



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

TEEE - Projeto de circuitos fotônicos em silício

Unidade 01

Prof. Adolfo Herbster
1 de dezembro de 2021

Lição atual: Revisão - pré-requisitos

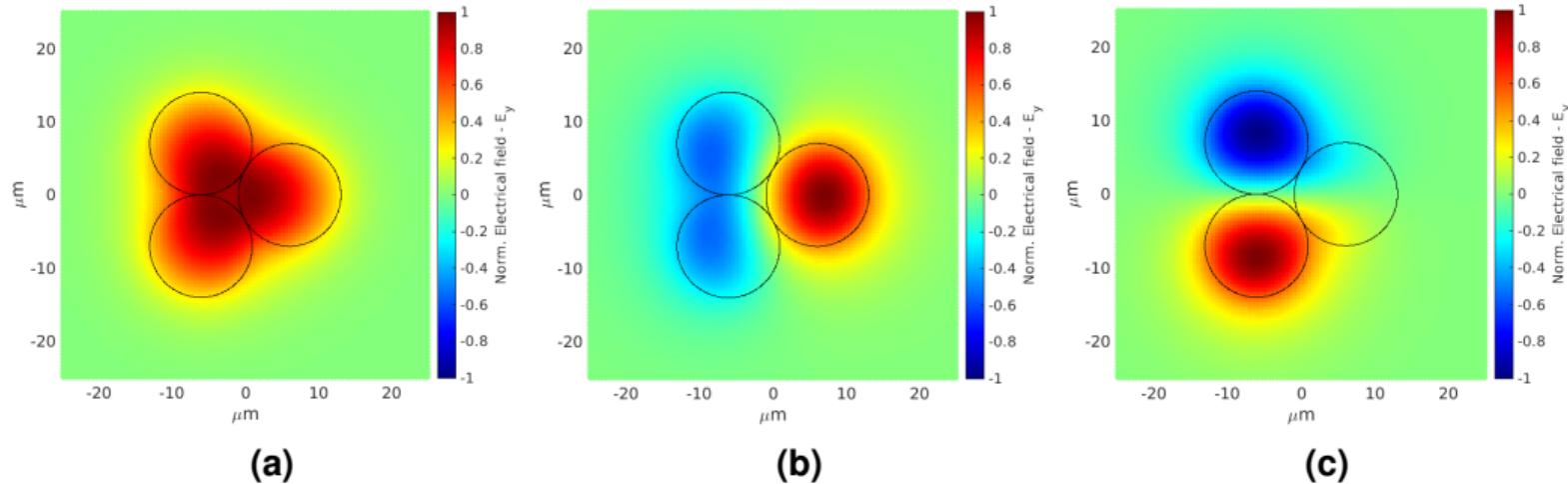


Figura 1: Supermodos presentes em uma fibra de três núcleos monomodo de raio r , cuja distância entre os núcleos $d = 2r$.

Lição atual: Equações diferenciais

Referência - BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno.* 7 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

Motivação

"Existe apenas uma forma precisa de apresentar as leis, e esta é por meio das equações diferenciais. Estas equações têm a vantagem de serem fundamentais e, até onde sabemos, precisas. Se você aprender as equações diferenciais, sempre poderá recorrer a elas. Não há o que desaprender.- *The Feynman Lectures on Physics - Cálculo diferencial de campos vetoriais - Vol. 2.*

Classificação das equações diferenciais

1. equações diferenciais ordinárias (ODE) e parciais (PDE);

$$\frac{dy(x)}{dx} = ay(x) + g(x) \text{ - ODE}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0 \text{ - PDE},$$

2. ordem;

$$\frac{dy}{dx} = ay(x) + g(x) \text{ - primeira ordem}, \quad a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \text{ - segunda ordem},$$

3. equações diferenciais lineares e não lineares;

$$\frac{dy}{dx} = ay(x) + g(x) \text{ - linear}, \quad \frac{dy}{dx} = f(y) \text{ - não linear } (f(y) = \sin(y)),$$

4. sistemas de equações diferenciais;

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y}(x), \text{ com } \mathbf{y}(x) = [y_1(x) \ y_2(x) \ \dots \ y_n(x)]^T \text{ e } \mathbf{A} \text{ uma matrix } n \times n.$$

Equação diferencial ordinária

Primeira ordem - definição

A equação diferencial de primeira ordem linear tem o formato

$$\frac{dy}{dt} - ay = f(t), \quad (1)$$

em que a é uma constante. A solução da Eq. 1 é formada por duas outras soluções: uma solução associada à equação homogênea $[y_n(t)]$ e uma solução particular $[y_p(t)]$ devido à nova entrada $f(t)$. Neste caso, a função $f(t)$ permite novas entradas para $t > 0$.

A entrada $f(t)$ é uma **fonte** se somada, e um **sorvedouro** se subtraída da equação diferencial em análise. Por exemplo, em um banco monetário, $f(t)$ representa a taxa de novos depósitos ou retiradas ao longo do tempo, enquanto a a constante de crescimento (juros).

Equação diferencial ordinária

Primeira ordem - solução

Portanto, a solução da Eq. 1 é (substitua nesta equação!)

$$y(t) = y_n(t) + y_p(t). \quad (2)$$

A solução da equação $dy/dt = ay$ (homogênea) é $y_n(t) = y(0)e^{at}$, que cresce de forma exponencial se $a > 0$ ou decresce da mesma forma se $a < 0$. Ao lembrar que a solução de uma equação linear é¹

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int_0^t \mu(s)f(s)ds + y(0) \right], \quad (3)$$

em que $y(0)$ é a condição no instante $t = 0$, e como $\mu(t) = e^{-at}$, a solução geral é

$$y(t) = \underbrace{y(0)e^{at}}_{y_n(t)} + \underbrace{e^{at} \int_0^t e^{-as}f(s)ds}_{y_p(t)} \quad (4)$$

¹É utilizado o método do fator integrante.

Equação diferencial ordinária

Segunda ordem - definição

Uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem é definida como:

$$P(t) \frac{d^2y}{dt^2} + Q(t) \frac{dy}{dt} + R(t)y = f(t). \quad (5)$$

A equação é homogênea caso $f(t) = 0$. Caso contrário, a equação diferencial é não homogênea. Em problemas físicos, o termo d^2y/dt^2 , ou seja, a derivada segunda da variável dependente $y(t)$ em relação à t , representa a aceleração: a taxa de variação da velocidade dy/dt .

Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

Boyce 3.1, Zill 4.3, Nagle 4.2 e 4.3

Problema: Determinar a solução da equação

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (6)$$

Caso $a = 0$, a solução é conhecida e igual a $y(t) = Ce^{\tau t}$, em que C é uma constante qualquer e $\tau = -c/b$. Portanto, é suposto, inicialmente, que a solução da Eq. 6 seja do tipo $y(t) = Ce^{rt}$. Então, ao substituir esta solução na Eq. 6, é obtida a equação característica (ou auxiliar):

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (7)$$

Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

Boyce 3.1 e 3.4, Zill 4.3, Nagle 4.2 e 4.3

Há três casos possíveis:

1. Raízes reais distintas (**como determinar C_1 e C_2 ?**):

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (8)$$

2. Raízes complexas (auxílio da fórmula de Euler⁴):

$$y(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos wt + C_2 \sin wt) \quad (9)$$

3. Raízes idênticas (redução de ordem):

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 t e^{r_1 t} \quad (10)$$

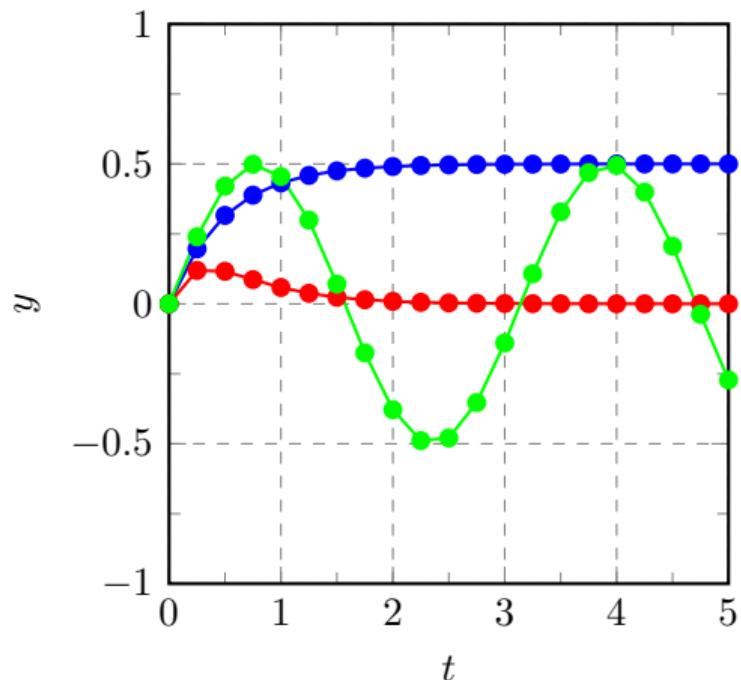
⁴ $e^{-it} = \cos t - i \sin t$

Exemplos

Considere os exemplos:

- Exemplo 1: $y'' - 4y = 0$
- Exemplo 2: $y'' + 2y' = 0$
- Exemplo 3: $y'' + 6y' + 8y = 0$
- Exemplo 4: $y'' + 2y' + 2y = 0$
- Exemplo 5: $y'' - 4y' + 5y = 0$
- Exemplo 6: $y'' + 4y = 0$

Para todos os exemplos, as condições iniciais são: $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ (resposta ao impulso).



Equação diferencial parcial

Equações diferenciais parciais são equações diferenciais que apresentam derivadas com relação a mais de uma variável independente.

Por exemplo,

- equação de Laplace bidimensional:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) = 0 \quad (11)$$

- equação de calor unidimensional

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (12)$$

Para resolver esse tipo de problema, é possível utilizar o método da separação de variáveis.

Equação diferencial parcial

Método da separação de variáveis

O método consiste em determinar uma função $u(x, t)$ como sendo uma combinação linear de funções componentes simples $u_n(x, t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ e também satisfazem à equação e certas condições de fronteira. Cada função de componente simples é determinada considerando que

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) \quad (13)$$

Ao substituir essa função de variáveis separadas na equação diferencial parcial e usando as condições de fronteira, são obtidas, em muitas vezes, duas equações diferenciais ordinárias para as funções desconhecidas $X_n(x)$ e $T_n(t)$.

