

Odśnienie

Michał Bujak, Adrian Musiał, Filip Przybycień, Joanna Turaj

Czerwiec 2020

Spis treści

1	Wstęp	3
1.1	Opis problemu	3
1.2	Zarys rozwiązania	3
2	Prezentacja modelu odśnieżania dla jednego pługu	3
2.1	Założenia modelu	3
2.2	Algorytm Floyda-Warshalla	3
2.3	Graf nieskierowany	4
2.4	Graf skierowany	4
3	Optymalizacja liczby pługów na danym terenie	4
3.1	Oznaczenia	4
3.2	Funkcja celu	5
3.3	Opis podziału terenu	5
3.4	Algorytm centroidów	6
3.5	Problem Chińskiego Listonosza – zastosowanie dla q pługów	6
4	Zastosowanie modelu	6
4.1	Jeden pług	7
4.2	Dwa pługi	8
4.3	Trzy pługi	10
4.4	Cztery pługi	11
4.5	Podsumowanie	12
	Literatura	13

1 Wstęp

1.1 Opis problemu

Ulice miast są odśnieżane poprzez posyłanie pługów śnieżnych, które w trakcie pojedynczego przejazdu pasmem ulicy ją odśnieżają. Głównym problemem tego procesu są odgórne limity: liczba dostępnych pługów, czas, w którym należy wykonać odśnieżanie, jak i koszt pracy.

Naszym zadaniem jest zaplanowanie optymalnej drogi pługu śnieżnego, który w trakcie pojedynczego przejazdu odśnieża daną ulicę. Ponadto dla danego obszaru musimy oszacować liczbę pługów potrzebną do odśnieżenia go.

1.2 Zarys rozwiązania

Nasz problem może być przedstawiony jako Problem Chińskiego Listonosza – zadanie znalezienia ścieżki zamkniętej, zawierającej każdą krawędź grafu co najmniej raz i mającej minimalny koszt (sumę wag krawędzi). Dla danego obszaru definiujemy graf $G = (V, E)$, gdzie nasz zbiór krawędzi E jest reprezentowany przez ulice, które musimy odśnieżyć, natomiast wierzchołki V to skrzyżowania w danym mieście. Ponadto zakładamy, że graf G jest spójny oraz dla każdej krawędzi $e = (i, j)$ określamy jej wagę $c_{ij} \geq 0$. Jeśli G jest grafem Eulera (tj. stopień każdego wierzchołka jest parzysty), szukamy cyklu eulerskiego. W przeciwnym przypadku szukamy takiej drogi Eulera, która będzie optymalna uwzględniając wagi danych krawędzi.

W celu oszacowania liczby pługów potrzebnych do odśnieżenia całego terenu będziemy używać algorytmu centroidów oraz funkcji celu pokazującej zależność między czasem odśnieżania a kosztem wykonanych prac.

2 Prezentacja modelu odśnieżania dla jednego pługu

2.1 Założenia modelu

Będziemy rozważać sytuację, gdy pługi śnieżne zaczynają swoją pracę po opadach śniegu. Dokładniej zakładamy, że jeden pług odśnieża ulicę i nie przewidujemy dalszych opadów. W naszym modelu pominiemy takie elementy jak ścieżki rowerowe, przystanki autobusowe, czy też wąskie uliczki – do odśnieżania tych obiektów używane są mniejsze urządzenia.

2.2 Algorytm Floyda-Warshalla

Do przeprowadzenia rozumowania będziemy potrzebować algorytmu Floyda-Warshalla szukania optymalnej ścieżki pomiędzy wierzchołkami grafu pod względem wag przypisanych danym krawędziom.

Rozważmy ważony, spójny graf $G = (V, E)$, dla którego wierzchołki V są ponumerowane od 1 do n . Algorytm Floyda-Warshalla tworzy macierz d o rozmiarze $n \times n$, w której element $d[i, j]$ oznacza najniższy koszt dojścia od wierzchołka i -tego do j -tego. Na początku wypełniamy macierz wagami danych krawędzi (w przypadku gdy dwa wierzchołki nie są połączone krawędzią, wstawiamy $+\infty$), a na przekątnej wstawiamy wszędzie wartość 0. Dla każdego wierzchołka k grafu G i każdej pary wierzchołków (i, j) badamy, czy koszt dojścia $d[i, j]$ jest większy od sumy kosztów dojść $d[i, k] + d[k, j]$. Jeśli tak jest, to za koszt dojścia $d[i, j]$ przyjmujemy wartość tej sumy.

