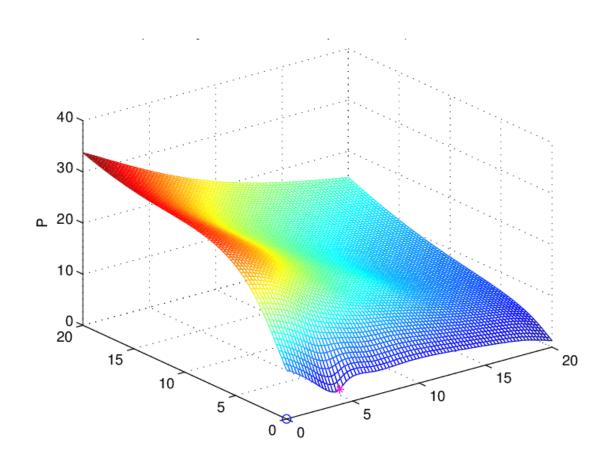




# Simulation du Delta-Hedging dans le marché complet et incomplet : TP2



Adnane EL KASMI (ING3) à l'attention de : Irina Kortchemski

## Table des matières

tion d'un portefeuille pour éliminer le risque	_
mulation d'évolution du prix d'une action	2
mulation du portefeuille de couverture	3
sude du Profit and Loss - PL	5
aR: Value at Risk	9
tion d'un portefeuille qui réplique l'option	10
Hedging	12
onnées et notations utilisées	12
sude du P&L - Gamma Hedging	14
on costs	15
ésultats de l'évolution du portefeuille de couverture P et de l'option V	
our toutes les simulations en considérant un coût de transaction	15
ésultats obtenus pour la simulation 1	18
ésultats obtenus pour la simulation 2	21
ésultats obtenus pour la simulation 3	24
<u>.</u>	
	mulation d'évolution du prix d'une action mulation du portefeuille de couverture cude du Profit and Loss - PL R: Value at Risk tion d'un portefeuille qui réplique l'option Hedging connées et notations utilisées cude du P&L - Gamma Hedging con costs desultats de l'évolution du portefeuille de couverture P et de l'option V cour toutes les simulations en considérant un coût de transaction desultats obtenus pour la simulation 2

## I Construction d'un portefeuille pour éliminer le risque

L'objectif de cette partie est de construire un portefeuille de couverture de façon à réduire, voir éliminer, le risque de différence entre les valeurs du portefeuille et l'option.

Nous utiliserons donc les valeurs suivantes :

$$S_0 = 1, r = 0.05, \sigma = 0.5, T = 5, N = 100, dt = \frac{T}{N}, K = 1.5, N_{mc} = 1000$$

## 1 Simulation d'évolution du prix d'une action

Dans un premier temps, nous allons simuler l'évolution du prix de l'action. Pour cela, nous simulerons  $N_{mc} = 1000$  chemins différents.

Nous obtenons les trajectoires suivantes :

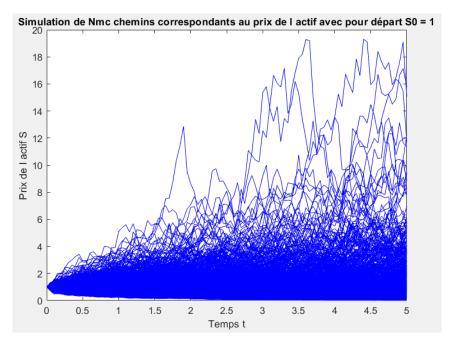


FIGURE 1 – Simulation de  $N_{mc} = 1000$  chemins correspondants au prix de l'actif avec  $S_0 = 1$ 

L'espérance et la variance de la valeur finale  $S_T$  obtenues pour ces actifs simulés sont :

FIGURE 2 – Estimation de la moyenne  $E[S_T]$  et de la variance  $Var(S_T)$ 

L'espérance et la variance théoriques sont données par :

$$E[S_T] = e^{rT} = 1,2840 \text{ et } Var(S_T) = e^{2rT}(e^{\sigma^2} - 1) = 0.4683$$

#### 2 Simulation du portefeuille de couverture

Passons à la simulation du porte feuille de couverture. Nous allons tout d'abord calculer la valeur de l'option Call Européen avec la formule de Black and Scholes pour ensuite pouvoir simuler un porte feuille de couverture  $P_i$ .

Introduisons les différentes notations:

- $A_i$ : la quantité d'actions qu'il faut avoir pour couvrir l'option (nombre de parts du sous-jacent) en  $t = t_i$ .
- $B_i$ : la valeur du cash du portefeuille en  $t = t_i$ .
- $P_i^{actualise}$ : la valeur du portefeuille actualisé en  $t=t_i$ .
- $V_i$ : le prix de l'option en  $t = t_i$ .

De plus, pour cette partie, nous supposons des valeurs initiales pour ces 4 notations précédentes en supposant les hypothèses sur les paramètres précisées précédemment, et nous trouvons les valeurs associées suivantes :

- $A_0 = N(d_1(S_0.0)) = 0.6627.$
- $B_0 = 1$ , choisi arbitrairement.
- $P_0 = A_0 S_0 + B_0 = 1.6627.$
- $-P_0^{actualise} = V_0 = 0.3794.$

Traçons maintenant la quantité d'actions  $A_i$  et la valeur du cash  $B_i$  sur le même système de coordonnées. Nous obtenons le graphique suivant :

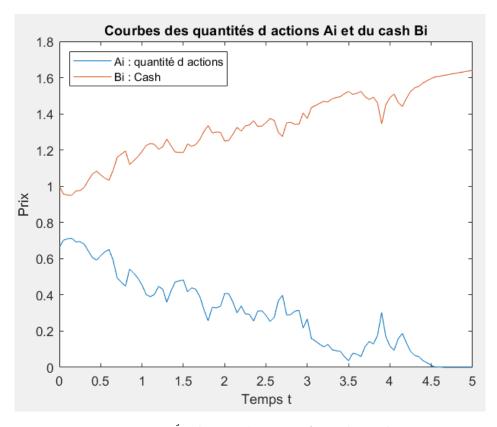


FIGURE 3 – Évolution du ratio  $A_i$  et du cash  $B_i$ 

Nous traçons l'évolution de l'option V et du porte feuille de couverture actualisé  $P^{actualise}$  sur le même système de coordonnées.

