KAIST 전산학과 최광무

오토마타를 차츰 확장해보자. 기존에 2. Finite State Automata에서 정의한 오토마타를 **결정적**(**Deterministic**) 오토마타(짧게는 **DFA**)라고 부르고 이를 다시 정의하여 보자.

(**정의** 1) **결정적 오토마타**(**Deterministic** Finite State Automata; DFA) $M_{DFA} = (Q, \Sigma, \delta_{DFA,} q_0, F)$는 아래와 같이 정의한다.

(1)	Q	상태 집합
(2)	Σ	입력문자 집합
(3)	$\delta_{DFA}: Q \times \Sigma \rightarrow Q$	상태변화함수 집합
(4)	$q_0 \in Q$	처음 상태
(5)	$F \subseteq Q$	끝나는 상태 집합

오토마타를 확장하는 작업은 다음 세 가지로 이루어진다.

(A) 상태변화함수 δ을 **확장**한다.

$$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q \Rightarrow \quad \delta^i: Q \times \Sigma^i \rightarrow 2^Q \Rightarrow \quad \delta^*: Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$$

(B) 확장한 오토마타 클래스[1]가 확장 전 오토마타 클래스를 포함하는 **확장클래스**(super class)임을 밝힌다.

(C) 확장한 오토마타와 **같은 일을 하는** 확장하기 전의 형태인 오토마타가 존재함을 증명하여 확장한 오토마타 클래스와 확장하기 전 오토마타 클래스가 **같은 일을 하는 클래스**임을 밝힌다.

2.1.1, 부분함수를 허용하여 보자.

(해결책) 죽은 상태(dead state)를 더한다.

상태변화함수 δ가 전체함수(total function) 이어야하나, 이를 부분함수(partial function)도 허용하도록 확장하여 보자. 즉 어떤 상태 $q \in Q$와 입력문자 $a \in \Sigma$에서 상태변화함수 $\delta(q,a)$의 값이 **없는** 경우이다. 이 경우 현 상태 $q \in Q$에 올 때까지 오토마타가 읽은 문자열이 $x \in \Sigma^*$라면 현재문자($a \in \Sigma$)을 본 다음에 어떤 문자열($\forall y \in \Sigma^*$)이 오른쪽에 와도 전체문자열($xay \in \Sigma^+$)은 오토마타가 받아들이는 언어가 아니므로($xay \notin L(M)$) 오토마타 동작을 멈추고 **false**를 보고한다.

이 확장을 상태변화함수 δ로 표시하면 아래와 같다.

$$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q \cup \{\varnothing\}.$$

즉 상태변화함수 $\delta(q,a)$ 값이 없는 경우를 $\delta(q,a) = \varnothing$로 표현한다.

(**정의** 2) 부분함수를 허용하는 오토마타 $M_{부분} = (Q, \Sigma, \delta_{부분}, q_0, F)$ 는 아래와 같이 정의한다.

(1), (2), (4), (5)의 Q, Σ, q_0, F는 M_{DFA}의 정의와 같다. 다만

(3) $\delta_{부분}: Q \times \Sigma \rightarrow Q \cup \{\varnothing\}$ 상태변화함수만이 다르다.

---

1) 오토마타는 집합이 아니므로, 오토마타 집합이나 불러도 좋으나, 앞으로 나올 언어 클래스와 형평을 고려하여 오토마타 클래스라고 부른다.

(**정의 3**) $\mathbb{M}_{\mathrm{DFA}}$는 M_{DFA}전체의 집합이고, $\mathbb{M}_{부분}$은 $M_{부분}$전체의 집합이라 하자. $\mathbb{M}_{\mathrm{DFA}}$를 deterministic 오토마타 클래스, $\mathbb{M}_{부분}$을 부분함수를 허용하는 deterministic 오토마타 클래스라 부른다.

(**쉬운정리(Fact)**[2] 1) $\mathbb{M}_{\mathrm{DFA}} \subsetneq \mathbb{M}_{부분}$.

모든 $M_{DFA} \in \mathbb{M}_{\mathrm{DFA}}$는 $\mathbb{M}_{부분}$의 일종($\delta_{DFA}(q,a) = \varnothing$인 경우가 없는 경우)이고, $\mathbb{M}_{\mathrm{DFA}}$가 아닌($\delta_{부분}(q,a) = \varnothing$인 경우가 있는 경우) $\mathbb{M}_{부분}$이 존재한다.