2.3 Graf nieskierowany

Pierwszym podejściem do rozwiązania danego problemu jest przedstawienie miasta jako grafu nieskierowanego $G = (V, E)$, gdzie krawędzie E odpowiadają ulicom danego obszaru, natomiast wierzchołki V są skrzyżowaniami. W tym przypadku będziemy rozważać PCL dla grafu nieskierowanego, spójnego i ważonego. Dla grafu G , w którym każdy wierzchołek jest parzystego stopnia problem się trywializuje – wiemy, że istnieje cykl Eulera. Jeśli graf G nie jest eulerowski, wiemy, że niektóre krawędzie (drogi) muszą zostać użyte więcej niż jeden raz. Wtedy musimy zdecydować, które krawędzie wybierzemy ponownie, by koszt procesu był jak najmniejszy.

Szukając optymalnej drogi odśnieżania, otrzymujemy funkcję składającą się z dwóch wartości: pierwsza z nich reprezentuje sumę wag przejazdu po danych drogach (tj. $\sum_{(i,j) \in E} c_{ij}$), z kolei druga opisuje sumę wag kolejnego przejazdu po drogach w celu stworzenia ścieżki Eulera. Druga wartość jest zależna od wyboru ścieżki, optymalizacja opiera się na minimalizacji tej wartości.

By znaleźć optymalną ścieżkę, będziemy na początku szukać najkrótszych ścieżek (o najmniejszych wagach) pomiędzy parami wierzchołków o nieparzystych stopniach. W tym celu możemy użyć algorytmu Floyda-Warshalla. Po znalezieniu najkrótszej ścieżki traktujemy ją jako nową krawędź o wadze równej sumie wag krawędzi danej ścieżki. Nowo powstałą krawędź dołączamy do grafu i w ten sposób dostajemy graf eulerowski.

2.4 Graf skierowany

Rozważmy teraz graf skierowany $G = (V, E)$. Każdą krawędź tego grafu interpretujemy jako pas ruchu w danym kierunku. Dla przykładu rozważmy wierzchołki i, j oraz krawędzie $(i, j), (j, i)$. W takim przypadku mamy do czynienia z drogą o dwóch pasach ruchu i do jej pełnego odśnieżenia potrzebujemy po jednym przejeździe pługów w obu kierunkach.

W powyższym przypadku nasze postępowanie będzie bardzo podobne do algorytmu przedstawionego dla grafu nieskierowanego. Wiemy, że graf skierowany jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wierzchołka liczba krawędzi wychodzących jest równa liczbie krawędzi wchodzących. Jeśli nasz graf spełnia ten warunek, to rozwiązaniem problemu jest cykl Eulera.

Zajmijmy się przypadkiem grafu, dla którego cykl Eulera nie istnieje. Rozważmy wierzchołki, dla których liczba krawędzi wchodzących nie jest równa liczbie krawędzi wychodzących. Musimy stworzyć nowe krawędzie między wierzchołkami o mniejszej liczbie krawędzi wychodzących a wierzchołkami, które mają mniej krawędzi wchodzących. By uzyskać ścieżkę o minimalnej sumie wag, ponownie użyjemy algorytmu Floyda-Warshalla.

W następnym kroku dla każdego rozważanego wierzchołka definiujemy liczbę $\delta_i = \alpha_i - \omega_i$, gdzie α_i oznacza liczbę krawędzi wychodzących, natomiast ω_i liczbę krawędzi wchodzących do wierzchołka i . Na podstawie wartości δ_i wnioskujemy, które z krawędzi wygenerowanych przez algorytm Floyda-Warshalla musimy dołączyć do grafu, by dla każdego wierzchołka i liczba δ_i była równa 0. W ten sposób, dołączając nowo powstałe krawędzie do początkowego grafu, dostajemy graf skierowany, w którym możemy znaleźć cykl Eulera.