Nous obtenons le graphique suivant :

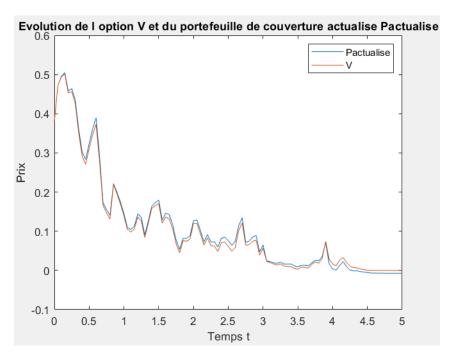


FIGURE 4 – Évolution de l'option V et du portefeuille de couverture actualisé  $P^{actualise}$ 

Nous pouvons notamment obtenir le graphique d'erreur de couverture  $P^{actualise} - V$ :

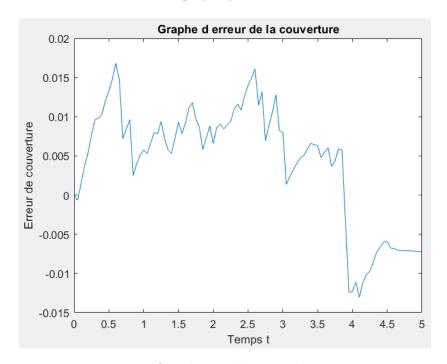


FIGURE 5 – Graphique d'erreur de couverture

Nous remarquons que l'évolution du portefeuille de couverture  $P^{actualise}$  et de l'option V est identique, à une erreur de couverture près.

#### 3 Etude du Profit and Loss - PL

Le Profit and Loss représente la performance de la stratégie de delta-couverture, c'est-à-dire l'erreur de couverture, soit la différence entre le portefeuille de couverture  $P^{actualise}$  et V:

$$PL(S_0, T) = E[P^{actualise}(S_T, T) - V^{BS}(S_T, T) = S(t = 0) = S0]$$

Cette partie sera divisée en deux simulations :

- Réalisation des calculs et tracés pour un rebalancement à chaque  $\Delta t$ .
- Réalisation des calculs et des tracés en introduisant des rebalancements à des instants discret, en utilisant donc un paramètre  $N_{trading}$ .

#### • Rebalancement du portefeuille de couverture à chaque $\Delta t$

Nous considérons dans un premier temps un porte feuille de couverture rebalancée à chaque  $\Delta t.$ 

Moyenne arithmétique du P&L : après simulation, nous trouvons le résultat suivant :

FIGURE 6 – Moyenne arithmétique du P&L pour un rebalancement à chaque  $\Delta t$ 

Fonction de répartition du P&L : Voici une représentation graphique de la fonction de répartition du P&L pour un hedging à chaque  $\Delta t$  :

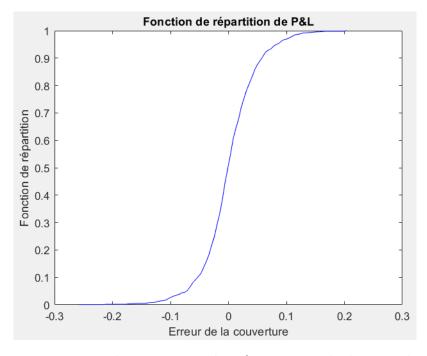


FIGURE 7 – Fonction de répartition du P&L pour un hedging à chaque  $\Delta t$ 

Fonction de densité du P&L : Voici une représentation graphique de la fonction de densité du P&L pour un hedging à chaque  $\Delta t$  :

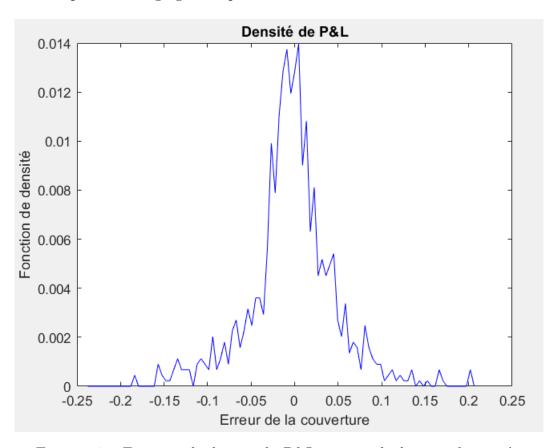


FIGURE 8 – Fonction de densité du P&L pour un hedging à chaque  $\Delta t$ 

#### ullet Rebalancement du porte feuille de couverture selon une quantité d'intervention du trading $N_{trading}$

Dans cette partie, l'objectif est de montrer que si le rebalancement de portefeuille de couverture a lieu à différents instants, l'erreur de couverture est proportionnelle au Gamma de l'option. Dans ce cas, pour diviser l'erreur de la couverture par deux, il faut rebalancer le portefeuille quatre fois plus souvent.

Nous allons donc rebalancer le portefeuille de couverture selon les instants :

$$N_{trading} = 100; 50; 25; 20; 5; 2$$

c'est-à-dire, respectivement, un rebalancement de portefeuille de couverture à chaque  $\Delta t$ , une fois sur 2, une fois sur 4, une fois sur 5, une fois sur 20 et une fois sur 50 (pour  $N_{trading} = 1$ , l'option n'est plus couverte).

Moyenne et variance du P&L final pour chacune des quantités d'intervention :  $N_{trading}$  Nous obtenons les résultats suivants :

```
Pour Ntrading = 100, Espérance du P&L = 0.001434

Pour Ntrading = 100, Variance du P&L = 0.0022519

-------

Pour Ntrading = 50, Espérance du P&L = -0.1534

Pour Ntrading = 50, Variance du P&L = 0.0058665

--------

Pour Ntrading = 25, Espérance du P&L = -0.21812

Pour Ntrading = 25, Variance du P&L = 0.011383

-------

Pour Ntrading = 20, Espérance du P&L = -0.23293

Pour Ntrading = 20, Variance du P&L = 0.013402

--------

Pour Ntrading = 5, Espérance du P&L = -0.26087

Pour Ntrading = 5, Variance du P&L = 0.040728

----------

Pour Ntrading = 2, Espérance du P&L = -0.26201

Pour Ntrading = 2, Variance du P&L = 0.098918
```

FIGURE 9 – Moyenne arithmétique et variance du P&L selon  $N_{trading}$ 

Graphe de l'évolution de la quantité d'actions nécessaire pour couvrir l'option (ratio de couverture) pour  $N_{trading} = 10$ .

