

Práctica 4: Medida del Campo Magnético Terrestre con Bobinas de Helmholtz

Antonio Valle Sánchez y Adolfo Enrique Vázquez

Sevilla, a 20 de abril de 2023

Índice

1. Introducción y objetivos
2. Fundamento teórico
 - 2.1. Campo magnético creado por Bobinas de Helmholtz
 - 2.2. Medida de la componente horizontal del campo magnético terrestre
3. Metodología y resultados
 - 3.1. Instrumentación
 - 3.2. Procedimientos y explotación de los datos
4. Conclusiones y deducciones finales
5. Cuestiones
6. Bibliografía

1.- Objetivos

- Corroborar la casi-uniformidad del campo magnético generado por una pareja de bobinas en su interior
- Medir a raíz del factor de calibración el campo magnético terrestre en el laboratorio

2.-Fundamento Teórico

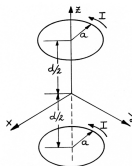
1. Cálculo del campo magnético en el eje de dos bobinas coaxiales
2. Aproximaciones de dicho valor
 - 2.1. Imposición de hipótesis: elección de órdenes para a y d
 - 2.2. Exactamente en el eje
 - 2.3. En un entorno del eje
 - 2.4. Relaciones entre componentes radial y axial
3. Adaptación experimental: bobinado de Helmholtz
4. Medida de la componente horizontal del campo magnético terrestre

2.1.- Cálculo del campo magnético en el eje de dos bobinas coaxiales

Considerando el sistema

2.1.- Cálculo del campo magnético en el eje de dos bobinas coaxiales

Considerando el sistema



Y empleando

Ley de Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_C \frac{I \cdot d\vec{l} \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

2.1.- Cálculo del campo magnético en el eje de dos bobinas coaxiales

Parametrizamos

$$\mathcal{C}_{(a,z)} := \{a \cdot \vec{u}_\rho + z' \cdot \vec{u}_z = (a \cdot \cos(\theta'), a \cdot \sin(\theta'), z') \in \mathbb{R}^3 \parallel \theta' \in [0, 2\pi)\}$$

2.1.- Cálculo del campo magnético en el eje de dos bobinas coaxiales

Parametrizamos

$$\mathcal{C}_{(a,z)} := \{a \cdot \vec{u}_\rho + z' \cdot \vec{u}_z = (a \cdot \cos(\theta'), a \cdot \sin(\theta'), z') \in \mathbb{R}^3 \parallel \theta' \in [0, 2\pi)\}$$

y aplicando Ppio de Superposición sobre Biot-Savart

$$\vec{B}(\rho=0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \sum_{i \in \{-1,1\}} \left[\int_{\mathcal{C}_{(a,i \cdot (\frac{d}{2}))}} \frac{I \cdot d\theta' \vec{u}_\theta \wedge (-\rho' \cdot \vec{u}_\rho + (z - z') \cdot \vec{u}_z)}{(\rho'^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{B}(\rho=0, z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \cdot \left\{ \sum_{i \in \{-1,1\}} [a^2 + (z + i \cdot d/2)^2]^{-3/2} \right\} \cdot \vec{u}_z}$$

2.2.1.- Imposición de hipótesis: elección de órdenes para a y d

En los casos extremos:

- $d \ll a$: para $z \in [-d/2, d/2]$ despreciamos $(x + i \cdot d/2)^2$ y

2.2.1.- Imposición de hipótesis: elección de órdenes para a y d

En los casos extremos:

- $d \ll a$: para $z \in [-d/2, d/2]$ despreciamos $(x + i \cdot d/2)^2$ y
 - 1.- $\vec{B}(\rho = 0, z) \sim \frac{\mu_0 I}{a} \neq f(z) \Rightarrow$ peor estimación en $[-d/2, d/2]$
 - 2.- grandes errores relativos para mediciones de $z \in [-d/2, d/2]$

2.2.1.- Imposición de hipótesis: elección de órdenes para a y d

En los casos extremos:

