Année universitaire 2007-2008

UNIVERSITÉ DE NANCY

Olivier GARET

Introduction aux Graphes

Table des matières

Chapitre 1

Graphes

1.1 Graphes orientés

On appelle *graphe orienté* le couple formé par un ensemble S et une partie $A \subset S \times S$. Les éléments de S sont appelés les *sommets* du graphe et les éléments de A les arêtes. On dit que l'arête (a, b) va de a vers b, et que a et b sont les *extrémités* de l'arête (a, b). Une arête du type (a, a) est appelée une *boucle*.

Remarque : pour a et b distincts, (a, b) et (b, a) sont deux arêtes distinctes, puisque (a, b) va de a vers b et (b, a) de b vers a.

On dit qu'un graphe (S, A) est symétrique si il vérifie

$$(a, b) \in A \iff (b, a) \in A.$$

On dit qu'un graphe est simple s'il ne comporte pas de boucle.

1.1.1 Degrés d'un sommet, matrice d'adjacence

On appelle degré sortant du sommet $x \in S$ le nombre d'arêtes partant de x. On le note $d_A^+(x)$. Ainsi, on a

$$d_A^+(x) = |\{y \in S; (x, y) \in A\}|.$$

De même, on appelle degré entrant du sommet $x \in S$ le nombre d'arêtes arrivant en x. On le note $d_A^-(x)$. Ainsi, on a

$$d_A^-(x) = |\{y \in S; (y, x) \in A\}|.$$

Le degré total $d(x)$ du sommet x est défini par

$$d_A^T(x) = d_A^+(x) + d_A^-(x).$$

Ainsi, $d_A^T(x)$ est le nombre d'arêtes dont x est une extrémité, les boucles étant comptées deux fois.

On appelle matrice d'adjacence du graphe $G = (S, A)$ la matrice $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in S^2}$ indexée par les sommets du graphe telle que

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } (i,j) \in A \\ 0 \text{ si } (i,j) \notin A \end{cases}$$

(En d'autres termes $m_{i,j} = \mathbb{1}_A(i,j)$.)

Il est facile de voir que l'on a

$$\forall i \in S \quad d_A^+(i) = \sum_{j\in S} m_{i,j}$$

et

$$\forall j \in S \quad d_A^-(j) = \sum_{i\in S} m_{i,j}.$$

Comme chaque arête a exactement un sommet de départ, on a

$$|A| = \sum_{i\in S} d_A^+(i).$$

De même, comme chaque arête a exactement un sommet d'arrivée, on a

$$|A| = \sum_{i\in S} d_A^-(i).$$

En faisant la somme des deux identités, on obtient le théorème :

Théorème 1. *Soit $G = (S, A)$ un graphe. On a l'identité*

$$2|A| = \sum_{i\in S} d_A^T(i).$$

1.1.2 Morphismes de graphes orientés

Soit $G = (S, A)$ et $H = (T, B)$ deux graphes orientés. On dit qu'une application ϕ de S dans T réalise un morphisme du graphe G vers le graphe H si elle vérifie la propriété suivante :

$$(x, y) \in A \Longrightarrow (\phi(x), \phi(y)) \in B.$$

Si ϕ est une application injective, on dit que le graphe G s'injecte dans le graphe H. On dit aussi parfois que le graphe H contient le graphe G.

On dit que ϕ est un isomorphisme si il vérifie les deux conditions suivantes

– ϕ réalise une bijection entre A et B.
– $(x, y) \in A \iff (\phi(x), \phi(y)) \in B$.

Si ϕ est un isomorphisme de G dans lui-même, on dit que ϕ est un automorphisme de G. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.

Théorème 2. *Soit $G = (S, A)$ un graphe, T un ensemble, et ϕ une application de S dans T. Alors, si l'on pose*

$$A_\phi = \{(\phi(x), \phi(y)); (x, y) \in A\},$$

l'application ϕ réalise un morphisme du graphe G vers le graphe $H = (T, A_\phi)$.

1.1.3 Graphe engendré par une partie

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté et $\varnothing \neq T \subset S$. On appelle sous-graphe de G engendré par T le graphe

$$G[T] = (T, A \cap (T \times T)).$$

Il a comme sommets les éléments de T et comme arêtes les arêtes de G dont les extrémités sont dans T.

Remarque : Un sommet peut posséder des arêtes dans G et ne plus en avoir dans $G[T]$.

1.2 Graphes non orientés

On appelle *graphe non orienté* le couple formé par un ensemble S et une partie $A \subset \mathcal{B}_1(S) \cup \mathcal{B}_2(S)$. Les éléments de S sont appelés les *sommets* du graphe et les éléments de A les arêtes. On dit que l'arête $\{a, b\}$ relie a et b ; a et b sont les *extrémités* de l'arête $\{a, b\}$. Une arête du type $\{a\}$ est appelée une *boucle*.

Remarque : $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ désignent la même arête.

On dit qu'un graphe est simple s'il ne comporte pas de boucle. En d'autres termes, un graphe non-orienté $G = (S, A)$ est simple si et seulement si $A \subset \mathcal{B}_2(S)$.

Si $G = (S, A)$ est un graphe simple, on appelle graphe complémentaire de G et l'on note G^c le graphe

$$G^c = (S, \mathcal{B}_2(S) \backslash A).$$

1.2.1 Graphes orientés symétriques et graphes non-orientés

Théorème 3. *Soit S un ensemble.*
On considère l'application de $\mathcal{P}(\mathcal{B}_1(S) \cup \mathcal{B}_2(S))$ dans $\mathcal{P}(S \times S)$:

$$\begin{array}{rcl} \mathit{Sym} : \mathcal{P}(\mathcal{B}_1(S) \cup \mathcal{B}_2(S)) & \to & \mathcal{P}(S \times S) \\ A & \mapsto & \{(x,y) \in S \times S \quad \{x\} \cup \{y\} \in A\} \end{array}$$

L'application Sym réalise une injection de l'ensemble des graphes non-orientés dans l'ensemble des graphes orientés. Elle induit une bijection de l'ensemble des graphes non-orientés dans l'ensemble des graphes orientés symétriques.

On considère l'application de $\mathcal{P}(S \times S)$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{B}_1(S) \cup \mathcal{B}_2(S))$:

$$\begin{array}{rcl} \mathit{Désor} : \mathcal{P}(S \times S) & \to & \mathcal{P}(\mathcal{B}_1(S) \cup \mathcal{B}_2(S)) \\ A & \mapsto & \{\{x\} \cup \{y\}; (x,y) \in A\} \end{array}$$

L'application Désor réalise une surjection de l'ensemble des graphes orientés dans l'ensemble des graphes non-orientés. C'est une bijection de l'ensemble des graphes orientés symétriques dans l'ensemble des graphes non-orientés.

On a

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_1(S) \cup \mathcal{B}_2(S)) (\mathit{Désor} \circ \mathit{Sym})(A) = A$$

et

$$\forall A \in \mathcal{P}(S \times S) \quad (S, A) \text{ symétrique} \iff (\mathit{Sym} \circ \mathit{Désor})(A) = A$$

1.2.2 Degrés d'un sommet, matrice d'adjacence

Si $G = (A, S)$ est un graphe non-orienté, on définit le degré $d_A(x)$ du sommet $x \in S$ par $d_A(x) = d^+_{\mathrm{Sym}(A)}(x) + \mathbb{1}_A(\{x\})$.

Remarque : il est facile de voir que l'on a aussi $d_A(x) = d^-_{\mathrm{Sym}(A)}(x) + \mathbb{1}_A(\{x\})$.

En procédant comme dans la preuve du théorème 1, on a immédiatement :

Théorème 4. *Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté. On a l'identité*

$$2|A| = \sum_{i \in S} d_A(i).$$

1.2.3 Morphismes de graphes non-orientés

Soit $G = (S, A)$ et $H = (T, B)$ deux graphes non-orientés. On dit qu'une application ϕ de S dans T réalise un morphisme du graphe G vers le graphe H si elle vérifie la propriété suivante :

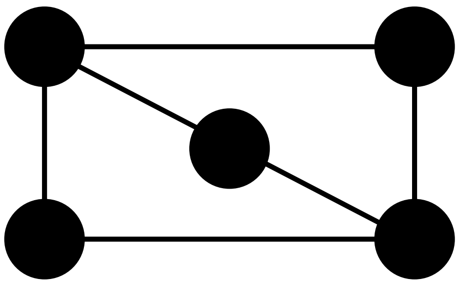
$$v \in A \Longrightarrow \phi(v) \in B.$$

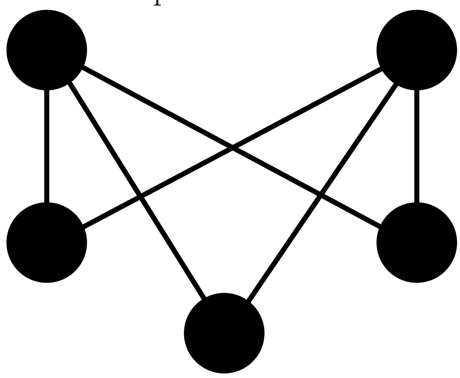
Si ϕ est une application injective, on dit que le graphe G s'injecte dans le graphe H. On dit aussi parfois que le graphe H contient le graphe G.

On dit que ϕ est un isomorphisme si il vérifie les deux conditions suivantes

- ϕ réalise une bijection entre A et B.
- $v \in A \iff \phi(v) \in B$.

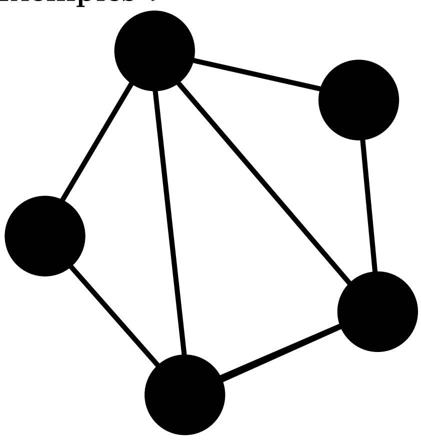
Exemple : les deux graphes suivants sont isomorphes.



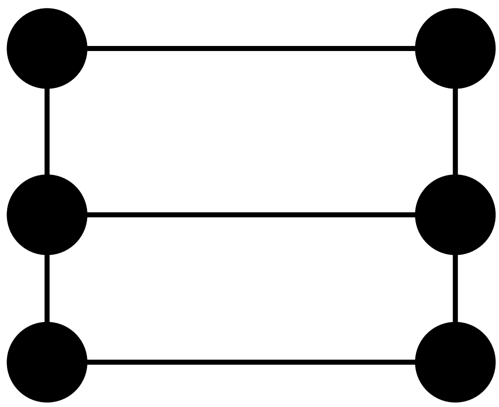


Si ϕ est un isomorphisme de G dans lui-même, on dit que ϕ est un automorphisme de G. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.

Exemples :



$\mathrm{Aut}(G) \sim \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$



$\mathrm{Aut}(G) \sim \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Théorème 5. *Soit $G = (S, A)$ un graphe, T un ensemble, et ϕ une application de S dans T. Alors, si l'on pose*

$$A_\phi = \{\phi(v); v \in A\},$$

l'application ϕ réalise un morphisme du graphe G vers le graphe $H = (T, A_\phi)$.

1.2.4 Graphe engendré par une partie

Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté et $\varnothing \neq T \subset S$. On appelle sous-graphe de G engendré par T le graphe

$$G[T] = (T, A \cap (\mathcal{B}_1(T) \cup \mathcal{B}_2(T))).$$

Il a comme sommets les éléments de T et comme arêtes les arêtes de G dont les extrémités sont dans T.

1.2.5 Notion de clique

Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté simple et $\varnothing \neq T \subset S$. On dit que T est une *clique* de G si les sommets de T sont deux à deux reliés dans G. Autrement dit, T est une clique si et seulement si $G[T] = (T, \mathcal{B}_2(T))$.

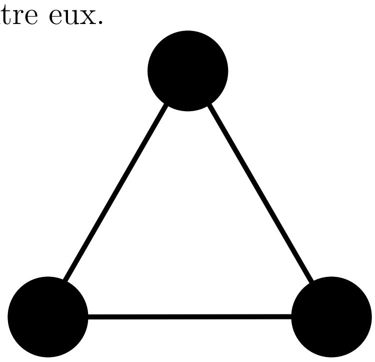
1.3 Graphes classiques

1.3.1 Graphe complet

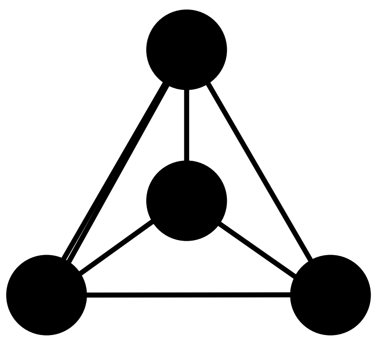
On appelle graphe complet à n sommets tout graphe s'écrivant

$$G = (S, \mathcal{B}_2(S)),$$

où S est un ensemble à n éléments.
Comme les graphes complets à n sommets sont isomorphes, on note $\mathcal{K}_n$ l'un d'entre eux.



