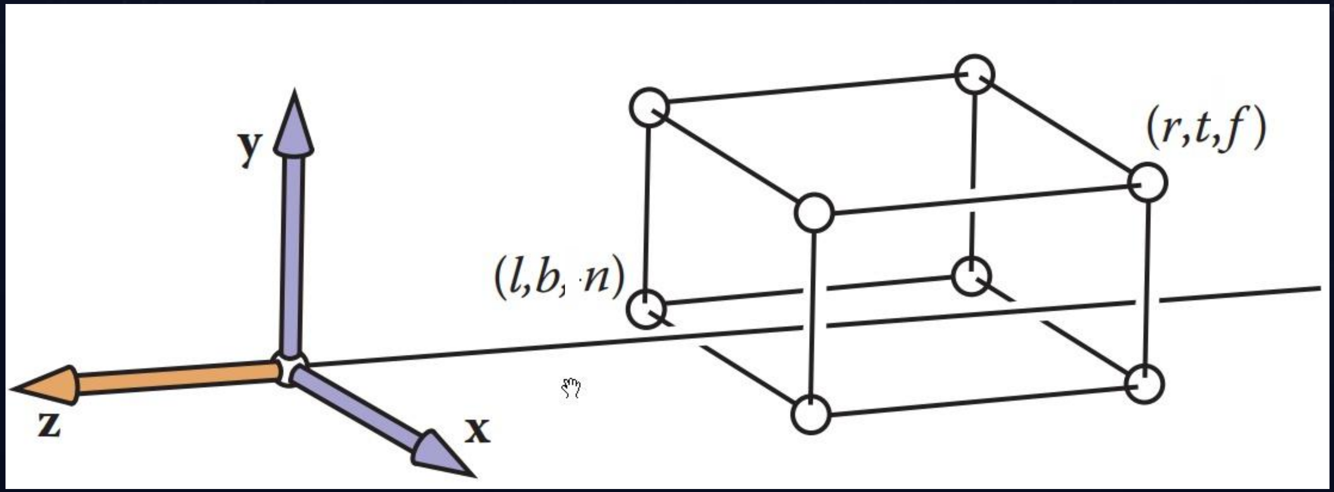
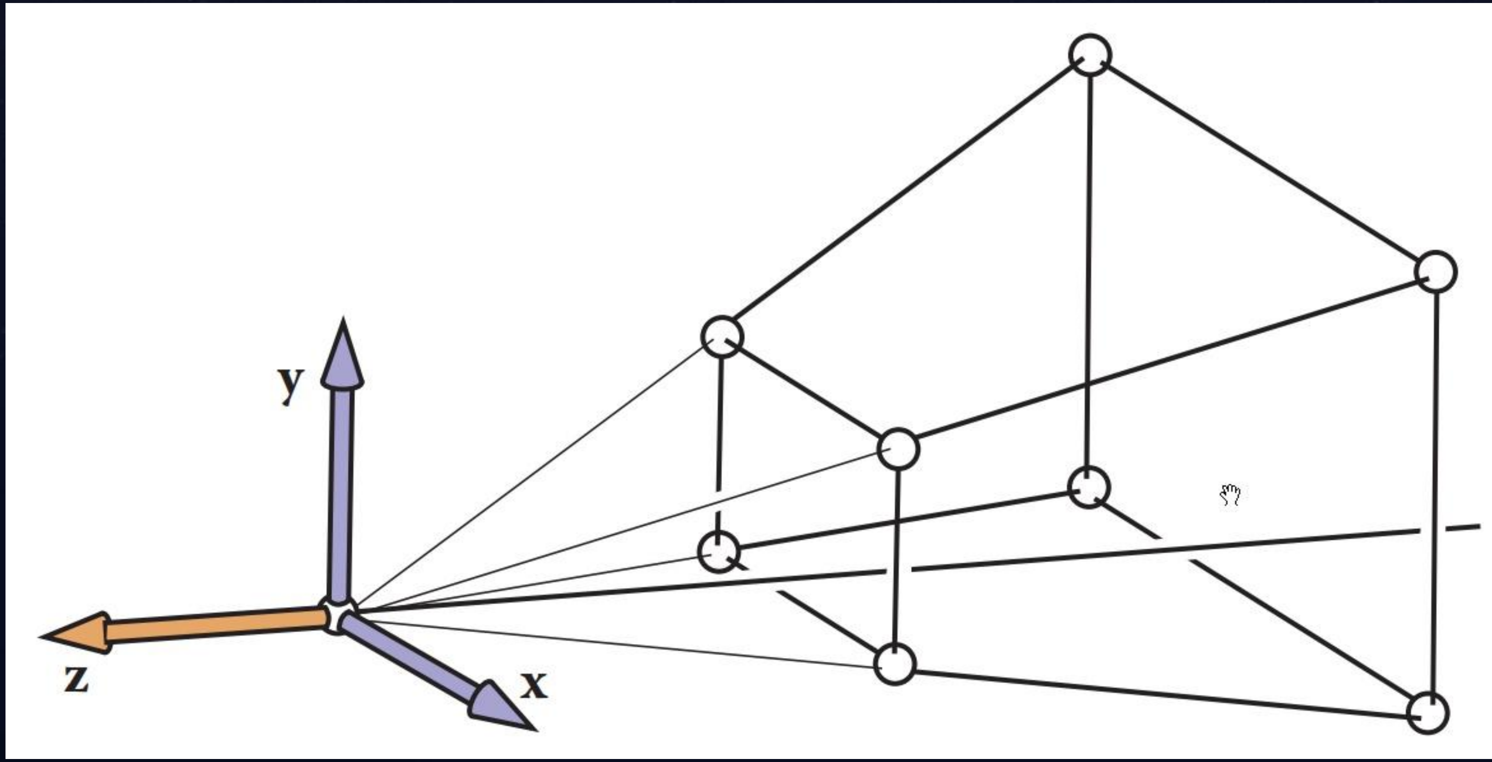
正交矩阵定义