- $d \ll a$: para $z \in [-d/2, d/2]$ despreciamos $(x + i \cdot d/2)^2$ y
 - 1.- $\vec{B}(\rho = 0, z) \sim \frac{\mu_0 I}{a} \neq f(z) \Rightarrow$ peor estimación en $[-d/2, d/2]$
 - 2.- grandes errores relativos para mediciones de $z \in [-d/2, d/2]$
- $d \gg a$: para $z \in [-d/2, d/2]$ despreciamos a^2 y

2.2.1.- Imposición de hipótesis: elección de órdenes para a y d

En los casos extremos:

- $d \ll a$: para $z \in [-d/2, d/2]$ despreciamos $(x + i \cdot d/2)^2$ y
 - 1.- $\vec{B}(\rho = 0, z) \sim \frac{\mu_0 I}{a} \neq f(z) \Rightarrow$ peor estimación en $[-d/2, d/2]$
 - 2.- grandes errores relativos para mediciones de $z \in [-d/2, d/2]$
- $d \gg a$: para $z \in [-d/2, d/2]$ despreciamos a^2 y
 - 1.- $|\vec{B}(\rho = 0, z)| \rightarrow \infty$ para $z \rightarrow \pm d/2$
 - 2.- o radios muy pequeños (mayor err rel) o dists muy grandes

2.2.1.- Imposición de hipótesis: elección de órdenes para a y d

Figura: d crece para a fijo

Figura: a decrece para d fijo

2.2.2.- Exactamente en el eje

En virtud de lo anterior, es conveniente tomar $d \sim a$ y de hecho partiremos de la premisa $d = a$

2.2.2.- Exactamente en el eje

En virtud de lo anterior, es conveniente tomar $d \sim a$ y de hecho partiremos de la premisa $d = a$

En dichas condiciones,

$$\exists U \in \mathcal{T}_e(\mathbb{R}) \parallel 0 \in U \wedge \left| \vec{B}(\rho = 0, z) \right| \in \mathcal{C}^\infty(U)$$

y podremos aplicar el Teorema de Taylor.

2.2.2.- Exactamente en el eje

En virtud de lo anterior, es conveniente tomar $d \sim a$ y de hecho partiremos de la premisa $d = a$

En dichas condiciones,

$$\exists U \in \mathcal{T}_e(\mathbb{R}) \parallel 0 \in U \wedge \left| \vec{B}(\rho = 0, z) \right| \in \mathcal{C}^\infty(U)$$

y podremos aplicar el Teorema de Taylor.

Teniendo en consideración que

$$\blacksquare \vec{B}(0, 0) = \frac{8\mu_0 I}{5\sqrt{5}a} \vec{u}_z$$

$$\blacksquare \frac{\partial^j \vec{B}}{\partial z^j}(0, 0) = \vec{0} \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$$

$$\blacksquare \frac{\partial^4 \vec{B}}{\partial z^4} = -24 \frac{144}{125a^4} \cdot \frac{8\mu_0 I}{5\sqrt{5}a} \vec{u}_z$$

2.2.2.- Exactamente en el eje

Podemos aproximar el campo en el rango $|z| \in [0, \frac{a}{2}]$ por

$$\vec{B}(\rho = 0, z) \approx \frac{8\mu_0 I}{5\sqrt{5}a} \cdot \left(1 - \frac{144}{125} \cdot \left(\frac{z}{a}\right)^4\right) \vec{u}_z$$

2.2.2.- Exactamente en el eje

Podemos aproximar el campo en el rango $|z| \in [0, \frac{a}{2}]$ por

$$\vec{B}(\rho = 0, z) \approx \frac{8\mu_0 I}{5\sqrt{5}a} \cdot \left(1 - \frac{144}{125} \cdot \left(\frac{z}{a}\right)^4\right) \vec{u}_z$$

, cuasi-constante en dicho intervalo.