3 Optymalizacja liczby pługów na danym terenie

3.1 Oznaczenia

W dalszej części rozwiązania przyjmujemy następujące oznaczenia:

- $k \in Q$ – zbiór pojazdów,

- $j \in L$ – zbiór krawędzi (dróg),
- $i \in N$ – zbiór wierzchołków (skrzyżowań).

Ponadto kładziemy $q := |Q|$, $n := |N|$ oraz $m := |L|$. Obszar prac interpretujemy jako graf skierowany $G = (N, L)$. Każdej krawędzi j przypisujemy jej długość l_j . Liczba q może być ustalona, dlatego model nie będzie uwzględniał parametru q jako zmiennej. By wyznaczyć optymalną liczbę pojazdów, należy rozwiązać problem dla różnych wartości q , porównać wyniki i wybrać najlepszy.

3.2 Funkcja celu

Do optymalizacji rozwiązania potrzebujemy następujących danych:

- t_j – czas potrzebny do odśnieżenia drogi j ,
- d_j – czas potrzebny do przejechania drogi j po odśnieżeniu.

Przez v^A oznaczamy średnią szybkość pojazdu w metrach na sekundę i stąd dostajemy równość $d_j = l_j/v^A$. Czas t_j szacujemy jako $p \cdot l_j/v^A$, gdzie p oznacza liczbę przejazdów przez daną drogę potrzebną do jej odśnieżenia. Mamy więc, że $t_j = p d_j$.

Zakładamy również, że koszt obsługi pługu jest wprost proporcjonalny do czasu użytkowania. Niech c^D oznacza koszt obsługi pługu w złotych na sekundę. Stąd szacujemy, że cena odśnieżenia drogi j jest równa $c_j = c^D t_j = c^D p l_j/v^A$.

Łączny czas odśnieżania $\sum_{j \in L} t_j$ jest stały, zatem optymalizacja zależy tylko od czasu przejazdu pługów bez wykonywania pracy.

Przez f oznaczamy stały koszt używania jednego pojazdu, niezależny od czasu przejazdu. Ponadto niech dane będą

- z^R – czas potrzebny do zakończenia prac wszystkich pługów,
- z_k^U – czas przejazdu pługu k ,
- z_k^C – czas odśnieżania dróg przez pług k ,
- z_k^L – czas przejazdu pługu k bez wykonywania pracy.

By zoptymalizować rozwiązanie problemu, będziemy szukać wartości

$$\min w^A z^R + w^C \left(c^D \sum_k z_k^U + f q \right),$$

gdzie w^A oraz w^C są wagami ukazującymi znaczenie czasu zakończenia prac w stosunku do kosztu wykonania odśnieżania. Dla dużej wartości w^A chcemy, by czas był jak najkrótszy. Gdy w^C jest duże, liczy się dla nas jak najmniejszy koszt wykonywanej pracy.

3.3 Opis podziału terenu

Problem, który musimy rozwiązać, to ustalenie optymalnej liczby pługów śnieżnych potrzebnych do wykonania zaplanowanej pracy na danym terenie. W tym celu musimy przypisać konkretne ulice do pojazdu, mając na uwadze wagę (koszt) odśnieżenia danego terenu.

Zakładamy, że wszystkie pojazdy, którymi dysponujemy, są takie same. Ponadto nie będziemy rozważać połączenia obwodów utrzymania drogi, co w praktyce oznacza, że pojazd będzie mógł zacząć swoją trasę od dowolnego wierzchołka (skrzyżowania). Oczywiście jest, że odśnieżanie zostanie wykonane szybciej, gdy będzie je wykonywać więcej pługów. Rozważamy jednak stały koszt pojazdu, który jest używany w naszej procedurze.

3.4 Algorytm centroidów

Do wyznaczenia obszarów odśnieżania będziemy używać algorytmu centroidów (*k*-means clustering). Znając współrzędne elementów z N , będziemy szukać k środków, którym przyporządkujemy poszczególne wierzchołki w taki sposób, by odległość wierzchołka od środka była minimalna.