$\mathcal{K}_3$



$\mathcal{K}_4$

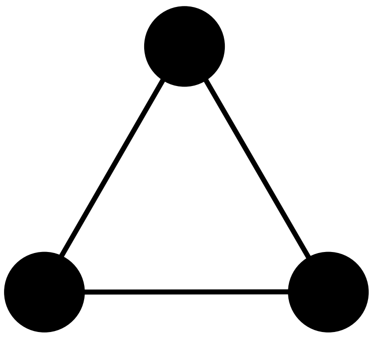
1.3.2 Graphe cyclique

On appelle graphe cyclique à n sommets tout graphe isomorphe à

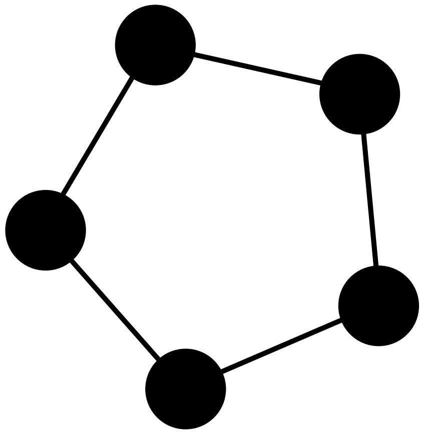
$$G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A),$$

où

$$A = \{\{x, y\} \in \mathcal{B}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), x - y \in \{-1, +1\}\}.$$



$\mathcal{C}_3$



$\mathcal{C}_5$

1.3.3 Graphe biparti complet

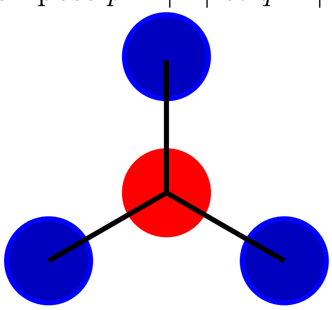
On appelle graphe biparti complet tout graphe s'écrivant

$$G = (X \cup Y, A),$$

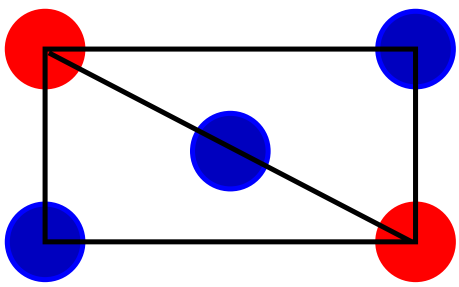
où X et Y sont deux ensembles disjoints et où

$$A = \{\{x, y\}, x \in X; y \in Y\}.$$

Si l'on pose $p = |X|$ et $q = |Y|$, on note $\mathcal{K}_{p,q}$ l'un d'entre eux.



$\mathcal{K}_{3,1}$



$\mathcal{K}_{3,2}$

Remarque : : les graphes $\mathcal{K}_{p,q}$ et $\mathcal{K}_{q,p}$ sont isomorphes.

1.4 Chemins dans un graphe orienté

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'une suite $(s_0, \ldots, s_n)$ de points de S constitue une *chaîne* de longueur n allant de s_0 à s_n si

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad (s_{i-1}, s_i) \in A. \tag{1.1}$$

On dit qu'une chaîne s de longueur $n \geq 1$ est *élémentaire* si

$$\forall i, j \in \{0, \ldots, n-1\} \quad i \neq j \Longrightarrow s_i \neq s_j \tag{1.2}$$

Remarque : Il existe toujours une chaîne de longueur zéro entre un point et lui-même.

On dit qu'une chaîne s de longueur $n \geq 1$ est un *cycle* si $s_0 = s_n$.

On dit que des sommets x et y sont connectés et on note $x \sim y$ si il existe une chaîne allant de x à y **et** s'il existe une chaîne allant de y à x.

Théorème 6. $\sim$ *est une relation d'équivalence sur* S

On appelle *composantes connexes* du graphe les classes d'équivalence induites par la relation d'équivalence $\sim$.

On dit qu'un graphe est *connexe* si quels que soient les sommets x et y du graphe, il existe une chaîne allant de x à y. Autrement dit, un graphe est connexe s'il est formé d'une unique composante connexe.

On appelle *voisinage à droite* de l'ensemble $F \subset S$ l'ensemble

$$\mathcal{V}^+(F) = \{y \in S \quad \exists x \in F \quad (x, y) \in A\}.$$

On appelle *voisinage à gauche* de l'ensemble $F \subset S$ l'ensemble

$$\mathcal{V}^-(F) = \{x \in S \quad \exists y \in F \quad (x, y) \in A\}.$$

Ces notions ont été présentées pour un graphe orienté. Elles s'étendent aux graphes non-orientés sans difficulté.

1.5 Chemin de longueur minimale

On suppose qu'à chaque arête e d'un graphe (orienté ou non), on associe un nombre $\mu(e)$ positif ou nul appelé coût de l'arête.

Si $(s_0, \ldots, s_n)$ est un chemin, on appelle coût du chemin la quantité

$$\ell(s) = \sum_{i=1}^{n} \mu(s_{i-1}, s_i).$$

Deux sommets nous étant donnés, l'un appelé sommet de départ, l'autre sommet d'arrivée, un problème est de déterminer un chemin de coût minimal reliant le sommet de départ au sommet d'arrivée.

Afin de simplifier l'exposé, on supposera ici que l'on travaille avec un graphe fini.

1.5.1 Cas où toutes les arêtes ont le même coût

On suppose ici que pour tout $e \in A$, $\mu(e) = 1$. Ici la longueur d'un chemin coincide donc avec son coût. On construit alors une suite $\mathcal{D}_n$ par récurrence comme suit

- $D_0 = \{\text{le sommet de départ}\}$
- $D_{n+1} = \mathcal{V}^+(D_n)\backslash(\bigcup_{k=0}^{n} D_k)$

Par construction, les D_n sont disjoints. Comme les $(D_n)_{n\geq 0}$ sont inclus dans S qui est fini, seul un nombre fini de D_n est non-vide.
Comme $D_n = \varnothing \Longrightarrow D_{n+1} = \varnothing$, la suite D_n est donc constamment vide à partir d'un certain rang.

Par construction de $(D_n)_{n\geq 0}$, quel que soit $x \in D_n$, il existe un chemin allant du sommet de départ à x de longueur n.

On va montrer maintenant qu'on ne peut pas fabriquer de chemin plus cours.

Comme les D_n forment une partition de l'ensemble $\mathcal{A}$ des sommets accessibles depuis le sommet de départ, on peut définir une application p de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{N}$ par $p(x) = n$ pour tout x dans D_n. On a par exemple $p(\text{le sommet de départ}) = 0$.

On peut donc reformuler ce que l'on a dit quelques lignes plus haut : quel que soit $x \in \mathcal{A}$, il existe un chemin allant du sommet de départ à x de longueur $p(x)$.

Si un point t est dans D_n et que $(t, u) \in A$, alors par construction de D_n, u est dans D_{n+1} ou dans $\bigcup_{k=0}^{n} D_k$. On a donc

$$(t, u) \in A \Longrightarrow p(u) \leq p(t) + 1.$$

Soit donc $(s_0, \dots, s_n)$ un chemin de longueur n allant du sommet de départ s_0 à $s_n = x$. On a $\forall k \in \{0, \dots n-1\} \quad p(s_{k+1}) \leq p(s_k) + 1$. On en déduit $p(x) = p(s_n) \leq p(s_0) + n = n$, ce qui montre que la longueur de ce chemin est au moins aussi grande que $p(x)$.

La mise en œuvre concrète de cet algorithme est aisée : on commence par marquer le sommet initial d'un zéro, puis, à chaque étape, on cherche les sommets non marqués qui sont voisins à droite d'un sommet marqué, et on les marque alors de l'entier immédiatement supérieur à la marque des dits voisins. On peut s'arrêter lorsque l'arrivée désirée a été atteinte

Pour obtenir un chemin minimal, on part alors du sommet d'arrivée que l'on entoure. Parmi ses voisins à gauche, on cherche un sommet d'index immédiatement inférieur, que l'on entoure. On recommence alors, jusqu'à arriver au sommet de départ. En lisant la suite obtenue à l'envers, on a ainsi un chemin de longueur minimal.

1.5.2 Cas général : algorithme de Dijkstra

L'algorithme se présente ainsi : on note en face de chaque sommet x le coût $l(x)$ du plus court chemin alors trouvé du sommet de départ jusqu'à x, ainsi que l'étape précédente $p(x)$ de ce chemin. Lorsqu'un des meileurs chemins a été trouvé, on encadre le coût qui devient définitif.

1. On pose $l(\text{départ}) = 0$ et $l(x) = +\infty$ pour les autres sommets. Aucun sommet n'est entouré. Passer à l'étape suivante.
2. Trouver x_0 réalisant le minimum de $l(x)$ parmi les sommets non-entourés. Entourer ce sommet. Si x_0 est le sommet d'arrivée, s'arrêter, sinon passer à l'étape suivante.
3. Pour tout $y \in \mathcal{V}^+(x_0)$ tel que $l(x_0)+\mu(x_0, y) < l(y)$, remplacer $l(y)$ par $l(x_0) + \mu(x_0, y)$ et $p(y)$ par x. Retourner à l'étape précédente.

Remarques :

– À l'étape 2, l'ensemble des sommets non-entourés est non vide : c'est vrai la première fois qu'on passe en deux, car nul sommet n'a été entouré à l'étape 1. Les fois suivantes qu'on y passe, il reste encore des sommets non-entourés, car sinon le sommet d'arrivée serait entouré et on se serait arrêté avant.

– L'algorithme se termine bien, car à chaque fois que l'on passe à l'étape 2, le nombre de sommets non-entourés diminue d'une unité. Comme la première fois, il y en a $|S|$, et que ce nombre est positif, cela implique que l'on passe au plus $|S|$ fois à l'étape 2.

Pour obtenir un chemin minimal allant du départ à l'arrivée, on pose $t_0 =$ sommet d'arrivée et on définit $t_{n+1} = p(t_n)$ si $t_n \neq$ sommet de départ. Si $t_n =$ sommet de départ, alors $(t_n, t_{n-1}, \ldots, t_0)$ est un chemin de coût minimal.

1.6 Cycles eulériens, chaînes eulérienne

La présente section se situe dans le cadre des graphes non-orientés.

On dit qu'une chaîne d'un graphe G est eulériene si elle passe par tous les points du graphe et utilise chaque arête une unique fois.

On dit qu'un cycle d'un graphe G est eulérien s'il passe par tous les points du graphe et utilise chaque arête une unique fois.

Bien sûr, une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien ne peuvent exister que sur un graphe connexe.

On dit qu'un graphe est eulérien s'il possède au moins un cycle eulérien

Théorème 7. *Un graphe connexe est eulérien si et seulement si tous ses points sont de degré pair.*

Démonstration. Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Supposons que G est eulérien et soit γ un cycle eulérien. Soit $y \in S$. On note I_y l'ensemble des arêtes incidentes à y. À toute arête $e \in I_y$, on peut associer une unique arête f telle les arêtes e et f sont visitées successivement dans la chaîne γ. On a fabriqué ainsi une involution sans point fixe dans I_y, ce qui montre que $d(y) = |I_y|$ est paire.

Réciproquement, soit G un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair et considérons le plus long chemin dans G qui n'utilise aucune arête plus d'une fois. On note x l'origine de la chaîne et y le bout de la chaîne. Puisque cette chaîne est maximale et que le graphe est connexe, la chaîne contient toutes les arêtes. Montrons que $x = y$: si $x \neq y$, comme la chaîne est maximale, il n'y a pas d'arête dans G entre x et y, mais alors en rajoutant une arête entre x et y, on aurait un graphe eulérien qui possèderait un point de degré impair, ce qui est impossible. Ainsi $x = y$, et alors le chemin est un cycle eulérien. □

Théorème 8. *Un graphe connexe contient une chaîne eulérienne si et seulement si il contient* 0 *ou* 2 *sommets de degré impair.*

Démonstration. Si un graphe connexe contient 0 sommets de degré impair, il contient un cycle lérien, donc une chaîne eulérienne. Si un graphe connexe contient 2 sommets impairs, rajoutons une arête entre ces deux points : on obtient un graphe dont toutes les arêtes sont de degré pair, donc admettant un cycle eulérien γ. Si on enlève l'arête $\{x, y\}$ de ce cycle, on obtient une chaîne eulérienne dans le graphe initial.