2.2.3.- En un entorno del eje

Para $\rho \ll a$ (no necesariamente nulo), empleando la relación

$$\rho \cdot \frac{\partial B_\rho}{\partial \rho}(0, z) = -\frac{\rho}{2} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z}(0, z)$$

2.2.3.- En un entorno del eje

Para $\rho \ll a$ (no necesariamente nulo), empleando la relación

$$\rho \cdot \frac{\partial B_\rho}{\partial \rho}(0, z) = -\frac{\rho}{2} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z}(0, z)$$

y efectuando desarrollo de Taylor hasta orden 2, se obtiene de forma análoga

$$B_\rho(\rho, z) \approx \frac{8\mu_0 I}{5\sqrt{5}a} \cdot \left(\frac{288}{125} \cdot \left(\frac{\rho}{a} \right) \cdot \left(\frac{z}{a} \right)^3 \right)$$

$$B_z(\rho, z) \approx \frac{8\mu_0 I}{5\sqrt{5}a} \cdot \left(1 - \frac{144}{125} \cdot \left(\frac{z}{a} \right)^4 + \frac{864}{125} \cdot \left(\frac{\rho}{a} \right)^2 \cdot \left(\frac{z}{a} \right)^2 \right)$$

2.2.4.- Relación entre componentes radial y axial

Puesto que

- $\rho \ll a$
- $|z| \leq \frac{a}{2}$

2.2.4.- Relación entre componentes radial y axial

Puesto que

$$\blacksquare \rho \ll a$$

$$\blacksquare |z| \leq \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\blacksquare \frac{288}{125} \cdot \left(\frac{\rho}{a}\right) \cdot \left(\frac{z}{a}\right)^3 \ll 1$$

$$\blacksquare 1 \gg \frac{144}{125} \cdot \left(\frac{z}{a}\right)^4, \frac{864}{125} \cdot \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{z}{a}\right)^2$$

2.2.4.- Relación entre componentes radial y axial

Puesto que

$$\blacksquare \rho \ll a$$

$$\blacksquare |z| \leq \frac{a}{2}$$

inferimos que $\exists \varepsilon > 0$ //

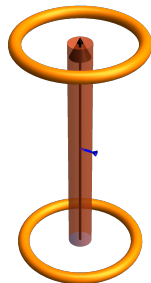
\Rightarrow

$$\blacksquare \frac{288}{125} \cdot \left(\frac{\rho}{a}\right) \cdot \left(\frac{z}{a}\right)^3 \ll 1$$

$$\blacksquare 1 \gg \frac{144}{125} \cdot \left(\frac{z}{a}\right)^4, \frac{864}{125} \cdot \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{z}{a}\right)^2$$

$$\vec{B}(\rho, z) = \frac{8\mu_0 I}{5\sqrt{5}a} \vec{u}_z$$

es una estimación asumible en el recinto



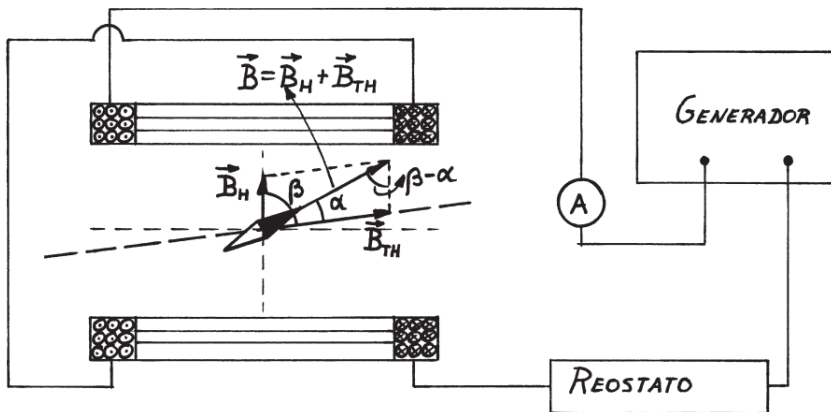
2.3.- Adaptación experimental: bobinado de Helmholtz

Para I moderadas, $|\vec{B}| \ll 1T$ en el recinto dado.

Se opta por el bobinado de ambas espiras (*Bobinas de Helmholtz*):

