Fenwick Tree and Segment Tree

Scenario

应用：维护数组中的连续范围的[a, b]的属性P(a, b)
条件：存在操作符 +, 对任意c: a <= c <= b, P(a, b) = P(a, c) + P(a, b)

典型问题：

- **Range sum:** 属性是range sum, 操作符是加法
- **Range addition:** 属性是包含[a, b]的所有range, +是并操作
- **Weighted RAM:** 属性是[a, b]返回内的权重和， 操作符是加法

Overview

Fenwick Tree (Binary Index Tree):

cursum = current sum，当前和

- update element, retrieve prefix sum (cumsum)
- log(N)时间写
- log(N)时间读
- 空间开销O(N) （如果不需要存储原始数据，为N)
- 动态增加capacity只需要resize数组 如果不需要移动data， 这个性质很好

ZKW Segment Tree

- 三种使用模式：
  (1) update element, retrieve range sum (2) update range sum, retrive element (3) update element, retrieve range whose sum >= given value
- log(N)时间修改单个元素
- log(N)时间检索range sum
- 空间开销O(N) (树的最后一层存储了原始数据)
- 动态增加capacity需要在resize数组以后移动数据，amortized cost为O(1)

比较：

- Fenwick Tree是多叉树，自顶向下search比较难
- Fenwick Tree主要针对prefix sum，如果要作range sum必须有合法有效的减法operator
- Fenwick Tree解释起来没有Segment Tree容易
- ZKW Segment Tree 占的空间大一点点（需要是2的整数次，resize的逻辑复杂一点点）

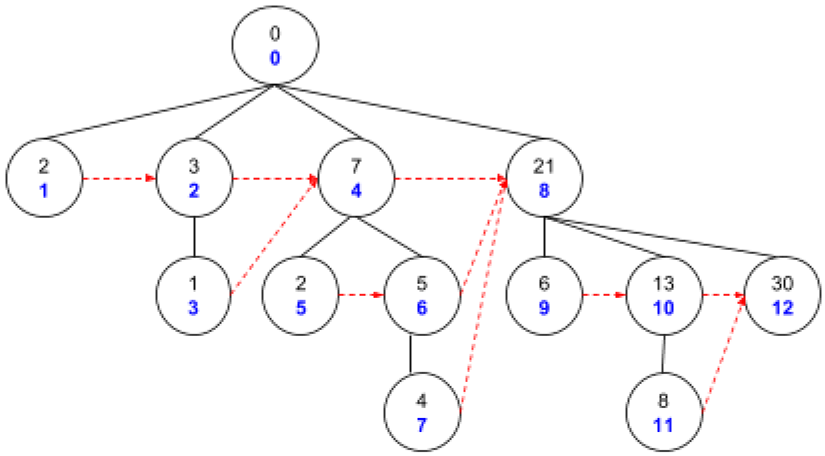
几个例子：

- Range sum query - mutable (Leetcode 307)
- Range sum query 2D - mutable (Leetcode 308)
- Range addition (Leetcode 370，原题其实不需要，但如果followup数据mutable怎么办，则需要）
- Weighted RAM (Two sigma面经）

Fenwick Tree

设计思想：通过把cumsum的值分散保存在idx在树中的路径上，并用位运算映射树结构，使检索更新cumsum快速简单

例子：下图圆圈中蓝字为下标idx，黑字为值tree[idx]。红线指向后继next，黑线指向parent.



结点关系映射：
第k层的index有k位1.
黑线 – 从子结点到父结点index的映射: **parent(n) = n & (n-1)**，即最后一位置0.
红线 – 从结点到它后继结点的映射： **next(n) = n + (n & -n)**. 左移最后一位1,或把最后一段0111...11结构变为1000...00

例子：

idx	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(binary)	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100
parent[idx]	-	0	0	2	0	4	4	6	0	8	8	10	8
(binary)	-	0	0	10	0	100	100	110	0	1000	1000	1010	1000
next[idx]	-	2	4	4	8	6	8	8	-	10	12	12	-
(binary)	-	10	100	100	1000	1q0	1000	1000	-	1010	1100	1100	-

