# Probabilități și Statistică

ALBĂSTROIU DRAGOȘ
GRUPA 251

## Temă

1) Fie $X$ și $Y$ 2 v.a discrete independente

$$X: \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad Y: \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{-1} & 3^{-1} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot X\right) = ?$

fie $g: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$

$g(x)$ - compunere de fct elementare

$\Rightarrow g(x)$ continuă

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} X\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 3\right) \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \pi & \cos \frac{3\pi}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$Y^2 = \begin{pmatrix} -3^2 & -2^2 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$Y + 3 = \begin{pmatrix} -3+3 & -2+3 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

2) Folosind v.a X și Y de la 1) determinați

a) $$2X+3Y=\begin{pmatrix}4 & 6\\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9 & -6\\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4-9 & 4-6 & 6-9 & 6-6\\ \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} & \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} & \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-5 & -2 & -3 & 0\\ \frac{4}{25} & \frac{1}{25} & \frac{16}{25} & \frac{4}{25}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -3 & -2 & 0\\ \frac{4}{25} & \frac{16}{25} & \frac{1}{25} & \frac{4}{25}\end{pmatrix}$$

$$3X-Y=\begin{pmatrix}6 & 9\\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & -2\\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6+3 & 6+2 & 9+3 & 9+2\\ \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} & \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} & \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9 & 8 & 12 & 11\\ \frac{4}{25} & \frac{1}{25} & \frac{16}{25} & \frac{4}{25}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 9 & 11 & 12\\ \frac{1}{25} & \frac{4}{25} & \frac{4}{25} & \frac{16}{25}\end{pmatrix}$$

$$X^2\cdot Y^3=\begin{pmatrix}4 & 9\\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-27 & -8\\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot(-27) & 4\cdot(-8) & 9\cdot(-27) & 9\cdot(-8)\\ \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} & \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} & \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-108 & -32 & -243 & -72\\ \frac{4}{25} & \frac{1}{25} & \frac{16}{25} & \frac{4}{25}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-32 & -72 & -108 & -243\\ \frac{1}{25} & \frac{4}{25} & \frac{4}{25} & \frac{16}{25}\end{pmatrix}$$

3) Determinați parametrii reali $p$ și $q$ știind că

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p & q \end{pmatrix} \quad Y : \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0,1 & \frac{p^2+0,02}{0,2} \end{pmatrix}$$

sunt v.a bine definite

X, Y v.a bine definite

$$\Rightarrow \begin{cases} X \Rightarrow \begin{cases} p > 0 \\ q > 0 \\ p+q = 1 \end{cases} \\ Y \Rightarrow \begin{cases} 0,1 > 0 \\ \frac{p^2+0,02}{0,2} > 0 \\ 0,1 + \frac{p^2+0,02}{0,2} = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$0,1 + \frac{p^2+0,02}{0,2} = 1 \quad | \cdot 0,2$$

$$0,02 + p^2 + 0,02 = 0,2$$

$$p^2 + 0,04 = 0,2 \quad | - 0,04$$

$$p^2 = 0,16 \Rightarrow p = \pm\sqrt{0,16} \Rightarrow p = \pm 0,4$$

cum $p > 0 \Rightarrow p = 0,4$

$$p+q = 1 \Rightarrow 0,4 + q = 1 \Rightarrow q = 0,6$$

$$\frac{p^2+0,02}{0,2} = \frac{0,4^2+0,02}{0,2} = \frac{0,16+0,02}{0,2} = \frac{0,18}{0,2} = 0,9$$

$$\Rightarrow X : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \quad Y : \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

4) Folosind repartițiile v.a. de la 1), 2) calculați

a) $\underline{P(2X+3Y>1)}$

$$2X+3Y : \begin{pmatrix} -5 & -3 & -2 & 0 \\ \frac{4}{25} & \frac{16}{25} & \frac{1}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

$$P(2X+3Y>1) = 1 - P(2X+3Y\le 1) = 1 - P(2X+3Y=-5) - P(2X+3Y=-3) - P(2X+3Y=-2) - P(2X+3Y=0)$$

$$P(2X+3Y>1) = 1 - \frac{4}{25} - \frac{16}{25} - \frac{1}{25} - \frac{4}{25} = 0$$

