KAIST 전산학과 최광무

Recursion은 자연수와 관련된 **무한한 집합** 또는 **구조**를 **유한하게 정의**하거나 **증명**하는데 사용되는 매우 중요한(사실은 **유일한**) 방법(**infinite wisdom**)이다.

이는 **무한한 자연수**를 정의함으로서 시작된다[1]. (1)
Basis 0은 **자연수**이다.
Recursion 어떤 수가 **자연수**이면 그것보다 하나 더 큰 수도 **자연수**이다.

자연수를 정의하는 위의 구조는 아주 전형적인 recursion의 구조를 가지고 있으며 이를 아래와 같이 **수학기호**를 이용하여 정의할 수 있다.

자연수집합 N을 수학기호를 이용하여 아래와 같이 정의된다.
Basis $0 \in N$.
Recursion $If\ n \in N,\ then\ n{+}{+} \in N$[2].
Recursion' $n \in N \Rightarrow n{+}{+} \in N$.

이 정의는 (1) 자연수의 **시작**인 0(중학교에서는 그 시작이 1이었다[3])이 **자연수**임을 기술하는 **basis**와 (2) n이 **자연수 일 때 그 다음 수** $n+1$**이 자연수임**을 기술하는 **recursion**의 두 개의 구조로 이루어져 있다. 특히 recursion은 1) 가정이 사실이면 결론도 사실이다(가정 ⇒ 결론)라는 전형적인 연역(deduction)구조인 implication(⇒)를 가지면서, 2) **가정**에 정의하고자 하는 **자연수집합** N이 들어있다는 연역적(deduction)인 사고가 아닌 **비연역적**(non-deductive; recursive) 구조를 가지고 있다. 그래서 이를 **recursive 정의**하고 부른다.

이를 좀 더 **일반화**하여 보자.

집합 S는 다음과 같이 정의된다. (2)
Basis $\exists k \geq 1:\ s_1, s_2, \cdots, s_k \in S$.
Recursion $(\exists n \geq 1:\ x_1, x_2, \cdots, x_n \in S) \Rightarrow (f(x_1, x_2 \cdots, x_n) \in S)$.

이 때 함수 f가 중요하며, 자연수의 경우 n은 1이고 함수 f는 다음 수이다.

교과서 예제 1.19 **뿌리 깊은 나무**[4](rooted-tree)의 정의
Basis 노드 하나만 있는 것도 그 노드를 뿌리로 하는 **뿌리 깊은 나무**이다.
Recursion $T_1, T_2, \cdots, T_n$이 **뿌리 깊은 나무**라고 하자. 새로운 노드 r에서 각 **뿌리 깊은 나무** $T_1, T_2, \cdots, T_n$의 뿌리 $r_1, r_2, \cdots, r_n$로 가는 edge를 연결하면 노드 r을 뿌리로 하는 새로운 **뿌리 깊은 나무**가 정의된다.

1) Peano axiom
2) $n{+}{+} = n+1$이며, Peano axiom에서는 아직 +연산이 정의되지 않아 다음 수 ++를 사용하였다.
3) 셀 수 있는 무한(countably infinite) 집합 $\{1, 2, 3, \cdots\}$과 $\{0, 1, 2, \cdots\}$은 서로 동동(≃; isomorphism)하므로, 두 가지 정의가 모두 옳다.
4) Rooted tree를 뿌리 깊은 나무로 번역한 것이 조금 어색할 수도 있으나, 세종대왕에 한글창제 큰 뜻을 기리는 글쓴이에 해학(諧謔)으로 이해해주기 바란다.

위의 정의를 좀 더 수학적으로 세련된 표현으로 정의해 보자. 그 이전에 **뿌리 깊은 나무**라는 **틀**을 미리 정의하는 것이 수학적으로 더 세련된 방법이다.

뿌리 깊은 나무 $T = (V, E, r)$

i) V는 노드의 집합,

ii) E는 에지의 집합, 단 $(u,v) \in E$는 노드 $u \in V$에서 노드 $v \in V$로 가는 에지다,

iii) 특별한 노드 $r \in V$은 뿌리다.

