## 2. Теорема о подстановке и ее следствия.

**Теорема о подстановке**

Пусть $\tau : 2^{\Sigma^*} \to 2^{\Delta^*}$ $\Sigma = \{a_1, ..., a_n\}$ $\forall i = 1, ..., n$ и $\tau(a_i)$ - КСЯ. Тогда если $L$ - КСЯ, то $\tau(L)$ - КСЯ.

*Тоже самое по русски (Если **τ** — это отображение (подстановка), которое каждой букве **a** из алфавита **Σ** сопоставляет некоторый контекстно-свободный язык (КС-язык) над алфавитом **Δ**, то для любого КС-языка **L** над **Σ** его образ **τ**(**L**) также будет **контекстно-свободным языком**.)*

### Док-во(лень техать)

Док-во:

$\forall i = \overline{1,n}$ $\quad \tau(a_i)$ порожд $\quad G_i = (\Delta, \Gamma_i, P_i, S_i)$

$G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$ $\quad L(G) = L$

б.о.о. все $\Gamma_i$ и $\Gamma$ попарно непересекаются

Построим грамматику $H = (\Delta, \Gamma', P', S)$

$\Gamma' = \Gamma \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Gamma_i$

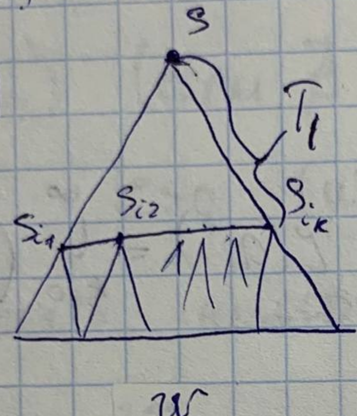
если $(A \to \beta) \in P$, то рассмотрим правило $(A \to \beta')$, где $\beta'$ получается из $\beta$ заменой терминалов $a_i$ на соотв. $S_i$

$$P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i \cup \{(A \to \beta') \mid (A \to \beta) \in P\}$$

$\tau(L) = L(H)$?

I) $L(H) \subseteq \tau(L)$

$w \in L(H)$




Если $A \to \alpha X \beta$ применилось в выводе, где $A \in \Gamma$, $X \in T_i$, то $X = S_i$

Значит $\exists$ стандарт. поддерево $T_1$: все листья $T_1$ - аксиома грамматик $G_i$

т.е. $S \Rightarrow^* S_{i_1} \dots S_{i_k}$

Тогда $S \overset{H}{\underset{G}{\Rightarrow}}{}^* a_{i_1} \dots a_{i_k}$

$S \Rightarrow^* S_i \quad S_i \Rightarrow^*$

$$w = w_1 \dots w_k \in \tau(a_{i_1}) \dots \tau(a_{i_k}) \in \tau(a_{i_1} \dots a_{i_k}) \in \tau(L)$$

II) $\tau(L) \subseteq \tau(H)$

$$w \in \tau(L) \Rightarrow \exists u \in L : w \in \tau(u)$$

$$u = a_{i_1} \dots a_{i_k}$$

$$w \in \tau(a_{i_1}, \dots a_{i_k}) = \tau(a_{i_1}) \dots \tau(a_{i_k})$$

$$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} a_{i_1} \dots a_{i_k} \Rightarrow S \overset{*}{\underset{H}{\Rightarrow}} S_{i_1} \dots S_{i_k} \overset{*}{\underset{H}{\Rightarrow}} [*] \overset{*}{\underset{H}{\Rightarrow}} w_1 \dots w_k$$

$$(*)\ \forall j = \overline{1,k} \quad S_{i_j} \underset{G_{i_j}}{\Rightarrow} w_j \in \tau(a_{i_j}), \quad w = w_1 \dots w_k$$

$$\Downarrow$$

$$S_{i_j} \overset{*}{\underset{H}{\Rightarrow}} w_{i_j} \qquad w_i \in \tau(a_{i_j}) \qquad \blacksquare$$

## Следствия:

- **Замкнутость относительно основных операций (Следствие 3.1):** Класс КС-языков **замкнут относительно операций объединения, произведения и итерации**. Это объясняется тем, что данные операции являются частными случаями подстановки (например, произведение $L_1L_2$ можно рассматривать как результат подстановки в язык $\{a_1a_2\}$).
- **Замкнутость относительно гомоморфизма (Следствие 3.2):** Класс КС-языков **замкнут относительно перехода к гомоморфным образам**. Любой гомоморфизм можно считать подстановкой, при которой образом каждой буквы является язык, состоящий ровно из одной цепочки.
- **Периодичность длин слов (Следствие 3.3):** Если $L$ является КС-языком, то множество длин всех его слов $\{|w| \mid w \in L\}$ обязательно является **периодическим**. Это следствие выводится через гомоморфизм, переводящий любую букву в символ $a$, и применение теоремы о КС-языках над однобуквенным алфавитом.

Важно помнить, что, несмотря на эти свойства, класс КС-языков **не является замкнутым относительно операций пересечения и дополнения**. Например, пересечение двух КС-языков $L_1 = \{a^nb^na^m\}$ и $L_2 = \{a^mb^na^n\}$ дает язык $\{a^nb^na^n\}$, который не является контекстно-свободным.