Nous considérons pour ce tracé  $N_{trading}=10$ , c'est-à-dire un rebalancement du portefeuille de couverture une fois 10, et donc que l'on recalcule le nombre de parts  $A_i$  une fois sur 10. Voici le graphique obtenu :

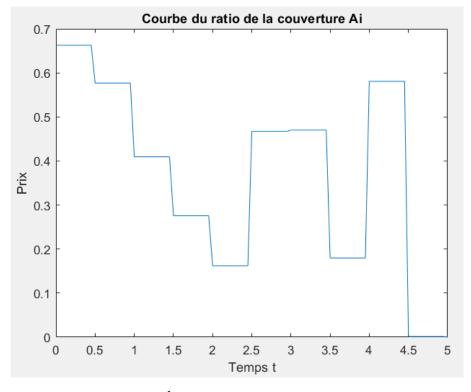


FIGURE 10 – Évolution du ratio de couverture  $A_i$ 

#### Fonctions de répartition du P&L selon les $N_{trading}$ cités :

Nous traçons sur le même système de coordonnées les fonctions de répartition du PL final selon  $N_{trading}$ :

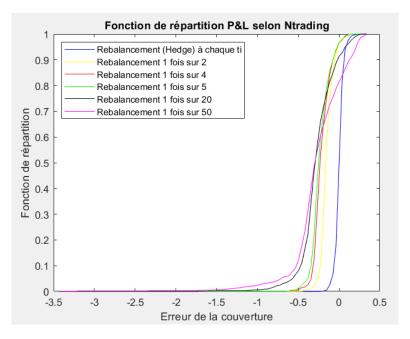


FIGURE 11 – Fonction de répartition du P&L selon  $N_{trading}$ 

#### Fonctions de densité du P&L selon les $N_{trading}$ cités :

Nous traçons sur le même système de coordonnées les fonctions de densité du PL final selon  $N_{trading}$ :

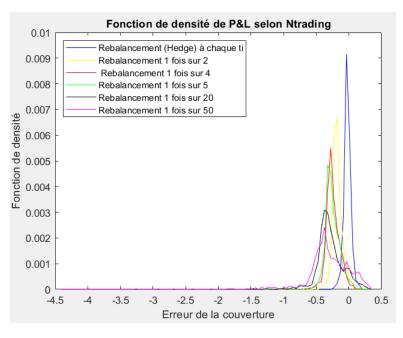


FIGURE 12 – Fonction de densité du P&L selon  $N_{trading}$ 

Plus le nombre de trading augmente, plus la fréquence de rebalancement est élevée, ce qui va entrainer une erreur de couverture plus faible et donc une meilleure couverture.

#### 4 VaR: Value at Risk

La VaR , Value at Risk, répond à l'affirmation suivante : "Nous sommes certains qu'avec la probabilité  $\alpha\%$  nous n'allons pas perdre plus de  $\gamma$  = Var euros" soit  $P(P\&L < \gamma) = \alpha$ .

Pour déterminer la VaR pour un certain seuil  $\alpha$ , nous allons tracer la fonction de répartition du P&L, avec en abscisses les valeurs des différents  $\gamma$  et en ordonnées la valeur de la fonction de répartition pour cette valeur de  $\gamma$ , soit  $P(P\&L < \gamma)$  c'est à dire  $\alpha$ .

VaR à 10% si on hedge à chaque  $\Delta t$  Nous allons donc tracer la fonction de répartition du P&L avec un hedging à chaque  $\Delta t$  et repérer sur la courbe le point de coordonnées  $(\gamma, 0.10)$ :

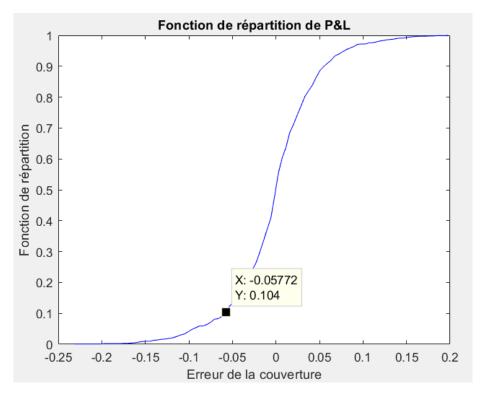


FIGURE 13 – Fonction de répartition du P&L pour un hedging à chaque  $\Delta t$  avec l'affichage de la  $VaR_{10\%}$ 

Nous obtenons donc : $VaR_{10\%} = -0.05772$  euro

 $VaR_{10\%}$  si on hedge une fois sur 10 Cette fois-ci, nous traçons la fonction de répartition du P&L avec un hedging une fois sur 10 (soit  $N_{trading} = 10$ ) et repérer sur la courbe le point de coordonnées  $(\gamma, 0.10)$ :

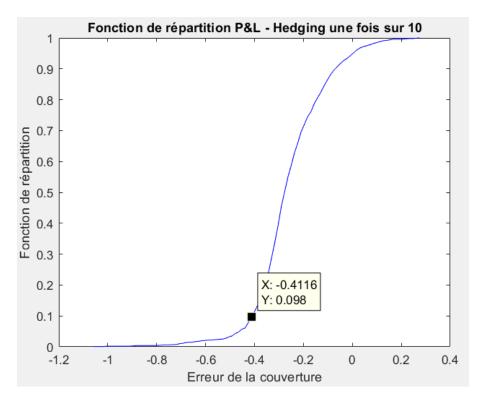


FIGURE 14 – Fonction de répartition du P&L selon  $N_{trading}$  avec l'affichage de la  $VaR_{10\%}$ 

Nous obtenons donc : $VaR_{10\%} = -0,4116$  euro

## II Construction d'un portefeuille qui réplique l'option

Nous allons à nouveau réaliser la simulation d'un portefeuille de couverture. Cependant, dans cette partie, les valeurs initiales de  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $P_i^{actualise}$  et  $V_i$  sont différentes à la partie I. Nous avons :

- $-A_0 = N(d_1(S_0.0)) = 0.6627.$  (le même)
- $B_0 = V_0 A_0 S_0 = -0,2834$ , non choisi arbitrairement.
- $-P_0 = V_0 = 0.3794.$