Większość algorytmów wykorzystywanych do wyznaczania takich środków jest iteracyjna. W celu wyznaczenia k środków wybieramy na początku punkty $m_1^{(1)}, m_2^{(1)}, \dots, m_k^{(1)}$ na powierzchni miasta. Następnie, rozważając metrykę euklidesową, każdy wierzchołek ze zbioru N przypisujemy do najbliższego punktu $m_t^{(1)}$ (możemy to porównać do procesu tworzenia diagramu Woronoja). Definiujemy

$$S_i^{(t)} = \{n_p : \|n_p - m_i^{(t)}\|^2 \leq \|n_p - m_j^{(t)}\|^2 \forall j \in \{1, \dots, k\}\},$$

gdzie $n_p \in N$ należy do dokładnie jednego zbioru $S_i^{(t)}$. Następnie obliczamy nowe położenie środków każdego obszaru i przypisujemy im wartość

$$m_i^{(t+1)} = \frac{1}{|S_i^{(t)}|} \sum_{n_j \in S_i^{(t)}} x_j$$

i powtarzamy procedurę. Algorytm kończy się, gdy nie zachodzą zmiany przyporządkowań wierzchołków do iteracji danego środka.

Zakładamy, że $k = q$ – tworzymy po jednym obszarze dla każdego pojazdu. Algorytm pozwala nam przyporządkować wierzchołki do danego pojazdu, jednak dla nas istotne jest przyporządkowanie krawędzi. Rozważmy więc daną krawędź j oraz jej wierzchołki (s_j, e_j) . Jeśli s_j, e_j należą do tego samego obszaru, to dopisujemy do niego również j . W przeciwnym przypadku mamy, że $s_j \in A$ oraz $e_j \in B$, gdzie A, B są dwoma obszarami stworzonymi w algorytmie centroidów takimi, że $A \neq B$.

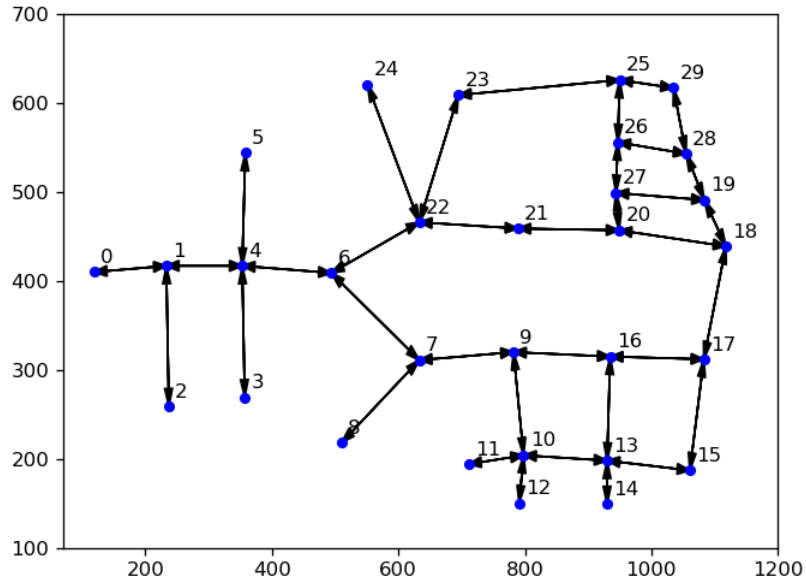
Niech $d(A, s_j)$ oznacza odległość pomiędzy środkiem obszaru A a wierzchołkiem s_j , natomiast $d(B, e_j)$ – odległość pomiędzy środkiem obszaru B a wierzchołkiem e_j . Jeśli przyporządkujemy drogę j do obszaru A (tj. A pokrywa wierzchołek e_j), to dostajemy odległość $d(A, s_j) + l_j$. W drugą stronę, jeśli przyporządkujemy drogę j do obszaru B , to odległość jest równa $d(B, e_j) + l_j$. Stąd o dopasowaniu wierzchołka decyduje nierówność zachodząca pomiędzy wartościami $d(A, s_j)$ i $d(B, e_j)$. Jeśli $d(A, s_j) < d(B, e_j)$, to krawędź j przyporządkowujemy do obszaru A , w przeciwnym przypadku krawędź j przypisujemy do B .