Método da separação de variáveis

Exemplo - equação do calor

Considere o problema descrito pela [Eq. 12](#). É proposto que a solução tem a forma

$$u(x, t) = X(x) T(t) \quad (14)$$

em que X e T são funções de apenas uma variável em x e em t respectivamente. Ao substituir na PDE e separar as variáveis, é obtido

$$\frac{T'(t)}{\alpha T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (15)$$

Após observar que as relações do lado direito e esquerdo são constantes, e independentes do valor de t e x , então

$$\frac{T'(t)}{\alpha T(t)} = -\lambda^2 \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \quad (16)$$

ou

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x) \quad \text{e} \quad T'(t) = -\lambda^2 \alpha T(t) \quad (17)$$

Método da separação de variáveis

Exemplo - equação do calor

A condição inicial é definida como $u(x, t) = X(x)T(t) = 0$ em $x = 0$ e $x = L$, ou seja,

$$X(0)T(t) = 0 \quad \text{e} \quad X(L)T(t) = 0, \quad t > 0. \quad (18)$$

Portanto

- ou $T(t) = 0$ para todo $t > 0$, o que implica em $u(x, t) = 0$ (**solução trivial**);
- ou $X(0) = X(L) = 0$.

Ignorando a solução trivial, é obtido o problema de valor de fronteira

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x), \quad X(0) = X(L) = 0. \quad (19)$$

Método da separação de variáveis

Exemplo - equação do calor

Há três soluções possíveis

1. $\lambda^2 < 0$: A solução geral da EDO é

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} \rightarrow C_1 = 0 \text{ e } C_2 = 0 \text{ (solução trivial)}. \quad (20)$$

2. $\lambda^2 = 0$: A solução geral da EDO é

$$X(x) = C_1 + C_2 x \rightarrow C_1 = 0 \text{ e } C_2 = 0 \text{ (solução trivial)}. \quad (21)$$

3. $\lambda^2 > 0$: A solução geral da EDO é

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \rightarrow C_1 = 0 \text{ e } C_2 \neq 0 \text{ (solução não trivial)}. \quad (22)$$

Método da separação de variáveis

Solução não trivial - $X(x)$

A solução não trivial apresenta autovalores e autofunções:

$$\underbrace{X_n(x) = a_n \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right)}_{\text{Autofunção}} \quad \text{e} \quad \overbrace{\lambda^2 = \left(n \frac{\pi}{L}\right)^2}^{\text{Autovalor}} \quad (23)$$

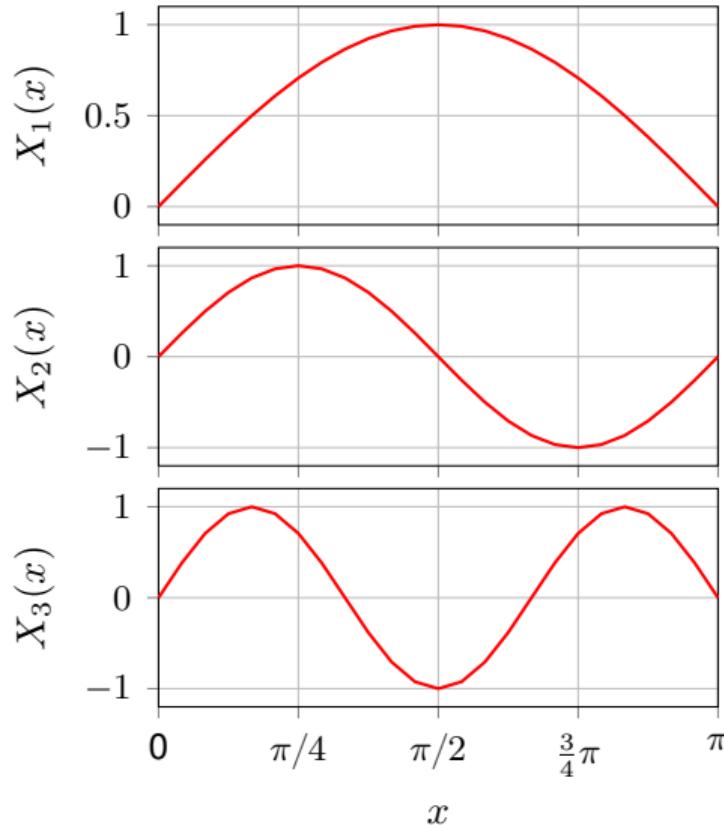
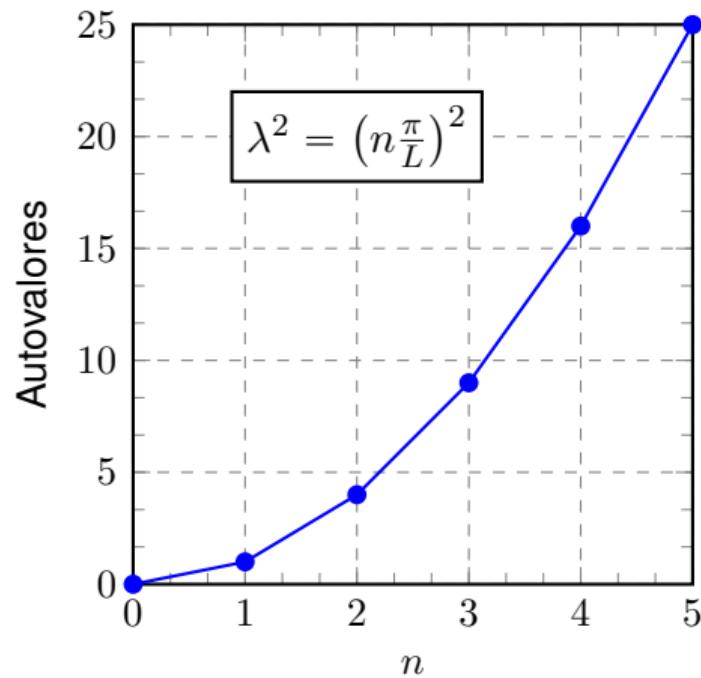
Cada autofunção satisfaz a condição de fronteira em $x = 0$ e $x = L$. Outra característica importante, é a **ortogonalidade** entre as autofunções:

$$\int_0^L \sin\left(m \frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) = 0 \text{ se } m \neq n. \quad (24)$$

Método da separação de variáveis

Solução não trivial - $X(x)$

Considere $L = \pi$.



Método da separação de variáveis

Solução não trivial - $T(t)$

Considerando os autovalores obtidos anteriormente, a função $T(t)$ é solução a equação diferencial ordinária

$$T'(t) + \alpha \left(n \frac{\pi}{L} \right)^2 T(t) = 0, \quad (25)$$

cuja solução é

$$T_n(t) = b_n e^{\alpha(n \frac{\pi}{L})^2 t}, \quad (26)$$

em que b_n é uma constante. Portanto, a função componente $u_n(x, t)$ é

$$u_n(x, t) = c_n \sin \left(n \frac{\pi x}{L} \right) e^{\alpha(n \frac{\pi}{L})^2 t}, \quad (27)$$

em que c_n é uma constante. A definição de c_n é determinada pela condição inicial do problema, por exemplo, $u(x, 0) = 3 \sin 2x - 6 \sin 5x$.

Método da separação de variáveis

Solução não trivial - Exemplo

Neste exemplo, considere $\alpha = 7$ e $L = \pi$. As condições de fronteira são $u(0, t) = 0$ e $u(L, t) = 0$. Por fim, a condição inicial é $u(x, 0) = 3 \sin 2x - 6 \sin 5x$. A solução para o problema é

$$u(x, t) = 3e^{-28t} \sin 2x - 6e^{-175t} \sin 5x \quad (28)$$

Lição atual: Álgebra vetorial

Referência - SADIKU, M. N. *Elementos de Eletromagnetismo*, 5. ed. 2012. cap. 01.

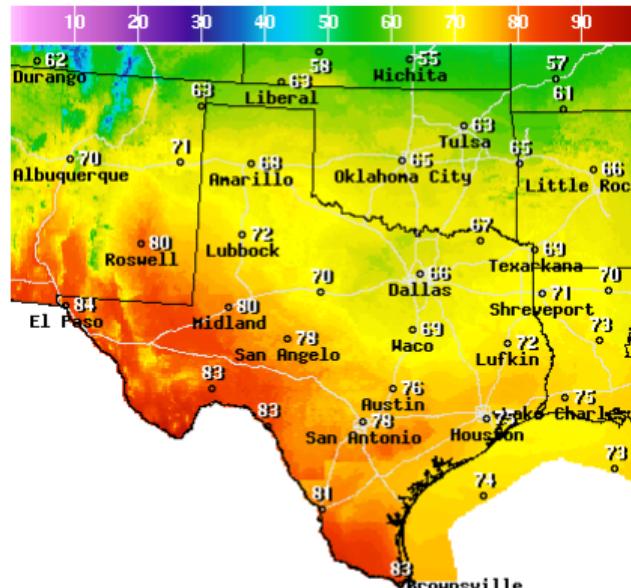
Escalares e vetores

- Um **escalar** é uma grandeza que apresenta apenas magnitude;
- Um **vetor** é uma grandeza que apresenta magnitude e orientação;
- Por um **campo** entendem-se uma quantidade que depende da posição no espaço. Há dois tipos de campos:
 - **campo escalar**: em que cada ponto, no espaço, é caracterizado por um escalar, ou seja, $g(x, y, z)$;
 - **campo vetorial**: em que cada ponto, no espaço, é caracterizado por um vetor, ou seja, $\mathbf{v}(x, y, z)$

Campo escalar

Por um *campo escalar*, designa-se um campo que é caracterizado, em cada ponto do espaço, por um único número - um escalar.

Como exemplo, cada localidade possui uma temperatura associada (número com unidade) na Fig. 2.



High Temperature(F) Ending Mon Apr 09 2018 8PM EDT
 **National Digital Forecast Database** 
 (Tue Apr 10 2018 00Z)
 06z issuance Graphic created-Apr 08 2:32AM EDT

Campo escalar

Cores representam superfícies de temperaturas, enquanto linhas de contorno possuem temperaturas constantes. Denominamos de isolinhas essas curvas de intensidade constante.

