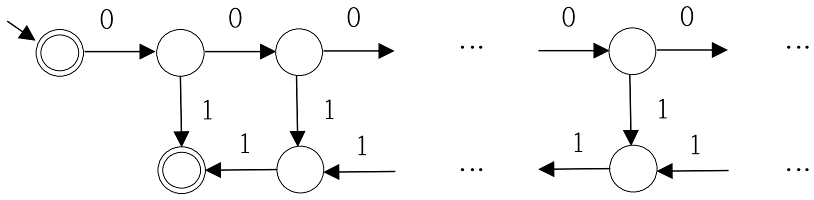
KAIST 전산학과 최광무

4장에서는 regular(type 3) 언어의 성질을 공부한다. 첫 째로 4.1에서는 regular언의의 성질을 알기위하여 regular가 아닌 언어를 살펴보고 4.2에서 언어가 regular가 아님을 formal하게 증명하기 위한 pumping lemma를 공부하고, 마지막으로 4,3에서 regular 언어의 닫혀(closure)있는 성질을 공부한다.

4.1 Regular가 아닌 언어

$$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$$

위의 언어를 받아들이는 오토마타를 설계해 보자.



상태수가 **무한하게** 된다.

이번에는 regular expression을 생각하여 보자.

$0^* 1^*$는 $0^n 1^n$의 슈퍼집합이다.

우리는 두 방법 모두 실패했다. 그러나 이것이 L이 regular아 아니라는 증명은 **아니다**. 왜냐하면 우리가 실패했지, 다른 사람들도 모두 실패할 것이라는 확신은 없기 때문이다.

그래서 다음 섹션의 regular 언어를 위한 pumping lemma를 생각한다.

4,2 Pumping Lemma

(개요) Regular 언어가 **아님**을 증명하는데 쓰는 Lemma

Pumping Lemma

[가정] 언어 L이 regular하다고 하자.

[결론] 어떤 자연수 n이 존재하여 언어 L을 받아들이는 상태가 n개인 DFA가 있을 것이다.

길이가 자연수 n보다 크거나 같은 문장(sentence) $w \in L$을 생각하자.

$w = a_1 a_2 \cdots a_m (0 \leq \forall l < m:\ a_l \in \Sigma)$으로 표현 한다면 $m \geq n$이다.

한편 문장 w의 길이가 m이므로 $m+1$개의 상태를 방문할 것이다.

이 때 방문한 상태를 $(q_0, q_1, \cdots, q_m)$라고 하면,

$0 \leq \forall l < m:\ \delta(q_l, a_{l+1}) = q_{l+1}$일 것이다.

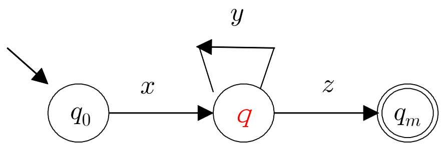
방문한 상태 수 $m+1$이 전제 상태 수 n보다 크므로, ($m \geq n$이므로 $m+1 > n$)

같은 상태를 두 번 이상 방문하는 경우가 **반드시** 생긴다.

가장 먼저 방문한 **같은 상태**가 $q_i = q_j$라 하면 $1 \leq i < j \leq n \leq m$[1]이고,

1) **가장 먼저** 도착한 **같은 상태**가 $q_i = q_j$이므로 $i < j \leq n$이다.

$\delta^i(q_0, a_1 a_2 \cdots a_i) = q_i$, $\delta^{j-i}(q_i, a_{i+1} a_{j+2} \cdots a_j) = q_j$, $\delta^{m-j}(q_j, a_{j+1} a_{j+2} \cdots a_m) = q_m$이다,
짧게 써서 $x = a_1 a_2 \cdots a_i$, $y = a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_j$, $z = a_{j+1} a_{j+2} \cdots a_m$라고, $q_i = q_j = q$라면
$w = xyz$이고 $|y| \geq 1$, $|xy| \leq n$이며, $\delta^{|x|}(q_0, x) = q$, $\delta^{|y|}(q, y) = q$, $\delta^{|z|}(q, z) = q_m$이다.