3.5 Problem Chińskiego Listonosza – zastosowanie dla q pługów

Po podziale rozważanego terenu poprzez algorytm centroidów wysyłamy na nowo powstałe obszary pługi śnieżne, które pracują niezależnie od siebie. W ten sposób dla każdego obszaru możemy zastosować rozwiązanie PLC opisane w Rozdziale 2.

4 Zastosowanie modelu

Przedstawione w poprzednich rozdziałach podejście zaprezentujemy na przykładzie dzielnicy składającej się z 30 skrzyżowań. Wszystkie drogi są dwukierunkowe, każdy pas ruchu reprezentujemy na grafie jako krawędź w odpowiednią stronę. Ponadto zakładamy, że droga w każdym kierunku jest jednopasmowa. Oznacza to, że do odśnieżenia całej drogi potrzebujemy po jednym przejeździe pługu w każdą stronę. Dzielnica przedstawiona jest na Rysunku 1. Jednostka na osi odpowiada 5 m.



Rysunek 1: Plan dzielnicy.

Ponadto przyjęliśmy następujące założenia:

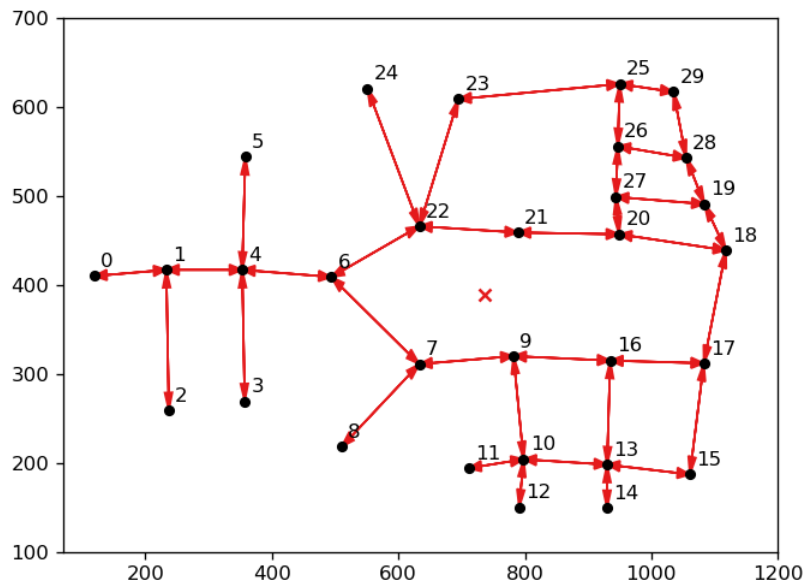
- waga krawędzi jest równa jej długości w metryce euklidesowej,
- średnia szybkość przemieszczania się pługu v^A jest równa $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,
- koszt jazdy pługiem c^D to $1 \frac{\text{zł}}{\text{s}}$,
- koszt każdorazowego rozpoczęcia pracy pługu f wynosi 400 zł,
- stosunek wagi czasu do wagi kosztów $\frac{w^C}{w^A}$ jest równy 2.

Rozpatrywany przez nas graf oraz jego odpowiednie podgrafy są eulerowskie, więc możemy znaleźć takie cykle, by każdy z pługów przemieszczał się tylko po nieodśnieżonych drogach (nie trzeba poprawiać żadnego z grafów).

W kolejnych podrozdziałach będziemy rozważać działanie modelu, gdy liczba pługów jest równa 1, 2, 3 lub 4.

4.1 Jeden pług

Podział dzielnicy przy jednym pługu jest trywialny – pojedynczy pług musi odśnieżyć całą dzielnicę.



Rysunek 2: Podział dzielnicy dla jednego pługu.

