres estimés par la calibration données précédemment, nous obtenons les surfaces de V et Vega suivantes :

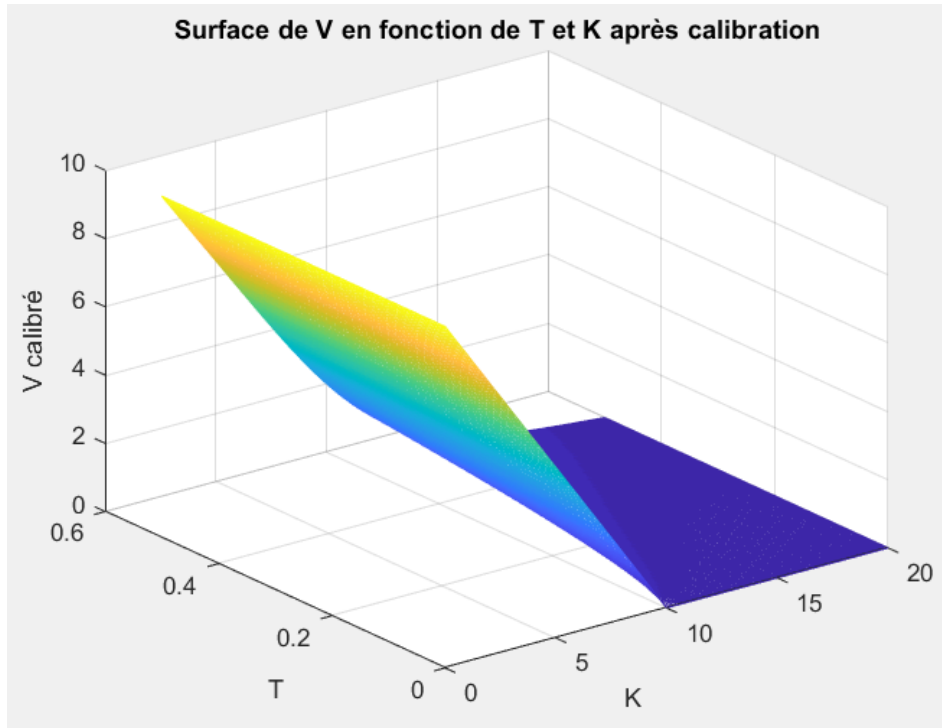


FIGURE 25 – Surface de V en fonction de K et T - Modèle de Gatheral - Avant calibration

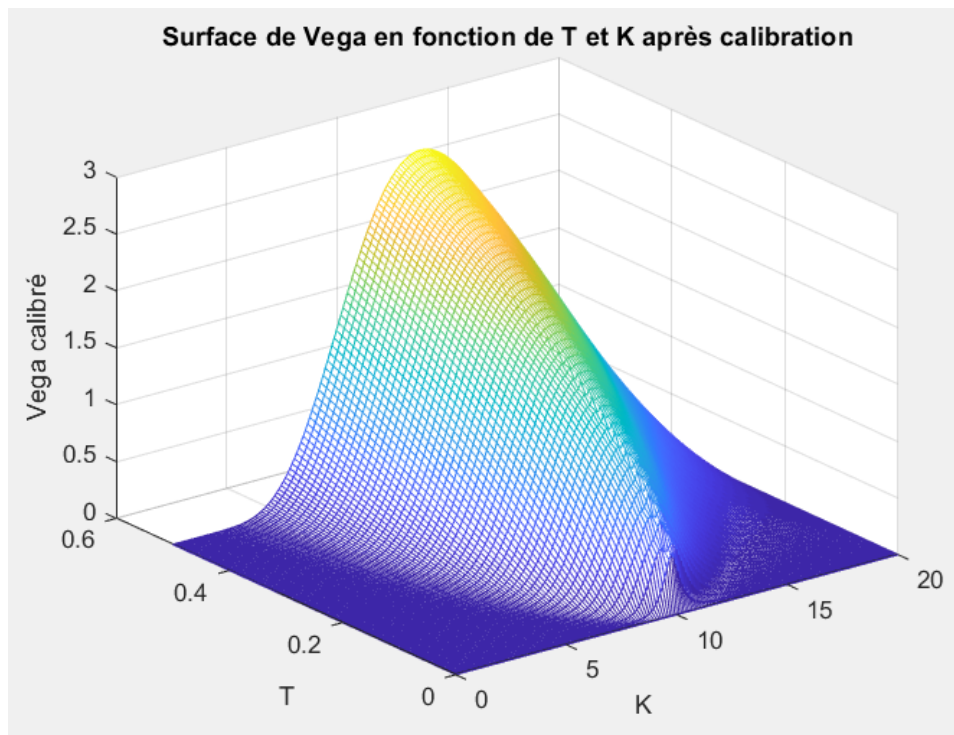


FIGURE 26 – Surface de Vega en fonction de K et T - Modèle de Gatheral - Avant calibration

6 Comparaison avant/après calibration

Représentons les graphiques des surfaces de V et Vega avant et après calibration, afin de visualiser correctement l'impact de la calibration sur celles-ci :