Maintenant supposons qu'un graphe admette une chaîne eulérienne. Si son origine est son extrémité, c'est un cycle eulérien, donc tous les sommets du graphe sont de degrés pairs. Sinon, rajoutons une arête entre l'origine et l'extrémité : on obtient alors un cycle eulérien dans le graphe augmenté, donc tous les sommets du graphe augmenté sont de degrés pairs. Ainsi tous les sommets du graphe originel sont de degré pair, sauf x et y qui sont de degrés impairs. □

1.7 Exercices

1. Montrer que, depuis l'apparition de l'homme sur terre, le nombre d'hommes ayant serré la main d'un nombre impairs de personnes est pair.
2. Soit X un ensemble à 5 éléments. Combien existe-t-il de graphes simples orientés construits sur X ?
3. Pour $n \geq 2$, on note $\mathcal{E}_n$ le graphe complémentaire de $\mathcal{C}_n$. Pour $n \in \{2, \ldots, 6\}$, représenter $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{E}_n$.
4. Soit $n \geq 2$. On pose $S =\in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et l'on se fixe un $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On définit un graphe orienté $G = (S, A)$ sur S par

$$(x, y) \in A \iff y = x + a.$$

   (a) On rappelle que pour n entier admettant la décomposition en produits de facteurs premiers :

$$n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

   on a

$$\phi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \ldots p_k^{\alpha_k}(p_k - 1),$$

   où $\phi(n)$ désigne le nombre d'inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (ou encore le nombre d'entiers entre 1 et n qui sont premiers avec n).
   Montrer que $n \geq 7 \quad \Longrightarrow \phi(n) \geq 4$.

   (b) Pour quelles valeurs de n a-t-on "G connexe $\Longrightarrow a \in \{+1; -1\}$ " ?
5. Montrer que si un graphe $G = (X, E)$ possède k composantes connexes, on a

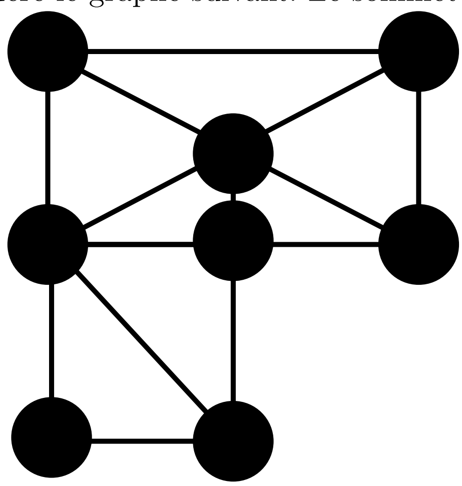
$$|X| \leq |E| + k.$$

   Suggestion : on pourra procéder par récurrence sur le nombre d'arêtes.
6. Un enseignant pose 24 exercices à ses étudiants. Chacun des exercices vaut un point, et la note accordée à chaque exercice ne peut valoir que 0 ou 1. Catastrophe ! Non seulement les étudiants ont tous 6/24, mais pire, chaque exercice a été résolu par exactement deux étudiants ! Magnanime, l'enseignant leur propose alors de travailler par binômes : chaque membre d'un binôme aura alors la note de leur copie commune. On suppose que deux étudiants n'ont jamais plus d'un exercice réussi en commun. Montrer qu'il est possible aux étudiants de s'associer de telle manière que tout le monde ait la moyenne.
   (Note : évidemment, la copie rendue par le binôme donne la bonne réponse a un exercice donné si au moins l'un des deux membres connaissait la bonne réponse.)

7. Au cours d'une réception rassemblant n personnes, on se rend compte que dans chaque groupe de 4 personnes, il y en a au moins une qui connait les 3 autres. Montrer qu'il existe au moins $n-3$ personnes qui connaissent tout le monde.

8. 5 amis jouent des parties d'échecs. En tout, 14 parties sont jouées. Montrer qu'au moins une des personnes a perdu au plus 2 parties.

9. On considère le graphe suivant. Le sommet de départ est celui en bas,



à gauche.

   (a) Pour chacun des sommets du graphe, déterminer un chemin de longueur minimale allant du sommet de départ $(0,0)$ à ce sommet.

   (b) Adapter l'algorithme du cours de façon à déterminer, pour chaque sommet du graphe, le nombre de chemins de longueur minimale joignant le somment de départ à ce sommet.

10. On considère le graphe non-orienté d'ensemble de sommets

$$S = \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3,4\}$$

et d'arêtes

$$A = \{\{u,v\} \in \mathcal{B}_2(S) \quad \|u-v\| = 1\},$$

où $\|u-v\| = |u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|$. Faire un dessin de ce graphe, puis répondre aux questions suivantes :

   (a) Pour chacun des sommets du graphe, déterminer un chemin de longueur minimale allant du sommet de départ à ce sommet.

   (b) Adapter l'algorithme du cours de façon à déterminer, pour chaque sommet du graphe, le nombre de chemins de longueur minimale joignant le somment de départ à ce sommet. Que remarquez-vous ?

11. (a) Soit $G = (S, A)$ un graphe simple orienté et $T \subset S$. Montrer l'inégalité

$$\sum_{x \in T} d^+(x) \leq |T|(|T|-1) + \sum_{y \in S \setminus T} \min(|T|, d^-(y)).$$

(b) Soit $G = (S, A)$ un graphe simple non-orienté, avec $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $d(x_1) \geq d(x_2) \geq \cdots \geq d(x_n)$.
Montrer que $\sum_{i=1}^{n} d(x_i)$ est pair et que

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad \sum_{i=1}^{k} d(x_i) \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d(x_i)).$$

(c) À la fin d'une réception, on demande aux participants avec combien de personnes ils ont discuté. On obtient comme réponses : $7, 6, 5, 4, 3, 3, 2$. Montrer qu'au moins une personne a fait une erreur.

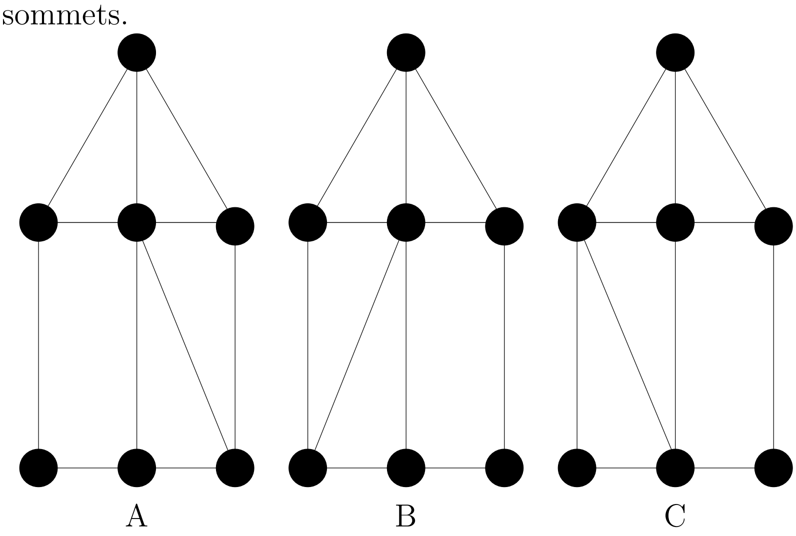
(d) Même question avec

i. $7, 7, 5, 4, 3, 3, 2, 1$.

ii. $7, 7, 6, 4, 3, 3, 2, 2$.

iii. $6, 6, 4, 2, 2, 2, 2, 2$.

12. (a) Parmi les graphes ci-dessous, lequels sont isomorphes ?
Indication : on pourra commencer par calculer les degrés des différents sommets.



(b) Lorsqu'ils le sont, l'isomorphisme est-il unique ?

13. Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté. On suppose que pour tout $k \in \{0, \ldots, l\}$, G possède exactement 4 sommets de degré k.
    Montrer $l \leq \sqrt{|A|}$.

Chapitre 2

Coloriage des sommets

Tous les graphes considérés dans ce chapitre sont des graphes non-orientés.

2.1 Partition en stables d'un graphe simple

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple. On dit qu'un ensemble $E \subset S$ est un *stable* de G si il vérifie

$$\forall \{x, y\} \in \mathcal{B}_2(E) \quad \{x, y\} \notin A. \tag{2.1}$$

Cela signifie que 2 sommets qui sont dans E ne peuvent être reliés.

On dit qu'un graphe $G = (S, A)$ est k-parti s'il existe une partition $(E_1, \ldots, E_k)$ de S formée de k stables.

Remarques :

- On ne dit pas "un graphe 2-parti", mais plutôt "un graphe biparti".
- Le graphe $G = (S, A)$ est au moins $|S|$-parti (il suffit de prendre comme partition de S l'ensemble des singletons de S).

Exemple : On prend pour S l'ensemble des étudiants hétérosexuels actifs de la faculté des Sciences (on suppose cet ensemble non-vide) et on relie x et y s'ils ont eu des relations sexuelles. Le graphe obtenu ainsi est biparti. Il suffit de considérer l'ensembles des hommes, d'une part, l'ensemble des femmes d'autre part.

2.2 Coloriages propres

Soit $G = (S, A)$ un graphe. On appelle coloriage d'un graphe G à k couleurs toute application ϕ de S dans $\{1, \ldots, k\}$.

On dit qu'un coloriage ϕ est propre s'il vérifie

$$\forall x, y \in S \quad \{x, y\} \in A \Longrightarrow \phi(x) \neq \phi(y) \tag{2.2}$$

On note $\mathrm{CP}_k(G)$ l'ensemble des coloriages propres à k couleurs de G.

2.2.1 Coloriages propres et partitions en stables

Théorème 9. *Soit $G = (S, A)$ un graphe et $k \geq 1$. G est k-parti si et seulement si il existe un coloriage propre à k couleurs de G.*

Démonstration. Si $(E_1, \ldots, E_k)$ est une partition de S en k stables, il suffit de définir ϕ par $\phi(x) = k$ pour $x \in E_k$ et l'on obtient alors un coloriage propre à k couleurs de G.
Réciproquement, si ϕ est un coloriage propre à k couleurs de G, il suffit de poser $E_k = \{x \in S; \phi(x) = k\}$ et l'on obtient une partition de S en k stables. □

2.2.2 Graphes bipartis

Théorème 10. *Soit $G = (S, A)$ un graphe et $k \geq 1$. G est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle de longueur impaire.*

Démonstration. Soit G un graphe biparti et ϕ un coloriage propre à 2 couleurs de G. Si $(x_0, \ldots, x_n)$ est une chaîne, on a pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\phi(x_i) \neq \phi(x_{i+1})$, d'où $\phi(x_{2k}) = \phi(x_0)$ et $\phi(x_{2k+1}) = \phi(x_1)$. Maintenant, si cette chaîne est un cycle, on $x_0 = x_n$, d'où $\phi(x_0) = \phi(x_n)$, ce qui implique que n est pair. G ne possède donc pas de cycle de longueur impaire.

Soit maintenant G un graphe ne possédant pas de cycle de longueur impaire. On doit construire un coloriage propre de G. Comme les composantes connexes ne communiquent pas entre elles, on peut se ramener au cas où G est connexe : il suffira ensuite de recoller les applications.

Soit x_0 un point quelconque de x. Pour $x \in S$, on note $l(x)$ la longueur minimale d'un chemin reliant x_0 à x. On pose alors $\phi(x) = 1$ si $l(x)$ est pair, $\phi(x) = 2$ sinon. Soit $\{x, y\} \in A$: il est facile de voir que $|l(x) - l(y)| \leq 1$. Si on avait $l(x) = l(y)$, on pourrait construire un cycle de longueur $2l(x) + 1$ contenant le point x_0 et l'arête $\{x, y\}$. Ceci est contraire à l'hypothèse selon laquelle le graphe ne contient pas de cycle de longueur impaire. On a donc $|l(x) - l(y)| = 1$, donc $l(x)$ et $l(y)$ ne sont pas de même parité, ce qui implique $\phi(x) \neq \phi(y)$. Le coloriage est donc bien propre. □

2.2.3 Nombre chromatique d'un graphe

On appelle nombre chromatique d'un graphe G et l'on note $\chi(G)$ le nombre

$$\chi(G) = \inf\{k \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{CP}_k(G) \neq \varnothing\}.$$

Ainsi $\chi(G)$ est le nombre minimal de couleurs permettant de faire un coloriage propre de G.

Remarque : On a toujours $\chi(G) \leq |S|$. (Si $S = (x_1, \ldots, x_k)$, il suffit de poser $\phi(x_i) = i$ et on obtient un coloriage de G à $|S|$ couleurs.)

2.3 Nombre de coloriages propres

Le but de ce paragraphe est, pour un graphe donné G, de déterminer $|\mathrm{CP}_k(G)|$, c'est à dire le nombre de coloriages propres à k couleurs de G.

2.3.1 Exemple : le graphe sans arêtes à n éléments $\mathcal{V}_n$

On appelle graphe sans arêtes à n éléments et on note $\mathcal{V}_n$ le graphe $\mathcal{V}_n = (S, A)$ où $S = \{1, \ldots, n\}$ et $A = \varnothing$.

Le graphe V_4.

Il est facile de voir que $|\mathrm{CP}_k(\mathcal{V}_n)| = k^n$

2.3.2 Exemple : le graphe linéaire $\mathcal{L}_n$

On appelle graphe linéaire à n éléments et on note $\mathcal{L}_n$ le graphe linéaire $\mathcal{L}_n = (S, A)$ où $S = \{1, \ldots, n\}$ et $A = \{\{i, i+1\}; 1 \leq i \leq n-1\}$.

