



**Travaux dirigés N° 1**

Date : 28/08/2023 12:30:54

**Exercice : Concepts généraux :**

Rappeler les définitions des termes suivants :

- 1) Qu'est-ce qu'**
  - a Un graphe ?
  - b Une chaîne ?
  - c Un cycle ?
- 2) Citer cinq types de graphes que vous connaissez.**
  - a Caractériser chacun de graphes cités ci-haut.
- 3) Que signifie**
  - a Le degré d'un sommet ?
  - b Le degré d'un graphe ?
  - c Arbre couvrant ?
  - d Le problème de coloration ?
    - i Le nombre chromatique ?
    - ii Comment le caractériser ?

Cochez la bonne réponse (QCM)

**1. Qu'est ce qu'un parcours Eulérien**

- C'est un parcours passant une et une seule fois par chaque un des sommets du graphe.
- C'est un cycle Hamiltonien fermé
- C'est un parcours passant par toutes les arêtes une et une seule fois

**2. Qu'est-ce qu'un parcours Hamiltonien**

- un parcours passant par toutes les arêtes une et une seule fois
- C'est un graphe qu'on peut parcourir en partant et en revenant au même point
- C'est un parcours passant une et une seule fois par chaque un des sommets du graphe.

**3) Le nombre chromatique d'un graphe est :**

- Le nombre de sommets d'un graphe
- Le nombre d'arêtes d'un graphe
- La moyenne du nombre de sommets voisins
- Le nombre de couleurs nécessaires pour colorier les sommets sans que deux sommets voisins aient la même couleur

**4) Qu'est ce qu'un graphe complet ?**

- Un graphe ayant un parcours eulérien fermé

Un graphe dont tous ses sommets sont adjacents deux à deux

Un graphe ayant un parcours eulérien et un cycle hamiltonien

### 5. Qu'est qu'un sous graphe ?

Le graphe initial privé de quelques arêtes

Le graphe initial privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes

C'est un graphe privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes que l'on prive en suite de quelques arêtes.

### 6. Qu'est qu'un graphe partiel ?

Le graphe initial privé de quelques arêtes

Le graphe initial privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes

C'est un graphe privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes que l'on prive en suite de quelques arêtes.

### 7. Qu'est-ce qu'un arbre couvrant ?

Un graphe partiel qui est un arbre

Un sous graphe qui est un arbre

Un sous graphe partiel qui est un arbre.

### 8. Qu'est-ce qu'un graphe planaire

Un graphe situé dans un plan et dont aucune des arêtes ne se coupe, ni se superpose

Un graphe situé sur un plan et dont on peut dessiner d'un coup les contours sans lever une seule fois le crayon

Un graphe formé par la projection sur un plan d'un graphe en 3D

#### Exercice 0 :

1. Peut-on construire un graphe simple ayant :

4 sommets et 7 arêtes

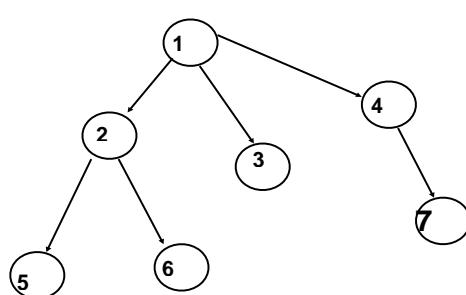
5 sommets et 11 arêtes

10 sommets et 46 arêtes

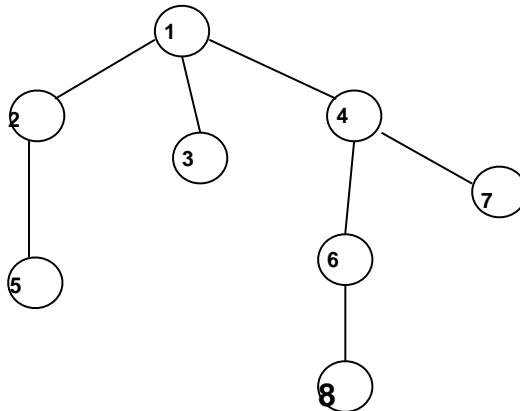
2. Construire un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 12 et dont les arcs représentent la relation « être diviseur de ».