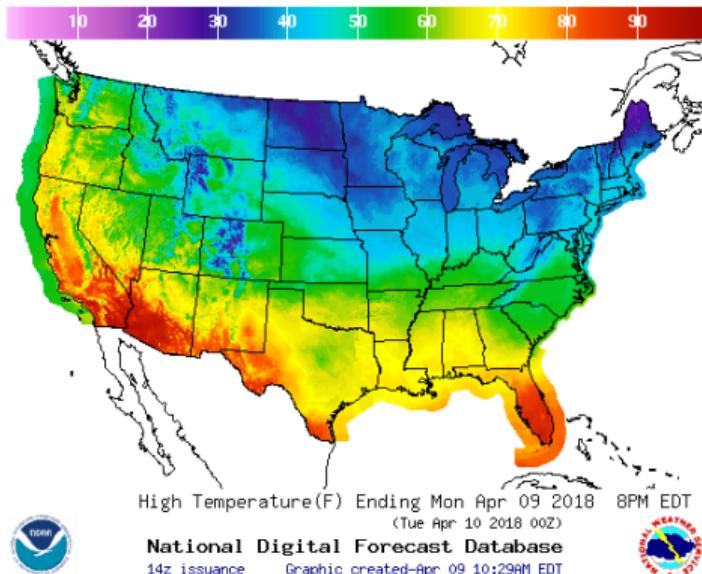


Figura 3: Campo escalar temperatura máxima @EUA - fonte <https://graphical.weather.gov/>.

Campo vetorial

Por um *campo vetorial*, designa-se um campo que é caracterizado, em cada ponto do espaço, por um vetor (magnitude e direção). Como exemplo, na Fig. 4, a velocidade e direção dos ventos é caracterizado em cada ponto.

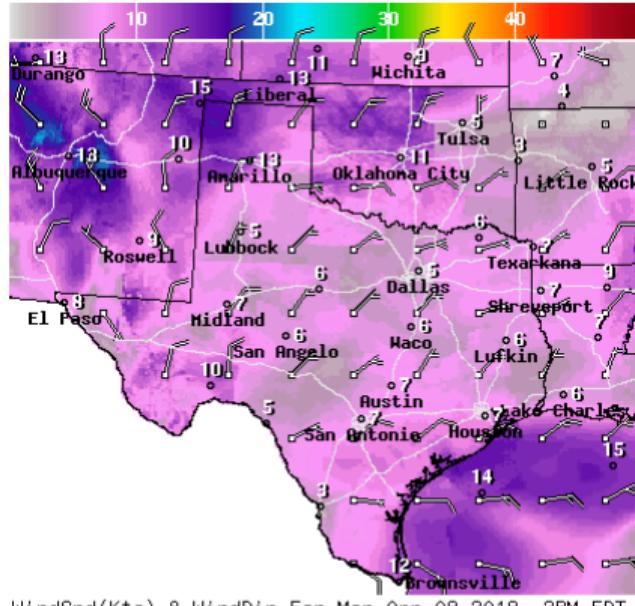


Figura 4: Campo vetorial dos ventos @Texas,EUA
- fonte <https://graphical.weather.gov/>.

Vetor unitário

Considerando um sistema de coordenadas cartesianas (ou retangulares), o vetor \mathbf{A} é representado como

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z, \quad (29)$$

em que A_x , A_y e A_z são as componentes do vetor \mathbf{A} . A magnitude do vetor \mathbf{A} é definida como

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \quad (30)$$

e o vetor unitário ao longo de \mathbf{A} é definido por

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{A_x}{A} \mathbf{a}_x + \frac{A_y}{A} \mathbf{a}_y + \frac{A_z}{A} \mathbf{a}_z. \quad (31)$$

Operações vetoriais básicas

- Igualdade:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}, \text{ se } A_x = B_x, A_y = B_y \text{ e } A_z = B_z;$$

- Soma:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$= (A_x + B_x) \mathbf{a}_x + (A_y + B_y) \mathbf{a}_y + (A_z + B_z) \mathbf{a}_z;$$

- Subtração:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

$$= (A_x - B_x) \mathbf{a}_x + (A_y - B_y) \mathbf{a}_y + (A_z - B_z) \mathbf{a}_z.$$

- Multiplicação (por um escalar):

$$\mathbf{C} = k\mathbf{A} = kA_x \mathbf{a}_x + kA_y \mathbf{a}_y + kA_z \mathbf{a}_z.$$

Vetor posição e vetor distância

O **vetor posição** \mathbf{R}_1 de um ponto P_1 é um vetor que começa na origem O do sistema de coordenadas e termina no ponto P_1

$$\mathbf{R}_1 = x_1 \mathbf{a}_x + y_1 \mathbf{a}_y + z_1 \mathbf{a}_z. \quad (32)$$

O **vetor distância** \mathbf{R}_{12} é o deslocamento entre dois pontos, ou seja:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{12} &= \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \\ &= (x_2 - x_1) \mathbf{a}_x + (y_2 - y_1) \mathbf{a}_y + (z_2 - z_1) \mathbf{a}_z. \end{aligned} \quad (33)$$

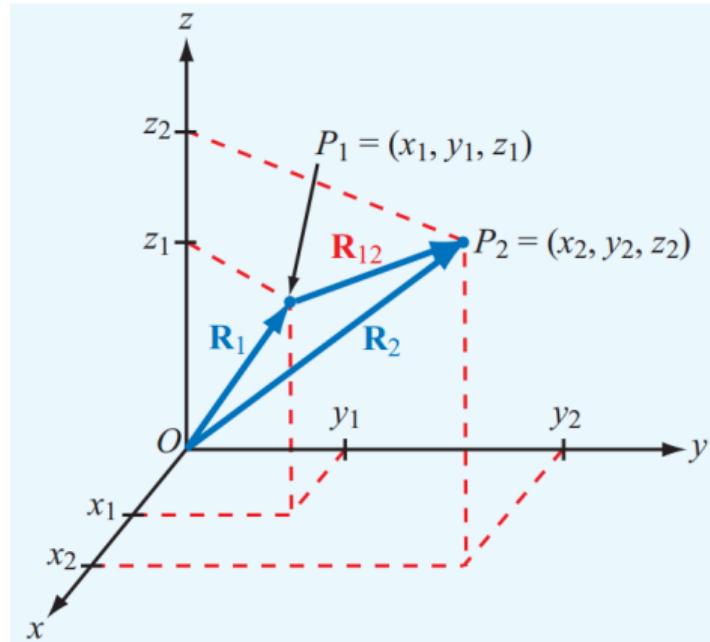


Figura 5: Vetor posição.

Produto escalar

Definição

O **produto escalar** entre os vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} é

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta_{AB} \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z,\end{aligned}\tag{34}$$

em que θ_{AB} é o menor ângulo entre \mathbf{A} e \mathbf{B} . Uma outra maneira de entender o produto escalar é observar que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ representa a componente do vetor \mathbf{A} na direção do vetor \mathbf{B} . Essa operação é comutativa, ou seja, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Caso os vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} sejam perpendiculares ($\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$), o produto escalar é nulo, pois $\theta_{AB} = 90^\circ$ e, portanto, $\cos \theta_{AB} = 0$. Ainda:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}| |\mathbf{A}| \cos \theta_{AA} = A^2.\tag{35}$$

Produto escalar

Componentes vetoriais

Dado um vetor \mathbf{A} , definimos a componente escalar A_B de \mathbf{A} ao longo do vetor \mathbf{B} como

$$\begin{aligned} A_B &= A \cos \theta_{AB} \\ &= |A| |\mathbf{a}_B| \cos \theta_{AB} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_B. \end{aligned} \quad (36)$$

A componente vetorial \mathbf{A}_B de \mathbf{A} ao longo de \mathbf{B} é a componente escalar multiplicada por um vetor unitário ao longo de \mathbf{B} , ou seja:

$$\mathbf{A}_B = A_B \mathbf{a}_B = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_B) \mathbf{a}_B. \quad (37)$$

Por exemplo, considere um vetor $\mathbf{A} = 3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 1\mathbf{a}_z$. A componente vetorial \mathbf{A}_x ao longo de \mathbf{a}_x é

$$\mathbf{A}_x = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_x) \mathbf{a}_x = 3\mathbf{a}_x. \quad (38)$$

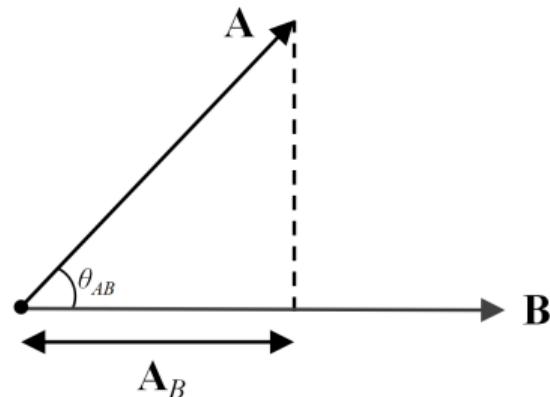


Figura 6: Componente vetorial \mathbf{A}_B .

Produto escalar

Exercícios

A partir da definição do produto (Eq. 34) escalar é possível estabelecer três importantes relações. Como exercício, verifique estas relações.

Exemplo 7: A lei dos co-senos estabelece que se três lados de um triângulo medem $|A|$, $|B|$ e $|C|$ e se o ângulo oposto ao lado de comprimento $|C|$ é θ , então

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta.$$

Exemplo 8: A desigualdade de Cauchy-Schwarz estabelece que se A e B são dois vetores arbitrários, então

$$|A \cdot B| \leq |A| |B|.$$

Exemplo 9: A desigualdade do triângulo estabelece que se A e B são dois vetores arbitrários, então

$$|A + B| \leq |A| + |B|.$$

Produto vetorial

Definição

O **produto vetorial** (em coordenadas retangulares) entre os vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} é

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta_{AB} \mathbf{a}_n, \quad (39)\end{aligned}$$

em que \mathbf{a}_n é o vetor unitário normal à superfície definida pelos vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} . Esse tipo de operação é anticomutativa, ou seja, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$, distributiva e não associativa. Quando os vetores são paralelos ($\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$), $\theta_{AB} = 0^\circ$ e, portanto, $\sin \theta_{AB} = 0$. Ou seja, não há como definir uma superfície a partir de dois vetores paralelos.