正交投影：将视图矩阵变换完成后的视体转换为，长、宽、高都是单位1的长方体视体，这个转换过程就是正交投影，所产生的矩阵就是正交矩阵。
换个形象的说法：比如此刻你用相机拍一张照片，在拍的过程中你可以设置参数（投影方式），最终拍出的照片效果也不一样 。



透视矩阵定义

透视投影：将视图矩阵变换完成后的视体转换为，视点（眼睛）在坐标原点，近裁剪面为n，远裁剪面为f，n > 0, f > 0, 在y方向的视域角为fovy，近裁剪面宽高比为aspect。这个过程所代表的矩阵就是透视矩阵。



Lorem Ipsum is simply dummy text of the printing and typesetting industry

0

3

公式推导

公式推导

正交投影可分为两步， 第一步是先平移变换，第二步是后缩放变换。

1、平移矩阵

根据前述，左下角（l,b,n),右上角（r,t,f), 可得中心点坐标（(l+r)/2, (b+t)/2, (n+f)/2), 因此平移矩阵为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -(l+r)/2 \\ 0 & 1 & 0 & -(b+t)/2 \\ 0 & 0 & 1 & -(n+f)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

因为需要从（(l+r)/2, (b+t)/2, (n+f)/2) 移动到（0，0，0）所以平移量为（-(l+r)/2, -(b+t)/2, -(n+f)/2）

2、缩放矩阵

以X为例说明，移动到原点后，x的范围是 [-(r-l)/2, (r-l)/2]， 要映射到[-1, 1],所以缩放因子是2/(r-l)

$$\begin{vmatrix} 2/(r-l) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/(t-b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/(f-n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