$$\vec{B}_H \approx N \cdot \frac{8\mu_0 I}{5\sqrt{5}a}$$

2.4.- Medida de la componente horizontal del campo magnético terrestre



2.4.- Medida de la componente horizontal del campo magnético terrestre

En virtud del Teorema del seno,

2.4.- Medida de la componente horizontal del campo magnético terrestre

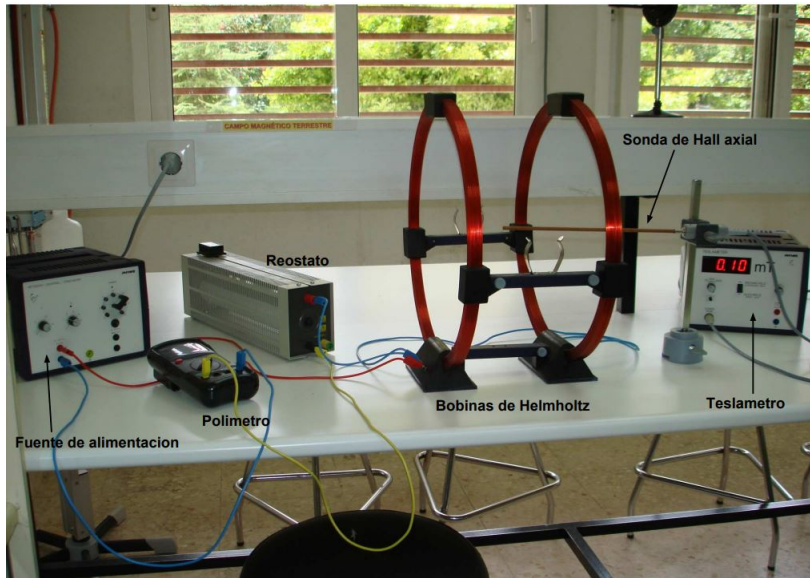
En virtud del Teorema del seno,

$$\frac{|B_H|}{\sin(\alpha)} = \frac{|B_{TH}|}{\sin(\beta - \alpha)} \Leftrightarrow |I_H| = \frac{|B_{TH}|}{K_H} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}$$

3.- Metodología y Resultados

1. Instrumentación
2. Procedimientos y explotación de los datos
 - 2.1. Cuasi-constancia del campo a lo largo de los ejes Z e Y
 - 2.2. Calibrado
 - 2.3. Componente horizontal
 - 2.4. Componente vertical

3.1.- Instrumentación



3.2.1- Cuasi-constancia del campo a lo largo de los ejes Z e Y

TABLA P1

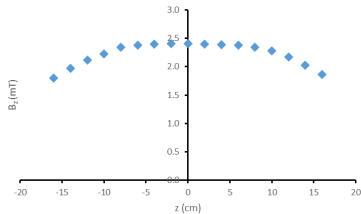
| $z \pm 0.1$ (cm) | $B_z \pm 0.02$ (mT) |
|------------------|---------------------|
| -16.0 | 1.80 |
| -14.0 | 1.97 |
| -12.0 | 2.12 |
| -10.0 | 2.23 |
| -8.0 | 2.34 |
| -6.0 | 2.38 |
| -4.0 | 2.40 |
| -2.0 | 2.41 |
| 0.0 | 2.41 |
| 2.0 | 2.40 |
| 4.0 | 2.39 |
| 6.0 | 2.38 |
| 8.0 | 2.34 |
| 10.0 | 2.28 |
| 12.0 | 2.17 |
| 14.0 | 2.03 |
| 16.0 | 1.86 |

TABLA P2

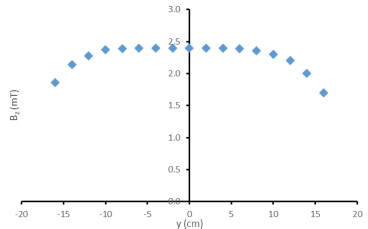
| $y \pm 0.1$ (cm) | $B_z \pm 0.02$ (mT) |
|------------------|---------------------|
| -16.0 | 1.86 |
| -14.0 | 2.14 |
| -12.0 | 2.28 |
| -10.0 | 2.37 |
| -8.0 | 2.39 |
| -6.0 | 2.40 |
| -4.0 | 2.40 |
| -2.0 | 2.40 |
| 0.0 | 2.40 |
| 2.0 | 2.40 |
| 4.0 | 2.40 |
| 6.0 | 2.39 |
| 8.0 | 2.36 |
| 10.0 | 2.30 |
| 12.0 | 2.20 |
| 14.0 | 2.00 |
| 16.0 | 1.70 |

3.2.1- Cuasi-constancia del campo a lo largo de los ejes Z e Y

Componente axial del campo magnético en el eje de revolución del bobinado frente al desplazamiento