Nous traçons l'évolution de l'option V et du porte feuille de couverture actualisé  $P^{actualise}$  sur le même système de coordonnées. Nous obte nons le graphique suivant :

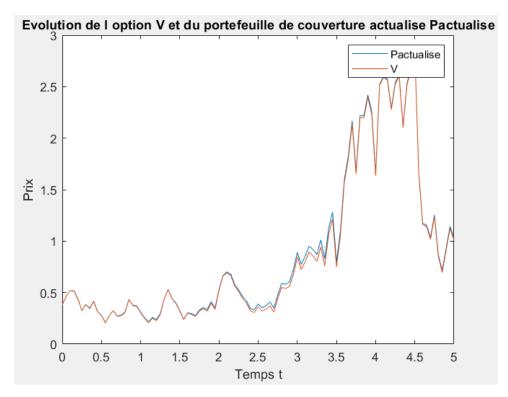


FIGURE 15 – Évolution de l'option V et du portefeuille de couverture  $P^{actualise}$  qui réplique l'option

Nous remarquons que l'égalité  $P_0=V_0$  est maintenue jusqu'à la maturité de l'option, c'est-à-dire que l'option est bien couverte. En effet, nous remarquons graphiquement que  $P^{actualise}>V$ . Nous pouvons notamment obtenir le graphique d'erreur de couverture  $P^{actualise}-V$ :

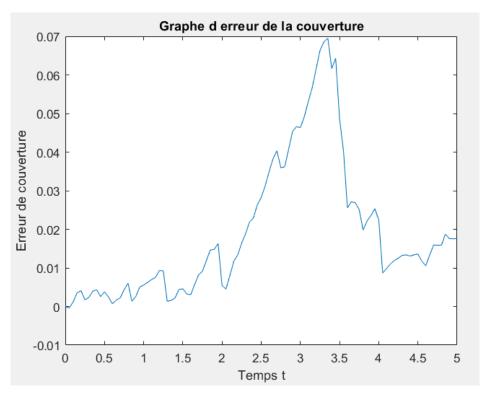


FIGURE 16 – Graphique d'erreur de couverture - Cas d'un portefeuille qui réplique l'option

## III Gamma Hedging

#### 1 Données et notations utilisées

L'objectif de cette partie est de simuler la couverture d'une option V(S,t) à l'aide des options de type C(S,t), des actions  $A_i$  et du cash  $B_i$ . Nous allons utiliser le gamma d'une option défini par :

$$\Gamma_V(S,i) = \frac{e^{-0.5d1^2}}{S\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}$$

Nous utiliserons donc les valeurs suivantes :

$$S_0 = 1, r = 0.05, \sigma = 0.5, N = 100, T_1 = 5, T_2 = 10, dt = \frac{T_1}{N}, K_1 = K_2 = 1.5, N_{mc} = 1000$$

 $T_1$  est la maturité du Call à couvrir et  $T_2$  est la maturité du Call de l'instrument de couverture.

Passons à la simulation du portefeuille de couverture. Nous allons tout d'abord calculer la valeur des options  $V^{BS}$  et  $C^{BS}$  avec la formule de Black and Scholes, pour ensuite pouvoir simuler un portefeuille de couverture  $P_i$ , soit :

$$V^{BS}(S_{i}, t_{i}) = S_{i}N\left(d_{11}\left(S_{i}, t_{i}\right)\right) - K_{1}e^{-r(T_{1}-t_{i})}N\left(d_{21}\left(S_{i}, t_{i}\right)\right)$$

$$C^{BS}(S_{i}, t_{i}) = S_{i}N\left(d_{12}\left(S_{i}, t_{i}\right)\right) - K_{2}e^{-r(T_{2}-t_{i})}N\left(d_{22}\left(S_{i}, t_{i}\right)\right)$$

$$Où \ d_{11}\left(S_{i}, t_{i}\right) = \frac{\ln\left(S_{i}/K_{1}\right) + \left(r + \sigma^{2}/2\right)\left(T_{1} - t_{i}\right)}{\sigma\sqrt{T_{1} - t_{i}}}$$

$$d_{12}\left(S_{i}, t_{i}\right) = \frac{\ln\left(S_{i}/K_{2}\right) + \left(r + \sigma^{2}/2\right)\left(T_{2} - t_{i}\right)}{\sigma\sqrt{T_{2} - t_{i}}}$$

$$d_{21}\left(S_{i}, t_{i}\right) = \frac{\ln\left(S_{i}/K_{1}\right) + \left(r - \sigma^{2}/2\right)\left(T_{1} - t_{i}\right)}{\sigma\sqrt{T_{1} - t_{i}}}$$

$$d_{22}\left(S_{i}, t_{i}\right) = \frac{\ln\left(S_{i}/K_{2}\right) + \left(r - \sigma^{2}/2\right)\left(T_{2} - t_{i}\right)}{\sigma\sqrt{T_{2} - t_{i}}}$$

Introduisons les différentes notations:

- $G_i$ : la quantité des options de type C en  $t = t_i$ .
- $A_i$ : la quantité d'actions qu'il faut avoir pour couvrir l'option (nombre de parts du sousjacent) en  $t = t_i$ .
- $B_i$ : la valeur du cash du portefeuille en  $t = t_i$
- P  $_i$  actualise : la valeur du portefeuille actualisé en  $t=t_i$
- $-V_i$ : le prix de l'option en  $t=t_i$
- $C_i$ : le prix de l'option de type C en  $t = t_i$

De plus, pour cette partie, nous supposons des valeurs initiales en supposant les hypothèses sur les paramètres précisés précedemment, et nous trouvons les valeurs associées suivantes :

$$-G_0 = \Gamma_V (S_0, 0) / \Gamma_C (S_0, 0) = 1.8588$$

$$-A_0 = N (d_{11} (S_0, 0)) - G_0 N (d_{12} (S_0, 0)) = -0.8288$$

$$-B_0 = 1, \text{ choisi arbitrairement}$$

$$-P_0 = A_0 S_0 + G_0 C^{BS} (S_0, 0) + B_0 = 1.2696$$

$$-P_0^{\text{actualise}} = V_0 = 0.3794$$

Nous traçons l'évolution de l'option V et du portefeuille de couverture actualisé  $P^{actualise}$  sur le même système de coordonnées. Nous obtenons le graphique suivant :