公式推导

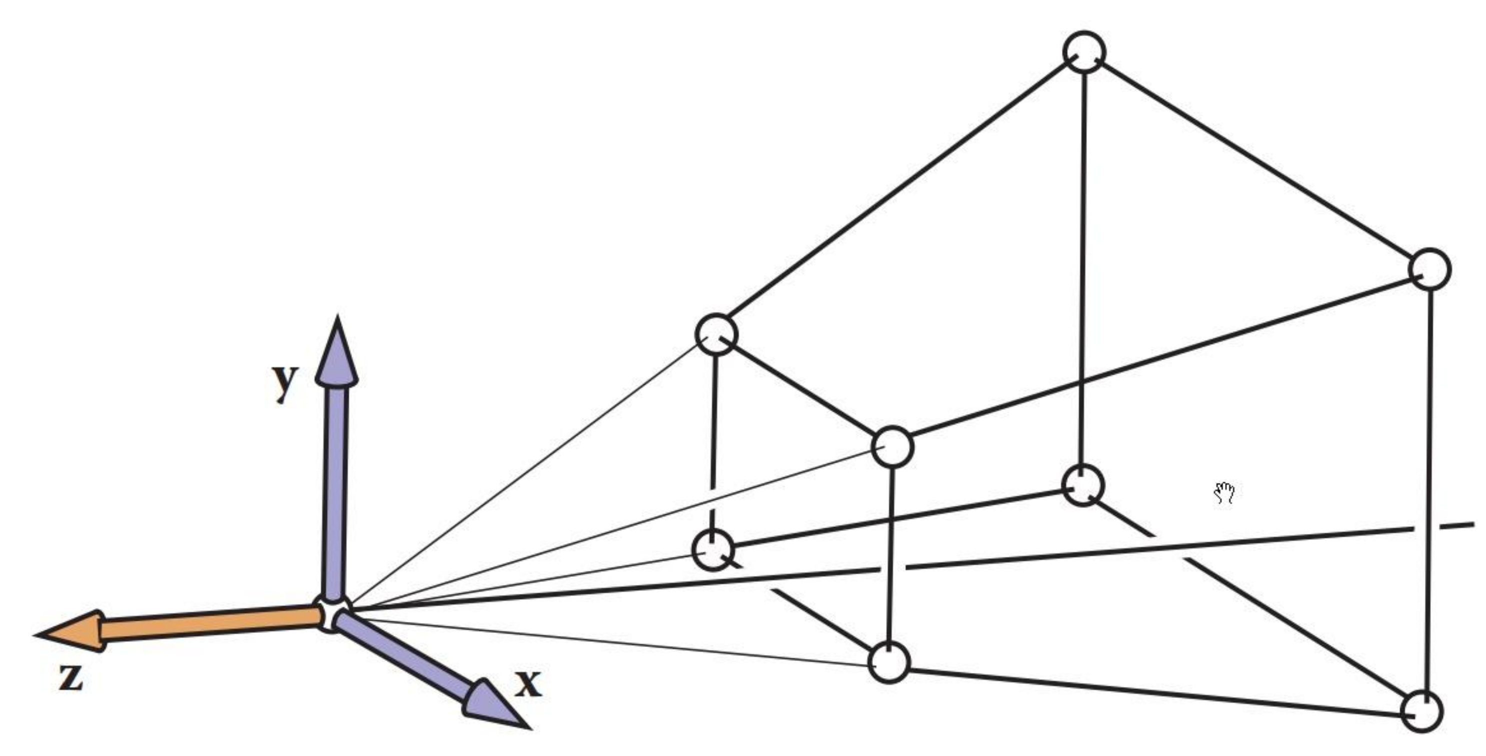
正交投影矩阵就是把前面两个矩阵相乘，先平移再缩放， 可表示为 Morthoproj = ST， 得到的矩阵如下：

$$
\begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{l+r}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b+t}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{l+r}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{b+t}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & -\frac{n+f}{n-f} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