Le graphe L_4.

Il est facile de voir que $|\mathrm{CP}_k(\mathcal{L}_n)| = k(k-1)^{n-1}$

2.3.3 Exemple : le graphe cyclique $\mathcal{C}_n$

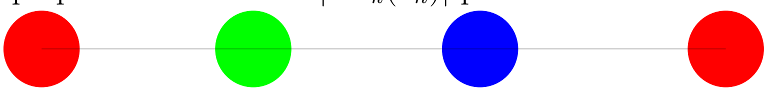
Il est facile de voir que si l'on rajoute l'arête $\{1, n\}$ au graphe linéaire $\mathcal{L}_n$, on obtient le graphe cyclique $\mathcal{C}_n$.

Ainsi, tout coloriage propre de $\mathcal{C}_n$ est un coloriage propre de $\mathcal{L}_n$, puisque l'ensemble des arêtes de $\mathcal{L}_n$ est inclus dans l'ensemble des arêtes de C_n.

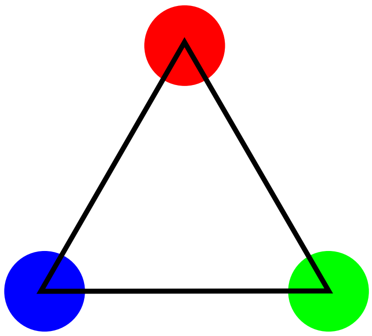
Quels sont donc les coloriages propres de $\mathcal{L}_n$ qui ne sont pas des coloriages propres de $\mathcal{C}_n$? Ce sont les coloriages propres c de $\mathcal{L}_n$ qui vérifient $c(1) = c(n)$. Combien y a-t-il de tels coloriages ? Il suffit de superposer – c'est à dire d'identifier – les points 1 et n et de compter le nombre de coloriages propres du graphe ainsi obtenu. On observe facilement que le graphe obtenu est $\mathcal{C}_{n-1}$. On en déduit la formule

$$|\mathrm{CP}_k(\mathcal{C}_n)| = |\mathrm{CP}_k(\mathcal{L}_n)| - |\mathrm{CP}_k(\mathcal{C}_{n-1})|,$$

qui permet de calculer $|\mathrm{CP}_k(\mathcal{C}_n)|$ par récurrence.



Un coloriage de L_4 vérifiant $c(1) = c(4)$.



Le coloriage de $\mathcal{C}_3$ correspondant.

2.3.4 Polynôme chromatique

On va voir que le raisonnement fait au paragraphe précédent pour déduire la valeur des $|\mathrm{CP}_k(\mathcal{C}_n)|$ à partir des $|\mathrm{CP}_k(\mathcal{L}_n)|$ se généralise sans difficulté majeure et permet ainsi de calculer $|\mathrm{CP}_k(G)|$ pour n'importe quel graphe simple. En particulier, on constatera que $|\mathrm{CP}_k(G)|$ est un polynôme en k dont on énoncera quelques propriétés.

Quelques notations

Pour e arête de $G = (S, A)$, on note $G - e$ le graphe obtenu à partir de G

en supprimant l'arête e : on a ainsi $G - e = (S, A\backslash e)$. On note $G.e$ le graphe obtenu à partir de $G - e$ en identifiant les deux extrémités de e. Ainsi, si $e = \{i, j\}$, on peut définir $G.e$ par $G.e = (S\backslash\{j\}, A_\phi)$, où $\phi : S \to S\backslash\{j\}$ est défini par

$$\phi(x) = \begin{cases} i & \text{si } x = j, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple : Si e est une arête quelconque du graphe $\mathcal{C}_n$, on a vu que $\mathcal{C}_n - e \sim \mathcal{L}_n$ et $\mathcal{C}_n.e \sim \mathcal{C}_{n-1}$.

Théorème 11. *Soit G un graphe simple dont e est une arête. Alors on a la formule*

$$|CP_k(G)| = |CP_k(G - e)| - |CP_k(G.e)|.$$

Démonstration. On note $e = \{i, j\}$. Les coloriages propres c de $G - e$ se divisent en 2 catégories :

- ceux qui vérifient $c(i) \neq c(j)$
- ceux qui vérifient $c(i) = c(j)$.

Les premiers sont exactement les coloriages propres de G. Quant aux seconds, ils sont en bijection avec les coloriages propres de $G.e$. On a donc

$$|\mathrm{CP}_k(G - e)| = |\mathrm{CP}_k(G)| + |\mathrm{CP}_k(G.e)|,$$

ce qui donne la formule désirée. □

Théorème 12. *Soit $G = (S, A)$ un graphe simple possédant $n = |S|$ sommets Il existe un unique polynôme $P_G \in \mathbb{Z}[X]$ vérifiant*

$$\forall k \geq 0 \quad P_G(k) = |CP_k(G)|.$$

Ce polynôme P_G est appelé polynôme chromatique *de G.*
Il vérifie les propriétés suivantes :

- *P_G est unitaire, de degré $|S|$.*
- *Il existe une suite $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ d'entiers positifs ou nuls telle que*

$$P_G(X) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} a_k X^k$$

- *Le coefficient en X^0 dans la base canonique est nul.*
- *Le coefficient en $X^{|S|-1}$ dans la base canonique vaut $-|A|$.*

Démonstration. L'unicité d'un tel polynôme provient du fait que deux polynômes coïncidant en une infinité de points – ici les éléments de $\mathbb{N}$ – sont nécessairement égaux.

Pour l'existence, on va procéder par récurrence sur le nombre d'arêtes $|A|$. Lorsque $|A| = 0$, G est le graphe sans arêtes. Or on a vu précédemment que le graphe sans arêtes à n éléments vérifie $|\mathrm{CP}_k(\mathcal{V}_n)| = k^n$. Ainsi, on a $P_{\mathcal{V}_n} = X^n$. Il est facile de voir que ce polynôme vérifie toutes les propriétés citées.

Supposons maintenant $|A| \geq 1$ et soit e une arête de G. D'après le théorème 11, on a $|\mathrm{CP}_k(G)| = |\mathrm{CP}_k(G-e)| - |\mathrm{CP}_k(G.e)|$. Or les graphes $G-e$ et $G.e$ contiennent tous deux $|A|-1$ arêtes. Si l'on pose alors $P_G = P_{G-e} - P_{G.e}$, on a bien alors $|\mathrm{CP}_k(G)| = P_G(k)$.

$G-e$ possède autant de sommets que G, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, P_{G-e} est de degré n. Encore d'après l'hypothèse de récurrence, on peut trouver des entiers positifs où nuls (a_k) tels que

$$P_{G-e}(X) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} a_k X^k.$$

Comme ce polynôme est unitaire, on a $a_n = 1$. Comme $G-e$ possède une arête de moins que G, on a, toujours d'après l'hypothèse de récurrence, $a_{n-1} = |A| - 1$.

$G.e$ possède un sommet de moins que G, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, P_{G-e} est de degré $n-1$. Encore d'après l'hypothèse de récurrence, on peut trouver des entiers positifs où nuls (b_k) tels que

$$P_{G.e}(X) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-1-k} b_k X^k.$$

Comme ce polynôme est unitaire, on a $b_{n-1} = 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
P_G &= P_{G-e} - P_{G.e} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} a_k X^k - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-1-k} b_k X^k \\
&= a_n X^n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} (a_k + b_k) X^k \\
&= X^n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} (a_k + b_k) X^k.
\end{aligned}$$

Ainsi P_G est bien unitaire, de degré n – c'est à dire son nombre de sommets – et de coefficient en X^0 nul. Comme les suites (a_k) et (b_k) sont à termes positifs, la suite $(a_k + b_k)$ l'est aussi. Quant au coefficient en X^{n-1}, il vaut $-(a_{n-1} + b_{n-1}) = -(a_{n-1} + 1)$. D'après l'hypothèse de récurrence, a_{n-1} est le nombre d'arêtes de $G - e$, c'est à dire $|A| - 1$: le coefficient de P_G en X^{n-1} vaut donc bien $-|A|$.

$\square$

Corollaire 1. *On a la formule de récurrence*

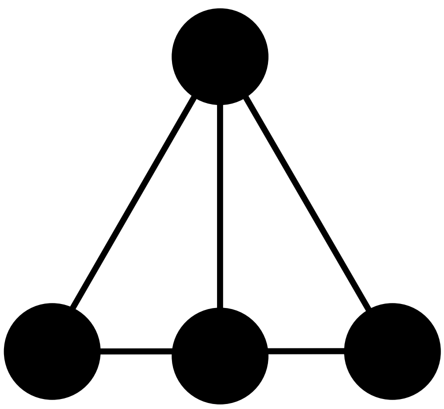
$$P_G = P_{G-e} - P_{G.e}$$

2.4 Un exemple de calcul

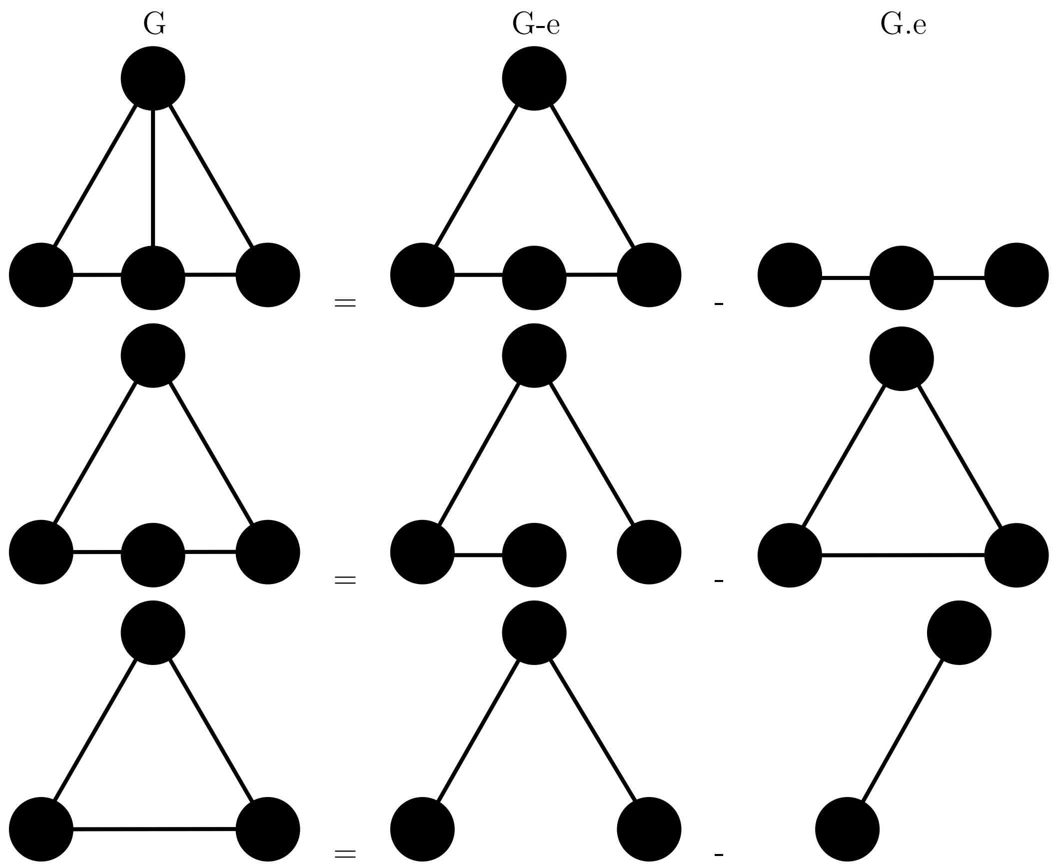
La formule de récurrence $P_G = P_{G-e} - P_{G.e}$ permet de calculer le polynôme chromatique de n'importe quel graphe, du moment que l'on sait que $P_{\mathcal{V}_n} = X^n$. Cependant, on va plus rapidement si l'on utilise conjointement d'autres résultats, par exemple que $P_{\mathcal{L}_n} = X(X-1)^{n-1}$.

Exemple :

On considère le graphe



On va calculer son polynôme chromatique en utilisant les formules de récurrence, puis en déduire son nombre chromatique.



On a successivement

$$
\begin{aligned}
P_G &= P_{\mathcal{C}_4} - P_{\mathcal{L}_3} \\
P_{\mathcal{C}_4} &= P_{\mathcal{L}_4} - P_{\mathcal{C}_3} \\
P_{\mathcal{C}_3} &= P_{\mathcal{L}_3} - P_{\mathcal{L}_2}
\end{aligned}
$$

On en déduit

$$
\begin{aligned}
P_G &= P_{\mathcal{L}_4} - 2P_{\mathcal{L}_3} + P_{\mathcal{L}_2} \\
&= X(X-1)^3 - 2X(X-1)^2 + X(X-1) \\
&= X(X-1)((X-1)^2 - 2(X-1) + 1) \\
&= X(X-1)((X-1)(X-3) + 1) \\
&= X(X-1)(X^2 - 4X + 4) \\
&= X(X-1)(X-2)^2
\end{aligned}
$$

On a donc calculé le polynôme chromatique de G. Maintenant, le plus petit entier positif k tel que $P_G(k) \neq 0$ est $k = 3$. On en déduit que le nombre chromatique $\chi(G)$ vaut 3.