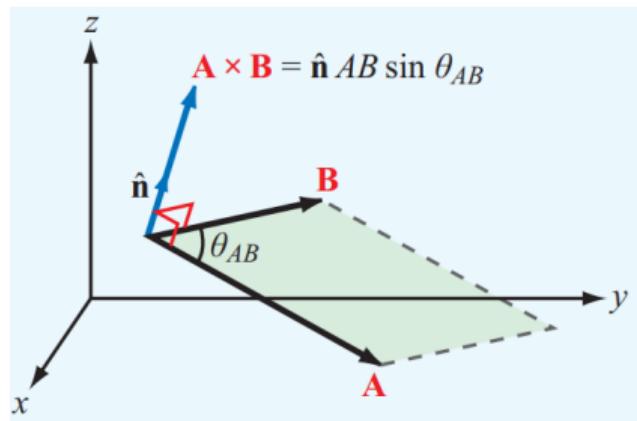


Figura 7: Produto vetorial.

Produto vetorial

Outras relações vetoriais

É importante apresentar duas importantes expressões vetoriais utilizadas para definir as componentes normais e tangenciais a uma superfície qualquer.

- Produto escalar triplo (qual o significado geométrico?):

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \quad (40)$$

Em forma de determinante é representado como

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

- Produto vetorial triplo (qual o significado geométrico?):

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (41)$$

Produto vetorial

Exercícios

Exemplo 10: Três campos vetoriais são dados por:

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{Q} = 2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{R} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z.$$

Determine:

- $(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \times (\mathbf{P} - \mathbf{Q});$
- $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \times \mathbf{P};$
- $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \times \mathbf{R};$
- $\sin \theta_{QR};$
- $\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{R});$
- um vetor unitário perpendicular a \mathbf{Q} e a \mathbf{R} , simultaneamente;
- a componente de \mathbf{P} ao longo de $\mathbf{Q}.$

Produto vetorial

Exercícios

Exemplo 11: Mostre que

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}. \quad (42)$$

Exemplo 12: Determine um vetor unitário normal à superfície ilustrada na [Fig. 8](#).

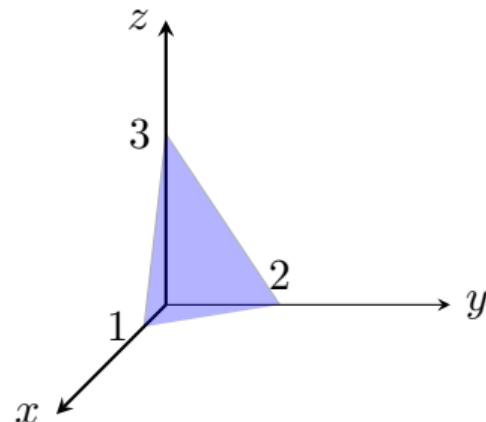


Figura 8: Superfície definida por vetores ortogonais.

Lição atual: Sistemas e transformação de coordenadas

Referência - SADIKU, M. N. *Elementos de Eletromagnetismo*, 5. ed. 2012. cap. 02 & 03.

Coordenadas cartesianas

Ao observar a Fig. 9, o elemento diferencial de comprimento é

$$d\mathbf{l} = dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z. \quad (43)$$

Da mesma forma, o elemento diferencial de área é (observe que há três elementos diferentes)

$$d\mathbf{S} = dydz \mathbf{a}_x + dxdz \mathbf{a}_y + dxdy \mathbf{a}_z. \quad (44)$$

Por fim, o elemento diferencial de volume é

$$dV = dxdydz. \quad (45)$$

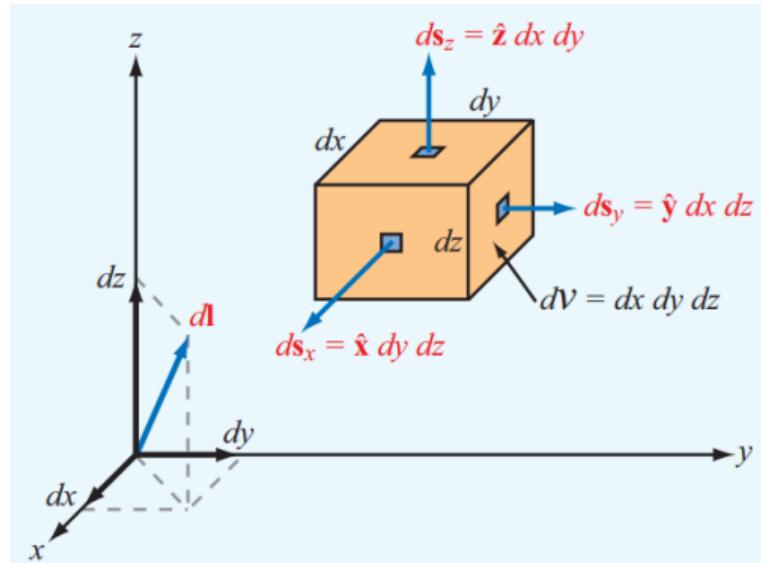


Figura 9: Elementos diferenciais em um sistema de coordenadas cartesianas.

Coordenadas cilíndricas

O sistema de coordenadas cilíndrico é mais apropriado para tratar problemas com simetria cilíndrica. Um vetor \mathbf{A} , em um sistema de coordenadas cilíndrico, pode ser escrito como

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z. \quad (46)$$

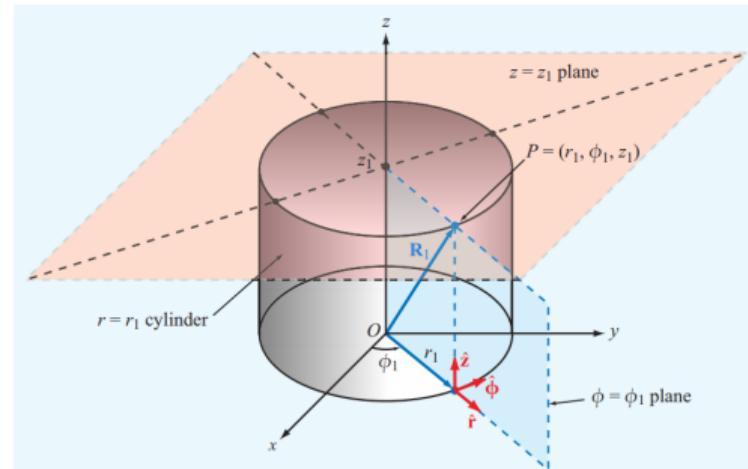


Figura 10: Um sistema de coordenadas cilíndrico.

Coordenadas cilíndricas

Ao observar a Fig. 11, o elemento diferencial de comprimento é

$$d\mathbf{l} = dr \mathbf{a}_r + r d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z. \quad (47)$$

Além disso, o elemento diferencial de área é (observe que há três elementos diferentes)

$$d\mathbf{S} = r d\phi dz \mathbf{a}_r + r dr dz \mathbf{a}_\phi + r dr d\phi \mathbf{a}_z. \quad (48)$$

Por fim, o elemento diferencial de volume é

$$dV = r d\phi dr dz. \quad (49)$$

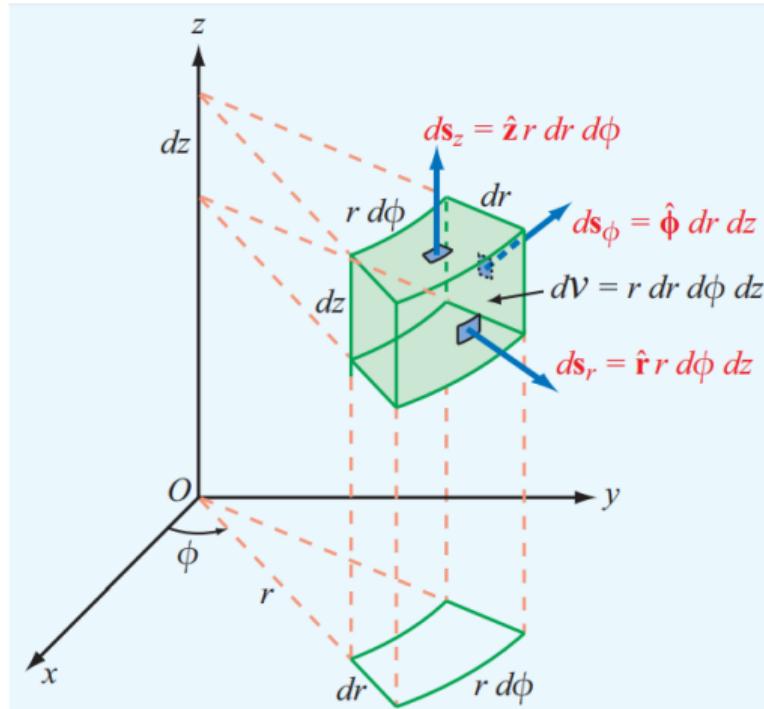


Figura 11: Elementos diferenciais em um sistema de coordenadas cilíndrico.