Cykl Eulera dla tego grafu to

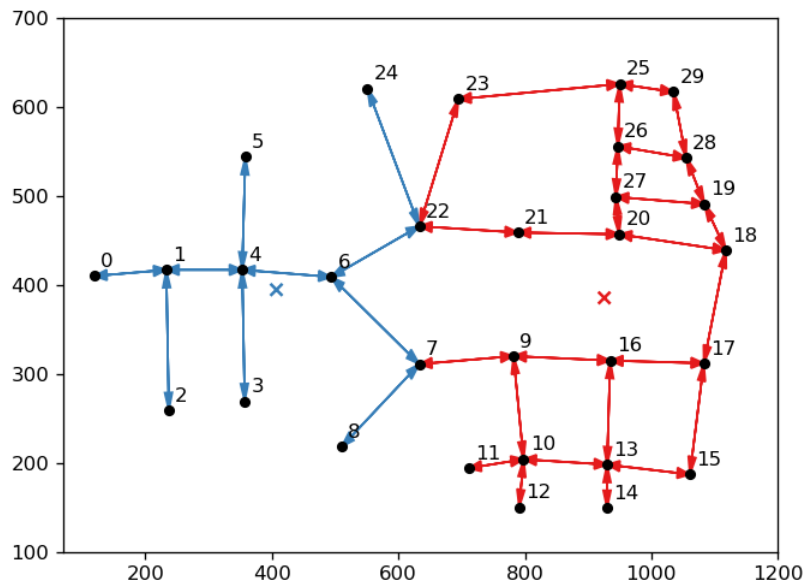
$0 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 22 \rightarrow 24 \rightarrow 22 \rightarrow 23 \rightarrow 25 \rightarrow 29 \rightarrow 28 \rightarrow 29 \rightarrow 25 \rightarrow 26 \rightarrow 28 \rightarrow 26 \rightarrow$
 $27 \rightarrow 26 \rightarrow 25 \rightarrow 23 \rightarrow 22 \rightarrow 21 \rightarrow 22 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 16 \rightarrow 17 \rightarrow 18 \rightarrow 20 \rightarrow 27 \rightarrow$
 $20 \rightarrow 21 \rightarrow 20 \rightarrow 18 \rightarrow 19 \rightarrow 28 \rightarrow 19 \rightarrow 27 \rightarrow 19 \rightarrow 18 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow 13 \rightarrow 16 \rightarrow 9 \rightarrow$
 $10 \rightarrow 13 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 15 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow$
 $8 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0.$

Wyniki:

- całkowity dystans do przebycia: 44561,73 m,
- potrzebny czas: 11140,43 s,
- całkowity czas odśnieżania: 11140,43 s,
- całkowity czas użytkowania pługu: 11140,43 s,
- wartość funkcji celu: 34221,3.

4.2 Dwa pługi

Każdy kolor odpowiada obszarowi, za który jest odpowiedzialny jeden pług.



Rysunek 3: Podział działki dla dwóch pługów.

Cykle Eulera:

- podgraf niebieski:

$0 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 22 \rightarrow 24 \rightarrow 22 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0,$

- podgraf czerwony:

$7 \rightarrow 9 \rightarrow 16 \rightarrow 17 \rightarrow 18 \rightarrow 20 \rightarrow 27 \rightarrow 26 \rightarrow 28 \rightarrow 29 \rightarrow 28 \rightarrow 26 \rightarrow 27 \rightarrow 20 \rightarrow 21 \rightarrow 22 \rightarrow 23 \rightarrow 25 \rightarrow 29 \rightarrow 25 \rightarrow 26 \rightarrow 25 \rightarrow 23 \rightarrow 22 \rightarrow 21 \rightarrow 20 \rightarrow 18 \rightarrow 19 \rightarrow 28 \rightarrow 19 \rightarrow 27 \rightarrow 19 \rightarrow 18 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow 13 \rightarrow 16 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 13 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 15 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 7.$