2.5 Algorithmes simples de coloriage

On va décrire des algorithmes simples pour obtenir un coloriage propre d'un graphe avec $\chi(G)$ couleurs.

2.5.1 algorithme optimiste

Il est basé sur la remarque simple suivante : si un point x du graphe $G = (S, A)$ est de degré strictement inférieur à $\chi(G)$, alors

- $\chi(G[S\backslash\{x\}]) \leq \chi(G[S\backslash\{x\}])$
- tout coloriage propre à k couleurs de $G[S\backslash\{x\}]$ se prolonge en un coloriage propre de G : il suffit de donner au point x une couleur qui n'est pas donnée aux voisins de x.

On peut ainsi itérer et se ramener à devoir colorier des graphes toujours plus petit.

Cette procédure peut être mise en défaut que si on arrive a un graphe dont tous les sommets sont de degré supérieur ou égal à $\chi(G)$.

Dans ce cas, soit on voit tout de suite une solution (par exemple si on reconnait un graphe complet), soit on supprime quand même le point x, en espérant que le coloriage de $G[S\backslash\{x\}]$ prendra en fait moins de $\chi(G)$ couleurs sur les voisins de x. Une solution alternative, dans un tel cas, est d'adopter l'algorithme glouton.

2.5.2 algorithme glouton

Pour colorier le sommet numéro k, on essaie successivement les couleurs.

Pour une couleur c on vérifie qu'il n'y a pas conflit avec un des $k - 1$ sommets déjà coloriés :

- si c'est correct on colorie ce sommet avec la couleur c on passe au sommet suivant, jusqu'à épuisement des points
- sinon on teste la couleur suivante.
- s'il n'y a aucune couleur possible, on efface la couleur qu'on avait mise au sommet $k-1$ et on essaye une autre couleur pour voir si ça va mieux.

Ce dernier algorithme est sûr de trouver un coloriage propre (lorsque le nombre de couleurs est au moins égale à $\chi(G)$), mais cela peut être long.

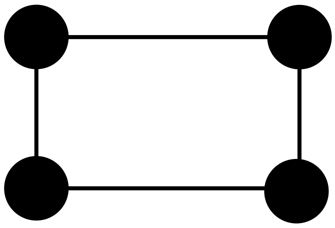
2.6 Exercices

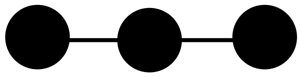
1. Faire un beau dessin de $\mathcal{K}_4$ et déterminer son nombre chromatique.
2. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il ne possède aucun cycle élémentaire de longueur impaire.
3. (a) Soit $G = (X, E)$ un graphe. On note $X_1, X_2, \ldots, X_{\chi(G)}$ une partition de G en $\chi(G)$ couplages. Soit $p \in \{1, \ldots, \chi(G)\}$. Montrer que le nombre chromatique du sous-graphe de G engendré par $\bigcup_{k=1}^{p} X_k$ est p.

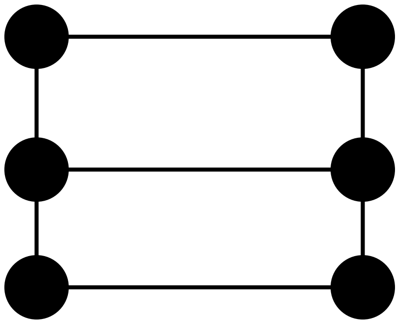
   (b) Montrer que dans tout graphe G vérifiant $\chi(G) \geq 6$, on peut trouver deux cycles élémentaires de longueur impaire disjoints.
4. (a) Soit $G = (S, A)$ un graphe biparti. Montrer qu'il existe une application $\varepsilon : S \to \{+1; -1\}$ telle que
$$\sum_{x \in S} \varepsilon(x) d(x) = 0.$$

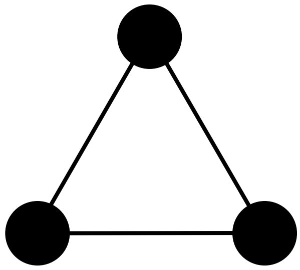
   (b) Des garçons et des filles dansent dans une soirée de gala. À la fin de la soirée, on demande à chacun et chacune le nombre de danses auxquelles ils ont participé.
   Les réponses sont $3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6$.
   Montrer qu'au moins une personne a fait une erreur.
5. Pour n entier non nul, calculer $P_{\mathcal{K}_n}$.
6. Soit G un graphe possédant 5 sommets. Montrer que ce graphe admet au moins 120 coloriages propres à 5 couleurs.
7. Soit G un graphe connexe non-orienté, avec $G \neq \mathcal{L}_2$. On suppose que G possède m sommets de degré 1. Montrer que le polynôme $(X-1)^m$ divise P_G.
8. Soit $G = (S, A)$ un graphe et (S_1, S_2) une partition de S telle que
$$\forall X \in S_1 \quad \forall y \in S_2 \quad \{x, y\} \notin A.$$
   Montrer que $P_G = P_{G[S_1]} P_{G[S_2]}$.
9. Soit G un graphe possédant m composantes connexes. Montrer que le polynôme X^m divise P_G.
10. Pour chacun des graphes suivants, il faut
    – calculer le polynôme chromatique,
    – calculer le nombre chromatique

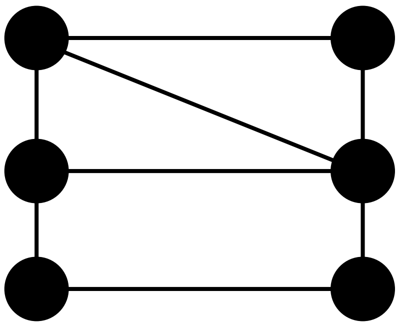
– donner un exemple de coloriage propre avec un nombre minimal de couleurs.

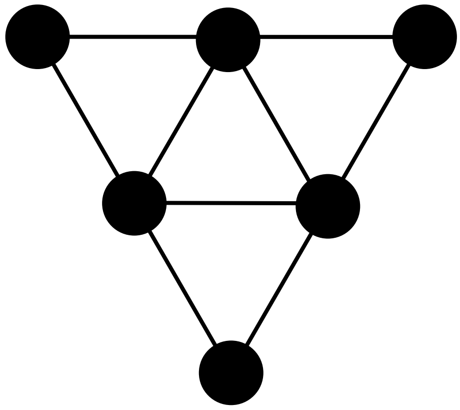


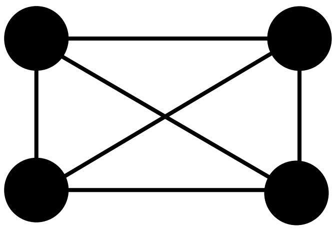


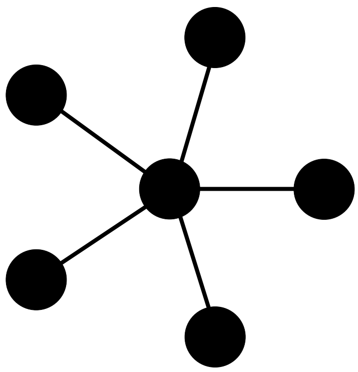


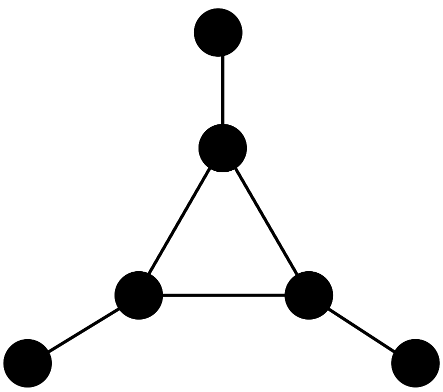


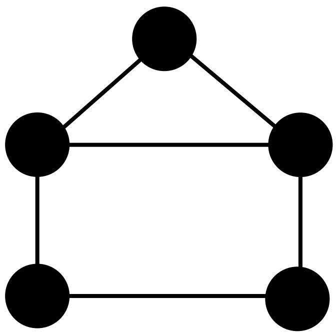












11. Montrer que les polynômes suivants ne sont pas chromatiques
    - $P(X) = X^6 + X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 4X^2 + X$.
    - $P(X) = X^3 - 5X^2 + 6X$.
    - $P(X) = X(X+1)^4$.
12. Déterminer tous les polynômes chromatiques s'écrivant

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$

avec $a_{n-1} = -3$.

Chapitre 3

Jeux de blocage

Tous les graphes considérés dans ce chapitre sont des graphes orientés.

3.1 Jeux sur un graphe

On suppose qu'un graphe simple orienté $G = (S, A)$ est donné à deux joueurs. Au début la position du jeu est le sommet x_0. Le joueur A doit alors choisir $x_1 \in \mathcal{V}^+(x_0)$, ce qui donne la nouvelle position du jeu. Ensuite, le joueur B doit alors choisir $x_2 \in \mathcal{V}^+(x_1)$, ce qui donne la nouvelle position du jeu. Ensuite, le joueur A..et cætera, jusqu'à ce qu'un joueur ne puisse plus jouer car le joueur précédent a mis le jeu dans une position x telle que $\mathcal{V}^+(x) = \varnothing$. On dit que le jeu est un *jeu direct* si le joueur qui ne peut plus jouer a perdu. On dit que le jeu est un *jeu inverse* si le joueur qui ne peut plus jouer a gagné. Il est facile de voir qu'on peut toujours se ramener a l'étude d'un jeu direct : si $G = (S, A)$ est associé à un jeu indirect, il suffit d'étudier le jeu direct sur $H = (S \cup \{\infty\}, A \cup A_\infty)$, où ∞ est un sommet qu'on ajoute au graphe initial et

$$A_\infty = \{(x, \infty); x \in \{x \in A; \mathcal{V}_G^+(x) = \varnothing\}\}.$$

Exemple : Un sac contient 100 pièces d'or. Deux joueurs y puisent alternativement un certain nombre de pièces d'or, une au minimum, dix au maximum. Celui qui ne peut plus prendre de pièce a perdu (et donc l'autre a gagné).

Ici $S = \{1, \dots, 100\}$ et $A = \{(i, j) \in A^2 \quad 1 \le i - j \le 10\}$.

On dit qu'un graphe simple orienté $G = (S, A)$ est *progressivement fini* si il n'existe pas de chemin de longueur infinie dans G : pour toute suite $(x_i)_{i \ge 0}$ à valeurs dans S, il existe $i \ge 0$ tels que $(x_i, x_{i+1}) \notin A$.

Ainsi, tout jeu sur un graphe progressivement fini s'arrête un jour – et a donc un gagnant et un perdant. Si le graphe n'est pas progressivement fini, il existe des parties qui ne s'arrêtent jamais – en pratique, les joueurs s'accordent sur la nullité, ou la règle du jeu fixe l'attitude à adopter (voir par exemple la règle des trois coups aux échecs).

Théorème 13. – *Tout graphe progressivement fini est sans cycle.*
– *Tout graphe fini sans cycle est progressivement fini.*

Démonstration. On montre les deux propositions par contraposée.

– Si $(s_0, s_1, \ldots, s_{p-1}, s_p)$ est un cycle, et que l'on pose pour $n = pq + r$ avec $0 \leq r < p$, $x_n = s_r$, x est un chemin de longueur infinie et donc le graphe n'est pas progressivement fini.
– Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ un chemin infini d'un graphe fini non progressivement fini. L'application

$$\begin{array}{rcl} \{0, |S|\} & \to & S \\ i & \mapsto & x_i \end{array}$$

ne peut être injective car le cardinal de l'ensemble d'arrivée est strictement inférieur à celui de l'ensemble de départ. Ainsi il existe $0 \leq i < j \leq |S|$ tels que $s_i = x_j$. Ainsi $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j)$ est un cycle.

□

On utilise fréquemment le lemme suivant pour montrer qu'un graphe est progressivement fini.

Lemme 1. *Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté (pas nécessairement fini). On suppose qu'il existe une fonction $\phi : S \to \mathbb{N}$ telle que*

$$\forall x \in S \quad \forall y \in \mathcal{V}^+(x) \quad \phi(y) < \phi(x).$$

Alors G est progressivement fini.

Démonstration. Soit $(x_0, \ldots, x_n)$ un chemin du graphe G. On a

$$\phi(x_0) \geq \phi(x_0) - \phi(x_n) = \sum_{i=1}^{n} (\phi(x_{i-1}) - \phi(x_i)) \geq \sum_{i=1}^{n} 1 = n,$$

donc la partie ne peut faire plus de $\phi(x_0)$ coups □

Exemple : Dans le jeux des pièces précédent, il suffit de prendre $\phi(x) = x$.