对后继映射的进一步解释：
后继结点定义为下一个兄弟结点，或如果当前结点n是父亲的最右结点，后继是n第一个非最右结点祖先的后继结点。对第一种情况，注意到(n&-n)取了n最右一位就可以得到结论。对第二种情况，注意到所有最右结点都以x0 11...1100..00结尾，它的祖先结点中最低的不是最右结点的key是x0 10...0，而它的右结点值是x1 00...1100..00，正好还是n + (n & -n)。

数据映射
tree[idx] = cumsum[idx] - cumsum[parent[idx]]
例如上图对应下表：

idx	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
input[idx]	2	1	1	3	2	3	4	5	6	7	8	9	
cumsum[idx]	0	2	3	4	7	9	12	16	21	27	34	42	51
tree[idx]	0	2	3	1	7	2	5	4	9	6	13	8	30

初始化：`tree[idx]`初始化为长为数组长度+1的全零数组。
检索：检索cumsum只需把node n+1路径上所有结点加起来，求range sum就是两个cumsum之差。

更新input[n]：假设增加d, 影响的元素是结点n+1以及它到根结点路径上所有结点的后续兄弟结点。这些元素都需要加d
例如更新input[4]，则需更新结点5(对应input[4]), 6, 8.

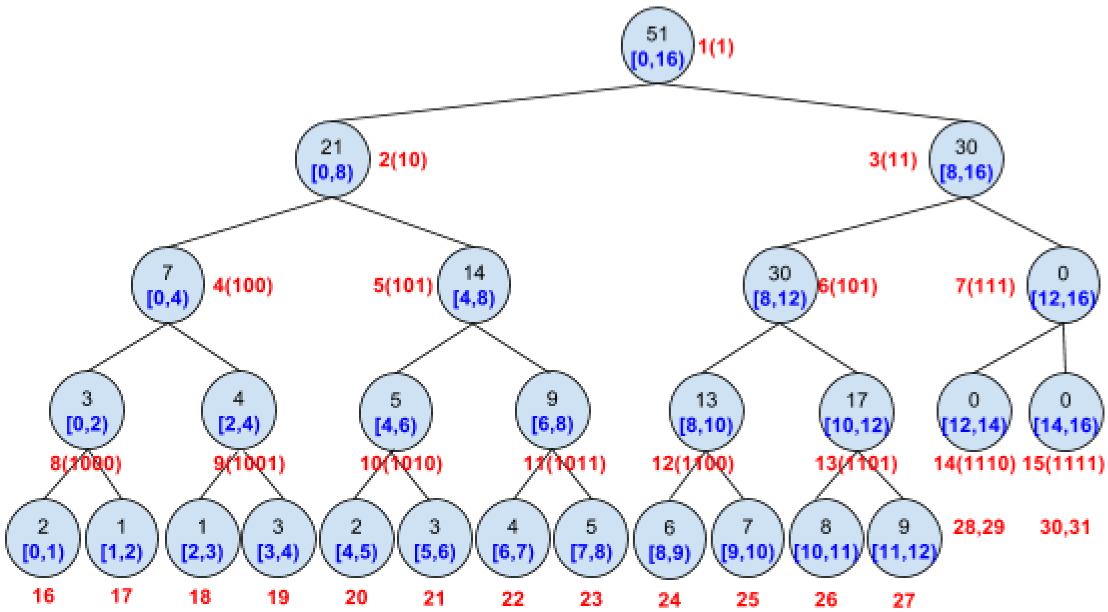
最后注意Fenwick tree不直接存储data，因此如果问题需要access data方便起见最好另存一份。

```
class NumArray {
public:
    NumArray(vector<int> &nums) : data(nums), tree(nums.size()+1, 0) {
        for (int i = 0; i < data.size(); ++i)  相当于对每个element 进行update操作
            for (int key = i+1; key < tree.size(); key += (key&-key)) tree[key] += data[i];
    }                                                    n = n + n & (-n)

    void update(int i, int val) {
        int diff = val - data[i];
        for (int key = i+1; key < tree.size(); key += (key&-key)) tree[key] += diff;
        data[i] = val;  key = i + 1, 因为第一个影响的下一个node的下标是i+1
    }

    int sumRange(int i, int j) {
        return cumSum(j) - cumSum(i-1);
    }
                                        值得注意的是这里的cursum[i] 是不含input[i]的prefix sum
private:
    int cumSum(int i) {
        if (i < 0) return 0;
        int sum = 0;
        for (int key = i + 1; key > 0; key &= (key-1)) sum += tree[key];
        return sum;
    }

    vector<int> tree;
    vector<int> data;
};
```