公式推导

fov：摄像机视锥体垂直视野角度
aspect：摄像机视锥体宽高比
near：摄像机近裁剪面到视点的距离
far：摄像机远裁剪面到视点的距离

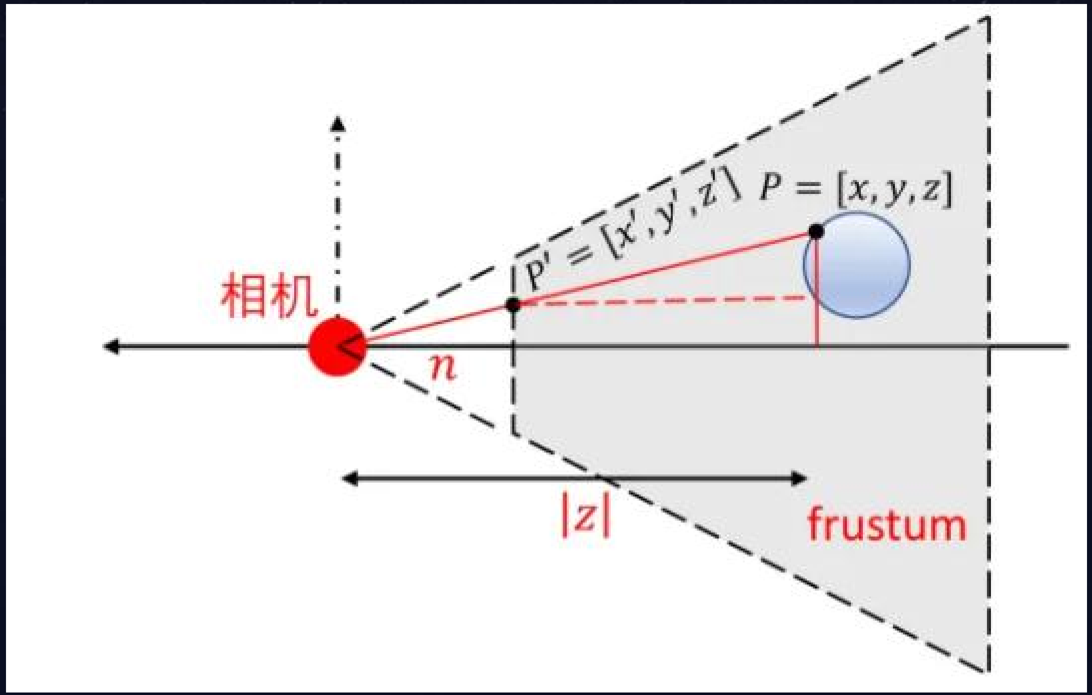


透视投影两个步骤：

1.收缩远裁剪面，将原来的正四棱台变成长方体。P矩阵（缩放矩阵）
2.像之前的正交投影矩阵一样，将长方体先位移，再缩放。M（正交矩阵）
接下来咱们就去计算一下透视投影矩阵

公式推导

由相似三角形可得：
x‘/x=y’/y=z‘/|z|
又因为z’ = n
所以x’ = n*x/|z|
y’ = n*y/|z|
(几何意义实际意思就是xy分别做线性变换，倒推就是除以z，z越大，看到的坐标越小，满足现实情况)
同理可推：
z’ = F(z)/|z|



注意这里 表示点到相机的沿z轴距离。
由于我们约定物体在z轴负方向，则
|z| = -z 。

$[n*x/|z|, n*y/|z|, F(z)/|z|, 1]^T = P\ [x,y,z,1]^T$

公式推导

P =

n	0	0	0
0	n	0	0
0	0	a	b
0	0	1	0

z’ = f(z)/|x| = (az+b)|x|
又因为（an+b）/n = n （af+b）/f = f
所以a=n+f b=-fn

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -fn \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nx \\ ny \\ (n+f)z - fn \\ z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{nx}{z} \\ \frac{ny}{z} \\ n+f-\frac{fn}{z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

公式推导

$$M_{per} = M_{orth} * P =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & -\frac{n+f}{n-f} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -fn \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{l+r}{l-r} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{b+t}{b-t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{n-f} & \frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

公式推导

$$[n*x/|z|, n*y/|z|, F(z)/|z|, 1]^T = P\ [x,y,z,1]^T$$

$$res = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{l+r}{l-r} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{b+t}{b-t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{n-f} & \frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} [l,b,n,1]^T$$

$$=[-n,-n,-n,-n] = [-1,-1,1,1]$$