3.2 Somme digitale

3.2.1 Développement binaire d'un entier

On note Puiss_2 l'ensemble des puissances de 2 :

$$\text{Puiss}_2 = \{2^k; k \in \mathbb{N}\},$$

et P_f^2 l'ensemble des parties finies de Puiss_2 :

$$P_f^2 = \{A \in \mathcal{P}(\text{Puiss}_2); |A| < +\infty\}.$$

Exemple : $\{1, 4, 32\} \in P_f^2$.
Pour $A \in P_f^2$, on note

$$s(A) = \sum_{x \in A} x.$$

Exemple : $s(\{1, 4, 32\}) = 37$.
Remarques :
- Si $A, B \in P_f^2$, alors $A \cup B \in P_f^2$.
- Si $A, B \in P_f^2$ vérifient $A \cap B = \varnothing$, alors $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$.
- Si $A \in P_f^2$, alors $2A = \{2x; x \in A\} \in P_f^2$.
- $s(A)$ est pair si et seulement si $1 \notin A$.
- Si $A \in P_f^2$ et que $1 \notin A$, alors $\frac{1}{2}A = \{x/2; x \in A\} \in P_f^2$.

Théorème 14. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} P_f^2 & \to & \mathbb{N} \\ A & \mapsto & s(a) = \sum_{x \in A} x. \end{array}$$

est bijective.
On notera p sa bijection réciproque.

Démonstration. On note H_n l'hypothèse $\exists! A \in P_f^2 \quad s(A) = n$. Vérifions H_0 : on a $s(\varnothing) = 0$. D'autre part, pour tout A non vide dans P_f^2,

$$s(x) = \sum_{x \in A} x \geq \min(A) \geq 1 > 0.$$

Ainsi H_0 est vérifiée. Montrons que si $n \geq 1$ et $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\} \quad H_k$ est vérifiée, alors H_n est vérifiée.

- Si n est pair, alors il existe k vérifiant $0 \leq k < n$ et $n = 2k$. D'après H_k, il existe $B \in P_f^2$ vérifiant $s(B) = k$. Maintenant
$$n = 2k = 2s(B) = 2\sum_{x \in B} x = \sum_{x \in B} 2x = \sum_{y \in 2B} y = s(2B)$$
Supposons maintenant $n = 2k = s(A) = s(C)$: on en déduit $k = s(\frac{1}{2}A) = s(\frac{1}{2}C)$. D'après H_k, on a alors $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}C$. On en déduit $A = C$.
- Si n est impair, soit B tel que $s(B) = n - 1$ – c'est possible d'après l'hypothèse de récurrence. Comme $n - 1$ est pair, B ne contient pas 1. On a alors $s(B \cup \{1\}) = s(B) + s(\{1\}) = n - 1 + 1 = n$. On a donc l'existence. Soit maintenant A tel que $s(A) = n$. Comme n est impair A contient $\{1\}$: on a donc $s(A \backslash \{1\}) = S(A) - s(\{1\}) = n - 1 = s(B)$. D'après H_n, on a donc $A \backslash \{1\} = B$. On en déduit $A = B \cup \{1\}$.

□

Exemple : $p(37) = \{1; 4; 32\}$; $p(17) = \{1; 16\}$.

Lemme 2.
$$\forall A \in P_f^2 \quad \max(A) \leq s(A) < 2\max(A).$$

Démonstration. La première inégalité est évidente : une somme de nombres positifs est toujours supérieure au plus grand d'entre eux. Si $\max(A) = 2^p$, on a $A \subset \{1, 2, \ldots, 2^p\}$, d'où
$$s(A) \leq \sum_{i=0}^{p} 2^i = 2^{p+1} - 1 < 2^{p+1} = 2\max(A).$$

□

3.2.2 Quelques propriétés de la différence symétrique

On rappelle que l'on définit la différence symétrique $A\Delta B$ des ensembles A et B par
$$A\Delta B = \{x \in A; x \notin B\} \cup \{x \in B; x \notin A\}.$$

On a les propriétés suivantes :
- $\forall A, B \quad A\Delta B = B\Delta A$.
- $\forall A \quad A\Delta\varnothing = \varnothing\Delta A = A$.
- $\forall A \quad A\Delta A = \varnothing$.
- $\forall A, B, C \quad (A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.
- $\mathbb{1}_{A\Delta B}) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \bmod 2$.

3.2.3 Application

Pour a, b entiers naturels, on définit leur somme digitale $a \dot{+} b$ par

$$a \dot{+} b = s(p(a)\Delta p(b)).$$

Exemple :
$37 \dot{+} 17 = s(p(37)\Delta p(17)) = s(\{1;4;32\}\Delta\{1;16\}) = s(\{4;16;32\}) = 52.$

On a les propriétés suivantes :

- $\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a \dot{+} b = b \dot{+} a.$
- $\forall a \in \mathbb{N} \quad a \dot{+} 0 = 0 \dot{+} a = a.$
- $\forall a \in \mathbb{N} \quad a \dot{+} a = 0.$
- $\forall a, b, c \quad (a \dot{+} b) \dot{+} c = a \dot{+} (b \dot{+} c).$

Lemme 3. *Soient $A, B \in P_f^2$. On a*

$$s(A) < s(B) \iff \max(A\Delta B) \in B.$$

Démonstration. Si $A = B$, $s(A) = s(B)$ et $\max(A\Delta B) = -\infty$, donc aucun des termes de l'équivalence n'est vérifié. Supposons donc $A \neq B$ – ce qui est équivalent à supposer $A\Delta B \neq \varnothing$.
Comme $s(A) = s(A \cap B) + s(A\backslash B)$ et $s(B) = s(A \cap B) + s(B\backslash A)$, on a

$$s(A) < s(B) \iff s(A\backslash B) < s(B\backslash A).$$

Supposons $\max(A\Delta B) \in B$: comme $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$, on a donc $\max(A\Delta B) = \max(B\backslash A) > \max(A\backslash B)$. Mais comme les éléments de A et B sont des puissances de 2, on en déduit $\max(B\backslash A) \geq 2\max(A\backslash B)$.

Par suite, d'après le lemme 2, on obtient

$$s(B\backslash A) \geq \max(B\backslash A) \geq 2\max(A\backslash B) > s(A\backslash B),$$

d'où $s(B) > s(A)$. Évidemment, si l'on avait supposé $\max(A\Delta B) \in A$, on aurait obtenu $s(B) < s(A)$. L'équivalence est donc montrée $\square$

On va maintenant montrer un lemme technique qui sera crucial dans la preuve du théorème de Grundy.

Lemme 4. *Soient* $a, b, c \in \mathbb{N}$ *tels que* $a < b \dotplus c$.
Alors
- *soit* $a \dotplus b < c$,
- *soit* $a \dotplus c < b$.

Démonstration. Afin de simplifier les écritures, posons quelques notations : on pose $A = p(a), B = p(b), C = p(c)$ et $D = p(b \dotplus c) = B\Delta C$. D'après le lemme 3, on a $\max(A\Delta D) \in D$, qu'on peut écrire $\max(A\Delta B\Delta C) \in B\Delta C$.
De deux choses l'une
- soit $\max(A\Delta B\Delta C) \in B$, et alors $\max((A\Delta C)\Delta B) \in B$, ce qui, grâce au lemme 3, implique $s(A\Delta C) < s(B)$, c'est à dire $a \dotplus c < b$.
- soit $\max(A\Delta B\Delta C) \in C$, et alors $\max((A\Delta B)\Delta C) \in C$, ce qui, grâce au lemme 3, implique $s(A\Delta B) < s(C)$, c'est à dire $a \dotplus b < c$.

□

3.3 Noyau

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté simple.
On dit qu'un ensemble $N \subset S$ est un noyau de G si il vérifie
- $\forall x \in N \quad \mathcal{V}^+(x) \cap N = \varnothing$
- $\forall y \in S\backslash N \quad \mathcal{V}^+(y) \cap N \neq \varnothing$

Théorème 15. *Dans un jeu sur un graphe possédant un noyau* N*, si un joueur a la possibilité de choisir une position* $x \in N$*, ce joueur possède une stratégie lui permettant de ne pas perdre la partie.*

Démonstration. Si le joueur joue $x \in N$, alors de deux choses l'une
1. soit $\mathcal{V}^+(x) = \varnothing$, et alors son adversaire ne peut plus jouer et a donc perdu la partie.
2. soit $\mathcal{V}^+(x) \neq \varnothing$ et alors son adversaire choisira une position $y \notin N$, puisque $\mathcal{V}^+(x) \cap N = \varnothing$. Alors, le joueur pourra à nouveau jouer une position $x' \in N$, puisque $\forall y \in S\backslash N \quad \mathcal{V}^+(y) \cap N \neq \varnothing$

Ainsi, le joueur est assuré de ne pas perdre la partie. □

Si le graphe est progressivement fini, la partie s'arrêtera un jour, et donc le joueur gagnera la partie s'il applique la stratégie.

Lemme 5. *Un graphe admettant deux noyaux n'est pas progressivement fini.*

Démonstration. Soient M et N deux noyaux d'un graphe G. On va d'abord montrer

$$\forall x \in M\Delta N \quad \exists y \in \mathcal{V}^+(x) \cap (M\Delta N).$$

Soit $x \in M\Delta N$. Supposons par exemple $x \in M\backslash N$. Comme $x \notin N$ et que N est un noyau, on peut trouver $y \in \mathcal{V}^+(x) \cap N$. Mais comme $x \in M$ et que M est un noyau, on a nécessairement $y \notin M$. On a donc $y \in \mathcal{V}^+(x) \cap (N\backslash M)$, d'où $y \in \mathcal{V}^+(x) \cap (M\Delta N)$. On procède de même lorsque $x \in N\Delta M$.

On choisit donc $x_0 \in M\Delta N$, puis $x_1 \in \mathcal{V}^+(x_0) \cap (M\Delta N)$, puis $x_2 \in \mathcal{V}^+(x_2) \cap (M\Delta N)$, et cætera. On construit donc ainsi [1] une suite $(x_i)_{i\geq 0}$ d'éléments de $M\Delta N$ vérifiant $\forall i \geq 0 \quad (x_i, x_{i+1}) \in A$. □

Un graphe progressivement fini admet donc au plus un noyau. On va en fait montrer ultérieurement que tout graphe progressivement fini admet un unique noyau.

3.4 Fonction de Grundy

Soit G un graphe orienté. On dit qu'une fonction $g : G \to \mathbb{N}$ est une *fonction de Grundy* pour le graphe G si elle vérifie

$$\forall x \in S \quad g(x) = \min\{n \in \mathbb{N} \quad n \notin g(\mathcal{V}^+(x))\}. \tag{3.1}$$

Théorème 16. *Si g est une fonction de Grundy pour G, alors*

$$N = \{x \in S; \quad g(x) = 0\}$$

est un noyau de G.

Démonstration. Soit $x \in N$. On a $0 = g(x) = \min\{n \in \mathbb{N} \quad n \notin g(\mathcal{V}^+(x))\}$, donc $0 \notin g(\mathcal{V}^+(x))$, ce qui veut dire que $\forall y \in \mathcal{V}^+(x) \quad g(y) \neq 0$, c'est à dire $\forall y \in \mathcal{V}^+(x) \quad y \notin N$.

Soit $x \in S\backslash N$: on a $0 \neq g(x) = \min\{n \in \mathbb{N} \quad n \notin g(\mathcal{V}^+(x))\}$. Pour que 0 ne soit pas le plus petit élément d'une partie de $\mathbb{N}$, il faut que cette partie ne contienne pas 0, donc $0 \in g(\mathcal{V}^+(x))$, donc $\exists y \in \mathcal{V}^+(x)$, avec $g(y) = 0$, soit $y \in N$. □

Le théorème qui suit est dû à Grundy. Son rôle est essentiel, car il permet de montrer que les objets dont on parle existent bien dans de nombreux cas.

[1] Si le nombre des sommets est infini, on utilise l'axiome du choix...

Théorème 17. *Soit G un graphe progressivement fini. Alors G possède une unique fonction de Grundy.*

Démonstration. On pose $S_0 = \varnothing$, puis, pour $k \geq 0$,

$$S_{k+1} = \{x \in S \quad \mathcal{V}^+(x) \subset S_k\}.$$

On montre facilement par récurrence que $\forall k \geq 0 \quad S_k \subset S_{k+1}$. Les S_k forment donc une suite croissante pour l'inclusion.

Un peu de réflexion montre que dire que le graphe est progressivement fini est équivalent à dire que

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} S_k = S.$$

Pour connaître ou définir une fonction sur S, il suffit donc de le faire sur tout les S_k. On va donc procéder ainsi pour définir une fonction de Grundy g.

Pour $x \in S_1$, la définition d'une fonction de Grundy impose de poser $g(x) = 0$.