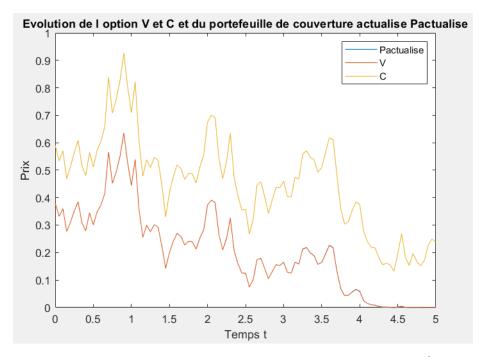


FIGURE 17 – Evolution de l'option V et du portefeuille de couverture  $P^{actualise}$ -Gamma Hedging

Nous remarquons que la courbe d'évolution de  $P^{actualise}$  est superposée à celle de V. En effet, cela se remarque aussi sur l'erreur de couverture que nous obtenons sur le graphique suivant :

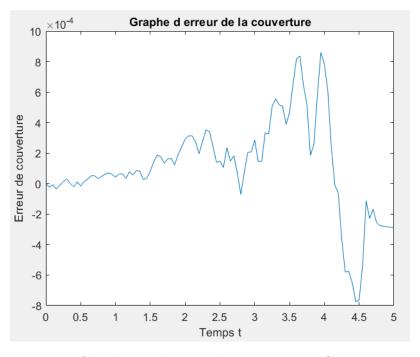


FIGURE 18 – Graphique d'erreur de couverture - Gamma Hedging

Il est à noté que l'erreur de couverture, donnée sur l'axe des ordonnées, est de dimension  $10^{-4}$  soit une erreur trés faible, d'ou cette superposition sur le graphique précédent.

## 2 Étude du P&L - Gamma Hedging

Fonction de répartition du P&L - Gamma Hedging Voici une représentation graphique de la fonction de répartition du P&L pour un gamma hedging :

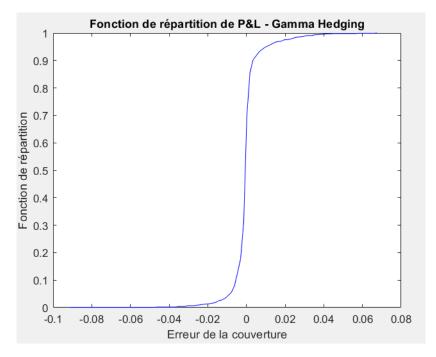


FIGURE 19 – Fonction de répartition du P&L - Gamma Hedging

Fonction de densité du P&L - Gamma Hedging Voici une représentation graphique de la fonction de densité du P&L pour un gamma hedging :

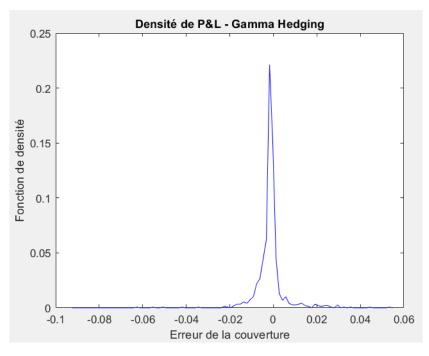


FIGURE 20 – Fonction de densité du P&L - Gamma Hedging

Moyenne arithmétique du P&L - Gamma Hedging Après simulation, nous trouvons le résultat suivant :

```
Espérance du P&L = 
-3.6763e-04
```

FIGURE 21 – Moyenne arithmétique du P&L - Gamma Hedging

#### IV Transaction costs

Nous allons maintenant simuler les portefeuilles de couverture et les différents graphiques aux P&L en considérant un coup de transaction, c'est-à-dire à chaque instant  $\Delta t$ , nous réalisons un achat ou une vente avec un certain coût de transaction.

Nous allons réaliser 4 simulations en modifiant certains paramètres pour pouvoir réaliser des comparaisons :

- Simulation 1 :  $\Delta t = 1/260$ ; K = 100;  $\kappa = 0,001$ .
- Simulation 2 :  $\Delta t = 1/1040$ ; K = 100;  $\kappa = 0,001$ .
- Simulation 3 :  $\Delta t = 1/260$ ; K = 100;  $\kappa = 0,01$ .
- Simulation 4 :  $\Delta t = 1/1040$ ; K = 120;  $\kappa = 0,01$ .

Pour chaque des simulations nous allons tracer plusieurs graphiques et calculer différentes valeurs :

- L'évolution du portefeuille de couverture P et de l'option V dans le même système de coordonnées.
- La fonction de répartition et la fonction de densité du P&L avec coût de transaction.
- La fonction de répartition et la fonction de densité du P&L sans coût de transaction (cf. Partie I)
- L'espérance, i.e. la moyenne arithmétique, du P&L en considérant un coût de transaction.
- La Value at Risk au seuil de 10% en considérant un coût de transaction.
- 1 Résultats de l'évolution du portefeuille de couverture P et de l'option V pour toutes les simulations en considérant un coût de transaction