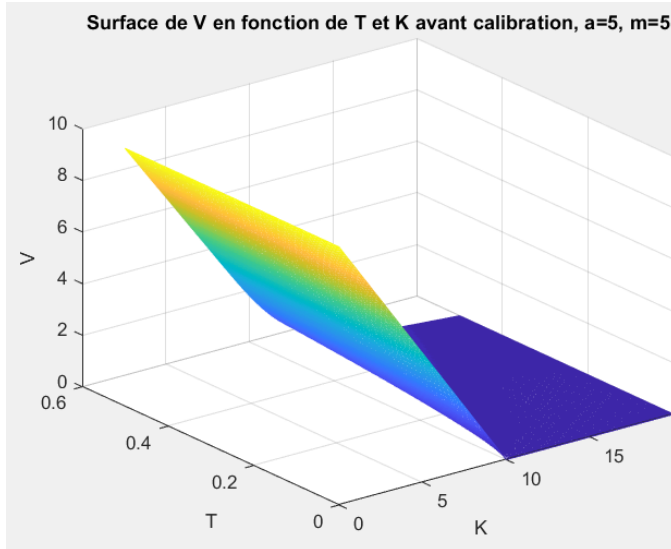


FIGURE 27 – Surface de V - Modèle de Gatheral - Avant calibration

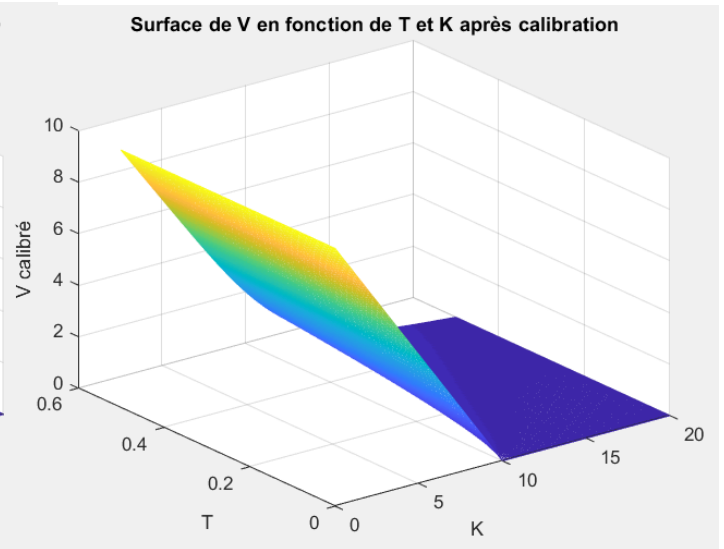


FIGURE 28 – Surface de V - Modèle de Gatheral - Après calibration

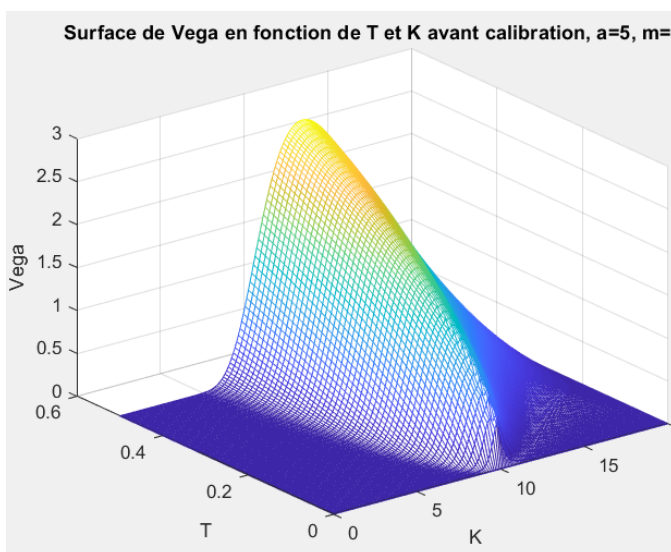


FIGURE 29 – Surface de Vega - Modèle de Gatheral - Avant calibration

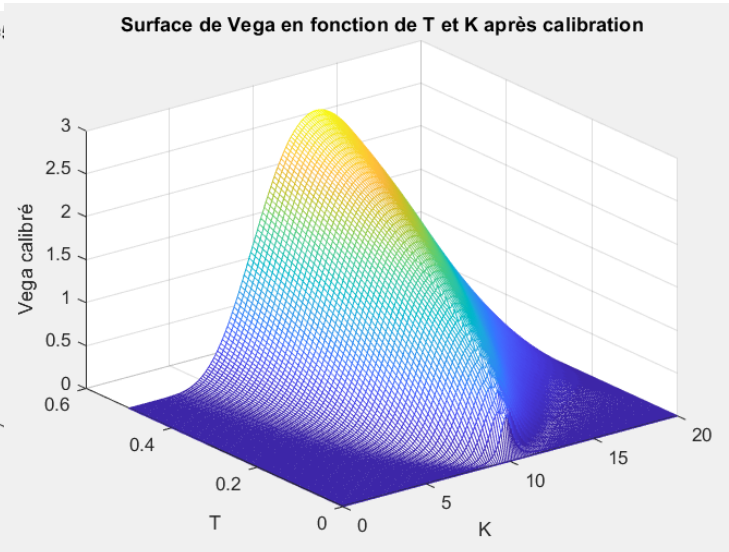


FIGURE 30 – Surface de Vega - Modèle de Gatheral - Après calibration