6. Распознавание КС-языков методом динамического программирования, нормальная форма Хомского.

Нормальная форма Хомского (ХНФ)

Нормальная форма Хомского — это канонический вид контекстно-свободной грамматики, в котором правила вывода максимально стандартизированы.

- **Определение:** КС-грамматика считается находящейся в нормальной форме Хомского, если она является λ**-свободной** (не содержит аннулирующих правил, кроме, возможно, правила для аксиомы), а все её неаннулирующие правила вывода имеют строго один из двух видов:
  1. $A \to BC$ — нетерминал порождает ровно два нетерминала;
  2. $A \to a$ — нетерминал порождает ровно один терминал.
- **Эквивалентность:** любая КС-грамматика может быть преобразована в эквивалентную ей грамматику в нормальной форме Хомского.

Алгоритм Кока-Янгера-Касами

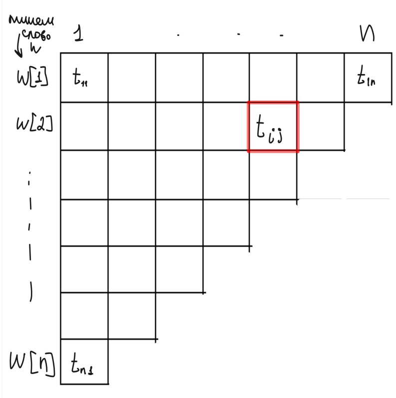
Вход: $L-$КСЯ, $G-$ в ХНФ, $L(G) = L$ и самое главное w $-$ строка длины n.

Выход: $w \in L?$

(Можно ли данной грамматике получить слово w?)

Алгоритм

Строим верхнетреугольную матрицу размера n x n



Клетка $t_{ij}-$ это множество нетерминалов из которых выводится $w[i, i+j-1]-$ подслово начиная с i позиции длинны j.

Если t_{1n} (правая верхняя) содержит аксиому граммматики, то $w \in L$

В ХНФ правила имею вид:

1. A -> BC
2. A -> a

Значит $t_{11}, .t_{i1}.., t_{n1}$ заполняется непосредственно по правилам типа (2). То есть в клетку записываем нетерменилы из которого сразу выводится терминал w[i].

Для заполнения t_{ij} нужно размотреть все возможные разбиения $w[i, i+j-1]$ на два не пустых подслова.

Если в t_{ik} есть нетерминал B в $t_{i+k,j-k}$ есть нетериминал C $(A \to BC) \in P$, то в t_{ij} поместить A $k \in \{1, .., j-1\}$

Если сложно то, вот ответ от нейронки

2. Алгоритм Кока-Янгера-Касами

- **Предпосылка:** Грамматика `G` дана в НФХ. Строка `w = a₁a₂...aₙ` длины `n`.

- **Идея:** Построить таблицу `D` размером `n x n`, где элемент `D[i][j]` — **множество нетерминалов**, из которых выводится подстрока `w` длиной `j`, начинающаяся с позиции `i` (индексация может немного варьироваться).
- **Алгоритм (по шагам):**
  1. **Инициализация (база ДП, подстроки длины 1):**
     Для каждой позиции `i` от 1 до `n`:
     $D[i][1] = \{ A \mid (A \to a_i) \in P \}$ (все нетерминалы, порождающие терминал a_i).
  2. **Заполнение таблицы (переход ДП, подстроки длины L > 1):**
     Для длины `L` от 2 до `n`:
     Для начала `i` от 1 до `n - L + 1`:
     - `j = i + L - 1` (конец подстроки).
     - Множество `D[i][L]` изначально пусто.
     - Для всех точек разбиения `k` от `i` до `j-1`:
       - Рассматриваем разбиение подстроки на две части: `(i..k)` и `(k+1..j)`.
       - Пусть `X ∈ D[i][k-i+1]`, `Y ∈ D[k+1][j-k]`.
       - Для **всех** правил `A → XY` в грамматике добавляем `A` в `D[i][L]`.
  3. **Завершение:** Строка `w` принадлежит `L(G)` **тогда и только тогда, когда** аксиома `S` содержится в множестве `D[1][n]`.
- **Сложность:** $O(n^3 * |G|)$, где `|G|` — размер грамматики. Это полиномиально, в отличие от экспоненциального перебора.

Пример(с пары)

Слово w = aacbcb

x - это пустая клетка/пустое мно-во.

Рассмотрим грамматику

$S \to A'A \mid BB' \mid SS$

$A \to A'A \mid A'D \mid c$

$D \to CB'$

$B \to BB' \mid A'D \mid c$

$C \to A'D \mid c$

$A' \to a$

$B' \to b$

и цепочку $aacbcb$.

Разбор(шаги):

1. Заполняем первый столбец по грамматике (если символ выводится сразу за 1 шаг, добавляем левую часть правила в ячейку)

	1	2	3	4	5	6
1	A'					
2	A'					
3	ABC					
4	B'					
5	ABC					
6	B'					

2. Смотрим есть ли рядом стоящие A'A' в правых частях? Нет -> пустое мно-во.

	1	2	3	4	5	6
1	A'	–				
2	A'					
3	ABC					
4	B'					
5	ABC					
6	B'					

3. Смотрим есть ли A'A или A'B или A'C в правых частях? Да, значит левые части (нетерминалы) правил вывода добавлем в ячейку.

	1	2	3	4	5	6
1	A'	-				
2	A'	SA				
3	ABC					
4	B'					
5	ABC					
6	B'					

4. И так далее до конца второго столбца.

	1	2	3	4	5	6
1	A'	-				
2	A'	SA				
3	ABC	SDB				
4	B'	-				
5	ABC	SDB				
6	B'					

5. 3-ий столбец, заполняем по похожему правилу (Обрати внимание какие ячейки мы сейчас берём)

Рассмотрим грамматику

$S \to A'A | BB' | SS$

$A \to A'A | A'D | c$

$D \to CB'$

$B \to BB' | A'D | c$

$C \to A'D | c$

$A' \to a$

$B' \to b$

	1	2	3	4	5	6
1	A'	-	SA			
2	A'	SA				
3	ABC	SDB				
4	B'	-				
5	ABC	SDB				
6	B'					

	1	2	3	4	5	6
1	A'	-	SA			
2	A'	SA				
3	ABC	SDB				
4	B'	-				
5	ABC	SDB				
6	B'					

6. Шагаем вот так (цифры это какие ячейки будут участвовать на текущей итерации):

	1	2	3	4	5	6
1	A'	-	SA	SA		
2	A'	SA	ABC	-		
3	ABC	SDB	-	S		
4	B'	-	-			
5	ABC	SDB				
6	B'					

шаги для этой клетки

7. Итог аксиома выводится из w.

	1	2	3	4	5	6
1	A'	-	SA	SA	-	S
2	A'	SA	ABC	-	-	
3	ABC	SDB	-	S		
4	B'	-	-			
5	ABC	SDB				
6	B'					