Posons donc comme hypothèse de récurrence H_k : il existe une unique fonction $g : S_k \to \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall x \in S_k \quad g(x) = \min\{n \in \mathbb{N} \quad n \notin g(\mathcal{V}^+(x))\}. \tag{3.2}$$

H_1 est vraie. Montrons maintenant que la propriété H_k est héréditaire. Supposons donc H_k vraie. On note g la fonction de Grundy définie sur H_k. On va voir comment la prolonger à S_{k+1} : de deux choses l'une

- si $x \in S_k$, $g(x)$ a déjà été déterminée de manière unique.
- si $x \notin S_k$, on prolonge alors g en posant

$$g(x) = \min\{n \in \mathbb{N} \quad n \notin g(\mathcal{V}^+(x))\}.$$

Cette définition est bien correcte car $x \in S_{k+1} \Longrightarrow \mathcal{V}^+(x) \subset S_k$ et $g(x)$ a déjà été définie sur S_k. C'est évidemment la seule définition possible.

Ainsi H_{k+1} est réalisée.

g est ainsi déterminée progressivement sur S tout entier.

□

Théorème 18. *Tout graphe progressivement fini admet un unique noyau N. Il est donné par*

$$N = \{x \in S; \quad g(x) = 0\},$$

où g est la fonction de Grundy de G.

Démonstration. Tout graphe progressivement fini admet une fonction de Grundy. Or tout graphe admettant une fonction de Grundy g admet au moins $N = \{x \in S; \quad g(x) = 0\}$ comme noyau, donc tout graphe progressivement fini admet au moins un noyau. L'unicité a déjà été montrée au lemme 5. $\square$

Exemples :

1. **Le jeu de Grossbaff et Grossbouff, hommes préhistoriques.**
   Un paquet de 100 lézards est sur la table. À tour de rôle, chacun en mange autant qu'il veut, au moins un. Celui qui ne peut plus manger a perdu. Grossbaff commence. Nous allons voir – qui l'eût cru – qu'il existe une stratégie gagnante pour Grossbaff. On a $S = \{0, \ldots, 100\}$ et $A = \{(x, y) \in S^2; \quad y < x\}$. (Bien remarquer que le graphe est la traduction de la règle du jeu). En appliquant le lemme 1 à $\phi(x) = x$, on voit que le graphe est progressivement fini. Comme $\mathcal{V}^+(0) = \varnothing$, on a $g(0) = 0$. Alors, on monte par récurrence sur n que $g(n) = n$. Le noyau du graphe est donc réduit à $\{0\}$.
2. **Préhistoire de la civilité**
   Quelques centaines de milliers d'années ont passé et les mœurs se sont adoucies. Grossbaff et Grossbouff, hommes préhistoriques, ont toujours un paquet de 100 lézards est sur la table. À tour de rôle, chacun en mange au moins un, mais – civilité oblige – s'interdit d'en prendre plus que m. Celui qui ne peut plus manger a perdu. Grossbaff commence. On a $S = \{0, \ldots, 100\}$ et $A = \{(x, y) \in S^2; \quad x - m \leq y < x\}$. (Là encore, le graphe est la traduction de la règle du jeu). En appliquant le lemme 1 à $\phi(x) = x$, on voit que le graphe est progressivement fini. Comme $\mathcal{V}^+(0) = \varnothing$, on a $g(0) = 0$. Alors, on monte par récurrence sur n que $g(n)$ est le reste de la division de n par $(m + 1)$. Le noyau du graphe est donc à $(m + 1)\mathbb{N} \cap \{0, \ldots, 100\}$. Si $m + 1$ divise 100 et que Grossbouff a suivi l'unité *Probabilités et Graphes* , alors Grossbaff va perdre.
3. **Promotion sociale**
   Quelques centaines de milliers d'années ont (encore) passé et les mœurs se sont (encore) adoucies. M. de Grossbaff et M. de Grossbouff, pairs du royaume, ont maintenant un paquet de 100 ortolans est sur la table. À tour de rôle, chacun en mange au moins un, mais – civilité oblige – s'interdit d'en prendre plus que m. Celui qui mangera le dernier se sentira confus, et devra se retirer, ayant perdu l'estime du roi. M. de Grossbaff commence.
   On a $S = \{1, \ldots, 100\}$ et $A = \{(x, y) \in S^2; \quad x - m \leq y < x\}$. (Là

encore, le graphe est la traduction de la règle du jeu). En appliquant le lemme 1 à $\phi(x) = x$, on voit que le graphe est progressivement fini. Comme $\mathcal{V}^+(1) = \varnothing$, on a $g(1) = 0$. Alors, on monte par récurrence sur n que $g(n)$ est le reste de la division de $n-1$ par $(m+1)$. Le noyau du graphe est donc à $((m+1)\mathbb{N}+1) \cap \{0, \dots, 100\}$. Si $m+1$ divise 99 et que M. de Grossbouff a suivi l'unité *Probabilités et Graphes* , alors M. de Grossbaff va perdre.

3.5 Jeux décomposables

Le théorème qui suit est le cœur de la théorie des jeux de Nim et de leurs généralisations.

3.5.1 Le théorème de Grundy

On appelle opération sur S toute application de $S \times S$ dans S. Si on s'est donné une opération sur S, on note $x + y$ l'image de (x, y)par cette application. Si T et U sont des parties de S et x et y des éléments de S, on note

$$x + V = \{x + v; v \in V\}$$

et

$$U + y = \{u + y; u \in U\}.$$

Théorème 19. *Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté progressivement fini et $+$ une opération sur S. Si l'on a*

$$\forall (x, y) \in S \times S \quad \mathcal{V}^+(x + y) = (\mathcal{V}^+(x) + y) \cup (x + \mathcal{V}^+(y)),$$

alors sa fonction de Grundy vérifie

$$\forall (x, y) \in S^2 \quad g(x + y) = g(x) \dot{+} g(y).$$

Démonstration. Comme dans le théorème 17, on va utiliser les ensembles $(S_k)_{k \geq 0}$ définis par $S_0 = \varnothing$, puis, pour $k \geq 0$,

$$S_{k+1} = \{x \in S \quad \mathcal{V}^+(x) \subset S_k\}.$$

On a vu dans la preuve du théorème 17 que les S_k forment donc une suite croissante pour l'inclusion et que

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} S_k = S.$$

Une propriété réalisée dans tous les S_k est donc réalisée dans S tout entier.
Posons comme hypothèse de récurrence H_k :

$$\forall z \in S_k \quad \forall (x,y) \in S^2 \quad z = x + y \Longrightarrow g(z) = g(x) \dot{+} g(y) \tag{3.3}$$

Montrons d'abord H_1. Soit $z \in S_1$ et $x, y \in S$ tels que $z = x + y$. On a $\mathcal{V}^+(z) = \varnothing$, ce qui implique
- d'une part $g(z) = 0$.
- d'autre part, on a $\varnothing = \mathcal{V}^+(z) = (\mathcal{V}^+(x) + y) \cup (x + \mathcal{V}^+(y))$, donc $\mathcal{V}^+(x) = \varnothing$ et $\mathcal{V}^+(y) = \varnothing$. Ceci implique $g(x) = 0$ et $g(y) = 0$.

On a donc bien $g(z) = 0 = 0 \dot{+} 0 = g(x) \dot{+} g(y)$.

Montrons maintenant que H_n implique H_{n+1}. Soit $z \in S_{n+1}$ et soient $(x,y) \in S^2$ tels que $z = x + y$. Raisonnons par l'absurde et supposons $g(z) \neq g(x) \dot{+} g(y)$. De deux choses l'une,

- soit $g(z) > g(x) \dot{+} g(y)$,
- soit $g(z) < g(x) \dot{+} g(y)$.

- cas où $g(z) > g(x) \dot{+} g(y)$.

  Par définition d'une fonction de Grundy

$$g(\mathcal{V}^+(z)) \supset \{n \in \mathbb{N}; n < g(z)\}.$$

  Il existe donc $t \in \mathcal{V}^+(z) \quad g(t) = g(x) \dot{+} g(y)$.

  Comme $t \in \mathcal{V}^+(z) = (\mathcal{V}^+(x) + y) \cup (x + \mathcal{V}^+(y))$, t peut s'écrire sous la forme $t = u + y$, pour un certain $u \in \mathcal{V}^+(x)$ ou sous la forme $t = x + v$, pour un certain $v \in \mathcal{V}^+(y)$.
  - Dans le premier cas, comme $t \in \mathcal{V}^+(z) \subset S_n$, on a, d'après l'hypothèse de récurrence : $g(t) = g(u) \dot{+} g(y)$. Comme on a par ailleurs $g(t) = g(x) \dot{+} g(y)$, on obtient $g(u) \dot{+} g(y) = g(x) \dot{+} g(y)$, d'où $g(u) = g(x)$, ce qui contredit $u \in \mathcal{V}^+(x)$.
  - Dans le second cas, comme $t \in \mathcal{V}^+(z) \subset S_n$, on a, d'après l'hypothèse de récurrence : $g(t) = g(x) \dot{+} g(v)$. Comme on a par ailleurs $g(t) = g(x) \dot{+} g(y)$, on obtient $g(x) \dot{+} g(v) = g(x) \dot{+} g(y)$, d'où $g(v) = g(y)$, ce qui contredit $v \in \mathcal{V}^+(y)$.

- cas où $g(z) < g(x) \dot{+} g(y)$.

  D'après le lemme 4, on a
  - soit $g(z) \dot{+} g(x) < g(y)$,
  - soit $g(z) \dot{+} g(y) < g(x)$.
  - Dans le premier cas, en utilisant comme précédemment la définition d'une fonction de Grundy, on trouve $s \in \mathcal{V}^+(y)$ tel que $g(s) = g(z) \dot{+} g(x)$.

    Comme $x \dot{+} s \in x \dot{+} \mathcal{V}^+(y) \subset \mathcal{V}^+(x+y) = \mathcal{V}^+(z) \subset S_n$, on a $g(x+s) = g(x) \dot{+} g(s)$, d'où

    $$g(x+s) = g(x) \dot{+} (g(z) \dot{+} g(x)) = g(z),$$

    ce qui contredit $x+s \in \mathcal{V}^+(z)$.
  - Dans le second cas, en utilisant comme précédemment la définition d'une fonction de Grundy, on trouve $t \in \mathcal{V}^+(x)$ tel que $g(t) = g(z) \dot{+} g(y)$.

    Comme $t \dot{+} y \in \mathcal{V}^+(x) \dot{+} y \subset \mathcal{V}^+(x+y) = \mathcal{V}^+(z) \subset S_n$, on a $g(t+y) = g(t) \dot{+} g(y)$, d'où

    $$g(t+y) = (g(z) \dot{+} g(y)) \dot{+} g(y) = g(z),$$

    ce qui contredit $t+y \in \mathcal{V}^+(z)$.

(H_n) est donc bien héréditaire : comme les $(S_n)_{n\geq 1}$ recouvrent S, le théorème est démontré. □

3.5.2 Applications aux jeux de type Nim

On appelle Jeu de Nim tout jeu admettant une règle du type suivant : on pose sur la table un ou plusieurs tas de pions indiscernables, la taille des tas pouvant différer. Chacun des joueurs choisit, lorsque c'est son tour, un des tas sur lequel il exerce une action autorisée par la règle en fonction du nombre de pions constituant le tas : ce peut être

– enlever du jeu un, plusieurs pions, voire la totalité des pions du tas
– créer un ou plusieurs nouveaux tas à partir d' un, plusieurs pions, voire la totalité des pions du tas
– toute combinaison de ces deux actions

Il est important de noter qu'on ne peut pas modifier deux tas existants à la fois. Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu

Exemples :

1. on choisit un tas et on en enlève au moins un pion, éventuellement la totalité (jeu de *Fan Tan*).
2. on choisit un tas et on en enlève 1 ou 2 pions (pas plus que sa hauteur, bien sûr).
3. on choisit un tas, on en enlève 1 pion, puis on le divise en 2 tas non vides.
4. on choisit un tas que l'on divise en deux tas non vides inégaux.
5. on choisit un tas que l'on divise en deux tas non vides dont la différence des tailles ne peut dépasser 1.

Modélisation

L'état du jeu est modélisé par une suite d'entiers nuls à partir d'un certain rang : on note $S = (\mathbb{N}^{\mathbb{N}^*})$ Si $x = (x_i)_{i\geq 1}$ est un élément de S, x_k représente le nombre de tas de hauteur k quand le jeu est dans l'état x.

On note t^k la position du jeu formée d'un unique tas de hauteur k. Ainsi, t_i^k est égal à un si $k = i$, à zéro sinon.

On note 0 la suite identiquement nulle, correspondant à une table de jeu vide.

Si l'on a 2 suites $x = (x_n)_{n\geq 1}$ et $y = (y_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on note comme d'habitude $x + y = (x_n + y_n)_{n\geq 1}$. Si A est inclus dans $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$, on note

$$x + A = \{x + y; y \in A\}$$

On se donne maintenant une famille $(A_i)_{i\geq 1}$ de parties de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$ vérifiant

$$\forall k \geq 1 \quad \forall x \in A_k \quad t^k + x \in S.$$

On suppose également qu'aucun des A_k ne contient la suite identiquement nulle, de manière à ce que le jeu ne puisse stationner.