$$\delta^{|z|}(\delta^{|x|}(q_0, x), z) = \delta^{|xz|}(q_0, xz) = \delta^*(q_0, xz) = q_m,$$
$$\delta^{|z|}(\delta^{|y|}(\delta^{|x|}(q_0, x), y), z) = \delta^{|xyz|}(q_0, xyz) = \delta^*(q_0, xyz) = q_m,$$
$$\delta^{|z|}(\delta^{|y|}(\delta^{|y|}(\delta^{|x|}(q_0, x), y), y), z) = \delta^{|xy^2z|}(q_0, xy^2z) = \delta^*(q_0, xy^2z) = q_m,$$
$$\cdots$$
$$\delta^{|z|}(\delta^{|y|} \cdots (\delta^{|y|}(\delta^{|x|}(q_0, x), y), \cdots y), z) = \delta^{|xy^kz|}(q_0, xy^kz) = \delta^*(q_0, xy^kz) = q_m,$$
$$\cdots$$

$q_m \in F$이므로 $\forall k \geq 0$: $xy^kz \in L$이다.

위를 수식으로 정리하여 표현하면
[가정] 언어 L이 regular하다.
[결론] (a) $\exists n \geq 0$:
(b) $\forall w \in L$: $|w| \geq n$,
(c) $\exists x, y, z \in \Sigma^*$: $w = xyz$, $y \neq \epsilon$, $|xy| \leq n$,
(d) $\forall k \geq 0$: $xy^kz \in L$.

언어 L이 regular하면, (a) 길이가 **어떤**(∃) 자연수 n[2] 이상($|w| \geq n$)인 (b) **모든**(∀) 문장 ($w \in L$)이 가진 (c) **어떤**(∃) substring(y)이 (d) **항상**($\forall k$) 반복(pumping)하여 문장이 된 ($xy^kz \in L$)다.

Pumping Lemma의 **대우**(contra-verse) 명제
[결론의 부정]
(a) $\forall n \geq 0$:
(b) $\exists w \in L$: $|w| \geq n$,
(c) $\forall x, y, z \in \Sigma^*$: $w = xyz$, $y \neq \epsilon$, $|xy| \leq n$,
(d) $\exists k \geq 0$: $xy^kz \notin L$.
[가정의 부정] 언어 L이 regular하지 않다.

명제 $p \Rightarrow q$가 참이면, 대우명제 $\neg q \Rightarrow \neg p$는 역시 참이다. 따라서 어떤 언어 L이 regular 하지 않다는 증명을 하려면, 본 pumping lemma의 결론 부분의 부정을 증명하면 된다.

2) 이때 n은 언어 L을 받아들이는 DFA중 상태 수가 가장 작은(minimal DFA)의 상태수이다.

어떤 언어 L이 regular**하지 않다**는 증명을 하려면,

(a) 길이가 **모든**($\forall$) 자연수 n 이상, $|w| \geq n$, 인3),

(b) **어떤**($\exists$) (무한) 문장, $w \in L$은,

(c) **모든**($\forall$) substring($y \neq \epsilon$)이 반복(pumping)하여,

  (a) 단, 반복할 substring y는 **빈 문자열은 아니고**($y \neq \epsilon$; **non-empty pumping**),

  (b) 첫 번째 반복(xy^1; **first pump**)은 minimal DFA의 모든 상태를 방문하기 **이전** ($|xy| \leq n$)을 **우선** 생각한다.

(d) 문장이 되지 않는 경우가 **있**($\exists k$)**다**($xy^k z \notin L$)고 증명하면 된다.

두 개의 모든($\forall$) 중에 (a)는 무한문자열을 뜻하므로 주의하여야하고, (c)는 모든 substring으로의 나눔이므로 더욱 주의하여야 한다.

(예 1) $L = \{0^n 1^n | \; n \geq 0\}$는 regular하지 않다.

(증명) (a) $\forall n \geq 0$: (b) $\exists w = 0^n 1^n \in L$,

(c) $\forall x, y, z$: $w = xyz$, $y \neq \epsilon$, $|xy| \leq n$,

(c.1) $0 \leq \forall i, j \leq n$: $x = 0^i$, $y = 0^j$, $z = 0^{n-i-j} 1^n$, $j \geq 1$, $i + j \leq n$ $\wedge$

(c.2) $0 \leq \forall i, j \leq n$: $x = 0^n 1^i$, $y = 1^j$, $z = 1^{n-i-j}$, $j \geq 1$, $i + j \leq n$.

