TD – Chaînes de caractères - Matrices

ING1 – Programmation C
Génie Mathématiques

Inversion de matrice

Réaliser un programme qui permet d'inverser une matrice **A**, avec **A** une matrice dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, si l'inverse existe (dans le cas contraire, un message sera affiché).

Le programme pourra calculer l'inverse selon deux méthodes : la méthode du déterminant, et la méthode de Gauss. Le choix de la méthode se fera lors de l'exécution du programme, au niveau des arguments. La dimension de la matrice à inverser sera également donné en argument du programme, précédé du marqueur -n.
Par exemple, pour exécuter le programme avec la méthode de Gauss pour une matrice de dimension 4, la ligne de commande pourra être :

```
./progInversion -n 4 gauss
```

Le programme demandera la saisie de la matrice **A**. Elle pourra être automatisée par la redirection de flux. Par exemple, le programme pourra être appelé de la façon suivante :

```
cat matriceA.txt | ./progInversion determinant -n 3
```

avec le fichier "matriceA.txt" ayant le contenu suivant :

```
3 4 5
-1 3 6
3 4 -5
```

Pensez à découper votre programme en plusieurs fonctions (saisie, affichage, calcul de déterminant, triangulariation supérieur, ...). Quelques exemples de matrices sont à votre disposition sur AREL.

Méthode du déterminant

Une première méthode pour calculer l'inverse d'une matrice **A** inversible se fait par le déterminant $det(\mathbf{A})$ et la comatrice $com(\mathbf{A})$ avec la formule suivante :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{det(\mathbf{A})}\,{}^{t}com(\mathbf{A})$$

Le calcul du déterminant peut se faire de façon récursive, suivant une ligne i (ou une colonne) :

$$det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}det(\mathbf{A}_{ij})$$

avec $\mathbf{A}_{ij}$ la matrice **A** privée de la ligne i et la colonne j.

Méthode de Gauss

Une autre méthode pour calculer l'inverse d'une matrice est l'algorithme du pivot de Gauss. Le principe consiste à appliquer sur une matrice identité (de même dimension que la matrice **A**) la même suite d'opérations élémentaires qui permettra de transformer la matrice **A** en matrice identité. Une fois la matrice **A** transformée en matrice identité, la matrice identité qui a subi les mêmes opérations sera l'inverse de **A**.

Les opérations élémentaires qui permettent de transformer la matrice **A** en forme triangulaire supérieur, puis en matrice identité sont :

dilatation : $L_i \leftarrow kL_i$, avec L_i une ligne de la matrice **A** et k un réel ;

transvection : $L_i \leftarrow L_i + kL_j$, avec L_i et L_j deux lignes de la matrice **A** et k un réel.

Exemple :

$$\begin{array}{r|c}
\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\[2ex]
\begin{array}{r}L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1\end{array} \quad \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\\[2ex]
L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \quad \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 1\end{bmatrix}\\[2ex]
L_3 \leftarrow \frac{-1}{4}L_3 \quad \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 3/4 & -1/4 & -1/4\end{bmatrix}\\[2ex]
\begin{array}{r}L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3\\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3\end{array} \quad \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-1/2 & 1/2 & 1/2\\ -1/4 & 3/4 & -1/4\\ 3/4 & -1/4 & -1/4\end{bmatrix}\\[2ex]
L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-1/4 & -1/4 & 3/4\\ -1/4 & 3/4 & -1/4\\ 3/4 & -1/4 & -1/4\end{bmatrix}
\end{array}$$