(**정의 4**) $\mathbb{M}_{\mathrm{DFA}} \subsetneq \mathbb{M}_{부분}$이면, $\mathbb{M}_{\mathrm{DFA}}$는 $\mathbb{M}_{부분}$의 ***적당한****(proper)* **부분클래스**(subclass)라고 부르고, $\mathbb{M}_{부분}$은 $\mathbb{M}_{\mathrm{DFA}}$의 ***적당한* 확장클래스**(superclass)라고 부른다.

(**정의 2**)와 (**쉬운 정리 1**)로 확장의 첫 번째와 두 번째 작업인 확장된 오토마타 클래스의 (A) **정의**와 (B) **확장**을 마치었다. 확장의 마지막 작업으로 상태변화함수 δ가 부분함수일 때, 이를 같은 일을 하면서, 상태변화함수 δ'가 전체함수인 DFA로 바꾸어보자.

상태변화함수 값이 존재하지 않는 경우($\delta(q,a) = \varnothing$)에, 새로운 상태($d \notin Q$) d를 하나 더한 후, 새로운 상태 d로 상태 변화하는 함수($\delta'(q,a) = d$))로 추가하여 **전체함수**로 만든다. 새로 더한 상태 d에서도 모든 입력문자 $a \in \Sigma$에 대하여 $\delta'(d,a) = d$를 추가한다. 새로 더한 상태 d는 한번 들어가면 **끝나는 상태**(F)로는 빠져나올 수 없는 블랙홀과 같은 **죽은 상태**(**dead state**)라 부른다.

(입력) 부분함수를 허용하는 오토마타 $M_{부분} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

(출력) 전체함수만을 허용하는 오토마타 $M_{DFA} = (Q \cup \{d\}, \Sigma, \delta', q_0, F)$[3] 단 $d \notin Q$.

(알고리즘) $\delta' = \delta \cup \{\delta'(q,a) = d \mid \delta(q,a) = \varnothing\} \cup \{\delta'(d,a) = d \mid a \in \Sigma\}$

(증명) $L(\mathbb{M}_{\mathrm{DFA}}) = L(\mathbb{M}_{부분})$

(1) $L(\mathbb{M}_{\mathrm{DFA}}) \subseteq L(\mathbb{M}_{부분})$

$\mathbb{M}_{\mathrm{DFA}} \subsetneq \mathbb{M}_{부분}$이므로 당연하다(trivial).

(2) $L(\mathbb{M}_{부분}) \subseteq L(\mathbb{M}_{\mathrm{DFA}})$

$\forall M_{부분} \in \mathbb{M}_{부분}$: $\exists M_{DFA} \in \mathbb{M}_{\mathrm{DFA}}$, $L(M_{부분}) = L(M_{DFA})$

(2.1) $L(M_{부분}) \subseteq L(M_{DFA})$

(2.2) $L(M_{DFA}) \subseteq L(M_{부분})$

(**정의 5**) 오토마타 클래스 $\mathbb{M}$이 정의하는 언어 클래스
L($\mathbb{M}$) = {L ⊆ Σ*| M ∈ $\mathbb{M}$, L = L(M)}

(**정의 6**) 두 개의 오토마타 클래스 $\mathbb{M}_1$ 과 $\mathbb{M}_2$가 정의하는 언어 클래스가 같을 때, L($\mathbb{M}_1$) = L($\mathbb{M}_2$), 오토마타 클래스 $\mathbb{M}_1$ 과 $\mathbb{M}_2$는 **같은 일을 하는**(**동등한; isomorphic**) 오토마타 클래스라 정의한다.

(**중요정리(Theorem) 1**) $\mathbb{M}_{\mathrm{DFA}}$ 와 $\mathbb{M}_{부분}$는 **같은 일을 하는**(**같은**) 오토마타 클래스이다.

2.1.2. Nondeterministic Finite State Automata(NFA; 비결정적, 여러 상태로 상태 변화를

2) 쉬운정리, 부분정리, (중요)정리는 Fact, Lemma, Theorem의 번역이다.

