

2. Теорема о подстановке и ее следствия.

Теорема о подстановке

Пусть $\tau : 2^{\Sigma^*} \rightarrow 2^{\Delta^*}$ $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$ $\forall i = 1, \dots, n$ и $\tau(a_i)$ - КСЯ. Тогда если L - КСЯ, то $\tau(L)$ - КСЯ.

Тоже самое по русски (Если τ – это отображение (подстановка), которое каждой букве a из алфавита Σ сопоставляет некоторый контекстно-свободный язык (КС-язык) над алфавитом Δ , то для любого КС-языка L над Σ его образ $\tau(L)$ также будет контекстно-свободным языком.)

Док-во(лень тухать)

Задача-60:

$i = 1, n$

$\tau(a_i)$ нонавигує $G_i = (\Delta, \Gamma_i, P_i, S_i)$

$G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$ $L(G) = L$

б. о.о. все Γ_i є Γ нонавигує непротивароми

Построимо універсальну $H = (\Delta, \Gamma', P', S)$

$$\Gamma' = \Gamma \cup \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$$

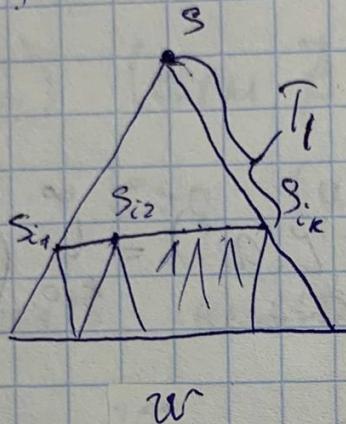
если $(A \rightarrow B) \in P$, то рассмотрим правило
 $(A \rightarrow B')$, где B' получаем из B заменой
 терминалов a_i на $\text{символы } S_i$

$$P = \bigcup_{i=1}^n P_i \cup \{(A \rightarrow B') \mid (A \rightarrow B) \in P\}$$

$$\tau(L) = L(H)?$$

$$\text{I)} \quad L(H) \subseteq \tau(L)$$

$$w \in L(H)$$



если $A \rightarrow \lambda X B$ применяется в вибозе, где $A \in \Gamma$,
 $X \in T_i$, то $X = S_i$

Значит \exists самодарм. поддерева T_1 : Все листья
 T_1 - это идентичные правила S_i

$$\text{т.е. } S \Rightarrow^* S_{i1} \dots S_{ik}$$

$$\text{тогда } S \stackrel{H}{\Rightarrow}^* G \quad a_{i1} \dots a_{ik}$$

$$S \Rightarrow^* S_i \quad S_i \Rightarrow^*$$

$w = w_1 \dots w_k \in \tau(a_{i_1}) \dots \tau(a_{i_k}) \in \tau(a_{i_1} \dots a_{i_k}) \in \tau(L)$

II) $\tau(L) \subseteq \tau(H)$

$w \in \tau(L) \Rightarrow \exists u \in L : w \in \tau(u)$

$u = a_{i_1} \dots a_{i_k}$

$w \in \tau(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) = \tau(a_{i_1}) \dots \tau(a_{i_k})$

$S \xrightarrow[G]{*} a_{i_1} \dots a_{i_k} \Rightarrow S \xrightarrow[H]{*} S_{i_1} \dots S_{i_k} \xrightarrow[H]{*} [x] = \xrightarrow[H]{*} w_1 \dots w_k$

$\forall j=1, k \quad S_{ij} \xrightarrow[G_{ij}]{*} w_j \in \tau(a_{ij}), \quad w = w_1 \dots w_k$
 \Downarrow
 $S_{ij} \xrightarrow[H]{*} w_j$ $w_j \in \tau(a_{ij})$

Следствия:

- Замкнутость относительно основных операций:** Класс КС-языков замкнут относительно операций объединения, произведения и итерации. Это объясняется тем, что данные операции являются частными случаями подстановки (например, произведение $L_1 L_2$ можно рассматривать как результат подстановки в язык $\{a_1 a_2\}$).
- Замкнутость относительно гомоморфизма:** Класс КС-языков замкнут относительно перехода к гомоморфным образам. Любой гомоморфизм можно считать подстановкой, при которой образом каждой буквы является язык, состоящий ровно из одной цепочки.
- Периодичность длин слов:** Если L является КС-языком, то множество длин всех его слов $\{|w| \mid w \in L\}$ обязательно является периодическим. Это следствие выводится через гомоморфизм, переводящий любую букву в символ a , и применение теоремы о КС-языках над однобуквенным алфавитом.

Важно помнить, что, несмотря на эти свойства, класс КС-языков не является замкнутым относительно операций пересечения и дополнения. Например, пересечение двух КС-языков $L_1 = \{a^n b^n a^m\}$ и $L_2 = \{a^m b^n a^n\}$ дает язык $\{a^n b^n a^n\}$, который не является контекстно-свободным.