

2. Теорема о подстановке и ее следствия.

Теорема о подстановке

Пусть $\tau : 2^{\Sigma^*} \rightarrow 2^{\Delta^*}$ $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\} \forall i = 1, \dots, n$ и $\tau(a_i)$ - КСЯ. Тогда если L - КСЯ, то $\tau(L)$ - КСЯ.

То же самое по русски (Если τ — это отображение (подстановка), которое каждой букве a из алфавита Σ сопоставляет некоторый контекстно-свободный язык (КС-язык) над алфавитом Δ , то для любого КС-языка L над Σ его образ $\tau(L)$ также будет **контекстно-свободным языком**.)

Док-во(лень техать)

Рок-60:

$\forall i = \overline{1, n}$

$\tau(a_i)$ порожд

$$G_i = (\Delta, \Gamma_i, P_i, S_i)$$

$$G = (\Sigma, \Gamma, P, S) \quad L(G) = L$$

б.о.о. все Γ_i и Γ попарно не пересекаются

Построим грамматику $H = (\Delta, \Gamma', P', S)$

$$\Gamma' = \Gamma \cup \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$$

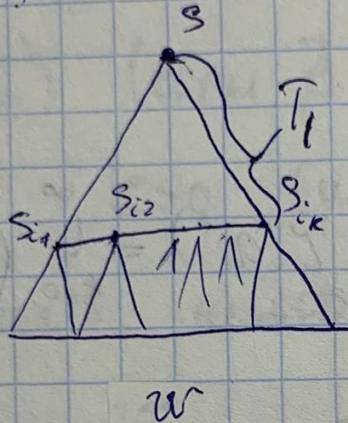
если $(A \rightarrow B) \in P$, то рассмотрим правило
 $(A \rightarrow B')$, где B' получается из B заменой
 терминалов a_i на соответствующие S_i

$$P = \bigcup_{i=1}^n P_i \cup \{(A \rightarrow B') \mid (A \rightarrow B) \in P\}$$

$$\tau(L) = L(H)?$$

$$I) \quad L(H) \subseteq \tau(L)$$

$$w \in L(H)$$



Если $A \rightarrow \alpha X \beta$ применилось в выводе, где $A \in \Gamma$,
 $X \in T_i$, то $X = S_i$

Значит \exists стандарт поддерево T_1 : все листья
 T_1 - аксиомы грамматики G

$$\text{т.е. } S \Rightarrow^* S_{i_1} \dots S_{i_k}$$

$$\text{Тогда } S \xRightarrow[H]{G} a_{i_1} \dots a_{i_k}$$

$$S \Rightarrow^* S_{i_1} \dots S_{i_k}$$

$$w = w_1 \dots w_k \in \tau(a_{i_1}) \dots \tau(a_{i_k}) \in \tau(a_{i_1} \dots a_{i_k}) \in \tau(L)$$

$$\text{II) } \tau(L) \subseteq \tau(H)$$

$$w \in \tau(L) \Rightarrow \exists u \in L: w \in \tau(u)$$

$$u = a_{i_1} \dots a_{i_k}$$

$$w \in \tau(a_{i_1} \dots a_{i_k}) = \tau(a_{i_1}) \dots \tau(a_{i_k})$$

$$S \Rightarrow_G^* a_{i_1} \dots a_{i_k} \Rightarrow S \Rightarrow_H^* S_{i_1} \dots S_{i_k} \Rightarrow_H^* [X] \Rightarrow_H^* w_1 \dots w_k$$

$$\textcircled{*} \forall j = \overline{1, k} \quad S_{i_j} \Rightarrow_{G_{i_j}} w_j \in \tau(a_{i_j}), \quad w = w_1 \dots w_k$$

$$\Downarrow$$

$$S_{i_j} \Rightarrow_H^* w_j \quad w_j \in \tau(a_{i_j})$$

Следствия:

- **Замкнутость относительно основных операций:** Класс КС-языков замкнут относительно операций объединения, произведения и итерации. Это объясняется тем, что данные операции являются частными случаями подстановки (например, произведение $L_1 L_2$ можно рассматривать как результат подстановки в язык $\{a_1 a_2\}$).
- **Замкнутость относительно гомоморфизма:** Класс КС-языков замкнут относительно перехода к гомоморфным образам. Любой гомоморфизм можно считать подстановкой, при которой образом каждой буквы является язык, состоящий ровно из одной цепочки.
- **Периодичность длин слов:** Если L является КС-языком, то множество длин всех его слов $\{|w| \mid w \in L\}$ обязательно является периодическим. Это следствие выводится через гомоморфизм, переводящий любую букву в символ a , и применение теоремы о КС-языках над однобуквенным алфавитом.

Важно помнить, что, несмотря на эти свойства, класс КС-языков **не является замкнутым относительно операций пересечения и дополнения**. Например, пересечение двух КС-языков $L_1 = \{a^n b^n a^m\}$ и $L_2 = \{a^m b^n a^n\}$ дает язык $\{a^n b^n a^n\}$, который не является контекстно-свободным.