UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

TEEE - Projeto de circuitos fotônicos em silício

Unidade 01

Prof. Adolfo Herbster
21 de Dezembro de 2021

Lição atual: Guia plana dielétrico multicamada

Transmission matrix method - TMM

Considere um guia dielétrico formado por z camadas, cujo índice de refração da j-ésima camada é n_j. A componente y campo elétrico é [1]

$$E_y(x, z, t) = E_y(x)e^{wt - z\beta} \tag{129}$$

A equação de onda para camada j é

$$\frac{\mathrm{d}E_y^j(x)}{\mathrm{d}x^2} - \left(\beta^2 - k_0^2 n_j^2\right) E_y^j(x) = 0 \tag{130}$$

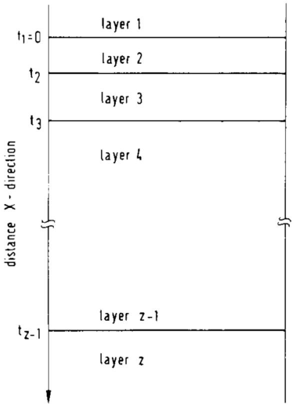

Fig. 1. The geometry of the layer structures. The z coordinate is taken to be the direction of propagation and parallel to the interfaces. The x coordinate is perpendicular to the layers, and t_j are the positions of the interfaces.

Transmission matrix method - TMM

Modo TE

A solução geral da Eq. 130 é

$$E_y^j(x) = A_j e^{\alpha_j(x-t_j)} + B_j e^{-\alpha_j(x-t_j)} \tag{131}$$

com

$$\alpha_j = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_j^2} \tag{132}$$

em que A_j e B_j são coeficientes complexos de campo da j-ésima camada. Importante lembrar que a parte real de β é o índice efetivo do guia, enquanto a parte imaginária corresponde à absorção do guia $\alpha_{wg} = 2\Im(\beta)$. Ao aplicar as condições de contorno (modo TE):

$$E_j(t_{j+1}) = E_{j+1}(t_{j+1}) \tag{133}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_y^j(t_{j+1})}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}E_y^{j+1}(t_{j+1})}{\mathrm{d}x^2} \tag{134}$$

Transmission matrix method - TMM

Modo TE

Como resultado

$$A_j e^{\sigma_j} + B_j e^{-\sigma_j} = A_{j+1} + B_{j+1} \tag{135}$$

$$A_j \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}}\right) e^{\sigma_j} - B_j \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}}\right) e^{-\sigma_j} = A_{j+1} - B_{j+1} \tag{136}$$

com $\sigma_j = \alpha_j d_j$, em que d_j é a espessura da j-ésima camada. A espessura da primeira e da última camada é considerada como zero, que correspondem ao substrato e a casca, respectivamente. Os coeficientes podem ser reescritos como

$$A_{j+1} = \left[\left(1 + \frac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}}\right) e^{\sigma_j}\right] \frac{A_j}{2} + \left[\left(1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}}\right) e^{-\sigma_j}\right] \frac{B_j}{2} \tag{137}$$

$$B_{j+1} = \left[\left(1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}}\right) e^{\sigma_j}\right] \frac{A_j}{2} + \left[\left(1 + \frac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}}\right) e^{-\sigma_j}\right] \frac{B_j}{2} \tag{138}$$

Transmission matrix method - TMM

Modo TE

Na forma matricial

$$
\begin{bmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(1 + \dfrac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}}\right) e^{\sigma_j} & \left(1 - \dfrac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}}\right) e^{-\sigma_j} \\ \left(1 - \dfrac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}}\right) e^{\sigma_j} & \left(1 + \dfrac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}}\right) e^{-\sigma_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_{j+1} = \mathbf{T}_j \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_j \tag{139}
$$

em que a matrix complexa T_j descreve a transformação dos coeficientes entre a camada j e $j+1$. Assim, os coeficientes a camada j são calculados de forma recursiva a partir dos coeficientes da primeira camada

$$
\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_j = \mathbf{T}_{j-1} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_{j-1} = \mathbf{T}_{j-1} \cdot \mathbf{T}_{j-2} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_{j-2} = \mathbf{T}_{j-1} \ldots \mathbf{T}_1 \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_1 \tag{140}
$$

Observe que para determinar os coeficientes da última camada z

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_z = \mathbf{T}_{\mathrm{WG}} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_1 , \tag{141}$$

em que

$$\mathbf{T}_{\mathrm{WG}} = \mathbf{T}_{z-1} \cdot \mathbf{T}_{z-2} \ldots \mathbf{T}_1 = \Pi_{k=z-1}^{1} \mathbf{T}_k . \tag{142}$$

Importante destacar que nas camadas 1 e z os campos são evanescentes (veja Eq. 131) e, portanto:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} a \tag{143}$$

e

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} b \tag{144}$$

em que a e b são números complexos.

Assim, a solução da Eq. 141 (a partir da Eq. 143 e Eq. 144) é

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} b = \mathbf{T}_{\mathrm{WG}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} a = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} a = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \tag{145}$$

Portanto, a constante de propagação é determinada pela solução da equação

$$t_{11}\left(\beta\right) = 0 \tag{146}$$

Para determinar a solução da Eq. 146, é utilizando o método "downhill", descrito na referência.

Exemplo 3: Considere um guia dielétrico formado por três camadas, com índices $n_1 = 1.45$, $n_2 = 3.45$ e $n_3 = 1.45$. A espessura do guia central é 0.25 μm e a comprimento de onda do sinal é 1550 nm. Compare seus resultados com aqueles obtidos para análise do guia dielétrico simétrico. Determine os índices de refração efetivo de cada modo TE.

Exemplo 4: Um guia dielétrico é formado por 5 camadas, cujos índices de refração são $n_c = 1.45$, $n_1 = 1.56$, $n_2 = 1.45$, $n_3 = 1.56$, $n_s = 1.45$, e espessuras iguais a $h_1 = 0.75$ μm, $h_2 = 0.50$ μm, $h_3 = 0.75$ μm, com sinal de comprimento de onda $\lambda_0 = 1.0$ μm. Determine os índices de refração efetivo de cada modo TE. Esboce a componente y do campo elétrico para cada modo.

Referências

K.-H. Schlereth e M. Tacke, “The complex propagation constant of multilayer waveguides: an algorithm for a personal computer”, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 26, n.º 4, pp. 627–630, 1990.