Basis $(\{v\}, \varnothing, v)$는 뿌리 깊은 나무다.

Recursion 자연수 $n(n \geq 1)$에서 $T_1 = (V_1, E_1, r_1)$, $T_2 = (V_2, E_2, r_2)$, $\cdots$, $T_n = (V_n, E_n, r_n)$ 이 뿌리 깊은 나무라고 하면, 새로운 노드 $r \notin V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$을 더하여, $T = (V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n \cup \{r\},\ E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \cup \{(r,r_1),(r,r_2),\cdots,(r,r_n)\},\ r)$가 새로운 뿌리 깊은 나무이다.

Recursion' 자연수 $n(n \geq 1)$에서 $T_1 = (V_1, E_1, r_1)$, $T_2 = (V_2, E_2, r_2)$, $\cdots$, $T_n = (V_n, E_n, r_n)$ 이 뿌리 깊은 나무라고 하면, 새로운 뿌리 깊은 나무 $T = (V, E, r)$는 아래로 정의한다.

i) $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n \cup \{r\}$,

ii) $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \cup \{(r,r_1),(r,r_2),\cdots,(r,r_n)\}$,

iii) $r \notin V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$.

교과서 예제 1.20의 식의 정의

Basis 수와 문자는 식이다.

Recursion 식 + 식, 식 - 식, 식 × 식, 식 ÷ 식, (식)[5]은 식이다.

Recursive 정의의 유한성과 무한성

유한한 Recursive 정의로 **무한집합**을 정의할 수 있다.[6]

Recursive하게 정의된 무한집합이 만족하는 성질의 증명

가정 집합 S가 식(2)에 의하여 정의된 집합이다.

결론 $\forall x \in S,\ p(x)$.

증명 Basis $p(s_1), p(s_2), \cdots, p(s_k),\ k \geq 1$을 증명한다.

Recursion $p(x_1), p(x_2), \cdots, p(x_n),\ n \geq 1 \Rightarrow p(f(x_1, x_2, \cdots, x_n))$을 증명한다.

(정의) $|A| = |B| \overset{\text{def}}{=} A \cong B$.

두 집합이 동등할 때($\cong$) 두 집합이 **크기(cardinality)**가 같다고 정의한다.

무한집합의 동등

5) 결론에 식을 바로 씀으로서 recursive 가정(…이 식이면)이 생략되었음에 주의하라.

6) Recursive 정의는 사실 무한한 집합을 유한하게 정의하는 유일한 방법이다. 이를 유한한 recursive 정의의 **무한한 지혜(infinite wisdom)**라고 부르기도 한다.

(예 1) 0부터 시작하는 자연수 집합 $N_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$과 1부터 시작하는 자연수 집합 $N_1 = \{1, 2, 3, \cdots\}$을 생각하자. $N_1 \subset N_0$이지만 $N_1 \cong N_0$[7])이다.

(예 2) 자연수 집합 $N = \{0, 1, 2, \cdots\}$과 짝수 집합 $E = \{0, 2, 4, \cdots\}$을 생각하자. $E \subset N$이지만 $E \cong N$이다.

(예 3) 자연수 집합 $N = \{0, 1, 2, \cdots\}$과 자연수의 순서쌍 집합 $N \times N = \{(i, j) | i, j \in N\}$을 생각하자. $N \cong N \times N$[8])이다.

(정의) 자연수의 부분집합과 동등한 집합을 **셀 수 있는**(countable) 집합이라 정의하고, 그렇지 않으면 **셀 수 없**는(uncountable) 집합 이라고 정의한다.

(사실) **셀 수 있는** 집합은 (셀 수 있는)**유한**집합과 **셀 수 있는 무한**집합 두 가지 종류가 있다.

(정리) 모든 **셀 수 있는** (무한)집합은 **자연수**에 부분집합과 **동등**하다.