3) 새로 정의 되는 M_{DFA}는 (1) 상태집합은 Q에서 $Q \cup \{d\}$로 늘어나고, (2) 입력문자집합 Σ과 (4) 초기상태 q_0, (5) 끝나는 상태 F는 원래의 $M_{부분}$과 같고, (3) 상태변화함수만이 δ에서 δ'으로 바뀐다.

허용하는 오토마타)

(해결책) NFA에서 **상태**의 **집합**을 변환(같은 일을 하는)할 DFA의 **상태 하나**로 본다.

특정 상태 $q \in Q$와 입력문자 $a \in \Sigma$에서 상태변화함수 $\delta(q,a)$가 없는 경우를 생각하였는데 이번에는 **여러 개의 상태**로 상태변화를 허용하는 경우로 확장하여 보자. 즉

$\delta(q,a) = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ 단 $n \geq 0$[4], $q, p_1, p_2, \cdots, p_n \in Q$, $a \in \Sigma$

로 정의하여 오토마타의 정의의 유연성을 높일 수 있다. $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 까지 n개의 상태가 정의되어 있으면 p_1, $\cdots$, p_n 중 **어떤** 상태로 상태를 바꾸어도 되고, n가지 상태변화 중 적어도 **한 번만** 끝나는 상태에 도착하여도 그 문자열은 오토마타가 받아들이는 문장(sentence)으로 본다.

(**정의 7**) **비결정적**(NFA) 오토마타 $M_{NFA} = (Q, \Sigma, \delta_{NFA}, q_0, F)$는 아래와 같이 정의한다.

(1), (2), (4), (5)의 Q, Σ, q_0, F는 기본정의 M_{DFA}와 같다. 단

(3) $\delta_{NFA}: Q \times \Sigma \to 2^Q$ 상태변화함수만이 다르다.

NFA는 상태변화함수의 치역으로 상태의 부분집합의 집합(power set)을 허용하는 $\mathbb{M}_{NFA}$는 상태 하나만 허용하는 $\mathbb{M}_{DFA}$와 공집합을 허용하는 $\mathbb{M}_{부분}$의 슈퍼클래스다.

(**쉬운정리 2**) $\mathbb{M}_{DFA} \subsetneq \mathbb{M}_{부분} \subsetneq \mathbb{M}_{NFA}$.

마지막으로 임의의 NFA를 **같은 일을 하는** DFA로 바꾸어 보자.

(**정의 8**) 상태변화함수 δ의 **첫 번째 정의역**을 상태(Q)에서 상태집합(2^Q)으로 확장하자.

$$\delta': 2^Q \times \Sigma \to 2^Q$$

$$\delta'(P,a) \stackrel{\text{def}}{=} \{q \in Q \mid p \in P, \delta(p,a) = q\}$$

$$= \bigcup_{p \in P} \delta(p,a)$$

(입력) 비결정적 오토마타 $M_{NFA} = (Q_{NFA}, \Sigma, \delta_{NFA}, q_0, F_{NFA})$

(출력) 전체함수만을 허용하는 DFA $M_{DFA} = (Q_{DFA}, \Sigma, \delta_{DFA}, \{q_0\}, F_{DFA})$

(알고리즘) **function** NFA_to_DFA(Q_{NFA}(NFA상태집합), Σ, δ_{NFA}(NFA상태변화함수), $q_0 \in Q_{NFA}$, $F_{NFA} \subseteq Q_{NFA}$) **returns** ($Q_{DFA} \subseteq 2^{Q_{NFA}}$(DFA상태집합: NFA상태의 power set)[5], Σ, δ_{DFA}(DFA상태변화함수), $q_0^{DFA} \in Q_{DFA}$, $F_{DFA} \subseteq Q_{DFA}$);

variable P, Q $\subseteq Q_{NFA}$(= P, Q $\in Q_{DFA}$)[6]; a $\in$ 입력문자집합(Σ);

q_0^{DFA} := {q_0}; Q_{DFA} := {{q_0}}; δ_{DFA} := $\varnothing$; F_{DFA} := $\varnothing$;