(c'.1) $\forall i, j$: $0 \leq i < n$, $0 < j \leq n$, $i + j \leq n$: $x = 0^i$, $y = 0^j$, $z = 0^{n-i-j} 1^n$ $\wedge$

(c'.2) $\forall i, j$: $0 \leq i < n$, $0 < j \leq n$, $i + j \leq n$: $x = 0^n 1^i$, $y = 1^j$, $z = 1^{n-i-j}$.

(d) $\exists k \geq 0$: $xy^k z \notin L$.

(d.1) $\exists k \geq 0$, $k \neq 1$: $xy^k z = 0^{i+kj+n-i-j} 1^n = 0^{n+(k-1)j} 1^n \notin L$ $\wedge$

(d.2) $\exists k \geq 0$, $k \neq 1$: $xy^k z = 0^n 1^{i+kj+n-i-j} = 0^n 1^{n+(k-1)j} \notin L$.

(d'.1) $\exists k = 0$: $xy^0 z = 0^{n-j} 1^n \notin L$ $\wedge$

(d'.2) $\exists k = 0$: $xy^0 z = 0^n 1^{n-j} \notin L$.

(d".1) $\exists k = 2$: $xy^2 z = 0^{n+j} 1^n \notin L$ $\wedge$

(d".2) $\exists k = 2$: $xy^2 z = 0^n 1^{n+j} \notin L$.

(c)는 $\forall$에 관한 조건이므로, ((c'.1) $\wedge$ (c'.2)) ≡ ((c".1) $\wedge$ (c".2)) ≡ (3)과 동치인 조건을 보아야하지만, (d)는 $\exists$에 관한 조건이므로, ((d'.1) $\wedge$ (d'.2)), ((d".1) $\wedge$ (d".2)) $\subsetneq$ ((d.1) $\wedge$ (d.2)) ≡ (d)의 부분집합인 조건만 확인하여도 **충분**하다. (a), (c)의 $\forall$ 부분(**adversary pick**, **모든 경우**)이 Pumping Lemma를 이용한 증명에서 **어려운** 부분이다4).

(c'.1) $\wedge$ (c'.2), (c".1) $\wedge$ (c".2), (d'.1) $\wedge$ (d'.2), (d".1) $\wedge$ (d".2)을 모두 증명하여야하나, 식의 형태로 보아 증명이 너무 쉬우므로(trivial) 생략하는 것에 지나지 않음에 유의하라.

---

3) 이 조건은 **무한**(infinite)문자열을 의미한다. 유한문자열은 pumping lemma의 대상이 아니고, 이미 regular이다.

4) 교과서 130p를 참고하시오.

(예 2) $L = \{w \in 1^* \mid |w|$는 소수다$\}$는 regular하지 않다.

(증명) (a) $\forall n \geq 0$: (b) $\exists w \in L$: $w = 1^p \in L$, $p \geq n+2$, p는 소수.

(c) $\forall x, y, z$: $w = xyz$, $|y| \geq 1$, $|xy| \leq n$,

(c') $\forall m$, $m \geq 1$, $m \leq n$: $w = xyz = 1^p$, $y = 1^m$, $xz = 1^{p-m}$.

(d) $\exists k = p - m$[5]: $|xy^{p-m}z| = (p-m)+(p-m)m = (m+1)(p-m)$.

$m+1 \geq 2 \ \wedge \ p-m \geq 2 (\because \ p \geq n+2 \ \wedge \ m \leq n)$

$\therefore \ |xy^{p-m}z| = (m+1)(p-m)$는 소수가 아니다. $xy^{p-m}z \not\in L$.

참고로 (예 2)의 언어를 받아들이는 **오토마타**를 한번 생각해보고, **프로그램**도 생각해보자.

5) $k = p - m$인 경우를 생각하는 것은 증명이 깔끔하기 때문이다.