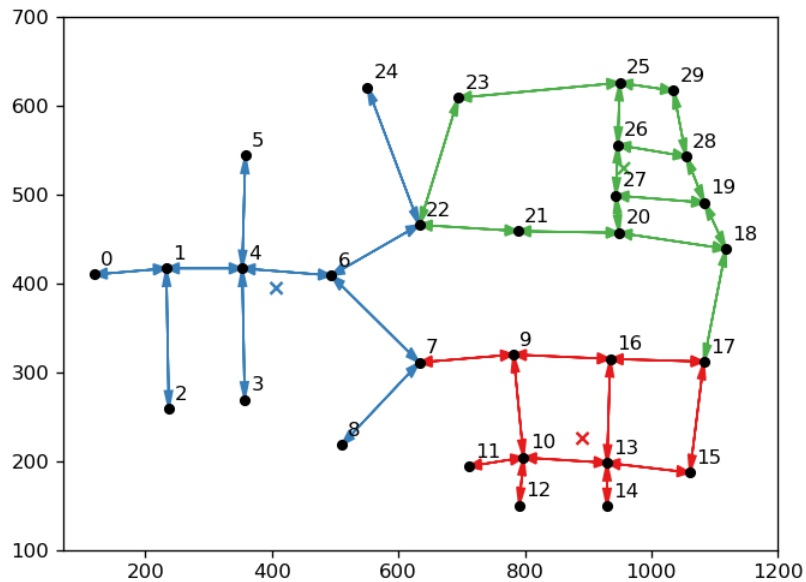
Wyniki:

- dystans przebyty przez odpowiednio pierwszy i drugi pług, 14585,06 m, 29976,67 m,
- czas pracy pierwszego i drugiego pługu: 3646,27 s, 7494,17 s,
- całkowity czas odśnieżania: 7494,17 s,
- całkowity czas użytkowania pługów: 11140,43 s,
- wartość funkcji celu: 31375,03.

Zauważmy, że udało się uzyskać niższą wartość funkcji celu niż w wypadku jednego pługu.

4.3 Trzy pługi

Każdy kolor odpowiada obszarowi, za który jest odpowiedzialny jeden pług.



Rysunek 4: Podział działnicy dla trzech pługów.

Cykle Eulera:

- podgraf niebieski:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 22 \rightarrow 24 \rightarrow 22 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0,$$

- podgraf czerwony:

$$7 \rightarrow 9 \rightarrow 16 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow 13 \rightarrow 16 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 13 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 15 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 7,$$

- podgraf zielony:

$$17 \rightarrow 18 \rightarrow 20 \rightarrow 27 \rightarrow 26 \rightarrow 28 \rightarrow 29 \rightarrow 28 \rightarrow 26 \rightarrow 27 \rightarrow 20 \rightarrow 21 \rightarrow 22 \rightarrow 23 \rightarrow 25 \rightarrow 29 \rightarrow 25 \rightarrow 26 \rightarrow 25 \rightarrow 23 \rightarrow 22 \rightarrow 21 \rightarrow 20 \rightarrow 18 \rightarrow 19 \rightarrow 28 \rightarrow 19 \rightarrow 27 \rightarrow 19 \rightarrow 18 \rightarrow 17.$$

Wyniki:

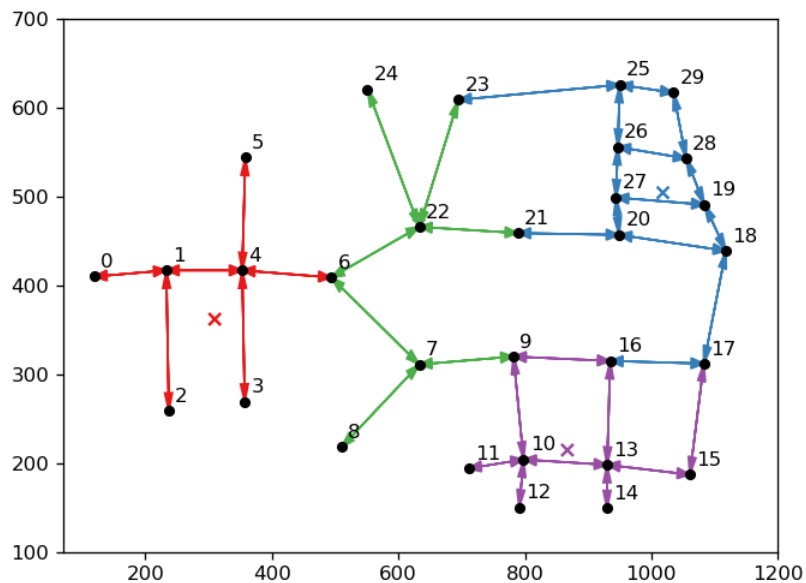
- dystanse pokonane przez pługi: 14585,06 m, 12661,32 m, 17315,35 m,
- potrzebny czas: 3646,27 s, 3165,33 s, 4328,84 s,
- całkowity czas odśnieżania: 4328,84 s,

- całkowity czas użytkowania pługów: 11140,43 s,
- wartość funkcji celu: 29009,7.