#### Exercice 01 :

1) Indiquer l'ordre de parcours des sommets du graphe orienté ci-dessous dans un parcours en largeur



2) Indiquer l'ordre de visite et de **post-visite** des sommets du graphe non orienté ci-dessous dans un parcours en profondeur



### Exercice 02 :

Dans un graphe orienté, on rappelle les définitions suivantes

- Une **source** est un sommet de degré entrant nul (il n'est successeur d'aucun sommet)
  - Une **racine** est un sommet tel qu'il existe un chemin depuis la racine vers chacun des autres sommets.
1. Une racine est-elle nécessairement une source ?
  2. Une source est-elle nécessairement une racine ?
  3. Déterminez un graphe non orienté connexe dont les ordres de visite respectant l'ordre alphabétique sont
    - (a) a, c, b, d, e, f, h, g pour son parcours en profondeur
    - (b) a, c, d, g, b, e, f, h pour son parcours en largeur.

### Exercice 03 : Poignées de mains

Soit  $G=(V,E)$  un graphe simple, alors prouver que

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2|V|$$

### Exercice 04 :

On dit qu'un sommet  $x \in V$  est pair si  $d(x)$  est en entier pair, il est dit impair si son degré est un entier impair.

Montrer que dans un graphe simple quelconque, le nombre de sommets impairs est toujours pair.

### Exercice 05 :

Montrer que si  $G$  est un graphe régulier de degré  $r$ , alors  $|E| = 2r|V|$

### Exercice 06 :

Dans un pays, il n'y a que 15 villes. On peut aller de chaque ville à au moins 7 autres villes du pays par une autoroute.

1. Peut-on se rendre, par autoroute, de la capitale du pays à chacune des autres villes
2. Le graphe est-il connexe.

### Exercice 07

Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions, qui obéissent aux règles Suivantes :

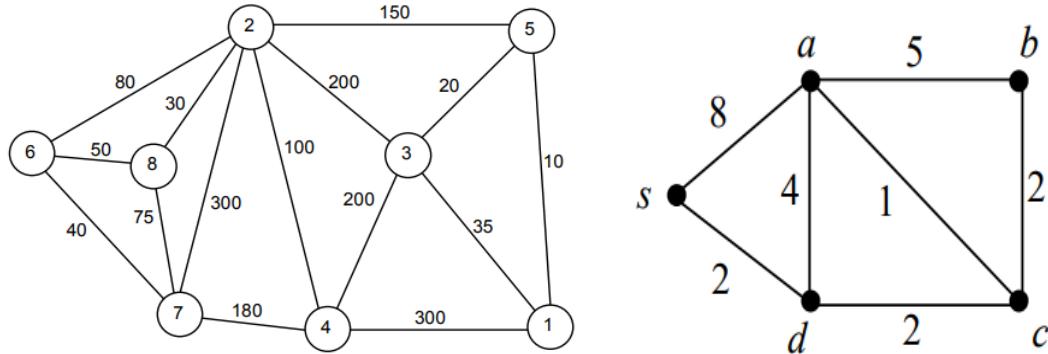
**Règle 1** : tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement.

**Règle 2** : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun

1. Modéliser le problème à l'aide d'un graphe (préciser les sommets et les liaisons)
2. Combien y va-t-il de membres dans le conseil municipal ?
3. En déduire le nombre de membre de chaque commission.

### Exercice 08

Appliquer l'algorithme de Kruskal sur les graphes ci-dessous :



### Exercice 09

On considère le graphe simple dont les sommets sont les entiers naturels compris entre 1 et 20, et tel que deux sommets  $i$  et  $j$  sont reliés si et seulement si  $i + j \leq 21$ .