repeat

for P $\in Q_{DFA}$[7] **do**

---

4) $n = 0$이면 $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\} = \varnothing$으로 본다. 즉 NFA 확장은 첫 번째 확장인 부분함수도 포함한다.
5) 변환 후 DFA 상태는 변환 전 NFA 상태의 power set의 부분집합이다.
6) P, Q는 **NFA 상태의 부분집합**이지만,

for a $\in$ Σ **do**

  Q := $\varnothing$; **for** p $\in$ P **do** Q := Q $\cup$ δ(p, a) **od**

  Q_{DFA} := Q_{DFA} $\cup$ {Q}[8]; δ_{DFA} := δ_{DFA} $\cup$ {δ(P, a) = Q}[9];

  od

if (P $\cap$ F_{NFA}) $\neq$ $\varnothing$ $\rightarrow$ F_{DFA} := F_{DFA} $\cup$ {P} **else skip fi**

od

until no more new Q is added to Q_{DFA}

return M_{DFA} = (Q_{DFA}, Σ, δ_{DFA}, q_0^{DFA}, F_{DFA});

end function NFA_to_DFA;

(**정의** 9) 확장된 상태변화함수 δ'의 반복 δ'^{i}를 정의하자

$$\delta'^{i}: 2^Q \times \Sigma^i \rightarrow 2^Q$$

$$\delta'^{0}(P, \epsilon) \overset{\text{def}}{=}_{B} P \qquad \text{단 } P \subseteq Q (P \in 2^Q).$$

$$\delta'^{i+1}(P, xa) \overset{\text{def}}{=}_{R} \delta'(\delta'^{i}(P, x), a) \qquad \text{단 } P \subseteq Q (P \in 2^Q),\ x \in \Sigma^*,\ a \in \Sigma (xa \in \Sigma^+).$$

(**정의** 10) 확장된 상태변화함수 δ'의 반복합 δ'^{*}를 정의하자.

$$\delta'^{*}: 2^Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$$

$$\delta'^{*} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in N_0} \delta'^{i}.$$

(부분정리) $Q_{DFA} \subseteq 2^{Q_{NFA}}$.

$P \subseteq Q_{NFA} (\equiv P \in 2^{Q_{NFA}} \equiv P \in Q_{DFA})$, $a \in \Sigma$일 때

$$\delta_{DFA}(P, a) = \{q \in Q_{NFA} \mid p \in P.\ q \in \delta_{NFA}(p, a)\} = \delta_{NFA}'(P, a)$$

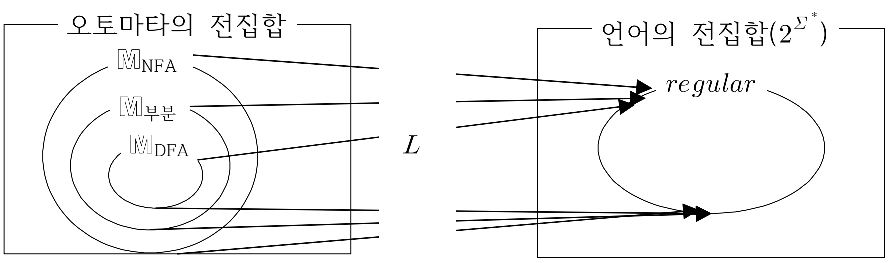
$$F_{DFA} = \{P \in 2^{Q_{DFA}} \mid P \cap F \neq \varnothing\}$$

(증명1) 위의 (알고리즘)은 임의의 NFA를 위의 (부분정리)를 만족하는 DFA로 만든다.

(증명2) $L(M_{NFA}) = L(M_{DFA})$

(생략)

(**중요정리** 2) $\mathbb{M}_{\text{DFA}}$ 와 $\mathbb{M}_{\text{부분}}$, $\mathbb{M}_{\text{NFA}}$는 모두 **같은 일을 하는**(**같은**) 오토마타 클래스이다.



---

7) **동시에**, P, Q는 (DFA의 상태집합이 NFA 상태부분집합의 집합(Power set)이므로($Q_{DFA} = 2^{Q_{NFA}}$)) DFA **상태 하나이기도하다**. 이것을 이해하는 것이 이 알고리즘을 이해하는 핵심이다.

8) 각주 6), 7)과 같다.

9) 각주 6), 7)과 같다.