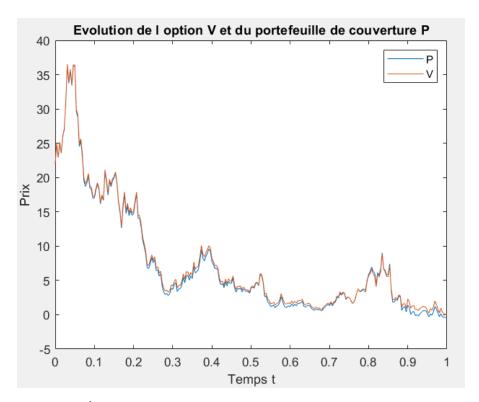


FIGURE 22 – Évolution de P et V avec coût de transaction - Simulation 1

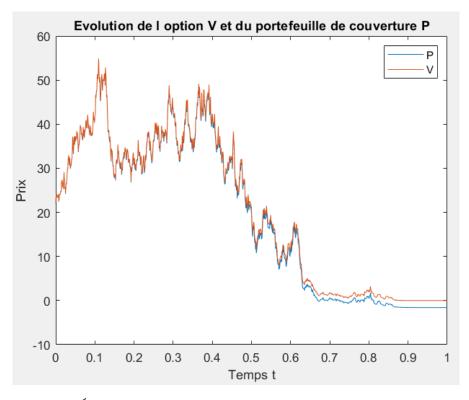


FIGURE 23 – Évolution de P et V avec coût de transaction - Simulation 2

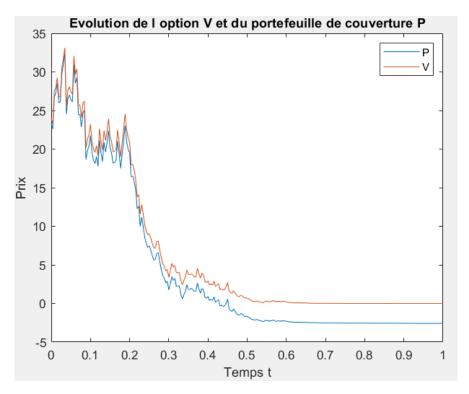


FIGURE 24 – Évolution de P et V avec coût de transaction - Simulation 3

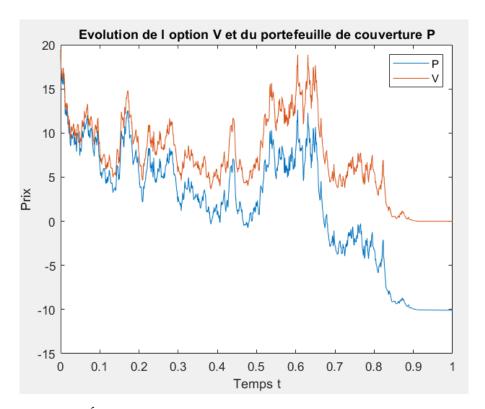


FIGURE 25 – Évolution de P et V avec coût de transaction - Simulation 4

## 2 Résultats obtenus pour la simulation 1

Fonction de répartition du P&L

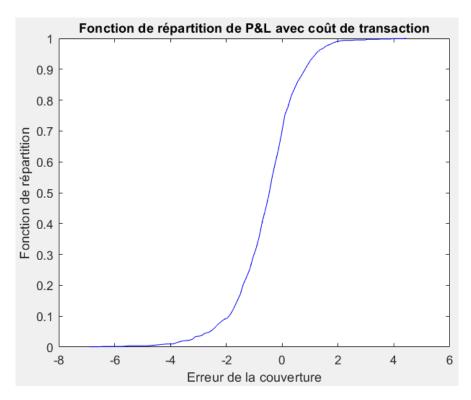


FIGURE 26 – FDR - Simulation 1 - Avec coût de transaction

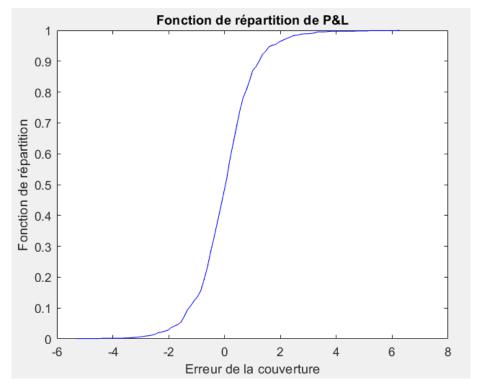


FIGURE 27 – FDR - Simulation 1 - Sans coût de transaction

#### Fonction de densité du P&L

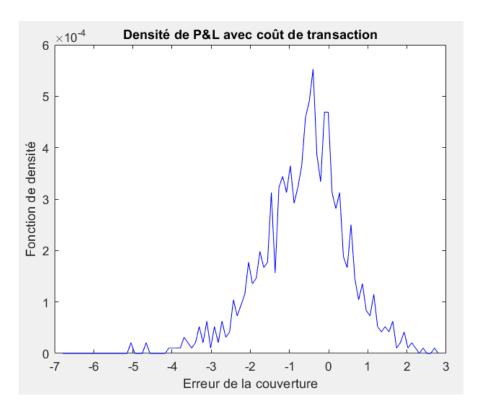


Figure 28 – Fonction densité - Simulation 1 - Avec coût de transaction

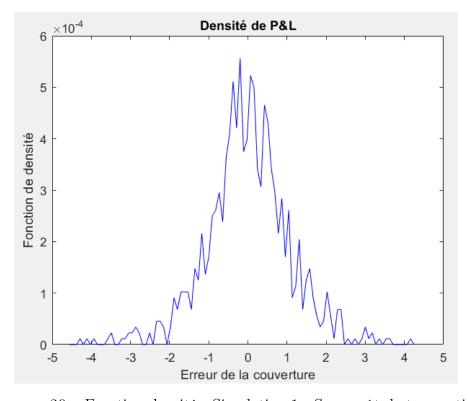


FIGURE 29 – Fonction densité - Simulation 1 - Sans coût de transaction

#### Espérance du PL en considérant un coût de transaction

Nous obtenons le résultat suivant :

FIGURE 30 – Moyenne arithmétique et variance du PL en considérant un coût de transaction - Simulation 1

#### Value at Risk VaR au seuil 10% pour le P&L avec un coût de transaction

Aprés avoir tracé la fonction de répartition du P&L en considérant un coût de transaction, puis repéré sur la courbe le point de coordonnées  $(\gamma, 0.10)$ :