Coordenadas esféricas

O sistema de coordenadas esféricico é mais apropriado para tratar problemas com simetria esférica. Um vetor \mathbf{A} , em um sistema de coordenadas esférico, pode ser escrito como

$$\mathbf{A} = A_R \mathbf{a}_R + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi. \quad (50)$$

Na Fig. 12, observe a superfície cônica criada quando $\theta = \theta_1$, para $0 \leq r < \infty$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

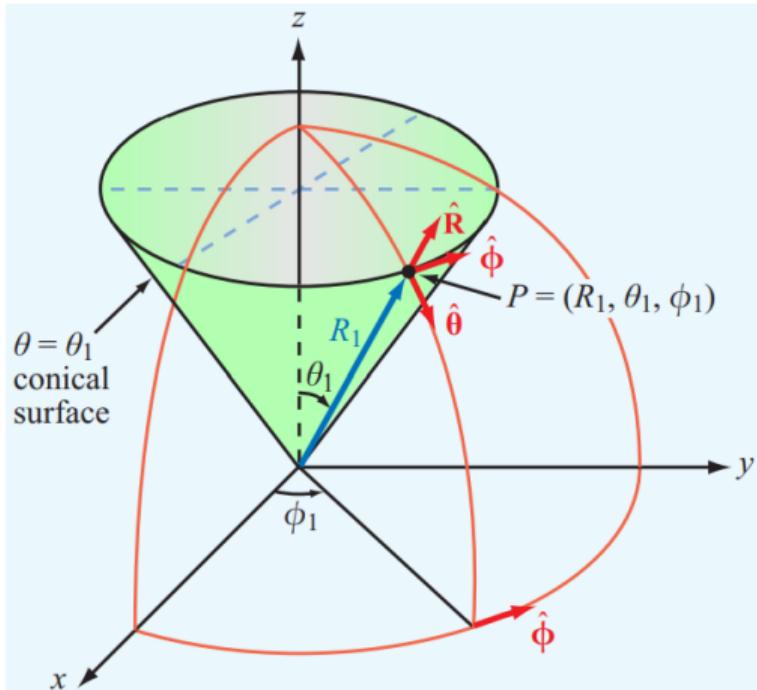


Figura 12: O sistema de coordenadas esféricico.

Coordenadas esféricas

A partir da Fig. 13, verifica-se que o elemento diferencial de comprimento é

$$d\mathbf{l} = dR \mathbf{a}_R + R d\theta \mathbf{a}_\theta + R \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi. \quad (51)$$

O elemento diferencial de área é (observe que há três elementos diferentes)

$$d\mathbf{S} = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_R + R \sin \theta dR d\phi \mathbf{a}_\theta + R dR d\theta \mathbf{a}_\phi. \quad (52)$$

O elemento diferencial de volume é

$$dV = R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi. \quad (53)$$

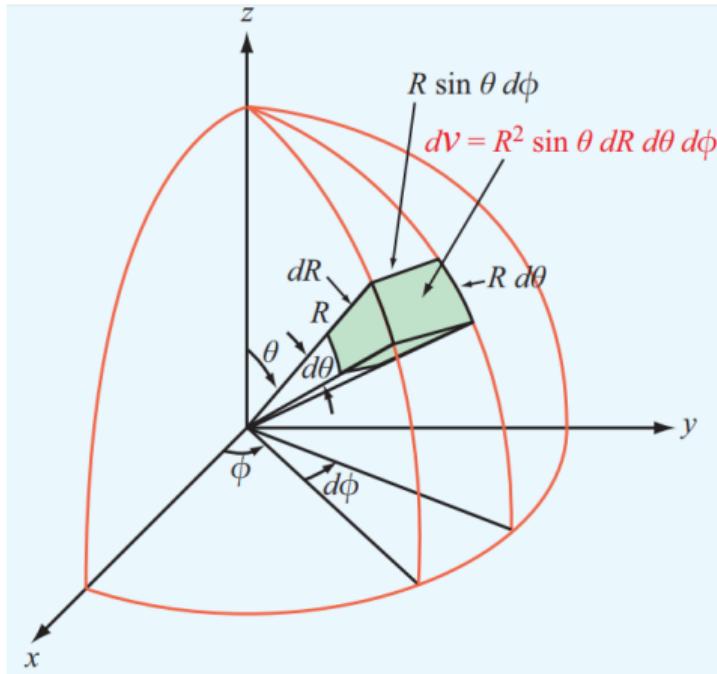


Figura 13: Elementos diferenciais em um sistema de coordenadas esférico.

Sistema de coordenadas

Exemplos

Exemplo 13: Considere um cilindro de altura igual a 2 cm e diâmetro igual a 3 cm. Determine a área e o volume deste cilindro.

Exemplo 14: Considere uma esfera de raio igual a 2 cm com densidade de carga volumétrica igual a

$$\rho_v(\theta) = 4 \cos^2 \theta \text{ C/m}^3. \quad (54)$$

Determine a carga total contida na esfera.

Transformação cartesiano - cilíndrico - cartesiano

As relações entre as variáveis (x, y, z) do sistema de coordenadas cartesiano e as do sistema de coordenadas cilíndrico (r, ϕ, z) são expressas como (veja Fig. 14):

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \\ z &= z \end{aligned} \quad (55)$$

$$z = z$$

ou

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, \\ y &= r \sin \phi, \\ z &= z. \end{aligned} \quad (56)$$

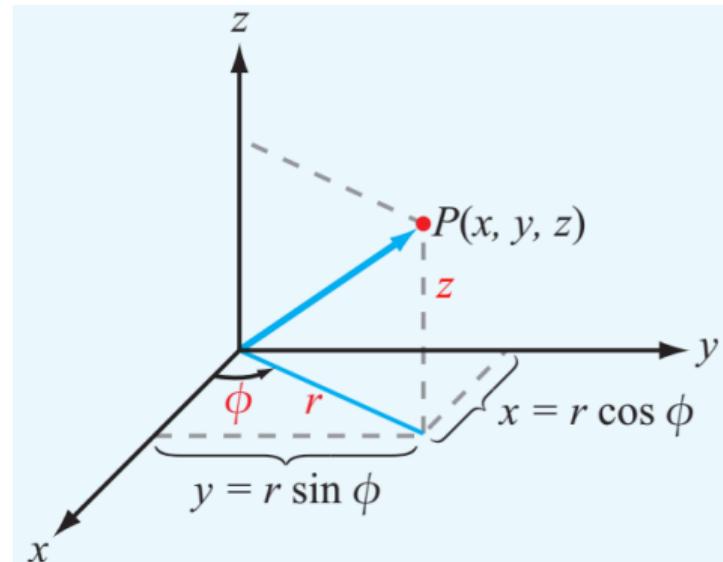


Figura 14: Transformação entre os sistemas de coordenadas cartesiano - cilíndrico.

Transformação cartesiano - cilíndrico - cartesiano

As relações entre os vetores unitários $(\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z)$ e $(\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\phi, \mathbf{a}_z)$ são obtidas a partir da Fig. 15:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_x &= \cos \phi \mathbf{a}_r - \sin \phi \mathbf{a}_\phi, \\ \mathbf{a}_y &= \sin \phi \mathbf{a}_r + \cos \phi \mathbf{a}_\phi, \\ \mathbf{a}_z &= \mathbf{a}_z\end{aligned}\quad (57)$$

ou

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_r &= \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y, \\ \mathbf{a}_\phi &= -\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y, \\ \mathbf{a}_z &= \mathbf{a}_z.\end{aligned}\quad (58)$$

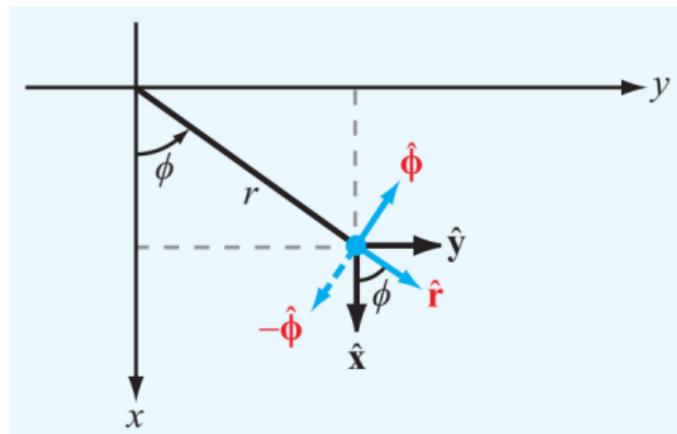


Figura 15: Transformação do vetor unitário.

Transformação cartesiano - cilíndrico - cartesiano

O vetor

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z,$$

é reescrito, a partir da Eq. 57, como (obtenha esta equação)

$$\mathbf{A} = \underbrace{\left(A_x \cos \phi + A_y \sin \phi \right)}_{A_r} \mathbf{a}_r + \underbrace{\left(-A_x \sin \phi + A_y \cos \phi \right)}_{A_\phi} \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z. \quad (59)$$

Na forma matricial, a transformação *cartesiano - cilíndrico* é expressa como

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}. \quad (60)$$

A transformação inversa (*cilíndrico - cartesiano*) é obtida a partir de (obtenha esta equação)

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}. \quad (61)$$

Transformação cartesiano - esférico - cartesiano

As relações entre as variáveis (x, y, z) do sistema de coordenadas cartesiano e as do sistema de coordenadas esférico (R, θ, ϕ) são expressas como (veja Fig. 16):

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right), \quad (62)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

ou

$$x = R \sin \theta \cos \phi,$$
$$y = R \sin \theta \sin \phi, \quad (63)$$
$$z = R \cos \theta.$$

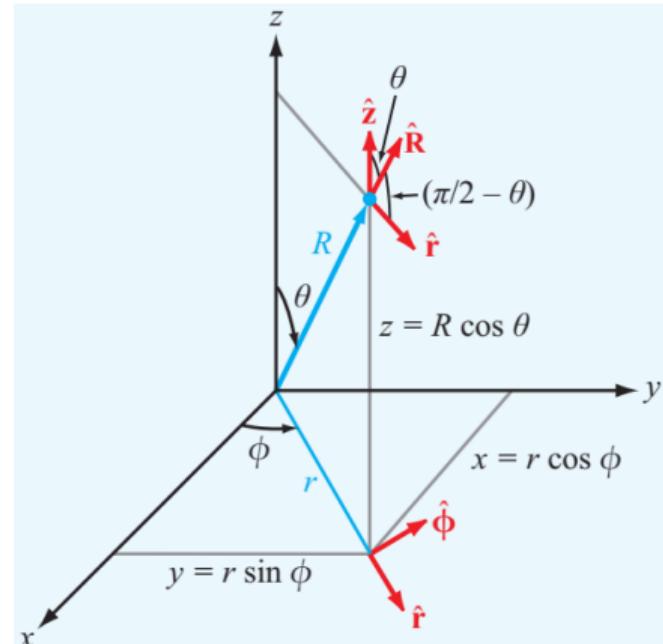


Figura 16: Transformação entre os sistemas de coordenadas cartesiano - esférico.

