2. Теорема о подстановке и ее следствия.

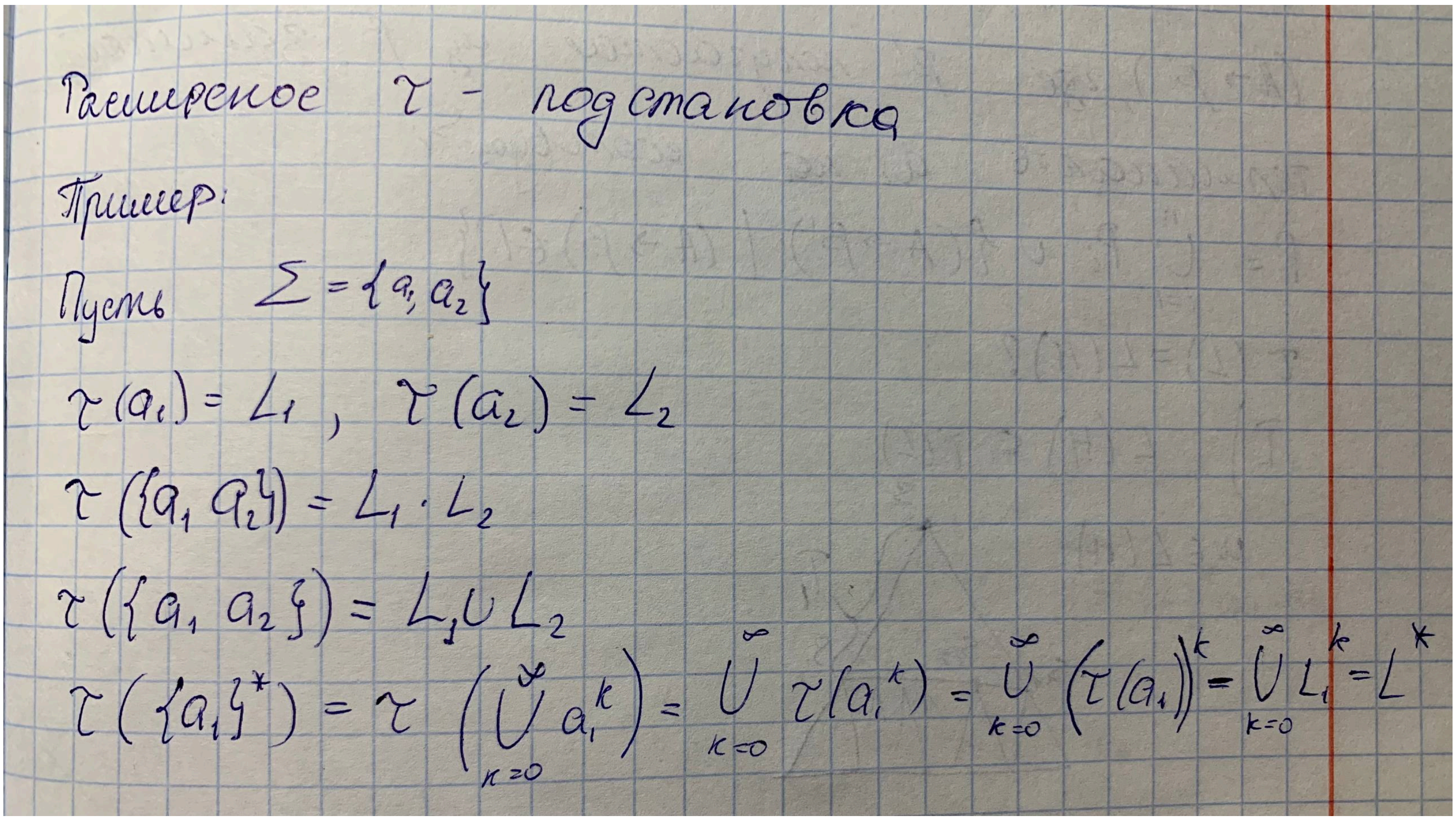
Пусть $\Sigma = \{a_1, ..., a_n\}$ и $\Delta-$ конечный алфавит

Рассмотрим отображение $\tau : \tau(a_i) = L_i \subseteq \Delta^*$

Расширим τ:

1. $\tau(\lambda) = \{\lambda\}$
2. $\tau(a_1 ... a_k) = \tau(a_1) ... \tau(a_k)$
3. $\tau(L) = \bigcup_{w \in L} \tau(w)$

Расширенное τ мы будем назвать подстановкой.



Расширеное τ - подстановка

Пример:

Пусть $\Sigma = \{a_1, a_2\}$

$\tau(a_1) = L_1$, $\tau(a_2) = L_2$

$\tau(\{a_1 a_2\}) = L_1 \cdot L_2$

$\tau(\{a_1, a_2\}) = L_1 \cup L_2$

$\tau(\{a_1\}^*) = \tau\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} a_1^k\right) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \tau(a_1^k) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (\tau(a_1))^k = \bigcup_{k=0}^{\infty} L_1^k = L^*$

Теорема о подстановке

Пусть $\tau : 2^{\Sigma^*} \to 2^{\Delta^*}$ $\Sigma = \{a_1, ..., a_n\}$ $\forall i = 1, ..., n$ и $\tau(a_i)$ - КСЯ. Тогда если L - КСЯ, то $\tau(L)$ - КСЯ.