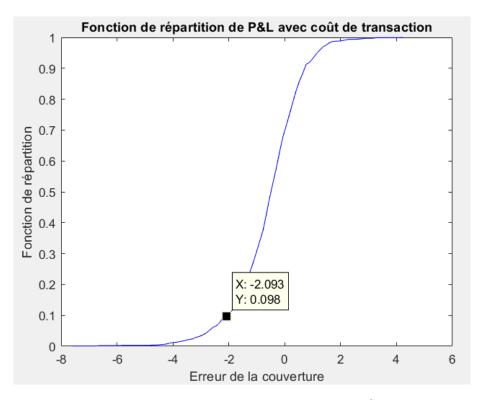


FIGURE 31 –  $VaR_{10\%}$  avec coût de transaction - Simulation 1

Nous obtenons donc : $VaR_{10\%} = -2,093$  euro

## 3 Résultats obtenus pour la simulation 2

Fonction de répartition du P&L

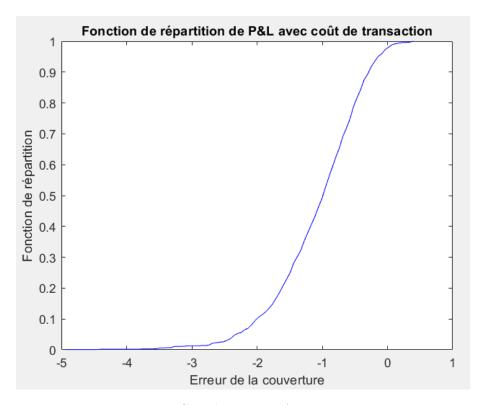


FIGURE 32 – FDR - Simulation 2 - Avec coût de transaction

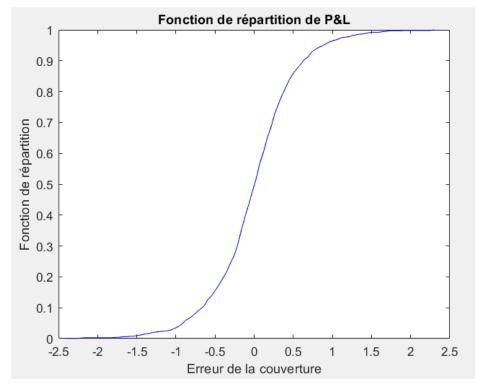


FIGURE 33 – FDR - Simulation 2 - Sans coût de transaction

#### Fonction de densité du P&L

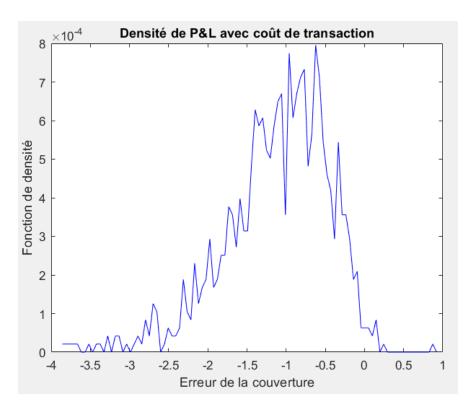


Figure 34 – Fonction densité - Simulation 2 - Avec coût de transaction

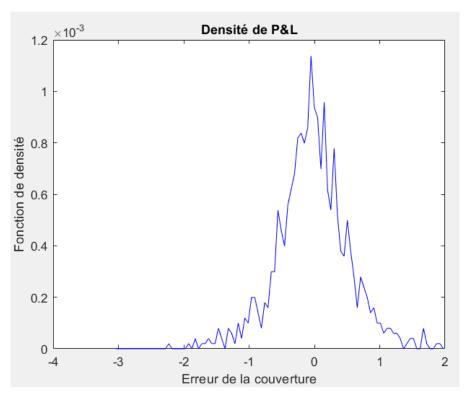


Figure 35 – Fonction densité - Simulation 2 - Sans coût de transaction

#### Espérance du PL en considérant un coût de transaction

Nous obtenons le résultat suivant :

FIGURE 36 – Moyenne arithmétique et variance du PL en considérant un coût de transaction - Simulation 2

#### Value at Risk VaR au seuil 10% pour le P&L avec un coût de transaction

Aprés avoir tracé la fonction de répartition du P&L en considérant un coût de transaction, puis repéré sur la courbe le point de coordonnées  $(\gamma, 0.10)$ :

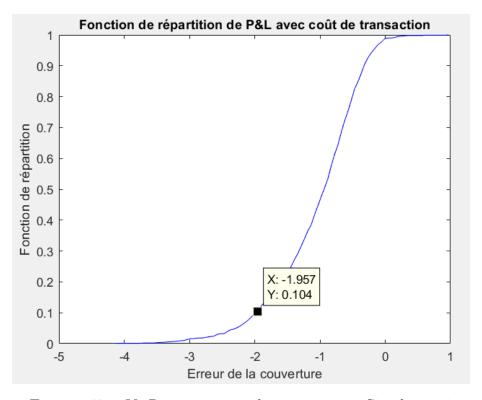


FIGURE 37 –  $VaR_{10\%}$  avec coût de transaction - Simulation 2

Nous obtenons donc : $VaR_{10\%} = -1,957$  euro

#### 4 Résultats obtenus pour la simulation 3

Fonction de répartition du P&L

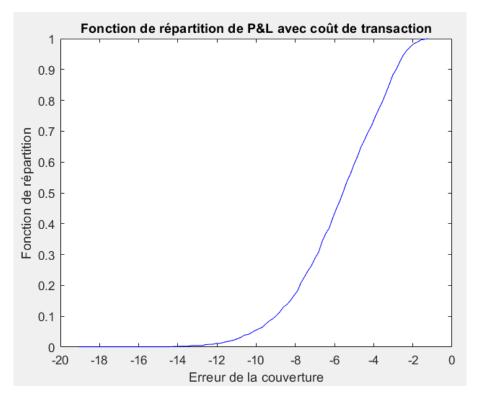


FIGURE 38 – FDR - Simulation 3 - Avec coût de transaction

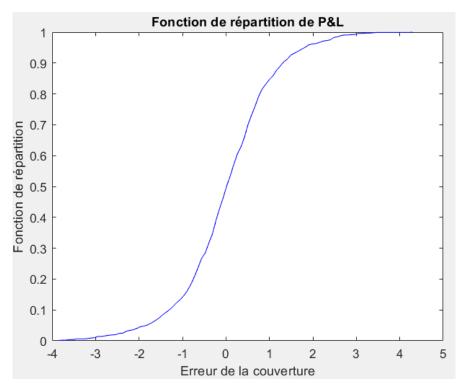


FIGURE 39 – FDR - Simulation 3 - Sans coût de transaction

#### Fonction de densité du P&L

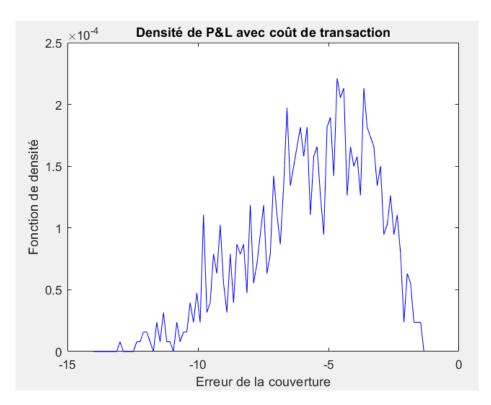


FIGURE 40 – Fonction densité - Simulation 3 - Avec coût de transaction

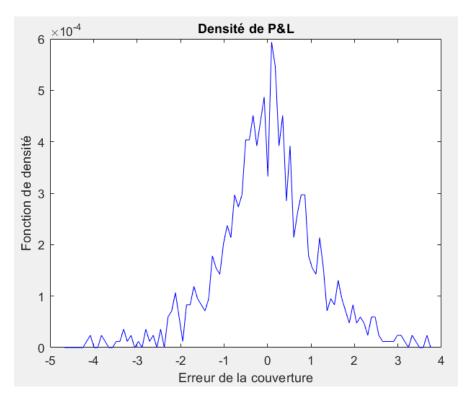


FIGURE 41 – Fonction densité - Simulation 3 - Sans coût de transaction

#### Espérance du PL en considérant un coût de transaction

Nous obtenons le résultat suivant :