Uzyskana wartość funkcji celu jest niższa niż w przypadku użycia jednego i dwóch pługów.

4.4 Cztery pługi

Każdy kolor odpowiada obszarowi, za który jest odpowiedzialny jeden pług.



Rysunek 5: Podział działki dla czterech pługów.

Cykle Eulera:

- podgraf czerwony:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0,$$

- podgraf zielony:

$$6 \rightarrow 22 \rightarrow 24 \rightarrow 22 \rightarrow 23 \rightarrow 22 \rightarrow 21 \rightarrow 22 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 6,$$

- podgraf fioletowy:

$$9 \rightarrow 16 \rightarrow 13 \rightarrow 16 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 13 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 15 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 9,$$

- podgraf niebieski:

$$16 \rightarrow 17 \rightarrow 18 \rightarrow 20 \rightarrow 27 \rightarrow 26 \rightarrow 28 \rightarrow 29 \rightarrow 28 \rightarrow 26 \rightarrow 25 \rightarrow 29 \rightarrow 25 \rightarrow 23 \rightarrow 25 \rightarrow 26 \rightarrow 27 \rightarrow 20 \rightarrow 21 \rightarrow 20 \rightarrow 18 \rightarrow 19 \rightarrow 28 \rightarrow 19 \rightarrow 27 \rightarrow 19 \rightarrow 18 \rightarrow 17 \rightarrow 16.$$

Wyniki:

- dystanse pokonane przez pługi: 8086,45 m, 11111,52 m, 9688,3 m, 15675,46 m,
- potrzebny czas: 2021,61 s, 2777,88 s, 2422,07 s, 3918,87 s,
- całkowity czas odśnieżania: 3918,87 s,
- całkowity czas użytkowania pługów: 11140,43 s,
- wartość funkcji celu: 31658,75.

Wartość funkcji celu nieco wzrosła w porównaniu do użycia trzech pługów.

4.5 Podsumowanie

Najkorzystniejszy wynik uzyskaliśmy dla trzech pługów. Ponadto ze wzrostu pomiędzy korzystaniem z trzech oraz czterech pojazdów możemy wnioskować, że użycie dodatkowych pługów spowodowałoby znaczny wzrost kosztów w stosunku do zaoszczędzonego czasu – nastąpiłby wzrost wartości funkcji celu. Przykład ten dobrze ilustruje, że nawet problem tak przyziemny jak odśnieżanie miasta może wymagać zastosowania zaawansowanych narzędzi matematycznych, gdy zależy nam na uzyskaniu zoptymalizowanego rozwiązania.

Literatura

- [1] Kaj Holmberg, *Heuristics for the rural postman problem*, Computers & Operations Research 37 (2010) 981-990
- [2] Ruslan Zabrodin, *Postman Problem*, [www-m9 . ma . tum . de / graph-algorithms / directed-chinese-postman / index _ en . html](http://www-m9.ma.tum.de/graph-algorithms/directed-chinese-postman/index_en.html) Technische Universität München, dostęp z dnia: 05.06.2020
- [3] Jerzy Wałaszek, *Najkrótsze ścieżki pomiędzy wszystkimi parami wierzchołków w grafie ważonym Algorytm Floyd-Warshalla*, [https : / / eduinf . waw . pl / inf / alg / 001 _ search/0138b.php](https://eduinf.waw.pl/inf/alg/001_search/0138b.php), dostęp z dnia 05.06.2020
- [4] Kaj Holmberg, *The (Over)zealous Snow Remover Problem*, Transportation Science 53(3):867-881. <https://doi.org/10.1287/trsc.2018.0851>
- [5] Kaj Holmberg, *Heuristics for the weighted k-rural postman problem with applications to urban snow removal*, J Veh Routing Algorithms 1, 105–119 (2018). <https://doi.org/10.1007/s41604-018-0008-3>