$\underline{P(2X+3Y>1 \,/\, X>0)}$

$$X\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$P(2X+3Y>1 \,/\, X>0) = \frac{P(2X+3Y>1 \cap X>0)}{P(X>0)}$$

$2X+3Y>1$ și $X>0$ nu sunt neapărat independente

$$\Rightarrow P(2X+3Y>1 \,/\, X>0) = \frac{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{P(2X+3Y>1)}} \cdot P(X>0 \,/\, 2X+3Y>1)}{P(X>0) = 1}$$

$$\Rightarrow P(2X+3Y>1 \,/\, X>0) = 0$$

$\underline{P(2X+3Y<3 \,/\, Y<-2)}$

$$Y\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$P(2X+3Y<3 \,/\, Y<-2) = \frac{P(2X+3Y<3 \cap Y<-2)}{P(Y<-2)}$$

$2X+3Y<3$ și $Y<-2$ nu sunt neapărat independente

$$P(2X+3Y<3 \,/\, Y<-2) = 1 - P(2X+3Y \geq 3 \,/\, Y<-2)$$

$$= 1 - \frac{P(2X+3Y \geq 3 \cap Y<-2)}{P(Y<-2)}$$

$$= 1 - \frac{\overset{0}{=} P(2X+3Y \geq 3)\, P(Y<-2 \,/\, 2X+3Y \geq 3)}{P(Y<-2)}$$

$$= 1 - 0 = 1$$

$$\Rightarrow P(2X+3Y<3 \,/\, Y<-2) = 1$$

$\underline{P(X^2 \cdot Y^3 > 3)} =$

$$X^2 \cdot Y^3 = \begin{pmatrix} -243 & -108 & -72 & -32 \\ \frac{16}{25} & \frac{4}{25} & \frac{4}{25} & \frac{1}{25} \end{pmatrix}$$

$$P(X^2 \cdot Y^3 > 3) = 1 - P(X^2 \cdot Y^3 \leq 3) = 1 - P(X^2 Y^3 = -243)$$
$$- P(X^2 Y^3 = -108) - P(X^2 Y^3 = -72)$$
$$- P(X^2 Y^3 = -32) = 1 - \frac{16}{25} - \frac{4}{25} - \frac{4}{25} - \frac{1}{25} = 0$$

$$\Rightarrow P(X^2 \cdot Y^3 > 3) = 0$$

$\underline{P(X^2 \cdot Y^3 \leq 3)}$

$$P(X^2 \cdot Y^3 \leq 3) = 1 - P(X^2 \cdot Y^3 > 3) = 1 - 0 = 1$$

$$\Rightarrow P(X^2 \cdot Y^3 \leq 3) = 1$$

$$P(2x+3y < 3x-y) =$$

$$2x+3y < 3x-y \quad | -3x+y$$

$$\Rightarrow -x+4y < 0 \Rightarrow 4y-x < 0$$

$$\Rightarrow P(2x+3y < 3x-y) = P(4y-x < 0)$$

$$4y: \begin{pmatrix} -12 & -8 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \qquad x: \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$4y-x: \begin{pmatrix} -12-2 & -12-3 & -8-2 & -8-3 \\ \frac{4}{25} & \frac{16}{25} & \frac{1}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

$$4y-x: \begin{pmatrix} -15 & -14 & -11 & -10 \\ \frac{16}{25} & \frac{4}{25} & \frac{4}{25} & \frac{1}{25} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P(4y-x<0) = P(4y-x=-15) + P(4y-x=-14) + P(4y-x=-11) + P(4y-x=-10)$$

$$= \frac{16}{25} + \frac{4}{25} + \frac{4}{25} + \frac{1}{25} = 1$$

$$\Rightarrow P(2x+3y<3x-y) = 1$$