FIGURE 42 – Moyenne arithmétique et variance du PL en considérant un coût de transaction - Simulation 3

#### Value at Risk VaR au seuil 10% pour le P&L avec un coût de transaction

Aprés avoir tracé la fonction de répartition du P&L en considérant un coût de transaction, puis repéré sur la courbe le point de coordonnées  $(\gamma, 0.10)$ :

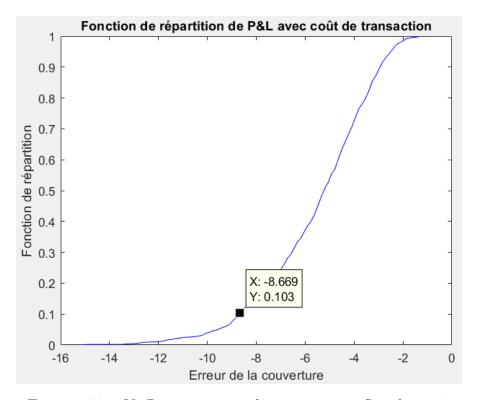


FIGURE 43 –  $VaR_{10\%}$  avec coût de transaction - Simulation 3

Nous obtenons donc : $VaR_{10\%} = -8,669$  euro

# 5 Résultats obtenus pour la simulation 4 Fonction de répartition du P&L

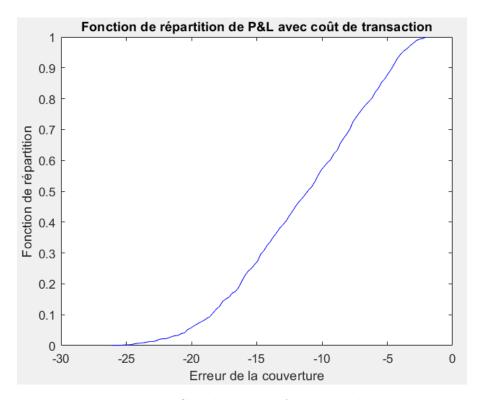


FIGURE 44 – FDR - Simulation 4 - Avec coût de transaction

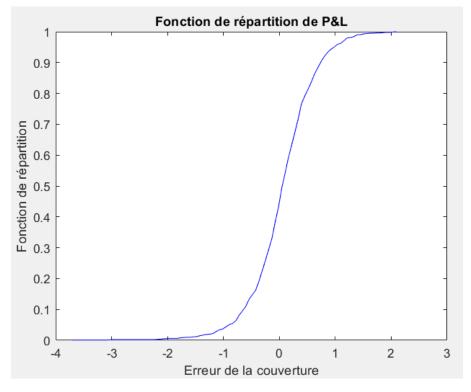


FIGURE 45 – FDR - Simulation 4 - Sans coût de transaction

#### Fonction de densité du P&L

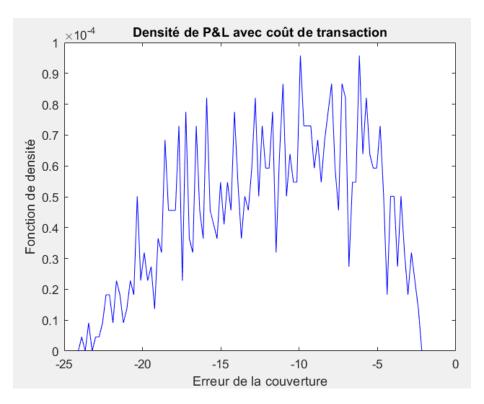


Figure 46 – Fonction densité - Simulation 4 - Avec coût de transaction

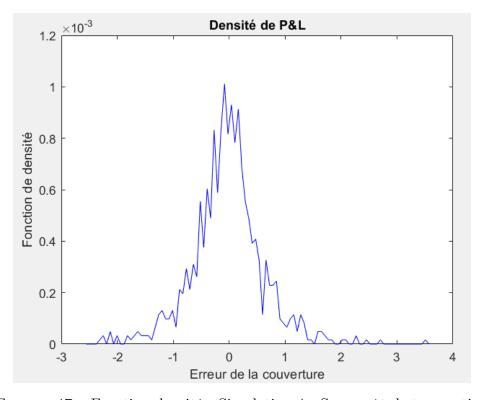


FIGURE 47 – Fonction densité - Simulation 4 - Sans coût de transaction

#### Espérance du PL en considérant un coût de transaction

Nous obtenons le résultat suivant :

FIGURE 48 – Moyenne arithmétique et variance du PL en considérant un coût de transaction - Simulation 4

#### Value at Risk VaR au seuil 10% pour le P&L avec un coût de transaction

Aprés avoir tracé la fonction de répartition du P&L en considérant un coût de transaction, puis repéré sur la courbe le point de coordonnées  $(\gamma, 0.10)$ :

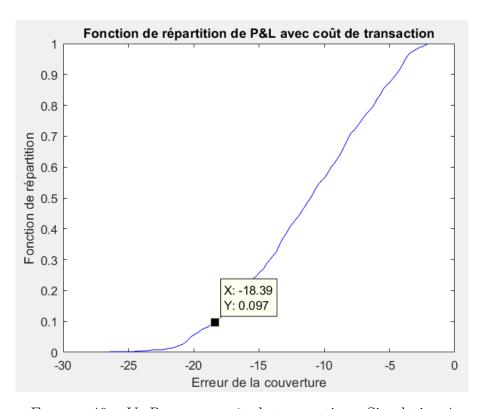


FIGURE  $49 - VaR_{10\%}$  avec coût de transaction - Simulation 4

Nous obtenons donc : $VaR_{10\%} = -18,39$  euro