1. Prouver que ce graphe est connexe. Déterminer son diamètre.
2. Déterminer le nombre chromatique de ce graphe.

### Exercice 10 : Incompatibilité des types

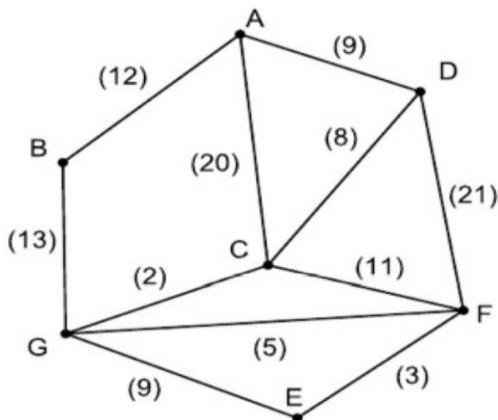
Le tableau suivant résume les incompatibilités entre types de poissons (désignés par leurs initiales) :

Poisson	A	B	C	D	E	F
Ne peut pas être avec	B, C	A, C, E	A, B, D, E	C, F	B, C, F	D, E

1. À quel problème de théorie des graphes correspond la question précédente ? (On ne vous demande pas de dessiner le graphe correspondant.)
2. Quel est le nombre minimum d'aquariums nécessaires pour faire vivre tous ces poissons ?

### Exercice 11 : Sites touristiques

Des touristes sont logés dans un hôtel nommé A. Un guide fait visiter six sites touristiques nommés B, C, D, E, F et G. Les tronçons de route qu'il peut emprunter sont représentés sur le graphe ci-dessous. Le long de chaque arête figure la longueur en kilomètres des différents tronçons



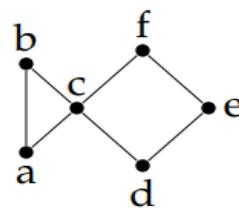
1. A partir de l'hôtel, le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux ?
2. Même question s'il doit obligatoirement terminer son circuit à l'hôtel.

3. Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel au site E.

### Exercice 12 : Réseau des machines

Soit un réseau comportant des machines A, B, C, D, et E qui doivent pouvoir communiquer entre elles. Les coûts de liaisons envisagées sont représentés par la matrice suivante :

	A	B	C	D	E
A	0	5	0	0	4
B	5	0	2	4	6
C	0	2	0	3	0
D	0	4	3	0	2
E	4	6	0	2	0

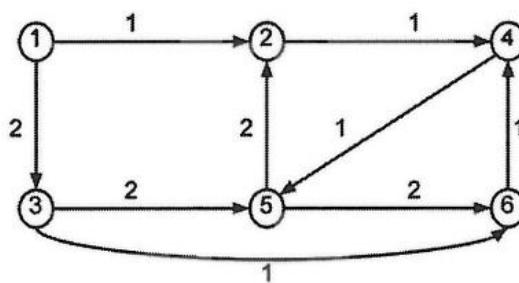


1. Comment câbler le réseau à moindre coût ?
2. On considère le « Graphe Poisson » ci-haut à droite

- Précisez les caractéristiques de ce graphe :
- a Rayon ?
  - b Diamètre ?
  - c Nombre chromatique ?
  - d Taille de la plus grande clique ?

### Exercice 13 : Arborescence de plus courts chemins

Dérouler l'algorithme de **Dijkstra** pour déterminer l'arborescence des plus courts chemins depuis le sommet 1 dans le graphe  $G = (V, E, c)$  orienté ci-dessous :



On représentera l'arborescence partielle des plus courts chemins à chaque étape de l'algorithme. En cas d'égalité, on choisira en priorité le sommet de plus petit indice.

### Exercice 14 : Suite graphique

Une suite décroissante (au sens large) d'entiers est graphique s'il existe un graphe dont les degrés des sommets correspondent à cette suite (par exemple, le triangle à trois sommets correspond à la suite 2,2,2).

1. Les suites suivantes sont-elles graphiques ?

- (a) 3, 3, 2, 1, 1
- (b) 3, 3, 1, 1
- (c) 3, 3, 2, 2.

Pour les graphes orientés, il faut considérer des suites de couples d'entiers (le premier élément d'un couple correspond au degré entrant, le second au degré sortant).

2. Les suites suivantes sont-elles des suites graphiques ?

- (a) (0,1), (1,1), (1,1), (1,1), (1,0)
- (b) (0,2), (1,1), (1,1), (1,1)
- (c) (1,1), (1,1), (1,1), (1,1), (1,1)
- (d) (0,2), (1,1), (1,1), (2,0)