Componente axial del campo magnético en el eje paralelo a las caras de las bobinas frente al desplazamiento

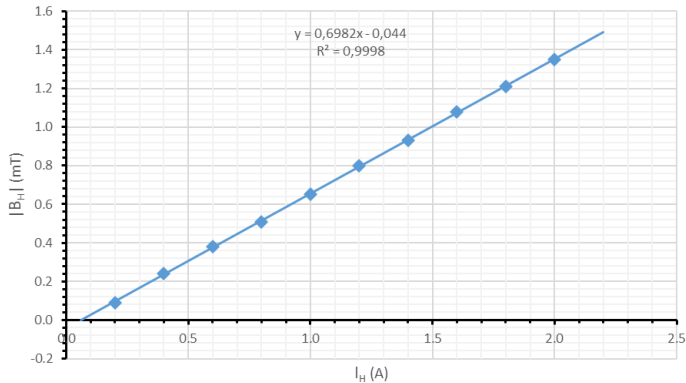


3.2.2.- Calibrado

| $I \pm 0.1 \text{ (A)}$ | $B_h \pm 0.01 \text{ (mT)}$ |
|-------------------------|-----------------------------|
| 0.2 | 0.09 |
| 0.4 | 0.24 |
| 0.6 | 0.38 |
| 0.8 | 0.51 |
| 1.0 | 0.65 |
| 1.2 | 0.80 |
| 1.4 | 0.93 |
| 1.6 | 1.08 |
| 1.8 | 1.21 |
| 2.0 | 1.35 |

3.2.2.- Calibrado

Dependencia Lineal del módulo del campo magnético en el centro del eje normal a las caras de las bobinas frente a la Intensidad de Corriente



3.2.2.- Calibrado

, de donde se sigue

$$K_H \pm \Delta K_H \equiv \text{pendiente} \pm \Delta \text{pendiente} = 0,698 \pm 0,003 \text{ mT} \cdot \text{A}^{-1}$$

3.2.3.- Componente horizontal

Escogiendo $\beta = \pi/2$, se tiene $\sin(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)$ y

3.2.3.- Componente horizontal

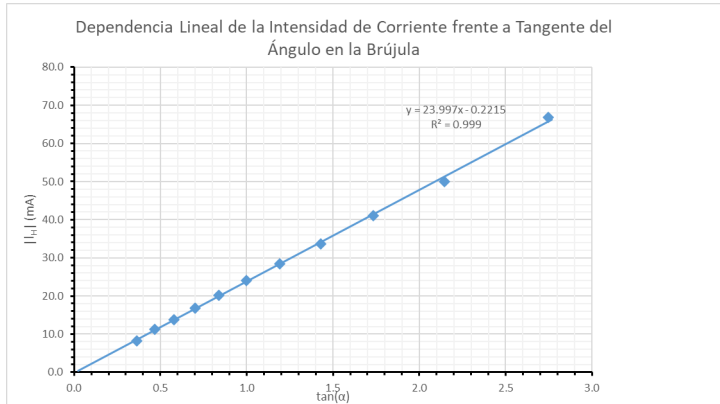
Escogiendo $\beta = \pi/2$, se tiene $\sin(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)$ y

$$|I_H| = \frac{|B_{TH}|}{K_H} \cdot \tan(\alpha)$$

3.2.3.- Componente horizontal

| $\alpha \pm 1$ (degs) | $\tan(\alpha)$ | $I_H \pm 0,1$ (mA) |
|-----------------------|----------------|--------------------|
| 20 | 0.363970234 | 8.3 |
| 25 | 0.466307658 | 11.2 |
| 30 | 0.577350269 | 13.7 |
| 35 | 0.700207538 | 16.8 |
| 40 | 0.839099631 | 20.1 |
| 45 | 1 | 24 |
| 50 | 1.191753593 | 28.5 |
| 55 | 1.428148007 | 33.7 |
| 60 | 1.732050808 | 41 |
| 65 | 2.144506921 | 50 |
| 70 | 2.747477419 | 66.8 |