Transformação cartesiano - esférico - cartesiano

As relações entre os vetores unitários $(\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z)$ e $(\mathbf{a}_R, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\phi)$ são obtidas a partir da Fig. 16:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_x &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_R + \cos \theta \cos \phi \mathbf{a}_\theta - \sin \phi \mathbf{a}_\phi, \\ \mathbf{a}_y &= \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_R + \cos \theta \sin \phi \mathbf{a}_\theta + \cos \phi \mathbf{a}_\phi, \\ \mathbf{a}_z &= \cos \theta \mathbf{a}_R - \sin \theta \mathbf{a}_\theta + \cos \phi \mathbf{a}_\phi\end{aligned}\tag{64}$$

ou

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_R &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_y + \cos \theta \mathbf{a}_z, \\ \mathbf{a}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{a}_y - \sin \theta \mathbf{a}_z, \\ \mathbf{a}_\phi &= -\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y.\end{aligned}\tag{65}$$

Transformação cartesiano - esférico - cartesiano

O vetor

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z,$$

é reescrito, a partir da Eq. 64, como (obtenha esta equação)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = & \underbrace{(A_x \sin \theta \cos \phi + A_y \sin \theta \sin \phi + A_z \cos \theta)}_{A_R} \mathbf{a}_R + \\ & \underbrace{(A_x \cos \theta \cos \phi + A_y \cos \theta \sin \phi - A_z \sin \theta)}_{A_\theta} \mathbf{a}_\theta + \underbrace{(-A_x \sin \phi + A_y \cos \phi)}_{A_\phi} \mathbf{a}_\phi. \end{aligned} \quad (66)$$

Na forma matricial, a transformação *cartesiano - esférico* é expressa como

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}. \quad (67)$$

A transformação inversa (*esférico - cartesiano*) é obtida a partir de

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}. \quad (68)$$

Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos com vetores posição \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 é geralmente dada por

$$d = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \quad (69)$$

ou

$$d = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right]^{1/2} \text{(cartesiano)}, \quad (70)$$

$$d = \left[(r_2 \cos \phi_2 - r_1 \cos \phi_1)^2 + (r_2 \sin \phi_2 - r_1 \sin \phi_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right]^{1/2} \text{(cilíndrico)}, \quad (71)$$

$$d = \left\{ R_2^2 + R_1^2 - 2R_1 R_2 [\cos \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \sin \theta_1 \cos (\phi_2 - \phi_1)] \right\}^{1/2} \text{(esférico)}. \quad (72)$$

Transformação de coordenadas

Exercícios

Exemplo 15: Dado um ponto $P(-2, 6, 3)$ e o vetor $\mathbf{A} = y \mathbf{a}_x + (x + z) \mathbf{a}_y$, expresse P e \mathbf{A} em coordenadas cilíndricas e esféricas. Determine \mathbf{A} em P nos sistemas cartesiano, cilíndrico e esférico.

Exemplo 16: Expresse o vetor

$$\mathbf{B} = \frac{10}{r} \mathbf{a}_R + R \cos \theta \mathbf{a}_\theta + \mathbf{a}_\phi, \quad (73)$$

em coordenadas cartesianas e cilíndricas. Determine $\mathbf{B}(-3, 4, 0)$ e $\mathbf{B}(5, \pi/2, -2)$.

Exemplo 17: Dado um campo vetorial

$$\mathbf{D} = R \sin \phi \mathbf{a}_R - \frac{1}{R} \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_\theta + R^2 \mathbf{a}_\phi \quad (74)$$

Determine: **i)** \mathbf{D} em $P(10, 150^\circ, 330^\circ)$; **ii)** a componente de \mathbf{D} tangencial à superfície esférica $R = 10$ em P ; **iii)** um vetor unitário em P , perpendicular à \mathbf{D} e tangencial ao cone $\theta = 150^\circ$.

Transformação de coordenadas

Exercícios

Exemplo 18: Demonstre que a transformação de um vetor do sistema de coordenadas cilíndricas para o sistema de coordenadas esféricas é obtida usando

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}, \quad (75)$$

ou

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}. \quad (76)$$

Transformação de coordenadas

Exercícios

Exemplo 19: Demonstre que a transformação de um ponto do sistema de coordenadas cilíndricas para o sistema de coordenadas esféricas é obtida usando:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{r^2 + z^2}, \\ \theta &= \arctan\left(\frac{r}{z}\right), \\ \phi &= \phi, \end{aligned} \tag{77}$$

ou

$$\begin{aligned} r &= R \sin \theta, \\ \phi &= \phi, \\ z &= R \cos \theta. \end{aligned} \tag{78}$$

Lição atual: Cálculo vetorial

Referência - SADIKU, M. N. *Elementos de Eletromagnetismo*, 5. ed. 2012. cap. 03.

Derivada espacial

Considere um campo escalar $T(x, y, z)$ que representa a temperatura em uma determinada região. Como determinar a derivada espacial desta função, considerando suas três variáveis? Qual direção deve ser considerada?

Para isso, devemos analizar a definição da derivada total parcial:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) dz \quad (79)$$

Operador ∇

Definição

O operador ∇ é um operador diferencial com caráter vetorial, ou seja

- em coordenadas cartesianas

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (80)$$

- coordenadas cilíndricas

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (81)$$

- coordenadas esféricas

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial R} \mathbf{a}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi. \quad (82)$$

Obviamente, você deve sempre se lembrar que ∇ é um operador. Sozinho, ele nada significa.

Gradiente de um campo escalar

Definição

Considere um campo escalar $T(x, y, z)$ que representa a temperatura em uma determinada região. O gradiente deste campo escalar é um vetor que representa a magnitude e a orientação da máxima taxa espacial de variação de T .

- em coordenadas cartesianas

$$\nabla T(x, y, z) = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{a}_z. \quad (83)$$

- em coordenadas cilíndricas

$$\nabla T(x, y, z) = \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (84)$$

- em coordenadas esféricas

$$\nabla T(x, y, z) = \frac{\partial T}{\partial R} \mathbf{a}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi. \quad (85)$$

Gradiente de um campo escalar

Propriedades

As propriedades do gradiente são

$$\nabla(c\phi) = c\nabla\phi, \quad (86)$$

$$\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi, \quad (87)$$

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi. \quad (88)$$

Exemplo 20: Mostrar que a intensidade e sentido do gradiente $\nabla\phi$ é independente do sistema de coordenadas. Isto é, mostrar que a intensidade do gradiente $|\nabla\phi|$ é igual ao valor máximo da derivada direcional de $\phi(x, y, z)$ e seu sentido é o da taxa máxima de crescimento da função ϕ . Lembre-se que

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \nabla\phi \cdot \mathbf{T},$$

em que \mathbf{T} é o vetor unitário tangente a curva C .

Gradiente de um campo escalar

Exercícios

Exemplo 21: Considerando que \mathbf{a} é um vetor constante arbitário e \mathbf{r} é o vetor posição, demonstre as seguintes afirmações:

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a},$$

$$\nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = d\phi,$$

$$(d\mathbf{r} \cdot \nabla) = d\phi.$$

Exemplo 22: Determine o gradiente dos seguintes campos escalares:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$f(x, y, z) = x^2y^3z^4;$$

$$f(x, y, z) = e^x \sin y \ln z.$$

Divergente de um campo vetorial

Definição

O divergente de um campo vetorial \mathbf{A} em um determinado ponto P é o fluxo de saída, por unidade de volume, à medida que o volume se reduz à zero em torno de P . Fisicamente, podemos considerar a divergência de um campo vetorial \mathbf{A} , em um dado ponto, como uma medida de quanto o campo diverge ou emana desse ponto.

- em coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (89)$$

- em coordenadas cilíndricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (90)$$

- em coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 A_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (91)$$

Divergente de um campo vetorial

Laplaciano

Se ϕ é uma função escalar, então a divergência do gradiente de ϕ é

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi. \quad (92)$$

Este operador (∇^2) é chamado de Laplaciano. Uma função escalar ϕ é dita ser harmônica se for contínua, tiver derivadas parciais segundas contínuas e satisfizer à equação de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (93)$$

Exemplo 23: Mostre que a função $1/r$, em que $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é uma função harmônica, desde que $r \neq 0$.

Laplaciano de um campo escalar

Definição

O laplaciano de um campo escalar ϕ é o divergente do gradiente de ϕ . Ou seja

- coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (94)$$

- coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (95)$$

- coordenadas esféricas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2}. \quad (96)$$

Laplaciano de um campo vetorial

Definição

O laplaciano em um campo vetorial, opera em cada componente do vetor de acordo com o sistema de coordenadas.

- **coordenadas cartesianas**

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \mathbf{a}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z \quad (97)$$

- **coordenadas cilíndricas**

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} = & \left[\nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} A_\phi - \frac{A_r}{r^2} \right] \mathbf{a}_r + \\ & \left[\nabla^2 A_\phi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} A_r - \frac{A_\phi}{r^2} \right] \mathbf{a}_\phi + \\ & \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (98)$$

Laplaciano de um campo vetorial

Definição

- coordenadas esféricas

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \left[\nabla^2 A_R - \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) - \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} A_\phi - \frac{2}{R^2} A_R \right] \mathbf{a}_R + \\ \left[\nabla^2 A_\theta + \frac{2}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} A_R - \frac{2 \cos \theta}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} A_\phi - \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} A_\theta \right] \mathbf{a}_\theta + \\ \left[\nabla^2 A_\phi + \frac{2 \cos \theta}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} A_\theta + \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} A_R - \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} A_\phi \right] \mathbf{a}_\phi \quad (99)$$

Rotacional de um campo vetorial

Definição

O rotacional de \mathbf{A} é um vetor axial (ou girante), cuja magnitude é a máxima circulação de \mathbf{A} por unidade de área, à medida que a área tende a zero, e cuja orientação é perpendicular a essa área, quando a mesma está orientada de modo a se obter a máxima circulação.

coordenadas cartesianas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (100)$$

coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \phi & \partial/\partial z \\ A_r & A_\phi & A_z \end{vmatrix}. \quad (101)$$

coordenadas esféricas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_R & R \mathbf{a}_\theta & R \sin \theta \mathbf{a}_\phi \\ \partial/\partial R & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \phi \\ A_R & R A_\theta & R \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}. \quad (102)$$

Rotacional de um campo vetorial

Exercícios

Exemplo 24: Determine o rotacional dos seguintes campos vetoriais:

$$\mathbf{A} = -y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y;$$

$$\mathbf{A} = x\mathbf{a}_y.$$

Exemplo 25: Há identidades vetoriais que utilizam a definição de divergente e rotacional de um campo vetorial, por exemplo:

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B},$$

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0,$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0,$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Demonstre estas identidades.

