UNIVERSITETET I STAVANGER

INSTITUTT FOR MATEMATIKK OG NATURVITENSKAP

MAF300 – Numerisk Modellering

Oppgaven skal som e-post leveres som en Maple **.mw** *skript til underviseren,* **senest onsdag 15. november 2017***, dersom ikke annet blir avtalt (***eva.rauls@uis.no***). Studentene får hver sin oppgave, som skal løses selvstendig. Alle hjelpemidler er tillatt, herunder også Maple-programmer fra løsningsforslag og forelesningsnotater for emnet.*

Programmene du leverer skal utstyres med utdypende kommentarer som klart viser virkemåten, og du skal dokumentere betydningen til de forskjellige variablene som benyttes. Du skal også kommentere resultatene du oppnår. Figurene bør ha fornuftig beskriftning på koordinataksene ("labels"), og hvis flere kurver plottes i samme figur, bør kurvene identifiseres ("legend").

Husk å oppgi hvilken oppgave du løser!

Innleveringsoppgave 2B

I denne oppgaven skal vi se på en pendelkule som henger i en elastisk men ubøyelig masseløs stang og som kan svinge i xy-planet. Vi velger origo i opphengspunktet. Kraften på pendelkulen er summen av en elastisk sentralkraft, rettet mot opphengspunktet, og tyngdekraften, som vi lar peke i den negative y-retningen. Newton's bevegelsesligninger kan da skrives:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -\frac{\partial V}{\partial x}\,, \\
m\ddot{y} &= -\frac{\partial V}{\partial y} - mg\,.
\end{aligned}
$$

Her er m partikkelens masse, $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ og den potensielle energien for stangen er $V(r) = \frac{1}{2}k(r-L)^2$, der $r = \sqrt{x^2+y^2}$ og $L = 1\,\mathrm{m}$ er lengden på stangen når den ikke utsettes for krefter. Vi ser av disse ligningene at løsningen bare avhenger av forholdet $k/m = \omega^2$.

a) Vi skal først se på tilfellet der pendelen bare beveger seg vertikalt, dvs $x(t) = 0$. Sett opp bevegelsesligningen i y-retningen for dette tilfellet. Du kan bruke Maple, eller regne for hånd.

b) Finn likevektslengden til pendelen i dette tilfellet, L_R, og vis, enten med Maple eller for hånd, at løsningen av bevegelsesligningen er at pendelkulen svinger opp og ned om likevektspunktet med vinkelfrekvensen ω.

   Vi skal så løse de koblede ligningene for x og y numerisk. Vi ser at systemet vårt har to naturlige vinkelfrekvenser, ω og $\Omega = \sqrt{g/L}$.

c) Tilpass prosedyren for et enkeltskritt med Runge–Kutta-metoden fra forelesningene til dette problemet. Forklar modifikasjonene du gjør. Test prosedyren ved å vise at dersom det starter i ro med $x(0) = 0$ og $y(0) = -L_R$, så blir pendelkulen hengende i dette punktet. [Hint: Siden V(r) er et sentralpotensial, behøver du bare å modifisere ligningen for $\ddot{y}$. Dette kan gjøres ved å endre uttrykkene for variablene `ky1, ky2, ky3` og `ky4` i Runge–Kutta prosedyren.]

d) Løs bevegelsesligningene for x og y numerisk. Velg $\omega = \Omega$, og anta at pendelen startes fra ro med lengden L og en startvinkel $\phi = \pi/6$ (30°). Plott pendelkulens bane. [Det er ingen grunn til å beregne det angulære momentet i dette tilfellet, det er ikke bevart.]

e) Gjenta beregningene for $\omega = 3\Omega$ og $\omega = \Omega/3$, og plott resultatene. Hva slags bevegelser får du i grensene $\omega \gg \Omega$ and $\omega \ll \Omega$?

f) Vi lar så pendelen henge rett ned i likevekt, så $y(0) = -L_R$. Vi husker fra forelesningene at dersom den gis en horisontal starthastighet $v_0 = v0 := 2 * sqrt(g/L_R)$, får den nok energi til akkurat å svinge helt rundt. Skjer dette også for den elastiske pendelen med $\omega = \Omega$? Hva hvis du i stedet starter uten strekk i staven, dvs. med $y(0) = -L$? Forklar forskjellen i resultatene, og plott pendelbanen i begge tilfeller. [Dette kan kreve mange tidsskritt].