3.2.3.- Componente horizontal



3.2.3.- Componente horizontal

Puesto que se conoce $K_H \pm \Delta K_H$ y

3.2.3.- Componente horizontal

Puesto que se conoce $K_H \pm \Delta K_H$ y

$$|B_{TH}| \pm \Delta |B_{TH}| = K_H \cdot \text{pendiente} + (\text{pendiente} \cdot \Delta K_H + K_H \cdot \Delta \text{pendiente})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{|B_{TH}| \pm \Delta |B_{TH}| = 16,75 \pm 0,25 \mu T}$$

3.2.4.- Componente vertical

Finalmente, se han medido dos ángulos que forma el campo con la horizontal

- $\gamma_1 = 74 \pm 1$ (degs)
- $\gamma_2 = 58 \pm 1$ (degs)

3.2.4.- Componente vertical

Finalmente, se han medido dos ángulos que forma el campo con la horizontal

- $\gamma_1 = 74 \pm 1$ (degs)
- $\gamma_2 = 58 \pm 1$ (degs)

Tomando media, $\bar{\gamma} = 66 \pm 2$ (degs).

3.2.4.- Componente vertical

Finalmente, se han medido dos ángulos que forma el campo con la horizontal

- $\gamma_1 = 74 \pm 1$ (deg)
- $\gamma_2 = 58 \pm 1$ (deg)

Tomando media, $\bar{\gamma} = 66 \pm 2$ (deg).

Puesto que $\tan(\bar{\gamma}) = \frac{|B_{TV}|}{|B_{TH}|}$, se tiene

3.2.4.- Componente vertical

Finalmente, se han medido dos ángulos que forma el campo con la horizontal

- $\gamma_1 = 74 \pm 1$ (deg)
- $\gamma_2 = 58 \pm 1$ (deg)

Tomando media, $\bar{\gamma} = 66 \pm 2$ (deg).

Puesto que $\tan(\bar{\gamma}) = \frac{|B_{TV}|}{|B_{TH}|}$, se tiene

$$\begin{aligned} |B_{TV}| \pm \Delta |B_{TV}| &= \\ &= (|B_{TH}| \cdot \tan(\bar{\gamma})) \pm (\Delta |B_{TH}| \cdot \tan(\bar{\gamma}) + |B_{TH}| \cdot \sec^2(\bar{\gamma}) \cdot \Delta \bar{\gamma}) \\ \iff &\boxed{|B_{TV}| \pm \Delta |B_{TV}| = 38 \pm 4 \mu T} \end{aligned}$$

4.- Conclusiones

- En efecto, en el interior de los solenoides el campo es casi uniforme en una región extensa
- Comparación con datos de NOAA [3]:

$$|B_{TH,NOAA}| = 27,40 \pm 0,13 \mu T$$

$$|B_{TV,NOAA}| = 33,90 \pm 0,16 \mu T$$

5.- Cuestiones

1. Utilizando las expresiones en coordenadas cilíndricas de la divergencia y del rotacional del campo magnético creado por las espiras de la figura 1, demuestre las ecuaciones (7) y (9).
2. En el subapartado 4.1 se llevan a cabo medidas de la componente axial del campo magnético a lo largo de los ejes y y z de las figuras 3 y 4. Un estudio experimental completo del campo magnético en estos ejes requeriría también medir la componente radial. ¿Por qué no se llevan a cabo estas medidas?
3. Haciendo uso directamente del magnetómetro para medir α y del teslámetro para medir $|\mathbf{B}_H|$, podíamos haber utilizado la ecuación (11) para obtener el valor experimental de $|\mathbf{B}_{TH}|$. En cambio, con vistas a la medida de $|\mathbf{B}_{TH}|$, nosotros hemos recurrido a un procedimiento más rebuscado que hace intervenir al factor de calibración K_H . ¿Por qué es esto necesario?

Referencias



R. R. Boix, A. P. Izquierdo, and F. Medina, *Práctica 4: MEDIDA DEL CAMPO MAGNÉTICO DE BOBINAS DE HELMHOLTZ Y DEL CAMPO MAGNÉTICO TERRESTRE.*



Prácticas de física para geólogos, Universidad de Granada, recuperado el 19/04/2023.



“Compute earth’s magnetic field values,”
<https://www.ngdc.noaa.gov/geomag/calculators/magcalc.shtml>,
recuperado el 19/04/2023.