ZKW Segment Tree

线段树是一棵二叉树。每个结点对应一个区间[l,r),结点的两个子结点把这个区间的值分为均匀的两段。每个结点还存储这个区间里的sum。根结点对应[0, n)。

这里我们使用数组存储一棵二叉完全树。为index方便，我们把n扩展到2的整数次幂M = 2^k. 上面的例子对应的Segment Tree如下图。



其中的红字表示结点的index。

结点关系映射：注意到index的父结点是子结点的前缀。因此

- parent(n) = n>>1;
- left_child(n) = n*2;
- right_child(n) = n*2+1;

数据映射：
define BASE = next_power_of_two(size of input)
tree[n] = tree[left_child[n)] + tree[right_child(n)] for n < BASE
tree[n] = input[n-BASE) for n >= BASE

初始化：
这样构造树时，则把输入复制从tree[M]开始的空间。然后从tree[M-1]开始，用tree[n] = tree[n*2] + tree[n*2+1]构造。

检索：
当我们需要检索区间(j, k)时(即区间[j+1, k-1])，相关结点都在j, k的最小公共子树里，然后寻找到j的path上所有左结点的右兄弟之和，和到k的path上所有右结点的左兄弟之和。我们只需要迭代指向j, k的父亲，直到两者指向同一结点。

更新：当更新A[k]时，只要相应更新根结点到结点[k,k]路径上所有结点的value.这通过迭代访问parent(n)即可做到。

边界条件：开区间访问需要检索A[-1]和A[end+1]，因此我们增加两个元素，同时把index向右平移1.

```
inline unsigned int next_power_of_two(unsigned int v) {
    --v;
    v |= (v >> 1);
    v |= (v >> 2);
    v |= (v >> 4);
    v |= (v >> 8);
    v |= (v >> 16);
    return v+1;
}

class NumArray {
public:
    NumArray(vector<int> &nums) : M(next_power_of_two(nums.size()+2)) {
        tree.resize(M<<1, 0);
        copy(nums.begin(), nums.end(), tree.begin()+M+1); M + 1,  M+ 2, … 2*M -1 存放原数组
        for (int k = M-1; k>0; k--) tree[k] = tree[k<<1] + tree[k<<1|1];
    }

    void update(int i, int val) {
        i++; //number is 1 based i 可取0, 根据题目条件
        int diff = val - tree[M+i];
        for (int key = M+i; key > 0; key >>= 1) tree[key] += diff;
    }

    int sumRange(int i, int j) {
        int sum = 0;           判断是否兄弟?
        for (i += M, j += M+2; i != j^1; i >>= 1, j >>= 1) {
  有右兄弟 if (!(i&1)) sum += tree[i^1]; why not use tree[i + 1]
  有左兄弟 if (j&1) sum += tree[j^1];      tree[j - 1]
        }
        return sum;
    }

private:
    vector<int> tree;  //tree stored in array, size is M*2
    int M; //smallest power of 2 greater or equal than nums.size()+2
};
```

扩展到高维度

例子：range sum query 2D

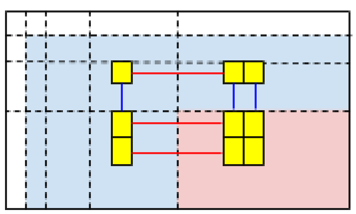
Given a 2D matrix matrix, find the sum of the elements inside the rectangle defined by its upper left corner (row1, col1) and lower right corner (row2, col2).

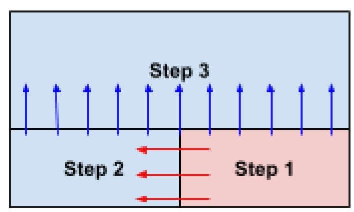
Note:
The matrix is only modifiable by the update function.
You may assume the number of calls to update and sumRegion function is distributed evenly.
You may assume that row1 ≤ row2 and col1 ≤ col2.