(사실) 모든 **셀 수 있는** (무한)집합은 **자연수로 번호** 매길 수(**enumerable**[9])) 있다.

$$A = \{a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$$

(의문) **셀 수 없는 무한**집합이 있는가?

(정리) 자연수의 **부분집합의 집합**(**멱집합**; **Power set**)이 **셀 수 없는** 무한이다.

(사실) 자연수의 **멱집합**은 **무한이진수**(**infinite binary string**) **집합**과 동등하다.

(가정) 집합 $F = 2^N \cong \{f | \ f: N \to \{0,1\}\}$[10])은

(결론) **셀 수 없는 무한**이다.

(증명) Cantor에 대각선화 주장(Cantor's diagonal argument, 1812)[11])

집합 F가 **셀 수 있는 무한**이라고 **가정**하자.

그러면 집합 F의 원소 들은 자연수도 번호 매길 수 있을 것이다.

$$F = \{f_0, f_1, \cdots, f_n, \cdots\}$$

$$f_0 = (a_{00}, a_{01}, \cdots, a_{0n} \cdots), \ \forall i \in N, \ f_0(i) = a_{0i} \in \{0, 1\} \leftrightarrow \{i \in N | f_0(i) = a_{0i} = 1\}.$$

$$f_1 = (a_{10}, a_{11}, \cdots, a_{1n} \cdots), \ \forall i \in N, \ f_1(i) = a_{1i} \in \{0, 1\} \leftrightarrow \{i \in N | f_1(i) = a_{1i} = 1\}.$$

$\cdots$

$$f_n = (a_{n0}, a_{n1}, \cdots, a_{nn} \cdots), \ \forall i \in N, \ f_n(i) = a_{ni} \in \{0, 1\} \leftrightarrow \{i \in N | f_n(i) = a_{ni} = 1\}.$$

$\cdots$

여기서 대각선화(**diagonalization**) 함수 $f = (a_{00}, a_{11}, \cdots, a_{nn} \cdots)$와 그것의 **부정** $\overline{f}$를 생각하자.

---

7) 중학교에서는 1부터 자연수를 대학교에서는 0부터 자연수를 정의해도 되는 이유이다.
8) 이 때 짝짓기 함수 f는 무엇인가? $N \subset N \times N$인가? $|N| < |N \times N|$인가? $|N| = |N \times N|$인가?
9) RE(Recursively Enumerable)이라고 정의하며, 8장 Turing Machine에서 배운다.
10) 고등학교 때 배운 무한수열 $\{a_n\}$은 자연수 N을 정의역으로, 실수 R을 치역으로 하는 함수이다. 즉 $a: \ N \to R$이다.
11) Cantor에 대각선화 증명법으로 무리수 $\sqrt{2}$나 π를 포함하는 실수 R이 셀 수 없는 무한임을 증명할 수 있게 됐다.

$\overline{f} = (\overline{a_{00,}}\, \overline{a_{11,}}\, \cdots, \overline{a_{nn}}\, \cdots)$, 단 $\forall\, i \in N,\ \overline{a_{ii}} = 0,$ if $a_{ii} = 1;$ $\overline{a_{ii}} = 1,$ if $a_{ii} = 0.$

$\forall\, i \in N,\ \overline{f} \neq f_i$이어서 $\overline{f} \not\in F$이지만, $\overline{f}$는 집합 F의 원래 정의에 맞는 함수 이므로 $\overline{f} \in F$이어야 한다.

따라서 집합 F가 셀 수 있는 무한이라는 증명 초기의 **가정**이 **거짓**이다.

따라서 집합 F는 셀 수 있는 무한이 아니다. 즉 집합 F는 **셀 수 없는 무한**이다.

집합 크기(cardinality)의 종류

- 셀 수 있는(countable)
  - 유한(finite)
  - 셀 수 있는 무한(countably infinite)
- 셀 수 없는(uncountable)
  - 셀 수 없는 무한(uncountably infinite)