Exemplo 26: Mostre que se $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, então \mathbf{A} não é unicamente determinado por \mathbf{B} . Esta é uma importante afirmação.

Integral de linha

Definição

A integral de linha é a integral da componente tangencial de \mathbf{A} ao longo da curva L

$$\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b |A| \cos \theta \, dl. \quad (103)$$

Se o caminho de integração é uma curva fechada, esta equação torna-se uma integral de linha fechada

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (104)$$

denominada de circulação de \mathbf{A} em torno de L .

Integral de linha

Exercícios

Exemplo 27: Se $\mathbf{f} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$, calcular

$$\oint_L \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$$

desde $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$ ao longo de **i)** uma linha reta que une esses dois pontos, e **ii)** uma trajetória L que consiste de três segmentos de reta L_1 , L_2 e L_3 que unem esses dois pontos via $(1,0,0)$ e $(1,1,0)$.

É importante observar que $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$ é a diferencial total de alguma função, então a integral é a mesma para todas as trajetórias que liguem dois pontos. Todavia, isto não é sempre verdade e as condições suficientes para a integral de linha de um campo vetorial \mathbf{f} ser independentes do percurso são que

$$\mathbf{f} = \nabla\phi, \tag{105}$$

e a função *phi* for definida em toda região R de análise.

Integral de superfície

Definição

Considere uma região contendo uma curva suave fechada S (formando uma superfície). Em toda esta região há um vetor \mathbf{A} . A integral de superfície (ou fluxo de \mathbf{A} através de S) é

$$\psi = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_n \, dS = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (106)$$

em que \mathbf{a}_n é o vetor unitário normal a S . Para uma superfície fechada (definindo um volume), a integral tornar-se

$$\psi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (107)$$

referido como o fluxo líquido de \mathbf{A} que sai de S .

Exemplo 28: Determine $\iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$, em que S é a superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Exemplo 29: Determine $\iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$, em que S é a superfície do cubo limitado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $= 1$. O vetor unitário normal externo \mathbf{n} e o vetor posição \mathbf{r} dos pontos na superfície do cubo são dirigidos afastando-se da origem.

Integral de volume

Definição

Visto que o elemento de volume dV é um escalar, consideremos duas integrais de volume para uma região R , no sistema de coordenadas retangulares:

1. A integral tripla ordinária de $\phi(x, y, z)$ para a região R :

$$\iiint_R \phi \, dV = \phi(x, y, z) \, dx \, dy \, dz;$$

2. A integral tripla vetorial de \mathbf{f}

$$\iiint_R \mathbf{f} \, dV = \mathbf{a}_x \iiint_R f_x \, dx + \mathbf{a}_y \iiint_R f_y \, dy + \mathbf{a}_z \iiint_R f_z \, dz.$$

Exemplo 30: Calcule a integral $\iiint_R \nabla \cdot \mathbf{r} \, dV$, em que R é qualquer região com volume V e \mathbf{r} é o vetor posição.

Exemplo 31: Calcule a integral $\iiint_R \nabla \times \mathbf{f} \, dV$ se $\mathbf{f} = y\mathbf{a}_x - x\mathbf{a}_y$ e R é qualquer região do espaço com volume V .

Teorema da divergência (ou de Gauss)

Definição

O teorema da divergência estabelece que o fluxo total de um campo vetorial \mathbf{A} que sai de uma superfície fechada S é igual à integral de volume da divergência de \mathbf{A} . Não é difícil de observar que

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_R \nabla \cdot \mathbf{A} dV. \quad (108)$$

Exemplo 32: Verifique o teorema da divergência considerando a função

$$\mathbf{A} = y^2 \mathbf{a}_x + (2xy + z^2) \mathbf{a}_x + (2yz) \mathbf{a}_z \quad (109)$$

em um cubo de aresta igual a 1 m.

Teorema de divergência (ou de Gauss)

Outros teoremas

Estendendo as definições de gradiente e rotacional de um vetor a volumes finitos, obtém-se os seguintes teoremas:

- Teorema do gradiente: se ϕ é uma função contínua escalar numa região R limitada pela superfície fechada S , então

$$\iint_S \phi d\mathbf{S} = \iiint_R \nabla \phi dV;$$

- Teorema rotacional: se \mathbf{f} é uma função vetorial contínua numa região limitada pela superfície fechada S , então

$$\iint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{f} = \iiint_R \nabla \times \mathbf{f} dV.$$

Exemplo 33: Mostre que para uma superfície fechada S pode-se afirmar que $\iint_S d\mathbf{S} = 0$.

Teorema de Green

Definição

A primeira identidade de Green estabelece que se ϕ e ψ são funções escalares que têm derivadas segundas contínuas numa região R limitada pela superfície fechada S , então

$$\iiint_R (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_S \phi \nabla \psi \cdot d\mathbf{S}. \quad (110)$$

A segunda identidade de Green estabelece que se ϕ e ψ são funções escalares que têm derivadas segundas contínuas numa região R limitada pela superfície fechada S , então

$$\iiint_R (\phi \nabla^2 \psi - \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S}. \quad (111)$$

Teorema de Green

Exercícios

Exemplo 34: Se ψ é harmônica na região R encerrada por S , provar que

$$\iint_S \nabla \psi \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = 0.$$

Exemplo 35: Se ϕ e ψ são harmônicas numa região R encerrada por S , provar que

$$\iint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = 0.$$

Teorema de Stokes

Definição

Podemos esperar ainda que

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (112)$$

O teorema de Stokes estabelece que a circulação de um campo vetorial \mathbf{A} em torno de um caminho (fechado) L é igual à integral de superfície do rotacional de \mathbf{A} sobre a superfície aberta S , limitada por L , desde que \mathbf{A} e $\nabla \times \mathbf{A}$ sejam contínuos sobre S .

Exemplo 36: Suponha que $\mathbf{A} = (2xy + 3y^2) \mathbf{a}_y + (4yz^2) \mathbf{a}_z$. Verifique o teorema de Stokes em um quadrado de aresta 1 m no plano yz .

Exemplo 37: Mostre que se \mathbf{r} é o vetor posição, então $\oint \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

Teorema de Stokes

Outros teoremas

Estendendo as definições de rotacional do gradiente e de rotacional do rotacional para superfícies finitas, obtemos os seguintes teoremas:

- Se S é uma superfície finita limitada pela curva fechada simples C e ϕ é uma função escalar com derivadas contínuas, então

$$\iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi = \oint_C \phi \, d\mathbf{r}. \quad (113)$$

- Se S é uma superfície finita limitada pela curva fechada simples C e \mathbf{f} é uma função veorial com derivadas contínuas, então

$$\iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{f} = \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{f}. \quad (114)$$

Identidades vetoriais

- Propriedades distributivas

$$\nabla(V + U) = \nabla V + \nabla U \quad (115)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (116)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \quad (117)$$

- Regra do produto para o gradiente

$$\nabla(VU) = V\nabla U + U\nabla V \quad (118)$$

- Produto de um escalar e um vetor

$$\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla V) \quad (119)$$

$$\nabla \times (V\mathbf{A}) = V(\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla V) \times \mathbf{A} \quad (120)$$

Identidades vetoriais

Derivações segundas

- Produto vetorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (121)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (122)$$

(123)

- Divergente do rotacional

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (124)$$

- Rotacional do gradiente

$$\nabla \times \nabla V = 0 \quad (125)$$

- Rotacional do rotacional

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (126)$$

Classificação dos campos vetoriais

- Um campo vetorial é univocamente caracterizado pelo seu divergente e seu rotacional;
- Um campo vetorial \mathbf{A} é solenoidal (ou não divergente) se $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Assim é possível expressar \mathbf{A} em termos de outro vetor \mathbf{F} como

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{F}. \quad (127)$$

- Um campo vetorial \mathbf{A} é irrotacional (ou potencial) se $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. Exemplos de campos conservativos são o eletrostático e o gravitacional. Assim

$$\nabla \times (\nabla V) = 0, \quad (128)$$

e assim $\mathbf{A} = -\nabla V$.

Lição atual: Eletromagnetismo

Equações de Maxwell

Forma diferencial

As equações de Maxwell são na forma diferencial são:

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \quad \text{Lei de Faraday} \quad (129)$$

$$\nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \quad \text{Lei de Ampère} \quad (130)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho_v \quad \text{Lei de Gauss} \quad (131)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0 \quad \text{Lei de Gauss} \quad (132)$$

\mathcal{E} → vetor campo elétrico [V/m]

\mathcal{H} → vetor campo magnético [A/m]

\mathcal{D} → vetor densidade de fluxo elétrico [C/m²]

\mathcal{B} → vetor densidade de fluxo magnético [T]

\mathcal{J} → vetor densidade de corrente superficial [A/m²]

ρ_v → densidade volumétrica de carga [C/m³]

Equações de Maxwell

Forma diferencial - vácuo

Para um meio livre de cargas (no espaço livre - vácuo), as equações de Maxwell são reescritas na forma:

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \quad (133)$$

$$\nabla \times \mathcal{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \quad (134)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = 0 \quad (135)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{H} = 0 \quad (136)$$

em que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [m.kg.s⁻²A⁻²] e $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ [m⁻³.kg⁻¹.s⁴A²] representam a permissividade elétrica e permeabilidade magnética, respectivamente, no espaço livre, e $\nabla \cdot$ e $\nabla \times$ denotam, em ordem, os operadores divergente e rotacional.

Operador ∇

Definição

O operador ∇ é um operador diferencial com caráter vetorial, ou seja

- em coordenadas cartesianas

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (137)$$

- coordenadas cilíndricas

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (138)$$

- coordenadas esféricas

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial R} \mathbf{a}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi. \quad (139)$$

Obviamente, você deve sempre se lembrar que ∇ é um operador. Sozinho, ele nada significa.