Example: Given matrix = [
[3, 0, 1, 4, 2],
[5, 6, 3, 2, 1],
[1, 2, 0, 1, 5],
[4, 1, 0, 1, 7],
[1, 0, 3, 0, 5]
]
sumRegion(2, 1, 4, 3) -> 8
update(3, 2, 2)
sumRegion(2, 1, 4, 3) -> 10

Solution: Segment tree

把1D的Segment Tree（或Fenwick Tree）扩展到2D。办法是类似1D segment tree划分结点。



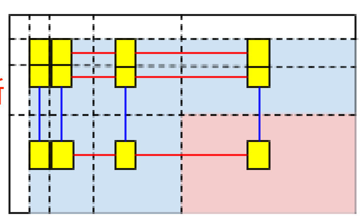


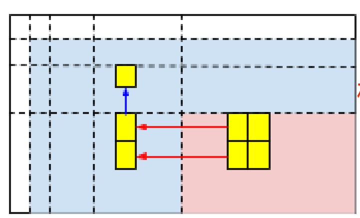
初始化

数据结构：上左图中红色区域表示数组，蓝色区域表示tree的数据，记录某个2D region的sum，黄色块和红蓝线表示结点间的父子关系。不难看出这个2D矩阵的每行、每列都是一个1D Segment tree

初始化：首先把数据copy到矩阵右下角，然后先按行初始化data块左边的tree数组，然后按列更新前一半行的tree 数组。如上右图。

更新





检索(query)

更新：

如上左图。但更新结点时因为data是2D的。因此结点(i, j)的更新要传播要所有i的祖先和j的祖先的笛卡尔积上。导致的变化在于每个结点需要更新log(m)*log(n)个结点，

检索：

如上右图，首先对每行做range sum。然后对每列做range sum

类似的，把fenwick tree扩展到2D也可以解决这个问题

```
inline unsigned int next_power_of_two(unsigned int v) {
    --v;
    v |= (v >> 1);
    v |= (v >> 2);
    v |= (v >> 4);
    v |= (v >> 8);
    v |= (v >> 16);
    return v+1;
}

class NumMatrix {
public:
    NumMatrix(vector<vector<int>> &matrix)
    : BASE0(next_power_of_two(matrix.size()+2)),  BASE1(next_power_of_two(matrix.size()+2)),
      tree(BASE0 * 2, vector<int>(BASE1 * 2, 0)) {
        for (int i = 0; i < matrix.size(); ++i) {
            copy(matrix[i].begin(), matrix[i].end(), tree[BASE0+i+1].begin()+BASE1+1);
            for (int j = BASE1 -1; j>0; --j)
                tree[BASE0+i+1][j] = tree[BASE0+i+1][j<<1]+tree[BASE0+i+1][j<<1|1];
        }

        for (int i = BASE0-1; i >0; --i)
            for (int j = BASE1+matrix[0].size(); j >0; --j)
                tree[i][j] = tree[i<<1][j] + tree[i<<1|1][j];
    }

    void update(int row, int col, int val) {
        ++row, ++col; //1 based index
        int diff = val - tree[BASE0+row][BASE1+col];
        for (int k = BASE0+row; k > 0; k >>=1)
            for (int j = BASE1+col; j >=0; j>>=1) tree[k][j] += diff;
    }

    int sumRegion(int row1, int col1, int row2, int col2) {
        int sum = 0;
        for (int i1 = row1+BASE0, i2 = row2+BASE0+2; i1^i2^1; i1>>=1, i2>>=1) {
            if (!(i1&1)) sum += sumRow(i1^1, col1, col2);
            if (i2&1) sum += sumRow(i2^1, col1, col2);
        }
    }

private:
    inline int sumRow(int i, int col1, int col2) {
        vector& t = tree[i];
        int sum = 0;
        for (int j1 = col1+BASE1, j2 = col2+BASE1+2; j1^j2^1; j1>>=1, j2>>=1) {
            if (!(j1&1)) sum += t[j1^1];
            if (j2&1) sum += t[j2^1];
        }
        return sum;
    }

    const int BASE0, BASE1; //number of leaf nodes in each dimension
    vector<vector<int>> tree;
};
```

写Range，读Element

例子： Range addition

Assume you have an array of length n initialized with all 0's and are given k update operations.
Each operation is represented as a triplet: [startIndex, endIndex, inc] which increments each element of subarray A[startIndex ... endIndex] (startIndex and endIndex inclusive) with inc.
Return the modified array after all k operations were executed.

