KAIST 전산학과 최광무

(개요) Regular expression(정규식)은 **regular 언어**를 표현하는(denote) 식(expression)이다.

2장에서 DFA를 이용하여 Regular 언어를 정의하고, DFA를 확장하여 **확장된 오토마타**까지 정의하였다. 3장에서는 regular expression(정규식)을 정의하고 regular expression이 regular 언어를 표현하는 또 다른 방법이라는 것을 **증명**한다.

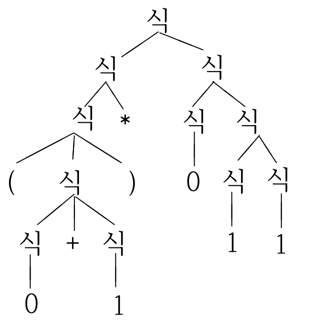
오토마타가 상태 변환을 통해 언어를 **간접적**으로 정의함에 비해, regular expression은 정의하는 언어를 **직접** 식으로 표현하므로 직관적으로 그 식이 정의하는 언어를 이해하기 쉬운 장점이 있다.

(**정의 1**) Regular expression은 기본문자 Σ에서(over) 정의한다.

Basis (1) 기본문자($a \in \Sigma$)는 식(regular expression)이다.
(2) ε은 식(regular expression)이다.
(3) ∅은 식(regular expression)이다.

Recursion (1) 식 + 식은 식(regular expression)이다.
(2) 식 식은 식(regular expression)이다.
(3) 식*는 식(regular expression)이다.
(4) (식)은 식(regular expression)이다.

(예 1) Regular Expression $(0+1)^*011$ over {0, 1}



(**정의 2**) 언어와 언어의 연산(binary operation), 합연산(union: $+$), 곱연산(concatenation: $\cdot$), 반복곱(exponent: ^{n}), 반복곱의 합(closure: *)을 아래와 같이 정의한다.

$+$, $\cdot$: $2^{\Sigma^*} \times 2^{\Sigma^*} \rightarrow 2^{\Sigma^*}$. $\quad$ ^{n}, *: $2^{\Sigma^*} \rightarrow 2^{\Sigma^*}$.

L_1, L_2, $L \in 2^{\Sigma^*}$라 하자.

$$L_1 + L_2 \stackrel{\text{def}}{=} L_1 \cup L_2.$$

$$L_1 \cdot L_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ xy \in \Sigma^* \mid x \in L_1, y \in L_2 \right\}.$$

$$L^n \stackrel{\text{def}}{=}_{\mathrm{B}} \{\epsilon\} \qquad \text{for } n = 0,$$

$$L^n \stackrel{\text{def}}{=}_{\mathrm{R}} L \cdot L^{n-1} \text{[1]} \qquad \text{for } n \geq 1.$$

1) $\cdot$은 associative하므로 $L^n \stackrel{\text{def}}{=}_{\mathrm{R}} L^{n-1} \cdot L$으로 정의하여도 무관하다. 이를 실제로 확인하여 보아라.

$$L^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in N_0} L^i.$$

(**정의 3**) Σ에서 정의된 regular expression E가 **표현하는**(denote) 하는 언어, $L(E) \subseteq \Sigma^*$.

Basis (1) 정규식 기본문자($a \in \Sigma$)는 언어 $\{a\}$를,
(2) 정규식 ε은 언어 $\{\epsilon\}$를,
(3) 정규식 ∅은 언어 { }를 각각 나타낸다.

Recursion (1) 정규식 $E_1 + E_2$는 언어 $L(E_1) \cup L(E_2)$를,
(2) 정규식 $E_1 E_2$는 언어 $L(E_1) \cdot L(E_2)$를,
(3) 정규식 E^*는 언어 $L(E)^*$를,
(4) 정규식 (E)는 언어 $L(E)$를, 각각 나타낸다.

(**예 2**) Regular Expression $(0+1)^*011$ over {0, 1}

$$\begin{aligned} L((0+1)^*011) &= L((0+1)^*) \cdot L(011) \\ &= L((0+1))^* \cdot L(0)L(11) \\ &= (L(0)+L(1))^* \cdot \{0\} \cdot L(1) \cdot L(1) \\ &= (L(0) \cup L(1))^* \cdot \{0\} \cdot \{1\} \cdot \{1\} \\ &= (\{0\} \cup \{1\})^* \cdot \{011\} \\ &= \{0,1\}^* \cdot \{011\} \end{aligned}$$

(**부분정리 1**) 임의의 DFA가 받아들이는(accept) 언어와 같은 언어를 표현하는(denote) regular expression이 존재한다. (DFA ⇒ RE)

(증명) 특정 명제를 증명하기 위하여, 명제를 **더 일반화**된 형태로 확장하면 더 쉽게 증명할 수 있다. DFA 상태가 n개라면 각 상태에 자연수로 번호를 붙인다. 즉 Q = $\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$. 이때 상태 q_i에서 시작하여 상태 q_j에서 끝나는 언어 L_{ij}를 정의한다.

$$L_{ij} = \left\{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_i, x) = q_j\right\}$$

1과 n사이의 **모든** i와 j에 관하여($1 \le \forall i, j \le n$), n^2개의 언어 L_{ij}를 표현하는 regular expression E_{ij}, n^2개를 모두 찾을 수 있다면, 우리가 원하는 regular expression은 $E_{시작,최종_1} + E_{시작,최종_2} + \cdots + E_{시작,최종_k}$로 표현할 수 있으므로 우리는 이 문제를 풀었다고 할 수 있다.