On considère alors le graphe sur S défini par

$$\forall x = (x_i)_{i\geq 1} \in S \quad \mathcal{V}^+(x) = \bigcup_{i:x_i>0} x + A_i.$$

Un jeu sur un tel graphe sera appelé un *jeu de Nim*.

Se donner les ensembles A_i, c'est se donner la règle du jeu.

Remarque : On voit facilement que $\mathcal{V}^+(t^k) = t^k + A_k$. Pour définir un jeu de Nim, il est donc équivalent de se donner les $(\mathcal{V}^+(t^k))_{k\geq 1}$ (en vérifiant bien que $t^k \notin \mathcal{V}^+(t^k)$), puis d'imposer, pour les autres éléments x de S :

$$\mathcal{V}^+(x) = \bigcup_{i:x_i>0} x - t^i + \mathcal{V}^+(t^i).$$

Exemples :

1. *Fan Tan* on choisit un tas et on en enlève au moins un pion, éventuellement la totalité.
$$\forall k \geq 1 \quad A_k = \{-t^k\} \cup \{-t^k + t^i; 0 < i < k\}.$$
2. on choisit un tas et on en enlève 1 ou 2 pions (pas plus que sa hauteur, bien sûr). $A_1 = \{-t^1\}; A_2 = \{-t^2 + t^1; -t^2\}$ et
$$\forall k \geq 3 \quad A_k = \{-t^k + t^{k-i}; 1 \leq i \leq 2\}.$$
3. on choisit un tas, on en enlève 1 pion, puis on le divise en 2 tas non vides. $A_1 = A_2 = \varnothing$ et
$$\forall k \geq 3 \quad A_k = \{-t^k + t^i + t^{k-1-i}; 1 \leq i \leq k/2\}.$$
4. on choisit un tas que l'on divise en deux tas non vides inégaux. $A_1 = A_2 = \varnothing$ et
$$\forall k \geq 3 \quad A_k = \{-t^k + t^i + t^{k-i}; 1 \leq i < k/2\}.$$
5. on choisit un tas que l'on divise en deux tas non vides dont la différence des tailles ne peut dépasser 1. $A_1 = \varnothing$ et
$$\forall k \geq 1 \quad A_{2p} = \{-t^{2p} + 2t^p\} \text{ et } A_{2p+1} = \{-t^{2p} + t^p + t^{p+1}\}$$

Théorème 20. *Soit $G = (S, A)$ un graphe associé à un jeu de Nim progressivement fini. On note g sa fonction de Grundy.*
Si une position x se décompose en

$$x = \dot{\sum_{i\geq 1}} x_i t^i,$$

on a

$$g(x) = \sum_{x_i=1 \text{ mod } 2} g(t^i),$$

(ATTENTION ! $\dot{\sum}$ est une somme digitale !)

Démonstration. Commençons par vérifier les hypothèses du théorème de Grundy : soient

$$x = \sum_{i \geq 1} x_i t^i,$$

et

$$y = \sum_{i \geq 1} y_i t^i.$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^+(x+y) &= \bigcup_{i:x_i+y_i>0} x+y+A_i \\
&= \big(\bigcup_{i:x_i>0} x+y+A_i\big) \bigcup \big(\bigcup_{i:y_i>0} x+y+A_i\big) \\
&= \big((\bigcup_{i:x_i>0} x+A_i)+y\big) \bigcup \big(x+(\bigcup_{i:y_i>0} y+A_i)\big) \\
&= \big(\mathcal{V}^+(x)+y\big) \bigcup \big(x+\mathcal{V}^+(y)\big)
\end{aligned}$$

On a donc

$$g(x) = \dot{\sum_{i \geq 1}} g(x_i t^i).$$

Ensuite comme $g(x_i t^i) = g(t^i + \cdots + t^i)$ (x_i fois), on a, toujours d'après le théorème de Grundy $g(x_i t^i) = g(t^i) \dot{+} \ldots \dot{+} g(t^i)$ (x_i fois). Il suffit alors de se souvenir que $\forall a \in \mathbb{N} \quad a \dot{+} a = 0$ pour conclure. □

On dit qu'un jeu de Nim est sans création de pions si

$$\forall i \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{V}^+(t^i) \quad \sum_{k \geq 1} k x_k \leq i.$$

Lemme 6. *Si un jeu de Nim est sans création de pions, il est progressivement fini*

Démonstration. On va appliquer le lemme 1 à la fonction

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x_k.$$

Soit $x \in S$ et $y \in \mathcal{V}^+(x)$.

Nous avons déjà remarqué que $\mathcal{V}^+(x) = \bigcup_{i:x_i>0} x - t^i + \mathcal{V}^+(t^i)$. Il existe donc

$i_0 \geq 1$ et $z \in \mathcal{V}^+(t^{i_0})$ tel que $x_{i_0} > 0$ et $y = x - t^{i_0} + z$. Il est facile de voir que $\forall a, b \in S \quad \phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$: on déduit donc de $y + t^{i_0} = x + z$ l'identité $\phi(y) + \phi(t^{i_0}) = \phi(x) + \phi(z)$.

Maintenant, on a

$$\begin{array}{rcl}
\phi(y) - \phi(x) & = & -\phi(t^{i_0}) + \phi(z) \\
& = & -{i_0}^2 + \sum\limits_{k \geq 1} k^2 z_k \\
& \leq & -{i_0}^2 + \sum\limits_{k \geq 1} k^2 z_k^2 \\
& \leq & -{i_0}^2 + (\sum\limits_{k \geq 1} k z_k)^2 \\
& \leq & -{i_0}^2 + i_0^2 = 0
\end{array}$$

(La dernière inégalité traduit qu'il n'y a pas de création de pions.)

Pour avoir $\phi(y) - \phi(x) = 0$, il faut avoir égalité dans toutes les inégalités intermédiaires. Il faut donc avoir simultanément

$$\begin{cases}
\forall k \geq 1 \quad x_k \in \{0; 1\} \\
\exists! k \geq 1 \quad x_k \neq 0 \\
i_0 = \sum\limits_{k \geq 0} k x_k
\end{cases}$$

L'égalité ne peut donc se produire que si $x = t^{i_0}$, ce qui est absurde car on a supposé dès le départ que le graphe est sans boucle.

On a donc
$$\forall x \in S \quad \forall y \in \mathcal{V}^+(x) \quad \phi(y) < \phi(x).$$

Comme ϕ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, les hypothèses du lemme 1 sont vérifiées. Le graphe du jeu est donc progressivement fini. $\square$

3.5.3 Étude d'un exemple

Dans sa position initiale, le jeu considéré est constitué de 5 tas de jetons. Le premier tas comprend 1 jeton, le deuxième 2 jetons, le troisième 3 jetons, le quatrième 4 jetons, le cinquième 5 jetons. Chacun à leur tour, les deux joueurs peuvent :

– soit enlever un jeton du jeu,
– soit prendre 2 jetons sur un tas en comportant au moins 3 afin de fabriquer un nouveau tas de 2 jetons.

Celui qui enlève le dernier jeton a gagné. Question : le premier joueur possède-t-il une stratégie gagnante ? Si oui, comment peut-il jouer son premier coup sans perdre son avantage ?

Le jeu considéré ici est un jeu de Nim sans création de pions. La règle du jeu peut se traduire par

- $\mathcal{V}^+(t^1) = \{0\}$,
- $\mathcal{V}^+(t^2) = \{t^1\}$,
- $\forall k \geq 3 \quad \mathcal{V}^+(t^k) = \{t^{k-1}; t^{k-2} + t^2\}$.

On construit ligne après ligne le tableau suivant (avec la notation $t^0 = 0$ (c'est le jeu vide)).

k	$\mathcal{V}^+(t^k)$	$g(\mathcal{V}^+(t^k))$	$g(t^k)$
0	$\varnothing$	$\varnothing$	0
1	$\{0\}$	$g(0) = 0$	1
2	$\{t^1\}$	$g(t^1) = 1$	0
3	$\{t^2; t^1 + t^2\}$	$g(t^2) = 0$ $g(t^1 + t^2) = g(t^1) \dot{+} g(t^2) = 1 \dot{+} 0 = 1$	2
4	$\{t^3; t^2 + t^2\}$	$g(t^3) = 2$ $g(t^2 + t^2) = g(t^2) \dot{+} g(t^2) = 0$	1
5	$\{t^4; t^2 + t^3\}$	$g(t^4) = 1$ $g(t^2 + t^3) = g(t^2) \dot{+} g(t^3) = 0 \dot{+} 2 = 2$	0

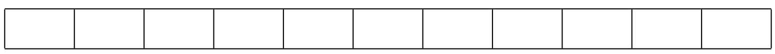
La position de départ est $x = t^1+t^2+t^3+t^4+t^5$: elle a donc comme nombre de Grundy $g(t^1) \dot{+} g(t^2) \dot{+} g(t^3) \dot{+} g(t^4) \dot{+} g(t^5) = 1 \dot{+} 0 \dot{+} 2 \dot{+} 1 \dot{+} 0 = 1 \dot{+} 1 \dot{+} 2 = 2$. Son nombre de Grundy n'est pas nul : cette position n'est donc pas dans le noyau : le joueur qui commence peut donc amener son adversaire dans le noyau, puis, s'il ne fait pas d'erreur, gagner la partie.

Pour passer d'une position x qui n'est pas dans le noyau à une position y qui est dans le noyau, il faut et il suffit de trouver un entier i_0 et un $y' \in S$ tels que $x_{i_0} > 0$ et $y' \in \mathcal{V}^+(t^{i_0})$ tels que si l'on pose $y = x - t^{i_0} + y'$, on ait $g(y) = 0$, ce qui équivaut à $g(t^{i_0}) \dot{+} g(y')) = g(x)$. Ici, comme $x = t^1 + t^2 + t^3 + t^4 + t^5$ et $g(x) = 2$ il faut choisir i_0 dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $y' \in \mathcal{V}^+(t^{i_0})$ tels que $g(t^{i_0}) \dot{+} g(y')) = 2$. On voit facilement que ce système admet deux solutions : l'une est $i_0 = 3$ et $y' = t^2$; elle consiste à enlever 1 pion au troisième tas. L'autre solution est $i_0 = 5$ et $y' = t^2 + t^3$: elle consiste à enlever 2 pions aux

cinquième tas pour fabriquer un nouveau cas.
Tout autre coup permettrait à l'adversaire de reprendre l'avantage – et, s'il ne fait pas d'erreur, de gagner la partie.

3.6 Exercices

1. La cagnotte
   Deux joueurs s'opposent. Ils partent de zéro. Chacun à leur tour ajoute un nombre d'euros entier entre 1 et 20 à une cagnotte. Le joueur atteignant 200 euros remporte la cagnotte. Lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ? Décrire cette stratégie.
2. Un peu, beaucoup...
   Deux joueurs s'opposent, avec comme terrain de jeu une marguerite. Chaque joueur arrache lorsque c'est son tour un pétale ou deux pétales adjacents. Celui qui arrache le dernier pétale gagne. Lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ? Décrire cette stratégie.
3. Passionnément
   Même question que dans l'exercice précédent, mais en supposant qu'on a désigné au début du jeu un pétale que nul n'a le droit d'enlever.
4. Calculer $18 \dot{+} 34$, $147 \dot{+} 81$,$151 \dot{+} 83$.
5. Combien y a-t-il de couples $(a, b) \in \{0, \ldots, 15\} \times \{0, \ldots, 15\}$ tels que $a + b = a \dot{+} b$?
6. Dans le jeu *Fan Tan*, que faut-il jouer lorsqu'il y simultanément sur la table : un pion isolé, un tas de 4 pions, un tas de 5 pions, un tas de 7 pions ?
7. Dans la variante de *Fan Tan* présentée dans le cours (celle où l'on ne peut enlever que un ou deux pions à la fois), que faut-il jouer lorsqu'il y simultanément sur la table : un pion isolé, un tas de 4 pions, un tas de 5 pions, un tas de 7 pions ?
8. Le singe
   À la fête foraine, un amuseur vous propose de jouer (moyennant finances !) au jeu suivant contre son singe savant : on pose sur la table un ou plusieurs tas de pions indiscernables, la taille des tas pouvant différer. Chacun des joueurs choisit, lorsque c'est son tour, un des tas, qu'il divise en deux tas non vides dont la différence des tailles ne peut dépasser un. Faut-il se méfier ?
9. Les dominos

   Deux joueurs, Bernard et Gilles, s'affrontent sur le tableau représenté ci-dessus. Le jeu consiste à déposer à tour de rôle un domino qui doit recouvrir exactement deux cases contiguës libres. Le premier joueur ne pouvant plus jouer est perdant. Bernard commence, mais Gilles a, en contrepartie, le privilège de pouvoir limiter le nombres de cases du tableau, qui comptera un nombre de cases compris, au sens large, entre 2 et 11. Quel nombre de cases doit choisir Gilles pour être sûr de gagner, quel que soit le jeu de son adversaire ? Donnez toutes les réponses.