Example:
Given:
    length = 5,
    updates = [
        [1, 3, 2],
        [2, 4, 3],
        [0, 2, -2]
    ]
Output: [-2, 0, 3, 5, 3]

Solution: Segment tree

把segment tree的读写操作互换，modify range时更新相关非叶结点，retrieve元素的值时访问对应叶子结点到根结点路径上的node之和。

```
inline unsigned int next_power_of_two(unsigned int v) {
    --v;
    v |= (v >> 1);
    v |= (v >> 2);
    v |= (v >> 4);
    v |= (v >> 8);
    v |= (v >> 16);
    return v+1;
}

vector<int> getModifiedArray(int length, vector<vector<int>>& updates) {
    int M = next_power_of_two(length+2);
    vector<int> tree(M*2, 0);
    for (vector<int>& v : updates) {
        int val = v[2];
        for (int i = v[0]+M, j = v[1]+M+2; i ^ j ^ 1; i >>= 1, j >>=1 ) {
            if (!(i&1)) tree[i^1] += val;
            if (j&1) tree[j^1] += val;
        }
    }

    vector<int> result(length, 0);
    for (int i = 1; i <= length; ++i) {
        int sum = 0;
        for (int j = M+i; j > 0; j >>= 1) sum += tree[j];
        result[i-1] = sum;
    }
    return result;
}
```

动态分配空间

例子：Weighted RAM(Two Sigma面经题) 让设计一个数据结构，要求可以存储Object-Weight Pair，实现如下几个接口：1） Update；2） Insert；3） Remove；4） GetRandom. 第四个方法是实现的重点。这个GetRandom的方法是随机地返回一个Object，要求概率满足：此object的weight / 所有weight的和。 楼主想的是HashMap的Key存Object，Value存weight，这样可以轻松实现Update，Insert和remove的功能。至于GetRandom这个方法，楼主是用了一个辅助的Array，用来表明每个Object对应的区间，然后用随机数获得某个index，最后看看这个index在哪个区间，然后就返回该对象。但是缺点是：每每更新，插入或者remove掉某个object的时候，这个辅助的array都要重新计算，有没有更好的方法来解决此题？貌似面试官一直在提normalization 和Denormalization。不能理解面试官要的是什么.

Source: http://www.1point3acres.com/bbs/thread-198541-1-1.html

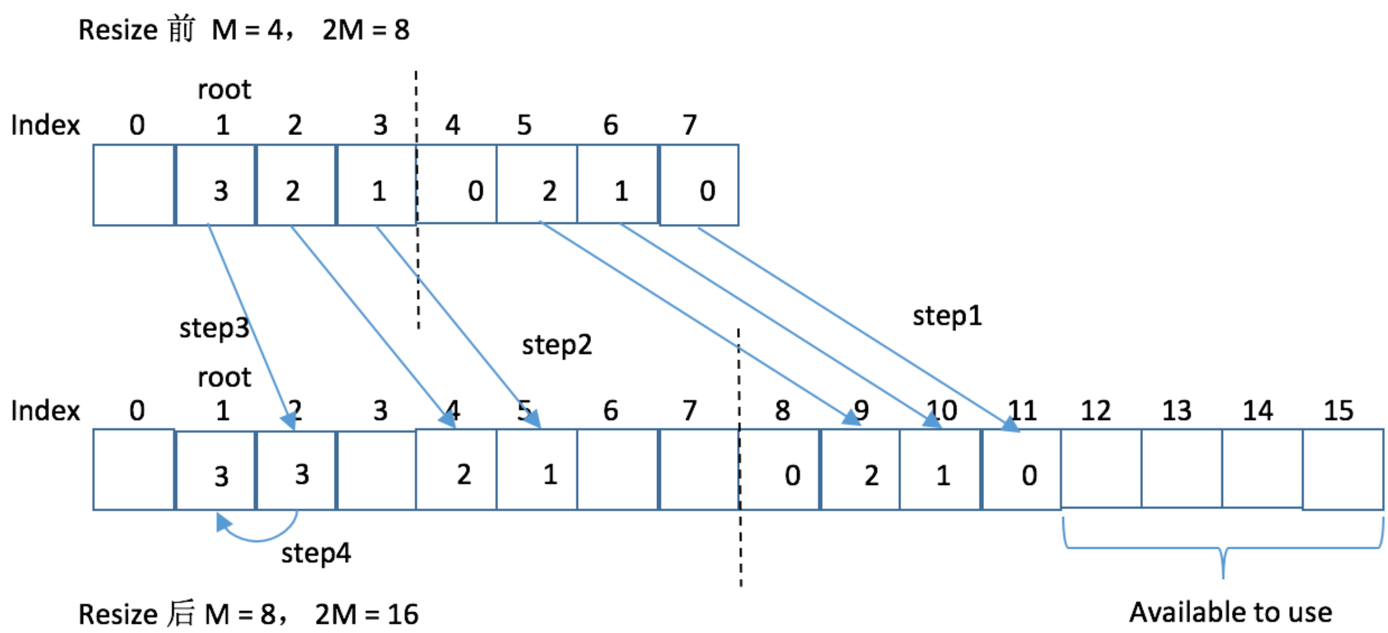
Solution:
用一个segment tree的结构来存weights。一个queue用来存放树里available的位置。两个unordered_map用来存segment tree的叶子结点和object之间的双向mapping。