상태 q_i에서 시작하여 상태 q_j에서 끝나는 언어 L_{ij}를 표현하는 regular expression E_{ij}를 찾는 **방법**(algorithm, proof)을 생각하여 보자. 상태 q_i에서 상태 q_j사이에 방문하는 중간 상태에 아무 제한이 없으면 L_{ij} 혹은 E_{ij}를 직접 구하기는 어렵다. 그래서 상태 q_i에서 상태 q_j사이에 방문하는 **중간상태에 제한**을 준다. 즉 특정 수 k보다 **작거나 같은 수**의 번호를 가진 상태만 중간상태로 허용하는 제한을 준다.

$$L_{ij}^k = \left\{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_i, x) = q_j, x = a_1 a_2 \cdots a_m, \right.$$
$$\left. 1 \le \forall l < m : \delta^*(q_i, a_1 \cdots a_l) = q_p \Rightarrow p \le k \right\}$$

즉 L_{ij}^0는 중간상태를 **허용하지 않고** 상태 q_i에서 상태 q_j로 직접 가는 경우이므로 상태변화함수 $\delta(q_i, a) = q_j$를 만족하는 a를 L_{ij}^0가 가진다.

$$L_{ij}^0 \overset{\text{def}}{=}_{\text{B}} \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\}$$

우리가 마지막에 구하고 싶은 L_{ij}는 DFA 상태가 n개라면 L_{ij}^n이다.

초기조건과 최종조건을 구하였으므로 L_{ij}^{k-1}를 이용하여 L_{ij}^k를 구하는 recursive 과정만 해결하면 된다.

$$L_{ij}^k \overset{\text{def}}{=}_{\text{R}} L_{ij}^{k-1} \cup L_{ik}^{k-1} \cdot (L_{kk}^{k-1})^* \cdot L_{kj}^{k-1} \qquad \text{단 } 1 \le k \le n.$$

상태 q_i에서 상태 q_j로 가면서 중간상태로 k보다 **작거나 같은 수**의 번호를 가진 상태만 허용하는 언어 L_{ij}^k는 (1) 상태 q_i에서 상태 q_j로 가면서 중간에 $k-1$보다 **작거나 같은 수**의 번호를 가진 상태만 허용하거나(L_{ij}^{k-1}) **또는**($\cup$) (2) i) 상태 q_i에서 **새로 허용된** 중간 상태 q_k로 가면서 중간에 $k-1$보다 **작거나 같은 수**의 번호를 가진 상태만 허용**하고**($\cdot$), ii) 상태 q_k에서 상태 q_k로 다시 돌아오면서 중간에 $k-1$보다 **작거나 같은 수**의 번호를 가진 상태만 허용하는 일을(L_{kk}^{k-1})를 여러 번(*)허용($(L_{kk}^{k-1})^*$)**하고**($\cdot$), iii) 상태 q_k에서 상태 q_j로 가면서 중간에 $k-1$보다 **작거나 같은 수**의 번호를 가진 상태만 허용한다.

(**부분정리 2**) 임의의 regular expression이 표현하는(denote) 언어와 같은 언어를 받아들이는(accept) 오토마타가 존재한다. (RE ⇒ ε-NFA)

(증명) Regular expression을 (정의 1)에서 recursive하게 정의하였으므로, 그 정의에 그대로 오토마타를 정의하면 된다.

Basis
1) 정규식 $a \in \Sigma$가 표현하는 언어 $\{a\}$를 받아들이는 오토마타
2) 정규식 ε가 표현하는 언어 $\{\epsilon\}$를 받아들이는 오토마타
3) 정규식 $\varnothing$가 표현하는 언어 $\{\ \}$를 받아들이는 오토마타

Recursion
1) 정규식 식 + 식이 표현하는 언어 L(식)$\cup L$(식)을 받아들이는 오토마타
2) 정규식 식 식이 표현하는 언어 L(식)$\cdot L$(식)을 받아들이는 오토마타
3) 정규식 식*이 표현하는 언어 L(식)*을 받아들이는 오토마타
4) 정규식 (식)이 표현하는 언어 L(식)을 받아들이는 오토마타

구체적인 내용은 교과서 혹은 강의 TP 참조.

(중요정리 1) 다음 명제는 모두 논리적으로 같다.
(1) 언어 L은 regular이다.
(2) 언어 L을 받아들이는(accept) 오토마타가 존재한다.
(3) 언어 L을 표현하는(denote) regular expression이 존재한다.