KAIST 전산학과 최광무

(개요) FA와 받아들이는(accept) 언어를 나타내는(denote) 정규식을 구하는 연립방정식을 이용한 방법

DFA가 받아들이는 언어와 같은 regular expression을 구하는 이론적이고 어려운(따라서 좀 느린) 방법을 앞에서 recursion을 이용하여 구해보았다. 좀 더 분석적이고 간명한 방법을 생각하여 보자.

확장된 FA[1]를 생각하자, 상태 q에서 문자열 $x_1, x_{2,} \cdots, x_n (1 \le \forall i \le n\colon\ x_i \in \Sigma^*)$을 보고 상태 $p_1, p_{2,} \cdots, p_n$으로 상태변환을 한다면 이것은

$$q \ = \ x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ \cdots \ + x_n p_n$$

으로 표시할 수 있다. 상태 q가 끝나는 상태 F에 속한다면 $q \ = \ \epsilon$이 추가(+)된다.

$$q \ = \ x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ \cdots \ + x_n p_n + \epsilon \qquad \text{if } q \in F,$$
$$q \ = \ x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ \cdots \ + x_n p_n \qquad \text{otherwise}(q \notin F).$$

만일 상태가 n개 있다면, 상태에 관한 등식 n개를 가질 수 있다. 상태를 미지수로 보고 상태의 1차 상수인 x_i와 y_i을 기지수로 본다면 이는 미지수 n개에 대한 1차 n원 연립방정식으로 볼 수 있다.

$$1 \le \forall i \le n\colon \qquad q_i \ = \ x_1 q_1 + x_2 q_2 + \ \cdots \ + x_n q_n + y_i$$
$$\text{if } q_i \in F \rightarrow y_i = \epsilon \ \mid \ q_i \notin F \rightarrow y_i = \varnothing \ \text{ fi}$$

이 n차 연립방정식을 초기상태에 관하여 풀면 우리는 오토마타가 받아들이는 언어를 표현하는 regular expression을 구할 수 있다[2].

연립방정식을 푸는 방법을 생각해 보자. 연립방정식을 푸는 기본적인 해법은 미지수(변수; 문자)를 차례로 제거하는 방법[3]이다. 그런데 등식의 좌변에 있는 변수가 우변에도 나타났을 때[4] 우변에 있는 변수를 좌변으로 이항한 후 나누어서 해결한다.

$$q_i \ = \ x_i q_i + x_{i+1} q_{i+1} + \ \cdots \ + x_n q_n + y_i{}^{5)} \qquad (1)$$

$$q_i \ = \ \frac{1}{1 - x_i}(x_{i+1} q_{i+1} + \ \cdots \ + x_n q_n + y_i) \qquad (2)$$

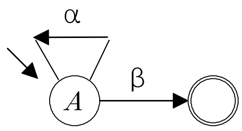
그러나 regular repression은 **빼기**(이항)와 **나누기** 연산은 정의되어 있지 않으므로 (2)의 해법은 답이 아니다. 식 (1)을 아래 (3)과 같이 간단히 써보자.

$$A \ = \ \alpha A + \beta^{6)} \qquad (3)$$

---

1) $\delta : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$
2) 최종상태 F는 ϵ으로 바뀌었음에 주의하라.
3) 대수학에서 Gauss-Jordan elimination을 배웠을 것이다.
4) Gauss-Jordan에서 non-zero diagonal element.
5) q_i보다 작은 변수들($q_1, \cdots, q_{i-1}$)은 Gauss-Jordan에 의하여 이미 제거되었다.
6) 식 (1)에서 q_i는 A로, x_i는 α로, $x_{i+1} q_{i+1} + \ \cdots \ + x_n q_n + y_i$는 β로 각각 바꾸었다.

(3)식을 오토마타로 표현하여 보면,



이때 regular expression (3)의 해는

$$A = \alpha^* \beta \qquad (4)$$

이다. 아래에 두 번 틀려서 맞은(?), 재미있는(?) 증명 방법을 생각해보자.

(틀린 증명) $A = \alpha A + \beta$

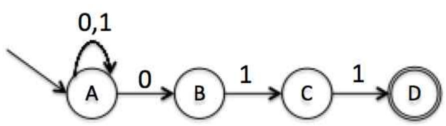
$\neq$ $A = \frac{1}{1-\alpha}\beta$ 사칙연산의 경우

$=$ $A = (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots)\beta$ Taylor expansion

$\neq$ $A = \alpha^* \beta$ *의 정의

위의 (**틀린 증명**)은 수학의 유연성을 보여주는 재미있는 예다.

(예 1) $(0+1)^*011$를 받아들이는 NFA ⇒ RE



$A = (0+1)A + 0B$ ①

$B = 1C$ ②

$C = 1D$ ③

$D = \epsilon$ ④

④를 ③에 대입 $C = 1$ ⑤

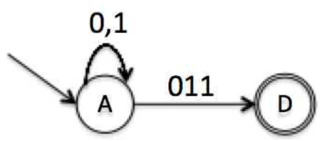
⑤를 ②에 대입 $B = 11$ ⑥

⑥을 ①에 대입 $A = (0+1)A + 011$ ⑦

⑦에 공식 (3), (4) 적용 $A = (0+1)^*011$ ⑧

(예 1)은 우리가 구성한 NFA가 맞는다는 증명이 되기도 한다.

(예 2) $(0+1)^*011$를 받아들이는 XFA ⇒ RE



$A = (0+1)A + 011D$ ①

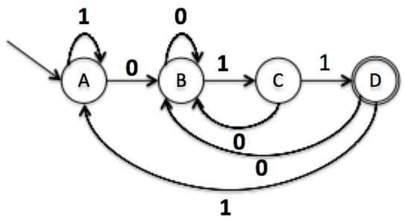
$D = \epsilon$ ②

②를 ①에 대입 $A = (0+1)A + 011$ ③

③에 공식 적용 $A = (0+1)^*011$ ④

(예 2)는 확장한 XFA가 FA와 같다는 증명이 되기도 한다.

(예 3)　$(0+1)^*011$를 받아들이는 DFA $\Rightarrow$ RE_1



$A = 0B + 1A$ ①

$B = 0B + 1C$ ②

$C = 0B + 1D$ ③

$D = 0B + 1A + \epsilon$ ④

④를 ③에 대입　$C = 0B + 10B + 11A + 1 = (0+10)B + 11A + 1$ ⑤

⑤를 ②에 대입　$B = 0B + (10+110)B + 111A + 11 = (0+10+110)B + 111A + 11$ ⑥

⑥에 공식 적용　$B = (0+10+110)^*(111A + 11)$ ⑦

⑦을 ①에 대입　$A = 0(0+10+110)^*(111A+11) + 1A$

$= (0(0+10+110)^*111+1)A + 0(0+10+110)^*11$

$= (0(0+10+110)^*111+1)^*0(0+10+110)^*11$ ⑧

(예 4)　$(0+1)^*011$를 받아들이는 DFA $\Rightarrow$ RE_2

①을 ④에 대입　$D = A + \epsilon$ ⑤

⑤를 ③에 대입　$C = 0B + 1A + 1$ ⑥

①을 ⑥에 대입　$= A + 1$ ⑦

⑦을 ②에 대입　$B = 0B + 1A + 11$ ⑧

①을 ⑧에 대입　$= A + 11$ ⑨

⑨를 ①에 대입　$A = 0A + 011 + 1A = (0+1)A + 011$ ⑩

⑩에 공식 적용　$= (0+1)^*011$ ⑪

(예 3)과 (예 4)는 RE ⑧과 RE ⑪이 같다는 증명이다.