随机采样：
产生一个[1, sum of weights]范围内的数。搜索cumsum(weight)数组的lower_bound。这可以通过对segment tree作二分搜索得到。

数据添加、删除、更新
维护queue和unordered_map的操作比较直观。
对segment tree的修改体现在删除时把原来非0的叶子结点置0. 添加时需要检查是否当前capacity已满，如果已满则需要先resize数组。然后update queue指定的叶子位置就好。

```
class weighted_RAM {
public:
    weighted_RAM() : M(128), tree(M*2, 0) {
        for (int k = 1; k < M; ++k) loc.push(k); //free spot from 1 to M-1
    }                                         1, 2, ... 127?

    void add(const string &str, int w) {
        if (loc.empty()) resize();
        int i = loc.front();
        loc.pop();
        update_leaf(i, w);   w = weight
        idx_to_obj[i] = str;
        obj_to_idx[str] = i;
    }

    void update(const string &str, int w) {      change weight
        int i = obj_to_idx[str];
        update_leaf(i, w-tree[M+i]);
    }                        diff

    void remove(const string &str) {
        int i = obj_to_idx[str];
        loc.push(i);   index i 可用
        update_leaf(i, -tree[M+i]);   清零
        idx_to_obj.erase(i);
```

```
        obj_to_idx.erase(str);
    }

    string get_random() {
        default_random_engine eng;
        int key = (eng())%tree[1]+1;   [1, sum]
        int i = sum_search(key+1);   为什么key + 1?
        return idx_to_obj[i];
    }

private:
    void resize() {          复杂度? 2 * M, 从amortize的角度来看，仍是constant的
        tree.resize(M*4, 0);
        for (int base = M; base; base >>= 1) //move current nodes to new locations
            rotate(tree.begin()+base, tree.begin()+base*2, tree.begin()+base*3);
        tree[1]=tree[2]; //new root
        for (int k = M; k < M*2; ++k) loc.push(k);   更新可用index，原来已用index无需变
        M<<=1;  double M 的值
    }

    int sum_search(int w) {
        int i = 1;
        do {
            i <<= 1;
            if (w > tree[i]) w -= tree[i++];
        } while (i < M); i > M 意味着到达叶节点
        return i-M;
    }

    void update_leaf(int i, int diff) {
        for (int key = M+i; key > 0; key >>= 1) tree[key] += diff;   与普通的segment tree 相同
    }

private:
    int M; //smallest power of 2 greater or equal than nums.size()+2
    vector<int> tree;  //tree stored in array, size is M*2
    queue<int> loc;  //free spots
    unordered_map<int, string> idx_to_obj;
    unordered_map<string, int> obj_to_idx;
};
```


Resize 前 M = 4， 2M = 8
root
Index 0 1 2 3 4 5 6 7
3 2 1 0 2 1 0
step3
step2
step1
root
Index 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
3 3 2 1 0 2 1 0
step4
Resize 后 M = 8， 2M = 16
Available to use