*Тоже самое по русски (Если **τ** — это отображение (подстановка), которое каждой букве **a** из алфавита **Σ** сопоставляет некоторый контекстно-свободный язык (КС-язык) над алфавитом **Δ**, то для любого КС-языка **L** над **Σ** его образ **τ**(**L**) также будет **контекстно-свободным языком**.)*

Док-во(лень техать)

Док-во:

$\forall i = \overline{1,n}$ $\tau(a_i)$ порожд $G_i = (\Delta, \Gamma_i, P_i, S_i)$

$G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$ $L(G) = L$

б.о.о. все Γ_i и Γ попарно непересекаются

Построим грамматику $H = (\Delta, \Gamma', P', S)$

$\Gamma' = \Gamma \cup \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$

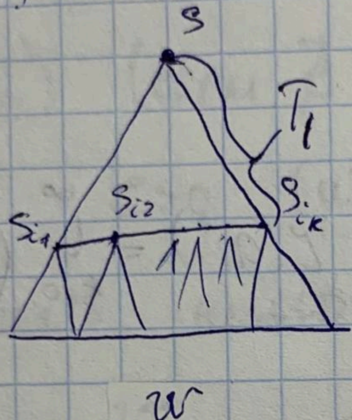
если $(A \to \beta) \in P$, то рассмотрим правило $(A \to \beta')$, где β' получается из β заменой терминалов a_i на соответств. S_i

$$P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i \cup \{(A \to \beta') \mid (A \to \beta) \in P\}$$

$\tau(L) = L(H)$?

I) $L(H) \subseteq \tau(L)$

$w \in L(H)$



Если $A \to \alpha X \beta$ применялось в выводе, где $A \in \Gamma$, $X \in \Gamma_i$, то $X = S_i$

Значит $\exists$ стандарт. поддерево T_1: все листья T_1 – аксиома грамматик G_i

т.е. $S \Rightarrow^* S_{i_1} \ldots S_{i_k}$

Тогда $S \overset{H}{\underset{G}{\Rightarrow^*}} a_{i_1} \ldots a_{i_k}$

$S \Rightarrow^* S_i \quad S_i \Rightarrow^*$

$\dots \Rightarrow_H \dots_{i_k} \Rightarrow_H w_1 \dots w_k = w$

$\forall j = \overline{1,k} \qquad S_{i_j} \Rightarrow_{G_{i_j}} w_j$

$w = w_1 \dots w_k \in \tau(a_{i_1}) \dots \tau(a_{i_k}) \in \tau(a_{i_1} \dots a_{i_k}) \in \tau(L)$

II) $\tau(L) \subseteq \tau(H)$

$w \in \tau(L) \Rightarrow \exists u \in L : w \in \tau(u)$

$u = a_{i_1} \dots a_{i_k}$

$w \in \tau(a_{i_1}, \dots a_{i_k}) = \tau(a_{i_1}) \dots \tau(a_{i_k})$

$S \Rightarrow_G^* a_{i_1} \dots a_{i_k} \Rightarrow S \Rightarrow_H^* S_{i_1} \dots S_{i_k} \Rightarrow_H^* [*] \Rightarrow_H^* w_1 \dots w_k$

(*) $\forall j = \overline{1,k} \qquad S_{i_j} \Rightarrow_{G_{i_j}} w_j \in \tau(a_{i_j})$, $\quad w = w_1 \dots w_k$

$\Downarrow$

$S_{i_j} \Rightarrow_H^* w_{i_j} \qquad w_i \in \tau(a_{i_j})$ ■

Следствия:

- **Замкнутость относительно основных операций:** Класс КС-языков **замкнут относительно операций объединения, произведения и итерации**. Это объясняется тем, что данные операции являются частными случаями подстановки (например, произведение $L_1 L_2$ можно рассматривать как результат подстановки в язык $\{a_1 a_2\}$).
- **Замкнутость относительно гомоморфизма:** Класс КС-языков **замкнут относительно перехода к гомоморфным образам**. Любой гомоморфизм можно считать подстановкой, при которой образом каждой буквы является язык, состоящий ровно из одной цепочки.
- **Периодичность длин слов:** Если L является КС-языком, то множество длин всех его слов $\{|w| \mid w \in L\}$ обязательно является **периодическим**. Это следствие выводится через гомоморфизм, переводящий любую букву в символ a, и применение теоремы о КС-языках над однобуквенным алфавитом.

Важно помнить, что, несмотря на эти свойства, класс КС-языков **не является замкнутым относительно операций пересечения и дополнения**. Например, пересечение двух КС-языков $L_1 = \{a^n b^n a^m\}$ и $L_2 = \{a^m b^n a^n\}$ дает язык $\{a^n b^n a^n\}$, который не является контекстно-свободным.