Divergente de um campo vetorial

Definição

O divergente de um campo vetorial \mathbf{A} em um determinado ponto P é o fluxo de saída, por unidade de volume, à medida que o volume se reduz à zero em torno de P . Fisicamente, podemos considerar a divergência de um campo vetorial \mathbf{A} , em um dado ponto, como uma medida de quanto o campo diverge ou emana desse ponto.

- em coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (140)$$

- em coordenadas cilíndricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (141)$$

- em coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 A_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (142)$$

Rotacional de um campo vetorial

Definição

O rotacional de \mathbf{A} é um vetor axial (ou girante), cuja magnitude é a máxima circulação de \mathbf{A} por unidade de área, à medida que a área tende a zero, e cuja orientação é perpendicular a essa área, quando a mesma está orientada de modo a se obter a máxima circulação.

coordenadas cartesianas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (143)$$

coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \phi & \partial/\partial z \\ A_r & A_\phi & A_z \end{vmatrix}. \quad (144)$$

coordenadas esféricas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_R & R \mathbf{a}_\theta & R \sin \theta \mathbf{a}_\phi \\ \partial/\partial R & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \phi \\ A_R & R A_\theta & R \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}. \quad (145)$$

Equações de Maxwell

Forma integral

As equações de Maxwell na forma integral são:

$$\oint_S \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (146)$$

$$\oint_S \mathcal{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathcal{J} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (147)$$

$$\iint_S \mathcal{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_v \rho_v dv \quad (148)$$

$$\iint_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (149)$$

Relações campo-matéria

Relações constitutivas

Em um caso simples, em um meio linear e isotrópico, as relações campo-matéria (ou constitutivas) são:

$$\mathcal{D} = \varepsilon(\mathbf{r})\mathcal{E} \quad (150)$$

$$\mathcal{B} = \mu(\mathbf{r})\mathcal{H} \quad (151)$$

$$\mathcal{J} = \sigma(\mathbf{r})\mathcal{E} \quad (152)$$

em que $\varepsilon(\mathbf{r})$ é a permissividade dielétrica, $\mu(\mathbf{r})$ a permeabilidade magnética e $\sigma(\mathbf{r})$ a condutividade elétrica do meio. Considerando um dielétrico perfeito e as relações campo-matéria, como ficam as equações de Maxwell?

Equação da onda

Meio não homogêneo

A partir das equações de Maxwell para um meio dielétrico perfeito, é possível obter a equação de onda² para o campo elétrico e magnético:

$$\nabla^2 \mathcal{E} + \nabla (\mathcal{E} \cdot \nabla \ln \epsilon) = \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} \quad (153)$$

$$\nabla^2 \mathcal{H} + (\nabla \ln \epsilon) \times (\nabla \times \mathcal{H}) = \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2}. \quad (154)$$

A onda eletromagnética transporta energia e o fluxo de energia (medida em [W/m²]) é expresso pelo vetor de Poynting \mathcal{S} , definido como

$$\mathcal{S} = \mathcal{E} \times \mathcal{H}. \quad (155)$$

²A equação de onda é uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem que descreve a propagação de uma onda em um meio específico. Sua forma geral é $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$

Equação da onda

Meio homogêneo

Em um meio óptico homogêneo, as propriedades do material são independentes da posição. Portanto:

$$\nabla \ln \varepsilon = 0, \quad (156)$$

assim as equações de onda são simplificadas para

$$\nabla^2 \mathcal{E} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} \quad (157)$$

$$\nabla^2 \mathcal{H} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2}. \quad (158)$$

Exercícios

Exercício 1: Mostre que a equação de Gauss para o magnetismo pode ser obtido da equação de Faraday.

Exercício 2: Deduza a equação da continuidade. Qual o significado físico desta equação?

Exercício 3: Mostre que a equação de Gauss pode ser deduzida da equação de Ampere.

Exercício 4: Mostre que não é possível existir distribuição permanente de carga livre em um meio homogêneo com condutividade nula.

Campos harmônicos

É conveniente analisar o comportamento de campos eletromagnéticos harmônicos, como exemplo, campos eletromagnéticos em que a variação no tempo ocorra em uma frequência angular temporal de ω rad/s, e podem ser expressos como

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) \cos [\omega t + \phi(\mathbf{r})] \quad (159)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{H}_0(\mathbf{r}) \cos [\omega t + \phi(\mathbf{r})] \quad (160)$$

em que $\mathcal{E}_0(\mathbf{r}, t)$ e $\mathcal{H}_0(\mathbf{r}, t)$ são as amplitudes dos campos e $\phi(\mathbf{r})$ a fase inicial em função do vetor posição $\mathbf{r} = x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z$.

Campos harmônicos

Representação fasorial

Utilizando a notação de fasores complexos, o campo elétrico e magnético são escritos como

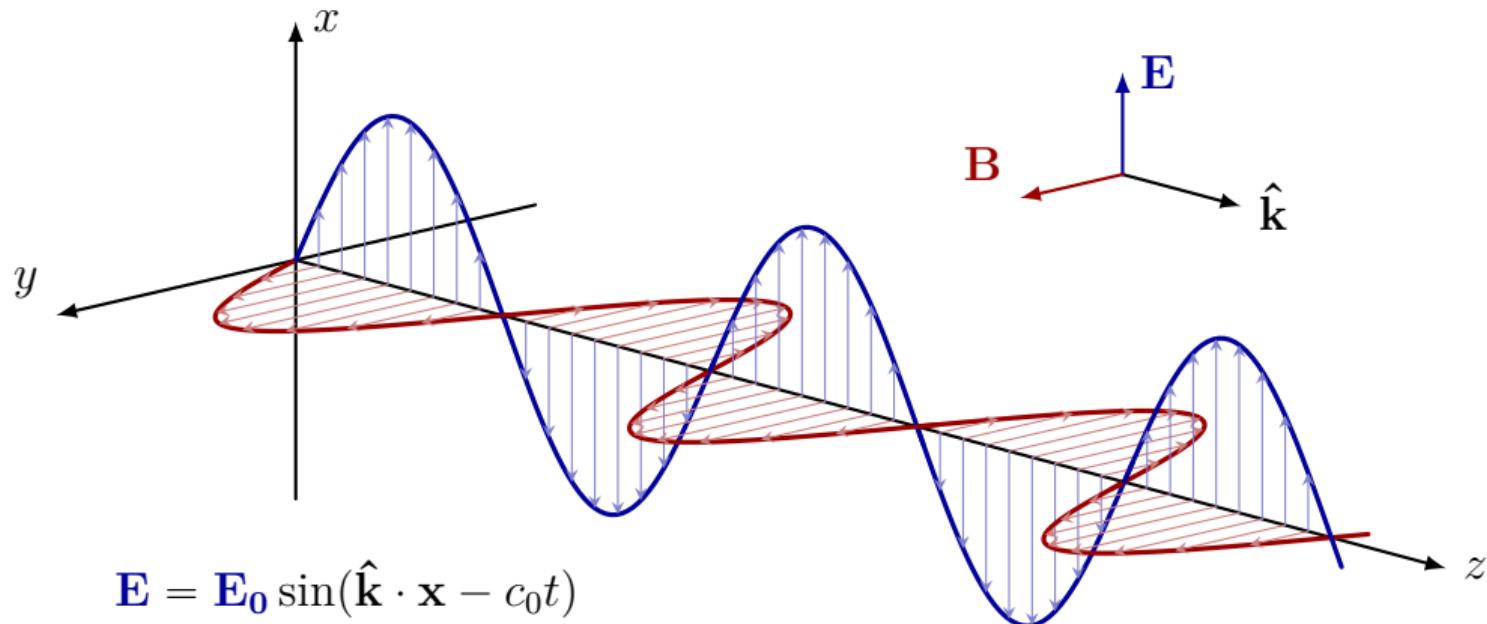
$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right] \quad (161)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = \Re \left[\mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right] \quad (162)$$

em que $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ são as amplitudes complexas do campo elétrico e magnético respectivamente, ou de forma equivalente

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) e^{-j\omega t} \} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} + cc \} \quad (163)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} + \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) e^{-j\omega t} \} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} + cc \} \quad (164)$$



$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x} - c_0 t)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \sin(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x} - c_0 t)$$

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0, \quad \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c_0} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$$

Equações de Maxwell

Representação fasorial

As equações de Maxwell, considerando um dielétrico perfeito, no regime senoidal se tornam

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{B} \quad (165)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{D} \quad (166)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (167)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (168)$$

Assim, as equações de onda correspondente ao campo elétrico e magnético são

$$\nabla^2\mathbf{E} + \nabla(\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \epsilon) = -\omega^2\mu_0\epsilon\mathbf{E} \quad (169)$$

$$\nabla^2\mathbf{H} + (\nabla \ln \epsilon) \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\omega^2\mu_0\epsilon\mathbf{H}. \quad (170)$$

Equações de Maxwell

Representação fasorial

Considerando que $\varepsilon_r = n^2$ e $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$, a equação de onda para o campo elétrico e magnético é

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \left(\frac{1}{n^2} \nabla n^2 \cdot \mathbf{E} \right) = -n^2 k_0^2 \mathbf{E} \quad (171)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \frac{1}{n^2} (\nabla n^2) \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -n^2 k_0^2 \mathbf{H}. \quad (172)$$

Equação da onda

Helmholtz's equation

Ao considerar um meio homogêneo (sem variação das propriedades com a posição), as equações de onda são reescritas como

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E} \quad (173)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -k^2 \mathbf{H}. \quad (174)$$

em que $k = nk_0$. As equações anteriores podem ser expressas de uma forma mais genérica como

$$\nabla^2 f = -k^2 f, \quad (175)$$

que corresponde à equação de Helmholtz. Observe que esta equação é um problema de autovalor na forma

$$\mathcal{O}(f) = -\lambda f, \quad (176)$$

em que \mathcal{O} é o operador laplaciano. **Como resolver este problema?**

Condições de fronteira

As condições de fronteira podem ser resumidas em

$$\mathbf{u}_n \times (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) = 0 \quad (177)$$

$$\mathbf{u}_n \cdot (\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2) = \rho_s \quad (178)$$

$$\mathbf{u}_n \times (\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2) = \mathcal{J}_s \quad (179)$$

$$\mathbf{u}_n \cdot (\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2) = 0 \quad (180)$$

em que \mathcal{J}_s é o vetor densidade superficial de corrente e ρ_s a densidade superficial de carga.